

MEMÓRIAS  
DA  
ACADEMIA DAS CIÊNCIAS  
DE  
LISBOA

CLASSE DE CIÊNCIAS

TOMO XLVII  
Volume 1

---

**Caracterizações algébricas  
de estruturas combinatórias**

EDUARDO MARQUES DE SÁ

---



ACADEMIA DAS CIÊNCIAS  
DE LISBOA

LISBOA • 2020



# Caracterizações algébricas de estruturas combinatórias

EDUARDO MARQUES DE SÁ<sup>1</sup>

## RESUMO

Introduz-se o conceito de resolução combinatória dum sistema de equações. Caracterizam-se as permutações sem cruzamentos, utilizando os números de inversões dos seus ciclos. O interveniente algébrico é o chamado  $q$ -permanente dum matriz  $A$ , um polinómio que interpola o determinante e o permanente de  $A$ , surgido no contexto das álgebras e grupos quânticos. Mostra-se que certas fórmulas de derivação do  $q$ -permanente caracterizam diversas estruturas sem cruzamentos, entre elas: os digrafos cujos subdigrafos permutacionais não têm cruzamentos, os grafos e as florestas sem cruzamentos. As fórmulas de derivação são utilizadas para provar dois casos particulares dum conjectura, ainda em aberto, sobre a monotonia do  $q$ -permanente dum matriz hermitica positiva definida.

## 1. INTRODUÇÃO

Neste artigo, tratamos da chamada resolução combinatória dum equação  $f(t_1, \dots, t_N)$ , onde  $f$  é um polinómio em  $N$  variáveis comutativas. Um vector  $x = (x_1, \dots, x_N)$  diz-se *genérico* se os seus elementos não nulos são variáveis independentes. O *padrão* de um tal  $x$  é o conjunto dos índices  $k$  para os quais  $x_k$  é não nulo. *Resolver combinatoriamente* a equação  $f(t) = 0$  significa determinar o conjunto dos vectores genéricos  $x$ , tais que  $f(x)$  é polinómio nulo nas variáveis  $x_k$  que são não nulas. Por outras palavras, procuram-se os padrões dos zeros genéricos do polinómio  $f(t)$ . O conceito de resolução combinatória estende-se facilmente a sistemas de equações algébricas, com as devidas adaptações.

Um exemplo simples é o do polinómio simétrico elementar  $e_k(t_1, \dots, t_N)$ , soma de todos os produtos possíveis de  $k$  variáveis distintas de entre as  $t_1, \dots, t_N$ . Por exemplo,  $e_2(t_1, t_2, t_3) = t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1$ .

É fácil ver que  $e_k(x_1, \dots, x_N)$  é polinómio nulo se e só se são nulas mais do que  $N - k$  das coordenadas  $x_i$ . Um problema não tão simples é o seguinte: quais são as matrizes  $X$ , quadradas e genéricas, com determinante nulo? A resposta, isto é, a solução combinatória da equação  $\det X = 0$ , resulta dum famoso teorema de D. König sobre grafos bipartidos:  $X$  tem determinante nulo quando e só quando pode levar-se, por permutações de linhas e colunas, à forma por blocos  $X' = \begin{bmatrix} * & O \\ * & * \end{bmatrix}$  onde  $O$  denota uma matriz nula *com pelo menos um elemento na diagonal principal de  $X'$* .

---

<sup>1</sup> O autor pertence ao Centro de Matemática da Universidade de Coimbra — UID/MAT/00324/2013, financiado pela FCT/MCTES e co-financiado pelo FEDER através do Acordo de Parceria PT2020. CMUC, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Apartado 3008, EC Santa Cruz 3001-501 Coimbra (emsa@mat.uc.pt)

## 2. O $q$ -PERMANENTE

As matrizes a considerar serão, em geral, genéricas e quadradas de ordem  $n$ . O padrão duma tal matriz  $X$  será identificado pelo seu *digrafo*, denotado por  $D_X$ , que tem  $[n] = \{1, \dots, n\}$  por conjunto de vértices, sendo  $(i, j)$  arco de  $D_X$  se e só se  $x_{ij} \neq 0$ .

O polinómio a estudar é o chamado  $q$ -permanente de  $X$ , que se define por

$$\text{per}_q X = \sum_{\sigma \in S_n} q^{l(\sigma)} x_{\sigma_1} x_{\sigma_2} \cdots x_{\sigma_n}.$$

O somatório é estendido ao grupo  $S_n$  das permutações  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$  de  $1, \dots, n$ , denotando  $l(\sigma)$  o número de inversões da permutação  $\sigma$ , aqui chamado *comprimento* de  $\sigma$ . Para  $q = -1$  obtemos o determinante e, para  $q = 1$ , o chamado *permanente* de  $X$ . Assim, o  $q$ -permanente é uma interpolação do determinante e do permanente mediante o parâmetro  $q$ , dito *quântico*. De facto, o  $q$ -permanente surgiu por volta de 1990, na área dos grupos e álgebras quânticas [13,18,21], desempenhando, nessas álgebras, um papel análogo ao desempenhado pelo determinante na álgebra linear. Pela mesma altura [19,20] foi generalizado a parâmetros quânticos multidimensionais. Ocorreu, também, ligado a um problema de física-matemática, em artigo de M. Bozejko e R. Speicher [6]; provam esses autores que, para  $q$  real,  $-1 < q < 1$ , a função em  $S_n$  que transforma  $\sigma$  em  $q^{l(\sigma)}$  é positiva definida. Este resultado foi depois generalizado a grupos de Coxeter pelos mesmos autores [7]. Na sequência do artigo [6], R. Bapat provou, em 1992 [2], que  $\text{per}_q A$  é número positivo, quando  $A$  é definida positiva e  $-1 < q < 1$ , e conjecturou o seguinte: sendo  $A$  definida positiva e não diagonal.

CONJECTURA DE BAPAT:  $\text{per}_q A$  é estritamente crescente com  $q$  no intervalo  $]-1, 1[$ .

A conjectura só foi resolvida para  $n \leq 3$  e para o caso das matrizes tridiagonais [2,11]. Nesta nota consideram-se fórmulas do tipo

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial q} \text{per}_q A = \sum_c l(c) q^{l(c)-1} \prod_i a_{c_i, c_{i+1}} \text{per}_q A(c),$$

inspiradas em fórmula homóloga de A. Lal [11] válida para matrizes tridiagonais. Em (1) a soma estende-se às permutações cíclicas<sup>2</sup>  $c$ , e  $A(c)$  denota a submatriz principal obtida por eliminação das linhas e colunas de  $A$  correspondentes ao ciclo  $c$ . O objectivo é a procura de condições que garantam a positividade da  $q$ -derivada de  $\text{per}_q A$ , para assim se chegar à conjectura de Bapat para matrizes com certos padrões de zeros. De facto, a equação (1) não vale para todas as matrizes, mas vale se certos elementos de  $A$  se anularem (*e.g.*, quando  $A$  é tridiagonal [11]). Se resolvermos combinatoriamente a equação (1), saberemos que padrões de zeros de  $A$  implicam (1), constituindo isso meio caminho andado para a determinação de casos em que vale a conjectura de Bapat.

## 3. ESTRUTURAS SEM CRUZAMENTOS

Desde o trabalho pioneiro de G. Kreweras [10], a pesquisa no domínio das partições e outras estruturas ditas “sem cruzamentos” teve um desenvolvimento notável, bem documentado no excelente artigo

<sup>2</sup> Uma permutação cíclica escreve-se na forma curta,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ , onde  $k$  é a ordem do ciclo.

de compilação, também de índole histórica, de Rodica Simeon [17]. A ubiquidade desse tipo de estrutura, eminentemente gráfica, é evidente, pela ocorrência em áreas tão diversas quanto a combinatória algébrica, a geometria combinatória, em questões de carácter topológico, na teoria das probabilidades, na biomatemática. Simion refere 178 trabalhos e, já neste século, poder-se-iam apontar outros tantos.

Diz-se que dois subconjuntos  $P$  e  $Q$  de  $[n]$  se *cruzam*, quando existem índices  $i, j$  em  $P$  e  $r, s$  em  $Q$ , satisfazendo  $i < r < j < s$  ou  $r < i < s < j$ ; caso contrário, dizemos que não têm *cruzamentos*. Um grafo<sup>3</sup>  $G$  diz-se *sem cruzamentos* se não tem arestas distintas que se cruzam. Uma partição (= cobertura disjunta) de  $[n]$  diz-se *sem cruzamentos* se não tem partes distintas que se cruzam. Uma permutação  $\sigma$  diz-se *sem cruzamentos* se as suas órbitas formam uma partição de  $[n]$  sem cruzamentos. A figura mostra, nas linhas (a), (b) e (c), três estruturas sem cruzamentos: uma permutação, a sua respectiva partição e um grafo. Em cada caso, cada estrutura desenha-se nos dois estilos tradicionais de representação: circular (com os vértices dispostos num círculo, ordenados em sentido directo) e em linha (com os vértices ordenadamente dispostos sobre uma linha recta). Na primeira modalidade, os elementos de ligação (linhas ou flechas) são segmentos de recta; no modelo em linha, são arcos de círculo semelhantes. No caso duma permutação, é obrigatória a representação por um digrafo, dito *permutacional*.

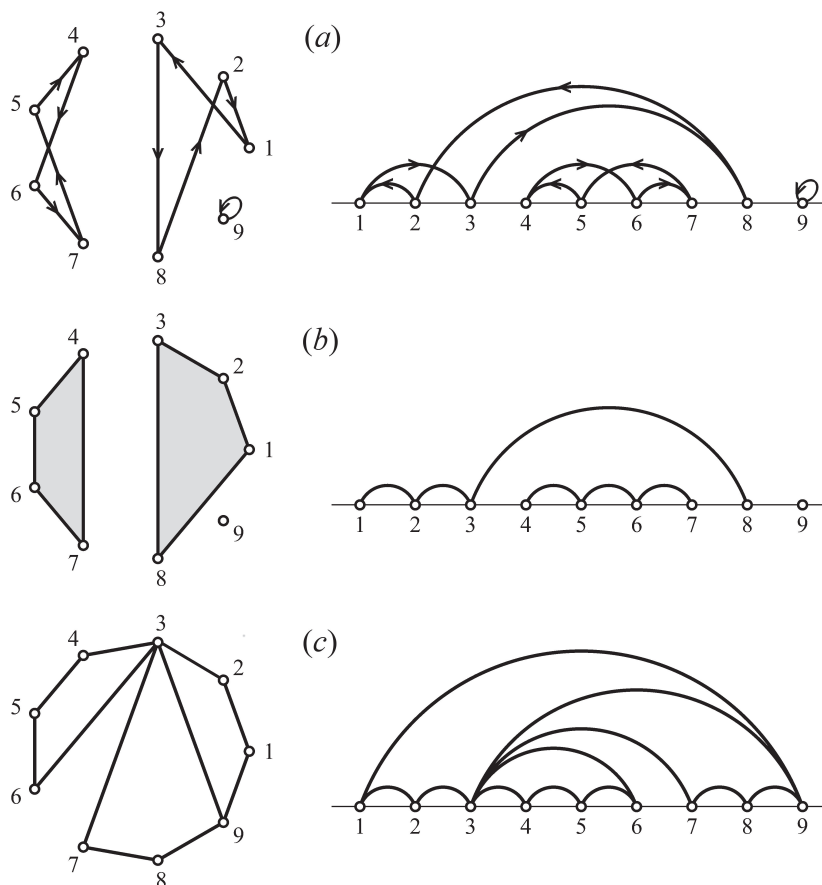


Figura 1.

<sup>3</sup> Os grafos considerados subentendem-se simples, não orientados, sem lacetes e tendo  $[n]$  por conjunto de vértices. Assim, uma aresta é um conjunto  $\{i, j\}$  de vértices distintos.

Na figura (a) representa-se o digrafo duma permutação com três órbitas, correspondentes aos ciclos disjuntos (4675) e (1382) e ao ponto fixo 9, onde o digrafo tem um lacete; a figura (b) mostra, no modelo circular, os invólucros convexos das órbitas da permutação (a); a disjunção desses invólucros, tomados dois a dois, caracteriza as permutações sem cruzamentos. À direita, em (b) está a representação minimal, em linha, da partição em causa: cada parte  $P$  da partição é representada pelo caminho  $i_1 - i_2 - \dots - i_k$  dos elementos de  $P$  por ordem crescente.

#### 4. PERMUTAÇÕES SEM CRUZAMENTOS

Na teoria dos grupos de Coxeter [1,5,9], é dado um grupo  $W$  e um conjunto  $S$  de geradores de  $W$ , ditos *geradores de Coxeter*, ou *reflexões simples* de  $W$ , satisfazendo certa axiomática que aqui não se descreve. Cada elemento  $\sigma$  de  $W$  pode escrever-se como produto de geradores de Coxeter, por exemplo  $\sigma = s_1 s_2 \dots s_k$ . Ao menor  $k$  nestas condições chamamos *comprimento* de  $\sigma$ , que se denota por  $l(\sigma)$ . Os conjugados de geradores de Coxeter designam-se por *reflexões* e o conjunto de todas elas denota-se por  $T$ . Para cada  $\sigma$  em  $W$ , define-se  $T_L(\sigma)$  como o conjunto das reflexões  $t$  que multiplicadas à esquerda de  $\sigma$  lhe diminuem o comprimento,  $l(t\sigma) < l(\sigma)$ . De modo semelhante se define  $T_R(\sigma)$ , mudando a lateralidade,  $l(\sigma t) < l(\sigma)$ . Nesta teoria abstracta, é óbvia a desigualdade  $l(\sigma\tau) \leq l(\sigma) + l(\tau)$ . Sabe-se, também, que ocorre igualdade se e só se  $T_R(\sigma)$  e  $T_L(\tau)$  não se intersectam. No nosso caso, em que  $W$  é o grupo simétrico  $S_n$ , costuma tomar-se para  $S$  o conjunto das transposições de índices vizinhos,  $(i \ i + 1)$ , pelo que  $T$  é o conjunto de todas as transposições. A não intersecção de  $T_R(\sigma)$  e  $T_L(\tau)$  não tem uma leitura simples que faça intervir o carácter funcional e combinatório das permutações. Mas, no caso de permutações disjuntas pode dar-se uma volta interessante ao problema. Cada permutação  $\sigma$  pode representar-se, de modo essencialmente único, como produto

$$\sigma = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r,$$

onde  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$  são os chamados *ciclos (disjuntos) de  $\sigma$* . Com auxílio da não intersecção de  $T_R(\sigma)$  e  $T_L(\tau)$ , prova-se o seguinte [15]:

*Para permutações disjuntas, vale a igualdade  $l(\sigma\tau) = l(\sigma) + l(\tau)$  se e só se nenhum ciclo de  $\sigma$  cruza um ciclo de  $\tau$ .*

Como corolário imediato temos então [15]:

*A permutação  $\sigma$  não tem cruzamentos se e só o comprimento de  $\sigma$  é a soma dos comprimentos dos seus ciclos.*

Em [16] este resultado foi refinado mediante a seguinte identidade, válida para permutações disjuntas:  $l(\sigma\tau) = l(\sigma) + l(\tau) - CC(\sigma, \tau)$ , onde  $CC(\sigma, \tau)$  denota o número de “cruzamentos coerentes”<sup>4</sup> das arestas do digrafo de  $\sigma$  com as do digrafo de  $\tau$ . Esta fórmula não será aqui explorada.

Um obstáculo importante à generalização destes resultados à teoria geral dos grupos de Coxeter é a definição dum conceito correspondente à factorização em ciclos disjuntos. Há tentativas recentes

<sup>4</sup> Isto é, cruzamentos de arcos de igual orientação.

nesse sentido. Por exemplo, no relatório [8] (não publicado), prova-se o seguinte para um sistema de Coxeter finito:

- (2) *Se  $w$  é um elemento quase-Coxeter do grupo  $W$ , existe uma decomposição  $w = w_1 w_2 \dots w_r$ , única a menos da ordem dos factores, tal que os  $w_i$  comutam, são indecomponíveis e vale a identidade  $L_T(w) = L_T(w_1) + \dots + L_T(w_r)$ .*

Aqui, a definição de  $L_T(w)$  faz-se de modo paralelo à de  $l(w)$ , com as reflexões desempenhando o papel dos geradores de Coxeter – usados na definição de  $l(w)$  –, sendo o *comprimento- $T$*  de  $w$  o menor número possível de factores em decomposições  $w = t_1 t_2 \dots t_s$ , com os  $t_i$  em  $T$ . Não cabe aqui explicar o significado de “elemento quase-Coxeter”, mas vale a pena referir que toda a permutação do grupo simétrico é quase-Coxeter, e anotar a existência, em certos grupos de Coxeter, de elementos que não são quase-Coxeter. A *decomponibilidade* dum  $w_i$  significa a possibilidade de factorizar  $w_i = uv$ , de modo não trivial, tal que

$$L_T(w_i) = L_T(u) + L_T(v).$$

A aditividade de  $L_T$  expressa no teorema (2) não adianta muito para o problema em estudo, pois no  $q$ -permanente intervém o comprimento  $l$  relativo aos geradores de Coxeter. No entanto, está aberta a questão interessante de saber quais são os elementos quase-Coxeter que correspondem às permutações sem cruzamentos, isto é, que satisfazem  $l(w) = l(w_1) + \dots + l(w_r)$ .

## 5. SUBMATRIZES E CICLOS ENCAPSULADOS

Para apresentar a resolução combinatória da expansão diferencial (1), precisamos de mais uma definição. Dados dois ciclos disjuntos, dizemos que um deles está *encapsulado* no outro, se todos os índices do primeiro estão entre dois índices consecutivos do segundo (portanto nenhum índice do segundo está entre dois do primeiro). Por exemplo, na figura (a), acima, o ciclo (4675) está encapsulado em (1382), como bem se vê na representação em linha, à direita. De [15] retiramos a seguinte solução combinatória de (1):

**Teorema 1.** *Os digrafos das matrizes genéricas  $A$  que satisfazem (1) são aqueles cujos subdigrafos permutacionais não têm ciclos que se cruzem, nem têm ciclos encapsulados.*

Todo o grafo  $G$  tem um digrafo subjacente, no qual  $(i,j)$  é arco se e só se  $i = j$  ou  $\{i,j\}$  é aresta de  $G$ . Para os fins em vista,  $G$  equivale ao seu digrafo subjacente. A simetria desse digrafo e o facto de ter lacetes em todos os vértices trazem simplificações substanciais; em particular, todo o conjunto de ciclos disjuntos pode estender-se a um subdigrafo permutacional. Dizemos que a aresta  $\{i,j\}$  está sob a aresta  $\{r,s\}$  (supõe-se  $i < j$  e  $r < s$ ) se vale  $r < i < j < s$ . Temos então, de acordo com [15]:

**Teorema 2.**  *$G$  é grafo sem cruzamentos e sem aresta sob aresta, se e só se qualquer matriz  $A$  [simétrica, hermítica] com grafo  $G$  satisfaz a equação (1).*

Se  $A$  for matriz acíclica, isto é, se o seu grafo for uma floresta, na fórmula (1) apenas temos que considerar ciclos  $c$  de ordem 2, digamos  $c = (i j)$ . Então (1) escreve-se

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial q} \text{per}_q A = \sum_{i < j} l(i j) q^{l(i j) - 1} a_{ij} a_{ji} \text{per}_q A_{ij},$$

onde  $A_{ij}$  denota a submatriz que se obtém eliminando as linhas e colunas  $i, j$  em  $A$ .

**Teorema 3.** *G é uma floresta sem cruzamentos nem aresta sob arestas, se e só se qualquer matriz A [simétrica, hermítica] com grafo G satisfaz a equação (3).*

### 6. CARACTERIZAÇÃO DE GRAFOS E FLORESTAS SEM CRUZAMENTOS

Para nos libertarmos do incómodo que causam os ciclos encapsulados, substituímos  $A(c)$  por  $A_c^\spadesuit$  que se obtém de  $A$  anulando os elementos nas linhas e colunas correspondentes aos índices do ciclo  $c$ , excepto os elementos diagonais  $a_{c_i c_i}$  que são substituídos por 1's. Por exemplo, para  $n=6$  e  $c=(236)$ , a matriz  $A_c^\spadesuit$  tem o seguinte aspecto

$$\begin{array}{cccccc} a & & & a & a & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ a & & & a & a & \\ a & & & a & a & \\ & & & & & 1 \end{array}$$

onde os elementos não especificados são nulos e os "a" representam os elementos de  $A$  que não foram anulados, nos seus lugares originais. A equação (1) é então substituída por

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial q} \text{per}_q A = \sum_c l(c) q^{l(c)-1} \prod_i a_{c_i c_{i+1}} \text{per}_q A_c^\spadesuit,$$

Eis uma solução combinatória desta equação [15]:

**Teorema 4.** *D é um digrafo cujos subdigrafos permutacionais não têm cruzamentos, se e só se qualquer matriz A com digrafo D satisfaz a equação (4).*

O caso dos grafos resolve-se de acordo com os princípios já acima aflorados.

**Teorema 5.** *G é um grafo sem cruzamentos se e só se qualquer matriz A [simétrica, hermítica] com grafo G satisfaz (4). Em particular, G é uma floresta sem cruzamentos se e só se qualquer matriz A [simétrica, hermítica] com grafo G satisfaz*

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial q} \text{per}_q A = \sum_{i < j} l(i, j) q^{l(i, j)-1} a_{ij} a_{ji} \text{per}_q A_c^\spadesuit,$$

### 7. CASO DAS MATRIZES HERMÍTICAS

Conforme referido na secção 2, R. Bapat conjecturou que  $\text{per}_q A$  é estritamente crescente com  $q$  no intervalo  $]-1,1[$ , para matrizes  $A$  positivas definidas, não diagonais, e provou a sua conjectura para  $n \leq 3$ . Em [11], A. Lal provou a conjectura de Bapat para matrizes tridiagonais. As fórmulas de derivação acima obtidas permitem provar a validade da conjectura de Bapat nos casos seguintes:

1. Quando  $A$  é positiva definida, não diagonal, e tem por grafo uma floresta sem cruzamentos;
2. Quando  $A$  é real simétrica, positiva definida, não diagonal, com elementos não negativos, e o seu grafo não tem cruzamentos e apenas tem ciclos de ordem par.



Note-se que, os grafos das figuras (b) e (c) da secção 3 satisfazem as condições do caso 2. Para terminar, indica-se de forma esquemática o argumento que prova a conjectura de Bapat no segundo caso. Pelo Teorema 5, vale a fórmula (4). Nesta, só intervêm ciclos  $c$  do digrafo de  $G$  que são de ordens pares. Um tal ciclo tem comprimento ímpar, pelo que  $q^{(c)-1}$  é positivo, com a possível excepção de  $q = 0$ . Claro que o produto dos  $a_{c_i c_{i+1}}$  é positivo. Finalmente, como  $A$  é positiva definida, também  $A_c^\wedge$  o é. Pelo argumento de R. Bapat [2], que assenta no resultado de positividade de M. Bozejko e R. Speicher [6], temos  $\text{per } q A_c^\wedge > 0$ . Assim, todas as parcelas não nulas em (4) são positivas. E pelo menos uma é positiva, dado  $A$  ser não diagonal.

## REFERÊNCIAS

1. D. Armstrong, "Generalized noncrossing partitions and combinatorics of Coxeter groups", *Memoirs of the AMS*, 949, Providence RI, 2009.
2. R. Bapat, "Interpolating the Determinantal and Permanental Hadamard Inequality", *Linear and Multilinear Algebra*, 32 (1992), pp. 335-337.
3. R. Bapat e A. Lal, "Inequalities for the  $q$ -permanent", Second Conference of the International Linear Algebra Society (Lisboa, 1992), *Linear Algebra and its Applications*, 197/198 (1994), pp. 397-409.
4. Ph. Biane, "Some properties of crossings and partitions", *Discrete Mathematics*, 175 (1997), pp. 41-53.
5. A. Bjorner e F. Brenti, "Combinatorics of Coxeter Groups", *Graduate Texts in Mathematics* 231, Springer, 2005.
6. M. Bozejko e R. Speicher, "An example of a generalized Brownian motion", *Communications in Mathematical Physics*, 137 (1991), pp. 519-531.
7. M. Bozejko e R. Speicher, "Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces", *Math. Annalen* 300 (1994), pp. 97-120.
8. T. Gobet, "On cycle decompositions in coxeter groups", *arXiv:1611.03442v1 [math.GR]*, Nov 2016.
9. J. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
10. G. Kreweras, "Sur les partitions noncroisées d'un cycle", *Discrete Mathematics*, 1 (1972), pp. 333-350.
11. A. Lal, *Coxeter Groups and Positive Matrices*, [PhD. Thesis], Indian Statistical Institute, 1992.
12. A. Lal, Inequalities for the  $q$ -Permanent, II, *Linear Algebra and its Applications*, 274 (1998), pp. 1-16.
13. Yu I. Manin, *Quantum Groups and Non-Commutative Geometry*, Publications du C.R.M., Université de Montréal, 1988.
14. M. Noy, "Enumeration of noncrossing trees on a circle", *Discrete Mathematics*, 180(1998), pp. 301-313.
15. E.M. de Sá, "Noncrossing partitions, noncrossing graphs, and  $q$ -permanental equations", *Linear Algebra and its Applications*, 541 (2018), pp. 36-53.
16. E.M. de Sá, "Linear preservers for the  $q$ -permanent, cycle  $q$ -permanent expansions, and positive crossings in digraphs", *Linear Algebra and its Applications*, 561 (2019), pp. 228-252.
17. R. Simion, "Noncrossing partitions", *Discrete Mathematics*, 217 (2000), pp. 367-409.
18. E. Taft e J. Towber, "Quantum Deformation of Flag Schemes and Grassmann Schemes", I. A  $q$ -Deformation of the Shape-Algebra for  $GL(n)$ , *Journal of Algebra*, 142 (1991), pp. 1-36.
19. H. Tagawa, "A multivariable quantum determinant over a commutative ring", *RIMS Kokyuroku*, 765 (1991), pp. 91-103.
20. H. Tagawa, " $q$ -analogues of determinants and symmetric chain decompositions", *Tokyo Journal of Mathematics*, 16 (1993), pp. 311-320.
21. K-W. Yang, " $q$ -determinants and permutations", *The Fibonacci Quarterly*, 29 (1991), pp. 160-163.

(COMUNICAÇÃO APRESENTADA À CLASSE DE CIÊNCIAS  
NA SESSÃO DE 22 DE JUNHO DE 2017)