PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

Análisis del grado de completitud de una organización matemática basada de un recorrido de estudio e investigación sobre el COVID-19 en el nivel superior

Tesis para obtener el grado académico de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Carlos Quispe Palomino

Asesor:

Elvis Bustamante Ramos

Lima, 2022

Informe de Similitud

Yo, Elvis Bustamante Ramos, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado Análisis del grado de completitud de una organización matemática basada de un recorrido de estudio e investigación sobre el COVID-19 en el nivel superior, del/de la autor(a) / de los(as) autores(as) Carlos Quispe Palomino,dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 20%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 30/01/2023
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:
Lima, 31 de enero de 2023

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: Bustamante Ramos Elvis	
DNI:41876216	Firma:
ORCID: 0000-0002-9935-505X	

DEDICATORIA

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

A Dios, por cuidarme y darme fuerzas

Al amor de mi vida Nilda, por su apoyo incondicional

A la luz que ilumina mi camino Thiago, por perderme sus días

A mis padres Segovia y Eliseo, por estar siempre pendientes de mí

Y a todos mis seres queridos que no pude mencionar

AGRADECIMIENTOS

A Dios por despertarme todos los días para cumplir mis metas.

A mi asesor Mg. Elvis Bustamante, por su invalorable apoyo, exigencia, paciencia y consejos para poder realizar esta tesis.

A la Mg. Cintya Gonzales, por sus sugerencias y correcciones que permitieron terminar esta tesis.

Al Dr. Francisco Ugarte, por sus observaciones y aportes que ayudaron mejorar el trabajo de investigación.

A la Dra. Cecilia Gaita, por sus enseñanzas en mi formación profesional y académica recibida.

A la Dra. Jesús Flores Salazar, por sus exigencias para poder alcanzar nuestras metas.

A los profesores de la maestría, por su tiempo y entrega, para compartir sus conocimientos en didáctica de las matemáticas.

A la línea de investigación de Epistemología de las matemáticas en la didáctica de las matemáticas: la antropología del conocimiento matemático y el diseño de secuencias didácticas, por permitirme formarme como investigador.

RESUMEN

En este trabajo de investigación, se pretende realizar un aporte que permita recuperar el sentido de las matemáticas encontrando una razón de ser de los saberes sobre funciones elementales. Esto se debe a que la razón oficial que aparece en el último nivel de la educación secundaria y el primer ciclo de universidad de estos saberes mayormente responde a cuestiones que limitan al estudiante a usar fórmulas o un conjunto de pasos para llegar a la respuesta, mostrando en forma aislada mucho de los saberes de funciones o relacionado a ellos. Por esa razón, en esta investigación, se plantea un problema que permita el proceso de modelización matemática sobre el tiempo de contagio por el virus (COVID-19). Para ello, se diseña e implementa una actividad como propuesta de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, basada en un dispositivo didáctico llamado *recorrido de estudio e investigación*. Esto permitió que los estudiantes del primer ciclo universitario desarrollen una investigación a partir de una cuestión inicial, que generó diversas cuestiones derivadas determinándose una enseñanza por investigación como el *paradigma del cuestionamiento del mundo.* Para ello, se estudia por medio de los *indicadores de grado de completitud*, las organizaciones matemáticas que emergieron en el proceso de modelización de la actividad aplicada. Los resultados fueron que solo dos de los siete indicadores de completitud no llegan a cumplirse por la rigidez en el uso de ostensivos y el escaso uso de tareas inversas.

Palabras clave: Funciones; Teoría Antropológica de lo Didáctico; Recorridos de Estudio e Investigación; Indicadores del Grado de Completitud de una Organización Matemática Local.

ABSTRACT

In this research work, intended to make a contribution that allows recovering the meaning of mathematics by finding a reason for being of knowledge about elementary functions. This is due to the fact that the official reason that appears in the last level of secondary education and the first cycle of university of this knowledge mostly responds to questions that limit the student to using formulas or a set of steps to get an answer, showing in isolation much of the knowledge of functions or related to them. For this reason, in this research, a problem is posed that allows the mathematical modeling process on the time of contagion by the virus (COVID-19). To do this, an activity is designed and implemented as a proposal for teaching and learning mathematics, based on a didactic device called a *study and research path*. This allowed the first cycle university students to develop an investigation from an initial question, which generated various derived questions, determining a teaching by research as *the paradigm of questioning the world*. For this, the mathematical organizations that emerged in the modeling process of the applied activity are studied by means of *the degree of completeness indicators*. The results were that only two of the seven completeness indicators were not met due to the rigidity in the use of ostensive and the scarce use of inverse tasks.

.

Keywords: Functions; Anthropological Theory of Didactic; Study and Research Path; Indicators of the Degree of Completeness of a Local Mathematical Organization.

ÍNDICE

Pág.

RESUMEN iii

ÍNDICE v

ÍNDICE DE TABLAS vii

ÍNDICE DE FIGURAS viii

INTRODUCCIÓN 1

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA 3

1.1. Investigaciones de referencia 3

1.2. Justificación 10

1.3. Pregunta y objetivos de la investigación 15

CAPÍTULO II: FUNCIONES 16

2.1. Análisis epistemológico 16

2.1.1. Época Antigua 16
2.1.2. Edad Media 23
2.1.3. Periodo Moderno 25

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO 31

3.1. Marco teórico 31

3.1.1. La noción de praxeología matemática 33
3.1.2. Los recorridos de estudio e investigación 35
3.1.3. Los Indicadores de grado de completitud 36

CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN Y DISEÑO 39

4.1. Metodología de investigación 39

CAPÍTULO V: DESCRIPCIÓN DE LA PARTE EXPERIMENTAL 43

5.1. Análisis preliminar 43

5.2. Diseño y análisis a priori 68

5.2.1. Diseño Matemático 68

5.2.2. Diseño didáctico 79
5.3. Análisis in vivo 89
CAPÍTULO VI: ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS 123
6.1. Análisis a posteriori 123
CONSIDERACIONES FINALES 131
REFERENCIAS 135
ANEXOS 144

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Descripción de los tipos de tareas de saberes de funciones o relacionados a ellos 45

Tabla 2: Descripción de las técnicas empleadas para el desarrollo de las tareas relacionadas a la noción de funciones 57

Tabla 3: Regla del número total de contagiados transcurridos n días 73

Tabla 4: Regla del número total de contagiados transcurridos n días basado en el número básico de reproducción R0 75

Tabla 5: Presentación del proyecto de investigación y la cuestión generatriz 79

Tabla 6: Estudio de las cuestiones derivadas e inicio de la modelación de la cuestión generatriz 80

Tabla 7: Modelamiento matemático Fase 1: Selección de información e inicio de la modelación matemática de Q_0 82

Tabla 8: Modelamiento matemático Fase 2: obtención de funciones que modelan a Q_0 propuestas por los estudiantes y su comparación con la data 83

Tabla 9: Modelamiento matemático fase 3: modelación del número de contagiados por COVID 86

Tabla 10: Modelamiento matemático Fase 4: obtención de una respuesta a Q_0 87

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Tema de funciones en el Currículo Nacional 12

Figura 2: Temas de funciones en el curso de Matemática de una universidad 13

Figura 3: Relación de los babilonios para calcular el producto de dos números 17

Figura 4: Tablilla de Plimpton 322 18

Figura 5: Relación de Arquímedes sobre el área dentro de una parábola 20

Figura 6: Forma que dibujaban a una parábola los artesanos árabes 22

Figura 7: Versión primitiva de una representación gráfica entre la velocidad y el tiempo realizada por Oresme 23

Figura 8: Simbolización realizada por Nicole Oresme 25

Figura 9: Relación entre PA y PG, que origina la propiedad de producto de potencias de base igual a 2 27

Figura 10: Componentes de una praxeología u organización Matemática 34

Figura 11: Tema de sucesiones 44

Figura 12: Problema del CT donde se emplea notación de función exponencial 44

Figura 13: Número básico de reproducción 72

Figura 14: Mapa de posibles cuestiones y respuestas 78

Figura 15: Formulación de cuestiones derivadas 91

Figura 16: Número de reproducción básico 94

Figura 17: Cómo el confinamiento redujo la tasa de infección en el Reino Unido 94

Figura 18: Casos positivos diarios de COVID-19 en Perú 97

Figura 19: Organización de datos de números de contagiados por día 98

Figura 20: Construcción de sucesión de segundo grado 99

Figura 21: Construcción de una progresión aritmética 99

Figura 22: Expresión del término n-ésimo de la sucesión a_n y b_n hallado por los estudiantes 100

Figura 23: Grafica de la base de datos por Geogebra, como puntos en el plano cartesiano 101

Figura 24: Gráfica de las funciones f y g en Geogebra, que se aproxima a la data 102

Figura 25: Resolución del sistema de ecuaciones, por los métodos de reducción y sustitución 104

Figura 26: Gráfica de la función h 105

Figura 27: Graficas de las funciones f, g y h 105

Figura 28: Tabla para hallar los coeficientes por el método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática) 107

Figura 29: Método de mínimos cuadrados hallado por el equipo de estudio 107

Figura 30: Método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática) 108

Figura 31: Búsqueda de otras funciones que se aproximen a los datos 109

Figura 32: Intento de modelar el número de contagios por COVID-19 mediante la noción de número reproductivo R0 110

Figura 33: Visualizando video de internet que explica el método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática). 112

Figura 34:Tabla del método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática) 113

Figura 35: Se muestra el llenado de los estudiantes de la tabla 113

Figura 36: Sistema planteado por E1, por el método de mínimos cuadrado 114

Figura 37: Sistema planteado por E2, por el método de mínimos cuadrado 114

Figura 38: Grafica de la función cuadrática por el método de mínimos cuadrados 116

Figura 39: Comparación entre las funciones cuadráticas encontradas que se aproximan a la base de datos 117

Figura 40: Estudiando a la función cuadrática, para determinar una respuesta a la cuestión generatriz 119

Figura 41: Planteamiento de una ecuación cuadrática por los estudiantes 120

Figura 42: Resolución de la ecuación cuadrática por los estudiantes 120

Figura 43: Mapa de cuestiones y respuestas del REI implementado 122

INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se postula que los problemas relacionados a la modelización sobre la cantidad de contagiados por un virus determinan una posible razón de ser de los saberes sobre funciones elementales propuestos en la Educación Básica Regular y en el primer ciclo semestral de universidad. De este modo, se atiende al fenómeno didáctico de la pérdida de razones de ser de dichos saberes.

Por ello se plantea la siguiente pregunta de investigación ¿Qué grado de completitud presenta una organización matemática de la noción de funciones por medio de un Recorrido de Estudio e Investigación sobre un contexto de COVID-19 con estudiantes del primer ciclo de universidad?

Por lo cual nuestro objetivo principal es analizar el grado de completitud de la organización matemática de la noción de funciones realizado por medio de un Recorrido de Estudio e Investigación relacionado al tiempo que toma alcanzar la inmunidad de rebaño respecto al COVID–19 con estudiantes del curso de Matemática de la Facultad de Medicina Humana de una universidad

Por ello vamos a seguir la metodología de tipo cualitativa planteada por Barquero y Bosch (como se citó en García et al., 2019), la cual es una adaptación de la metodología de la ingeniería didáctica para el desarrollo de recursos y formación del profesorado donde se indica como vamos a realizar nuestro recorrido de estudio e investigación. El cuál analizaremos mediante los indicadores de grado de completitud.

De acuerdo con esta metodología, se implementó, en un grupo de 2 estudiantes de medicina del primer ciclo de la universidad, un taller donde el docente aplicó un recorrido de estudio e investigación para que los estudiantes puedan resolver una cuestión problemática sobre el tiempo que debe transcurrir para que una población alcance la inmunidad de rebaño tras el contagio por COVID.

Los resultados del análisis mediante los indicadores de grado de completitud fueron que solo dos de los siete indicadores no llegan a cumplirse por la rigidez en el uso de ostensivos y el escaso uso de tareas inversas, lo cual determina cierto grado de completitud de la OM que emergió durante el desarrollo del taller.

A continuación, mostramos la estructura de nuestro trabajo.

En el primer capítulo, se expone la problemática que comienza con la exposición de las investigaciones de referencia. Luego, sigue la justificación, el planteamiento de la pregunta de investigación y los objetivos.

En el segundo capítulo, se realiza un análisis epistemológico de la noción de funciones que se busca encontrar qué tipo de problemáticas en la historia favorecieron al origen de los saberes de funciones y qué nociones se encontraban relacionadas con este.

En el tercer capítulo, se muestran algunas componentes de la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD) que nos ayudarán a realizar el análisis de la actividad matemática planteada como la noción de praxeología, recorrido de estudio e investigación y los indicadores de grado de completitud. También, se aborda una adaptación de la metodología de la ingeniería didáctica empleada para el desarrollo de la investigación

En el cuarto capítulo, se analiza libros de textos de Matemática del quinto año de secundaria y de un curso del primer ciclo de la universidad. Se diseña la cuestión generatriz y se describe un posible recorrido. Luego, se implementa el REI propuesto. Para esto, se elabora actividades a desarrollar en cada sesión del taller de acuerdo con los avances mostrados por los estudiantes. Después, se describe el REI que ha sido implementado en los estudiantes del primer ciclo de la universidad.

Finalmente, en el quinto capítulo, se analiza los resultados del REI implementado mediante los indicadores de grado de completitud de una organización matemática local.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este primer capítulo, se presentará investigaciones respecto a la modelización matemática mediante un recorrido de estudio e investigación, propuestas de aprendizaje sobre las funciones y estudios sobre las dificultades en el aprendizaje.

Posteriormente, con la información recopilada, se justificará la presente investigación. Luego, se planteará la pregunta investigativa y los objetivos trazados.

1.1. Investigaciones de referencia

Investigaciones relacionadas a la modelización matemática mediante un recorrido de estudio e investigación.

Las investigaciones que se muestran a continuación desarrollan la modelación matemática mediante el proceso de estudio e investigación de una cuestión problemática Q. Dicha cuestión y sus derivadas son investigadas por un grupo de estudiantes X, bajo la dirección de un grupo de profesores Y, denominado Comunidad de estudio o Sistema Didáctico *S (X; Y; Q)*. De esta manera, se determina a Q como la razón de ser de nociones, propiedades, teoremas y técnicas.

En trabajos anteriores de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas (MEM) de la PUCP, existen investigaciones sobre la modelación matemática mediante un recorrido de estudio e investigación como se aprecian en Lujan (2019) y Menéndez (2020). Cada uno desarrolla un REI del tipo bidisciplinar, pues abordan los campos de la matemática y la física. Estas investigaciones buscan establecer particularmente razones de ser de las nociones función seno y derivada. Esto nos muestra que en la MEM existe interés por usar un REI como un medio para desarrollar un proceso de modelización matemática.

Por otro lado, en Serrano (2013), aborda cómo enseñar y organizar las matemáticas eficientemente, pues muchos de los estudiantes del ámbito de la economía evaden los cursos de contenido matemático dejándolos para el final de su carrera. Por esta razón, en su trabajo, recurre a un proceso de modelización matemática del estudio e investigación en estudiantes del primer ciclo universitario. El objetivo consistía mejorar la articulación y concepción de contenidos matemáticos relacionados a la economía y empresa (en el primer curso de matemática). El fin era mostrarles la utilidad para estudiar dichos contenidos.

En dicha investigación, se propone articular los conocimientos matemáticos de los estudiantes, mediante el dispositivo didáctico llamado Recorrido de Estudio e Investigación (REI). Esto es una herramienta de Modelación Matemática desarrollado en el marco de la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD), que se define de la siguiente manera:

> Un REI viene generado por el estudio de una cuestión viva con fuerte poder generador, capaz de plantear un gran número de *cuestiones derivadas*. El estudio de dichas cuestiones conduce a la construcción de *respuestas provisionales* que delimitarán el mapa de los posibles recorridos y sus límites. (Serrano ,2013, p.33)

De los resultados de Serrano (2013), en la aplicación y análisis de los REI, desarrollados con estudiantes en los primeros ciclos de universidad (en talleres de Modelización Matemática) se destaca que el nivel de asimilación y comprensión en los estudiantes es muy superior comparado con la clase magistral. Asimismo, afirma que el REI es un dispositivo didáctico idóneo para recuperar el sentido de los saberes matemáticos. Esto se debe a que parte de una cuestión problemática que es la razón de ser de estos saberes. Por ende, facilita la modelización matemática, logrando avances en la ecología del REI (gracias a la continua mejora del diseño de este dispositivo).

Otra investigación similar a la anterior se muestra en Donvito et al. (2017). Se plantea la cuestión problemática relacionada a las finanzas personales, *¿cuál es el mejor plan de ahorros para generar la mayor cantidad de ingresos con un depósito bancario que paga intereses?* Esto conduce a estudiar variados contenidos matemáticos entre ellos a las funciones que otorga una razón de ser para estos.

Este trabajo nos ayudará a desarrollar nuestra investigación por estar relacionado a la razón de ser de los saberes relacionado a funciones y contribuir al aprendizaje de los conceptos matemáticos a partir de la investigación. Donvito et al. (2017) muestran la necesidad de cambiar la forma tradicional de enseñar matemáticas en la escuela secundaria a enseñar matemáticas por investigación. Esto se debe a que es percibida poco útil para la formación ciudadana e incluso para los docentes es complicado encontrar aplicaciones importantes en la vida real. Es decir, lo que se enseña, al parecer, carece de sentido y trae como consecuencia que estos contenidos se estudien solo, porque lo señala el currículo y hacen que el estudiante pierda el interés.

Por ello, es que se propone recuperar el sentido del estudio de las funciones, particularmente la lineal y exponencial mediante la enseñanza de preguntas, lo cual define una enseñanza por investigación, que es una de las características en el desarrollo de un REI. Esto es una de las razones para desarrollar la presente investigación, la cual se usará este dispositivo didáctico.

En el trabajo Donvito et al. (2017), se describe el diseño de un REI que ha ido mejorando en el transcurso de su implementación en varias instituciones durante un largo tiempo con estudiantes del nivel secundario. Dicho diseño parte de la pregunta Q_0: *¿cuál es el mejor plan de ahorros que genera la mayor cantidad de ingresos con un depósito bancario que paga intereses?* La pregunta es formulada por el docente quien se limita a orientarlos durante la investigación como un director de un equipo de investigación y no como una fuente de información privilegiada. Esta pregunta inicial origina múltiples preguntas a estudiar, y las respuestas a estas preguntas hacen necesario estudiar nuevos saberes relacionados a una gran variedad de contenidos matemáticos (función lineal, exponencial y logaritmo).

De manera similar Rojas y Sierra (2021), diseñan e implementan un REI en estudiantes del nivel secundario. Para esto, parten de un tipo de problema que deben resolver. La búsqueda de la solución motiva el uso de ciertos contenidos geométricos, que establece de este modo una razón de ser para dichos contenidos. Este trabajo ubica al problema sobre el diseño y construcción de un envase de litro como una de las razones de ser de los saberes geométricos. Se pretendía que dicha razón llegara articular saberes de geometría y de funciones, pero solo se pudo constatar la articulación entre saberes de la geometría plana y del espacio.

Por lo expuesto, se considera al REI como un dispositivo didáctico adecuado para la modelización matemática. Es decir, para el proceso que parte de cuestiones problemáticas planteadas por un grupo de estudio, los cuales constituyen la razón de ser de las actividades matemáticas que es necesario realizar para obtener una respuesta. En dicho proceso, se realiza fundamentalmente la actividad de producir, transformar, interpretar y hacer evolucionar modelos matemáticos con el fin de brindar respuestas a las cuestiones problemáticas como se indica en Serrano (2013), y García y Sala (2020).

Por otro lado, se analizará la actividad matemática realizada por los estudiantes mediante los indicadores del grado de completitud de una organización matemática local (OML). Esto significa, según Bosh, Fonseca y Gascón (2004), analizar dos aspectos. La primera son las características del proceso de reconstrucción de la OML; es decir, la dinámica del desarrollo de estudio cuyo producto final es dicha OML. La segunda son las propiedades de su estructura; es decir, los componentes de la OML (tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías) así como de las relaciones entre ellos.

Investigaciones relacionadas a propuestas de aprendizaje de contenidos matemáticos relacionado a funciones.

Existen investigaciones donde se diseñan actividades matemáticas para el aprendizaje de las funciones. Un ejemplo de ello es Flores (2019), que muestra una secuencia de actividades para la construcción de la función exponencial con estudiantes del quinto de secundaria.

Flores (2019) usa la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) con el objetivo de identificar los aportes de las situaciones didácticas diseñadas respecto a la función exponencial. Evidencia que los estudiantes logran la construcción de un tipo de función exponencial, y la identificación de características de crecimiento y decrecimiento. Además, indica la ventaja en el modelamiento con la función exponencial comparado con las funciones afín, lineal o cuadrática. Asimismo, se señala que los estudiantes prefieren desarrollar tales actividades de construcción de la función exponencial en vez de haber visto la teoría y luego resolver los ejercicios.

Otra investigación orientada a la enseñanza de funciones, particularmente la función exponencial, se aprecia en Reyes et al. (2017). Usa la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD) para analizar praxeologías que emergen al desarrollar actividades sobre la función exponencial con estudiantes de enseñanza media en Colombia. En dicha investigación, se considera importante elaborar y perfeccionar actividades que permitan el uso de técnicas que pueda aplicar el estudiante al intentar resolver un problema (donde las nociones descubiertas sean aplicables a un contexto real) la cual determine una praxeología que se mantenga en el tiempo y que sea usada para construir otras praxeologías.

Por otro lado, Reyes et al. (2017) señalan que el desarrollo de las tecnologías en la actualidad ha permitido obtener cualquier tipo de información casi instantáneamente. Por ende, la idea de que el estudiante quien guarda mayor cantidad de información sea más inteligente ha quedado desplazada por las habilidades de plantear y resolver problemas mediante un análisis apropiado, y la habilidad para comunicar al resto los resultados obtenidos.

Asimismo, Reyes et al. (2017) mencionan que los procesos de pensamiento como deducir, inducir, argumentar, interpretar, ejemplificar, proposicionalizar (formar proposiciones y debatir si estas son verdaderas o falsas) y otros, en muchos casos, no son enseñados. Estos puntos son importantes en el sistema educativo del Perú, ya que representan desempeños establecidos en los niveles de desarrollo de competencias (estándares de aprendizajes) que se muestran actualmente en el Currículo Nacional (Ministerio de Educación, 2016).

Además, Reyes et al. (2017) indican que las *operaciones intelectuales* son las habilidades y acciones que realiza una persona para poner en funcionamiento a los instrumentos de conocimiento, por ejemplo, interpretar, deducir, argumentar, ejemplificar, comprender situaciones o ideas, etc. Asimismo, manifiestan que los *instrumentos de conocimiento* son aquellos que uno conoce y le sirve para realizar *operaciones intelectuales*. Por ejemplo, el estudiante que use sus conocimientos de la noción de función cuadrática o sus propiedades que pueda resolver problemas donde se le pida la ganancia (expresada en función cuadrática dependiente del tiempo transcurrido en días) máxima de una empresa interpretando la ubicación del vértice de la parábola (gráfica de la función cuadrática) como el valor máximo de la ganancia de la empresa evidencia que utiliza su conocimiento sobre la función cuadrática como un instrumento de conocimiento.

Por otro lado, Reyes et al. (2017) mencionan que un profesor quien *enseña a pensar* es aquel que promueve la inteligencia que fortalece las *operaciones intelectuales* en sus estudiantes. Esto es lo que buscar impulsar la educación, ya que tiene como objetivo el permitir que toda persona debe ser productivo en sus talentos y habilidades, lo que implica que cada uno sea quien dirija su proyecto de vida. En tal sentido, en nuestro trabajo de investigación, se busca promover la inteligencia que fortalezca las *operaciones intelectuales* en el estudiante.

Por otro lado, el diseño de una actividad matemática centrada en el modelamiento de funciones posee aplicaciones importantes como los modelos de funciones exponenciales, que son usados para resolver problemas de la vida cotidiana, de finanzas, de economía, de estadística de ingeniería, de Medicina, de Química, de Física, de Astronomía, de Geología, entre otros. Estos generan interés en el estudiante como afirman Reyes (2015) y Flores (2019).

Otras investigaciones desarrolladas en el nivel universitario como en Camacho, Valenzuela y Caldera (2017) tienen como objetivo que los estudiantes de ingeniería sean capaces de identificar gráficamente las funciones exponenciales y logarítmicas, que modelan el fenómeno de capacitancia. Usan el modelo praxeológico extendido, propuesto en Castela y Romo-Vásquez (2011). Este consiste en incorporar a la TAD un componente llamado tecnología práctica para generar técnicas prácticas que no aparecen en las tecnologías teóricas (teoremas, definiciones, etcétera) con el fin de promover técnicas matemáticas que contribuyen al desarrollo de la tarea.

Como ejemplo de una técnica práctica Camacho et al. (2017) mencionan que los estudiantes del nivel superior manejan usualmente el software Wolfram para resolver ecuaciones diferenciales que se proponen como ejercicios. Dicha aplicación muestra la solución de la ecuación con pasos incompletos, generando desconcierto. En este contexto, Wolfram es considerado una técnica práctica, que utilizada convenientemente favorece la comprensión de los problemas.

En el presente trabajo, se apoyará también en un software que pueda ser usado como una herramienta por los estudiantes en el desarrollo de las actividades que se irán proponiendo en el REI. Este software es el Geogebra, donde una de sus múltiples funciones es ayudar a la visualización de las gráficas de funciones. Esto ayudará a responder ciertas cuestiones que se planteen a los estudiantes durante el REI. No obstante, es importante precisar que no es nuestro foco de estudio tomar al Geogebra como una técnica práctica.

Por otro lado, existen dificultades en el aprendizaje sobre funciones como indica Henao et al. (2018). Las dificultades y errores que tienen los estudiantes sobre el tema de funciones (como la función exponencial) radican en la simbología y en el uso de propiedades propias de la regla de la función al momento de representarlas algebraica o gráficamente.

Algunos de estas dificultades y errores son los siguientes:

1. Cuando el estudiante realiza trazos de líneas rectas al graficar funciones exponenciales
2. Cuando relaciona a la función exponencial creciente $f(x) = a^{mx+n} + b$ con $f(x) = a^{mx}+a^{n} + b$.
3. Cuando considera al exponente como una constante en una función exponencial

En resumen, los trabajos descritos anteriormente nos señalan el interés de diseñar actividades dirigidas a los estudiantes, que permiten establecer una razón de ser para las nociones matemáticas como la noción de funciones (donde varios de esos trabajos indican la relevancia sobre el tema de funciones) que enfatizan sus aplicaciones en el mundo real. Además, señalan varias dificultades y errores cuando a los estudiantes se les presenta el tema de funciones.

Por lo tanto, es necesario desarrollar una enseñanza distinta a la tradicional, que permita dar sentido al estudio de las nociones matemáticas, particularmente a las de funciones. La idea es que estas nociones logren articularse con otras nociones matemáticas y que se muestren útiles para la sociedad. Por ello, un medio adecuado para hacerlo, según nuestra indagación, es mediante una actividad de modelización matemática por medio de un REI.

A continuación, justificaremos nuestro trabajo con la investigación bibliográfica realizada anteriormente.

1.2. Justificación

La matemática es una de las disciplinas que forman parte de nuestro legado cultural. Forma parte importante en la enseñanza de todos los niveles educativos. Permite conocer las cuestiones que impulsan el uso de saberes matemáticos, que logran la conexión y articulación entre los saberes que se enseñan. Esto da sentido a lo que se propone para ser enseñado como señala Rojas y Sierra (2021).

Según Donvito et al. (2017), la cultura humana crea conocimientos, que responden a problemáticas importantes como los saberes matemáticos. Esto constituye una razón de ser para dichos saberes.

Sin embargo, actualmente, se afronta una ausencia de las razones de ser de los saberes matemáticos como señala Rojas y Sierra (2021). Por ejemplo, la razón del porqué recurrir a los saberes de funciones están ligados, en la mayoría de las veces, a actividades sin una aplicación a la vida real. Lamentablemente, se usa a las funciones como una fórmula para que el estudiante halle un valor o valores para reemplazar. Además, existen actividades que se les pide determinar alguna característica de la función como su dominio o rango y tengan que seguir algún algoritmo para llegar a una respuesta. Esto muestra un sentido superficial de estos saberes y poco útil como señalan también Lujan (2019) y Donvito et al. (2017).

En consecuencia, los contenidos matemáticos se estudian en bloques separados o poco relacionados entre sí. Un ejemplo de ello son los saberes de funciones y sucesiones que se muestran en libros de texto del gobierno Minedu (2017a) y Minedu (2017b) que al finalizar la unidad temática se continúa con un tema nuevo. Esto causa que el estudiante piense que el tema anterior ya no le es útil o no logre comprender por qué se les enseña estos saberes como señala Donvito et al. (2017).

Moraga et al. (2015) mencionan que los estudiantes, quienes inician estudios en la universidad, tienen sus mayores dificultades en los cursos de matemáticas, pues se requiere el uso de un lenguaje simbólico y pensamiento lógico para conseguir un aprendizaje significativo. Además, nos aclaran que los conocimientos adquiridos por los estudiantes en el nivel medio necesitan ser reforzados con un enfoque más actual e integrador y se despojen de sus concepciones erróneas como se menciona a continuación: (a) un número negativo elevado al exponente cero es -1 o el mismo número negativo, (b) el cuadrado de la suma de dos números es la suma de cuadrados de dichos números, entre otros (Gamboa et al, 2019).

Además, los estudiantes de las instituciones del nivel superior presentan dificultades para aprobar los primeros cursos de la universidad. Según Serrano (2013), indica que, en España, particularmente por motivos de la transición de la secundaria a la universidad, es complicado para el estudiante promedio comprender las matemáticas, principalmente, por la forma cómo las matemáticas fueron enseñadas en el nivel secundario. Por ende, se presenta nociones desarticuladas, aisladas y carentes de sentido como se señala también en Flores (2019) y Donvito et al. (2017).

En la misma línea, Duche et al. (2020) mencionan que los estudiantes, en los primeros ciclos de universidad en el Perú, tienen dificultades para adaptarse a la vida universitaria, donde la causa más importante académicamente es la poca capacidad de razonamiento lógico matemático, acompañado de la falta de habilidad para resolver operaciones matemáticas. Por esta razón, algunas instituciones universitarias establecen como solución desarrollar un ciclo de nivelación antes del ingreso o llevar cursos de nivelación después del ingreso que implica contenidos matemáticos con el fin de que el estudiante tenga cierta base para afrontar sus primeras clases en la universidad.

Por lo expuesto, se evidencia la necesidad de implementar y mejorar las estrategias educativas (en particular en el primer ciclo de universidad) para una mejor adaptación de los estudiantes en cursos de contenido matemático. Por esta razón, nuestro trabajo implementa un REI con estudiantes del primer ciclo de universidad, ya que favorece a la articulación de nociones (Serrano, 2013). En nuestro caso, se realiza relacionado a los saberes de funciones. Además, el REI parte de una cuestión que, da sentido a los saberes que emergen en su desarrollo. Esto permitirá en los estudiantes una razón para estudiar estas nociones (Donvito et al., 2017).

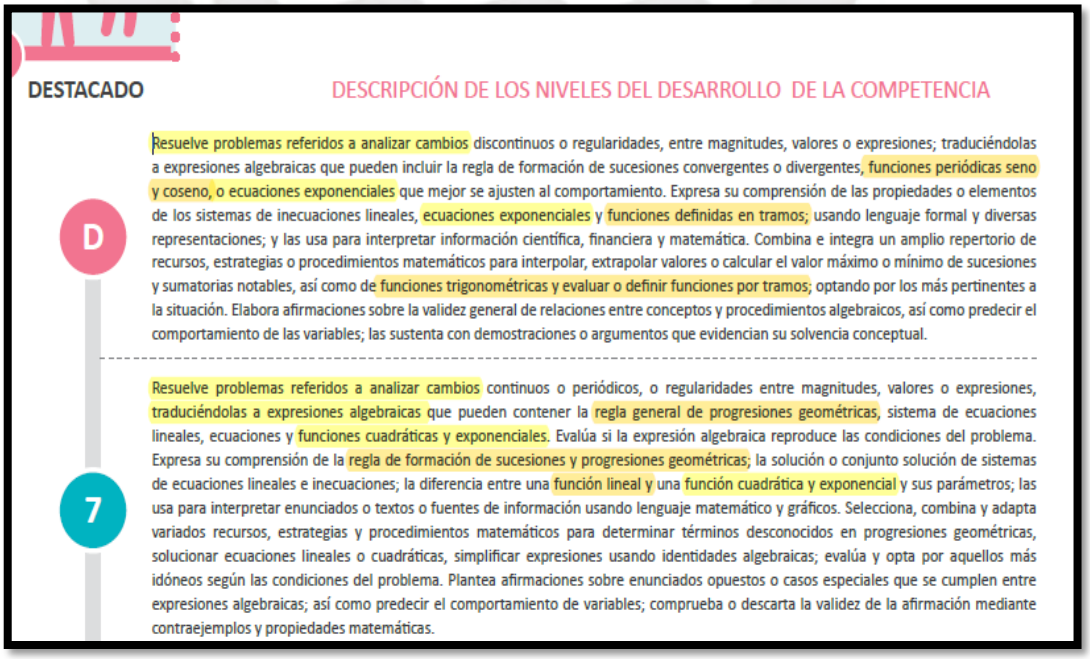
Asimismo, en esta investigación, se postula una razón de ser para los saberes de funciones mediante un problema que parte de una pregunta que permite un proceso de modelización matemática en un contexto de la vida real. De este modo, se busca la articulación de saberes matemáticos relacionado a funciones y determine un aprendizaje de las matemáticas con mayor significado. Para esto, es relevante que los estudiantes sientan satisfacción cuando puedan relacionar cualquier saber matemático con actividades o trabajos de la vida cotidiana como se indica también el currículo peruano (Rutas de Aprendizaje) (Minedu, 2013).

Desarrollando dicha razón de ser sobre el tema de funciones, se contribuirá en dar sentido el estudio de funciones (las funciones lineal, cuadrática, exponencial entre otras). Esto se debe a que muestran relevancia, ya que forma parte del currículo institucional, que deben seguir los estudiantes tanto del nivel secundario como del nivel universitario. Su estudio es más detallado en las diversas carreras universitarias, como ingenierías y ciencias básicas.

En el Currículo Nacional (Minedu, 2016), se evidencia que, en el nivel secundario, el tema de funciones aparece dentro de las capacidades que deben desarrollar un estudiante en los niveles 6, 7. La competencia destacada indica lo siguiente: “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”. Además, se evidencia la capacidad siguiente: “Resuelve problemas relacionado a analizar cambios traduciéndose a expresiones algebraicas que contengan reglas del tipo función exponencial, función periódica, función cuadrática, funciones lineal y afín, evaluar si la expresión cumple las condiciones del problema expresar comprensión de su regla de formación, etc.”. Esto se reafirma con la Figura 1.

Figura 1

Tema de funciones en el Currículo Nacional.


DESTACADO

DESCRIPCIÓN DE LOS NIVELES DEL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA

D

Resuelve problemas referidos a analizar cambios discontinuos o regularidades, entre magnitudes, valores o expresiones; traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden incluir la regla de formación de sucesiones convergentes o divergentes, funciones periódicas seno y coseno, o ecuaciones exponenciales que mejor se ajusten al comportamiento. Expresa su comprensión de las propiedades o elementos de los sistemas de inecuaciones lineales, ecuaciones exponenciales y funciones definidas en tramos; usando lenguaje formal y diversas representaciones; y las usa para interpretar información científica, financiera y matemática. Combina e integra un amplio repertorio de recursos, estrategias o procedimientos matemáticos para interpolar, extrapolar valores o calcular el valor máximo o mínimo de sucesiones y sumatorias notables, así como de funciones trigonométricas y evaluar o definir funciones por tramos; optando por los más pertinentes a la situación. Elabora afirmaciones sobre la validez general de relaciones entre conceptos y procedimientos algebraicos, así como predecir el comportamiento de las variables; las sustenta con demostraciones o argumentos que evidencian su solvencia conceptual.

7

Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores o expresiones, traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; así como predecir el comportamiento de variables; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas.

Nota. Nociones de funciones en el Currículo Nacional. Fuente: Minedu (2016).

En el nivel universitario, el tema de funciones aparece en cursos del primer ciclo, denominados Matemática Básica, Fundamentos de la Matemática o Matemática I, etc. Por ejemplo, en el curso de Matemática, de los estudiantes del primer ciclo de Medicina Humana de una universidad del Perú, se aprecia el tema funciones, que abarcan contenidos sobre la función inyectiva, inversa, funciones especiales, exponencial, logaritmo, por tramos y propiedades sobre estas como se muestran en la Figura 2.

Figura 2

Temas de funciones en el curso de Matemática de una universidad.

SESION	CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE
7	Funciones y Algebra de funciones - Dominio y rango de una función - Funciones especiales en R - Operaciones con funciones Eduardo Espinoza; Matemática Básica. Editorial Servicios Gráficos.2008	- Identifica la función y determina el dominio y rango de ella. - Gráfica e identifica las diferentes funciones especiales - Resuelve las diferentes operaciones con funciones.	**Sesión en línea 7:** Exposición - diálogo Lectura, cuestionario, clase grabada y foro. **Tarea Actividad aplicativa 7:** Aplican Funciones y Algebra de funciones. Lectura, cuestionario, exposición y prueba.
8	- Composición de funciones. - Inversa - Funciones exponenciales. - Función exponencial, dominio y rango - Función logarítmica. - Funciones logarítmicas, dominio y rango. - Gráfico de las funciones - Aplicaciones. Eduardo Espinoza; Matemática Básica. Editorial Servicios Gráficos.2008	- Identifica y resuelve la composición de una función. - Identifica funciones inyectivas, graficándolos en el plano cartesiano o en forma sagital. - Identifica, gráfica y resuelve a las funciones inversas. - Identifica y aplica las diferentes propiedades de la teoría de exponentes y logarítmicas en los ejercicios y problemas de las guías. - Identifica y aplica propiedades para el cálculo del dominio y rango de las funciones exponenciales y logarítmicas. - Grafica a la función exponencial y logarítmica e identifica mediante el grafico el dominio y rango de la función. - Identifica y resuelve las funciones en las diversas situaciones problemáticas de la vida diaria	**Sesión en línea 8:** Exposición - diálogo Lectura, cuestionario, clase grabada y foro. **Tarea Actividad aplicativa 8:** Aplican Funciones exponenciales. Lectura, cuestionario, exposición y prueba.

Nota. Desarrollo de contenidos sobre funciones del curso de Matemática, Facultad de Medicina Humana. Fuente: USMP (2022).

Además, desde la perspectiva del conocimiento de una persona, los saberes de funciones poseen mucho valor, debido a las diferentes aplicaciones que se le puede aplicar en la vida diaria. Por ejemplo, están los temas de Matemática Financiera (como es el caso de los depósitos a plazos, préstamos, e intereses y otros) los cuales estamos familiarizados (Donvito et al., 2017). Además, se presentan en problemas relacionados a la economía, la estadística, la ingeniería, la medicina, la química, la física, la astronomía, la geología, y otros (Reyes, 2015).

Por otra parte, en la línea de investigación de la didáctica de las matemáticas, se han desarrollado investigaciones relacionadas propuestas de razones de ser de saberes matemáticos mediante un proceso de modelización. Esto implica que el estudiante recurra a una gran variedad de saberes de las matemáticas, recuperando el sentido del estudio de las matemáticas como las realizadas por Rojas y Sierra (2021), Serrano (2013), Lucas et al. (2017), Donvito et al. (2017), entre otros. Por ello, es importante escoger a los *recorridos de estudio e investigación* para una modelización matemática en torno a los saberes de funciones. Ello nos permitirá establecer una razón de ser para dichos saberes. Esto significa desde la perspectiva de la TAD, realizar una enseñanza fundamentalmente a partir de las cuestiones a las que responde dicho saber, lo que determina la razón de ser de dicho saber según (Rojas y Sierra, 2021).

Por ello, los REI que son un dispositivo didáctico que facilita la modelización matemática (basada en la pedagogía que Chevallard denomina la *Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo)*. Es decir, la enseñanza es a través de preguntas planteadas al estudiante, lo que permitirá al alumno construir su conocimiento y dar sentido a las matemáticas mediante un estudio por investigación. La idea es que el estudiante presente una mejor concepción sobre las nociones matemáticas que se quieren ser enseñados (Donvito et al., 2017).

Por lo tanto, se plantea diseñar un REI para que sirva de apoyo a los docentes que enseñan cursos de Matemáticas en el último año del nivel secundario o en los primeros ciclos de universidad, y en cursos que hagan uso de las nociones de funciones y las que se lleguen a articular en el proceso de modelización de nuestra propuesta. La idea es que puedan mostrar a sus estudiantes una posible razón de ser sobre los saberes de funciones, que dará sentido a lo que se está enseñando.

Al término de este trabajo de investigación, se diseñará una actividad matemática, que podrían usar los docentes de diferentes instituciones educativas, al tener una razón de cuando uno puede usar los saberes de funciones y a qué cuestiones responden. Además, la implementación de este REI permitiría tener en sus manos una herramienta que articule los saberes de funciones en el nivel secundario o universitario mediante una enseñanza de preguntas lo que se define como una enseñanza por investigación. Al respecto, Donvito et al. (2017) señala: “La búsqueda, construcción y difusión de posibles respuestas fundadas a preguntas relevantes, es básicamente lo que hace la ciencia. Pero también es lo que hace un ciudadano que responsablemente toma decisiones acerca de la sociedad en la que vive” (p. 7).

Además, el aporte de diseñar una actividad mediante un dispositivo didáctico como el REI, genera una herramienta idónea para la enseñanza de la noción de funciones, ya que esta forma de enseñanza motiva al estudiante a dejar de ser un simple espectador como en un museo cuando se visita a las obras o monumentos, que determina una pedagogía *monumentalista* (Chevallard, 2005, citado por Otero et al., 2013), y convertirse en el arquitecto de su propio conocimiento.

De esta manera, nuestra investigación muestra su relevancia, sumándose a las demás investigaciones de diseño de actividades mediante el REI. Esto sirve de apoyo a las demás instituciones educativas y a posteriores investigaciones en el desarrollo y diseño de otras actividades relacionadas a la noción de funciones elementales u otros objetos matemáticos en distintos niveles de la educación.

1.3. Pregunta y objetivos de la investigación

A continuación, se presentará nuestra pregunta de investigación:

¿Qué grado de completitud presenta una organización matemática de la noción de funciones por medio de un Recorrido de Estudio e Investigación sobre un contexto de COVID-19 con estudiantes del primer ciclo de universidad?

Objetivo Principal:

Analizar el grado de completitud de la organización matemática de la noción de funciones realizado por medio de un Recorrido de Estudio e Investigación relacionado al tiempo que toma alcanzar la inmunidad de rebaño respecto al COVID–19 con estudiantes del curso de Matemática de la Facultad de Medicina Humana de una universidad

Objetivos específicos:

1. Identificar las praxeologías matemáticas que se podrían presentar en el diseño del REI propuesto
2. Identificar las praxeologías matemáticas asociadas al contenido que se presente en la implementación del REI
3. Analizar los indicadores de grado de completitud de la organización matemática de la noción de funciones en base a los resultados del REI implementado

CAPÍTULO II: FUNCIONES

Este capítulo, se sumerge en la historia de las matemáticas para determinar de qué forma aparece la noción de funciones, qué tipo de problemáticas motivan el uso de este objeto matemático e identificar las nociones que favorezcan su emergencia. La finalidad es establecer una base para el diseño de la actividad didáctica que pretendemos proponer entorno a los saberes de funciones.

2.1. Análisis epistemológico

A continuación, organizaremos la evolución de la noción de la función como se realiza en Sastre et al. (2008) en tres periodos: Época Antigua, Edad Media y Periodo Moderno

2.1.1. Época Antigua

En este primer periodo, Sastre et al. (2008) mencionan que no se muestran evidencias de la idea abstracta de variable, que es un elemento de la noción función. Esto se debe a las cantidades que se describían verbalmente o por medio de gráficos. Sin embargo, Ruiz (1994) señala que los términos (longitud, anchura, área y volumen) servían para ese fin, por ejemplo, $7\, longitud + 5\, longitud = 12\, longitud.$

Otras nociones cercanas a la noción de función son en el conteo que evidencia una correspondencia entre un conjunto de objetos y una secuencia de números. Esta acción parece ser evidente en las personas de la antigüedad. Por ejemplo, el hombre prehistórico dejó marcas simples en huesos, que pudo ser producto de haber contado algo. Esto implicaría que la noción de función tiene su origen en el desarrollo de la noción número (Sastre et al., 2008).

Por otro lado, Sastre et al. (2008) indican que los babilonios (2000 a.C. – 500 a. C.) ya habían conseguido construir varias tablas numéricas, donde se presentaba el resultado de multiplicaciones y divisiones, de cuadrados, de cubos y raíces cuadradas y cúbicas. En cambio, los egipcios, en el Papiro de Rhind (Egipto 1700 a.C.), muestran tablas de descomposición de fracciones, que era usada para facilitar los cálculos de la época (Ugalde, 2014).

Por ello, se observa un aspecto elemental de la noción de función, llamado concepto de dependencia entre cantidades, que están presentes en las tablas de arcilla de los babilonios y en los papiros egipcios (Ugalde, 2014). Por ejemplo, los babilonios muestran en sus tablas cómo calculaban el producto de dos números, donde este producto dependía del valor de los cuadrados de los números y la suma o diferencia de estos (Ugalde, 2014). Esto se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Relación de los babilonios para calcular el producto de dos números.

$$\boxed{ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} \quad \text{y} \quad ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4},}$$

Nota. El producto de dos números depende de los cuadrados de los números y de la suma o diferencia. Fuente: Ugalde (2014, p. 5)

Además, las representaciones en estas tablas tienen forma de columnas como las usadas actualmente para representar a funciones de una variable real $y = f(x)$ (Ugalde, 2014).

Por lo descrito, los babilonios aún no llegan a usar la noción función como se usa en la actualidad. Sin embargo, Sartre et al. (2008) y Ugalde (2014) mencionan que se evidencian estudios sobre problemas donde se encontraban implícito nociones que se aproximaban a la noción de función en tablillas: la variación de la luminosidad de la luna en intervalos de tiempo iguales, períodos de visibilidad de un planeta respecto a su posición relativa con el sol y la relación pitagórica en ternas de números positivos a, b y c en la Tablilla de Plimpton (Figura 4), que cumple $a^2 + b^2 = c^2$ (Mansfield y Wildberger, 2017). Estos tienen la idea de *funcionalidad*, es decir, de dependencia o correspondencia, de relación entre cantidades (Ferrari y Farfán, 2004).

Figura 4

Tablilla de Plimpton 322.

Nota. En esta tablilla babilónica aparecen ternas pitagóricas como la terna 119, 120 y 169. Fuente: Universidad de Nueva Gales del Sur/ Andrew Kelly (s.f.)

Otra noción anterior a la noción de función es la noción de *fórmula*, cuya interpretación es que a diferentes valores o variaciones de una cantidad inicial producen diferentes resultados de una cantidad final, donde los babilonios y egipcios no llegaron a proponer dicho concepto (Ugalde, 2014).

Del mismo modo, Ruiz (1994) afirma que los babilonios no expresan sus resultados de forma general, pues sus tablillas solo presentan casos concretos, sin formulaciones genéricas. Por ejemplo, los egipcios usaban estrategias diferentes para resolver situaciones semejantes como el cálculo del área de un círculo. La estrategia, para hallar el área del círculo de radio 3, es distinta a la estrategia para hallar el área del círculo de radio 4. Sin embargo, se evidencia la noción de dependencia, en el sentido que al variar la longitud del radio varía también el área del círculo (Ugalde, 2014)

Por otra parte, Mesa (2008) señalan que los babilonios presentaban situaciones relacionadas a nociones cuádricas, es decir, relacionadas a la noción de función cuadrática. Por ejemplo, revisemos la siguiente situación:

“Hallar un número talque sumado a su inverso dé un número dado” (Kline, 1972 como se citó en Mesa, 2008)

Esta situación implica formular una ecuación cuadrática, acercándose de esta forma a expresiones que se usan en una función cuadrática.

Por otro lado, Ruiz (1994) indica que los griegos de esta época determinan que el estudio de los objetos en movimiento es materia de la física, mientras que en las matemáticas las nociones de cambio y movimiento no eran tomadas en cuenta por considerar que “los objetos matemáticos no están sujetos al movimiento con sola excepción de aquellos a los que se refiere la astronomía” (Aristóteles como se citó en Ruiz,1994, p.151).

Por ello, es que los estudios realizados en ese momento se encontraban limitados por las normas que existían, y en consecuencia se estudiaban, por ejemplo, objetos fijos y sus relaciones como en los Elementos de Euclides (Ruiz, 1994). Además, los griegos hablaron en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables. Esta postura fue un obstáculo para el desarrollo de la noción función, pues solo llegarían a alcanzar las nociones de proporción y ecuaciones (Ruiz ,1994).

Por otro lado, Ugalde (2014) señala que las nociones primitivas de función como la noción dependencia se muestran con mayor claridad en el campo de la Física, con Arquímedes y las leyes de la Mecánica. Por ejemplo, en el principio de Arquímedes, se indica: “Todo cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido sufre un empuje de abajo hacia arriba por una fuerza de magnitud igual al peso del fluido que desaloja” (Whitten,1985 como se citó en Vera et al., 2010, p.6).

En este principio, es notorio la dependencia entre la fuerza y el cuerpo sólido. Es decir, al cambiar de cuerpo sólido y sumergirlo en algún fluido determinará una variación en el peso del líquido desalojado, lo que según la definición equivale a una variación en la fuerza.

Según Ugalde (2014), dentro de otros trabajos, Arquímedes evidencia también la noción de dependencia como se muestra a continuación:

“El área barrida por el radio en la segunda vuelta es 6 veces el área de la primera vuelta.” (Ugalde, 2014, p.6)

“La esfera tiene un área y un volumen equivalentes a dos tercios de los del cilindro.” (Ugalde, 2014, p.6)

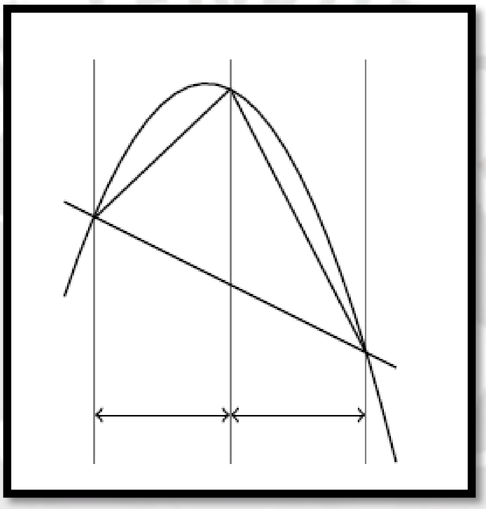
Además, Arquímedes descubre una relación entre áreas sobre la cuadratura de la parábola, afirmando lo siguiente:

> El área comprendida entre una parábola y una línea recta es 4/3 del área de un triángulo que tiene por base el segmento de la recta y cuyo vértice superior está sobre la parábola, en el punto medio que forman las verticales a través de los puntos de intersección. (Ugalde, 2014, p.7)

En estas afirmaciones, Arquímedes evidencia el uso de la noción de proporción entre cantidades, el cual es una noción primitiva de la función lineal (Gómez, 2011). Además, en la Figura 5, se muestra cómo se vería dicha relación entre áreas.

Figura 5

Relación de Arquímedes sobre el área dentro de una parábola.



Nota. Tomado de Ugalde (2014, p.7).

Por otra parte, Euclides, en su obra *Elementos* contiene la teoría de las proporciones numéricas continuas de la forma $\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \cdots \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$, lo que lo lleva a la noción de progresión geométrica de números enteros. Esto muestra que la relación entre los elementos de una proporción continua es una forma antigua de la potencia de números (Ribnikov ,1991), la cual es una noción que se próxima a la noción de función exponencial.

También, se indica en Ribnikov (1991), que en la obra de Arquímedes denominada *El Arenario*, se encuentran escritas las potencias sucesivas de una base $a^1, a^2, a^3, \ldots$, motivando la propiedad: $a^n . a^m = a^{n+m}$. Por lo tanto, se deduce que las nociones básicas de exponente y potencia eran conocidas en este periodo. Estos hallazgos hacen que se acerquen a las expresiones que se usa actualmente en una función exponencial.

Además, Según Sastre et. al (2008), en este periodo, aparecen los llamados problemas clásicos: (a) el problema de la cuadratura del círculo y b) la duplicación del cubo. Estos se identificaron como *problemas no planos*, es decir, problemas que no pueden ser resueltos con regla y compás. Para resolver este tipo de problemas, es necesario usar las cónicas y construir nuevas curvas como lo hicieron Apolonio, Arquímedes, Pappus, entre otros.

También, se señala que problemas relacionadas a la astronomía fueron resueltas por los griegos mediante las tablas del seno y coseno, las cuales eran similares a las tablas actuales (Sartre et al., 2008). Uno de estos problemas era calcular la distancia de la tierra al Sol y los tamaños de estos, las cuales fueron resueltas por Aristarco (Vargas, 2019).

Los árabes también muestran indicios de lo que se conoce como las razones trigonométricas en la actualidad. Ellos poseían las tablas de senos, cosenos, secante, cosecante, tangente y cotangente. Al parecer, esto permitió surgir a las nociones de funciones trigonométricas. Sin embargo, la noción de este tipo de funciones estaba aún implícita y debía esperar, ya que las obras de esa época eran distintas a la trigonometría elemental de hoy (Ugalde, 2014).

Por otro lado, una tradición enfocada en las matemáticas helenísticas pone en relieve a la geometría y los métodos deductivos. Tabit ibn Qurra descubre una fórmula general para hallar "números amigos", es decir, dos números positivos tales que cualquiera de ellos es la suma de los divisores propios del otro. Por ejemplo, está el número 220 cuyos divisores propios son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, y el número 284 con divisores propios 1,2,4,71 y 142. Luego, se verifica que, 220 y 284 son números amigos (Ugalde, 2014).

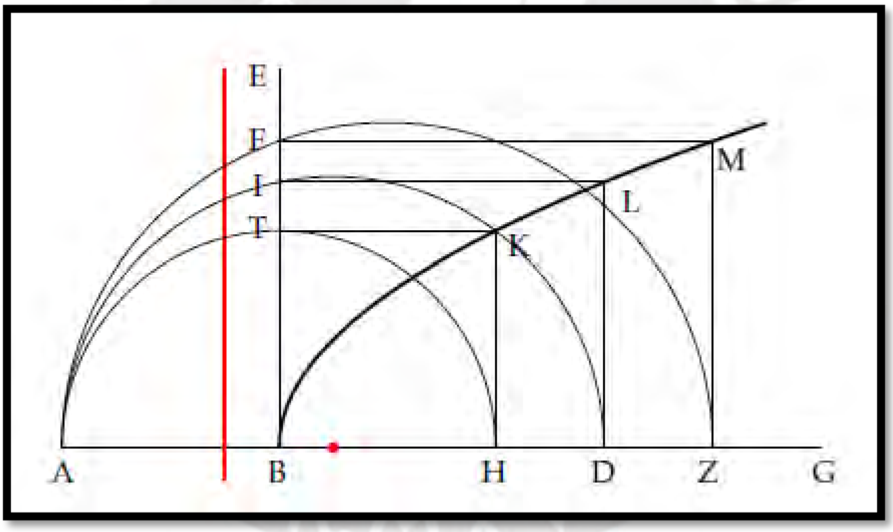
También, existen nociones primitivas de función: las tablas de valores, la fórmula, y la noción de dependencia y correspondencia. Luego, los artesanos árabes de la época lograron construir en sus cerámicas lo que vendría ser una parábola. Esta construcción tiene influencia griega, que presenta las siguientes indicaciones:

> Sobre una recta AG se sitúa un punto arbitrario B y se traza la recta BE, perpendicular a AG. En el segmento BG se marcan puntos arbitrarios H, D, Z, ... Las semi circunferencias de diámetros AH, AD, AZ, ... determinan, respectivamente, los puntos T, I, F, ... de la recta BE. los puntos K, L, M, ... de la figura pertenecen a la parábola de vértice B, eje AG y parámetro AB. (Ugalde, 2014, p.9)

Realizando estos pasos, se obtiene la parábola mostrada en la Figura 9, donde la recta directriz y el foco ambas de color rojo, están ubicadas a un cuarto de distancia del punto B.

Figura 6

Forma que dibujaban a una parábola los artesanos árabes.



Nota. Tomado de Ugalde (2014, p.9).

Este diseño que realizaban los árabes dista de la noción función cuadrática por el método geométrico empleado. No obstante, muestra relación con la parte gráfica, lo cual forma parte la noción de función cuadrática (Ugalde, 2014).

Por lo tanto, en este periodo, no se muestra la noción de función, a pesar de que existieron problemas que tenían oculta la idea de función, pero no pudieron identificarla. Por ende, no hubo símbolos para representarla (Sartre et al., 2008).

2.1.2. Edad Media

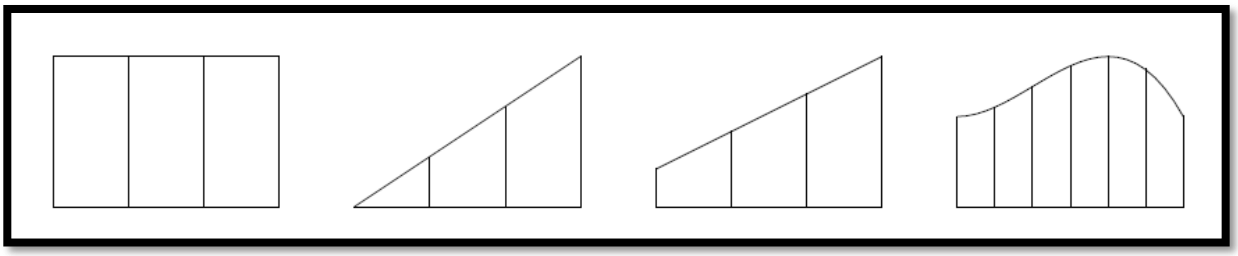
En este periodo, se hicieron investigaciones sobre fenómenos naturales como calor, luz, color, densidad, distancia y velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado. Además, se usaban las ideas de cantidades variables independientes y dependientes, aunque sin una definición formal. De este modo, la evolución de la noción función estaba relacionada al cambio y en particular al movimiento. Entonces, se describía a una función mediante sus propiedades específicas o un gráfico (Sastre, et al., 2008).

Por otro lado, el desarrollo del concepto función fue muy escaso. Sin embargo, hay dos sucesos casi al final del siglo XIV. El primer suceso es el uso de un “álgebra de palabras” para mostrar las relaciones de tipo funcional; es decir, hay que utilizar letras en lugar de números para sustituir cantidades variables y expresar, en palabras, las operaciones de suma, resta, etc. El segundo suceso es el desarrollo de una representación gráfica que modela la manera de cómo varía algunos elementos como fenómenos naturales (Ugalde, 2014).

En la Figura 7, se observa a la izquierda una velocidad constante, al centro velocidades con aceleraciones constantes (una con velocidad inicial cero y la segunda con una velocidad inicial dada) y a la derecha la velocidad con aceleración variable. Se evidencia que los segmentos horizontales representan el tiempo y los verticales las velocidades. Esto nos muestra un acercamiento a la gráfica de funciones como la función constante, lineal y otras, mediante el estudio de la velocidad de un objeto (Ugalde, 2014).

Figura 7

Versión primitiva de una representación gráfica entre la velocidad y el tiempo realizada por Oresme.



Nota. Tomado de Ugalde (2014, p.10).

Según Ugalde (2014), en estas representaciones, no hay indicios de una escala o posiciones relativas en el segmento horizontal. En consecuencia, no existía una relación de tipo algebraico como en el plano cartesiano que surge más adelante.

Por otro lado, Ugalde (2014) señala y describe dos situaciones como relevantes entre los siglos XV a XVI en Europa. La primera situación es el uso de símbolos para representar objetos matemáticos. Entre los personajes que comenzaron a usar símbolos para representar objetos matemáticos, se tienen a los siguientes:

“Al-Jwarizmi 830 escribió: census et quinque radices equantur viginti quator para representar $x + 5\sqrt{x} = 24$”(Ugalde, 2014, p. 10)

“Cardano en 1545 mencionó: “cubus p6 rebus aequalis 20” para representar $x^3 + 6x^2 = 20$” (Ugalde, 2014, p. 10).

“Viéte en 1570 escribió: *“*C+8Q+16N aequ 40*”* para representar $x^3 + 8x^2 + 16x = 40$” (Ugalde, 2014, p. 11).

“Descartes en 1637 escribiría la ecuación anterior en la forma: *“*xxx+8xx+16x=40*”* (Ugalde, 2014, p. 11).

La segunda situación es el inicio del estudio de la naturaleza por parte de la comunidad científica de esa época (Ugalde, 2014). Plantearon problemas desde un punto de vista experimental y físico, que los llevó a relacionar las variables para expresarlos y representarlos mediante números. Ello implica nuevas relaciones que se iban verificando experimentalmente. Estudiando los fenómenos naturales desde este nuevo enfoque matemático, se descubren nuevas relaciones y un gran avance en las matemáticas.

Por lo tanto, estas dos situaciones aportan al desarrollo de las matemáticas y, en particular, para la noción de funciones, ya que con ello comienzan a emerger elementos como los símbolos para expresar a una función (Ugalde, 2014). Además, el estudio de la naturaleza determinará el uso de la noción variable (Sastre et al., 2008). Por ello, Ribnikov (1991) menciona que las matemáticas evolucionan desarrollando principalmente la mejora de la simbolización algebraica y la formación de la trigonometría como ciencia. Por ejemplo, en la Figura 8, se muestra la simbolización realizada por Nicole Oresme. Esto mejora la noción de potencia al introducir los exponentes fraccionarios y realizar operaciones que se adelanta a la idea de logaritmo con una notación especial.

Figura 8

Simbolización realizada por Nicole Oresme.

$$\boxed{\frac{1\cdot p}{2\cdot 27}} = 27^{\frac{1}{2}}, \quad \boxed{\frac{1\cdot p}{3\cdot 3}} = 3^{\frac{1}{3}}, \quad \boxed{\frac{2\cdot p}{3\cdot 8}} = 8^{\frac{2}{3}}, \text{ etc.}$$

Nota: Tomado de Ribnikov (1991, p. 122).

Según Foti (2021), en la obra *Triparty en la science des nombres*, del matemático Nicolás Chuquet, se introducen los exponentes negativos y el cero. Los cuales son elementos importantes para la teoría de exponentes y que forma parte de la noción de función exponencial.

2.1.3. Periodo Moderno

Al inicio de este periodo, Sastre et al., (2008) señalan que se producen sucesos relevantes para el desarrollo de la noción de función como se indica a continuación:

a) La extensión del concepto número al de números reales e incluso a número complejos
b) La creación del álgebra simbólica
c) El estudio del movimiento como un problema central de la ciencia
d) La unión entre álgebra y geometría

Según Bombal (2014), menciona que Galileo realizó diversos estudios entre ellos el estudio el movimiento en la naturaleza, por ejemplo, los planetas y los cuerpos. Sobre este último punto investiga la caída de los cuerpos en un plano inclinado. Él encuentra relaciones entre las trayectorias y las velocidades con la inclinación del plano, y toma variables como la velocidad, tiempo y la distancia (Mesa, 2008). Se empieza de este modo el estudio matemático del movimiento de los proyectiles.

Por otro lado, Mesa (2008) menciona que Galileo llegó a usar la parábola como una forma de representación de un fenómeno de movimiento de tipo cuadrático, ya que al momento de tratar los incrementos de la parábola afirma que estos corresponden a la progresión de los números impares.

En Ferrari y Farfán (2004), se señala algunos alcances de las investigaciones realizado sobre la descripción del movimiento de cuerpo en este periodo, tales como el movimiento uniforme (cuerpo con velocidad constante) o la caída libre de un cuerpo (cuerpo con aceleración constante) con una relación tipo progresión aritmética. Sin embargo, para describir el movimiento de un cuerpo bajo la resistencia del medio en el que se mueve, se usa las progresiones geométricas, debido a que la velocidad del cuerpo disminuye de manera proporcional.

Sastre et al., (2008) mencionan que Galileo contribuyó a la creación de la noción de función (al agregar números a sus representaciones gráficas y al expresar las leyes de movimiento) donde usó el lenguaje de la teoría de proporciones. Además, en sus trabajos, aparecen varias expresiones de relaciones funcionales, pues muestra de forma clara en palabras y en el lenguaje de proporciones (se están usando variables y funciones).

En este periodo, Foti (2021) menciona que la notación exponencial y su noción siguió desarrollándose. Además, la ciencia árabe muestra su influencia, la cual se evidencia en la obra la *Arithmetica Integra* de Michael Stifel. Ahí aparece el tema de las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas, de la misma forma que Chuquet relaciona potencias de base dos con exponentes de 0 a 20. En Ferrari y Farfán (2004), señalan que inicialmente se consideraba como una transformación de las progresiones que facilitaba los cálculos relacionados a necesidades sociales de navegación, artillería y astronomía.

Posteriormente, los logaritmos se les dota de una gráfica que, acompañadas de su expresión algebraicas, logran resolver problemas físicos, completar el modelo matemático de la cuadratura de las curvas e inician una nueva forma de expresarlas mediante series de potencias (Ferrari y Farfán, 2004).

También, se señala que Stifel da una importancia práctica a la asociación entre una progresión aritmética y una geométrica (Vargas, 2012 como se citó en Foti, 2021), como se muestra en la Figura 6. Esto determina un acercamiento a la noción de función exponencial en su representación de tipo tabular.

Figura 9

Relación entre PA y PG, que origina la propiedad de producto de potencias de base igual a 2.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	¼	½	1	2	4	8	16	32	64

Nota. La primera fila del bloque es una PA y la segunda fila es una PG. Tomado de Vargas (2012, p.48)

Sobre la Figura 9, Foti (2021) señala lo siguiente:

> Stifel realiza una comparación de las operaciones sobre los términos de las progresiones, por ejemplo: suma dos términos de la progresión aritmética como 2 y 4, obteniendo 2 + 4, y lo relaciona con la multiplicación de los términos de la progresión geométrica de la segunda fila obteniendo $4 \times 16 = 64$. Los números de dicha progresión aritmética son los exponentes. Se observa que los valores de la segunda fila de la tabla se obtienen elevando la base 2 con dichos números, haciendo uso del exponente negativo y fraccionario (p.17).

Además, Foti (2021) comenta que es complicado encontrar los orígenes de las funciones exponencial y logaritmo. Asimismo, sobre las nociones que dieron origen a los logaritmos, detalla que Napier debe haber pensado sobre las sucesiones de potencias de un número dado, que habían sido publicadas anteriormente como en las obras de Stifel y Arquímedes, por ejemplo (Boyer, 199, como se citó en Foti, 2021).

Por otro lado, Ferrari y Farfán (2004) afirman que el pensar en funciones exponenciales, logarítmicas y otras como la covariación de progresiones aritméticas y geométricas sirve como argumento para la construcción de estas funciones particularmente.

Con más detalle, Ruiz (1994) comenta que Napier realizó aportes en la introducción de los logaritmos, al comparar dos movimientos uno uniforme y otro donde la velocidad es proporcional a su distancia de un punto fijo. De esta manera, obtuvo la primera tabla de logaritmos.

Sobre el álgebra de René Descartes, es parecida a la actual, pues utiliza letras del alfabeto, las primeras para los parámetros constantes y las últimas para las variables. Estas las utiliza en notaciones de tipo exponencial (Boyer, 1999 como se citó en Foti, 2021).

También, se señala en Foti (2021), que en la obra *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis, se muestra la evolución de los exponentes. Se usa a los exponentes fraccionarios y potencias irracionales, que sería el comienzo del cálculo con funciones trascendentes. Además, muestra que algunos de los principales aportes de Wallis son los siguientes:

a) Mostrar que $x^0 = 1$
b) Establecer la relación $x^{-1} = \frac{1}{x}$
c) Definir a los números negativos como exponentes, es decir el índice de $\frac{1}{x}$ cómo -1 y el índice de $\frac{1}{x^2}$ como -2.
d) Extender la definición anterior a fracciones es decir $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tiene índice $-\frac{1}{2}$.

Además, en el siglo XVII, comenzaron a formarse la geometría analítica gracias a los trabajos de Descartes y Fermat quienes relacionaron el álgebra con las curvas geométricas (Foti, 2021).

Mas adelante, varios matemáticos entre ellos Euler, Fourier y Cauchy estaban de acuerdo con la naturaleza arbitraria de las funciones. Sin embargo, las veían como expresiones analíticas (ecuación que relaciona la variable dependiente con la variable independiente) o curvas. Entonces, fue que Dirichlet propone considerar la noción función como una “correspondencia arbitraria” (Sastre et al., 2008). Asimismo, una las funciones que construyó Dirichlet es una función de variable real discontinua en todo su dominio, definiéndola de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , si\ x \in [a,b] \cap (\mathbb{R}|\mathbb{Q}) \\ 0 & , si\ x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Luego, en el siglo XVIII, Euler crea el análisis infinitesimal en su obra *Intruductio Analysin Infinitorum*. Ahí forman las bases del nuevo análisis como la noción de función que es fundamental para las funciones algebraicas y trascendentes elementales (Foti, 2021). Estas últimas (funciones trascendentales) ayudaron a resolver problemas vinculadas a la Física (Sastre et al., 2008).

Según Sastre et al. (2008), una discusión entre d'Alambert y Euler sobre el problema de la cuerda vibrante determina que la noción de función evolucione. El problema consiste en hallar una función, que modele la forma de una cuerda elástica y que vibra sujeta por los extremos.

Por otro lado, Euler usa también los exponentes imaginarios. Esto le permite descubrir a las funciones logarítmicas y exponenciales, siendo uno de los primeros en usarlas y se usa hasta la actualidad (Foti, 2021).

De acuerdo con Ribnikov (1991), la definición que Euler introduce sobre logaritmo se muestra clara, y dice lo siguiente: "El logaritmo de un número positivo es el exponente al cual hay que elevar la potencia cuya base es la elegida para que dé el número prefijado: si $a^x = N$ entonces $x = \log_a N$" (Ribnikov,1991, p.222).

El trabajo de Euler muestra la deducción de la fórmula

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^n$$

Donde i es un número infinitamente grande. Luego, se simbolizaría

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Finalmente, la definición de función evoluciona impulsado con el desarrollo del álgebra abstracta y la topología, donde surgen nuevas teorías de conjuntos. En este contexto, un grupo de matemáticos franceses denominado Nicolas Bourbaki proponen una definición de función similar a la Dirichlet, pero se diferencia en el dominio y el codominio, ya que no son necesariamente conjuntos de números (Sastre et al., 2008).

En resumen, la forma cómo aparece las funciones en un inicio está asociada a necesidades de contar y medir. Esto hace que aparezcan las tablas al inicio de la historia, la cual determina una noción de correspondencia, y que luego se van desarrollando relaciones entre las cantidades. Esto evidencia la noción de dependencia, lo que lleva a mostrar fórmulas entre las cantidades. Luego, se cambió la forma de pensar sobre lo que debería estudiar las matemáticas, ya que se empezó a estudiar la naturaleza que implica los cuerpos en movimiento. De esta forma, surge las nociones de las funciones como se conocen en la actualidad.

Por otra parte, el desarrollo de las tablas babilónicas tuvo como consecuencia que, actualmente, usemos una de las representaciones de una función que es la tabla de valores a la noción de función (Sastre et al., 2008). Asimismo, el trabajo desarrollado por los griegos sobre curvas motivó a que hoy usemos una representación gráfica sobre las funciones. Además, se encontraron formas de construir una función como es el caso de la función exponencial. Esta se puede realizar a partir desde una progresión geométrica, desde la relación que existe con el logaritmo, desde la noción de potencia e inclusive desde la noción de función continua (Foti, 2021).

Por lo tanto, se tomará en cuenta la forma cómo van surgiendo las funciones. Para esto, es importante tener presente las tablas de valores entre dos cantidades, cuyas cantidades sean determinadas bajo una regla de formación. Por ejemplo, está el caso de las progresiones que nos permite formar algún tipo de función como la lineal, la cuadrática, la exponencial, la logarítmica, la trigonométrica, entre otros.

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO

En este capítulo, presentaremos a la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD) desarrollada por Yves Chevallard, como nuestro marco teórico, con el fin de tener elementos de la teoría, para realizar nuestra investigación y de este modo alcanzar nuestros objetivos. Dichos elementos son: la noción de praxeología, recorridos de estudio e investigación e indicadores de grado de completitud.

3.1. Marco teórico

En la escuela, casi siempre se enseñan saberes que responden a cuestiones que se desconocen o se mantienen ocultas, y como consecuencia la razón de ser de esos saberes continua en las sombras. En la actualidad se practica mucho la enseñanza sin cuestionamientos, ignorando de este modo la relevancia de las preguntas en el transcurso de la producción de conocimiento (Gazzola et al., 2021).

La TAD ha identificado y descrito el fenómeno didáctico: *visitar las obras* o también llamado la *monumentalización del saber y pérdida de sentido*, donde en el modelo didáctico dominante, el profesor explica y presenta el saber cómo una obra museográfica, que los estudiantes solo pueden visitar, donde el saber que va a ser enseñado no es cuestionado y se estudia como un fin en sí mismo (Otero et al., 2013).

Según Otero et al. (2013), Las consecuencias de este tipo de enseñanza determinan que la actividad del alumno sea mínima y su lugar para explorar se reduzca a lo que el profesor decide comunicar, lo que determina que el alumno apenas pueda reproducir lo que le fue presentado. Otra consecuencia de este fenómeno es la eliminación de preguntas las cuales son sustituidas por la enseñanza de respuestas. De este modo la matemática se enseña como un saber terminado y sin sentido, al que solo se le atribuyen usos raros (Otero et al., 2013).

Por ello, nuestro interés es realizar un aporte que ayude a recuperar el sentido de los saberes enseñados. Particularmente, cuando se enseña el tema de funciones.

La respuesta desde la didáctica de las matemáticas, al fenómeno de la ***monumentalización del saber***, se desarrolla en el marco de la TAD que nos muestra a los recorridos de estudio e investigación (REI), como un dispositivo didáctico que permite desarrollar según Chevallard la ***Pedagogía de la Investigación y del***

Cuestionamiento del Mundo, la cual permite sustituir al modelo de enseñanza tradicional por un modelo de enseñanza por investigación.

Este dispositivo didáctico nos permitirá realizar una enseñanza por investigación en los estudiantes, lo cual determina una mayor responsabilidad en ellos, a través de una enseñanza por medio de preguntas, como señala Donvito et al. (2017).

Los principales lineamientos de la TAD. Según Lucas (2010):

> La *Teoría Antropológica de lo Didáctico* fue iniciada por el investigador francés Yves Chevallard a finales de los años 1980; básicamente es una posición de estudio cuyo eje central es el hombre aprendiendo y enseñando la Estructura Matemática a través de las relaciones humanas frente a la relatividad del saber científico con respecto a las instituciones sociales. En lugar de plantear los problemas de enseñanza y aprendizaje en términos de qué hacer para que tal o cual noción, actividad o problemática puedan enseñarse o aprenderse mejor y, en consecuencia, investigar las dificultades que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas buscando la manera de superarlas, la TAD se pregunta cuáles son las *condiciones* que permiten, facilitan o favorecen que determinadas actividades matemáticas y didácticas puedan desarrollarse (existir, tener lugar, o “vivir”) en un determinado entorno institucional (la escuela primaria, la escuela secundaria, la universidad, un entorno profesional determinado o la sociedad en general) y cuáles son las *restricciones* que dificultan, entorpecen o incluso impiden la puesta en práctica de estas actividades. (p.13)

Uno de los motivos de nuestra investigación es desarrollar actividades que puedan desarrollar un nuevo enfoque en la enseñanza y aprendizaje. Es por ello, que la Teoría Antropológica de lo Didáctico se alinea a nuestra necesidad, pues dispone de dispositivos y metodología que podemos usar en nuestro interés de recuperar la razón de ser de la noción de funciones.

3.1.1. La noción de praxeología matemática

Según Lucas (2010), Chevallard introduce a mediados de los años 90 la noción de Praxeología u Organización Matemática (OM), que es una de las nociones básicas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Uno de sus postulados base consiste en considerar la actividad matemática como una actividad humana más, esto le lleva a introducir la noción de praxeología.

La noción de *Praxeología* o de *Organización Matemática* constituye así la herramienta fundamental para modelizar la actividad matemática. Con más detalle, según Bosch, Gascón e Higueras (2006), la TAD propone que toda actividad humana puede ser modelada mediante praxeologías (*praxis* + *logos*). En la cual es posible distinguir dos niveles:

El nivel de la praxis, relacionado al saber-hacer y a los *tipos de tareas*, los problemas, y las *técnicas* que se construyen y usan para resolverlos.

El nivel del logos o del "saber", aquí se hallan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se usan, denominadas *tecnología*. Dentro del "saber" se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel de la tecnología de la tecnología) que se denomina teoría.

Según Lucas (2010), esta descripción de los elementos de una OM que están fuertemente relacionados entre sí, como por ejemplo la consecuencia del desarrollo de las técnicas genera nuevos tipos de tareas, provocando necesidad de nuevas tecnologías.
En general, el bloque *práctico-técnico* no puede vivir aisladamente en una institución, requerirá la existencia del "discurso racional" que justifique la técnica y muestre su pertinencia para llevar a cabo el tipo de tareas.

Figura 10

Componentes de una praxeología u organización Matemática.

Componentes	Bloque	
tarea	*práctico-técnico*	*Saber hacer*
técnica		
tecnología	*tecnológico-teórico*	*Saber*
teoría		

Nota. El sistema formado por estos dos bloques, o cuatro elementos, constituyen una Praxeología (Organización) Matemática (OM), considerada la unidad mínima en que puede ser descrita la actividad matemática. Fuente: Lucas (2010, p. 25).

Según Chevallard (1999), existe una distinción de diferentes tipos de OM según el grado de complejidad de sus elementos:

• ***Praxeologías puntuales***, si están generadas por lo que se considera en la institución como un único *tipo de tareas*. Esta noción está definida a partir del bloque práctico-técnico.

• ***Praxeologías locales***, resultado de la unión de diversas praxeologías *puntuales*. Cada praxeología *local* está caracterizada por una *tecnología*, que sirve para justificar las técnicas de todas las praxeologías *puntuales* que la conforman.

• ***Praxeologías regionales***, se obtienen mediante la coordinación, articulación y unión de diversas praxeologías *locales* alrededor de una teoría matemática común.

• ***Praxeologías globales***, conformada por la integración de varias praxeologías *regionales* correspondientes a varias teorías.

Según Bosh et al. (2006), es posible afirmar que lo que se aprende y enseña en una institución escolar son praxeologías matemáticas o, al menos, ciertos elementos de éstas. Esto determinan elementos que pueden ser analizados en el marco de la TAD y caracterizar particularmente el estado de las nociones de funciones.

3.1.2. Los recorridos de estudio e investigación

Para la construcción de nuestro REI, nos apoyaremos en investigaciones como la realizada en Otero et al. (2013), donde se menciona que los REI permiten reformular los programas escolares como un conjunto de preguntas generatrices, cuyas respuestas permiten mostrar organizaciones matemáticas que se proponen en los planes de estudio, e introducen una nueva epistemología, que devuelven sentido y la funcionalidad a la matemática escolar, la cual reemplaza a, la pedagogía de visitar las obras.

Según Llanos et al. (2015), en un REI, un conjunto de estudiantes (*X*) investigan y estudian una pregunta *Q* bajo la dirección del profesor (*y*) o de un conjunto de profesores (*Y*); configurándose el sistema didáctico *S (X; Y; Q)* con el objetivo de desarrollar una respuesta $R^{\heartsuit}$ a *Q*. El exponente en $R^{\heartsuit}$, indica que la respuesta a *Q* está condicionada a restricciones y que sirve como respuesta para *Q.*

Esta respuesta $R^{\heartsuit}$ a su vez no está establecida de antemano se construye y reconstruye según ciertas condiciones, y es funcional a la mismas.

De otro lado los autores mencionan que, $R^{\heartsuit}$ es consecuencia del estudio llevado a cabo, por lo cual se asume que la respuesta no es única ni universal, sino efectiva al sistema.

Para desarrollar una respuesta $R^{\heartsuit}$ es necesario elaborar un medio $\mathbf{M}$ determinado por $\mathbf{M} = \{\mathbf{R}_1^{\lozenge}, \mathbf{R}_2^{\lozenge}, \mathbf{R}_3^{\lozenge}, \dots, \mathbf{R}_n^{\lozenge}, \mathbf{Q}_{n+1}, \dots, \mathbf{Q}_m, \mathbf{Q}_{m+1}, \mathbf{O}_{m+1}, \dots, \mathbf{O}_p\}$, donde:

- Las $\boldsymbol{R_i^{\lozenge}}$ son las respuestas disponibles y aceptadas por la cultura escolar, respuestas “hechas” o pre - construidas, como las encontradas en los libros de textos, los apuntes del profesor, en el internet;
- Las preguntas derivadas de Q, denominadas Q_j, que orientarían el estudio en $\mathbf{M}$, estas preguntas derivadas determinan una forma de construir una respuesta para Q, buscando algún tipo de información sobre Q y bajo ciertas condiciones.

- Las $\mathbf{O_j}$, obras que deben estudiarse consideradas como potencialmente útiles para encontrar una respuesta $R^{\heartsuit}$; es decir las teorías, montajes experimentales, praxeologías matemáticas o de otras disciplinas, etc.

Así el sistema didáctico $\mathbf{S(X; Y; Q)}$ construye y organiza ($\mapsto$) el medio $\mathbf{M}$ con la cuál engendrará o producirá ($\hookrightarrow$) una respuesta $R^{\heartsuit}$, y es denominado *esquema herbartiano desarrollado*, según Chevallard. Los REI se formalizarían a partir de dicho esquema, que se denota como sigue:

$$\left[\mathbf{S(X, Y, Q)} \mapsto \left\{\mathbf{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, R_3^{\lozenge}, \dots, R_n^{\lozenge}, Q_{n+1}, \dots, Q_m, Q_{m+1}, O_{m+1}, \dots, O_p}\right\}\right] \hookrightarrow \mathbf{R^{\heartsuit}}$$

Al plantear un REI el profesor plantea una pregunta generatriz $Q = Q_0$, cuyo estudio nos llevará a ver OM, en nuestro caso de la disciplina de las matemáticas, estableciéndose así una cadena de preguntas y respuestas $P = (Q_i; R_i) \quad 1 \leq i \leq n$ que son la parte vital de este proceso de estudio, siendo Q_i todas las preguntas que se van planteando, R_i sus respectivas respuestas.

Como se aprecia el recorrido comienza con Q_0 , el análisis de sus posibles respuestas determina recorridos potenciales generados por las preguntas derivadas de Q_0, denominadas Q_i. Pero antes de diseñar el REI es necesario construir un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR), el MPR se realiza al inicio con el objetivo de analizar cómo podrían ser las OM que la pregunta generatriz Q_0 permite estudiar, y las que proponen los estudiantes, se describen características del REI a aplicar, las posibles respuestas a Q_0 y la emergencia de nuevas preguntas que se generan como consecuencia de su desarrollo en el aula.

3.1.3. Los Indicadores de grado de completitud

En Bosch *et al*., (2004), se definen siete indicadores del “grado de completitud” de una Organización Matemática Local (OML), que usaremos para el análisis de la OM elaborada durante el REI implementado y que se detallan a continuación.

I1. Integración de los tipos de tareas

En una OML coexisten varios tipos de tareas problemáticas relacionadas entre sí, por un discurso tecnológico, o sucesivos desarrollos de las técnicas. Su grado de completitud dependerá de la integración entre los distintos tipos de tareas y de los vínculos existentes entre ellas, y será menos completa cuando los tipos de tarea que los componen estén más aislados es decir que se desarrollen por técnicas que no estén relacionadas mediante ningún elemento tecnológico.

I2. Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas

Una OML será más completa en la medida que existan técnicas alternativas que pueden ser variantes de una misma técnica, para desarrollar algunos tipos de tareas, determinando que la relación entre tipo de tarea y técnica asociada sea única. Este indicador implica que en la OML existan los elementos tecnológicos que hagan posible cuestionar las diferentes técnicas alternativas, analizar sus equivalencias o diferencias y distinguir cuál es la más segura o económica.

I3. Independencia de los ostensivos que integran las técnicas

La flexibilidad de las técnicas de una OML implica particularmente, que estas no se identifiquen rígidamente con los *objetos ostensivos* que se usan para describirlas y aplicarlas. Es decir, que acepten diferentes representaciones ostensivas dependiendo de la actividad matemática en la que están inmersas y hasta de la tarea específica abordada dentro de un tipo de tareas.

I4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas"

Otro indicador de la flexibilidad de las técnicas se determina cuando existen técnicas inversa en una OML, es decir que permitan resolver un tipo de tarea y además la tarea inversa, donde el término "inversa" se debe entender como, por ejemplo, si mi tarea es dado el tiempo transcurrido en días halle el número de contagiados, la tarea inversa sería, dado el número de contagiados, halle el tiempo transcurrido en días.

I5. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas

Esta característica de la completitud significa que, en la OML hay elementos tecnológicos necesarios para realizar la interpretación del funcionamiento de las técnicas. Dicho de otro modo, si no se cuestiona la técnica usada. Por lo tanto, no se realiza búsquedas de otras técnicas para resolver la misma tarea entonces no hay una interpretación del funcionamiento de las técnicas.

I6. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica

Este indicador analiza si ha habido necesidad de construir técnicas nuevas que permitan ampliar los tipos de tareas que se consideran inicialmente. Este indicador constituye la medida en que la tecnología permita construir técnicas nuevas (para la comunidad de estudio) capaces de ampliar los tipos de tareas.

I7. Existencia de tarea matemática "abiertas"

Una OML será más completa en la medida en que permita plantear cuestiones "abiertas", esto es, tipos de tareas en los que se estudian situaciones donde los datos y las incógnitas no se muestran directamente. Dicho de otro modo, estas tareas son abiertas porque no se conocen de antemano que técnica o técnicas permitirán resolverlas.

CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN Y DISEÑO

En este capítulo, presentaremos la metodología de investigación y los procedimientos empleados, para el diseño de la actividad matemática en torno a un REI. Dicha metodología tiene un enfoque cualitativo, donde se muestran procedimientos, para el diseño de dicha actividad, en base a elementos de la Ingeniería Didáctica

4.1. Metodología de investigación

La metodología de investigación, que se empleará para la siguiente investigación, tiene un enfoque cualitativo, pues según Hernández, Fernández y Baptista (2010), el enfoque cualitativo utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación, esto nos muestra la relación al diseñar, implementar, y analizar un REI. Con esta metodología los datos pueden estar en forma de texto y documentos, el investigador es el instrumento de recolección de datos, usando varias técnicas de recolección que se desarrollan durante el estudio.

Nuestro objetivo es el análisis de la praxeología de un REI. Por ello vamos a seguir la siguiente metodología, planteada por Barquero y Bosch (2015, como se citó en García, et al., 2019), en donde indica como vamos a realizar nuestro REI.

A continuación, describiremos la metodología para el diseño del REI, mostrada en García et al. (2019), y adaptado a nuestro objetivo. Para ello, se desarrollará las siguientes fases:

Fase 1: De análisis preliminar

Se realizará un análisis epistemológico superficial de la noción de funciones para determinar nociones que puedan favorecer la emergencia de las nociones de funciones. Así también como un análisis de texto en los libros de matemática del quinto de secundaria y primer ciclo universitario, para determinar la importancia de las nociones de funciones en las instituciones educativas, en esta parte nos proponemos realizar un análisis de los libros de Matemática del quinto de secundaria y del primer ciclo de universidad, planteado en el marco de la TAD.

Por ello, Almouloud (2015), plantea los siguientes procedimientos:

Identificación de los tipos de tareas: se analizan las actividades propuestas en las diferentes partes del capítulo. Los ejemplos y las actividades del curso permiten identificar los tipos de tareas importantes para la institución. La parte de ejercicio le permite identificar el conjunto de todo tipo de tareas. En esta etapa, el investigador realiza agrupaciones de tareas en tipos de tareas

Identificación de técnicas: Una vez identificado los tipos de tareas, se procede a caracterizar las técnicas que permiten el desarrollo de las tareas en función de ejercicios resueltos y el análisis matemático de situaciones propuestas.

Identificación de tecnologías: A partir del análisis de la justificación teórica de los autores respecto a la solución de las tareas se construye la tecnología.

Nos centraremos, en determinar la razón de ser de los saberes de funciones que proponen las instituciones educativas en los textos, para ello seguiremos el criterio dado por Chevallard, a continuación:

Criterio de razones de ser: las razones de ser de los tipos de tareas $T_{i,}$ ¿están totalmente explícitas? ¿O estos aparecen desmotivados?

En la siguiente fase, se realizará el diseño matemático y didáctico para el REI.

Fase 2: De diseño y análisis a priori

En esta etapa, se diseña una propuesta de REI basado en el MER dominante donde se formula una cuestión generatriz lo suficientemente rica, que determine cuestiones derivadas que implique el uso de nociones de funciones o relacionadas a ellas y se describe posibles recorridos. Por otro lado, se realiza el diseño de las actividades que se desarrollaran durante la implementación del REI, esta fase posee dos procesos:

Diseño Matemático

Análisis basado en el MER dominante es decir con los saberes de funciones que fueron encontrados en los libros de Matemática del quinto de secundaria de la EBR y libros del curso de Matemática de estudiantes del primer ciclo de una universidad del Perú. Aquí, se plantea una cuestión generatriz que determine un mapa de posibles cuestiones y respuestas que van asociando diferentes nociones matemáticas y que entre ellas aparezca nociones de funciones.

Diseño Didáctico

En este parte se realiza la construcción de secuencias de enseñanza, que ayuden a la indagación de la cuestión, así también se proporciona de medios de información como el internet, software como el Geogebra, algunos programas para organizar la información como Excel, entre otros.

Fase 3: Análisis in Vivo

En esta etapa, se aplica el REI propuesto en los estudiantes del primer ciclo de una universidad del Perú, que llevan de forma paralela el curso de Matemática, se recopila información mediante grabaciones, archivos de Word y Excel compartidos en forma online como el Jamboard, fotos, entrevista, etc. Esta etapa tiene también dos procesos:

Experimentación y observación clínica

En este proceso se implementa el REI con los estudiantes del primer ciclo de universidad, gestionado por un solo profesor que hará también de investigador-observador. Se buscará el trabajo en equipo junto con el profesor, se buscará que el profesor no sea una fuente de información si no un guía de posibles caminos, donde se tomará las decisiones en equipo sobre la información que se vaya recogiendo.

Selección de información

En este otro proceso, se seleccionará la información recogida a partir de las grabaciones de video, apuntes de los alumnos, y entrevista con los alumnos.

Fase 4: Análisis a posteriori

En esta etapa, analizamos con ayuda de los indicadores de grado de completitud la OM que emerge del REI implementado, para determinar en qué grado se encontrarían completas. En esta fase aparecen dos procesos.

Análisis y Evaluación

En este proceso, se pretende contrastar con el posible recorrido, en el sentido de como éstas seguían la propuesta del mapa de posibles recorridos y se analiza la información recolectada, se evalúa la OM de acuerdo con los indicadores de grado de completitud. Se analizará en cada uno de los indicadores lo siguiente:

1er indicador, se analizará si los tipos de tareas tienen un nexo común

2do indicador, se analizará si existen diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas

3er indicador, se analizará si existe independencia de los ostensivos que integran las técnicas

4to indicador, se analizará si existen tareas y técnicas inversas

5to indicador, se analizará si se cuestionan sobre el funcionamiento de las técnicas empleadas

6to indicador, se analizará si hay técnicas nuevas, que amplíen los tipos de tareas existentes.

7mo indicador, se analizará la existencia de tareas matemáticas abiertas.

Revisión y Optimización

De encontrar un recorrido distinto a nuestra propuesta realizada por los estudiantes, señalaremos que es posible incorporar la nueva noción o nociones encontradas con el grupo de estudio en el currículo que corresponde.

CAPÍTULO V: DESCRIPCIÓN DE LA PARTE EXPERIMENTAL

En este capítulo, se muestran el desarrollo de tres de las cuatro fases, según la metodología planteada por Barquero y Bosch (2015, como se citó en García, et al., 2019). En la primera etapa, se realiza un análisis de los libros de texto del quinto de secundaria y dos libros guía que usan los estudiantes de medicina del primer ciclo de universidad en su curso de Matemática. En la segunda fase, se diseña un REI y se analiza sus posibles recorridos. En la tercera fase, se implementa y se describe el REI propuesto en los estudiantes del primer ciclo de universidad.

5.1. Análisis preliminar

En esta primera fase, se muestra el análisis preliminar donde se desarrolla lo siguiente:

Análisis de libros

Para nuestro trabajo de investigación, era necesario realizar el análisis de libros desde el último año de educación secundaria como en el primer curso de Matemáticas que llevan los estudiantes de Medicina Humana del primer ciclo. La idea era determinar un MER dominante, el cual se detalla a continuación.

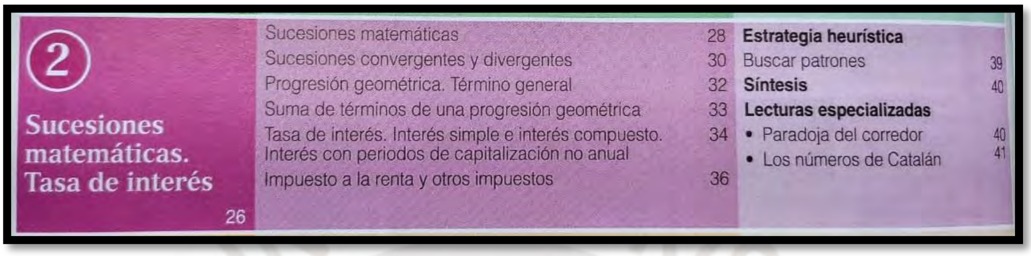
El Ministerio de Educación provee a los estudiantes de material didáctico, como libros teóricos y cuadernos de trabajos. En particular, los que se encuentran en el quinto año de educación secundaria usan dos textos. Por un lado, está ***Matemática 5 texto escolar libro consulta*** **(LC)** que trata aspectos teóricos y estrategias que podrían usar los estudiantes en las tareas planteadas en clase. Por otro lado, está ***Matemática 5 cuaderno de trabajo*** **(CT)** que es un texto que el estudiante puede resolver ejercicios y pone en práctica lo aprendido.

Al momento de buscar el tema de funciones en el LC y CT, se encuentra explícitos teoría y problemas en distintas secciones relacionado a la función cuadrática y funciones trigonométricas seno y coseno. Sin embargo, no se evidencia el contenido de función exponencial a pesar de que este tema había sido considerado dentro del Currículo Nacional (2016) (dentro de las capacidades que deben desarrollar un estudiante en el nivel 7 de la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”).

No obstante, de acuerdo con el análisis epistemológico, se observa que hay elementos que podría provocar la génesis de la función exponencial como son las progresiones geométricas, que aparecen en la sección 2 del LC, provista de una variedad de propiedades y aplicaciones en Finanzas como se indica en la Figura 11.

Figura 11

Tema de sucesiones.



2 Sucesiones matemáticas. Tasa de interés 26

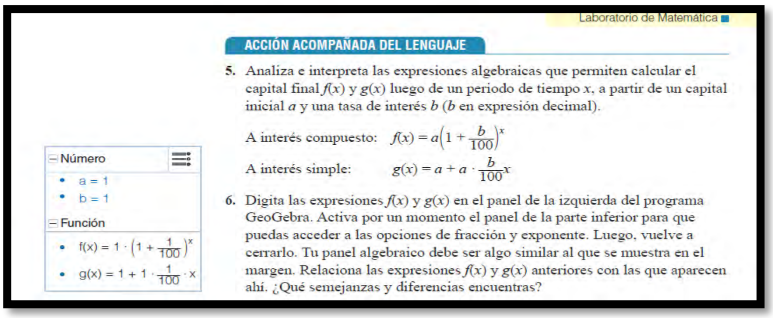
Sucesiones matemáticas	28	**Estrategia heurística**	
Sucesiones convergentes y divergentes	30	Buscar patrones	39
Progresión geométrica. Término general	32	**Síntesis**	40
Suma de términos de una progresión geométrica	33	**Lecturas especializadas**	
Tasa de interés. Interés simple e interés compuesto. Interés con periodos de capitalización no anual	34	• Paradoja del corredor	40
Impuesto a la renta y otros impuestos	36	• Los números de Catalán	41

Nota. En esta sección aparece el tema de progresiones geométricas**.** Fuente: Minedu (2016a, p. 2)

Por otro lado, en el CT, se encuentra dos expresiones. Por un lado, está una de tipo función exponencial, que modela el capital final luego de un periodo de tiempo x, a una tasa de interés compuesto. Por otro lado, está otra de tipo función lineal, que modela el capital final, a una tasa de interés simple como se muestra en la Figura 10. Se motiva al estudiante a construir dichas funciones mediante el software GeoGebra para que identifique las diferencias entre las gráficas, mediados por el software. Luego, mediante la comparación de sus gráficas, se responder a la pregunta: ¿cuál es el depósito a tasa de interés, que conviene más?

Figura 12

Problema del CT donde se emplea notación de función exponencial.



Laboratorio de Matemática

ACCIÓN ACOMPAÑADA DEL LENGUAJE

5. Analiza e interpreta las expresiones algebraicas que permiten calcular el capital final $f(x)$ y $g(x)$ luego de un periodo de tiempo x, a partir de un capital inicial a y una tasa de interés b (b en expresión decimal).

A interés compuesto: $f(x) = a\left(1 + \frac{b}{100}\right)^x$

A interés simple: $g(x) = a + a \cdot \frac{b}{100}x$

6. Digita las expresiones $f(x)$ y $g(x)$ en el panel de la izquierda del programa GeoGebra. Activa por un momento el panel de la parte inferior para que puedas acceder a las opciones de fracción y exponente. Luego, vuelve a cerrarlo. Tu panel algebraico debe ser algo similar al que se muestra en el margen. Relaciona las expresiones $f(x)$ y $g(x)$ anteriores con las que aparecen ahí. ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras?

Número
- $a = 1$
- $b = 1$

Función
- $f(x) = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^x$
- $g(x) = 1 + 1 \cdot \frac{1}{100} \cdot x$

Nota. Actividad que muestra una expresión del tipo función exponencial. Fuente: Minedu (2016b).

Aunque, parece estar ausente el objeto función exponencial en el LC y CT, se debe recordar que el estudio epistemológico nos muestra que las sucesiones conocidas como progresiones geométricas forman parte de la génesis de la función exponencial (Vargas, 2012). Por otro lado, la modelización propuesta por el REI tiene la intención de usar, en un inicio, el tema de sucesiones y según cómo se abordan los datos se podría emplear las progresiones para luego generar, por ejemplo, las funciones de tipo lineal o exponencial.

Por esta razón, se usará dos textos escolares **LC** y **CT** del quinto año de educación secundaria y dos textos universitarios ***Matemática Básica 1*** **(LS1) y *Matemática Básica*** **(LS2)**, que son usados como libros guía en el curso de Matemática del primer ciclo de una universidad del Perú. El fin es realizar un análisis praxeológico sobre temas de funciones y relacionados a estos como las sucesiones, particularmente, el tema de progresión geométrica. Esto se debe a que son parte de los saberes previos de los estudiantes y podría usarse al momento de aplicar el REI.

A continuación, se categoriza los tipos de tareas encontrados en los textos, que nos ayudarán a determinar cómo se muestra o se propone la enseñanza de saberes de funciones y relacionado a ellos.

Tabla 1

Descripción de los tipos de tareas de saberes de funciones o relacionados a ellos

Tipo de Tarea (T)	**Descripción del tipo de tarea**	**LC**	**CT**	**LS1**	**LS2**
T_1	Calcular el límite de una sucesión t_1 : Calcular el límite de la sucesión $a_n = \frac{an^2+bn+c}{dn+c}$	5	1		
T_2	Hallar términos de una sucesión $t_{2,1}$: Hallar el término general de una sucesión $t_{2,2}$: Hallar los k-primeros términos de una sucesión dado una secuencia de figuras	3	15		
T_3	Determinar la posición del término de una sucesión que es igual a un número N dado	1	2		

	t_3:Determinar la posición del término de una sucesión, sustraída de una secuencia de conjuntos de objetos donde el término a hallar posee N elementos.				
T_4	Construir sucesiones $t_{4,1}$: Construir una sucesión relacionado a una situación problemática $t_{4,2}$: Construir los k primeros términos de una PG decreciente		2		
T_5	Determinar el tipo de sucesión t_5:Determinar si la sucesión es convergente, divergente u oscilante	1	1		
T_6	Representar gráficamente una sucesión t_6: Representar gráficamente una sucesión basándose en una patrón o secuencia de imágenes	1	2		
T_7	Determinar diferencias entre interés simple e interés compuesto t_7:Determinar diferencias entre interés simple e interés compuesto cuando se conoce el capital inicial y la tasa de interés	1	2		
T_8	Calcular la suma de los términos de una PG $t_{8,1}$: Calcular la suma de los n primeros términos de una PG $t_{8,2}$: Calcular la suma de los términos de una PG decreciente	2	3		
T_9	Calcular el capital final de un depósito $t_{9,1}$: Calcular el capital final de un depósito a una tasa de interés simple al cabo de n periodos $t_{9,2}$: Calcular el capital final de un depósito a una tasa de interés compuesta al cabo de n periodos de capitalización	3	1		
T_{10}	Calcular el interés ganado de un depósito $t_{10,1}$: Calcular el interés ganado de un depósito a una tasa de interés simple al cabo de n periodos	5	3		

	$t_{10,2}$: Calcular el interés ganado de un depósito a una tasa de interés compuesta al cabo de n periodos de capitalización				
T11	Expresar el área de una región elemental, dada una condición de la región, en términos de uno de sus elementos $t_{11,1}$: Expresar el área de una región triangular equilátera en términos de uno de sus lados $t_{11,2}$: Expresar el área de una región rectangular con perímetro dado en función de uno de sus lados	2	2		
T12	Expresar la regla de un patrón de figuras $t_{12,1}$:Expresar la regla de un patrón de figuras conformado por bloques o tapitas		1		
T13	Calcular el valor de una función evaluado en un número, dada su regla $t_{13,1}$: Calcular el valor de una función elemental en un número (lineal, cuadrática, exponencial, logaritmo, etc.) dada su regla $t_{13,1}$: Calcular el valor de una función por tramos en un número dada su regla		4	8	4
T14	Determinar las coordenadas de puntos de la gráfica de una función, dada su regla $t_{14,1}$:Determinar las coordenadas del vértice de una parábola, dada la regla de la función cuadrática $t_{14,2}$:Determinar las coordenadas de un punto de la gráfica dando valores a x, dada la regla de la función cuadrática		7		
T15	Determinar si una parábola se abre hacia arriba o abajo t_{15}:Determinar si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo, dada su representación como función cuadrática		5		
T16	Hallar la regla de una función $t_{16,1}$:: Hallar la regla de una función cuadrática cuya gráfica se oriente hacia arriba o hacia abajo y que este muy contraída o dilatada, respecto a la gráfica de la función cuya regla es $f(x) = x^2$		6	62	68

	$t_{16,2}$: Hallar la regla de una función cuadrática cuya gráfica pasa por puntos dados del plano cartesiano $t_{16,3}$: Hallar la regla de una función lineal f si se conocen los valores de $f(x_1)$ y $f(x_2)$ dados x_1 y x_2 $t_{16,4}$: Hallar la regla de la función cuadrática f, si se conocen los valores de $f(x_1), f(x_2)$ y $f(x_3)$. Para x_1, x_2 y x_3 dados Hallar la regla de correspondencia que representa una función, producto de una operación elemental entre f y g, dada sus reglas $t_{16,5}$: Hallar $f+g$, dada las reglas de las funciones f y g $t_{16,6}$: Hallar $f-g$, dada las reglas de las funciones f y g $t_{16,7}$: Hallar $f.g$, dada las reglas de las funciones f y g $t_{16,8}$: Hallar $\frac{f}{g}$, dada las reglas de las funciones f y g $t_{16,9}$: Hallar $f \circ g$, dada las reglas de las funciones f y g $t_{16,10}$: Hallar la función inversa de f dada su regla $t_{16,11}$: Hallar la regla de una función lineal costo de producir x unidades de un producto, dado los costos fijo y unitario $t_{16,12}$: Hallar la regla de una función lineal el costo de producir x unidades de un producto, dado el costo marginal y el costo de producir una cantidad dada $t_{16,13}$: Hallar la regla de la función lineal ingreso por vender x unidades de un producto, dado el precio de venta $t_{16,14}$: Hallar la regla de una función ganancia a partir de las reglas de las funciones costo e ingreso				

	$t_{16,15}$: Hallar la regla de correspondencia de una función exponencial de la forma $f(x) = b^x$ dado un punto de su gráfica $t_{16,16}$: Hallar la regla de correspondencia de la función compuesta de dos funciones por tramos con componentes de tipo exponencial, logaritmo u otras funciones elementales Hallar la regla de correspondencia de la función inversa de una función, dada su regla de correspondencia $t_{16,17}$: Hallar la regla de correspondencia de la función inversa de una función de tipo exponencial o logaritmo dada su la regla de correspondencia $t_{16,18}$: Hallar la regla de correspondencia de la función inversa de una función por tramos con tramos de tipo exponencial, logarítmico u otras funciones elementales; dada su regla de correspondencia				
T_{17}	Calcular el máximo o mínimo valor de una función $t_{17,1}$:Calcular la máxima altura a la que se encuentra un objeto, si la trayectoria de este, en un instante t de tiempo se expresa como una función cuadrática $t_{17,2}$: Calcular el mínimo costo de producción, si el costo de producir x unidades se expresa como una función cuadrática $t_{17,3}$: Calcular el máximo ingreso de una empresa que ofrece servicio de cable, si el ingreso está en función del aumento al pago del servicio y está representada por una función cuadrática $t_{17,4}$:Calcular el valor máximo y mínimo de la función senoidal: $f(x) = asen(bx + c) + d$ $t_{17,5}$: Calcular la ganancia máxima de una empresa si la función cuadrática P representa las ganancias de dicha empresa por la venta de x unidades de cierto producto	3	8	8	8

	$t_{17,6}$: Calcular la cantidad máxima demandada, dada la regla de la función lineal ó cuadrática de la demanda $t_{17,7}$: Calcular el mínimo precio con la que se ofrece cierto producto, dada la regla de la función lineal o cuadrática oferta $t_{17,8}$: Hallar la ganancia máxima de una empresa, donde la ganancia por vender x unidades de un producto se representa por una función cuadrática				
T_{18}	Calcular en qué valor la función alcanza su valor máximo o mínimo $t_{18,1}$: Calcular en que instante de tiempo, un objeto alcanza su altura máxima, si la trayectoria de este, en un instante de tiempo t se expresa mediante una función cuadrática $t_{18,2}$: Calcular las unidades que deben producirse para que el costo de producción sea mínimo, si el costo de producción de x unidades se expresa como una función cuadrática $t_{18,3}$: Calcular el aumento máximo del pago del servicio que ofrece una empresa de cable, si el ingreso que está en función del aumento al pago del servicio está representado por una función cuadrática $t_{18,4}$:Calcular cuantas unidades se deben vender para obtener la máxima ganancia de una empresa, si la función cuadrática P representa la ganancia de dicha empresa por la venta de x unidades de cierto producto.	3	6		12
T_{19}	Calcular las dimensiones de una región poligonal dada su perímetro $t_{19,1}$: Calcular las dimensiones de una región rectangular de perímetro dado cuando el área de la región es máxima.		2		
T_{20}	Graficar una función Graficar una función cuadrática, dada su regla de correspondencia $t_{20,1}$:Graficar la función: $f(x) = ax^2$	7	5	52	165

	$t_{20,2}$:Graficar la función: $f(x) = ax^2 + c$ $t_{20,3}$:Graficar la función: $f(x) = ax^2 + bx$ $t_{20,4}$:Graficar la función: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $t_{20,5}$:Graficar la función: $f(x) = a(x-p)^2 + q$ Graficar funciones del tipo seno y coseno, dada su regla de correspondencia $t_{20,6}$: Graficar la función: $f(x) = sen(x \pm c)$ ó $f(x) = cos(x \pm c)$ $t_{20,7}$: Graficar la función: $f(x) = sen(x) \pm c$ ó $f(x) = cos(x) \pm c$ $t_{20,8}$: Graficar función: $f(x) = a.sen(x)$ ó $f(x) = a.cos(x)$ $t_{20,9}$: Graficar función: $f(x) = sen(ax)$ ó $f(x) = cos(ax)$ $t_{20,10}$: Graficar función: $f(x) = Asen(Bx + C) + D$ Graficar la función dada su regla a partir de una función elemental f como las funciones constante, lineal, cuadrática, raíz cuadrada, valor absoluto, signo y máximo entero $t_{20,11}$: Graficar una función del tipo $f(x) + c$ $t_{20,12}$: Graficar una función del tipo $f(x-c)$ $t_{20,13}$: Graficar una función del tipo $af(x)$ con $a > 0$ $t_{20,14}$: Graficar una función del tipo $f(ax)$ con $a > 0$ $t_{20,15}$: Graficar una función del tipo $f(-x)$ $t_{20,16}$: Graficar una función del tipo $-f(x)$ $t_{20,17}$: Graficar una función del tipo $Af(Bx + C) + D$ $t_{20,18}$: Graficar de una función de tipo exponencial a partir de su regla de correspondencia				

	$t_{20,19}$: Graficar una función de tipo logarítmico a partir de su regla de correspondencia $t_{20,20}$: Graficar una función por tramos con regla de correspondencia dada				
T_{21}	Comparar las gráficas de funciones t_{21}:Comparar las gráficas de funciones cuadráticas del tipo $f(x) = ax^2$	1	1		
T_{22}	Identificar si una función pasa por puntos dados t_{22}:Identificar dentro de un grupo de reglas de funciones cuadráticas, cuál de ellas pasa por un conjunto de puntos		1		
T_{23}	Hallar el dominio de una función $t_{23,1}$: Hallar el dominio de una función cuadrática según el contexto $t_{23,2}$: Hallar el dominio de una función (lineal, cuadrática, exponencial, logaritmo o combinación de funciones elementales) dada su regla $t_{23,3}$: Hallar el dominio de la función $f \circ g$, dada las reglas de las funciones f y g		4	25	127
T_{24}	Graficar funciones usando Geogebra $t_{24,1}$: Graficar por medio de Geogebra, una función del tipo: $f(x) = asen(bx + c) + d$, usando como parámetros a, b, c y d	1	4		
T_{25}	Determinar el tipo de función que modela el movimiento de un objeto. $t_{25,1}$:Determinar el tipo de función que modela el movimiento de un objeto del punto de una rueda		2		
T_{26}	Determinar la amplitud de una función senoidal del tipo seno o coseno, a partir de su regla $t_{26,1}$:Determinar la amplitud de una función del tipo seno, a partir de su regla $t_{26,2}$:Determinar la amplitud de una función del tipo coseno, a partir de su regla		2		
T_{27}	Determinar el periodo de una función trigonométrica		1		

	t_{27}:Determinar el periodo de una función sinusoidal, a partir de su regla				
T28	Hallar el rango de una función $t_{28,1}$: Hallar el rango de una función dada su regla $t_{28,2}$: Hallar el rango de una función inyectiva dado su dominio			28	102
T29	Hallar los valores a y b de una función lineal f: $f(x) = ax + b$. $t_{29,1}$: Hallar pendiente m y término independiente b de la regla de función lineal $f(x) = mx + b$, si se conocen los valores de $f(x_1)$ y $f(x_2)$ dados x_1 y x_2 $t_{29,2}$: Hallar a y b de la función $f(x) = ax + b$, si se cumple: $f(x + y) = f(x) + f(y)\ \forall\, x, y$ si se conoce el valor de $f(x_0)$ para un x_0 dado				4
T30	Demostrar la propiedad de una función dada su regla t_{30}:Demostrar que una función $f(x) = a^x$ cumple: $f(x + y) = f(x)f(y)$			1	2
T31	Hallar los valores de a y b de un conjunto de pares ordenados t_{31}: Hallar los valores de a y b de un conjunto de pares ordenados que representan una función que contiene a pares ordenados que depende de a y b			1	2
T32	Hallar el conjunto de pares ordenados que representa una función $t_{32,1}$: Hallar $f + g$, dada los conjuntos de pares ordenados que representan las funciones f y g			8	17

	$t_{32,2}$: Hallar $f - g$, dada los conjuntos de pares ordenados que representan las funciones f y g $t_{32,3}$: Hallar $f.g$, dada los conjuntos de pares ordenados que representan las funciones f y g $t_{32,4}$: Hallar $\frac{f}{g}$, dada los conjuntos de pares ordenados que representan las funciones f y g $t_{32,5}$: Hallar $f \circ g$, dada los conjuntos de pares ordenados de las funciones f y g $t_{32,6}$: Hallar el conjunto de pares ordenados que representa una función exponencial dado su dominio y regla de correspondencia				
T_{33}	Encontrar posibles reglas de correspondencia $t_{33,1}$: Encontrar posibles reglas de correspondencia de una función f ó g, si se conocen las reglas de las funciones $f \circ g$ ó $g \circ f$ y f. $t_{33,2}$: Encontrar posibles reglas de correspondencia de una función g, si se conocen las reglas de las funciones cuadráticas $f \circ g$ y f $t_{33,3}$: Encontrar posibles reglas de correspondencia de una función g, si se conocen la regla de la función cuadrática $g \circ f$ y la función lineal f.			3	3
T_{34}	Determinar si es inyectiva una función f $t_{34,1}$:Determinar si es inyectiva una función del tipo (lineal, cuadrática, exponencial, logaritmo combinación de elementales) dada su regla			9	34
T_{35}	Determinar si la función f es sobreyectiva dada su regla t_{35}:Determinar si la función f del tipo (lineal, cuadrática, exponencial, logaritmo o combinación de elementales) es sobreyectiva dada su regla			5	4

T_{36}	Determinar si la función f es biyectiva dada su regla. t_{36}:Determinar si la función f del tipo (lineal, cuadrática, exponencial, logaritmo o combinación de funciones elementales) es biyectiva dada su regla			5	5
T_{37}	Hallar punto de intersección de dos funciones $t_{37,1}$: Hallar el punto de equilibrio usando las reglas de las funciones costo e ingreso del tipo lineal o cuadrática				4
T_{38}	Determinar por encima de qué precio ya no hay demanda según regla de la función demanda. $t_{41,1}$: Determinar por encima de qué precio ya no hay demanda según regla de la función cuadrática de la demanda				1
T_{39}	Simplificar expresiones t_{39}:Simplificar expresiones de operaciones elementales con logaritmos			4	
T_{40}	Determinar si existe la composición de dos funciones t_{40}:Determinar si existe la composición de dos funciones f y g por tramos que tienen componentes exponencial o logaritmo y otras funciones de tipo elemental			5	7
T_{41}	Determinar si es creciente una función t_{41}:Determinar si es creciente una función de tipo exponencial			6	
T_{42}	Determinar si una recta, dada su ecuación, es asíntota a la gráfica de una función $t_{42,1}$: Determinar si una recta dada su ecuación es asíntota horizontal a la gráfica de una función de tipo exponencial o logarítmica			7	

	$t_{42,2}$: Determinar si una recta dada su ecuación es asíntota vertical a la gráfica de una función de tipo exponencial o logarítmica				
T_{43}	Mostrar simetría respecto al origen de la gráfica de una función $t_{43,1}$:Mostrar simetría respecto al origen de la gráfica de una función de tipo logaritmo			4	
T_{44}	Hallar el conjunto solución de ecuaciones $t_{44,1}$: Hallar el conjunto solución de ecuaciones exponenciales de una variable $t_{44,2}$: Hallar el conjunto solución de sistemas de dos ecuaciones exponenciales de dos variables $t_{44,3}$: Hallar el conjunto solución de ecuaciones logarítmicas de una variable $t_{44,4}$: Hallar el conjunto solución de ecuaciones logarítmicas de dos a tres variables			97	
T_{45}	Hallar el conjunto solución de inecuaciones $t_{45,1}$:Hallar el conjunto solución de inecuaciones exponenciales de una variable $t_{45,2}$:Hallar el conjunto solución de inecuaciones logarítmicas de una variable			49	67
T_{46}	Graficar la determinada por el conjunto solución de una ecuación t_{46}: Graficar la región determinada por el conjunto de puntos que satisfacen una inecuación logarítmica de dos variables de la forma: $Log_{b(x,y)}f(x,y) < L$ o $Log_{b(x,y)}f(x,y) > L$			9	

De acuerdo con los tipos de tareas encontradas en la Tabla 1, se determinan sus respectivas técnicas en la Tabla 2.

Tabla 2

Descripción de las técnicas empleadas para el desarrollo de las tareas relacionadas a la noción de funciones

Tarea (t)	**Técnica: Descripción de los pasos de las técnicas**
t_1	τ_1: • Tabular los valores de n desde 1 y aumentando, para determinar los valores de a_n • Representar los valores obtenidos de a_n en una recta • Determinar si acerca a un valor de la recta
$t_{2,1}$	$\tau_{2,1}$: • Reconocer patrones en las sucesiones • Describir el término n-ésimo
$t_{2,2}$	$\tau_{2,2}$: • $\tau_{2,1}$ • Usar la regla de la sucesión a_n y dar valores a n desde 1 hasta k .
t_3	τ_3: • $\tau_{2,1}$ • Resolver la ecuación: $a_n = N$
$t_{4,1}$	$\tau_{4,1}$: Construir reglas de formación de términos que representen una secuencia de números o figuras
$t_{4,2}$	$\tau_{4,2}$: Construir una PG tomando una razón $0 < r < 1$
t_5	τ_5: • τ_1 • Identificar el tipo de sucesión entre convergente, divergente y oscilante
t_6	τ_6: Tomar valores n en el eje X, luego reemplazarlos en la regla de la sucesión para obtener los a_n que serán valores en el eje Y, luego representar los puntos $(n; a_n)$ en el plano coordenado
t_7	τ_7: • Graficar mediante Geogebra expresiones matemáticas (funciones) que modelan el capital final partiendo de un mismo capital inicial en función del tiempo en años, a tasas de interés simple y compuesta • Observar y comparar los capitales finales en el mismo periodo de tiempo.
$t_{8,1}$	$\tau_{8,1}$: Usar fórmula de suma de n términos de una PG: $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

$t_{8,2}$	$\tau_{8,2}$: Usar fórmula de suma de términos de una PG: $S = \frac{a_1}{1-r}$
$t_{9,1}$	$\tau_{9,1}$: • $\tau_{10,1}$ • Realizar: $C_f = C_o + i$
$t_{9,2}$	$\tau_{9,2}$: Usar fórmula del capital final de un depósito a interés compuesto: $C_f = C_o\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
$t_{10,1}$	$\tau_{10,1}$: Usar fórmula de interés acumulado de un depósito a interés simple en n periodos: $i = nrC_o$
$t_{10,2}$	$\tau_{10,2}$: • $\tau_{9,2}$ • Realizar: $i = C_f - C_o$
$t_{11,1}$	$\tau_{11,1}$: • Trazar una altura del triángulo equilátero para formar triángulos rectángulos • Hallar dicha altura en términos del lado del triángulo equilátero por el teorema de Pitágoras • Usar fórmula del área de la región triangular
$t_{11,2}$	$\tau_{11,2}$: • Asignar variables a los lados del rectángulo • Formar una ecuación con el valor del perímetro y los lados del rectángulo • Despejar uno de los lados en función del otro • Usar formula del área de la región rectangular
t_{12}	τ_{12}: • Reconocer y sustraer la secuencia numérica guiándose de la figura mostrada • Formular la regla del patrón usando operaciones básicas
t_{13}	τ_{13}: Reemplazar x en la regla de f es decir: $y = f(x)$
$t_{14,1}$	$\tau_{14,1}$: Hallar el vértice de coordenadas $(h; k)$, por medio de las expresiones: $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$
$t_{14,2}$	$\tau_{14,1}$: Usar $\tau_{1,3}$ para formar el par $(x; y)$
t_{15}	τ_{15}: En una función cuadrática f, cuya regla es: $f(x) = ax^2 + bx + c$ • Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba

	• Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo
$t_{16,1}$	$\tau_{16,1}$: Usar la regla general de una función cuadrática $f: f(x) = ax^2 + bx + c$ • Tomar un valor de a, considerando τ_{15} • Tomar un valor de a, talque si la parábola se contrae ($0 < \lvert a \rvert < 1$) o se dilata ($\lvert a \rvert > 1$) respecto a la función $y = x^2$
$t_{16,2}$	$\tau_{16,2}$: Encontrar la secuencia de números sobre las ordenadas, considerando formación potencias de exponente 2
$t_{16,3}$	$\tau_{16,3}$: Usar la regla de la función lineal $f(x) = ax + b$ y los valores de $f(x_1)$ y $f(x_2)$, para formar sistema de 2 ecuaciones con variables a y b, resolver el sistema y reemplazar los valores hallados en la regla de f.
$t_{16,4}$	$\tau_{16,4}$: Usar la regla de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y los valores de $f(x_1), f(x_2)$ y $f(x_3)$, para formar sistema de 3 ecuaciones con variables a, b y c, resolver el sistema y reemplazar los valores hallados en la regla de f
$t_{16,5}$, $t_{16,6}$ $t_{16,7}$ $t_{16,8}$	$\tau_{32,1}, \tau_{32,2}$, $\tau_{32,3}$, y $\tau_{32,4}$ respectivamente
$t_{16,9}$	$\tau_{16,9}: \tau_{32,5}$
$t_{16,10}$	$\tau_{16,10}$: Sea f^* la función inversa de f, se halla resolviendo la ecuación $f\big(f^*(x)\big) = x \vee f^*\big(f(x)\big) = x$. Otra forma es despejando la variable x de la regla de f, luego hacer un cambio de variable de x por y, y definir a y como $f^*(x)$
$t_{16,11}$:	$\tau_{16,11}$: Identificar según el contexto la pendiente m y término independiente b como costo fijo y unitario
$t_{16,12}$:	$\tau_{16,12}$: Identificar la pendiente m como costo marginal, luego usar el valor del costo en el valor dado para hallar b
$t_{16,13}$	$\tau_{16,13}$: Usar la regla del Ingreso si precio de venta es a y se vende x unidades, el ingreso es $I(x) = ax$
$t_{16,14}$	$\tau_{16,14}$: Dadas las reglas de las funciones costo C e ingreso I Definir como regla de la ganancia a G: $G(x) = I(x) - C(x)$
$t_{16,15}$	$\tau_{16,15}: \tau_{13}$
$t_{16,16}$	$\tau_{16,16}$: • Hacer la composición de las funciones componentes de ambas funciones por tramos si estas existen usando τ_{12} • Definir la regla de la composición de $f \circ g$, a partir de las composiciones de componentes halladas

$t_{16,17}$	$\tau_{16,17}$: • Cambiar $f(x)$ por y • Aplicar cambio de variable • Despejar variable dependiente y • Definir $y = f^{*}(x)$ como la función inversa de f
$t_{16,18}$	$\tau_{16,18}$: Aplicar τ_1^6 a cada una de las funciones componentes de la función por tramos
$t_{17,1}$, $t_{17,2}$, $t_{17,3}$	$\tau_{17,1} = \tau_{17,2} = \tau_{17,3}$: • Usar τ_{15} y $\tau_{14,1}$ • interpretar las coordenadas del vértice de la parábola según el contexto
$t_{17,4}$	$\tau_{17,4}$: • Graficar usando $\tau_{1,5}$ ó τ_2 ó Desmos • Según la gráfica obtenida determinar el máximo y el mínimo
$t_{17,5}$	$\tau_{17,5}$: • Sea la función cuadrática f: $f(x) = ax^2 + bx + c$ • Determinar si la parábola se abre hacia arriba $(a > 0)$ o hacia abajo $(a < 0)$ y • Hallar el vértice $V(h,k)$ con $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = f(h)$ • Graficar f en el primer cuadrante • Si el vértice se encuentra en el primer cuadrante, su máximo o mínimo es k, sino hay que observar el rango de f en la gráfica de f
$t_{17,6}$	$\tau_{17,6}$: Graficar la función demanda como una función lineal o como cuadrática usando $\tau_{17,5}$ y luego, determinar su máximo
$t_{17,7}$	$\tau_{17,7}$: Graficar la función oferta como una función lineal o como cuadrática usando $\tau_{17,5}$ y determinar su mínimo
$t_{17,8}$	Graficar la función cuadrática usando $\tau_{17,5}$
$t_{18,1}$, $t_{18,2}$ $t_{18,3}$, $t_{18,4}$	• $\tau_{17,1}, \tau_{17,2}\tau_{17,3}$ y $\tau_{17,5}$ respectivamente
t_{19}	τ_{19}: • Usar $\tau_{11,2}$ e identificar que la expresión que determina el área de la región rectangular en función de uno de sus lados se puede expresar como una función cuadrática

	• $\tau_{17,1}$
$t_{20,1}$	$\tau_{20,1}$: Para graficar $f(x) = ax^2$ • Usar como vértice $(0; 0)$ y el eje de simetría al eje Y. • Usar $\tau_{16,1}$ y terminar de graficar haciendo una tabulación
$t_{20,2}$	$\tau_{20,2}$: Para graficar $f(x) = ax^2 + c$ • Graficar la función f, definida como $f(x) = ax^2$ con $\tau_{10,1}$ • Si $c > 0$ ó $c < 0$, trasladar verticalmente la gráfica de la función f, definida como $f(x) = ax^2$; c unidades hacia arriba o abajo respectivamente
$t_{20,3}$	$\tau_{20,3}$: Para graficar $f(x) = ax^2 + bx$ • $\tau_{14,1}$ • Orientarse con el eje de simetría es la recta $x = -\frac{b}{2a}$, la cual es paralela al eje Y • Graficar el vértice y algunos puntos simétricos al eje de simetría
$t_{20,4}$	$\tau_{20,4}$: Para graficar $f(x) = ax^2 + bx + c$ • Graficar la función f, definida como $f(x) = ax^2 + bx$, mediante $\tau_{10,3}$. • Si $c > 0$ ó $c < 0$, trasladar la gráfica de la función f, c unidades hacia arriba o abajo respectivamente.
$t_{20,5}$	$\tau_{20,5}$: Para graficar $f(x) = a(x-p)^2 + q$ • Graficar la función f, definida como $f(x) = ax^2 + q$, mediante $\tau_{10,2}$ • Si $p > 0$ ó $p < 0$, trasladar horizontalmente la gráfica de la función f, p unidades a derecha o izquierda respectivamente
$t_{20,6}$	$\tau_{20,6}$: Realizar traslación horizontal $f(x)$ de c unidades a derecha o izquierda para obtener la gráfica de una función cuya regla es $f(x-c)$ ó $f(x+c)$ respectivamente
$t_{20,7}$	$\tau_{20,7}$: Realizar traslación vertical $f(x)$ de c unidades hacia arriba o abajo para obtener la gráfica de una función cuya regla es $f(x) = sen(x) + c$ ó $f(x) = sen(x) - c$, respectivamente
$t_{20,8}$	$\tau_{20,8}$: Sea $y = f(x)$ una función y $a > 0$ • Si $0 < a < 1$, la gráfica de $y = af(x)$, se obtiene realizando una comprensión vertical a la gráfica de $f(x)$ cuya razón es a • Si $a > 1$, la gráfica de $y = af(x)$, se obtiene realizando un alargamiento vertical a la gráfica de $f(x)$ cuya razón es a

$t_{20,9}$	$\tau_{20,9}$: Sea $y = f(x)$ una función y $a > 0$. • Si $0 < a < 1$, la gráfica de $y = f(ax)$, se obtiene realizando un alargamiento horizontal a la gráfica de $f(x)$ cuya razón es $\frac{1}{a}$ • Si $a > 1$, la gráfica de $y = f(ax)$, se obtiene realizando una comprensión horizontal a la gráfica de $f(x)$ cuya razón es $\frac{1}{a}$
$t_{20,10}$	$\tau_{20,10}$: • $\tau_{20,6}; \tau_{20,7}; \tau_{20,8}$ y $\tau_{20,9}$
$t_{20,11}$	$\tau_{20,11}$: Para graficar una función del tipo $f(x) + c$, se desplaza la gráfica de f verticalmente, c unidades hacia arriba si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$
$t_{20,12}$	$\tau_{20,12}$: Para graficar una función del tipo $f(x - c)$, se desplaza la gráfica de f horizontalmente, c unidades hacia derecha si $c > 0$ y hacia izquierda si $c < 0$
$t_{20,13}$	$\tau_{20,13}$: Para graficar una función del tipo $af(x)$ con $a > 0$, su gráfica se estira verticalmente un factor a en base al eje X , si $a > 1$. Por otro lado, su gráfica se encoge verticalmente un factor de a en base al eje X, si $0 < a < 1$
$t_{20,14}$	$\tau_{20,14}$: Para graficar una función del tipo $f(ax)$ con $a > 0$, su gráfica se encoge horizontalmente un factor a en base al eje Y si $a > 1$. Por otro lado, su gráfica se estira horizontalmente un factor de a en base al eje Y, si $0 < a < 1$
$t_{20,15}$	$\tau_{20,15}$: Para graficar una función del tipo $f(-x)$, se hace rotar la gráfica de f alrededor del eje Y (rotación de 180°)
$t_{20,16}$	$\tau_{20,16}$: Para graficar una función del tipo $-f(x)$, se hace rotar la gráfica de f alrededor del eje X (rotación de 180°)
$t_{20,17}$	$\tau_{20,17}$: Para graficar una función del tipo $Af(Bx + C) + D$, se usan las técnicas anteriores $\tau_{20,1}, \tau_{20,2}, \tau_{20,3}, \tau_{20,4}, \tau_{20,5}$ y $\tau_{20,6}$
$t_{20,18}$	$\tau_{20,18}$: Tomar como referencia uno de los casos de la gráfica de una función exponencial de la forma: $f(x) = b^x$ Caso 1: Si $b > 1$ entonces f es creciente. Caso 2: Si $0 < b < 1$ entonces f es decreciente
$t_{20,19}$	$\tau_{20,19}$:

	• Encontrar la función inversa de la función de tipo logaritmo usando la definición: $f(x) = Log_b(x) \leftrightarrow f^*(x) = b^x$ • Graficar f^* usando τ^9 Graficar el reflejo de la gráfica f^* respecto a la recta diagonal $y = x$
$t_{20,20}$	$\tau_{20,20}$: Aplicar para cada función componente del tipo exponencial o logarítmico, de la función por tramos: $T_{20,18}$ y $T_{20,19}$ Para otros tipos de función componente, usar como referencia: las gráficas de las funciones elementales
t_{21}	$\tau_{21}: \tau_{20,1}$
t_{22}	$\tau_{22}: \tau_{13}$
$t_{23,1}$	$\tau_{23,1}$: Observar qué tipo de valores puede admitir la variable independiente x de la función cuadrática, según las restricciones que da el contexto para esta variable
$t_{23,2}$	$\tau_{23,2}$: Dada la regla de una función f, su dominio se determina analizando todos los posibles valores que puede tomar x de tal manera que $f(x)$ sea real, salvo en que el dominio sea especificado
$t_{23,3}$	$\tau_{23,3}: \tau_{32,5}$
t_{24}	τ_{24}: Usando Geogebra definir la regla de f y parámetros a, b, c y d mediante deslizadores
t_{25}	τ_{25}: Usar τ_2 y manipular los parámetros a, b, c y d, hasta encontrar los que satisfacen el movimiento de la rueda
t_{26}	τ_{26}: Sean las gráficas de las funciones definidas por: $y = Asen(Bx - C)$; $y = Acos(Bx - C)$ tienen amplitud $\|A\|$
t_{27}	τ_{27}: Sean las gráficas de las funciones definidas por: $y = Asen(Bx - C)$; $y = Acos(Bx - C)$ tienen periodo $T = \frac{2\pi}{B}$ donde $B > 0$
$t_{28,1}$	$\tau_{28,1}$: Dada la regla de una función f, su rango se determina despejando la variable x en función de y, luego se analiza todos los posibles valores que puede tomar y, de tal manera que x sea real
$t_{28,2}$	$\tau_{28,2}$: Si la función es inyectiva con dominio $[a, b]$, se tiene dos casos: Caso 1: Si f es creciente el rango de f es $[f(a), f(b)]$ Caso 2: Si f es decreciente el rango de f es $[f(b), f(a)]$

$t_{29,1}$	$\tau_{29,1}$: Con los valores de $f(x_1)$, $f(x_2)$ y la regla $f(x) = mx + b$, formar sistema de dos ecuaciones de variables m y b, resolver el sistema
$t_{29,2}$	$\tau_{29,2}$: Usar la propiedad $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y expresarlo según la regla de f , deducir que $b = 0$, luego usar el valor de $f(x_0)$ para hallar el valor de a
$t_{29,3}$	$\tau_{23,2}\ y\ \tau_{20,18}$
t_{30}	τ_{30}: Reemplazar la regla de f en la expresión dada, y usar propiedades de potencia de bases iguales para verificar igualdad
t_{31}	τ_{31}: Usar la propiedad de función: Si $(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b = c$
$t_{32,1}$	$\tau_{32,1}$: Usar definición de suma de funciones $i)\ Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g)$ $ii)\ (f+g)(x) = f(x) + g(x);\quad \forall x \in Dom(f+g)$
$t_{32,2}$	$\tau_{32,2}$: Usar definición de diferencia de funciones $i)\ Dom(f-g) = Dom(f) \cap Dom(g)$ $ii)\ (f-g)(x) = f(x) - g(x);\quad \forall x \in Dom(f-g)$
$t_{32,3}$	$\tau_{32,3}$: Usar definición de producto de funciones $i)\ Dom(f.g) = Dom(f) \cap Dom(g)$ $ii)\ (f.g)(x) = f(x).g(x);\quad \forall x \in Dom(f.g)$
$t_{32,4}$	$\tau_{32,4}$: Usar definición de cociente de funciones $i)\ Dom\left(\frac{f}{g}\right) = Dom(f) \cap Dom(g) - \{x \in Dom(g): g(x) = 0\}$ $ii)\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)};\quad \forall x \in Dom\left(\frac{f}{g}\right)$
$t_{32,5}$	$\tau_{32,5}$: Usar definición de composición de funciones $i)\ Dom(f \circ g) = \{x \mid x \in Dom(g)\ \wedge\ g(x) \in Dom(f)\}$ $ii)\ (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big);\quad \forall x \in Dom(f \circ g)$
$t_{32,6}$	$\tau_{32,6}$: τ_{13}
$t_{33,1}$	$\tau_{33,1}$: Completar cuadrados la regla de $f \circ g$ de tal forma que se asemeje a la forma de la regla de f. Luego identificar posibles reglas de g.

$t_{33,2}$	$\tau_{33,2}$: Completar cuadrados la regla de $g \circ f$, de tal forma que aparezca como variable la regla de f. Luego hacer cambio de variables para obtener la regla de g
t_{34}	τ_{34}: Usar definición: si $x_1, x_2 \in Dom(f)$ tal que $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$
t_{35}	τ_{35}: Hallar el rango con $\tau_{28,1}$ y determinar si coincide con el conjunto de llegada
t_{36}	τ_{36}: τ_{34} y τ_{35}
t_{37}	τ_{37}:Dadas las reglas de las funciones costo C e ingreso I Resolver la ecuación: $C(x) = I(x)$
t_{38}	τ_{38}: Interpretar y hallar en la regla de la demanda D el valor de $D(0)$
t_{39}	τ_{39}: Simplificar la expresión mediante propiedades fundamentales de los logaritmos como: • $Log_b(x \cdot y) = Log_b(x) + Log_b(y)$ • $Log_b(x^n) = n \cdot Log_b(x)$ • $Log_b(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} Log_b(x)$ • $Log_b\left(\frac{x}{y}\right) = Log_b(x) - Log_b(y)$ • $Log_b(x) = Log_{b^n}(x^n) = Log_{\sqrt[n]{b}}(\sqrt[n]{x})$ • $Log_{b^n}(x) = \frac{1}{n} Log_b(x)$ • $Log_{b^n}(x^m) = \frac{m}{n} Log_b(x)$ • $Log_b(x) \cdot Log_x(b) = 1$ $$Log_a(x) = \frac{Log_b(x)}{Log_b(a)}$$ Obtener: $log_b N = L \leftrightarrow N = b^L$. Usar método de reducción a base común para resolver la ecuación exponencial
t_{40}	τ_{40}: Si $Dom(f) \cap Ran(g) \neq \emptyset$ entonces la composición de funciones existe.

t_{41}	τ_{41}: Aplicar definición: Si x_1 , $x_2 \epsilon Dom(f)$ y $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
$t_{42,1}$	$\tau_{42,1}$: Aplicar Criterio para hallar Asíntota Horizontal: Si $f(x)$ tiende a un número real N cuando x tiende al ∞, entonces la gráfica de f tiene asíntota horizontal, cuya ecuación es $y = N$
$t_{42,2}$	$\tau_{42,2}$: Aplicar Criterio para hallar Asíntota Vertical: Si $f(x)$ tiende a ∞ cuando x tiende al x_0 , entonces la gráfica de f tiene asíntota vertical, cuya ecuación es $x = x_0$
t_{43}	τ_{43}: Demostrar que f es impar, es decir $f(-x) = -f(x)$; $\forall x \in Dom(f)$
$t_{44,1}$	$\tau_{44,1}$: • Simplificar la ecuación exponencial mediante operaciones elementales o cambio de variable a una ecuación exponencial del tipo: $a^x = b^y$ • Aplicar uno de los métodos: **Método de reducción a una base común** Si $b > 0$ y $b \neq 1 \rightarrow b^x = b^y \leftrightarrow x = y$ **Método de logaritmación** Sean $a, b > 0$ y $a, b \neq 1$ Si $a^x = b^y \leftrightarrow Log(a^x) = Log(b^y) \leftrightarrow xLog(a) = yLog(b)$
$t_{44,2}$	$\tau_{44,2}$: • Aplicar operaciones elementales entre las dos ecuaciones del sistema, para obtener una ecuación exponencial • $\tau_{44,1}$
$t_{44,3}$	$\tau_{44,3}$: • Encontrar el universo de la variable independiente, teniendo en cuenta que la expresión: $Log_b f(x)$ existe si: a. $b > 0 \wedge b \neq 1$.

	b. $f(x) > 0$ • Simplificar la ecuación logarítmica usando τ_3 o propiedades de la función logaritmo como la inyectividad o definición de logaritmo, hasta obtener ecuación o ecuaciones logarítmicas de la forma: $Log_b(x) = a$ Despejar x usando τ_2.
$T_{44,4}$	$\tau_{44,4}$: • Plantear ecuaciones equivalentes usando $\tau_{44,3}$ para cada ecuación del sistema de ecuaciones logarítmico sin expresiones logarítmicas • Resolver el sistema de ecuaciones equivalente considerando las posibles restricciones las variables
$T_{45,1}$	$\tau_{45,1}$: • Transformar las inecuaciones exponenciales en inecuaciones equivalentes sin exponenciales, mediante los casos: Caso 1. Si $1 < b$, entonces $b^{P(x)} < b^{Q(x)} \leftrightarrow P(x) < Q(x)$ Caso 2: Si $0 < b < 1$, entonces $b^{P(x)} < b^{Q(x)} \leftrightarrow P(x) > Q(x)$ Resolver la inecuación equivalente.
$T_{45,2}$	$\tau_{45,2}$: • Transformar las inecuaciones logarítmicas en inecuaciones equivalentes sin logaritmos mediante los casos: Caso 1. Sea $1 < b$, entonces: $Log_b(x) > m \leftrightarrow x > b^m \;\; \vee \;\; Log_b(x) < m \leftrightarrow 0 < x < b^m$ Caso 2: Si $0 < b < 1$, entonces: $Log_b(x) > m \leftrightarrow 0 < x < b^m \;\; \vee \;\; Log_b(x) < m \leftrightarrow x > b^m$ • Resolver la inecuación equivalente.
T_{46}	τ_{46}: • Sustraer inecuaciones a partir de $\tau_{45,2}$.

	• Graficar la intersección de las regiones que describen cada inecuación.

Las Tablas 1 y 2, nos indican que sobre los saberes relacionados a funciones en los textos analizados hay gran cantidad de tipo de tareas, lo cual determinó una cantidad de técnicas similar. Y sobre las tecnologías que justifican las técnicas, se ha evidenciado el uso de las definiciones de dominio y rango, de operaciones elementales entre funciones, definición de inyectividad, propiedades de funciones monótonas creciente y decreciente, propiedades en el trazado de la gráfica de funciones como la traslación vertical y horizontal, la reflexión, la contracción y la dilatación, propiedad del término n-ésimo de una sucesión, propiedades de ecuaciones e inecuaciones de tipo lineal, cuadrática, exponencial y logarítmica, tales tecnologías quedan justificadas en primer lugar por la teoría de funciones, seguido por la teoría de sucesiones y la teoría de ecuaciones e inecuaciones.

A continuación, comenzaremos a realizar el diseño matemático y didáctico según nuestra metodología.

5.2. Diseño y análisis a priori

A partir de aquí, se empezará a desarrollar la segunda fase de nuestra metodología; es decir, el análisis a priori comenzando por:

5.2.1. Diseño Matemático

A continuación, se define la pregunta generatriz de un REI potencial. Esto será por dos estudiantes del primer ciclo de la carrera de Medicina Humana de una universidad del Perú, que llevan de forma paralela el curso de Matemática.

Dicha cuestión generatriz es la siguiente:

Q_0: ¿En cuánto tiempo tras la llegada una nueva variante del COVID-19, una población como el Perú alcanzaría la inmunidad de rebaño?

La complejidad de la pregunta generatriz Q_0 determina que no pueda ser respondida directamente debido a nociones aún desconocidas por los estudiantes. Para poder dar respuesta a esta pregunta, es necesario aprender sobre el COVID-19, cómo se contagia uno de COVID, cómo se propaga en una población y sobre los argumentos matemáticos que podrían ayudar a describir el contagio por COVID-19. Esto origina muchas preguntas.

Se dará como respuesta solo a las preguntas que consideramos importantes para la investigación. Las consideradas son las siguientes: ¿qué es el COVID-19?, ¿cuáles son los síntomas por COVID-19?,¿qué y cuáles son las variantes de COVID-19?, ¿qué es la inmunidad de rebaño?, ¿cuánto es la población del Perú?, ¿cómo se contagia una persona de COVID-19?,¿qué tan rápido se propaga el COVID-19?

Se desarrollará las primeras cuestiones derivadas:

Q_{01}:¿A cuánto asciende la población del Perú?

La población del Perú asciende a 33 millones 35 304 habitantes.

Q_{02}:¿Qué es la inmunidad de rebaño?

La inmunidad de rebaño ocurre cuando una población está protegida de una enfermedad. Esta inmunidad se alcanza de dos maneras: si uno se enferma y alcanza la inmunidad o si esta se vacuna. La inmunidad de rebaño hace difícil la propagación de la enfermedad, porque hay menos personas disponibles de adquirir el virus y transmitirla (Blue Shield, 2021).

La inmunidad colectiva o de rebaño se alcanzaría entre un 70% a 90% según fuentes del Minsa y otras.

Q_{03}:¿Qué es el COVID-19?

Sobre esta enfermedad, MINSA (2021) nos menciona lo siguiente:

La COVID-19 es una enfermedad muy contagiosa causada por el coronavirus SARS-CoV-2. Se propaga cuando una persona contagiada expulsa partículas al momento de hablar, toser, estornudar, o incluso respirar.

Las personas contagiadas pueden contaminar cualquier tipo de superficie, haciendo que se contagien otras personas cuando estas tocan esas superficies y luego tocan sus ojos, nariz o boca con las manos sin lavarse.

La Organización Mundial de la Salud (OMS) informa que los adultos mayores y las que padecen de enfermedades respiratorias, diabetes o cardiopatías podrían tener complicaciones.

Q_{03}^{1}:¿Cuáles son los síntomas por COVID-19?

Los síntomas son fiebre, tos seca, cansancio, dolor de garganta, dificultad para respirar y congestión nasal (Minsa, 2021). Estos son los síntomas más comunes, pero también pueden presentarse otros. Los síntomas pueden aparecer gradualmente y no todos los casos son iguales e incluso algunas personas no presentan síntomas.

Q_{03}^{2}:¿Qué son los coronavirus?

Los coronavirus son una gran familia de virus que causan enfermedades que van desde el resfriado común hasta enfermedades más graves como el síndrome respiratorio de Oriente Medio (MERS) o el síndrome respiratorio agudo severo (SRAS). Pueden transmitirse entre animales y personas (Minsa, 2021).

Q_{03}^{3}:¿Qué y cuáles son las variantes de COVID-19?

Sabemos que, durante el 2019 hasta la actualidad, la población del mundial se ha visto afectada. La información que se puede recoger es que el virus ha ido cambiando y obteniendo nuevas características como en el tiempo de contagio y síntomas. Esto se conoce como variante.

Según estas variantes, se informa que el SARS CoV-2 está mutando constantemente y generando nuevas variantes que suelen presentar características diferentes a las previamente conocidas (Minsa, 2022).

Existen dos grupos de variantes que se les hace seguimiento. Estas son las variantes de interés y las variantes de preocupación.

Las variantes de interés (VOI) son aquellas cuando su material genético tiene varias mutaciones con características observadas de un organismo. Además, causa trasmisión comunitaria, múltiples casos y se ha detectado en varios países. Entre las más importantes están la variante Lambda y Kappa.

Las variantes de preocupación (VOC) son variantes de interés que tienen las siguientes características adicionales: aumenta la transmisibilidad y virulencia, y disminuye la eficacia de las medidas sociales adoptadas como diagnósticos, vacunas y terapias disponibles. Entre ellas se tiene a la variante alfa reportada inicialmente en el Reino Unido, la variante beta en Sudáfrica, la variante gamma en

Brasil, la variante delta en la India y la variante ómicron nuevamente en Sudáfrica. Sobre esta última variante (ómicron), las investigaciones muestran que tiene muchas mutaciones y es mucho más contagiosa que las otras variantes.

Variantes de la COVID-19

Desde junio de 2020, se han reportado en el mundo diversas variantes como

la variante alfa, variante beta, variante gamma, variante delta, variante ómicron.

En nuestro país, las autoridades han informado que se han identificado nuevas mutaciones del virus que son las variantes delta plus y mu.

Q_{03}^{4}: ¿Qué tan rápido se propaga el COVID-19?

En Garrido (2022), se menciona que la variante ómicron es 70 veces más contagiosa que otras variantes calificadas como VOC. Este virus presenta más de 32 mutaciones. Su mayor carga viral causa un contagio más rápido, ya que una persona podría contagiar a otras en tan solo dos horas de haberse contagiado. Los estudios del Reino Unido, Hong Kong y Estados Unidos afirman que el tiempo de contagio de una persona con el ómicron es menor que con otras variantes. Además, se considera que la persona que presenta el virus del ómicron llega a ser muy contagiosa durante cinco días, dos días antes de los síntomas y dos o tres días después de los síntomas. Por otro lado, se afirma que el virus es contagioso durante 5 días y permanece en el cuerpo un aproximado de 7 días (se considera un margen adecuado a la aparición de los síntomas, ya que en algunas personas suele aparecer de manera tardía o ser más prolongados) (BBC, 2022).

Diversas fuentes como Bacaër et al. (2021) abordan sobre el **número básico de reproducción** que permiten medir cuándo una enfermedad infecciosa puede determinar un brote epidémico serio. Esto puede ayudar a afrontar dicha situación de la mejor manera posible.

¿Qué es el número básico de reproducción?

En el campo de la epidemiología, el número básico de reproducción R_0 de una infección se define como el número promedio de casos nuevos que genera un caso en el transcurso de un período infeccioso.

Según Comincini, Wilches y Saraví (2021), el R_0 es interpretada como la velocidad inicial de propagación de la infección en una población sin inmunización alguna. Por ejemplo, si un brote (la aparición repentina de una enfermedad debida a una infección en un lugar específico), tuviese un R_0 igual a 5. Esto significaría que el primer individuo que desarrolló dicha infección contagió a cinco individuos más.

Por ejemplo, en BBC (2020), se menciona que el R_0 del sarampión sería de 15, la cual puede causar brotes explosivos. En cambio, el nuevo coronavirus (SARS-CoV-2) tendría un cercano a 3. Al respecto, Sarukhan (2021) indica que R_0 SARS-CoV-2, determinada por la OMS, está entre 1,4 a 2,5, pero otras estimaciones arrojan R_0 entre 2 y 3, lo cual significa que cada persona infectada puede infectar a otras 2 o 3 personas.

Figura 13

Número básico de reproducción.

Nota. El R_0 del coronavirus es aproximadamente 3. Lo que significa que una persona infectada contagia naturalmente a otras tres en promedio, Fuente: BBC (2020).

Bajo otra perspectiva, en Aragón y Cruz (2020), se describe la situación respecto a los números de casos de COVID-19 en el Perú a inicios de la pandemia. Es decir, durante las primeras semanas, se llegaba a duplicar cada 1 o 2 días. Después de que se tomaran medidas preventivas como las cuarentenas, toque de queda, uso de mascarillas, alcohol, etc., la velocidad de contagio comenzó a bajar. En la semana 11, el número de personas contagias se duplicaba cada 4 o 5 días.

En López (2021), se menciona que el R_0 aproximado de la variante delta sería de 7 y de la variante ómicron de 10.

De la información anterior, que es la parte no matemática, se espera que los estudiantes puedan recolectar esta información o similar.

Luego, se toma esta información sobre el número de contagios por día y suponiendo que el número de personas contagiadas se duplica cada día, nos preguntamos: ¿cuánto es el número total son los contagiados por COVID por día si este número se duplica cada día y no se toma ninguna medida preventiva?

Si cada día se duplica, el número de personas contagiadas sería lo siguiente:

En el día 1, se tiene el primer caso, es decir, una persona infectada.

En el día 2, hay 2 personas infectadas.

En el día 3, hay 4 personas infectadas.

En el día 4, hay 8 personas infectadas.

En el día 5, hay 16 personas infectadas.

Y así sucesivamente.

Estos datos se ordenan en la Tabla 3.

Tabla 3

Regla del número total de contagiados transcurridos n días.

N° de días transcurridos	1	2	3	4	5	6	7	…	n
Número total de contagiados	1	2	4	8	16	32	64		?
Regla de formación	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	…	2^{n-1}

Se observa que en la Tabla 3 hay un patrón entre las cantidades numéricas.

Entonces, nos preguntamos lo siguiente: **¿cuál es la regla de este patrón?** Lo que en contexto se traduce **¿cuánto es el número total de contagiados en el enésimo día?**

Se llega a obtener gracias a la regla general de una PG o también de manera intuitiva **la regla de formación** del número de contagiados. Es la siguiente: $C_n = 2^{n-1}$.

¿Cuál sería la extensión de la sucesión a funciones reales?

Una sucesión es una función con dominio el conjunto de números naturales. Entonces, solo extendemos el dominio de C, donde $C(n)$ es el número total de contagiados después de transcurridos n días. Esto se tiene por la regla de formación que $C(n) = 2^{n-1}$, donde n es un número entero $(1 \leq n)$.

Haciendo la extensión del dominio de C, se expresa de la siguiente forma:

$C(t) = 2^{t-1}$, cuyo dominio es $[1; \infty >$.

Luego, se intenta responder a la pregunta generatriz:

$\boldsymbol{Q_0}$: **¿En cuánto tiempo tras la llegada del COVID-19, una población como el Perú alcanzaría la inmunidad de rebaño?**

Como la población del Perú asciende aproximadamente a 33 millones 35 304 habitantes, se considera un 80% de la población que alcanzaría la inmunidad mediante el contagio, es decir, 26 428 243 habitantes.

¿En cuántos días el 80% de la población alcanza inmunidad mediante el contagio?

Esto nos lleva a plantear la siguiente ecuación, bajo el contexto de adquirir la inmunidad naturalmente (sin vacunas).

Se plantea la ecuación exponencial:

$$2^{x-1} = 26\,428\,243$$

Se usa propiedades del logaritmo. En este caso, el logaritmo en base 10 se tiene lo siguiente:

$$x = 1 + \frac{\log\,(26\,428\,243)}{\log 2} \cong 26$$

Finalmente, se tiene una respuesta a Q_0: **¿en cuánto tiempo tras la llegada de una nueva variante de COVID-19, una población como el Perú alcanzaría la inmunidad de rebaño?**

En aproximadamente 26 días, la población total del Perú alcanza la inmunidad de rebaño respecto al COVID-19.

Otra forma

Usando la información del número de reproducción se obtiene otra forma de modelar el número total de contagiados por COVID-19.

De la información recopilada, se sabe que, en el Perú, la variante ómicron de COVID presenta un número básico de reproducción de 10, y el tiempo promedio que se encuentra en el organismo es 7 días.

En el caso de la variante ómicron tomaremos el periodo de infección como 7 días, de acuerdo con los datos obtenidos.

Tabla 4

Regla del número total de contagiados transcurridos n días basado en el número básico de reproducción R0

N° de periodos de 7 días transcurridos	1	2	3	4	5	…	n
Número de casos nuevos	1	10	100	1000	10 000		?
Regla de formación	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	…	10^{n-1}
Número total de contagiados	1	11	111	1111	11111		$\frac{10^n - 1}{10 - 1}$

Se observa que en la secuencia hay un patrón. Por ende, planteamos la siguiente pregunta:

¿Cómo es el término general del número total de contagiados?

Se usa la suma de términos de una PG y se logra encontrar el número total de contagiados, definiéndolo como C_n, donde n indica el número de periodos de 7 días transcurridos.

$$C_n = \frac{10^n - 1}{9} \;\; \dots \;\; (1)$$

Donde n es un número entero tal que $n \geq 1$.

¿Cómo sería la extensión de esta sucesión a una función de variable real?

Considerando que las sucesiones son funciones de dominio los naturales

$$C(n) = \frac{10^n - 1}{9} \;\; ; n \in \mathbb{N} \dots \;\; (2)$$

para cambiar la variable independiente que determina el número de periodos a días, estableceremos su relación.

Si 1 periodo equivale a 7 días, entonces n periodos equivale a $d = 7n$ días.

Como se puede apreciar, estamos ante una regla de tres directamente proporcional.

Luego, $d = 7n \rightarrow n = d/7$

Se reemplaza en la expresión (1).

$$C(d) = \frac{10^{d/7} - 1}{9} \dots (3)$$

Donde $d \geq 7$.

Luego, extendemos su dominio al intervalo $[7; \infty >$.

Después, se regresa a la pregunta generatriz:

Q_0: ¿En cuánto tiempo tras la llegada del COVID-19, una población como el Perú alcanzaría la inmunidad de rebaño?

Para esto, se considera que se deben contagiar una población de $26\,428\,243$ habitantes que representa el 80% de la población total del Perú para alcanzar la inmunidad natural.

Estrategia 1

Se plantea la siguiente ecuación exponencial:

$$C(d) = 26\,428\,243$$

$$\frac{10^{d/7} - 1}{9} = 26\,428\,243$$

$$10^{d/7} = 237\,854\,188$$

Luego, se aplica las propiedades de logaritmo y se tendría lo siguiente:

$$\log 10^{d/7} = \log(237\,854\,188)$$

$$d = 7 \log\,(237\,854\,188)$$

$$d \cong 7(8{,}38) = 58{,}6$$

Estrategia 2

De la expresión (3), se pudo obtener la función inversa que estaría en función del número total de contagiados y cuya imagen representaría al número de días que transcurren, pues es una función inyectiva. Por lo tanto, mediante un despeje de la variable independiente en dicha expresión, se usará propiedades de logaritmo y exponencial y se tendrá lo siguiente:

$$d(N) = 7.\log(9N + 1) \ldots .(4)$$

N es el número de personas contagiadas por COVID-19, $(N \geq 0)$ y d es la función que determina el número de días transcurridos en el caso de que se tenga un total de N contagiados por COVID-19.

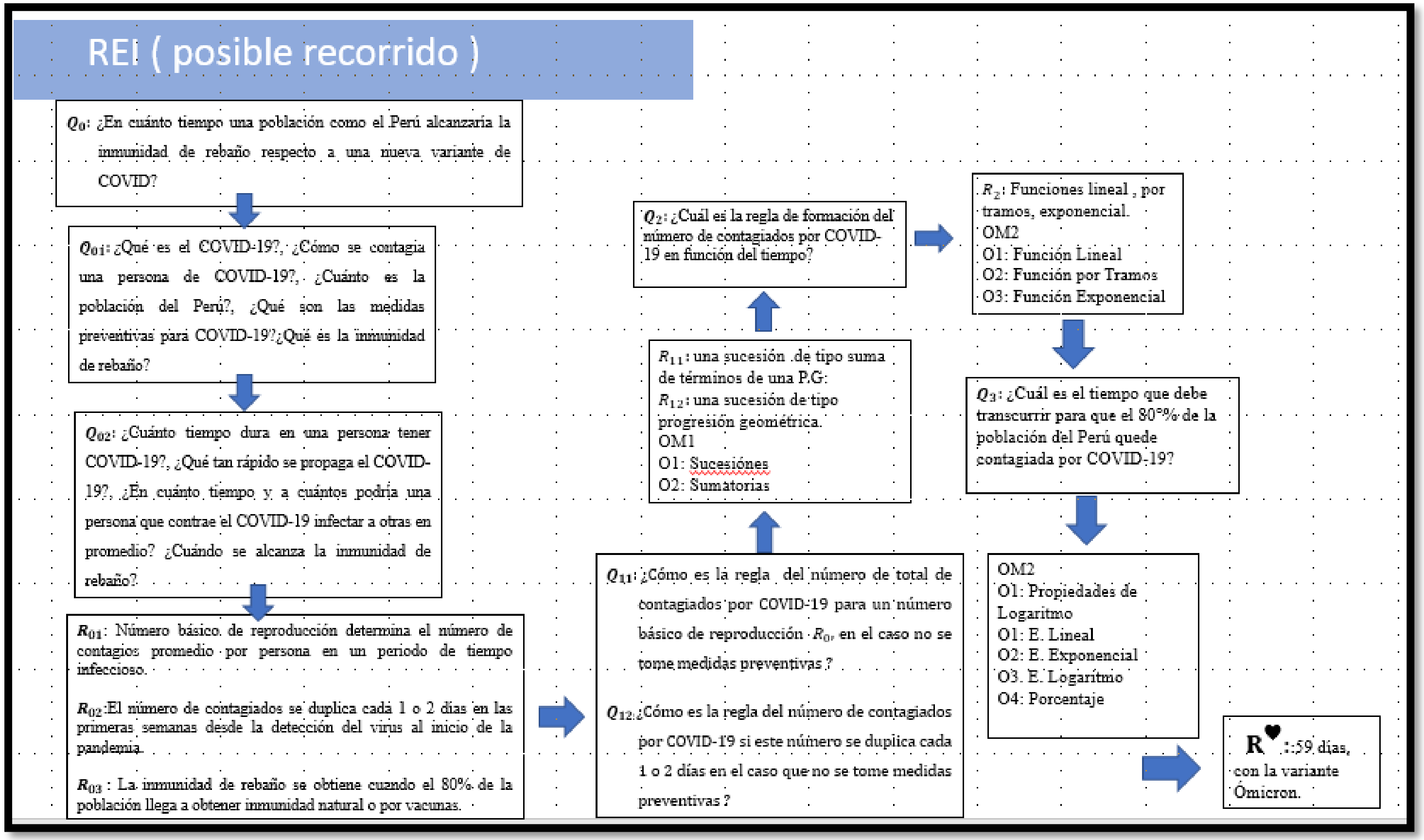
Luego, se reemplaza en (4) a N por 26 428 243. Se halla de este modo el número de días que deben transcurrir para que un 80% de la población del Perú se contagie por COVID y de este modo adquiera la inmunidad.

Se obtiene otra respuesta a Q_0. que indica que en aproximadamente 59 días la población del Perú quedaría infectada por una variante de COVID.

En la Figura 14, se muestra el esquema de un posible recorrido que genera la cuestión generatriz Q_0.

Figura 14

Mapa de posibles cuestiones y respuestas.



Nota. La noción del número de reproducción de un virus sirve como base para llegar a la respuesta. Fuente: Elaboración propia.

Continuamos con el segundo proceso de análisis a priori en el diseño de las sesiones, material y actividades que se realizaron en la implementación del REI.

5.2.2. Diseño didáctico

En esta parte, se muestra el diseño de las secuencias de enseñanza y los dispositivos empleados para el desarrollo del REI aplicado a dos estudiantes de Medicina de una universidad del Perú. En total, se diseñaron 6 sesiones para el desarrollo del REI. En el transcurso de las sesiones, se van realizando modificaciones a las actividades. Esto se debe a que va presentando información diferente a la prevista en el posible recorrido del REI.

A continuación, se presenta el diseño de las sesiones y dispositivos didácticos empleados.

Sesión 1

En esta sesión, se les explicará a los estudiantes la importancia de realizar investigaciones y sobre cómo es el rol de un equipo de investigación. Luego, se les presentará la cuestión generatriz y se les pedirá que intenten formular cuestiones que permitan responder a dicha cuestión.

Tabla 5

Presentación del proyecto de investigación y la cuestión generatriz

Sesión 1	**Presentación del proyecto de investigación y la cuestión generatriz**
Duración:	100 minutos
Medios y media	Uso del Jamboard para la lluvia de preguntas respecto a la pregunta generatriz e Internet para la búsqueda de información que respondan a las preguntas planteadas
Desarrollo de sesión	**Paso 1:** El profesor informa a los estudiantes que participarán en un proyecto de investigación basado en un nuevo sistema de enseñanza y que conformarán un equipo de investigación junto con el profesor, cuyo objetivo será dar respuesta a una cuestión Q_0. **Paso 2:** Se presenta en un Jamboard la cuestión a trabajar. Q_0: **¿En cuánto tiempo tras la llegada de una nueva variante de COVID-19, una población como el Perú alcanzaría la inmunidad de rebaño?**

	Paso 3: El profesor invita a los estudiantes a leer la pregunta y a realizar cuestiones que permitan entender mejor la pregunta o intentar responderla de algún modo. Se les indica que pueden hacer búsquedas por internet para encontrar información sobre los términos que puedan ser desconocidos para el estudiante, así como también encontrar las respuestas a sus planteamientos. **Paso 4:** Se organiza la información, y en equipo se van eligiendo las preguntas que nos acerque más la respuesta. **Fin de la sesión**

Sesión 2

Antes del inicio de la segunda sesión, se organiza las preguntas recolectadas en un Word que se comparte de modo online editable al grupo de investigación. Se les da algunas indicaciones de cómo colocar sus respuestas. Se intentará alinear la investigación con la intención de obtener información que nos permita construir un modelo matemático.

A continuación, se detalla el diseño de la segunda sesión.

Tabla 6

Estudio de las cuestiones derivadas e inicio de la modelación de la cuestión generatriz

Sesión 2	**Estudio de las cuestiones derivadas e inicio de la modelación de la cuestión generatriz.**
Duración	100 minutos
Medios y medias	Internet y Archivo Word Online compartido.
Desarrollo de la Sesión	En esta parte, alinearemos la investigación. Para ello, se busca información relevante para luego organizarla y comenzar a plantear un primer bosquejo del modelo matemático que responda a $\boldsymbol{Q_0}$. El profesor comienza la sesión abriendo el Word online que se comparte mediante el siguiente enlace: https://docs.google.com/document/d/1_oPOh_9zyEaQuYJyp1-2CM44jIEIPS1gYDH1WLY0n_g/edit?usp=sharing

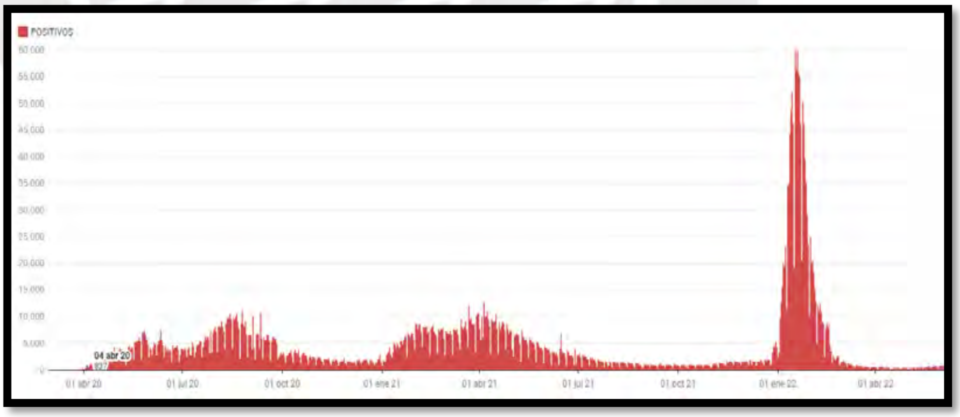
	A los estudiantes, previo a la segunda sesión, se les pide que coloquen sus respuestas a las cuestiones derivadas Q_0 generadas en la primera sesión. Además, se hace una revisión sobre la información recopilada a partir de las cuestiones derivadas. Acto seguido el profesor planteará a los estudiantes cuestiones sobre Q_0, con el objeto de alinear la investigación al estudio. **¿De qué trata esta una nueva variante?** **¿De qué forma nos aproximaríamos al comportamiento de esta nueva variante?** **¿Cuál de las variantes de COVID ha afectado más al país?** Estas preguntas tienen el objetivo de inclinar la investigación por la información relacionado a las variantes de COVID de mayor presencia en el Perú. Luego, se proporciona información mediante el siguiente enlace de internet: https://www.bbc.com/mundo/noticias-52491223 La idea es que intenten responder la cuestión: **¿cuál es la tasa de contagio del COVID-19?** Se espera que encuentren información relevante en el enlace que les permita realizar un modelo matemático. **Fin de la sesión**

Sesión 3

En esta sesión, se motivará a realizar un primer modelo matemático. Además, se usará una base de datos y se discutirá qué parte de la base de datos tomar para comenzar a construir un modelo matemático.

Tabla 7

Modelamiento matemático Fase 1: Selección de información e inicio de la modelación matemática de Q_0

Sesión 3	**Modelamiento de matemático Fase 1: Selección de información e inicio de la modelación matemática de Q_0.**
Duración	100 minutos
Medios y medias	Base de datos, video sobre modelación matemática.
Desarrollo de la Sesión	**Paso 1:** Se inicia la sesión recordando la pregunta Q_0, y se vuelve a revisar el llenado de las preguntas derivadas. **Paso 2:** Posteriormente, se muestra un video motivacional, que trata sobre la modelación matemática. Esto se hace con el objetivo de enfocarnos mejor y tener una idea básica de lo que se intenta hacer. https://www.youtube.com/watch?v=Lo9QLk5atj4 **Paso 3:** Se analiza la información dado en forma de gráfica de barras que representa el número de contagiados del COVID-19 por día.  **Paso 4:** Se discute y escoge parte de la información de la base datos. **Paso 5:** Se induce a que busquen expresar matemáticamente los datos. **Fin de la sesión**

Sesión 4

En esta sesión, se encuentra la regla de formación del patrón propuesto por los estudiantes en la sesión anterior. Se planteará ver a las sucesiones como funciones extendiendo su dominio para luego determinar cuál de estas es mejor aproximándose a la data.

Tabla 8

Modelamiento de matemático Fase 2: obtención de funciones que modelan a Q_0 propuestas por los estudiantes y su comparación con la data

Sesión 4	**Modelamiento de matemático Fase 2: obtención de funciones que modelan a Q_0 propuestas por los estudiantes y su comparación con la data**
Duración	100 minutos
Medios y medias	Base de datos, Geogebra, Actividad 1
Desarrollo de la sesión	**Paso 1:** Se inicia la sesión. Se empieza a revisar la actividad 1, que consiste en hallar la regla de formación de las sucesiones planteadas en la sesión 3 por E1 y E2, las cuales son llamadas Propuesta 1 y 2.

Propuesta 1

En la figura, se muestra la Propuesta de Carmen sobre el número de total de contagiados por COVID-19 en el transcurridos n días, tomando la data de los primeros 6 días, desde el reporte del primer infectado (6 de marzo).

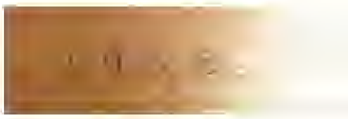
¿Cómo se expresarían los demás términos, tomando en cuenta la secuenciación que halló Carmen? ¿Qué forma tendría el término enésimo?

Intentemos llenar la tabla y mostrar el término enésimo.

N° de días Transcurridos	**N° total de contagiados**	**Regla de formación.**
1	**2**	
2	**6**	
3	**12**	
⋮	⋮	⋮
N		

__Propuesta 2__

En la figura, se muestra la propuesta de Carmen sobre el número total de contagiados por COVID-19 transcurridos n días, tomando la data de los primeros 6 días, desde el reporte del primer infectado (6 de marzo).



En la siguiente tabla se ordena esta secuencia

¿Cómo se expresarían los demás términos, tomando en cuenta la secuenciación que halló Carmen? ¿Qué forma tendría el término enésimo?

Intentemos llenar la tabla y mostrar el término enésimo.

N° de días Transcurridos	**N° total de contagiados**	**Regla de formación.**
1	**1**	
2	**4**	
3	**7**	
⋮	⋮	⋮
n		

Paso 2: Se les induce a que definan funciones a partir de las sucesiones encontradas usando la extensión del dominio.

Paso 3: Se usa el Geogebra como instrumento para graficar la función o funciones encontradas, así también como para graficar la data.

Paso 4: Se compara de las gráficas de las funciones a la data empleada y se trata escoger quién sería mejor aproximándose a la data. Para esto, se plantea la siguiente pregunta: ¿cómo sería la regla de la función que mejor se aproxime a la data?

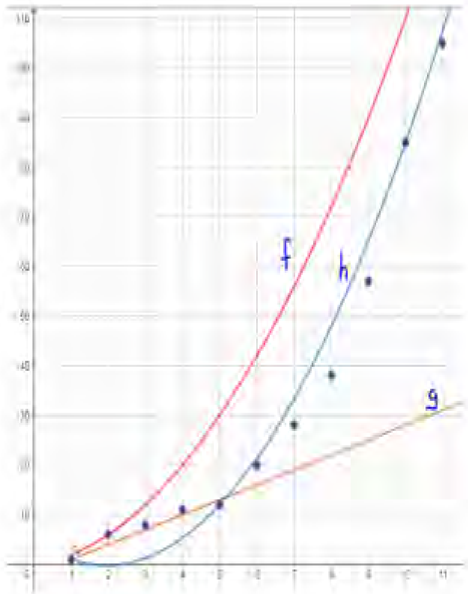
Fin de la sesión

Sesión 5

Antes de iniciar la quinta sesión, se manda una actividad 2, para que intenten encontrar otras funciones que puedan aproximarse mejor a los datos, en particular a la función exponencial.

Tabla 9

Modelamiento matemático Fase 3: modelación del número de contagiados por COVID

Sesión 5	**Modelamiento matemático fase 3: modelación del número de contagiados por COVID**
Duración	100 minutos
Medios y medias	Base de datos, Actividad 2, búsqueda de información en internet y de la información recopilada
Desarrollo de la sesión	**Paso 1:** Se inicia la sesión recordando a la cuestión generatriz Q_0 y las funciones que habíamos hallado hasta el momento para la modelación de Q_0. **Paso 2:** Se presenta la actividad 2. Se muestra la ficha y se da un tiempo de 30 minutos para que den algunas respuestas. Según las funciones mostradas en la figura, cuyas reglas son: $f(x) = x^2 + x;\ \ x \geq 1$ $g(x) = 3x - 2; x \geq 1$ y $h(x) = \frac{79}{60}x^2 - \frac{103}{20}x + \frac{29}{6}\ ; x \geq 1$ ¿cómo sería la regla de la función que mejor se aproxime a los datos?  ¿Será posible encontrar una función que se aproxime mejor a los datos que las funciones obtenidas hasta ahora? ¿Qué otras funciones existen para modelar nuestros datos?

Recordemos que, en la información recopilada en el Word Online, se vio el tema de tasa de contagio, conocido en el campo de la epidemiología como R_0 número básico de reproducción.

De acuerdo esto, nos hacemos la siguiente pregunta:

¿Cuál sería la regla de formación del número total de contagiados por COVID, si cada persona que contrae dicho virus llega a contagiar a dos personas en promedio?

Complete la siguiente tabla para determinar la regla de formación

N° de días transcurridos	Número de casos nuevos por día	Número total de contagiados
1	1	
2		
3		
4		
5		
⋮	⋮	⋮

Paso 3: Se espera que con la actividad 2 encuentren otra función como la exponencial o que sea candidato para aproximarse a los datos.

Paso 4: Se intenta manipular el número básico de reproducción del COVID R_0 para generar una función que se aproxime a los datos de tipo exponencial.

Fin de la sesión

Sesión 6

En esta sesión, se empleará el método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática) para encontrar la mejor función cuadrática que mejor se aproxima a los datos. Luego, se usará esta función para dar una respuesta a Q_0.

Tabla 10

Modelamiento matemático Fase 4: obtención de una respuesta a Q_0

Sesión 6	**Modelamiento matemático Fase 4: obtención de una respuesta a Q_0**
Duración	100 minutos
Medios y medias	Base de datos, actividad, Geogebra, Excel, videos sobre regresión cuadrática, actividad 3

<table>
<tr>
<td>Desarrollo de la sesión</td>
<td>

Paso 1: Se hace un repaso de la cuestión generatriz Q_0 y del modelo que hemos obtenido hasta el momento.

Paso 2: Se desarrollará la actividad 3, cuyo objetivo es encontrar la función cuadrática que mejor se aproxima a los datos.

En la sesión anterior, la búsqueda por internet del equipo tuvo como consecuencia descubrir un nuevo conocimiento matemático, dentro de las notas de una universidad española colgado en internet del curso de ecuaciones diferenciales y cálculo numérico, el tema es: **Aproximación (el método de mínimos cuadrados).** en el artículo se detalla como se realiza una **regresión lineal** (es decir hallar la ecuación de la recta que mejor se aproxima a los datos) y una **regresión cuadrática** (es decir hallar la ecuación de la parábola que mejor se aproxima a los datos), ambas regresiones bajo el método de mínimos cuadrados. En la Figura 1 se muestra como se realiza una regresión cuadrática.

Figura 1. Método de mínimo cuadrados (regresión cuadrática).

Si queremos aproximar por una parábola (esto es, una función del tipo $y = a + bx + cx^2$), necesitaremos un sistema de tres ecuaciones para determinar biunívocamente los valores de a, b, c. Observando que, para la recta, la segunda ecuación se "puede obtener" a partir de la primera "sin más que multiplicar por x" cada una de las sumatorias, no es difícil imaginar que, para la parábola, el sistema necesario será

$$\left.\begin{array}{r}(\sum 1)a + (\sum x)b + (\sum x^2)c = \sum y \\ (\sum x)a + (\sum x^2)b + (\sum x^3)c = \sum (xy) \\ (\sum x^2)a + (\sum x^3)b + (\sum x^4)c = \sum (x^2y)\end{array}\right\}.$$

Por consiguiente, tendremos que elaborar una tabla con siete columnas: $x, y, x^2, x^3, x^4, xy, x^2y$.

¿Cómo es la función que mejor se aproxima a los datos (es decir a los datos referidos al número total de contagiados por COVID en la Figura 2) usando una regresión cuadrática?

(sugerencia: podrían buscar información sobre regresión cuadrática para entender mejor la técnica.)

</td>
</tr>
</table>

Figura2. Data del número total de contagiados los 11 primeros días.

	x	y
Fecha	Número de días transcurridos	Número total de contagiados
[illegible]	1	1
[illegible]	2	6
[illegible]	3	9
[illegible]	4	11
[illegible]	5	12
[illegible]	6	20
[illegible]	7	28
[illegible]	8	38
[illegible]	9	57
[illegible]	10	85
[illegible]	11	105

Una vez hallada la función por regresión cuadrática observe si se aproxima a la data del COVID, y compare esta función respecto a las demás funciones encontradas.

Paso 3: Con la función cuadrática hallada en el paso anterior, se expresa matemáticamente la cuestión generatriz Q_0.

Paso 4: Dar una respuesta a Q_0

Fin de la Sesión

A continuación, se mostrará la siguiente fase de nuestra investigación; es decir, el análisis in vivo el cual está conformado por dos procesos.

5.3. Análisis in vivo

En la ***experimentación y observación clínica***, se desarrolla un REI aplicado a dos estudiantes de medicina de una universidad del Perú. Lo denominaremos E_1 y E_2. Ellos investigarán para dar respuesta a la cuestión generatriz Q_0, bajo la dirección de un profesor. Él guiará por momentos al equipo de investigación con el fin de encontrar una respuesta en equipo a Q_0. Las seis sesiones del taller tienen una duración de 100 minutos por sesión. En el transcurso de las sesiones, se van diseñando las actividades de acuerdo con los hallazgos que van realizando los estudiantes. Por ejemplo, para organizar la información recolectada, se usa un cuestionario de preguntas derivadas de Q_0 que van completando en un Word online. Además, se realiza la construcción de una base de datos organizado en un Excel Online. Asimismo, se hace uso de Geogebra como herramienta para comparar las gráficas de funciones que se van construyendo con la data del número de contagiados por COVID-19.

Como segundo proceso, se tiene la ***selección de información***. Para ello, se grabó las sesiones virtuales, se realizó entrevistas a los estudiantes y se analizó los apuntes de ellos. A continuación, se detallará la selección de información.

Sesión 1

Esta sesión se inicia preguntando sobre sus experiencias con el sistema de enseñanza en su universidad, a lo que los estudiantes contestan lo siguiente:

> $\boldsymbol{E_1}$: En las prácticas calificas de modo online, responden que todo es muy rápido, nos dan muy poco tiempo para ser más analíticos. Nos explicaron que quieren que reaccionemos rápido.
>
> $\boldsymbol{E_2}$: No estamos preparados para esa presión en las evaluaciones, me pongo nerviosa, nos falta que nos expliquen más sobre los temas.

Posteriormente, el profesor les menciona a los estudiantes que participaran en un proyecto de investigación basado en un nuevo sistema de enseñanza y que conformaran un equipo de investigación junto con el docente. El objetivo consistía en dar una respuesta colectiva a una cuestión $\boldsymbol{Q_0}$.

Se presenta la cuestión a trabajar.

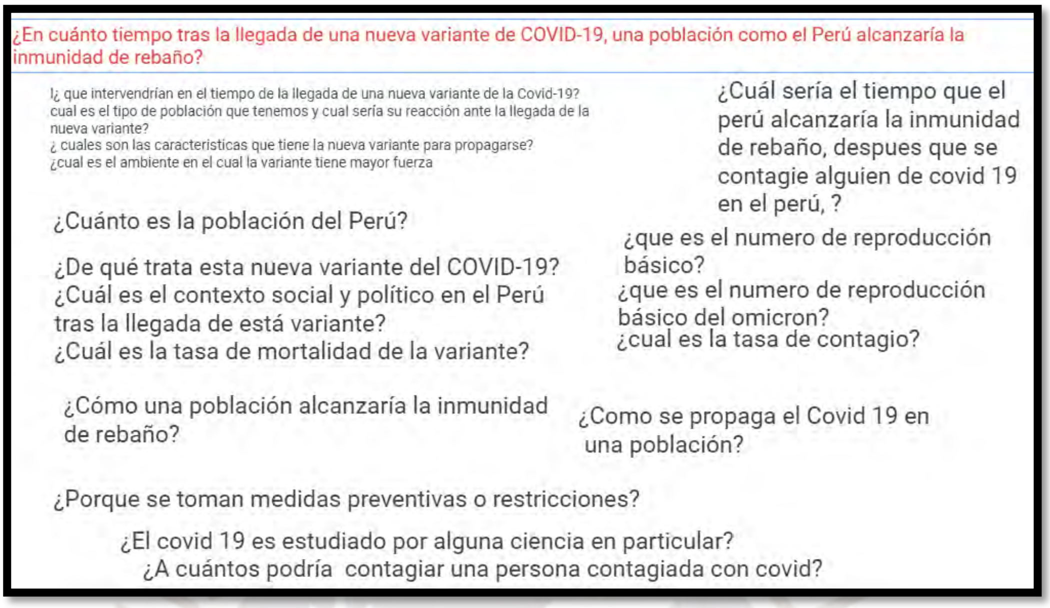
$\boldsymbol{Q_0}$: **¿En cuánto tiempo tras la llegada de una nueva variante de COVID-19, una población como el Perú alcanzaría la inmunidad de rebaño?**

El profesor invita a los estudiantes a leer la pregunta y a realizar cuestiones que permitan entender mejor la pregunta e intenta responderla.

Es así como los estudiantes empiezan a formular cuestiones, colocándolas en un Jamboard que el profesor creó previamente.

Figura 15

Formulación de cuestiones derivadas.



Nota. Formulación de cuestiones por estudiantes. Fuente: Elaboración propia

Sobre las preguntas formuladas, se brindaron indicaciones para realizar una búsqueda de información de fuentes fiables que pueda responder a estas interrogantes. Además, a manera de ejemplo, se realizó una búsqueda en internet de una de las preguntas recolectadas: **¿cuál es la tasa de contagio del COVID?**

El estudiante manifiesta: **"**Debe referirse a la variación del número de contagiados" (E1) a lo que el docente indica: "Busquemos en internet para saber más al respecto".

Se escribe tasa de contagio del COVID en el buscador de Google. Luego, se procedió elegir un diario electrónico importantes y artículos científicos. Se halló que la tasa de contagio está relacionada con el número básico de reproducción. Esto motivó la formulación de la siguiente pregunta**: ¿qué es el número básico de reproducción?**

A su vez, se comenzó a realizar una nueva búsqueda sobre esta nueva cuestión y se acuerda en equipo que es un elemento que podría ayudar a responder a nuestra pregunta generatriz.

Se deja como tarea continuar con la búsqueda de información que responda a las cuestiones formuladas en la sesión para generar nuevas cuestiones si lo consideran necesario y responderlas haciendo la búsqueda respectiva. Se finaliza la sesión.

Sesión 2

En esta parte, se trata de alinear la investigación. Para ello, se busca la información relevante para luego organizarla y comenzar a plantear un primer bosquejo del modelo matemático que responda a Q_0.

El profesor comienza la sesión abriendo el Word online y felicita a los estudiantes por haber respondido.

Después, el profesor realiza una cuestión sobre Q_0, que se dejó de lado en la sesión anterior por falta de información.

> **P:** ¿De qué trata esta nueva variante?, ¿de qué forma nos aproximaríamos al comportamiento de esta nueva variante? Pues, no conocemos ninguna de las características de esta nueva variante.
>
> **E2:** En la tasa mortalidad de esta nueva variante
>
> **P:** Pero no sabemos cómo es esta nueva variante
>
> **E2:** ¿Entonces?
>
> **P:** ¿Esta nueva variante está relacionado con algo, que sepamos? ¿En qué nos basaríamos? ¿Qué estudiaríamos para saber un poco sobre esta nueva variante?
>
> **E1:** En su material genético
>
> **P:** ¿Y de dónde proviene su material genético?
>
> **E1:** Del mismo coronavirus, que conocemos
>
> **P:** Claro, es decir del COVID y sus variantes que conocemos
>
> **E1:** ¡Sí!
>
> **E2:** ¡Claro!

Se propone elegir dos variantes de COVID existentes para obtener características particulares de estas. Para esto, el profesor realiza la siguiente pregunta: ¿cuál de las variantes de COVID ha afectado más al País?

> **E1:** Me parece que la variante más peligrosa en el país fue la delta, pues era muy infecciosa y su sintomatología era más grave. Hacía que los pacientes

tuvieran estos síntomas y fueran a UCI. Esto hacía que los hospitales y clínicas se llenaran y halla más muertes.

P: Bien, tenemos un candidato, ¿y habría otra variante de COVID que pudiéramos considerar?

E2: Yo creo que podría ser el ómicron también, pues contagiaba a mucha gente. Además, tenía un nivel de transmisibilidad más alto, aunque el ómicron fue después de la delta y era más controlado.

E1: Pero algo importante que se puede destacar en el cambio que hubo de la delta al ómicron es que los síntomas del delta eran más graves, y del ómicron han sido más leves. Y analizando los dos, podríamos ver cómo ha ido evolucionando el virus y cómo ha ido afectando.

El equipo acuerda entonces iniciar una investigación tomando en cuenta algunas de las características del delta y el ómicron.

De este modo, el equipo de investigación se enfocará en recolectar información relacionado a las variantes ómicron y delta.

En equipo, se revisa y organiza la información proporcionada por los estudiantes sobre las cuestiones derivadas. Se deja pendiente completar la información faltante sobre estas. Al buscar y revisar la información por internet sobre la pregunta: ¿cuál es la tasa de contagio del COVID? El equipo encuentra que esta información está ligada al término llamado número básico de reproducción. Vemos en equipo la página donde se encuentra la información.

E2: Sobre el R0 nos dice que es el número de personas a las que un individuo puede pasar un virus, en promedio, suponiendo que nadie es inmune y que la gente no cambia su comportamiento para evitar enfermarse.

Se ha observado unas figuras en la página y se aprecia cómo aumenta el número de contagios, como en la Figura 16 que se muestra a continuación.

Figura 16

Número de reproducción básico.

Nota. El R_0 del coronavirus es aproximadamente 3. Fuente: BBC (2020).

P: Según la página, esta figura muestra ¿cómo se propaga, si el RO es 3?, tenemos al inicio un infectado por COVID, y este contagia a 3. Luego, cada persona contagiada puede contagiar a otras 3 y así sucesivamente.

E1: Sí, así es.

E2: (Asiente)

Luego, el profesor muestra la Figura 17.

Figura 17

Cómo el confinamiento redujo la tasa de infección en el Reino Unido.

Nota. En la figura se muestra cómo afecta las medidas de confinamiento a la tasa de infección. Fuente: BBC (2020).

Se analiza en equipo la información sobre el RO. Se observa que los confinamientos son una medida eficaz para evitar la propagación del COVID.

P: ¿Este conocimiento sobre el Ro nos sería útil? ¿Nos ayudaría a responder nuestra pregunta Q_0?

E1: Yo creo … estaría bien tomarlo como un dato importante, porque te permite ver cómo se mueve el COVID en cierta población específica.

P: ¿Está más claro lo que es un R0, es decir, un número básico de reproducción? También, hay que ver las unidades de R0

E1: Claro, y aparte tenemos que ver el contexto. Además, tenemos que ver que ese R0 está en cierto lugar en específico.

Se busca información en el internet y se encuentra otra definición sobre el R0 similar a la anterior.

P: ¿Qué se entiende por esta definición del R0?

E2: Supongo que es un periodo de tiempo cuando una persona se contagia y contagia a otras personas. Se generan los casos nuevos y se obtiene el promedio.

P: Mmmm, ¿qué pasaría si el R0 es 3?

E2: Es el promedio que una persona infectada puede contagiar a 3 personas.

P: Pero, también dice a lo largo de un periodo infeccioso. ¿Qué es un periodo infeccioso?

E2: Es un tiempo donde existe la posibilidad de infección.

P: Entonces, una unidad sería el tiempo y la otra son los casos nuevos, es decir, personas.

P: ¿Qué pasaría si el R0 es menor que 1? Aquí dice que la infección muere tras un largo periodo.

E2: Eso pasa, porque hay baja transmisibilidad, solo contagia a una persona.

P: puede llegar a contagiar 1 o puede ser menor que 1 persona, es decir, cero personas.

Se sigue revisando la información sobre el R0 y se da indicaciones para que se actualice la información en el cuestionario subido al Word.

Al revisar la pregunta de **¿cómo o cuándo una población alcanza la inmunidad de rebaño?** Un estudiante indica: **"**Cuando el 70% de la población alcance la inmunidad de manera natural o por las vacunas" (E1).

El equipo concluye que es necesario de conocer el número total de contagiados, ya que esto implica que alcanzarían inmunidad cuando pasen a estar como recuperados, por lo cual es necesario una base de datos sobre el número de contagiados del COVID.

Se establece buscar información sobre este R0 (número básico de reproducción) en el Perú. En caso de que esta información no se llegara encontrar el R0, se buscará otro R0 de una población similar, además de una base de datos del número de contagiados por COVID para comenzar con la modelación de la pregunta generatriz.

Se finaliza la sesión dos.

Sesión 3

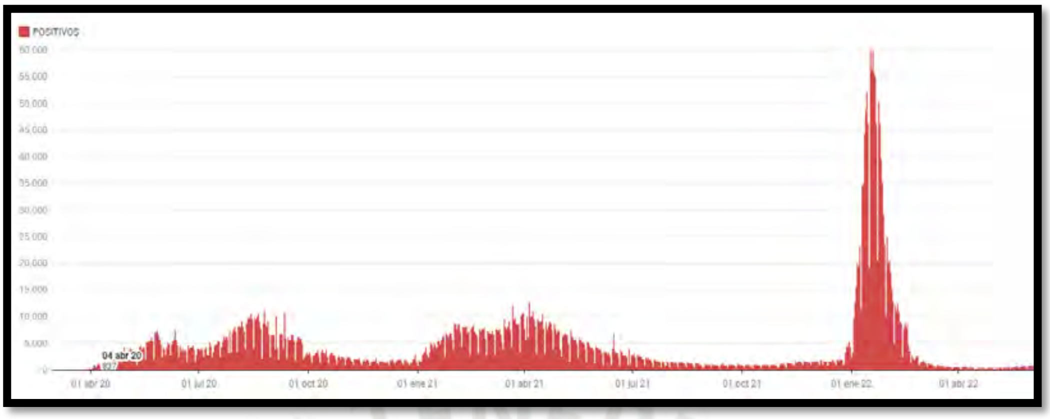
Se inicia la sesión recordando la pregunta Q_0, y revisando el llenado de las preguntas derivadas. Posteriormente, se muestra un video motivacional, que trata sobre la modelación matemática. El objetivo es tener una idea básica de lo que se intenta hacer. Para ello, se muestra el siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=Lo9QLk5atj4

El equipo comienza a analizar la base de datos de acumulados positivos COVID. Se señala que la data es desde que se inició la pandemia hasta la actualidad y , por lo tanto, debe estar los positivos por las variantes de COVID (entre ellas la variante delta y la variante ómicron). Se les muestra a los estudiantes que, si ubican el cursor sobre la imagen cerca de las fechas en el eje horizontal, nos sale información. Por ejemplo, en la fecha, el 4 de abril del 2020 aparece debajo el número 837. Esto significa que en ese día se reportó 837 contagiados por COVID.

Figura 18

Casos positivos diarios de COVID-19 en Perú.



Nota. La figura muestra los casos de contagio diario del COVID-19. Fuente: Revollé et al. (2022).

Se comienza a describir la tabla para luego determinar qué parte de los datos que se muestran se van a tomar. Se señala que el eje horizontal X se encuentran las fechas desde el 6 de marzo hasta el día de hoy y en el eje Y, el número de contagiados en esa fecha.

Se empieza a sustraer los datos desde el 6 de marzo y se comienza a llenar una tabla donde se define las variables número de días transcurridos versus número de contagiados por día. Se comienza a llenar la tabla y los estudiantes observan que son demasiados datos. Entonces, se intenta escoger un tope. Para ello, se intenta tomar la porción de datos donde no había muchas condiciones que puedan afectar al número de contagiados.

P: ¿Por qué la gráfica se ve de este modo?,¿qué estaba pasando en esos momentos?, por ejemplo, aquí en enero

E2: El ómicron

E1: Sí

P: Y en esta parte, en abril del 2021

E1: Posiblemente el delta

P: Hay que averiguar eso.

P: Esas condiciones le dan cierto grado de complejidad al modelo que deseamos construir, entonces ¿en qué momento no había muchas condiciones?, por ejemplo, la vacunación sería un factor para que el número de contagiados no se dispare. ¿Cuándo fue eso?

E1: Eso fue a inicios de febrero. Comenzó con Sagasti.

P: ¿Y otro factor que afecte al número de contagiados?

E2: Las cuarentenas, la inmovilización social

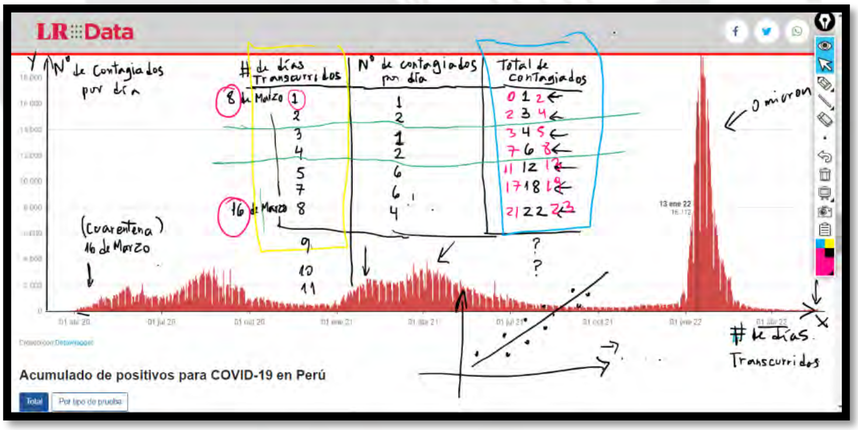
P: ¿Y cuándo comenzó las cuarentenas?

E1: El 16 de marzo del 2020

El equipo determina tomar los datos recopilados desde el 6 hasta el 16 de marzo, pues en ese periodo de tiempo no se habían tomado medidas importantes para tratar de controlar el número de contagiados por COVID. Por ende, la gente realizaba sus actividades con normalidad.

Figura 19

Organización de datos de números de contagiados por día.



Nota. En la figura se muestra el trabajo de los estudiantes al decidir qué parte de los datos empezar a estudiar. Fuente: Adaptado de Revollé et al. (2022)

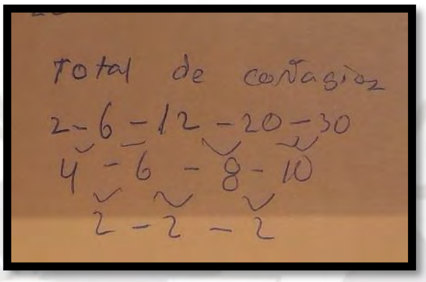
Se determina nuestro primer objetivo que es modelar el número de contagiados durante los primeros 8 días. Se empieza con el 6 de marzo, pues corresponde a la fecha donde se registra el primer contagiado de COVID en el Perú. Además, se elige el 16 de marzo, pues en esa fecha se toma primera medida para controlar el virus.

Se recopila una data de número de contagiados por día y se procede a la modelación. Se les indica además que intente buscar un patrón con los datos de la tabla o con datos que se pudieran aproximar a ellos.

En la modelación realizada por los estudiantes, se obtienen dos propuestas (ambas sucesiones). La primera es del tipo progresión aritmética y la segunda es otra sucesión de dos niveles como se muestran en las siguientes figuras.

Figura 20

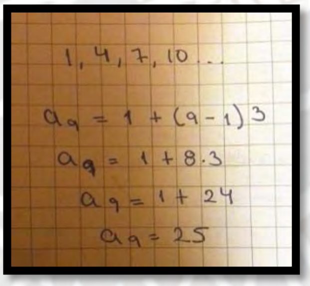
Construcción de sucesión de segundo grado.



Nota. Propuesta de E1. Fuente: Elaboración propia

Figura 21

Construcción de una progresión aritmética.



Nota. Propuesta de E2. Fuente: Elaboración propia

Se muestra las gráficas de funciones elementales, así como de sus reglas de correspondencia.

Se finaliza la sesión.

Sesión 4

Se inicia la sesión comenzando a revisar la actividad 1, que consistía en hallar la regla de formación de las sucesiones planteadas en la sesión 3. Se brinda un poco de tiempo para que terminen de hallar las reglas.

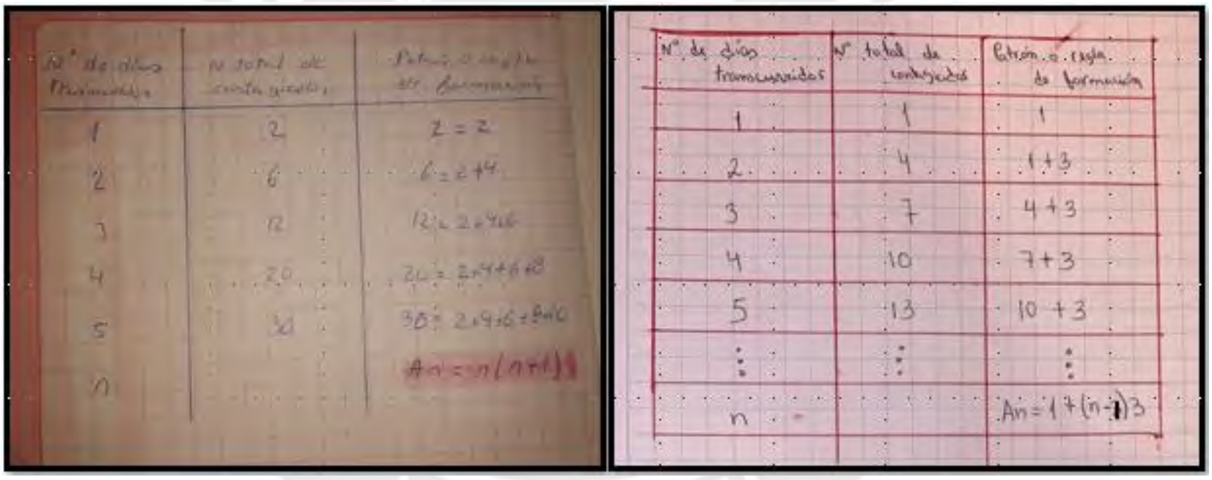
Las estudiantes consiguen hallar las reglas de formación para las sucesiones que se aproximan a los datos que son $a(n)$ y $b(n)$.

En este proceso, E2 usó la fórmula del término n-ésimo de una progresión aritmética para hallar las reglas del término general. Luego, simplificó la expresión obteniendo la expresión b. Por otro lado, E1 y E2 encuentra la regla de la sucesión propuesta por E1 de dos maneras distintas. Una encuentra que el número de contagiados en el n-ésimo día transcurrido es $2+4+6+\cdots+2n = 2(1+2+3+\cdots n) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1)$, mientras que la otra estudiante consigue directamente el patrón al tantear valores iniciales. Las reglas obtenidas por E1 y E2 son respectivamente:

$a(n) = n^2 + n$ y $b(n) = 3n - 2$. Como se aprecian en las Figura 22.

Figura 22

Expresión del término n-ésimo de la sucesión a_n y b_n hallado por los estudiantes.



Nota. Desarrollo de los estudiantes de las sucesiones tipo P.A. y sucesión de segundo grado. Fuente: Elaboración propia

Se realiza un breve estudio sobre lo que es una función, el dominio y rango de una función, y cómo representarlos en un sistema coordenado.

Luego, el profesor hace la pregunta, de acuerdo con lo abordado.

> P: ¿Una sucesión es una función?
>
> E2: Sí, pues a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un elemento del conjunto de llegada.

E1: Sí.

P: Entonces, podríamos extender las reglas de formación de sucesiones a funciones.

P: ¿Qué nos saldría si extendemos a funciones?,¿qué funciones tendríamos?

Se comienza a realizar la extensión reconociendo el dominio de la sucesión a(n) y b(n), que viene a ser los naturales y extenderlo a los reales.

Al extender a(n) y b(n) se obtienen las funciones: $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = 3x - 2$

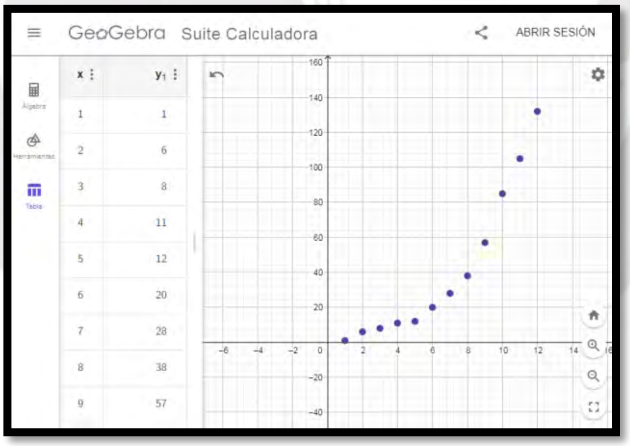
P: ¿Qué funciones hemos obtenido?

E2: Una cuadrática y una lineal

Posteriormente, se les brinda indicaciones para que ingrese la base de datos mostrada en una tabla del Geogebra. La idea es poder visualizarlas como puntos en un sistema coordenado.

Figura 23

Grafica de la base de datos por Geogebra, como puntos en el plano cartesiano.

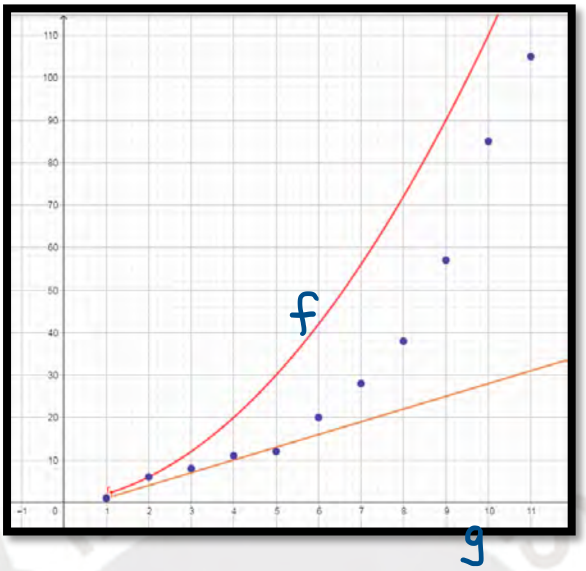


Nota. Fuente: Elaboración propia.

Luego, se les da indicaciones para que ingresen las reglas de las funciones f y g, al Geogebra.

Figura 24

Gráfica de las funciones f y g en Geogebra, que se aproxima a la data.



Nota. Fuente: Elaboración propia

Al observar las gráficas de las funciones f y g, se realiza el siguiente diálogo:

P: ¿Cuál de las funciones modela mejor a los datos, es decir, a los puntos de morado?

E2: Yo creo que la cuadrática, más que todo por su dominio y el rango.

E2: Bueno, más que todo, porque la cuadrática es una parábola y se va para arriba

P: Trata de ser más detallada. Bueno, la idea es ver qué gráfica de las funciones se aproxima mejor a los datos. Por ejemplo, si yo grafico una función de celeste como esta (se dibuja una curva más lejana a los datos), tú escogerías esta función de celeste.

E2: Creo que no. Está muy alejado.

P: Te das cuenta. Estás comparando la gráfica de celeste que está más alejada de los datos.

El equipo aprecia que al inicio parece que los datos son cercanos a la parábola. Luego, se van distanciado y después vuelven acercarse.

P: ¿Y sobre la gráfica de la función lineal?

E2: Como es recta, se va alejando más.

P: Pero ¿y dónde o cuándo?

E2: A la derecha, al infinito

P: pero ¿en qué momento? Es decir, siempre estuvo alejado de los datos

E2: A partir del día 6

P: Te das cuenta que la recta modelaba los datos hasta el día 6. Luego de ese tiempo, comenzó a distanciarse.

E1: Yo también creo que la que mejor se acerca a los datos es la parábola.

P: ¿Qué pasaría si solo hubiésemos modelado hasta el día 5? ¿Qué función hubieras elegido?

E2: La recta

El equipo observa que el elegir una función que modele los datos depende de qué intervalo de tiempo se esté tomando.

Dado el intervalo de tiempo tomado, se elige a la función cuadrática f como la que se aproxima mejor a los datos.

Nos planteamos la siguiente pregunta: ¿existirá otra cuadrática que se aproxime mejor que la que tenemos a los datos?

Esto nos lleva a usar la regla de formación de una función cuadrática.

$$\boldsymbol{h(x) = ax^2 + bx + c} \text{ ; con } \boldsymbol{a \neq 0}$$

Y si es posible, sería importante encontrar una que esté más próxima a los datos.

Para ello, el equipo elige tres puntos de la tabla bajo estos criterios:

$(1; 1)$ es el primer punto que genera la base de datos.

$(5; 12)$ más o menos en ese punto se va generando la curva hacia arriba.

$(10; 85)$ se sigue formando la curva.

Como cada punto debería pertenecer a h, por la definición: si $(x; y) \in f$, entonces $f(x) = y$.

Luego,

$$h(1) = 1 \rightarrow a + b + c = 1;$$

$$h(5) = 12 \rightarrow 25a + 5b + c = 12 \quad y$$

$$h(10) = 85 \rightarrow 100a + 10b + c = 85$$

formando un sistema de 3 ecuaciones con 3 variables

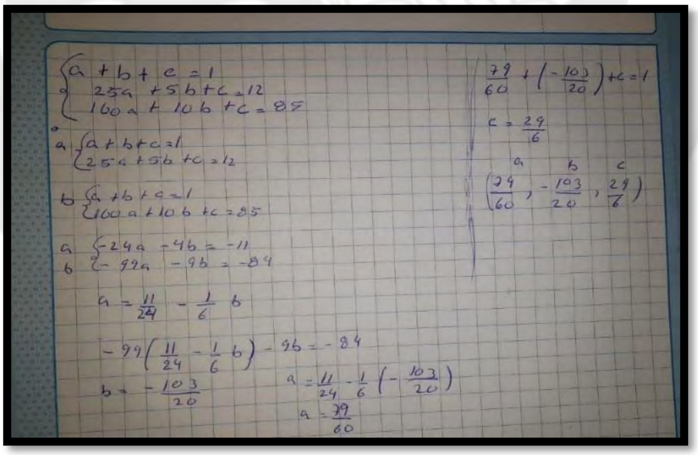
$$(S): \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 25a + 5b + c = 12 \\ 100a + 10b + c = 85 \end{cases}$$

Aquello se resolvió en ese momento mediante un programa del internet, que usa el **método de Cramer.**

La respuesta es $\boldsymbol{a = \frac{79}{60}}$; $\boldsymbol{b = -\frac{103}{20}}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{c = \frac{29}{6}}$. Luego, los estudiantes lo resolvieron por los **métodos de reducción y sustitución** obteniendo los mismos resultados.

Figura 25

Resolución del sistema de ecuaciones, por los métodos de reducción y sustitución.



Nota. Fuente: Elaboración propia

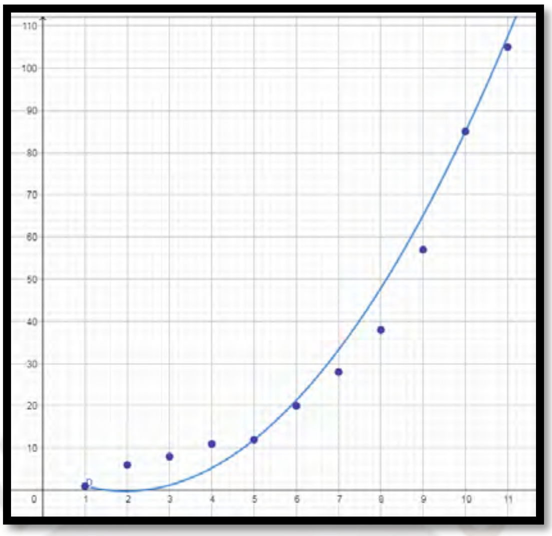
Hallados los valores de $\boldsymbol{a, b}$ y $\boldsymbol{c}$; se reemplaza en la regla de la función cuadrática y se obtiene la regla de correspondencia:

$$h(x) = \frac{79}{60}x^2 - \frac{103}{20}x + \frac{29}{6}$$

Esta se grafica en Geogebra como en la Figura 25, la cual se obtiene la curva de azul.

Figura 26

Gráfica de la función h.



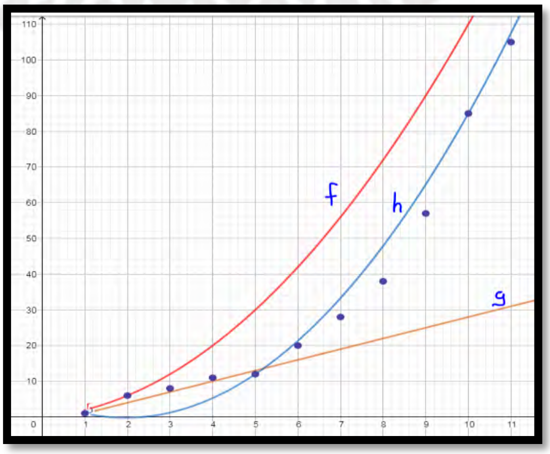
Nota. Fuente: Elaboración propia.

Haciendo la comparación de la gráfica de h con las gráficas de las funciones f y g, que se construyeron inicialmente, el equipo observa que la función cuadrática h se aproxima mejor a los datos.

Comparando la gráfica de h, con las gráficas de las funciones anteriores, el equipo nota una mejor aproximación de h respecto a f respecto en una gran parte de los datos.

Figura 27

Graficas de las funciones f, g y h.



Nota. Fuente: Elaboración propia.

El profesor plantea la pregunta: "¿cómo sería la regla de una función que mejor se aproxime a los datos usando las funciones halladas?"

Se finaliza la sesión.

Sesión 5

Se inicia la sesión haciendo una revisión sobre el avance realizado en la actividad 2.

1. Según las funciones mostradas en la figura ¿cómo considerarías una regla de una función que mejor se aproxime a los datos?

Esta pregunta generó que E2 comenzara a realizar una búsqueda en internet y encontró unas notas guía de un curso de métodos numéricos ubicado en el siguiente enlace:

http://www.ugr.es/~arobles/Telecos/Tema09.pdf

Las notas lo motivan a E2 intentar solucionar el problema mediante el método de aproximación mínimos cuadrados discreto (regresión cuadrática), es decir, aproximarse a los datos por una parábola (función cuadrática).

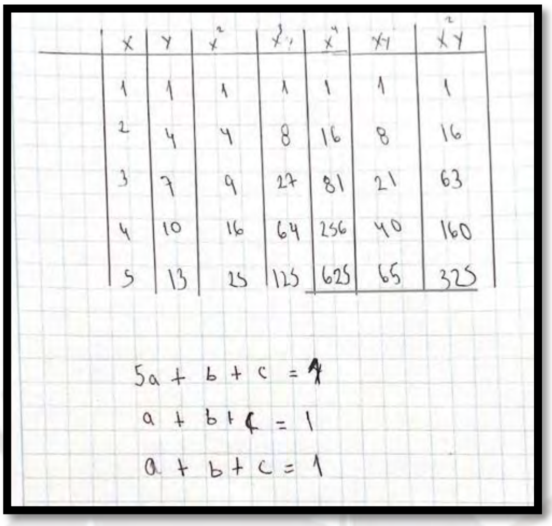
E2 construye bien la tabla y hace bien los cálculos de la tabla con los 5 puntos que no son los datos a los que se desea aproximar. Plantea su sistema de ecuaciones, pero no identifica correctamente los coeficientes de estos, pues son sumatorias como se muestra en las notas.

El profesor, sobre la pregunta de la actividad, inicia el siguiente diálogo:

> P: Dime ¿qué has intentado hacer?
>
> E2: En esta pregunta, yo intenté interpretar. Por un momento, pensé que debía hacer dos tablas, pero dije entonces habría un sistema de 6 ecuaciones. Me guie un poco del ejemplo que había en el artículo. Bueno, creo que no lo entendí muy bien.
>
> P: Ok, muéstrame lo que hiciste.
>
> E2: Bien, ahora se lo envío, y nos muestra su tabla y el sistema de la Figura 28.

Figura 28

Tabla para hallar los coeficientes por el método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática).



x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	1	1	1	1	1	1
2	4	4	8	16	8	16
3	7	9	27	81	21	63
4	10	16	64	256	40	160
5	13	25	125	625	65	325

$5a + b + c = 4$

$a + b + c = 1$

$a + b + c = 1$

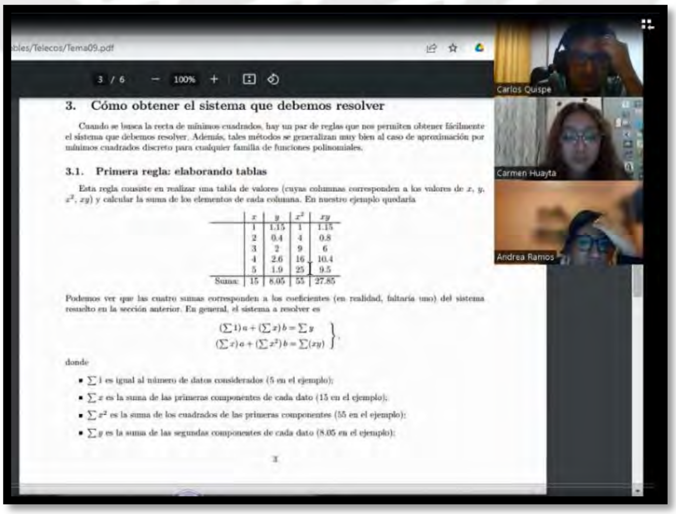
Nota. Fuente: Elaboración propia.

E2: Allí usé el método de mínimos cuadrados usando la primera regla: elaborando tablas el artículo. Le paso el artículo.

P: Ok, para ver de qué se trata

Figura 29

Método de mínimos cuadrados hallado por el equipo de estudio.



Nota. Fuente: Elaboración propia.

P: Ya veo, es un método de aproximación a puntos por funciones polinomiales. Bueno, eso es lo que dice. Parece que hemos encontrado una buena técnica. El problema es que aún no lo entendemos. Y ¿qué usaste?

E2: Usé la parte de aproximar por una parábola.

Figura 30

Método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática).

Si queremos aproximar por una parábola (esto es, una función del tipo $y = a + bx + cx^2$), necesitaremos un sistema de tres ecuaciones para determinar biunívocamente los valores de a, b, c. Observando que, para la recta, la segunda ecuación se "puede obtener" a partir de la primera "sin más que multiplicar por x" cada una de las sumatorias, no es difícil imaginar que, para la parábola, el sistema necesario será

$$\left.\begin{array}{r}(\sum 1)a + (\sum x)b + (\sum x^2)c = \sum y\\ (\sum x)a + (\sum x^2)b + (\sum x^3)c = \sum(xy)\\ (\sum x^2)a + (\sum x^3)b + (\sum x^4)c = \sum(x^2y)\end{array}\right\}.$$

Por consiguiente, tendremos que elaborar una tabla con siete columnas: $x, y, x^2, x^3, x^4, xy, x^2y$.

Nota. Fuente: Universidad de Granada (2014).

P: Bien, la teoría de este método, según el artículo, nos dice que se puede obtener la mejor recta que se aproxime a los datos. También, podemos hallar la mejor cuadrática, que es similar a lo que hemos estado haciendo, solo que bajo este método tiene a la mejor función.

E2: Por eso, intenté hacerlo con esa regla, pero no sé. No entendía de dónde tenía que sacar las variables, más que todo la *y*.

P: Bueno, hay que tratar de buscar más información al respecto si queremos usar esa técnica, ok. Entonces, tratemos de buscar información sobre este tema para entenderlo mejor y usar la técnica para nuestros datos.

E1: Sí, está bien.

E2: Ok, buscaré.

La sesión continua, revisando la siguiente pregunta de la actividad:

¿Será posible encontrar una función que se aproxime mejor a los datos que las funciones obtenidas hasta ahora?

E2: En el artículo, encontré que uno se puede aproximar a los datos, además de la función lineal o cuadrática con funciones exponenciales, logaritmos, potenciales, hiperbólicas y logísticas.

P: Sí, se puede hacer según el artículo. Habría que estudiarlo un poco más para usarlo.

P: Podríamos también revisar las gráficas de las funciones, y ver cuál se acopla mejor a nuestros datos.

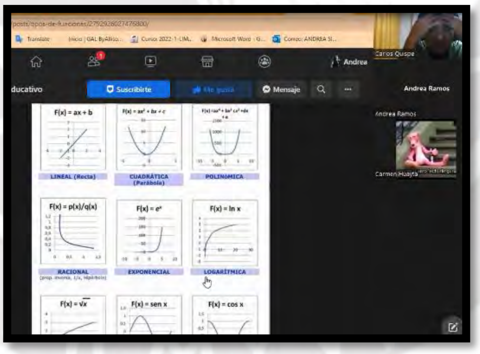
E1: Por la forma que van nuestros datos

P: Sí

Se continúa con la búsqueda por medio del internet. Los estudiantes observan que el comportamiento de la gráfica de la función exponencial se asemeja un poco al comportamiento de la data. También, encuentran, entre sus diversas aplicaciones, el estudio de contagios por virus.

Figura 31

Búsqueda de otras funciones que se aproximen a los datos.



Nota: Fuente: Elaboración propia.

Los estudiantes observan a la función exponencial como candidato para el modelamiento del número total de contagiados por la forma que tiene su gráfica.

Se continúa con la siguiente pregunta de la actividad 2.

Se recuerda que, en la información recopilada en el Word online, se abordó el tema de tasa de contagio, conocido en el campo de la epidemiología como R_0 número básico de reproducción.

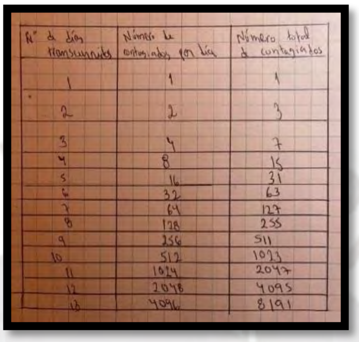
De acuerdo con esto, se hace la siguiente pregunta:

¿Cuál sería la regla de formación del número total de contagiados por COVID si cada persona que contrae dicho virus llega a contagiar a dos personas en promedio?

Los estudiantes realizan la siguiente tabla mostrada en la Figura 32.

Figura 32

Intento de modelar el número de contagios por COVID-19 mediante la noción de número reproductivo R0.



N° de días transcurridos	Número de contagiados por día	Número total de contagiados
1	1	1
2	2	3
3	4	7
4	8	15
5	16	31
6	32	63
7	64	127
8	128	255
9	256	511
10	512	1023
11	1024	2047
12	2048	4095
13	4096	8191

Nota. Fuente: Elaboración propia.

A los estudiantes se les complica encontrar una regla de formación para la secuencia de número de contagiados. Solo se limitan a encontrar el valor del número total de contagiados.

> P: Les sugiero que lo escriban como potencias de 2. De allí, observen con cuidado cómo son los términos.
>
> E1: Ok
>
> E2: Sí, ¿hay una fórmula?
>
> P: Sí, cuando tengan la forma, pueden buscar la fórmula. Bueno, revísenlo e intenten hallar la forma del término enésimo.
>
> E1: Está bien
>
> E2: Ya.

Sesión 6

Se hace un repaso de lo avanzado hasta el momento y se revisa si han podido avanzar la actividad 3. En la primera parte, se les pide encontrar la función cuadrática que se aproxima a los datos mediante el método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática).

E1 manifiesta que no comprende el método mientras E2 intenta usar el método. Sin embargo, aún no lo tiene claro, pues no toma los puntos de la data para generar su cuadrática, sino toma a los puntos de la recta que se aproximaba a los datos que había construido anteriormente E2.

Esto evidencia que los estudiantes aún no tienen claro cómo funciona el método de mínimos cuadrados. Por ende, necesitan más información que les permita despejar sus dudas.

Se les sugiere realizar una búsqueda de información acerca de este método. Los estudiantes llegan encontrar mucha información al respecto. Se elige un video corto que habla al respecto, cuyo enlace es el siguiente:

https://www.youtube.com/watch?v=sIzdZDnsS8k

Se comienza a visualizar el video. En algunos momentos, se pone pausa para aclarar ciertos detalles del video y hacer la comparativa con nuestro problema.

Primero, se hace pausa en la parte donde se señala a los puntos, pues son para nosotros la base de datos a los cuales nos vamos a aproximar.

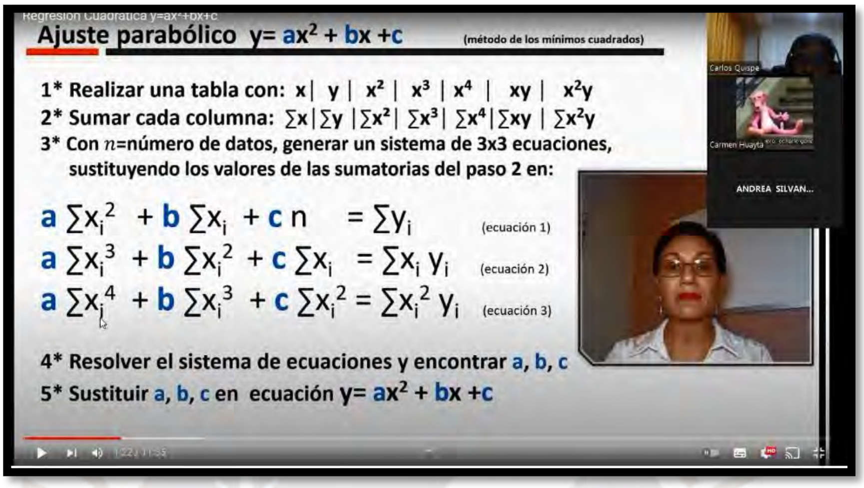
> P: Bien, ¿a qué nos vamos a aproximar?
>
> E2: A los datos
>
> P: Bien, entonces, usaremos nuestra base de datos. Recuerdan ¿por qué solo tomamos la data del número total de contagiados hasta el 16 de marzo?
>
> E2: Porque, si tomamos más puntos, sería demasiado
>
> E1: Porque ese día los casos subían y se estableció medidas más estrictas en el Perú como las cuarentenas
>
> P: Claro, es por eso. Hasta ese día la población vivía de una manera relajada y no había muchas restricciones. Ok, sigamos viendo el video.

Se continúa observando el video.

Se enfatiza los pasos que sigue el video como la construcción de una tabla para hallar la sumatorias. Se va aclarando la notación que se va utilizando, cómo se va usando los puntos (pares ordenados) y qué deberíamos hacer con las componentes de los puntos que conforman nuestra data.

Figura 33

Visualizando video de internet que explica el método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática).



Nota. Fuente: Elaboración propia.

P: ¿Qué viene a ser a, b y c?

E2: Son los coeficientes de la cuadrática.

P: Bien, y ¿cómo obtengo las sumatorias?

E2: Pues, sumando las columnas de la tabla

P: Ok, y ¿cómo obtengo estos coeficientes?

E1: Resolviendo el sistema de ecuaciones

P: Claro, entonces tendríamos los coeficientes

E1: Sí

E2: Claro

P: Y luego ¿qué hacemos?

E1: Reemplazamos en la ecuación los coeficientes hallados

E2: Sí, en la ecuación de la cuadrática.

(Luego se procede a ver el proceso de este método en el video).

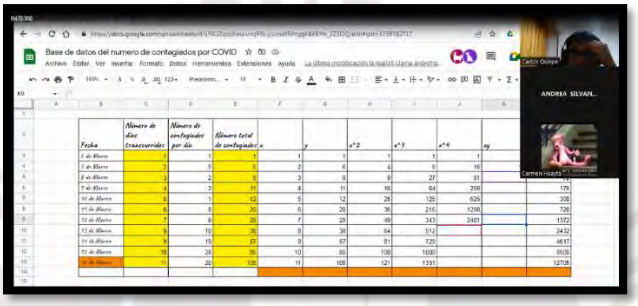
P: ¿Qué tal el video? ¿Ya está un poco más claro?

E2: Sí, ya más claro

Posteriormente, el profesor les muestra una tabla con las columnas que debemos completar de manera online y les indica que pueden usar el mismo Excel para hacer las fórmulas, pero tienen dificultades al escribir las potencias en las fórmulas. Por ello, se les indica que usen la calculadora y terminen con el llenado.

Figura 34

Tabla del método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática) en Excel.



Nota. Fuente: Elaboración propia

Figura 35

Se muestra el llenado de los estudiantes de la tabla.

Fecha	Número de días transcurridos	Número de contagiados por día	Número total de contagiados	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2 y
6 de Marzo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7 de Marzo	2	5	6	2	6	4	8	16	12	24
8 de Marzo	3	2	8	3	8	9	27	81	24	72
9 de Marzo	4	3	11	4	11	16	64	256	44	176
10 de Marzo	5	1	12	5	12	25	125	625	60	300
11 de Marzo	6	8	20	6	20	36	216	1296	120	720
12 de Marzo	7	8	28	7	28	49	343	2401	196	1372
13 de Marzo	8	10	38	8	38	64	512	4096	304	2432
14 de Marzo	9	19	57	9	57	81	729	6561	513	4617
15 de Marzo	10	28	85	10	85	100	1000	10000	850	8500
16 de Marzo	11	20	105	11	105	121	1331	14641	1155	12705
				66	371	506	4356	39974	3279	30919

Nota. Tabla con las sumatorias que permiten formar el sistema de ecuaciones. Fuente: Elaboración propia.

Una vez completada la tabla como se muestra en la Figura 35. Se comenta lo siguiente:

P: Bien, veo que completaron la tabla y hallaron las sumatorias, ahora ¿qué hacemos con las sumatorias?

E2: Lo reemplazamos en el sistema, pero hay una suma de 1, ¿qué es eso?

P: Bueno, eso solo es una forma de expresar cuántos puntos estás usando en la data.

E2: Hay 11 puntos, entonces la suma de 1 es 11.

P: Bien, entonces, planteemos el sistema.

E2: Ya

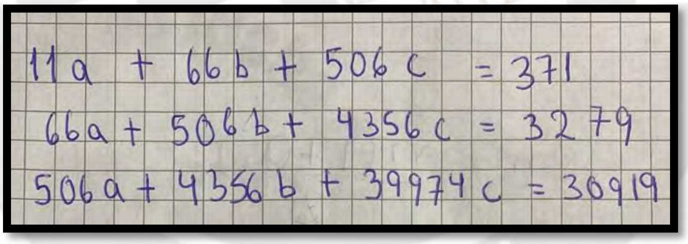
E1: Sí

Luego de realizada las sumas de la tabla (Figura 35) por los estudiantes, se procede formar su sistema de ecuaciones de 3 variables de acuerdo con el algoritmo del método de mínimos cuadrados (Figura 30.).

“Aquí está el sistema” (Figura 36) (E2).

Figura 36

Sistema planteado por E1, por el método de mínimos cuadrado.

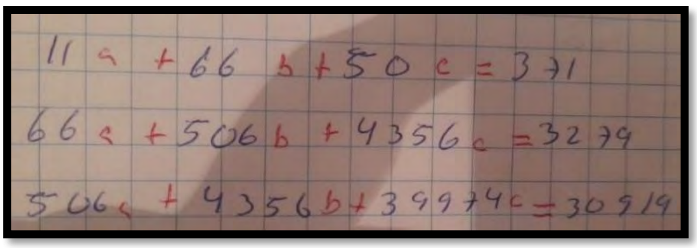


Nota. Fuente: Elaboración propia.

“y este es el mío” (E1).

Figura 37

Sistema planteado por E2, mediante el método de mínimos cuadrado.



Nota. Fuente: Elaboración propia.

P: Ok., ¿E1 el coeficiente de c es 506?,

E1: Sí sí sí sí ….

P: Veo que el sistema va a ser un poco complicado de resolver, al menos manualmente.

E2: Sí, se ve complicado.

P: Recuerdan que habíamos encontrado una página que resuelve sistemas de ecuaciones.

E2: Sí

P: Pueden usar eso para resolver el sistema, porsiacaso les envío el enlace.

E1: Ok.

Después de unos minutos los estudiantes, muestran los siguientes valores para a, b y c:

$$a = \frac{2173}{165}\ ; b = -\frac{10651}{1430}\ \ y\ c = \frac{1217}{858}.$$

P: Ahora, ¿cuál es el siguiente paso?

E1: Reemplazamos en $y = a + bx + cx^2$.

La función cuadrática que obtienen los estudiantes por el método mínimos cuadrados (regresión cuadrática) es el siguiente:

$$f(x) = \frac{2173}{165} - \frac{10651}{1430}x + \frac{1217}{858}x^2$$

P: Recuerden que ese y es como el $f(x)$, por lo tanto, tenemos una función cuadrática. Ahora, ¿cómo sabemos que esta función se aproxima mejor a los datos?

E1, E2: Colocándolo en Geogebra, con Geogebra (Responden a la vez)

P: Bien, para visualizar la aproximación podemos usar Geogebra. Usen Geogebra, pero ¿cuál sería el dominio?

E2: Sería de $1 \leq x \leq 11$, porque hay 11 días.

P: Sí está bien, pero hay que colocar la data en una tabla del Geogebra para comparar con la función.

E2: Ya lo tengo, me sale una parábola infinita.

P: Hay que arreglar la escala, entra a propiedades y cambia la escala del 1:10.

E2: Ok, sí ya se ve mejor.

P: Pero te falta los puntos de tu data

E2: Hay sí, ya lo hago.

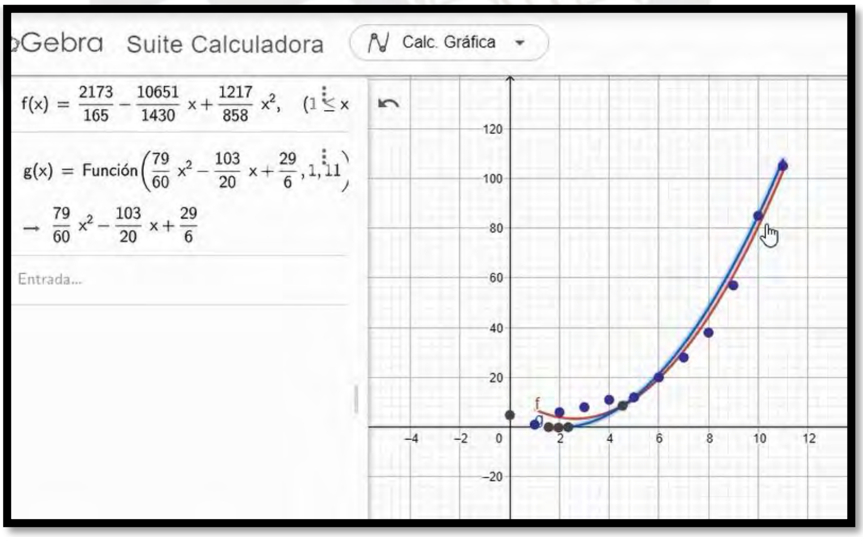
P: Ok.

Los estudiantes ingresan la data como puntos en una tabla que es la función obtenida por el método de mínimos cuadrados y la penúltima función cuadrática que se usó para aproximar a los datos. Esta última fue a sugerencia del profesor para realizar las comparaciones.

Los estudiantes notan que la aproximación de la función obtenido por regresión cuadrática se asemeja al comportamiento de la anterior función cuadrática modelada como se aprecia en la Figura 38.

Figura 38

Grafica de la función cuadrática por el método de mínimos cuadrados.



Nota. Fuente: Elaboración propia.

P: Miren la gráfica de rojo que es la cuadrática que acabamos de encontrar por el método de mínimos cuadrados y la de azul que es la otra cuadrática que teníamos anteriormente.

E1: Son parecidas

E2: Están cercanas a los datos.

E1: Al inicio, la de rojo está un poco más cercana a los datos que la de azul.

P: Sí, así parece. ¿Entonces usamos esta última?

E2: Sí, no hay mucha diferencia, pero es un poco mejor al inicio.

E1: Claro, está un poco más cerca la parábola de rojo que la de azul al principio.

P: ¿Usamos esta función, entonces, para modelar los datos?

E1: Sí, es mejor a mi parecer.

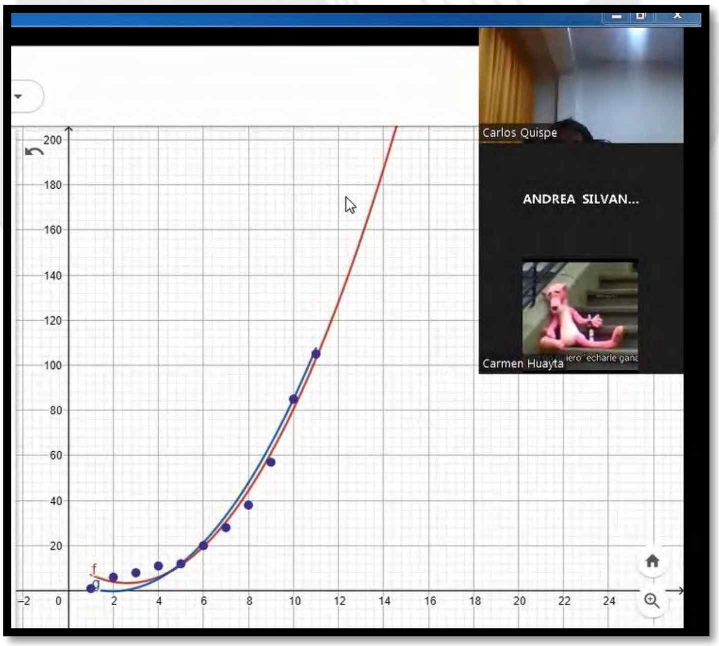
E2: Pienso igual.

P: Ok, entonces ¿qué pasará si extendemos el dominio de nuestra última cuadrática f en Geogebra?, por ejemplo, que el dominio de f sea $[1; 100]$.

A lo que los estudiantes obtienen la siguiente gráfica mediante el Geogebra

Figura 39

Comparación entre las funciones cuadráticas encontradas que se aproximan a la base de datos.



Nota. Fuente: Elaboración propia.

P: Con esta extensión, nos podemos proyectar sobre lo que podría pasar en los siguientes días con el número total de contagiados. Usando esto estamos en el contexto de predicción. Por ejemplo, ¿qué podría suceder en el día 14?

E1: Hay una subida en el número total de contagios.

P: Y ¿de cuánto sería esa subida?

E2: Supera los 180 contagiados

P: Claro, y ¿se podrá estimar el número de contagiados en el día 90?

Aquí se presentan dificultades al manejar el Geogebra (para desplazarse en la gráfica y al manipular la escala).
Al final, se logra visualizar y estimar el número de contagiados en el día 90.

E1: Al parecer, el total de contagiados es más de 10 000 en el día 90.

P: Si, así parece. Recuerdan ¿qué significa el eje X para la gráfica de esta función?

E2: Los días transcurridos

P: Y, ¿qué significa el eje Y?

E1: Los casos, el número total de contagiados

P: Bien, vamos a la pregunta generatriz.

Q_0: ¿En cuánto tiempo tras la llegada una nueva variante del COVID-19, una población como el Perú alcanzaría la inmunidad de rebaño?

P: Recordemos que, para nosotros, cuando hablamos de una población que va a alcanzar la inmunidad de rebaño, se debe entender a que la población iba ir contagiándose y en el transcurrir del tiempo iba alcanzar la inmunidad natural, es correcto.

P: ¿Cuántas personas tendrían que contagiarse para alcanzar la inmunidad de rebaño?

E1: El 70% de la población

P: Bueno, estamos trabajando con la población del Perú, ¿cuánto es la población del Perú?

E1: Era cerca los 33 millones.

E2: El 70% de la población del Perú me salió 22 838163,6 habitantes.

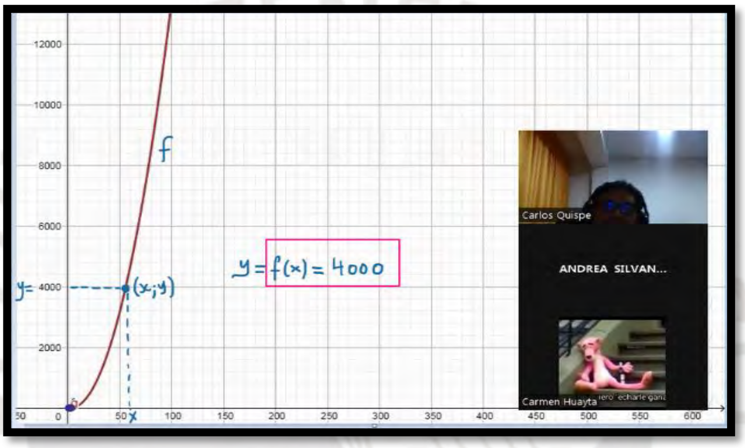
P: Listo, eso es. Necesitamos que esa cantidad de habitantes se contagien para que obtengan inmunidad natural. ¿Qué tendríamos que hacer para saber el tiempo que se demora esa población en contagiarse?, ¿cómo hallamos el tiempo para que 22 838 163,6 personas se contagien?

E1: ¿Usar el modelo de f ?

P: Claro, qué pasaría si quiero saber ¿en cuánto tiempo 4000 personas se contagian? Según el modelo f.

Figura 40

Estudiando a la función cuadrática, para determinar una respuesta a la cuestión generatriz.



Nota. Fuente: elaboración propia

E2: Tendrían que transcurrir un poco más de 50 días.

P: ¿Qué has hecho allí? Ese 4000 es un *y*, es decir, un número total de contagiados, y a este *y*, le corresponde un *x*, donde este *x* son los días transcurridos. Y los *y* ¿a qué son iguales?

E1: A los f(x), entonces 4000 es f(x)

P: Exacto, y tendríamos una ecuación ¿cierto?

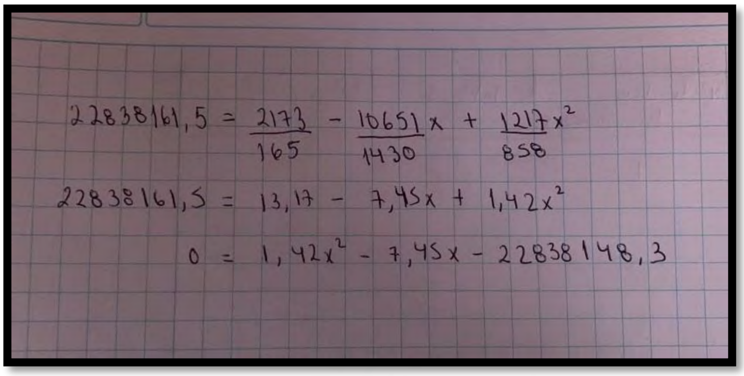
E2: Sí, ah.

E1: Ya

P: ¿Cómo sería esta ecuación? Se da un tiempo para que planteen la ecuación.

Figura 41

Planteamiento de una ecuación cuadrática por los estudiantes.



Nota: Fuente: Elaboración propia

P: ¿Cómo resolverían esta ecuación?

E1: ¿Por aspa simple? Pero hay fracciones

P: Es más complicado, ¿qué otro método hay?

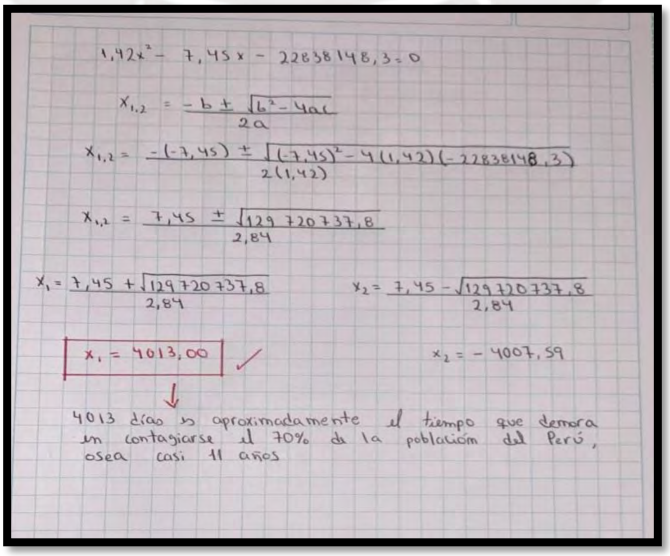
E2: Por fórmula general

P: Me parece que sería mejor. Haber intenten resolver la ecuación.

Los estudiantes resuelven por fórmula general obteniendo como respuesta 4013 días aproximadamente 11 años.

Figura 42

Resolución de la ecuación cuadrática por los estudiantes.



Nota. Fuente: Elaboración propia

P: Listo, lo hallaron, ¿qué significa este x que acaban de hallar?

E2: Los días transcurridos

P: ¿Cuántos días son?

E2: 4013 días

P: Y ¿cuánto sería en años? Un año tiene 365 días.

E2: Sale decimal 10, 994 años, casi 11 años.

P: ¿Qué significa?

E2: Que en aproximadamente 11 años habría inmunidad de rebaño

E1: Sí creo que va por ahí, o sea si se siguen dando las mismas condiciones, y los casos siguen subiendo porque según nuestra gráfica los casos suben y no hay manera que baje. Si se mantiene de esta manera, la inmunidad de rebaño se tendría en 11 años.

P: Claro, bajo la suposición de que en alrededor de 11 años se llega a contagiar el 70% de la población y luego pasarían a ser inmunes.

E2: Así, es

E1: Claro

P: Entonces, creo que ya tenemos una respuesta a nuestra pregunta Q_0.

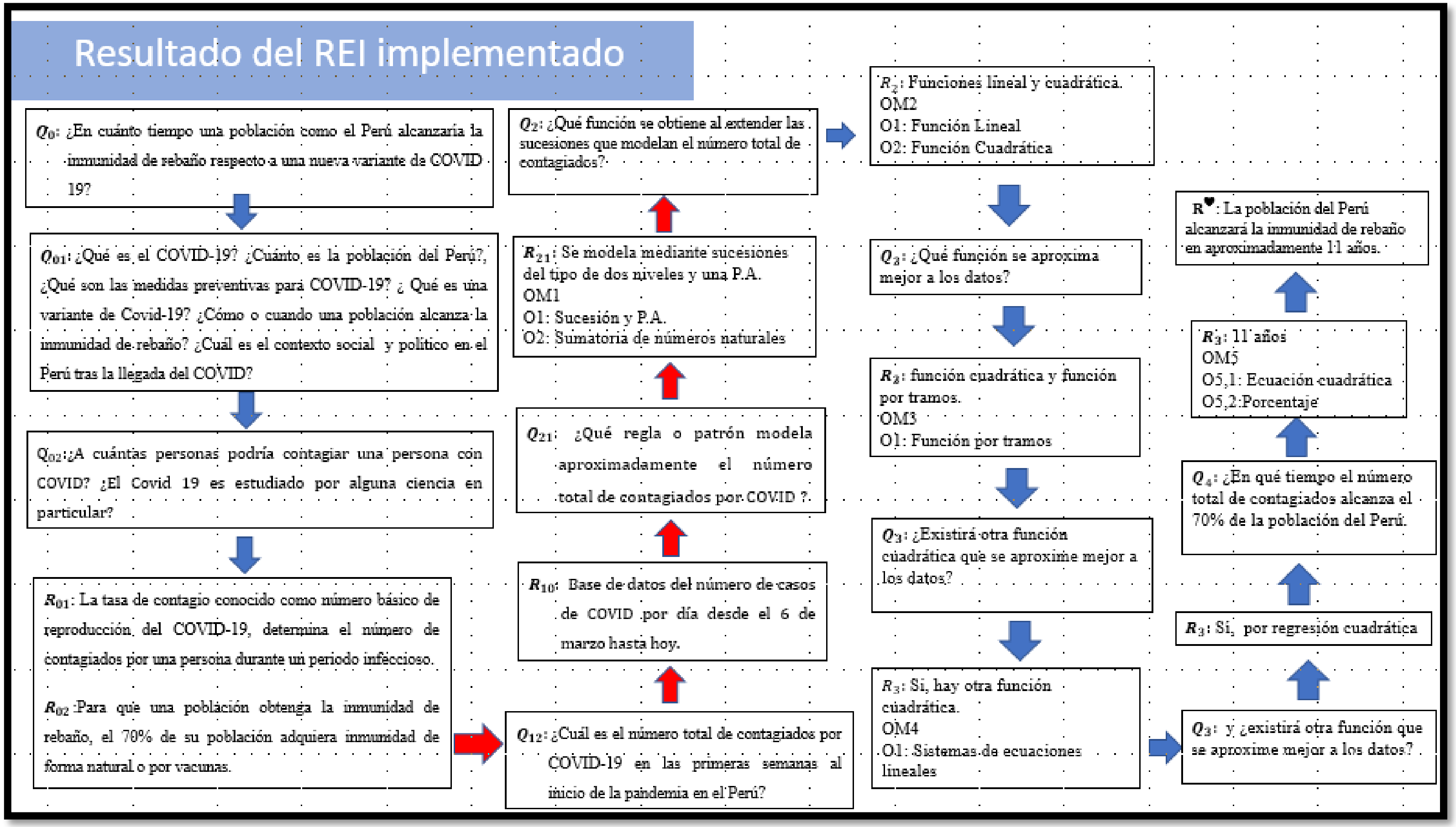
Q_0: ¿En cuánto tiempo tras la llegada una nueva variante del COVID-19, una población como el Perú alcanzaría la inmunidad de rebaño?

Según nuestro estudio, la inmunidad de rebaño se alcanza en un tiempo aproximado de 11 años.

A continuación, en la Figura 43 se muestra como se fue desarrollando el REI implementado.

Figura 43

Mapa de cuestiones y respuestas del REI implementado.



Nota. En el REI implementado se muestra el método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática). Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO VI: ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este capítulo, se desarrolla el análisis a posteriori que es la cuarta fase de nuestra metodología. Esto se analiza con ayuda de los indicadores de grado de completitud de una Organización Matemática (OM). La OM es resultante del REI desarrollado por los estudiantes a partir de la cuestión generatriz Q_0 y se muestran las consideraciones finales obtenidas a partir de dicho análisis.

6.1. Análisis a posteriori

De acuerdo con los indicadores del grado de completitud de una OM, definidos en Bosch et al. (2004), se usará para el análisis de la OM, que será desarrollada por los estudiantes en el REI implementado.

De aquí comenzaremos a realizar el análisis según estos indicadores, para poder identificar en parte a las limitaciones y restricciones durante el desarrollo de la cuestión generatriz:

Q_0: ¿En cuánto tiempo tras la llegada una nueva variante del COVID-19, una población como el Perú alcanzaría la inmunidad de rebaño?

Por otro lado, se mostrará qué conocimientos sobre funciones se están empleando.

En el primer indicador, **Integración de los tipos de tareas,** los estudiantes, con la información recolectada relacionada a Q_0, responderán dicha cuestión planteándose el siguiente tipo de tarea:

T_1: Hallar un modelo matemático que se aproxime a los datos (número total de contagios de COVID-19 por días transcurridos)

Llevándolos a traducir y desarrollar la tarea:

$t_{1,1}$: Hallar un patrón o sucesión que se aproxime a los datos (número de total contagios de COVID-19 por días transcurridos)

Sobre esto, los estudiantes usan dos técnicas para aproximarse a los datos:

$\tau_{1,1,1}$: Aproximarse por una sucesión del tipo progresión aritmética (P.A.)

$\tau_{1,1,2}$: Aproximarse por una sucesión de segundo grado o cuadrática

Ambas técnicas usan el ensayo y error para encontrar las sucesiones, donde se buscan valores iguales o cercanos a los datos. Una vez obtenida la secuencia de números se plantean la siguiente tarea:

$t_{1,1,1}$: Hallar la regla del término enésimo del patrón o sucesión que se aproxime a los datos (número de total de contagios de COVID-19 por días transcurridos)

Las técnicas empleadas para resolver $t_{1,1,1}$ para la sucesión del tipo P.A. fue la técnica:

$\tau_{1,1,1,1}$: Calcular la razón de la P.A. y emplear la fórmula del término enésimo

Y para la sucesión de segundo grado es la técnica:

$\tau_{1,1,1,2}$: Expresar el primer término como 2, el segundo término como $2+4$, y en general el término n-ésimo como la suma de los n primeros números pares, luego se usa la fórmula suma de números pares.

Obteniéndose dos modelos del tipo sucesión que se aproximan a los datos, una sucesión tipo P.A. y otra de tipo sucesión de segundo grado. Por ende, se han hallado soluciones para T_1.

Posteriormente, se plantea la primera mejora de este modelo matemático, mediante la siguiente tarea:

$t_{1,2}$: Hallar una función que se aproxime a los datos (número total de contagios del COVID-19 por días transcurridos)

Esta tarea, en un primer momento, se realiza mediante la técnica:

$\tau_{1,2,1}$: Extensión del dominio de una sucesión (subconjunto de los naturales) a un intervalo.

Esta técnica es aplicada a las sucesiones, cuyos dominios está en el conjunto de los naturales, halladas en la tarea $t_{1,1}$. De este modo, se obtienen una función de tipo lineal y otra de tipo cuadrática. Luego, se grafica las funciones con Geogebra y se visualiza qué tan cercanas se encuentran a los datos, para cuestionarse y plantear una segunda mejora al modelo matemático obtenido hasta el momento mediante la siguiente tarea:

$t_{1,2,1}$: Hallar una función que mejor se aproxime a los datos (número total de contagios del COVID-19 por días transcurridos)

Para ello, se usa la técnica:

$\tau_{1,2,1,1}$: Usar Geogebra para ver qué función de las obtenidas anteriormente se acerca más a dichos datos.

Se determina que, entre la funciones lineal y cuadrática, la última se acerca mejor a los datos por la forma que tiene. Luego, se cuestiona si existe una mejor función cuadrática que se aproxime a los datos. Para ello, se plantea la siguiente tarea:

$t_{1,2,1,1}$: Hallar una función cuadrática que mejor se aproxime a los datos (número total de contagios del COVID 19 por días transcurridos)

Para ello, los estudiantes emplearían la técnica:

$\tau_{1,2,1,1,1}$: Usar la forma general de una función cuadrática, es decir, $f(x) = ax^2 + bx + c$, y tomar tres puntos de los datos (número total de contagios por días transcurridos),de la forma $(x; y)$, donde x es número de días transcurridos e y es número total de contagiados transcurridos en x días, luego se reemplazan los puntos en la regla de la función, se obtiene un sistema de 3 ecuaciones con 3 variables, se resuelve el sistema por algún método (eliminación y sustitución, Cramer), se hallan los valores de a, b y c, se reemplaza en la forma general, se visualiza en Geogebra y se compara con la otra función.

Para que la función tenga de algún modo una mejor aproximación a los datos (número total de contagios del COVID-19 por días transcurridos), se escogió tres puntos, considerándose el dominio de los datos, es decir el menor y mayor de x. Tomando de este modo los puntos extremos, y un punto donde aparentemente comienza a haber un cambio más pronunciado hacia arriba, en el comportamiento que presentaban los datos gráficamente.

De esta forma, los estudiantes consiguen una función cuadrática cuya visualización en Geogebra es mejor que la anterior (función que se obtiene mediante la extensión de la sucesión de segundo grado).

Una tercera mejora del modelo matemático sucede, al cuestionarse si la función obtenida hasta el momento es la que mejor se aproxima a los datos. Para ello, se plantea nuevamente la siguiente tarea:

$t_{1,2,1}$: Hallar una función que mejor se aproxime a los datos (número total de contagios del COVID-19 por días transcurridos)

Aquí se llega a encontrar y aprender a usar la técnica:

$\tau_{1,2,1,2}$: Método de mínimos cuadrados en el caso de una regresión cuadrática.

Según la información recopilada, esta técnica nos permite hallar la mejor función cuadrática cuya gráfica está más cerca a los datos. Al emplear este método, los estudiantes construyen y llenan una tabla para realizar sumas, donde estas depende de los datos (número total de contagios del COVID-19 por días transcurridos). Para obtener los coeficientes de un sistema de ecuaciones, cuya solución son los coeficientes de la expresión cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ (función cuadrática), que mejor se aproxima a los datos.

Finalmente, para realizar la tarea:

t_0: Hallar el tiempo que demoraría la población del Perú en alcanzar la inmunidad de rebaño tras la llegada del COVID-19.

Los estudiantes usan la técnica:

$\tau_{0,1}$: Plantear una ecuación cuadrática, donde se iguala $f(x)$ y al 70% de la población del Perú, donde f es la función cuadrática que mejor se aproximó a los datos (número total de contagiados del COVID-19 por días transcurridos) y resolver la ecuación por fórmula general.

Hallando las soluciones de la ecuación obtenida por $\tau_{0,1}$, se obtiene una posible respuesta a Q_0, es decir el tiempo que demora la población del Perú en alcanzar la inmunidad de rebaño respecto a una nueva variante del COVID-19.

Todas las tareas que pretenden en cierta medida responder Q_0 van apareciendo por la necesidad de mejorar el modelo y la aproximación de este a los datos. Por ende, se puede afirmar que en el REI implementado aparecen integrado a los tipos de tareas relacionado a una ecuación cuadrática, lineal, sistemas de ecuaciones lineales, optimización. No obstante, al momento de modelar con funciones, los estudiantes no se cuestionan si existe otra función de otro tipo que pueda aproximarse mejor a la base de datos (número total de contagiados del COVID-19 por días transcurridos).

El docente es quien sugiere el estudio y búsqueda de información específicamente sobre la gráfica de funciones y aplicaciones. Para que puedan encontrar alguna similitud con el comportamiento de los datos gráficamente o contexto similar al que se está investigando. De esta manera, se podría tomar en cuenta a funciones como la exponencial. Sin embargo, no sucede. La causa de que los estudiantes no usen la función exponencial se debió posiblemente a que no trataron este tema en la secundaria a pesar de que está presente en el currículo escolar, como comentan los estudiantes.

En relación del segundo indicador***, Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas*****,** cuando se propuso responder Q_0, se planteó lo siguiente:

T_1: Hallar un modelo matemático que se aproxime a los datos (número total de contagios de Covid-19 por días transcurridos)

Para esto, el equipo logra usar y/o desarrollar varias técnicas, que iban aumentando su complejidad de manera progresiva. Primero, se intentó buscar patrones con datos cercanos a la data real y de esta forma definir sucesiones cuyas reglas de formación del término enésimo se construyen pensando en que son próximas a los puntos que determinan la data. Luego, se intentó como segunda técnica modelar con funciones, la cual se usó la extensión de las sucesiones halladas con la primera técnica, donde establece mayor cercanía por la función cuadrática.

Para luego, buscar una mejor función cuadrática que modele los datos que se halló usando tres puntos de la data (números total de contagios del COVID -19 por días transcurridos) en la regla general de la función cuadrática, estableciendo un sistema de 3 ecuaciones con 3 variables cuyo conjunto solución da como resultado los coeficientes de la cuadrática, en consecuencia, la regla de una nueva función cuadrática. Sobre esta función, se llega a visualizar mediante Geogebra que se aproxima más a la data que la función cuadrática anterior. Finalmente, una tercera técnica que llega a ser aprendida y usada es el método de mínimos cuadrados para el caso de una regresión cuadrática, el cual encuentra la mejor función cuadrática que se aproxima a los datos.

En un caso particular al resolver los sistemas de ecuaciones los estudiantes reconocen que pueden resolver usando la técnica de la regla de determinantes o regla de Cramer, aunque preferían usar el método de sustitución y eliminación.
Sobre la ecuación cuadrática que apareció al final para dar una respuesta a Q_0, los estudiantes proponen al inicio la técnica del aspa simple. Sin embargo, este no es adecuado, ya que los coeficientes eran fraccionarios con cantidades grandes como numerador y denominador. Por ende, recurren a la técnica de la fórmula general para hallar el conjunto solución de una cuadrática.

Así pues, se puede afirmar que para realizar las tareas derivadas del tipo de tarea T_1, los estudiantes emplean varias técnicas que se van usando secuencialmente a medida que se busca un mejor modelo matemático. La primera técnica estaba relacionada al tema de sucesiones. Luego, mediante la extensión de dichas sucesiones a funciones y visualización en Geogebra, los estudiantes consiguen valorar más a la función cuadrática, lo que provoca el desarrollo de una segunda técnica que consiste en usar tres puntos de la data para construir la regla de la función cuadrática. A pesar de la aparente mejora en la proximidad, se busca una función cuadrática mejor, lo que lleva a los estudiantes a descubrir el método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática). También, se observa que a los estudiantes le es un poco complicado mostrar las reglas de los términos enésimo para secuencias de segundo grado, mientras que para las sucesiones como P.A. le es más sencillo, pues saben usar la fórmula término enésimo. Además, se evidencia dificultades para mostrar un modelo funcional a partir de las reglas generales de una sucesión. Por ello, el docente los guía en el estudio de sucesiones y funciones para que los estudiantes puedan lograr su objetivo.

En el tercer indicador, ***Independencia de los ostensivos que integran las técnicas*,** se observa que al momento de usar el método de mínimos cuadrados y resolver el sistema de ecuaciones, y hallar los valores de a, b y c para expresar a la función cuadrática $f(x) = a + bx + cx^2$ se les dificultó un poco. Esto se debe a la forma cómo ellos lo habían conocido que es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ que lamentablemente los lleva a una regla de función cuadrática equivocada.

Además, al realizar las extensiones de sucesiones a funciones, los estudiantes extienden las reglas de las sucesiones $a_n = n^2 + n$ y $b_n = 3n + 2$ a las reglas de las funciones: $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = 3x - 2$, donde se refleja la necesidad expresar las sucesiones como las funciones f y g en términos de x. Esta es la forma como ellos denotan usualmente a las funciones. A pesar de que los estudiantes saben que una sucesión se puede ver como una función, tienen la idea de que deben estar denotados como f y g en términos de x. Por ende, se puede decir que evidenciamos rigidez en el uso de ostensivos en la actividad matemática desarrollada por los alumnos.

En el cuarto indicador, **es *Existencia de tareas y técnicas "inversas"*.** Por lo general, no se aprecia tareas y técnicas inversas en el desarrollo del REI. No obstante, para que los estudiantes pudieran realizar el planteamiento de la ecuación cuadrática con la función cuadrática como modelo del número de contagiados por día, se plantea algunas tareas inversas, ya que nuestro objetivo o tarea principal t_0: hallar el tiempo en que la población del Perú alcanza la inmunidad de rebaño respecto a una nueva variante de COVID-19. Por ejemplo, se realizó la siguiente pregunta: en 40 o 90 días, cuántas personas o cuántos contagiados en total habría, a lo que los estudiantes responden usando la gráfica de la función que se visualiza en Geogebra para ver la correspondencia aproximada de estas cantidades entre los ejes de los días transcurridos y el número total de casos.

El propósito de estas preguntas era que se familiarice con el modelo matemático. De esta forma, se pueda realizar el planteo de ecuación para hallar el tiempo que se busca en t_0.

En el quinto indicador**,** es ***Interpretación del resultado de aplicar las técnicas.***

Los estudiantes se estuvieron cuestionando continuamente en mejorar el modelo matemático para T_1 , ya que al visualizarlas en Geogebra se daban cuenta qué tan próximas se encontraban de los datos. Esto motivaba a los alumnos a seguir mejorando los modelos obtenidos. Para esto, hallaron inicialmente una función cuadrática mediante la técnica la extensión de sucesión a función. Luego, usaron la técnica que reemplazaba tres puntos asociada a la data en la regla $f(x) = ax^2 + bx + c$, y hallar los valores de a, b y c. Se vuelve a cuestionarse si es la mejor función para T_1, a pesar de que no llegan usar otro tipo de función. Los estudiantes llegan encontrar

otra técnica que les permite hallar la mejor función cuadrática que se aproxima a los datos. Esto es, mediante el método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática).
Por lo tanto, se puede indicar que sí se encuentra este indicador en varias etapas del REI.

En el sexto indicador ***Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica*** se indaga si hay la necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas inicialmente considerados.
A raíz de buscar la mejora de sus modelos matemáticos que surgían a causa de T_1, los estudiantes llegan encontrar dos técnicas nuevas. La primera es obtenida de unas notas de un curso de métodos numéricos y cálculo diferencial, denominada el método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática). La segunda es por deducción del caso de la construcción de una función lineal a partir de dos puntos. Esta técnica consiste en la construcción de la regla de una función cuadrática a partir de 3 puntos de su gráfica, las cuales se mostraron eficientes, es decir, próximas a la base de datos. Además, son opciones para ser usadas como modelo definitivo para dar una respuesta Q_0. Es importante indicar que podrían presentarse estas actividades desde el nivel secundario. La idea es que los estudiantes desarrollen tareas relacionadas a la aplicación del método de mínimos cuadrados, en particular, el caso de la regresión cuadrática.

En el séptimo indicador, es ***Existencia de tarea matemática "abiertas"***. La cuestión generatriz Q_0, propuesta representa en sí una tarea abierta, ya que no se conoce la técnica o técnicas que ayudarán a resolverlas. De este modo, para llevar a cabo la tarea t_0, se plantean tareas derivadas del tipo de tarea T_1,donde los estudiantes usaron técnicas que iban mejorando, en el sentido que el modelo matemático (sucesiones, funciones) se ajuste mejor a los datos reales. Los modelos fueron encontrados dentro de los que ya se conocían en el nivel secundario. Además, con el uso del internet (fuente principal de información), los estudiantes logran conseguir mejores técnicas, y muestran tendencia a mejorar, aprender y construir técnicas nuevas para que su modelo funcional sea más eficiente.

CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo, presentaremos las consideraciones finales sobre el análisis del grado de completitud de una organización matemática basada de un REI sobre el COVID-19, así como las limitaciones y perspectivas a futuro.

Consideraciones finales

En primer lugar, se resalta la importancia del marco teórico (TAD), que permitió inicialmente cumplir con el primer objetivo específico, pues se identificó las praxeologías matemáticas que se podrían presentarse en el diseño del REI basado en un MER dominante. En ese mismo sentido, el proceso de diseño de un REI utilizó una metodología basada en la TAD, descrita en Barquero y Bosch (2015, como se citó en García, et al., 2019), que consta de 4 fases. Esto fue fundamental para el diseño del REI. Por ende, al implementarse el REI en dos estudiantes del primer ciclo de una universidad en sesiones de cien minutos de duración, se cumple el segundo objetivo específico: identificar las praxeologías matemáticas asociadas al contenido que se presente en la implementación del REI.

Sobre nuestro tercer objetivo, se logró concretar, ya que se analizó la organización matemática, desarrollada por los estudiantes, con los indicadores de grado de completitud. Se encontró que no llegan a cumplirse dos indicadores relacionados al desarrollo de tareas inversas y a la independencia del uso de ostensivos.

En consecuencia, se ha logrado concretar el objetivo general de la investigación, analizar el grado de completitud de la organización matemática de la noción de funciones por medio de un REI. Esto se debe gracias a los indicadores del grado de completitud que permite caracterizar la organización matemática construida por los estudiantes. Donde se muestra algunas restricciones que han dificultado la búsqueda de respuestas a cuestiones sobre el tiempo de contagio por el virus (COVID-19), como también el cumplimiento de algunos indicadores que en cierta medida nos permite indicar que tan relativamente completa están las praxeologías matemáticas desarrolladas. Que se pueden mencionar a continuación:

- El uso de diferentes técnicas relacionadas a sucesiones, función lineal y cuadrática.
- La construcción o la búsqueda de los estudiantes de una nueva técnica donde usan tres puntos para construir una función cuadrática o que permita obtener la mejor cuadrática que se aproxime a los datos (mínimos cuadrados).
- Se evidencia dificultades por parte del estudiante al intentar expresar matemáticamente los datos de la tabla, por ejemplo, en el cálculo del término n-ésimo de la sucesión de segundo grado.
- Se evidencia la dependencia de los ostensivos que integran las técnicas. Por ejemplo, cuando los estudiantes realizaban la notación del coeficiente principal de una cuadrática, necesariamente, tenía que ser representado por la letra a. En caso contrario, causaba errores al realizar las operaciones con los coeficientes de una cuadrática. Además, al simbolizar las funciones que modelan el número de contagiados usan las notaciones clásicas como $f(x)$.
- A excepción de una pregunta que se presentó, no se evidenciaron tareas y técnicas inversas.
- Al momento del análisis de las primeras respuestas de las preguntas Q_i, los estudiantes buscaron la manera de mejorar su modelo matemático, pasando desde una propuesta por sucesión, a una por función cuadrática. Luego, usaron la mejor función cuya gráfica describa el compartimiento de los datos a través del tiempo.
- El uso de la cuestión generatriz Q_0 determina una tarea, donde se desconoce con anticipación qué técnica o técnicas permitirán resolverla. Esto condujo a los estudiantes a encontrar técnicas nuevas como la técnica del método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática), las cuales permitieron encontrar un modelo matemático para dar respuesta a Q_0.

Además, en el análisis de los resultados, durante la resolución del problema de contagio del COVID 19, pueden emerger algunos de los saberes de funciones propuestos en el currículo escolar y en un curso de matemáticas del primer semestre de la universidad, para ser enseñados. Por ejemplo, los contenidos de la función lineal y cuadrática, y de conocimientos de sistemas de ecuaciones, para la resolución de problemas, tanto en enseñanzas a nivel secundario y superior. A la búsqueda o construcción de una función, que modele el crecimiento de los contagios de COVID

19, aparece la necesidad de establecer una data de valores $(x; y)$ que cumpla con la función, es decir, una necesidad de estudiar la noción del dominio y rango de la función.

Además, existen saberes que surgieron en el desarrollo del REI que no se consideró; por ejemplo, el tema de mínimos cuadrados (regresión cuadrática), que surgió para obtener los coeficientes para la función cuadrática que modele los contagiados de COVID por día. Por ello, sería apropiado relacionar el contenido de funciones con sistemas de ecuaciones y técnicas para hallar la regla de correspondencia de una función como parte de conocimientos propuesto en un currículo. Además, sería beneficioso diseñar una actividad para los estudiantes del primer ciclo de universidad o del quinto de secundaria, donde pueda aparecer la noción de mínimos cuadrados como parte de una técnica para encontrar la regla de correspondencia de una función.

Por otro lado, los estudiantes se apoyaron en la representación gráfica para orientarse en la búsqueda de una función que dé respuesta a la pregunta planteada; es decir, elaboraron una técnica gráfica en donde indicaron una relación de la gráfica con los datos que desean modelar o aproximar con la función. Por ello, será importante que el profesor gestione algunas sesiones para ver una variedad de funciones y determinar cuál se ajusta más a los datos, pues así nos permite abarcar una mayor parte del contenido de funciones y sus características.

Con relación a lo anterior, el empleo de GeoGebra en las actividades nos ayudó a corroborar la aproximación de nuestros modelos funcionales a los datos por lo cual se ha constituido en una herramienta importante. Por ello, se incorporó como parte de la técnica utilizada por los estudiantes.

Además, los estudiantes tuvieron dificultades en el uso del Excel debido a los comandos de operaciones básicas. Un problema similar surgió con el uso de GeoGebra. Esto se debe a que los estudiantes recién comenzaban a manipular el software. Por ende, se le dificultaba ingresar las reglas de las funciones por medio del teclado. Por estas razones, sería conveniente desarrollar un taller sobre la manipulación de estos programas para que el desarrollo de las sesiones sea más fluido.

Finalmente, consideramos que la implementación del REI se desarrolló en una forma abierta, pues los estudiantes reflexionaron sobre sus respuestas que se plantearon en las actividades con poca intervención del docente quien le ayudó con la orientación de las técnicas. Además, observamos que los estudiantes construyeron nuevas técnicas para encontrar la regla de correspondencia de una función donde se cuestionaron su validez al modelar los datos.

.

REFERENCIAS

Almouloud, S. (2015). Teoría Antropológica do Didáctico: metodologia de análise de materiais didáticos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática. UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*. 42, 09-34. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/628/364

Aragón, J. & Cruz, M. (2020). Datos y tendencias del Avance del COVID-19 en Perú después de 70 días del primer caso reportado y de 60 días de cuarentena. Gobierno y Políticas Públicas PUCP. https://gobierno.pucp.edu.pe/reporte/datos-y-tendencias-del-avance-del-covid-19-en-peru-despues-de-70-dias-del-primer-caso-reportado-y-de-60-dias-de-cuarentena-1/

Bacaër, N., Ripoll, J., Bravo de la Parra, R., Bardina, X. & Cuadrado, S. (2021). *Matemáticas y epidemias.* Paris, ISBN 979-10-343-8464-8.

BBC. (2020). *Contagio del coronavirus: qué es el número de reproducción básico R0 y porqué es crucial para decidir el fin de los confinamientos*. (2020, 1 de mayo). BBC NEWS – MUNDO. https://www.bbc.com/mundo/noticias-52491223

BBC. (2022). *Coronavirus: ¿Cuándo deja de ser contagiosa una persona enferma de COVID? (tenga o no síntomas)*. (2022,12 de enero). BBC NEWS/ MUNDO. https://www.bbc.com/mundo/noticias-54828774

Blue Shield (20 de mayo de 2021). *¿Qué significa alcanzar la inmunidad de rebaño frente a la COVID-19?* Blue Shield. https://www.blueshieldca.com/bsca/bsc/wcm/connect/sites/Sites_Content_EN/coronavirus-sp/Featured_articles_Coronavirus/alcanzar-la-inmunidad

Bombal, F. (2014). Galileo Galilei: Un hombre contra la oscuridad. *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 107(1-2), 55 – 78. https://rac.es/ficheros/doc/01110.pdf

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz, H. L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta de la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, Vol. 18, 37-74. http://funes.uniandes.edu.co/13119/1/Bosch2006La.pdf

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). *Incompletitud de las Organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares*. https://www.researchgate.net/publication/285438796.

Bosch, M., Fonseca, C., y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*, 205-250. https://www.researchgate.net/publication/285438796_Incompletitud_de_las_organizaciones_matematicas_locales_en_las_instituciones_escolares

Camacho, A., Valenzuela, V.& Caldera, M. I. (2017). Modelización de una actividad de la física para mejorar la enseñanza del concepto función. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*. 8(15), 57 - 67. https://www.rediech.org/ojs/2017/index.php/ie_rie_rediech/article/view/31/48

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015), Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, -28. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5672145.pdf

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 19(2), 221-266. https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=64556

Comincini, E., Wilches, J. H. & Saraví, F. D. (2021). Factores epidemiológicos R0 y Re durante la COVID-19: ¿qué son y en qué difieren? *Revista Cuidarte.* 2021;12(1):e1393.http://dx.doi.org/10.15649/cuidarte.1393

Revollé, A., León, G., Absi, A. & Jiménez, A. (2022). *Coronavirus en Perú: así evoluciona la pandemia en el país.* (2022, 16 de octubre). *La República*. https://data.larepublica.pe/envivo-casos-confirmados-muertes-coronavirus-peru/

Donvito, A., Otero, M. R. & Sureda, P. (2017). *Enseñanza por Investigación en la Escuela Secundaria.* Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. https://www.researchgate.net/publication/315652583_Ensenanza_por_investig acion_en_la_Escuela_Secundaria_Explorando_la_relacion_entre_la_matemática_y_las_finanzas_personales.

Duche, A., Paredes, F., Gutiérrez, O. & Carcausto, L. (2020). Transición secundaria-universidad y la adaptación a la vida universitaria, *Revista de Ciencias Sociales,* 26(3), 244 – 258. https://www.redalyc.org/journal/280/28063519018/html/

Espinoza, E. [LS2] (2012). Matemática Básica. EdukPerú.

Esteybar, I., Berenger, M., Zabala, R. y Moyano, A. (2013). Formación docente como parte de la articulación del nivel Secundario – Universidad ítulo del trabajo. http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1164.pdf

Ferrari, M. & Farfán, R. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 145 – 149. http://funes.uniandes.edu.co/6286/

Figueroa, R. [LS1] (2012). Matemática Básica 1. Ediciones RFG.

Foti, B.S. (2021). Las funciones exponenciales: Un análisis de la distancia epistemológica. [Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires]. https://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/123456789/2667/Tesis%20Foti%202021%20Las%20FE%20an%20lisis%20de%20la%20distancia%20epistemol%20gica.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y universitaria.*(Tesis de Doctorado). http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/TESIS__en__PDF.pdf

Flores, R. W. (2019). *Construcción de la función exponencial con estudiantes de quinto de secundaria por medio de situaciones didácticas.* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/14603

Gamboa, R., Castillo, M. & Hidalgo, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*, 19(1),1-31. https://doi.org/10.15517/aie.v19i1.35278.

García, F., Barquero, B., Florensa, I. & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, *Avance de Investigación en Educación Matemática*, 15, 75 – 94. http://dx.doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

García, F. & Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: Estudios de caso en distintos niveles educativos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 17*, 21–37. http://dx.doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315

Garrido, E. (2022). *Ómicron: durante cuántos días puede contagiar una persona infectada a otras. (2022,2 de febrero).* Gestión. https://gestion.pe/peru/omicron-durante-cuantos-dias-puede-contagiar-una-persona-infectada-a-otras-covid-19-coronavirus-nnda-nnlt-noticia/

Gazzola, M., Otero, M., & Llanos, V. (2021). Recorrido de estudio e investigación en física y matemáticas en la escuela secundaria. *Praxis & Saber, 12*(31), e11151. https://doi.org/10.19053/22160159.v12.n31.2021.11151

Gómez, W. (2011). *Algunas herramientas de la Interdisciplinariedad para la comprensión del concepto de función lineal*, [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/8349/GomezBelloWilson.2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Henao, G., Malagón, F., Melo, M., Rojas, A.& Gómez, P. (2018). *Función exponencial creciente.* En Gómez, Pedro (Ed.), Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 3 (pp. 295-350). Bogotá: Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/8707/

Información básica sobre la COVID-19. (2021, 13 de mayo). Organización Mundial de la Salud. https://www.who.int/es/news-room/questions-and-answers/item/coronavirus-disease-covid-19

López, G. (2021). *COVID: porqué están comparando a la variante ómicron del coronavirus con el sarampión.* (2021, 24 de diciembre). BBC NEWS – MUNDO. https://www.bbc.com/mundo/noticias-59741569

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas* (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo.http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/DEA-Catarina-Lucas_versi%C3%B3n-preliminar.pdf

Lucas, C.O., Gascón, J. y Fonseca, C. (2017). Razón de ser del cálculo diferencial elemental en la transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria. *REDIMAT*, *6*(3), 283-306. https://doi.org/10.17583/redimat.2017.2116

Lujan, P. (2019). *Modelización de la función seno un recorrido de estudio e investigación sobre la respuesta estructural de un edificio frente a un* sismo [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional de la PUCP. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/16661

Llanos, V., Otero, M., Gazzola, M., y Arlego, M. (2015). Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) co-disciplinares a la Física y la Matemática con profesores en formación en la Universidad. *Revista Enseñanza de la Física*.27,251-158. https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/9720

Mansfield, D. & Wildberger, N. (2017). Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry. *Historia Mathematica*, 44(4), 395 – 419. https://doi.org/10.1016/j.hm.2017.08.001

Menéndez, J. (2019)*. Un recorrido de estudio e investigación en torno a una práctica de paracaidismo con velocidad supersónica* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional de la PUCP. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/16175

Mesa, Y. (2008). *El concepto función cuadrática: Un análisis de su desarrollo histórico*. [Tesis de Licenciatura, Universidad de Antioquía]. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/27168/1/MarcelaYadira_2008_ConceptoFuncionCuadratica.pdf

Ministerio de Educación [Minedu]. (2016). *Currículo Nacional de Educación Básica*. http://www.minedu.gob.pe/curriculo/.

Ministerio de Educación [Minedu]. (2016a). *Matemática 5 (Libro de consulta (LC))* Editorial Santillana.

Ministerio de Educación [Minedu]. (2016b). *Matemática 5 (cuaderno de trabajo (CT)).* Editorial Santillana.

Ministerio de Educación [Minedu]. (2013). *Hacer uso de saberes matemáticos para afrontar desafíos diversos. Rutas del aprendizaje.* https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/4412

Ministerio de Salud [Minsa]. (2021). *¿Qué son los coronavirus?* Recuperado el 15 de marzo del 2022. Plataforma digital única del Estado Peruano. https://www.gob.pe/8371-ministerio-de-salud-que-son-los-coronavirus-y-como-protegerte

Ministerio de Salud [Minsa]. (2022). *Coronavirus: variantes de la COVID-19 detectadas en el Perú.* Recuperado el 15 de marzo del 2022. Plataforma digital única del Estado Peruano. https://www.gob.pe/12548-coronavirus-variantes-de-la-covid-19-detectadas-en-el-peru

Moraga, N., Copa, B., Musso, G., Giliverti, J. y Macoritto, A. (2015). Estrategias de articulación entre el nivel medio y la universidad. Curso "Me preparo para estudiar ingeniería". *Revista Argentina de Educación Superior*, 10, 60-85. https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/22300

Otero, M., Corica, A., Sureda, P., Fanaro, M., Llanos, V. & Parra, V. (2013*). La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Dunken. http://dx.doi.org/10.13140/2.1.2103.0722

Paredes, I. (2018). *La función trigonométrica seno*. (tesis de Maestría). Recuperado de http://repositorio.unae.edu.ec/bitstream/123456789/841/1/TFM-EM-22.pdf

Ritmo reproductivo básico. (2021,13 de octubre). Wikipedia. https://es.wikipedia.org/wiki/Ritmo_reproductivo_b%C3%A1sico

Reyes, L., Andrade, G., Garcia, A. R., Velloso da Silveira, A. & Kuo, C. (2017). *Construcción de Praxeologías relacionadas con la función exponencial conducidas mediante la Teoría Antropológica de lo didáctico*. Revista de Educación, Ciencias y Matemática. 7(1), 4 – 15. https://www.researchgate.net/publication/333704506_CONSTRUCCION_DE_PRAXEOLOGIAS_RELACIONADAS_CON_LA_FUNCION_EXPONENCIAL_CONDUCIDAS_MEDIANTE_LA_CONSTRUCCION_DE_PRAXEOLOGIAS_R

ELACIONADAS_CON_LA_FUNCION_EXPONENCIAL_CONDUCIDAS_MEDIANTE_LA_TEORIA_ANTROPOLO

Reyes, L. (2015). *Función exponencial en el Aula: Praxeologías Matemáticas en enseñanza media.* [Tesis de Maestría, Universidad Federal de Juíz de Fora]. https://www2.ufjf.br/mestradoedumat/wp-content/uploads/sites/134/2011/05/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Luis-Eduardo.pdf

Ríbnikov, K. (1991). Historia de las Matemáticas. Editorial Mir. https://pdfcoffee.com/1-libro-k-ribnikov-historia-de-las-matematicas-3-pdf-free.html

Rojas, C.& Sierra, T (2021). Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8051715

Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. Repositorio institucional de la PUCP. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_LRuiz-Higueras.pdf

Sastre, P., Rey, G. & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 4(16), 141 - 145. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1167

Soria, M. y Montiel, G (2016), La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional – trigonométrico en estudiantes mexicanas del nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(3), 255-258. https://www.redalyc.org/journal/335/33550450002/33550450002.pdf

Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). *Análisis ecológico de la modelización matemática en economía y propuesta didáctica*. https://www.academia.edu/29834222.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica.*(Tesis de Doctorado.https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/101204/Tesis_LidiaSerrano_2013.pdf;jsessionid=E088652289782623E938.258AF691C028.tdx2?sequence=1

Sarukhan, A. (2021, 7 de mayo). *Covid: por qué están comparando a la variante ómicron del coronavirus con el sarampión*. Instituto de Salud Global Barcelona. https://www.isglobal.org/coronavirus

Sarukhan, A. (2021). *Un nuevo coronavirus, una nueva epidemia, muchas incógnitas*. Instituto de Salud Global Barcelona. https://www.isglobal.org/news?p_p_id=101&p_p_lifecycle=0&p_p_state=maximized&p_p_mode=view&_101_struts_action=%2Fasset_publisher%2Fview_content&_101_assetEntryId=7758986&_101_type=content&_101_urlTitle=el-nuevo-coronavirus-algunas-respuestas-y-muchas-preguntas&inheritRedirect=false

Tavera, F. y Villa- Ochoa, J. (2016). Sobre las razones y funciones trigonométricas: ¿Qué tratamiento hacen los libros de texto?. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *29*, 105-114. http://funes.uniandes.edu.co/8679/1/Tavera_Villa-ochoa_2016.pdf

Torres, D. y Montiel, G. (2017). Modelación y uso del conocimiento trigonométrico en Ingeniería. Un primer acercamiento a su estudio. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *30*, 75-83. http://funes.uniandes.edu.co/12125/

Torres, D. y Montiel, G. (2018). Revisión Bibliográfica de trigonometría en Ingeniería aplicada. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*, 1446-1452. http://funes.uniandes.edu.co/13761/1/Torres2018Revision.pdf

Universidad de Granada (2014). Tema 9. Aproximación. https://www.ugr.es/~arobles/Telecos/Tema09.pdf

Universidad San Martín de Porras [USMP]. (2022). Sílabo del curso de Matemática 2022-I, Facultad de Medicina Humana USMP. https://medicina.usmp.edu.pe/medicina/pregrado/silabos-pregrado/silabos-pregrado-2022-1/

Universidad de Nueva Gales del Sur/ Andrew Kelly (s.f.). [Tablilla de Plimpton 322]. https://www.agenciasinc.es/Noticias/Una-tablilla-babilonica-esconde-la-tabla-trigonometrica-mas-antigua-del-mundo

Ugalde, W. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, Educación e Internet*, Vol 14 (N°1), 1 - 48, https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i1.1564.

Xaubet, F. (2014). *Aplicación de los principios básicos de la electrónica como transposición didáctica en el aprendizaje de la función trigonométrica seno*. (tesis de Licenciatura). http://repositorio.ucm.edu.co:8080/jspui/bitstream/handle/10839/841/Federico%20Xaubet%20Cairo.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Vargas, G. (2019). Propuesta de un modelo Praxeológico de Referencia para la enseñanza del seno y coseno en quinto de secundaria. (Tesis de Maestría). http://hdl.handle.net/20.500.12404/15169.

Vargas, J. (2012). Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales. [Tesis doctoral. Universidad de Salamanca]. https://www.researchgate.net/publication/280300977_ANALISIS_DE_LA_PRACTICA_DEL_DOCENTE_UNIVERSITARIO_DE_PRE_CALCULO_ESTUDIO_DE_CASOS_EN_EL_ENSENANZA_DE_LAS_FUNCIONES_EXPONENCIALES.

Vera, J., Cabrera, M., Pérez, L. & Salazar, A. (2010). Aplicación del principio de Arquímedes,Latin-American Journal of Physics Education, 4(1), 1009 – 1014. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3700468.

Zubieta, J. (2018). Tipificación de errores y dificultades en el desarrollo de las funciones trigonométricas de estudiantes de grado décimo. (Tesis de Pregrado) http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/9731

ANEXOS

ANEXO 1: Actividad a

Lea cuidadosamente la siguiente pregunta Q_0 y determine que otras cuestiones necesitaría responder para encontrar una posible respuesta.

Q_0: ¿En cuánto tiempo tras la llegada de una variante de COVID-19, una población como el Perú alcanzaría la inmunidad de rebaño?

Intente responder las cuestiones derivadas encontradas de Q_0, haciendo uso de medios de información que tenga al alcance como: internet, libros, revistas, periódicos, videos, etc.

ANEXO 2: Actividad b

Intente responder las cuestiones derivadas formuladas a partir de Q_0

Particularmente:

¿De qué trata esta nueva variante?

¿De qué forma nos aproximaríamos al comportamiento de esta nueva variante?

¿Cuál de las variantes de COVID ha afectado más al país?

¿cuál es la tasa de contagio del COVID-19?

ANEXO 3: Actividad c

A partir de la información sobre el COVID encontrada en el siguiente link

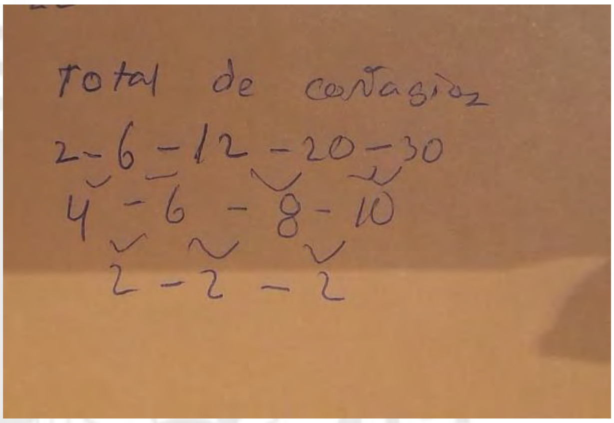
https://data.larepublica.pe/envivo-casos-confirmados-muertes-coronavirus-peru/

Discuta y seleccione la información necesaria particularmente sobre el número de contagiados de COVID-19 por día y proponga un primer modelo matemático.

ANEXO 4: Actividad 1

Propuesta 1

En la figura, se muestra la Propuesta de Carmen sobre el número de total de contagiados por COVID-19 en el transcurridos n días, tomando la data de los primeros 6 días, desde el reporte del primer infectado (6 de marzo).



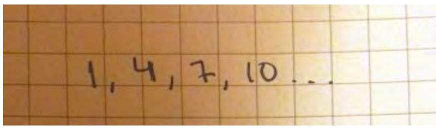
¿Cómo se expresarían los demás términos, tomando en cuenta la secuenciación que halló Carmen? ¿Qué forma tendría el término enésimo?

Intentemos llenar la tabla y mostrar el término n-ésimo.

N° de días Transcurridos	**N° total de contagiados**	**Regla de formación.**
1	**2**	
2	**6**	
3	**12**	
	⋮	⋮
n		

Propuesta 2

En la figura, se muestra la propuesta de Andrea sobre el número total de contagiados por COVID-19 transcurridos n días, tomando la data de los primeros 6 días, desde el reporte del primer infectado (6 de marzo).



En la siguiente tabla se ordena esta secuencia

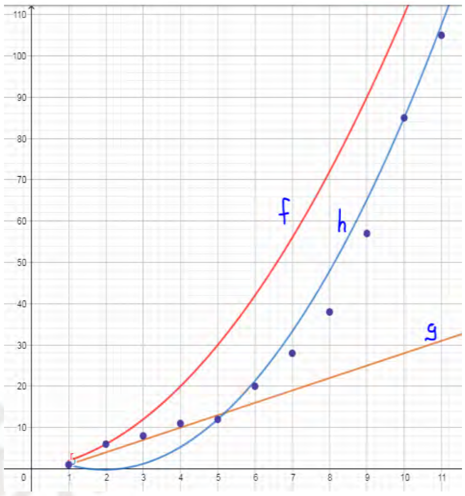
¿Cómo se expresarían los demás términos, tomando en cuenta la secuenciación que halló Andrea? ¿Qué forma tendría el término enésimo?

Intentemos llenar la tabla y mostrar el término enésimo.

N° de días Transcurridos	**N° total de contagiados**	**Regla de formación.**
1	**1**	
2	**4**	
3	**7**	
	⋮	⋮
n		

ANEXO 2: Actividad 2

Según las funciones mostrada en la figura, cuyas reglas son:



$$f(x) = x^2 + x; x \geq 1$$

$$g(x) = 3x - 2; x \geq 1$$

$$h(x) = \frac{79}{60}x^2 - \frac{103}{20}x + \frac{29}{6}; x \geq 1$$

¿cómo sería una regla de una función que mejor se aproxime a los datos?

¿Qué otras funciones existen para modelar nuestros datos?

¿Será posible encontrar una función que se aproxime mejor a los datos que las funciones obtenidas hasta ahora?

Recordemos que, en la información recopilada en el Word Online, se vio el tema de tasa de contagio, conocido en el campo de la epidemiología como R_0 número básico de reproducción.

De acuerdo esto, nos hacemos la siguiente pregunta:

¿Cuál sería la regla de formación del número total de contagiados por COVID, si cada persona que contrae dicho virus llega a contagiar a dos personas en promedio por día?

Complete la siguiente tabla para determinar la regla de formación

N° de días transcurridos	**Número de casos nuevos por día**	**Número total de contagiados**
1	**1**	
2		
3		
4		
5		
⋮	⋮	⋮

A partir de la regla de formación, intente modelar la cantidad total de contagiados mostrando la función extensión de la regla de formación, luego grafique mediante Geogebra y compare con las modelos anteriores.

ANEXO 3: Actividad 3

En la sesión anterior, la búsqueda por internet del equipo tuvo como consecuencia descubrir un nuevo conocimiento matemático, dentro de las notas de una universidad española colgado en internet del curso de ecuaciones diferenciales y cálculo numérico, el tema es: **Aproximación (el método de mínimos cuadrados).** en el artículo muestra en particular como se realiza una **regresión lineal** es decir hallar la ecuación de la recta que mejor se aproxima a los datos y **regresión cuadrática** es decir hallar la ecuación de la parábola que mejor se aproxima a los datos, ambas regresiones bajo el método de mínimos cuadrados. En la Figura 1 se muestra cómo se realiza una regresión cuadrática.

Figura 1. Método de mínimo cuadrados (regresión cuadrática).

Si queremos aproximar por una parábola (esto es, una función del tipo $y = a + bx + cx^2$), necesitaremos un sistema de tres ecuaciones para determinar biunívocamente los valores de a, b, c. Observando que, para la recta, la segunda ecuación se "puede obtener" a partir de la primera "sin más que multiplicar por x" cada una de las sumatorias, no es difícil imaginar que, para la parábola, el sistema necesario será

$$\left.\begin{aligned}(\textstyle\sum 1)\,a + (\sum x)\,b + (\sum x^2)\,c &= \textstyle\sum y\\ (\textstyle\sum x)\,a + (\sum x^2)\,b + (\sum x^3)\,c &= \textstyle\sum (xy)\\ (\textstyle\sum x^2)\,a + (\sum x^3)\,b + (\sum x^4)\,c &= \textstyle\sum (x^2 y)\end{aligned}\right\}.$$

Por consiguiente, tendremos que elaborar una tabla con siete columnas: $x, y, x^2, x^3, x^4, xy, x^2y$.

¿Cómo es la función que mejor se aproxima a los datos referidos al número total de contagiados por COVID en la figura 2) usando regresión cuadrática?

(Sugerencia: podrían buscar información sobre regresión cuadrática para entender mejor la técnica)

Figura2. Data del número total de contagiados los 11 primeros días.

	x	y
Fecha	Número de días transcurridos	Número total de contagiados
6 de Marzo	1	1
7 de Marzo	2	6
8 de Marzo	3	8
9 de Marzo	4	11
10 de Marzo	5	12
11 de Marzo	6	20
12 de Marzo	7	28
13 de Marzo	8	38
14 de Marzo	9	57
15 de Marzo	10	85
16 de Marzo	11	105

Una vez hallada la función por regresión cuadrática observe si se aproxima a la data del COVID, y compare esta función con las demás funciones encontradas.