

# PANORAMA DA COVID-19 NO NORDESTE BRASILEIRO: ANÁLISES E PREVISÕES VIA MODELOS DE CRESCIMENTO

## OVERVIEW OF THE COVID-19 IN NORTHEAST BRAZIL: ANALYSES AND FORECASTS VIA GROWTH MODELS

Giovani L. Vasconcelos<sup>1</sup>, Arthur A. Brum<sup>2</sup>, Gerson C. Duarte-Filho<sup>3</sup>, Raydonal Ospina<sup>4</sup>, Francisco A. G. Almeida<sup>5</sup> & Antônio M. S. Macêdo<sup>6</sup>

---

**Resumo:** A pandemia da Covid-19, causada pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2), é uma das maiores crises de saúde pública que o mundo já enfrentou. Nesse contexto, é importante ter modelos eficazes para descrever os diferentes estágios da evolução da epidemia, a fim de orientar as autoridades competentes na adoção de políticas públicas para o enfrentamento e controle da pandemia. No presente trabalho, nós propomos um novo método de análise de curvas epidêmicas com base na seleção criteriosa de modelos de crescimento, tomando como exemplo as curvas acumuladas de óbitos atribuídos à Covid-19 para os estados da região Nordeste do Brasil. A depender do caso, foram utilizados o modelo q-exponencial, o modelo de Richards ou o modelo generalizado de Richards para fazer o ajuste numérico das respectivas curvas empíricas. Verificou-se que os modelos utilizados descrevem muito bem as curvas empíricas de todos os estados do Nordeste, permitindo assim diagnosticar mais precisamente o estágio da epidemia em cada um dos estados. Dentre eles, apenas o estado da Paraíba ainda encontra-se na fase inicial de crescimento, quando a curva epidêmica ainda não apresenta um ponto de inflexão, sendo nesse caso melhor descrita pelo modelo q-exponencial. Os demais estados foram mais bem descritos ou pelo modelo de Richards ou por sua versão generalizada. O modelo de Richards, em particular, foi capaz de identificar com razoável confiabilidade o surgimento do ponto de inflexão para os estados que só recentemente alcançaram esse estágio da epidemia, como foi o caso do Piauí, Rio Grande do Norte e Sergipe. Esse modelo também é capaz de prever quando a inflexão está prestes a acontecer, como é o caso da Bahia. O modelo generalizado de Richards, por sua vez, mostrou-se mais apropriado para descrever curvas epidêmicas de estados que estão em uma fase mais desenvolvida da epidemia, como Ceará e Pernambuco, quando as curvas epidêmicas já apresentam uma tendência mais consolidada de saturação em direção ao platô.

**Palavras-Chaves:** Covid-19, Modelos epidemiológicos, Modelos de crescimento, Políticas de saúde pública

---

<sup>1</sup> Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-990 Curitiba, Brasil ([giovani.vasconcelos@ufpr.br](mailto:giovani.vasconcelos@ufpr.br)). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6609-5960>

<sup>2</sup> Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901 Recife, Brasil ([arthurbrum@df.ufpe.br](mailto:arthurbrum@df.ufpe.br)). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2843-042X>

<sup>3</sup> Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000 São Cristóvão, Brasil ([gcdf@ufs.br](mailto:gcdf@ufs.br)). ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4975-4981>

<sup>4</sup> Departamento de Estatística, CASTLab, Universidade Federal de Pernambuco, 50740-540 Recife, Brasil ([raydonal@de.ufpe.br](mailto:raydonal@de.ufpe.br)). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9884-9090>

<sup>5</sup> Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000 São Cristóvão, Brasil ([falmeida@ufs.br](mailto:falmeida@ufs.br)). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9884-9090>

<sup>6</sup> Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901 Recife, Brasil ([antonio.smacedo@ufpe.br](mailto:antonio.smacedo@ufpe.br)). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4522-031X>

**Abstract:** The Covid-19 pandemic, caused by the new coronavirus (SARS-CoV-2), is one of the gravest public health crises the world has ever faced. In this context, it is important to have effective models to describe the different stages of the epidemic, in order to offer guidance to the competent authorities regarding the adoption of public policies to contain and control the pandemic. In this work, we present a novel method to analyze epidemic curves based on growth models, using as examples the cumulative curves of deaths attributed to Covid-19 for the states of the Northeastern Region of Brazil. Depending on the case, the q-exponential model, the Richards model or the generalized Richards model were used to make the numerical fits of the respective empirical curves. The models used here describe very well the empirical curves of all the Northeastern Brazilian States, thus allowing a more precise diagnosis of the stage of the epidemic in each of the States.

Among them, only the state of Paraíba is still in the early growth phase, when the epidemic curve does not yet have an inflexion point, being in this case better described by the q-exponential model. The other states were better described either by the Richards model or by its generalized version. The Richards model, in particular, was able to identify with reasonable reliability the emergence of the inflexion point for states that only recently have reached this stage of the epidemic, such as Piauí, Rio Grande do Norte and Sergipe. This model is also able to predict when the inflection is about to occur, as is the case in Bahia. The generalized Richards model, in turn, has proved more appropriate to describe epidemic curves in states that are in a more developed phase of the epidemic, such as Ceará and Pernambuco, when the epidemic curves already show a more consolidated trend of saturation toward the plateau.

**Keywords:** Covid-19, Epidemiological models, Growth models, Public health policies

---

## INTRODUÇÃO

A pandemia da Covid-19, causada pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2) é uma das maiores crises de saúde pública que o mundo já enfrentou. No momento da escrita deste artigo, o mundo se aproxima da triste marca de 600 mil mortes por Covid-19<sup>1</sup>. No Brasil, a primeira infecção pelo SARS-CoV-2 foi confirmada na cidade de São Paulo em 26 de fevereiro de 2020. Desde então, a epidemia se alastrou pelo país, o que obrigou vários estados e municípios brasileiros a adotarem medidas de isolamento social e outras medidas de mitigação, para conter a propagação do vírus. Até o presente,, o país já acumula um número total de mais de 75 mil mortes pela Covid-19, e a doença ainda continua em franca expansão, embora em um ritmo mais lento<sup>2</sup>.

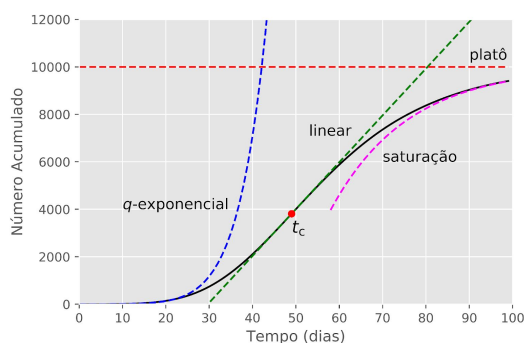
Alguns estados e municípios do Brasil já lograram um certo controle sobre a epidemia, o qual se manifesta, por exemplo, em uma desaceleração das respectivas curvas de óbitos. Em outros estados e municípios, contudo, a taxa de crescimento da epidemia ainda não apresenta sinais evidentes de arrefecimento. Nesse contexto, é importante conhecer o estágio da epidemia em cada local afetado, sobretudo naqueles locais em que ainda há uma grande incidência da doença ou onde há risco de recrudescimento da mesma, a fim de orientar as autoridades sanitárias e governamentais na adoção de medidas de combate e controle da epidemia. O uso de modelos matemáticos é uma importante ferramenta para isso, pois os modelos permitem fazer um acompanhamento da dinâmica da epidemia e projetar possíveis cenários para sua evolução. Neste sentido, a dinâmica da Covid-19 é particularmente desafiadora, pois em virtude da ação humana, via mudanças comportamentais e/ou intervenções não farmacológicas, os modelos de compartimento tradicionais (SIR, SEIR e similares) tornam-se inadequados pela necessidade de admitir coeficientes epidemiológicos que são funções do tempo, a serem determinadas para cada caso específico.

De modo simplificado, podemos dizer que a curva epidêmica para o número acumulado de óbitos, em função do tempo, apresenta três regiões distintas, a saber: i) uma fase inicial de crescimento rápido; ii) uma região intermediária, onde a curva cresce aproximadamente de modo linear; e iii) uma parte final, quando a taxa de crescimento diminui e a curva tende a um platô de saturação; vide Fig. 1.

Na fase inicial, tipicamente verifica-se um crescimento exponencial da curva epidêmica, a partir de um valor inicial  $C_0$ , que representa o número de óbitos observados no primeiro dia em que um óbito aconteceu. Essa subida exponencial é caracterizada por uma taxa  $r$  de crescimento. Contudo, a depender da complexidade da dinâmica de contágio, que pode resultar em uma rede complexa de

contatos humanos, ou quando medidas de mitigação são adotadas no início da epidemia, é possível que esse crescimento dê-se de forma *subexponencial*, ou seja, mais lento que o crescimento exponencial. A possibilidade de um crescimento subexponencial pode ser caracterizada através de um parâmetro  $q$ , que interpola entre o regime linear ( $q = 0$ ) e o regime exponencial ( $q = 1$ ), de modo que para valores de  $q$  no intervalo  $0 < q < 1$  verifica-se o crescimento subexponencial. Na sua região intermediária, a curva epidêmica apresenta um *ponto de inflexão*, aqui denotado por  $t_c$  (vide Fig. 1), que corresponde ao instante de tempo em que a curva acumulada muda sua concavidade, ou seja, a taxa de crescimento atinge seu valor máximo e passa a decrescer a partir de então.

A parte final da curva, após o ponto de inflexão, pode ser caracterizada por um parâmetro  $\alpha$  que controla a rapidez com que a curva epidêmica se afasta da tendência linear e “se dobra” em direção do platô. O valor do platô, aqui denotado pelo parâmetro  $K$ , representa o número total de óbitos no final da epidemia.



**Figura 1.** Esboço qualitativo de uma curva epidêmica (preta) para o número acumulado de óbitos, com indicação de suas diferentes ‘fases’. O círculo vermelho indica o ponto de inflexão da curva.

No presente artigo, utilizamos uma ampla classe de modelos matemáticos de crescimento para descrever as curvas epidêmicas de óbitos atribuídos à Covid-19, para os estados da região Nordeste do Brasil. Um aspecto importante da abordagem via modelos de crescimento é que há diferentes versões desses modelos, indo de modelos mais simples (com poucos parâmetros) até modelos mais complexos (com vários parâmetros). Isso permite escolher o modelo mais apropriado para uma dada curva epidêmica, a depender da “fase dinâmica” em que se encontra a epidemia na localidade de interesse. No presente estudo, os modelos considerados, em ordem crescente de complexidade, são: i) o modelo  $q$ -exponencial; ii) o modelo de Richards (MR); e iii) o chamado modelo generalizado de Richards (MGR). Esses modelos foram aplicados às curvas epidêmicas, representada pelo número acumulados de óbitos em função do tempo, até a data de 16/07/2020, para os nove estados da região Nordeste, a saber: Alagoas (AL), Bahia (BA), Ceará (CE), Maranhão (MA), Paraíba (PB), Pernambuco (PE), Piauí (PI), Rio Grande do Norte (RN) e Sergipe (SE).

Modelos fenomenológicos de crescimento, como o modelo  $q$ -exponencial, o modelo de Richards<sup>3-5</sup> e sua versão generalizada,<sup>6,7</sup> têm sido largamente usados para descrever várias epidemias, como Zika,<sup>8</sup> influenza<sup>9</sup> e mais recentemente a Covid-19.<sup>10,11</sup> Esses modelos têm ainda a vantagem de possuírem soluções analíticas para a curva epidêmica  $C(t)$ , onde a variável  $C$  representa o número total de óbitos em um dado tempo  $t$ . Isso permite fazer, de modo rápido e eficiente, os ajustes numéricos das curvas teóricas previstas pelos modelos aos dados empíricos de interesse. Todos os modelos considerados aqui apresentaram ótima concordância com os dados empíricos, nas respectivas situações em que foram aqui empregados.

## MÉTODOS

### MODELO MATEMÁTICO

O modelo generalizado de Richards (MGR) é definido pela seguinte equação diferencial ordinária (EDO):<sup>7,8,9,10</sup>

$$\frac{dC}{dt} = r[C(t)]^q \left(1 - \left(\frac{C(t)}{K}\right)^\alpha\right), \quad (1)$$

onde aqui  $C(t)$  representa o número cumulativo de óbitos no instante de tempo  $t$ ,  $r$  é a taxa de crescimento na fase inicial,  $0 \leq q \leq 1$  é o parâmetro que permite interpolar entre crescimento linear ( $q = 0$ ), subexponencial ( $q < 1$ ) e exponencial ( $q = 1$ ),  $K$  é o tamanho final da epidemia e  $\alpha$  é o parâmetro que mede a assimetria da curva em relação à forma simétrica do modelo logístico padrão, que é recuperado para o caso de  $q = \alpha = 1$ . A EDO (1) deve ser complementada com a condição inicial

$$C(0) = C_0, \quad (2)$$

para um dado valor de  $C_0$ .

A solução exata de (1) para  $0 \leq q < 1$ , sujeita à condição (2), pode ser escrita de forma implícita como

$$t = \frac{1}{r(1-q)} C^{1-q} {}_2F_1\left(1, \frac{1-q}{\alpha}; 1 + \frac{1-q}{\alpha}; \frac{C^\alpha}{K^\alpha}\right) - t_i, \quad (3)$$

onde  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  é a função hipergeométrica de Gauss. A constante  $t_i$  que aparece em (3) é determinado pela condição inicial  $C_0$  através da relação:

$$t_i = \frac{C_0^{1-q}}{r(1-q)} {}_2F_1\left(1, \frac{1-q}{\alpha}; 1 + \frac{1-q}{\alpha}; \frac{C_0^\alpha}{K^\alpha}\right). \quad (4)$$

O ponto de inflexão,  $t_c$ , da curva  $C(t)$  é definido como o instante de tempo no qual a segunda derivada é nula, ou seja,  $\ddot{C}(t_c) = 0$ , onde os pontos indicam derivada em relação ao tempo. Usando (3), encontramos

$$t_c = \frac{K^{1-q}}{r(1-q)} \left(\frac{q}{q+\alpha}\right)^{(1-q)/\alpha} {}_2F_1\left(1, \frac{1-q}{\alpha}; 1 + \frac{1-q}{\alpha}; \frac{q}{q+\alpha}\right) - t_i. \quad (5)$$

O fato de a solução do MGR dada acima estar em forma implícita não representa qualquer dificuldade numérica, pois a solução pode ser facilmente usada, por exemplo, para fins de ajuste de curvas empíricas, bastando para isso que os dados sejam tratados na mesma forma "implícita", ou seja, como uma curva do tipo  $t(C)$ . De fato, a existência de uma solução analítica facilita sobremaneira a aplicação do MGR, uma vez que possibilita sua implementação numérica de modo rápido e eficiente.

No caso em  $q = 1$ , o MGR definido em (1) reduz-se ao modelo de Richards (MR) padrão, para o qual existe uma fórmula explícita em termos de funções elementares<sup>11</sup>:

$$C(t; r, \alpha, K, t_c) = \frac{K}{\{1 + \alpha \exp[-\alpha r(t - t_c)]\}^{1/\alpha}}. \quad (6)$$

Vale observar, no entanto, que nem o MGR nem o MR são aplicáveis a situações em que a epidemia encontra-se na fase inicial de crescimento, ou seja, quando o ponto de inflexão  $t_c$  estimado por esses modelos está bem à frente do último da curva empírica<sup>11</sup>. Nesse caso, podemos fazer a aproximação de que  $C \ll K$  na Eq. (1), de modo que o MGR reduz-se à seguinte EDO:

$$\frac{dC}{dt} = r[C(t)]^q, \quad (7)$$

cujas solução é

$$C(t; r, q, A) = [A + (1-q)rt]^{1/(1-q)} = A^{1/(1-q)} e_q(rt/A), \quad (8)$$

onde a função  $e_q(x) = [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}$  é conhecida na literatura física como a função  $q$ -exponencial.<sup>11</sup> O parâmetro  $A$  acima está relacionado com a condição inicial, ou seja,  $A = C(0)^{(1-q)}$ . O

modelo descrito em (8) é conhecido também como chamado modelo de crescimento generalizado<sup>7</sup>, mas em face da forma da solução (9) vamos nos referir a esse modelo como *modelo q-exponencial* de crescimento, que nos parece uma terminologia mais apropriada.

Do ponto de vista prático, caso uma dada curva empírica já apresente um possível ponto de inflexão, deve-se procurar ajustá-la com o MGR. Se, contudo, esse modelo retornar um valor de  $q$  muito próximo de 1, recomenda-se então refazer o ajuste com o MR, para ver quais dos dois modelos produz o melhor ajuste. É interessante observar ainda que, em certos casos, é possível estabelecer uma relação entre os parâmetros dos modelos de crescimento, como por exemplo o modelo de Richards, e os parâmetros epidemiológicos relacionados a modelos compartimentais do tipo SIR, mas essa discussão está além dos propósitos do presente artigo<sup>10</sup>.

## ANÁLISE DOS DADOS

Neste estudo nós analisamos os números de óbitos atribuídos à Covid-19 para os nove estados da região Nordeste do Brasil. Os dados foram obtidos do site [covid19br.wcota.me](https://covid19br.wcota.me), mantido por Wesley Cota, da Universidade Federal de Viçosa, Brasil. Os dados utilizados no presente estudo foram atualizados até o dia 16 de julho de 2020

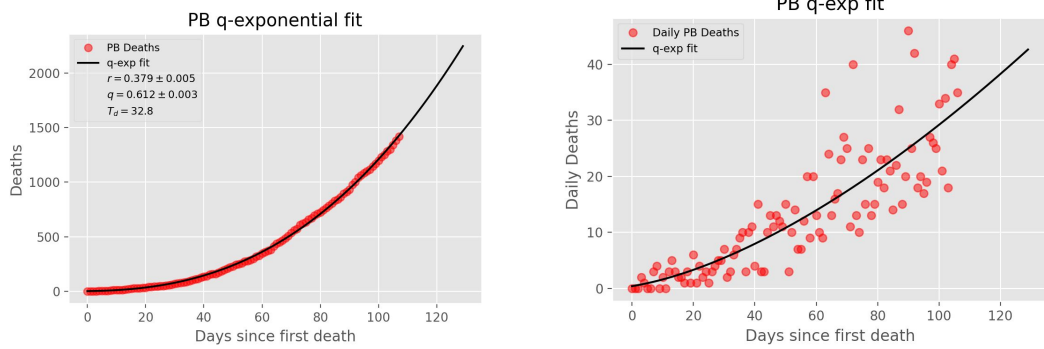
Para os respectivos ajustes dos dados, seja utilizando o MGR, o MR ou o modelo  $q$ -exponencial, nós usamos o algoritmo de Levenberg-Marquardt para resolver o problema de otimização não-linear pelo método dos mínimos quadrados.<sup>13</sup> Os códigos computacionais para realizar os ajustes e confeccionar as figuras foram escritos na linguagem Python e encontram-se à disposição dos interessados no site [fisica.ufpr.br/redecovid19](https://fisica.ufpr.br/redecovid19) ou podem ser solicitados aos autores.

## RESULTADOS

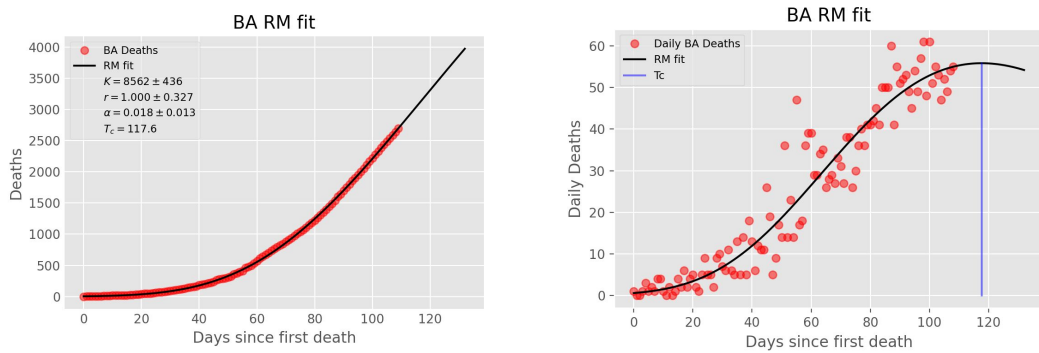
Nos painéis esquerdos das Figs. 2 a 10, nós mostramos as curvas acumuladas de óbitos atribuídos à Covid-19 para os nove estados da região Nordeste do Brasil, a saber: Alagoas (AL), Bahia (BA), Ceará (CE), Maranhão (MA), Paraíba (PB), Pernambuco (PE), Piauí (PI), Rio Grande do Norte (RN) e Sergipe (SE). As respectivas curvas empíricas estão indicadas por círculos vermelhos e corresponde ao número total de óbitos em função do tempo, onde o tempo é contado em dias a partir da ocorrência do primeiro óbito. As curvas pretas contínuas em cada uma das figuras indicam os ajustes obtidos por um dos três modelos de crescimento introduzidos na seção anterior. Para cada estado, o modelo que melhor ajustou a respectiva curva empírica está indicado no título do gráfico. Nas figuras para as curvas acumuladas, nós listamos os respectivos parâmetros do modelo obtidos pela rotina de ajuste, os quais foram usados para fazer o gráfico da curva teórica correspondente. Em todos os casos mostrados, os modelos matemáticos estão em ótima concordância com os respectivas dados.

Nos painéis direitos das Figs. 2 a 10, nós mostramos os dados empíricos para o número diário de óbitos (círculos vermelhos) para cada um dos estados, onde esse número diário foi obtido subtraindo-se os números acumulados entre dois dias consecutivos. Em cada uma das figuras dos painéis à direita, a curva preta contínua corresponde à derivada temporal,  $dC/dt$ , da curva mostrada no respectivo painel da esquerda. Vê-se que, em geral, há muita dispersão nos dados para o número diário de óbitos. Contudo, apesar dessa flutuação nos dados, vê-se que as curvas teóricas descrevem muito bem a tendência dos dados diários. Vale enfatizar que as curvas teóricas mostradas nos painéis da direita nas Fig. 2 a 10, *não* são ajustes aos dados diários, mas simplesmente a derivada da curva teórica obtida a partir do ajuste das respectivas curvas acumuladas.

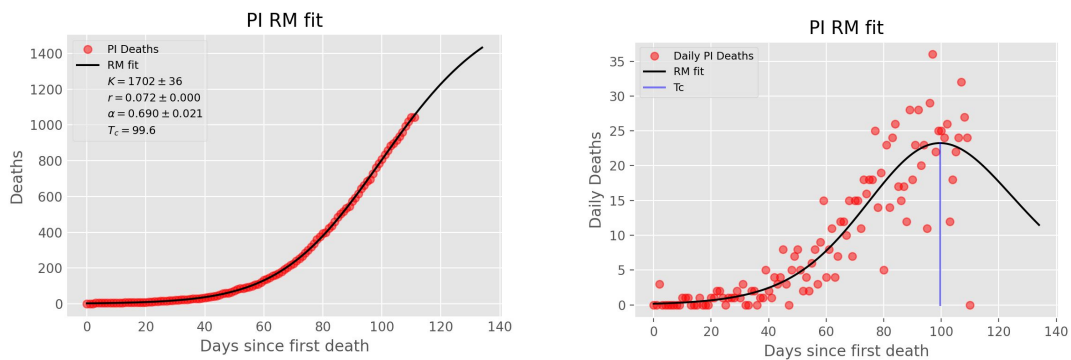
A boa concordância entre as previsões dos modelos e os dados diários representa, portanto, uma confirmação de que os modelos empregados oferecem uma boa caracterização do fenômeno.



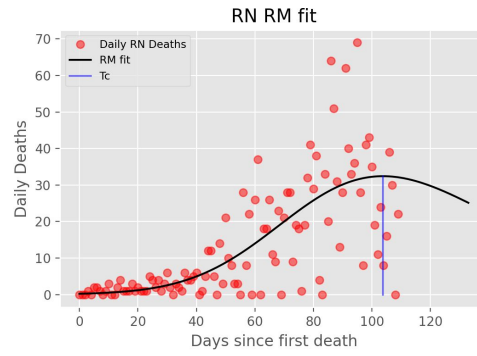
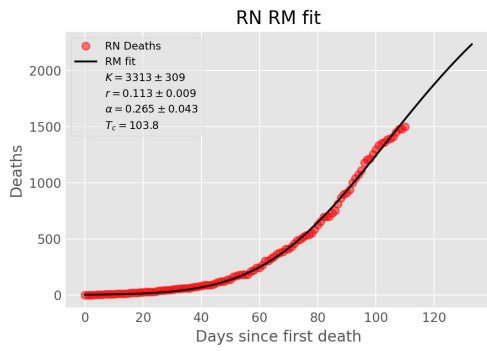
**Figura 2.** Ajuste pelo modelo q-exponencial do número cumulativo de óbitos (a) pela Covid-19 no estado da Paraíba. Os círculos vermelhos representam os dados e a curva preta é o ajuste pelo modelo. O painel da direita (b) mostra o número diário de óbitos (círculos vermelhos) e a derivada (curva preta) da curva teórica obtida em (a).



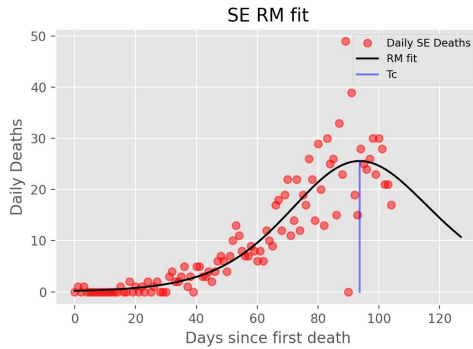
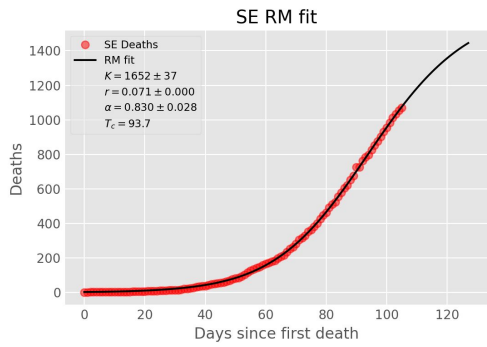
**Figura 3.** Ajuste pelo modelo de Richards do número cumulativo de óbitos (a) pela Covid-19 no estado da Bahia. Os círculos vermelhos representam os dados e a curva preta é o ajuste pelo modelo. O painel da direita (b) mostra o número diário de óbitos (círculos vermelhos) e a derivada (curva preta) da curva teórica obtida em (a), onde a linha vertical azul indica o ponto de inflexão  $t_c$  da curva acumulada, que corresponde ao máximo da curva diária.



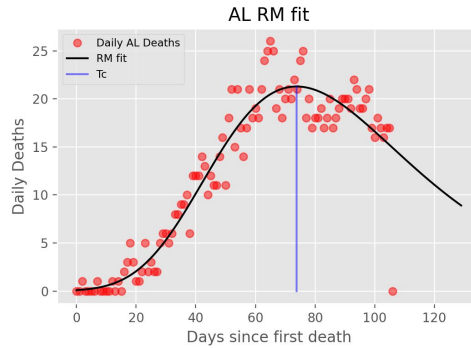
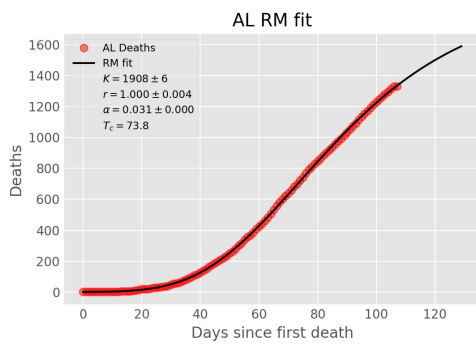
**Figura 4.** Mesmo que na Fig. 3, para o estado do Piauí.



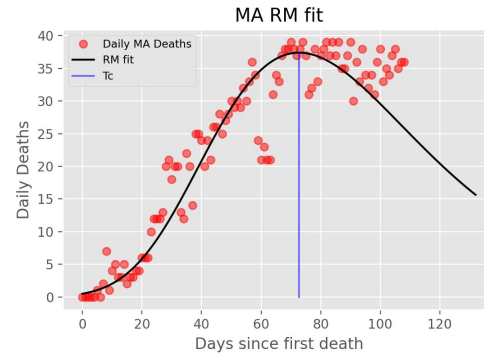
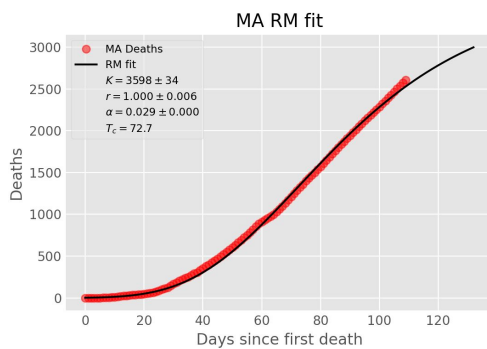
**Figura 5.** Mesmo que na Fig. 3, para o estado do Rio Grande do Norte.



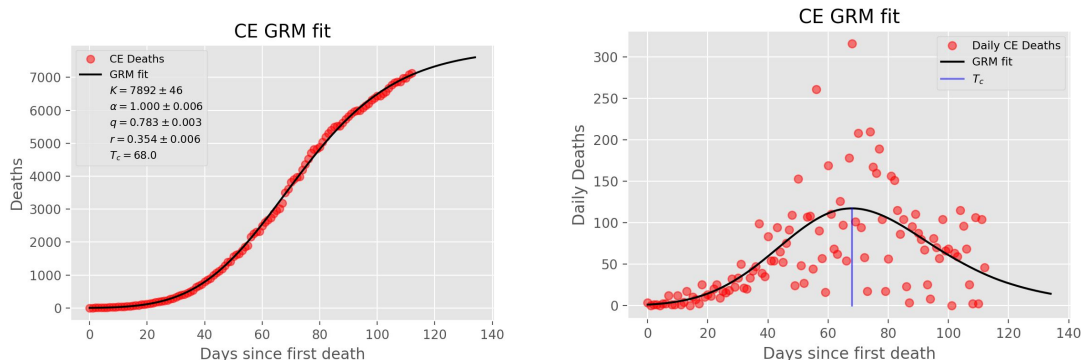
**Figura 6.** Mesmo que na Fig. 3, para o estado de Sergipe.



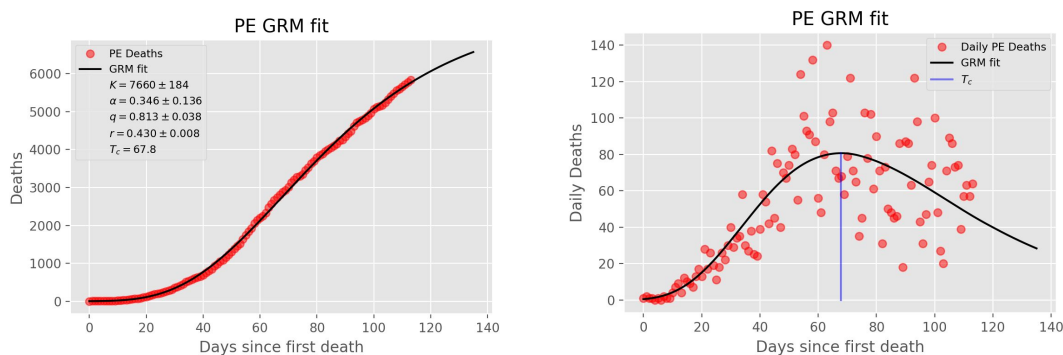
**Figura 7.** Mesmo que na Fig. 3, para o estado de Alagoas.



**Figura 8.** Mesmo que na Fig. 3, para o estado do Maranhão.



**Figura 9.** Ajuste pelo modelo generalizado de Richards do número cumulativo de óbitos (a) pela Covid-19 no estado do Ceará. Os círculos vermelhos representam os dados e a curva preta é o ajuste pelo modelo. O painel da direita (b) mostra o número diário de óbitos (círculos vermelhos) e a derivada (curva preta) da curva teórica obtida em (a), onde a linha vertical azul indica o ponto de inflexão  $t_c$  da curva acumulada, que corresponde ao máximo da curva diária.



**Figura 10.** Mesmo que na Fig. 9, para o estado de Pernambuco.

## DISCUSSÃO

Vimos acima que os modelos de crescimento aqui considerados (MGR, MR ou  $q$ -exponencial) descrevem de forma satisfatória as curvas epidêmicas de Covid-19 dos estados do Nordeste brasileiro. Para cada estado, identificou-se qual dos três modelos acima melhor caracteriza os respectivos dados empíricos. A partir do modelo selecionado para um determinado estado, e em função dos respectivos parâmetros do ajuste, é possível entender o estágio atual da epidemia naquele estado, bem como fazer algumas previsões de cenários futuros, conforme discutimos a seguir.

Dos nove estados do Nordeste, apenas a Paraíba ainda encontra-se em uma fase inicial de crescimento, uma vez que sua curva epidêmica é bem descrita pelo modelo  $q$ -exponencial, com  $q = 0.61$ , conforme pode ser visto na Fig. 2(a). Isso significa que a epidemia apresenta um crescimento subexponencial, com um valor de  $q$  relativamente baixo, se comparado com o valor do crescimento puramente exponencial ( $q = 1$ ). Olhando a curva diária de óbitos, Fig. 1(b), pode-se verificar que, de fato, há uma clara tendência de crescimento mais que linear do número diário de mortes, sem nenhuma evidência ainda de desaceleração no ritmo diário de óbitos, o que se reflete no crescimento subexponencial da curva acumulada de óbitos.

Seis estados (AL, BA, MA, PI, RN e SE) foram melhor descritos pelo modelo de Richards, como pode ser visto pelas Figs. 3-8. Desses seis estados, apenas a Bahia, vide Fig. 3(a), ainda não apresenta um ponto de inflexão na sua curva acumulada de óbitos. De fato, o modelo prevê que a inflexão, ou



alternativamente o pico da curva diária, para dar-se-á em cerca de nove dias a partir da data do último ponto, indicando que a inflexão da curva de óbitos da Bahia deve ocorrer por volta do dia 25/07/2020. Isso fica evidente na Fig. 3(b), que mostra a curva diária de óbitos e a respectiva previsão teórica. Nessa figura, vê-se que a linha azul vertical, indicando a data do ponto de máximo da curva diária, está à frente do último ponto dos dados, que corresponde à data 'presente'.

Para os estados do Piauí, Rio Grande do Norte e Sergipe, os respectivos pontos de inflexão previstos pelo modelo ocorreram em momentos relativamente recentes, no sentido de que os respectivos pontos de inflexão nesses três estados deram-se há menos de doze dias da data 'presente', vide Figs. 4-6. De fato, olhando-se as curvas diárias desses estados, Figs. 4(b), 5(b) e 6(b), percebe-se claramente que a curva azul vertical, que indica a previsão do modelo para o ponto de inflexão, está muito próxima da borda final dos dados (que representa o tempo 'presente'). Para esses três estados, as estimativas do modelo para os respectivos pontos de inflexão devem ser vistas, portanto, como uma indicação (mais do que uma confirmação) de tendência de 'formação' da inflexão, sendo necessário o acúmulo de mais dados para verificar-se, com uma maior confiabilidade, que a inflexão nesses estados aconteceu, realmente, por volta das datas previstas pelo modelo.

Os dois estados restantes, dentre aqueles que foram mais bem descritos pelo MR, ou seja Alagoas e Maranhão, apresentam um ponto de inflexão que está localizado a mais de 30 dias antes do último ponto. Dito de outro modo, em relação à data presente, representada pelo último ponto do gráfico, a epidemia nesses estados já ultrapassou o ponto de inflexão há mais de um mês. O caso de Alagoas merece um certo destaque, pois pode-se ver na Fig. 7(a), que a curva empírica já está com sua concavidade levemente voltada para baixa, indicando que a epidemia vem claramente desacelerando e, portanto, afastando-se (embora lentamente) da tendência de crescimento linear. Essa tendência de 'desaceleração' é confirmada pela curva diária de óbitos, Fig. 7(b), onde se vê claramente uma tendência de decréscimo na taxa diária de óbitos após o ponto de máximo indicado pela linha vertical azul. Ou seja, o modelo de Richards sugere que a curva epidêmica em Alagoas encontra-se, possivelmente, em um momento de transição para iniciar sua 'marcha' em direção ao regime de saturação (platô).

Por outro lado, a epidemia no Maranhão, que embora segundo o modelo já teria ultrapassado o ponto de inflexão há mais de um mês, encontra-se em um regime de crescimento ainda aproximadamente linear, como pode ser constatado na Fig. 8(a). Ou seja, a epidemia ainda não apresenta um arrefecimento sustentado do seu crescimento, que resultaria em uma concavidade para baixo mais acentuada da curva acumulada de óbitos. Essa tendência também é visível na Fig. 8(b), onde se vê que, apesar da grande flutuação na parte final dos dados, o número diário de óbitos vem mantendo uma certa 'estabilidade', o que se reflete no comportamento aproximadamente linear da curva acumulada, mencionado acima. Em outras palavras, a epidemia no Maranhão ainda não iniciou efetivamente uma mudança de tendência a caminho de um possível platô.

Dentre os estados do Nordeste, apenas Ceará e Pernambuco foram melhor descritos pelo MGR, como pode-se ver nas Figs. 9 e 10. Nesses dois estados, o ponto de inflexão acontece aproximadamente no mesmo momento epidemiológico, qual seja,  $t_c = 68$  dias após a primeira morte. Isso indica que, em ambos os casos, a inflexão aconteceu há mais de 40 dias passados em relação ao tempo 'presente' (último ponto nos respectivos gráficos). Nesses dois estados, a fase de desaceleração da epidemia está, portanto, bem caracterizada, como pode ser constatado tanto pela concavidade para baixo na segunda metade das respectivas curvas acumuladas de óbitos, Figs. 9(a) e 10(a), quanto pelo decréscimo consistente da taxa diária de óbitos após os respectivos picos em  $t_c$ , como pode ser visto nas Figs. 9(b) e 10(b).

Vale notar ainda que Ceará e Pernambuco apresentaram um valor de  $q$  praticamente idênticos,  $q = 0.8$ , como se pode ver pelos valores indicados nos insets das Figs. 9(a) e 10(a), indicando um crescimento subexponencial no início da epidemia, como ocorreu no caso da Paraíba, embora este tenha apresentado um  $q$  menor. É possível que o valor menor para o parâmetro  $q$  na Paraíba tenha sido consequência do fato de as medidas de combate à propagação do novo coronavírus na Paraíba terem sido adotadas, efetivamente, em uma fase mais inicial da epidemia, quando comparado com os estados Ceará e Pernambuco. Por exemplo, Ceará e Paraíba tiveram seus primeiros casos confirmados aproximadamente no mesmo período, 15 e 18 de março de 2020, respectivamente. Contudo, a Secretaria da Saúde do Estado do Ceará estima que o vírus já circulava no estado desde janeiro de 2020<sup>13</sup>. Ou seja, o vírus já circulava há mais tempo no Ceará do que na Paraíba, quando as primeiras medidas de combate à epidemia foram adotadas pelos estados em meados de março de 2020. Vale

notar, contudo, que um crescimento subexponencial no início da epidemia reflete uma dinâmica complexa, que depende das condições epidemiológicas locais, como por exemplo, a natureza da rede efetiva de contatos humanos e as medidas de intervenção adotadas, de modo que é difícil prever *a priori* o valor esperado para o parâmetro  $q$  em uma determinada localidade.

Vale ainda observar que os demais estados do Nordeste (AL, BA, MA, PI, RN e SE) foram melhor descritos pelo modelo de Richards, que pressupõe  $q = 1$ , ou seja, crescimento exponencial no início da epidemia. Nesses casos, contudo, foram feitos inicialmente ajustes com o MGR; mas como esse método retornou o valor  $q = 1$ , decidimos refazer os respectivos fits com o modelo de Richards, uma vez que esse modelo tem um parâmetro a menos e, portanto, produz estimativas estatisticamente mais confiáveis para os parâmetros de ajuste.

## CONCLUSÕES

No presente trabalho, nós apresentamos um novo método baseado na seleção criteriosa de um membro de uma classe de modelos generalizados de crescimento para analisar as curvas epidêmicas de óbitos da Covid-19 para os estados da região Nordeste do Brasil. Vimos que, de um modo geral, esses modelos de crescimento descrevem muito bem os dados empíricos de todos os estados do Nordeste. Os modelos de crescimento, além de sua simplicidade matemática, apresentam grande flexibilidade e versatilidade, propriedades essas que os tornam uma ferramenta poderosa na modelagem da dinâmica de epidemias. A partir desses modelos pode-se obter várias informações de interesse epidemiológico, que não só possibilitam uma análise do estágio em que se encontra a epidemia em um determinado local e em um determinado momento, como também permitem fazer previsões de possíveis cenários para a evolução da mesma.

Em particular, o modelo de Richards permite identificar, com certa confiabilidade, a ocorrência (ou não) do ponto de ponto de inflexão na curva acumulada de óbitos, o qual por sua vez corresponde ao ponto de máximo da curva diária. Por exemplo, quando o ponto de inflexão previsto pelo modelo de Richards está muito além da data presente, isso é uma demonstração inequívoca de que a epidemia ainda está em uma fase inicial de crescimento. Nesse caso, o modelo  $q$ -exponencial é mais apropriado para descrever a dinâmica.

De modo análogo, nos casos em que o modelo de Richards prevê um ponto de inflexão em um tempo muito recente no passado ou muito próximo no futuro, faz-se necessário um monitoramento continuado da evolução da epidemia, para se ter uma confirmação da ocorrência da inflexão. Mas mesmo nesses casos, ou seja, quando o modelo não pode comprovar ainda categoricamente a formação do ponto de inflexão, essa informação ainda é epidemiologicamente relevante, pois representa uma evidência de que a epidemia está em um momento crítico: a curva epidêmica já iniciou, ou está prestes a iniciar, um regime de desaceleração do crescimento, a partir do qual estabelecer-se-á uma nova tendência em direção à fase de saturação, que eventualmente conduzirá ao final da epidemia.

Por outro lado, quando a epidemia já está em uma fase consolidada de saturação, no sentido de que a curva epidêmica já deixou o ponto de inflexão para trás há bastante tempo, o modelo generalizado de Richards tende a se apresentar como mais adequado. Contudo, quando a epidemia encontra-se em uma fase "terminal", de modo que a curva epidêmica já se aproxima bastante do platô, é possível que surjam caudas do tipo de lei potência para o decaimento temporal da taxa de óbitos nesse regime, que se refletem em uma aproximação mais lenta da curva acumulada em direção ao platô. Nesse caso, pode-se utilizar um modelo de crescimento ainda mais geral, o chamado modelo beta logístico<sup>15</sup>, que captura o efeito de uma aproximação do platô em regime subexponencial, isto é, via uma lei de potência, e não da forma exponencialmente rápida prevista pelo o MR ou o MRG. Nenhum estado do Nordeste, entretanto, encontra-se nessa fase de aproximação final do platô, de modo que o modelo beta logístico ainda não se aplica. Há que se aguardar mais tempo para verificar-se qual o regime de saturação que será observado no Brasil, em geral, e no Nordeste, em particular: se uma aproximação exponencialmente rápida do platô, ou um regime mais lento de saturação via uma lei de potência.

Em conclusão, nossa análise da dinâmica da epidemia de Covid-19, aqui apresentada para os estados da região Nordeste do Brasil, demonstra que, quando corretamente aplicados e interpretados, os modelos

fenomenológicos de crescimento são capazes de fornecer um panorama muito útil e abrangente da propagação de novas doenças infecciosas.

## Referências

1. JHU (2010). Coronavirus COVID-19 Global Cases by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE) at Johns Hopkins University (JHU). <https://coronavirus.jhu.edu/map.html>, Acesso em: 29 de março de 2020.
2. Arthur A. Brum, Gerson C. Duarte-Filho, and Giovani L. Vasconcelos. (2010) Application ModintervCovid-19. Disponível em: [fisica.ufpr.br/modinterv](https://fisica.ufpr.br/modinterv)
3. Richards, F. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of experimental Botany* 10, 290–301.
4. Hsieh, Y.-H. (2009). Richards model: A simple procedure for real-time prediction of outbreak severity. In *Modeling and dynamics of infectious diseases* (World Scientific), pp. 216–236.
5. Wang, X.-S., Wu, J., and Yang, Y. (2012). Richards model revisited: Validation by and application to infection dynamics. *Journal of Theoretical Biology* 313, 12–19.
6. Tsoularis, A., and Wallace, J. (2002). Analysis of logistic growth models. *Mathematical biosciences* 179, 21–55.
7. Chowell, G. (2017). Fitting dynamic models to epidemic outbreaks with quantified uncertainty: A primer for parameter uncertainty, identifiability, and forecasts. *Infectious Disease Modelling* 2, 379–398.
8. Chowell, G., Hincapie-Palacio, D., Ospina, J., Pell, B., Tariq, A., Dahal, S., Moghadas, S., Smirnova, A., Simonsen, L., and Viboud, C. (2016). Using phenomenological models to characterize transmissibility and forecast patterns and final burden of zika epidemics. *PLOS Currents Outbreaks*.
9. Bürger, R., Chowell, G., and Lara-Díaz, L.Y. (2019). Comparative analysis of phenomenological growth models applied to epidemic outbreaks. *Mathematical Biosciences and Engineering: MBE* 16, 4250–4273.
10. Wu, K., Darcet, D., Wang, Q., and Sornette, D. (2020). Generalized logistic growth modeling of the covid-19 outbreak in 29 provinces in china and in the rest of the world. medRxiv, preprint medRxiv:2020.03.11.20034363.
11. Vasconcelos, G.L., Macêdo, A.M.S., Ospina, R., Almeida, F.A., Duarte-Filho, G.C., Brum, A.A., and Souza, I.C.L. (2020). Modelling fatality curves of covid-19 and the effectiveness of intervention strategies. *PeerJ* 8:e9421 (2020), DOI 10.7717/peerj.9421.
12. Macêdo, A.M.S., Brum, A.A., Duarte-Filho, G.C., Almeida, F.A.G., Ospina, R., and Vasconcelos, G.L. (2020). A comparative analysis between SIRD models and the Richards growth model. Working Paper. Disponível para download [http://fisica.ufpr.br/redecovid19/SIRD\\_Richards.pdf](http://fisica.ufpr.br/redecovid19/SIRD_Richards.pdf)
13. Newville, M., Stensitzki, T., Allen, D., and Ingargiola, A. (2015). *Non-linear least-squares minimization and curve-fitting for Python*. Chicago, IL.
14. Nascimento, T. (2020). Novo coronavírus já circulava em janeiro no CE sem ser detectado. *Diário do Nordeste*. Acesso em: 13 de Maio de 2020. <https://diariodonordeste.verdesmares.com.br/metro/novo-coronavirus-ja-circulava-em-janeiro-no-ce-s-em-ser-detectado-1.2245041>
15. Vasconcelos, G.L., Macêdo, A.M.S., Duarte-Filho, G.C., Brum, A.A., Ospina, R., Almeida, F.A., (2020). Complexity signatures in the COVID-19 epidemic: power law behaviour in the saturation regime of fatality curves”, medRxiv, <https://doi.org/10.1101/2020.07.12.20152140>.

## **AGRADECIMENTOS**

Esse trabalho foi apoiado em parte pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), através dos processos de bolsa de produtividade de No. 303772/2017-4 (GLV), 312612/2019-2 (AMSM) e 312612/2019-2 (RO). AAB agradece o apoio do CNPq através de bolsa de doutorado (processo 167348/2018-3).

## **COLABORAÇÕES**

Todos os autores participaram da Conceituação (Igual), Curadoria de dados (Igual), Análise formal (Igual), Investigação (Igual), Metodologia (Igual), Administração de projeto (Igual), Supervisão (Igual), Validação (Igual), Visualização (Igual), Escrita - rascunho original (Igual), Escrita - revisão e edição (Igual).

Os autores declaram que não possuem qualquer conflito de interesse.