

doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-4-843-849

УДК 532.529

## Точное решение задачи отражения ударной волны от стенки, экранированной слоем газозвеси

Дмитрий Викторович Садин<sup>1</sup>, Елена Николаевна Широкова<sup>2</sup><sup>1,2</sup> Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация<sup>1</sup> [sadin@yandex.ru](mailto:sadin@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-5335-4847><sup>2</sup> [shirokhelen-78@mail.ru](mailto:shirokhelen-78@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-8188-2003>

### Аннотация

**Введение.** Представлено решение задачи отражения ударной волны от стенки, экранированной слоем газозвеси. Динамика газозвеси описана в двухскоростной двухтемпературной формулировке. **Метод.** В отличие от известных приближенных моделей запыленного газа, основанных на применении классических автомодельных решений путем коррекции газодинамических параметров и физических постоянных, получено асимптотически точное решение. Аналитическое решение поставленной задачи построено в виде композиции элементарных распадов разрывов. Неравновесное решение сходится к точному при уменьшении характерных времен динамической и тепловой релаксаций несущего газа и взвешенных частиц произвольной концентрации. Расчеты по неравновесной модели выполнены гибридным методом крупных частиц второго порядка аппроксимации по пространству и времени. **Основные результаты.** Приведены точные и расчетные по неравновесной модели профили относительных величин давления и плотности смеси, нормированной скорости дисперсной фазы. Изучено влияние интенсивности падающей ударной волны, а также концентрации частиц в слое газозвеси на параметры воздействия ударно-волнового импульса на стенку. Наличие экранирующего слоя привело к повышению давления отражения от стенки по сравнению с отражением ударной волны в чистом газе. Выполнен анализ влияния релаксационных свойств слоя газозвеси при изменении размеров частиц от 1 до 8 мкм. Для достаточно мелких частиц 1 мкм и принятых масштабов задачи неравновесное решение хорошо воспроизводит ударно-волновую структуру и соответствует асимптотике. С увеличением размеров дисперсных включений возрастают пространственные зоны релаксации, сглаживающие профили параметров. Погрешность расчета скорости и других параметров для неравновесной газозвеси с частицами 1 мкм по сравнению с точным решением находится в интервале от  $10^{-7}$  до  $10^{-5}$ . **Обсуждение.** Полученные результаты имеют прикладное значение при обосновании влияния примесей инертных частиц на динамическое нагружение конструкций. Аналитическое решение задачи может быть востребовано при тестировании различных численных схем.

### Ключевые слова

точное решение, отражение, ударная волна, стенка, слой газозвеси

**Ссылка для цитирования:** Садин Д.В., Широкова Е.Н. Точное решение задачи отражения ударной волны от стенки, экранированной слоем газозвеси // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 4. С. 843–849. doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-4-843-849

## The exact solution of a shock wave reflection problem from a wall shielded by a gas suspension layer

Dmitry V. Sadin<sup>1</sup>, Elena N. Shirokova<sup>2</sup><sup>1,2</sup> Mozhaisky Military Aerospace Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation<sup>1</sup> [sadin@yandex.ru](mailto:sadin@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-5335-4847><sup>2</sup> [shirokhelen-78@mail.ru](mailto:shirokhelen-78@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-8188-2003>

### Abstract

The paper is devoted to solving the shockwave reflection problem from a wall shielded by a gas suspension layer. The dynamics of the gas suspension are described in a two-speed two-temperature formulation. In contrast to the known

approximate models of dusty gas based on the application of classical self-similar solutions by correcting gas dynamic parameters and physical constants, an asymptotically exact solution is obtained. The analytical solution to the problem is constructed in the form of a composition of elementary decays discontinuities. The nonequilibrium solution converges to the exact one with a decrease in the characteristic times of dynamic and thermal relaxation of the carrier gas and suspended particles of arbitrary concentration. Calculations based on the nonequilibrium model are performed by the hybrid large-particle method of the second-order approximation in space and time. Both for the exact and calculate profiles of the relative values of the pressure and density of the mixture, the normalized velocity of the dispersed phase obtained from the nonequilibrium model are given. The influence of the intensity of the incident shock wave, as well as the concentration of particles in the gas suspension layer on the parameters of the impact of the shock wave pulse on the wall, is studied. The presence of a shielding layer leads to an increase in the reflection pressure from the wall compared to the reflection of the shock wave in a pure gas. The analysis of the influence of the relaxation properties of the gas suspension layer with a change in particle sizes from 1 to 8  $\mu\text{m}$  is carried out. For sufficiently small particles of 1 micron and the accepted scales of the problem, the nonequilibrium solution reproduces the shock-wave structure well and corresponds to the asymptotics. With the increase in the size of dispersed inclusions, the spatial relaxation zones, smoothing the profiles of the parameters, increase. The error in calculating the velocity and other parameters for a nonequilibrium gas suspension with particles of 1  $\mu\text{m}$  compared to the exact solution is in the range from  $10^{-7}$  to  $10^{-5}$ . The results obtained are of practical importance in substantiating the influence of inert particle impurities on the dynamic loading of structures. The analytical solution to the problem may be in demand when testing various numerical schemes.

### Keywords

exact solution, reflection, shock wave, wall, layer of gas suspension

**For citation:** Sadin D.V., Shirokova E.N. The exact solution of a shock wave reflection problem from a wall shielded by a gas suspension layer. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 4, pp. 843–849 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-4-843-849

## Введение

Изучение ударно-волновых явлений в газозвесах актуально в технологиях импульсного нанесения покрытий, взрывоопасных производствах, а также представляет теоретический интерес при исследовании структурных и релаксационных свойств смесей газа с частицами. Данным вопросам посвящено большое количество научных работ, например работы, в которых изучены: релаксация ударной волны в газе с мелкими взвешенными частицами [1]; распространение и отражение ударных волн в смесях газа и частиц микронных размеров [2]; передача ударно-волновой нагрузки экранируемой плоской стенке через слой порошкообразной среды [3]; влияния свойств газовой составляющей взвеси твердых частиц на разлет сжатого объема газозвеси в двухкомпонентной среде [4]; взаимодействие плоской ударной волны с областями различной формы и плотности в мелкодисперсной газозвеси [5] и с плотным слоем частиц [6].

Важное место в волновой динамике газозвесей занимают аналитические методы исследования. Присутствие в газе взвешенных частиц усложняет построение решений. Работы в этом направлении основаны на модели, так называемого запыленного газа [1, 2, 7–9]. Этот подход заключается во введении эффективного показателя адиабаты в сочетании с имеющими определенный физический смысл ограничениями, при этом система нестационарных уравнений движения дисперсной системы упрощается до уравнений совершенного газа. В [10] доказано, что такая аналогия возможна, если объем газа мало отличается от объема смеси (концентрация частиц мала).

В случае большой объемной доли частиц дополнительной искомой переменной служит массовая или объемная концентрация какой-либо из фаз при одновременном увеличении числа уравнений на единицу. Аналогия становится неполной ввиду существенного отличия

уравнения состояния совершенного газа и двухфазной среды. Следовательно, применение известных автомодельных решений газовой динамики для двухфазных равновесных течений с произвольной концентрацией частиц путем изменения плотности, теплоемкостей и параметров подобия является некорректным.

Трудность построения точного решения волновой динамики газозвесей произвольной концентрации дисперсной фазы заключалась в получении инвариантов Римана, которые удалось разрешить в явном виде путем приведения к интегралу от дифференциального бинорма [11].

Настоящая работа посвящена асимптотически точному решению задачи отражения ударной волны от стенки, экранированной слоем газозвеси. Цель работы — анализ влияния ряда факторов (концентрации и размеров частиц, интенсивности начального скачка уплотнения) на параметры преломленного и отраженного ударно-волнового импульса, а также подтверждения численной сходимости неравновесного решения к точному.

## Неравновесная модель динамики газозвеси

Рассмотрим динамику газозвеси в двухскоростной двухтемпературной формулировке [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i u_i}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 u_1^2}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} = -F_\mu, \\ \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2^2}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} &= F_\mu, \quad \frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 u_2}{\partial x} = Q_T, \quad (1) \\ &\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 E_1 u_1 + \rho_2 E_2 u_2 + p(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)) = 0, \\ \rho_i &= \rho_i^\circ \alpha_i \quad (i = 1, 2), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad E_i = e_i + u_i^2/2, \end{aligned}$$

где нижние индексы «1» и «2» — параметры несущей и дисперсной фаз; верхний индекс «°» — истинные значения плотности;  $\alpha_i, \rho_i, u_i, E_i, e_i$  и  $p$  — объемная доля, приведенная плотность, скорость, полная и внутренняя энергии единицы массы  $i$ -ой фазы, давление газа;  $F_\mu$  и  $Q_T$  — вязкая составляющая силы межфазного взаимодействия и мощность теплообмена между газом и частицами в единице объема;  $x$  и  $t$  — координата и время.

Замыкающими соотношениями системы (1) являются уравнения состояния идеального calorически совершенного газа и несжимаемых твердых частиц:  $p = (\gamma_1 - 1)\rho_1^\circ e_1, e_1 = c_v T_1, e_2 = c_2 T_2, \{\gamma_1, c_v, c_2, \rho_2^\circ\} \equiv \text{const}$ , где  $T_1$  и  $T_2$  — температуры несущей фазы и частиц;  $\gamma_1$  и  $c_v$  — показатель адиабаты и удельная теплоемкость газа при постоянном объеме;  $c_2$  — удельная теплоемкость частиц. Силовое и тепловое межфазное взаимодействие  $F_\mu, Q_T$  определим из эмпирических соотношений [13]:

$$F_\mu = (3/8)(\alpha_2/r)C_\mu(\text{Re}_{12})\rho_1(u_1 - u_2)|u_1 - u_2|,$$

$$C_\mu^{(1)} = \frac{24}{\text{Re}_{12}} + \frac{4,4}{\text{Re}_{12}^{1/2}} + 0,42 (\alpha_2 < 0,08),$$

$$Q_T = (3/2)(\alpha_2/r^2)\lambda_1 \text{Nu}_1 (T_1 - T_2),$$

$$\text{Nu}_1 = \begin{cases} 2 + 0,106\text{Re}_{12}\text{Pr}_1^{1/3} & (\text{Re}_{12} \leq 200), \\ 2,274 + 0,6\text{Re}_{12}^{0,67}\text{Pr}_1^{1/3} & (\text{Re}_{12} > 200), \end{cases}$$

$$\text{Re}_{12} = 2r\rho_1^\circ|v_1 - v_2|/\mu_1 \quad \text{Pr}_1 = c_v\gamma_1\mu_1/\lambda_1,$$

где  $\text{Re}_{12}, \text{Nu}_1$  и  $\text{Pr}_1$  — числа Рейнольдса, Нуссельта и Прандтля;  $C_\mu, \mu_1, \lambda_1$  и  $r$  — коэффициент межфазного трения, динамическая вязкость, коэффициент теплопроводности газа и радиус частицы.

### Постановка задачи

Плоская ударная волна с числом Маха  $M_1 \in [1,05; 1,50]$  и начальной координатой  $x = x_0 = 3$  м движется в воздухе в направлении жесткой стенки  $x = x_w = 8$  м (рис. 1). Стенка экранирована однородным слоем газозвеси  $x_1 \leq x \leq x_w$  ( $x_1 = 4$  м). Газозвесь с объемной долей  $\alpha_2 \in [10^{-10}; 10^{-3}]$  содержит монодисперсные частицы диаметром  $d \in [1; 8]$  мкм, плотностью  $\rho_2^\circ = 2500$  кг/м<sup>3</sup> и теплоемкостью частиц —  $c_2 = 710$  Дж/(кг·К). В начальный момент времени  $t = 0$  перед падающей ударной волной среда неподвижна и находится в термодинамическом равновесии с давлением  $p^{(j)} = 10^5$  Па и температурой фаз  $T_1^{(j)} = T_2^{(j)} = 293$  К ( $j = 0, 1$  номер области на рис. 1). Краевые условия заданы в виде условий непротекания на стенке  $x = x_w$  и параметров за падающей ударной волной при  $x = 0$ . Требуется найти аналитическое решение задачи отражения ударной волны от стенки.

### Построение точного решения

Найдем асимптотически точное решение, когда времена динамической  $t_1^{(\mu)}, t_2^{(\mu)}$  и тепловой  $t_1^{(T)}, t_2^{(T)}$  релак-

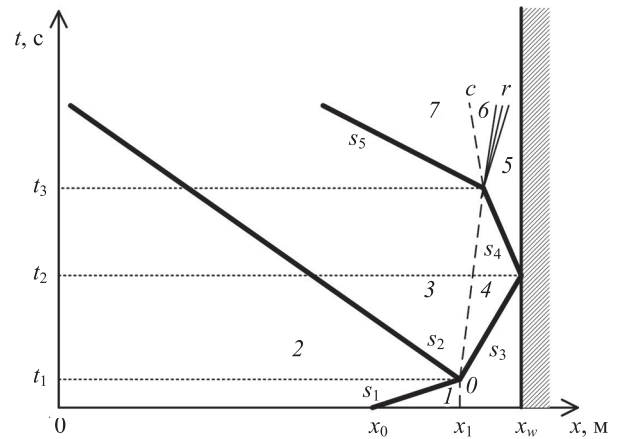


Рис. 1. Ударно-волновая диаграмма.

Траектории ударных волн (жирные линии); контактный разрыв (штриховые линии), веер волн разрежения (тонкие прямые). Области диаграммы: начальное состояние газа 1 и газозвеси 0; состояние 2 — за падающей  $s_1$ , 3 — отраженной от слоя  $s_2$  и 4 — преломленной  $s_3$  ударными волнами, 5 — за отраженной от стенки ударной волной  $s_4$  и 7 — после ее преломления  $s_5$  на границе слоя  $c$ ; 6 — зона постоянного течения за волной разрежения  $r$ ;  $t_1, t_3$  и  $t_2$  — моменты времени преломления и отражения ударных волн

Fig. 1. Shock wave diagram.

Trajectories of shock waves (bold lines); contact (dashed line); fan of rarefaction waves (thin lines).

Diagram regions: initial states of gas 1 and gas suspension 0; state 2 — behind the falling  $s_1$ , 3 — reflected from layer  $s_2$  and 4 — refracted  $s_3$  shock waves, 5 — behind the shock wave reflected from wall  $s_4$  and 7 — after its refraction  $s_5$  at the boundary of layer  $c$ ; 6 — constant flow zone behind rarefaction wave  $r$ ;  $t_1, t_3$  and  $t_2$  — moments of refraction and reflection of shock waves

саций фаз [14] по отношению к временному интервалу задачи  $t_f$  малы.

Параметры за падающей ударной волной  $s_1$  (рис. 1) при заданном числе Маха  $M_1$  определим по классическим формулам [15]. Общее решение построим с помощью композиции элементарных решений [16]: при  $t_1 \leq t < t_2$  (рис. 1) — распада разрыва с образованием отраженной от слоя газозвеси  $s_2$  и преломленной  $s_3$  ударных волн, при  $t_2 \leq t < t_3$  — отраженной от стенки ударной волны  $s_4$ , при  $t > t_3$  — преломленной на интерфейсной границе  $c$  ударной волны  $s_5$  и отраженной волны разрежения  $r$ .

Распад разрыва падающей ударной волны на границе слоя газозвеси. Рассчитаем давление  $P = p^{(3)} = p^{(4)}$  из соотношения

$$u^{(2)} - (P - p^{(2)}) \sqrt{\frac{\chi^{(2)} - 1}{\rho^{(2)}(\kappa^{(2)}P + p^{(2)})}} =$$

$$= (P - p^{(0)}) \sqrt{\frac{\chi^{(0)} - 1}{\rho^{(0)}(\kappa^{(0)}P + p^{(0)})}}.$$

Определим скорость  $U = u^{(3)} = u^{(4)}$ , плотность смеси слева  $\rho^{(3)}$  и справа  $\rho^{(4)}$  от контактного разрыва, а также скорости левой  $D_2$  и правой  $D_0$  ударных волн:

$$\begin{aligned}
 U &= u^{(2)} - (P - p^{(2)}) \sqrt{\frac{\chi^{(2)} - 1}{\rho^{(2)}(\kappa^{(2)}P + p^{(2)})}}, \\
 \rho^{(3)} &= \rho^{(2)} \frac{\kappa^{(2)}P + p^{(2)}}{\chi^{(2)}p^{(2)} + \frac{\gamma^{(2)} - 2\alpha_1^{(2)} + 1}{\gamma^{(2)} - 1} P}, \\
 \alpha_1^{(3)} &= 1 - \frac{\rho^{(3)}}{\rho^{(2)}} (1 - \alpha_1^{(2)}), \quad \alpha_2^{(3)} = 1 - \alpha_1^{(3)}, \\
 \rho^{(4)} &= \rho^{(0)} \frac{\kappa^{(0)}P + p^{(0)}}{\chi^{(0)}p^{(0)} + \frac{\gamma^{(0)} - 2\alpha_1^{(0)} + 1}{\gamma^{(0)} - 1} P}, \\
 \alpha_1^{(4)} &= 1 - \frac{\rho^{(4)}}{\rho^{(0)}} (1 - \alpha_1^{(0)}), \quad \alpha_2^{(4)} = 1 - \alpha_1^{(4)}, \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= u^{(2)} - a^{(2)} \sqrt{\frac{\alpha_1^{(2)} \left( \frac{\gamma^{(2)} + 2\alpha_1^{(3)} - 1}{2\gamma^{(2)}} \frac{P}{p^{(3)}} + \frac{\gamma^{(2)} - 2\alpha_1^{(3)} + 1}{2\gamma^{(2)}} \right)}, \\
 D_0 &= a^{(0)} \sqrt{\frac{\alpha_1^{(0)} \left( \frac{\gamma^{(0)} + 2\alpha_1^{(4)} - 1}{2\gamma^{(0)}} \frac{P}{p^{(0)}} + \frac{\gamma^{(0)} - 2\alpha_1^{(4)} + 1}{2\gamma^{(0)}} \right)},
 \end{aligned}$$

где верхние индексы — параметры в соответствующих областях (рис. 1). Показатель политропы среды вычислим из условий неизменности концентраций фаз вдоль траекторий смеси  $\gamma = 1 + (\zeta_1 R_1)/(\zeta_1 c_v + \zeta_2 c_2)$ , где  $\zeta_i = \rho_i/\rho$  — массовые концентрации фаз,  $R_1$  — газовая постоянная. Отметим, что из  $d\zeta_i/dt = 0$  следует  $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)} = \gamma^{(3)} = \gamma^{(7)}$  и  $\gamma^{(0)} = \gamma^{(4)} = \gamma^{(5)} = \gamma^{(6)}$ . Скорость звука в газозвеси —  $a = \sqrt{\gamma p/(\rho \alpha_1)}$ . В (2) использованы плотность смеси  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  и вспомогательные функции  $\chi^{(\cdot)} = (\gamma^{(\cdot)} + 2\alpha_1^{(\cdot)} - 1)/(\gamma^{(\cdot)} - 1)$  и  $\kappa^{(\cdot)} = (\gamma^{(\cdot)} + 1)/(\gamma^{(\cdot)} - 1)$ .

Полученные значения в области 4 являются исходными данными для расчета отражения ударной волны от стенки. Давление отражения  $p^{(5)}$  определим по формуле

$$u^{(4)} = (p^{(5)} - p^{(4)}) \sqrt{\frac{\chi^{(4)} - 1}{\rho^{(4)}(\kappa^{(4)}p^{(5)} + p^{(4)})}},$$

а остальные параметры из соотношений (2) при соответствующем изменении верхних индексов.

Распад разрыва отраженной от стенки ударной волны на границе слоя газозвеси. Используя рассчитанные параметры в областях 3 и 5, рассчитаем давление в зоне постоянного течения  $P = p^{(6)} = p^{(7)}$ :

$$\begin{aligned}
 u^{(3)} - u^{(5)} &+ \frac{2a^{(5)}\alpha_1^{(5)} \left( 1 - \left( \frac{P}{p^{(5)}} \right)^{\frac{\gamma^{(5)}-1}{2\gamma^{(5)}}} \right)}{\gamma^{(5)} - 1} = \\
 &= (P - p^{(3)}) \sqrt{\frac{\chi^{(3)} - 1}{\rho^{(3)}(\kappa^{(3)}P + p^{(3)})}}.
 \end{aligned}$$

Скорость  $U = u^{(6)} = u^{(7)}$  в зоне постоянного течения, плотность смеси слева  $\rho^{(7)}$  и справа  $\rho^{(6)}$  от интерфейсной границы, а также скорость левой  $D_3$  ударной волны определим из соотношений:

$$U = u^{(3)} - (P - p^{(3)}) \sqrt{\frac{\chi^{(3)} - 1}{\rho^{(3)}(\kappa^{(3)}P + p^{(3)})}},$$

$$\rho^{(7)} = \rho^{(3)} \frac{\kappa^{(3)}P + p^{(3)}}{\chi^{(3)}p^{(3)} + \frac{\gamma^{(3)} - 2\alpha_1^{(3)} + 1}{\gamma^{(3)} - 1} P},$$

$$\alpha_1^{(7)} = 1 - \frac{\rho^{(7)}}{\rho^{(3)}} (1 - \alpha_1^{(3)}), \quad \alpha_2^{(7)} = 1 - \alpha_1^{(7)},$$

$$\rho^{(6)} = \rho^{(5)} \left[ \alpha_2^{(5)} + \alpha_1^{(5)} \left( 1 - \frac{\gamma^{(5)} - 1 - U}{2\alpha_1^{(5)} a^{(5)}} \right)^{-\frac{2}{\gamma^{(5)}-1}} \right]^{-1},$$

$$\alpha_1^{(6)} = 1 - \frac{\rho^{(6)}}{\rho^{(5)}} (1 - \alpha_1^{(5)}), \quad \alpha_2^{(6)} = 1 - \alpha_1^{(6)},$$

$$D_3 = u^{(3)} - a^{(3)} \sqrt{\frac{\alpha_1^{(3)} \left( \frac{\gamma^{(3)} + 2\alpha_1^{(7)} - 1}{2\gamma^{(3)}} \frac{P}{p^{(3)}} + \frac{\gamma^{(3)} - 2\alpha_1^{(7)} + 1}{2\gamma^{(3)}} \right)}.$$

### Расчеты по неравновесной модели и сравнение с точным решением

Приведем результаты исследований поставленной задачи в неравновесной двухскоростной двухтемпературной формулировке (1) в сопоставлении с асимптотически точным аналитическим решением. Расчеты по неравновесной модели выполним гибридным методом крупных частиц второго порядка аппроксимации [17] на равномерной сетке с пространственным шагом  $h = 0,01$  м. Шаг по времени — переменный и определен числом Куранта  $CFL = 0,4$ . Для однородности вычислений в области «чистого» газа зададим объемную долю частиц пренебрежимо малой  $\alpha_2 = 10^{-10}$ . Реализуем алгоритм в виде асинхронного (параллельного) кода на языке Free Pascal с графической обработкой результатов в библиотеке Matplotlib.

На рис. 2 приведены точные и расчетные по неравновесной модели профили давления и плотности смеси, отнесенные к соответствующим значениям за падающей ударной волной (рис. 2, а) и скорости дисперсной фазы, нормированной начальной скоростью звука в «чистом» газе  $a_1^{(1)} = \sqrt{\gamma_1 p^{(1)}/\rho_1^{(1)}}$  (рис. 2, б). Результаты получены для ударной волны с числом Маха  $M_1 = 1,5$ .

Теоретический и прикладной интерес представляет влияние интенсивности падающей ударной волны  $M_1$ , а также концентрации частиц в слое газозвеси  $\alpha_2^{(0)}$  на параметры воздействия ударно-волнового импульса на стенку. Например, каково соотношение между давлениями за отраженной от стенки ударной волной, экранированной слоем газозвеси, и при его отсутствии?

Изменения давления и плотности смеси за отраженной от слоя и стенки ударных волн по отношению к соответствующим значениям за исходным скачком уплотнения показаны на рис. 3 в зависимости от начальной объемной концентрации частиц в слое  $\alpha_2^{(0)}$  и на рис. 4 при варьировании числа Маха  $M_1$ . Численные замеры параметров произведены в точках  $x_w' = x_0 - 0,01x_w$  (отражение от слоя газозвеси) и  $x_w' = 0,99x_w$  (отражение от стенки).

Из рис. 3 и 4 видно, что величины давления и плотности смеси за отраженной от стенки волной монотонно возрастают при увеличении интенсивности падающего скачка уплотнения и объемной доли дис-

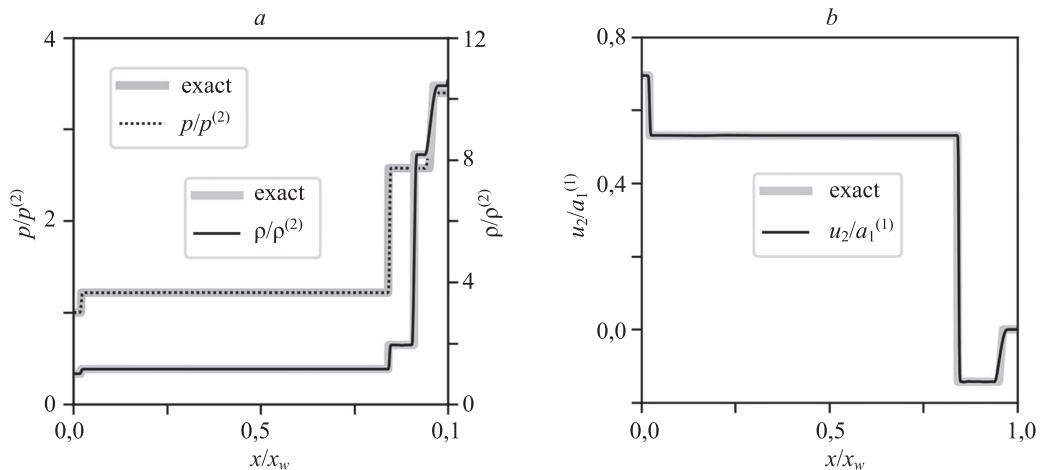


Рис. 2. Профили относительных величин давления, плотности смеси (а) и скорости частиц (б) при  $d = 1 \text{ мкм}$  в момент времени  $t_f = 22 \text{ мс}$ .

Точное решение (exact — серая сплошная линия); расчет на сетке 1/800 (тонкая сплошная линия) (плотность и скорость смеси); давление (пунктирная линия)

Fig. 2. Profiles of the relative value of pressure, mixture density (a), and particle velocity (b) at  $d = 1 \text{ }\mu\text{m}$  at a time  $t_f = 22 \text{ }\mu\text{s}$  (the exact solution is a bold solid curve; the calculations on the 1/800 grid are density and velocity of the mixture (a thin solid line) and pressure (dotted line)

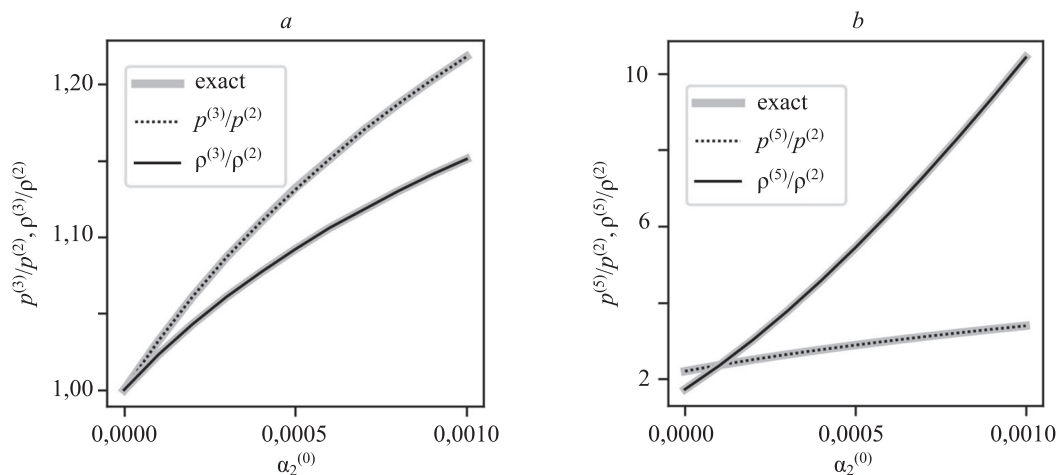


Рис. 3. Относительные значения давления и плотности смеси за отраженной от слоя (а) и стенки (б) ударных волн в зависимости от начальной объемной доли частиц  $\alpha_2^{(0)}$

Fig. 3. Relative values of the pressure and density of the mixture behind the shock waves reflected from the layer (a) and the wall (b) vs. the initial volume fraction of particles  $\alpha_2^{(0)}$

персной фазы экранирующего слоя. В практическом аспекте слой газозвеси не защищает от ударно-волнового импульса, а, напротив, увеличивает давление отражения. Например, при начальной концентрации частиц  $\alpha_2^{(0)} = 0,001$  и числе Маха  $M_1 = 1,5$  давление отражения составляет  $p^{(3)}/p^{(2)}|_{0,001} = 3,397$ , что в 1,5 раза больше случая отсутствия экранирующего слоя взвеси  $p^{(5)}/p^{(2)}|_0 = 2,207$ .

Влияние релаксационных свойств слоя газозвеси при изменении размеров частиц от 1 до 8 мкм для расчетной области в окрестности стенки показано на рис. 5, а. Для достаточно мелких частиц  $d < 1 \text{ мкм}$  и принятых масштабов задачи неравновесное решение хорошо воспроизводит ударно-волновую структуру и

соответствует асимптотике. С увеличением размеров дисперсных включений возрастают пространственные зоны релаксации, сглаживающие профили параметров (штриховая кривая для частиц диаметром  $d = 8 \text{ мкм}$ ).

Точность применяемого гибридного метода крупных частиц для рассматриваемой задачи показана на рис. 5, б. Здесь при решении задачи в неравновесной формулировке приведены численные значения модуля нормированной скорости дисперсной фазы в окрестности стенки после отражения ударной волны  $|u_2^{(5)}/a_1^{(1)}|$  (асимптотически точное значение равно нулю). Погрешность расчета скорости и других параметров для газозвеси с частицами  $d = 1 \text{ мкм}$  при числе Маха

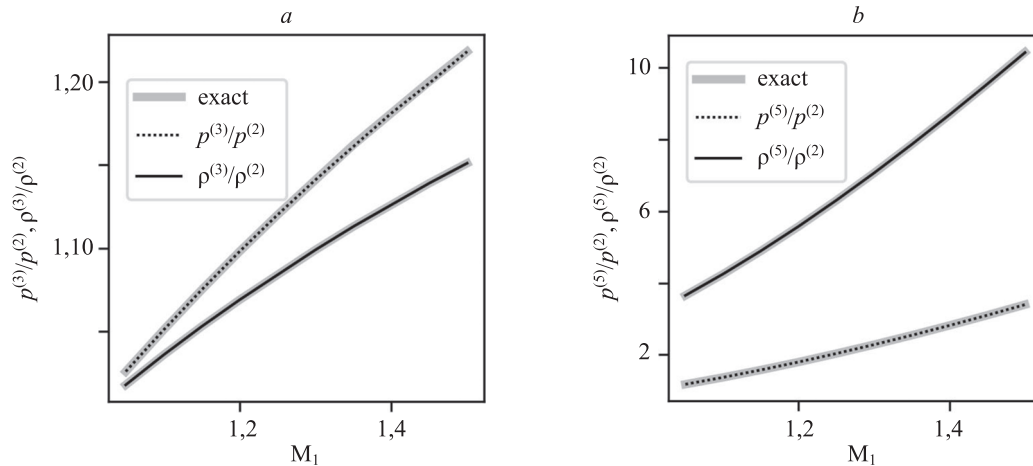


Рис. 4. Относительные значения давления и плотности смеси за отраженной от слоя (а) и стенки (б) ударных волн в зависимости от числа Маха падающей ударной волны  $M_1$

Fig. 4. Relative values of the pressure and density of the mixture behind the shock waves reflected from the layer (a) and the wall (b) vs. the Mach number of the incident shock wave  $M_1$

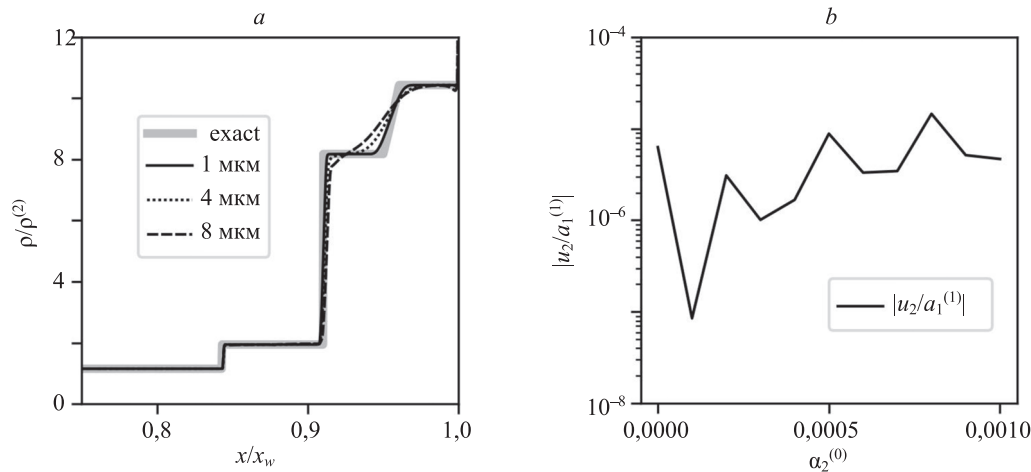


Рис. 5. Профили относительной плотности газозвеси для размеров частиц  $d = 1, 4, 8$  мкм (а) и погрешность расчета нормированной скорости частиц при  $d = 1$  мкм по неравновесной модели в окрестности стенки (б)

Fig. 5. Profiles of the relative density of the gas suspension for various particle sizes  $d = 1, 4, 8$   $\mu\text{m}$  (a) and errors in calculating the normalized particle velocity at  $d = 1$   $\mu\text{m}$  according to the nonequilibrium model in a vicinity of the wall (b)

падающей ударной волны  $M_1 = 1,5$  находится в интервале от  $10^{-7}$  до  $10^{-5}$ .

### Заключение

Построено асимптотически точное решение задачи отражения ударной волны от стенки, экранированной слоем газозвеси, как композиция элементарных решений распадов разрывов. Аналитическое решение

может представлять бенчмарк при проверке различных численных схем. Исследовано влияние интенсивности падающей ударной волны, концентрации частиц в слое газозвеси на параметры воздействия ударно-волнового импульса на стенку. Наличие экранирующего слоя привело к повышению давления отражения от стенки по сравнению с отражением ударной волны в чистом газе. Показана сходимость численных решений к точным при уменьшении размеров взвешенных частиц.

### Литература

1. Rudinger G. Some properties of shock relaxation in gas flows carrying small particles // *Physics of Fluids*. 1964. V. 7. N 5. P. 658–663. <https://doi.org/10.1063/1.1711265>
2. Sommerfeld M., Selzer M., Grönig H. Shock wave reflections in dusty-gas // *Proc of the 15<sup>th</sup> International Symposium on Shock Waves and Shock Tubes*. 1986. P. 683–689.
3. Болдырева О.Ю., Губайдуллин А.А., Дудко Д.Н., Кутушев А.Г. Численное исследование передачи ударно-волновой нагрузки

### References

1. Rudinger G. Some properties of shock relaxation in gas flows carrying small particles. *Physics of Fluids*, 1964, vol. 7, no. 5, pp. 658–663. <https://doi.org/10.1063/1.1711265>
2. Sommerfeld M, Selzer M, Grönig H. Shock wave reflections in dusty-gas. *Proc 15<sup>th</sup> International Symposium on Shock Waves and Shock Tubes*, 1986, pp. 683–689.
3. Boldyreva O.Y., Gubaidullin A.A., Dudko D.N., Kutushev A.G. Numerical study of the transfer of shock-wave loading to a screened

- экранируемой плоской стенке через слой порошкообразной среды и разделяющий их воздушный зазор // Физика горения и взрыва. 2007. Т. 43. № 1. С. 132–142.
4. Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния свойств газовой составляющей взвеси твердых частиц на разлет сжатого объема газовой взвеси в двухкомпонентной среде // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93. № 2. С. 304–310.
  5. Садин Д.В., Давидчук В.А. Взаимодействие плоской ударной волны с областями различной формы и плотности в мелкодисперсной газовой взвеси // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93. № 2. С. 489–498.
  6. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Ефремов А.В. Численное моделирование взаимодействия ударной волны с плотным слоем частиц // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94. № 3. С. 658–667.
  7. Сидоркина С.И. О некоторых движениях аэрозоля // Доклады АН СССР. 1957. Т. 112. № 3. С. 398–400.
  8. Арутюнян Г.М. Термогидродинамическая теория гетерогенных систем. М.: Физматлит, 1994. 272 с.
  9. Георгиевский П.Ю., Левин В.А., Сутырин О.Г. Фокусировка ударной волны при взаимодействии ударной волны с цилиндрическим облаком пыли // Письма в Журнал технической физики. 2016. Т. 42. № 18. С. 17–24.
  10. Арутюнян Г.М. Условия применимости результатов гидродинамики совершенного газа к дисперсным средам // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. № 1. С. 157–160.
  11. Иванов А.С., Козлов В.В., Садин Д.В. Нестационарное истечение двухфазной дисперсной среды из цилиндрического канала конечных размеров в атмосферу // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 3. С. 60–66.
  12. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
  13. Ивандяев А.И., Кутушев А.Г., Рудаков Д.А. Численное исследование метания слоя порошка сжатым газом // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31. № 4. С. 63–70.
  14. Садин Д.В. О жесткости систем уравнений в частных производных, описывающих движения гетерогенных сред // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 11. С. 43–53.
  15. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
  16. Садин Д.В. Тестовые задачи динамики газовой взвеси с использованием асимптотически точных решений // Математическое моделирование. 2022. Т. 34. № 12. С. 59–74. <https://doi.org/10.20948/mm-2022-12-04>
  17. Садин Д.В. Эффективная реализация гибридного метода крупных частиц // Математическое моделирование. 2022. Т. 34. № 4. С. 113–127. <https://doi.org/10.20948/mm-2022-04-08>
- flat wall through a layer of a powdered medium and a subsequent air gap. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2007, vol. 43, no. 1, pp. 114–123. <https://doi.org/10.1007/s10573-007-0016-3>
4. Tukmakov D.A. Numerical investigation of the influence of properties of the gas component of a suspension of solid particles on the spreading of a compressed gas-suspension volume in a binary medium. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2020, vol. 93, no. 2, pp. 291–297. <https://doi.org/10.1007/s10891-020-02120-9>.
  5. Sadin D.V., Davidchuk V.A. Interaction of a plane shock wave with regions of varying shape and density in a finely divided gas suspension. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2020, vol. 93, no. 2, pp. 474–483. <https://doi.org/10.1007/s10891-020-02143-2>
  6. Volkov K.N., Emel'yanov V.N., Efremov A.V. Numerical simulation of the interaction of a shock wave with a dense layer of particles. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2021, vol. 94, no. 3, pp. 638–647. <https://doi.org/10.1007/s10891-021-02339-0>.
  7. Sidorkina S.I. Some aerosol motions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1957, vol. 112, no. 3, pp. 398–400. (in Russian)
  8. Arutyunyan G.M. *Thermohydrodynamic Theory of Heterogeneous Systems*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994, 272 p. (in Russian)
  9. Georgievskiy P.Yu., Levin V.A., Sutyurin O.G. Shock focusing upon interaction of a shock with a cylindrical dust cloud. *Technical Physics Letters*, 2016, vol. 42, no. 9, pp. 936–939. <https://doi.org/10.1134/S1063785016090182>
  10. Arutyunyan G.M. Conditions of applicability of the results of the hydrodynamics of a perfect gas to disperse media. *Fluid Dynamics*, 1979, vol. 14, no. 4, pp. 118–121. <https://doi.org/10.1007/BF01050823>
  11. Ivanov A.S., Kozlov V.V., Sadin D.V. Unsteady flow of a two-phase disperse medium from a cylindrical channel of finite dimensions into the atmosphere. *Fluid Dynamics*, 1996, vol. 31, no. 3, pp. 386–391. <https://doi.org/10.1007/BF02030221>
  12. Nigmatulin R.I. *Dynamics of Multiphase Media. Vol. 1*. New York, USA, Hemisphere Publ. Corp., 1990, 507 p.
  13. Ivandayev A.I., Kutushev A.G., Rudakov D.A. Numerical investigation of throwing a powder layer by a compressed gas. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 459–465. <https://doi.org/10.1007/BF00789367>.
  14. Sadin D.V. On stiff systems of partial differential equations for motion of heterogeneous media. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2002, vol. 14, no. 11, pp. 43–53. (in Russian)
  15. Roždestvenskii B.L., Janenko N.N. *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics*. American Mathematical Soc., 1983, 676 p.
  16. Sadin D.V. Test problems of gas suspension dynamics using asymptotically exact solutions. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2023, vol. 15, no. 3, pp. 564–573. <https://doi.org/10.1134/S2070048223030158>
  17. Sadin D.V. Efficient implementation of the hybrid large particle method. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2022, vol. 14, no. 6, pp. 946–954. <https://doi.org/10.1134/S207004822206014X>

#### Авторы

**Садин Дмитрий Викторович** — доктор технических наук, профессор, профессор, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, [orcid.org/0000-0001-5335-4847](https://orcid.org/0000-0001-5335-4847), [sadin@yandex.ru](mailto:sadin@yandex.ru)  
**Широкова Елена Николаевна** — кандидат химических наук, преподаватель, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0002-8188-2003>, [shirokhelen-78@mail.ru](mailto:shirokhelen-78@mail.ru)

Статья поступила в редакцию 30.05.2023  
 Одобрена после рецензирования 15.06.2023  
 Принята к печати 18.07.2023

#### Authors

**Dmitry V. Sadin** — D.Sc., Full Professor, Mozhaisky Military Aerospace Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, [orcid.org/0000-0001-5335-4847](https://orcid.org/0000-0001-5335-4847), [sadin@yandex.ru](mailto:sadin@yandex.ru)

**Elena N. Shirokova** — PhD (Chemistry), Lecturer, Mozhaisky Military Aerospace Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0002-8188-2003>, [shirokhelen-78@mail.ru](mailto:shirokhelen-78@mail.ru)

Received 30.05.2023  
 Approved after reviewing 15.06.2023  
 Accepted 18.07.2023



Работа доступна по лицензии  
 Creative Commons  
 «Attribution-NonCommercial»