УДК 532.59: 534.29
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.8

Жук О.П.[1], д.ф.-м.н., пров.н.с.
Жук Я.О.[2], чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.
Клімчук[2] Т.В., к.ф.-м.н.

Про взаємодію сферичних крапель рідини в радіаційному полі акустичної хвилі

[1]Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: opzhuk1939@gmail.com
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: y.zhuk@i.ua

O.P. Zhuk[1], Dr.Sci., Leading Researcher.
Y.A. Zhuk[2], Dr.Sci. (Phys.–Math.)
T.V. Klimchuk[2], Ph.D.

On interaction of liquid drops located in radiation field of the acoustic wave

[1]Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine, 3, Petr Nesterov str., Kyiv 03057
e-mail: opzhuk1939@gmail.com
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e, Glushkov ave., Kyiv 03680
e-mail: y.zhuk@i.ua

Розглянуто випадок поширення плоскої акустичної хвилі вздовж лінії центрів двох сферичних крапель рідини, які знаходяться в іншій рідині, що заповнює весь простір. Розроблено підхід, який дозволяє встановити характер взаємодії крапель, обумовлений дією на краплі акустичних радіаційних сил – сталих в часі складових гідродинамічних сил, що діють в рідині на краплі. Дослідження дії на краплі акустичних радіаційних сил звукового поля проведено у два етапи: перший – розв'язання лінійної задачі розсіювання первинної хвилі на рідких краплях; другий – обчислення гідродинамічних сил, які діють на кожну сферичну краплю, з наступним осередненням їх в часі. Виведено формулу для обчислення акустичної радіаційної сили для досліджуваного випадку.

Ключові слова: ідеальна рідина, плоска акустична хвиля, рідка сферична крапля, гідродинамічна сила, акустична радіаційна сила.

Propagation of the plane acoustic wave along the center line of two liquid spherical drops placed into a space filled with another liquid is under investigation. An approach is elaborated to characterize the interaction between the liquid drops caused by the acoustic radiation forces that are the time-constant components of hydrodynamic forces acting upon the drops located in the outer liquid. Investigation of the acoustic radiation forces influencing the drops in the acoustic field is performed in the frame of two-step procedure. The first step comprises solution of the linear problem of incident wave diffraction on the drops while the second one is calculation of the hydrodynamic forces acting upon each spherical drop followed by time averaging of forces determined. The analytical formula for the acoustic radiation force calculation is derived for the case under consideration.

Key Words: ideal liquid, plane acoustic wave, liquid spherical drop, hydrodynamic force, acoustic radiation force.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

При дослідженні використовується підхід [1], що ґрунтується на розв'язуванні рівнянь гідродинаміки ідеальної стисливої рідини з наступним обчисленням гідродинамічних сил, що діють на краплі, і осередненням їх в часі. Отже радіаційні сили у відповідності з методом дослідження визначаються як незалежні від часу складові гідродинамічних сил, вичислених з точністю до величин другого порядку малості. Відзначимо характерну особливість методу. Якщо при обчисленні тиску в рідині обмежитися величинами другого порядку малості, то він може бути вичислений через потенціал поля швидкості, який визначено в акустичному наближенні [1,2].

2. Постановка задачі дифракції та її розв'язування

Будемо розглядати в рідині, яка заповнює весь простір, систему двох крапель іншої рідини.

Краплі мають радіуси R_1 і R_2, відповідно швидкість звуку в рідинах крапель a_1 і a_2. а густини рідин крапель ρ_1 і ρ_2. Для зовнішньої рідини покладемо: густина ρ_0, швидкість звуку a_0. Введемо декартову прямокутну систему координат $Oxyz$, вісь Oz якої виберемо вздовж лінії центрів крапель в напрямі до краплі №2, а початок координат - посередині між центрами крапель, віддалених одна від одної на відстань l. Введемо також локальні сферичні системи координат $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$ $(s = 1, 2)$, як показано на рис. 1.

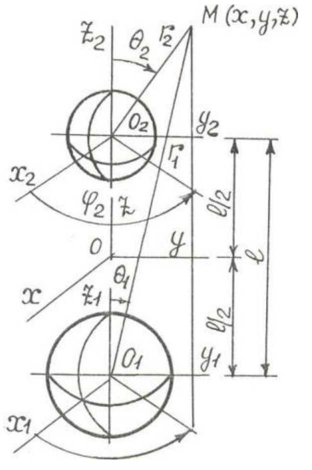

Рис.1. Дві краплі в акустичному полі

У відповідності з методом дослідження [1,2] потенціал Φ акустичного поля є розв'язком лінійного хвильового рівняння

$$\Delta\Phi - \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

У зв'язку з цим потенціал первинної (падаючої) акустичної хвилі задамо співвідношенням

$$\Phi_i = A\exp\left[i(kz - \omega t)\right], \quad (2)$$

де A – амплітуда, ω – кругова частота, $k = \omega/a_0$ – хвильове число.

Потенціал Φ_d розсіяного на сферичних краплях акустичного поля визначимо розв'язавши відповідно з [1] лінійну задачу дифракції акустичної хвилі (2) на системі двох сферичних крапель.

3. Визначення потенціалу хвильового поля, розсіяного на краплях

Розв'язування задачі дифракції проведемо методом розділення змінних в сферичних системах координат [3]. Розв'язок задачі дифракції записуємо у вигляді

$$\Phi_d = \sum_{s=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(s)} h_n^{(1)}(kr_s) P_n(\cos\theta_s) e^{-i\omega t},\ s = 1, 2, \quad (3)$$

де $A_n^{(s)}$ – довільні сталі у s-й локальній системі координат, $h_n^{(1)}(kr_s)$ – сферичні функції Ганкеля, $P_n(\cos\theta_s)$ – ортонормовані поліноми Лежандра.

Потенціали розсіяних на краплях хвиль задовольняють умови випромінювання на нескінченності.

Потенціал $\Psi^{(s)}$ хвильового поля в s-й краплі, що є також розв'язком рівняння (1), обмежений в краплі. Його запишемо в такому вигляді

$$\Psi^{(s)} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_n^{(s)} j_n(\bar{k}_s \bar{r}_s) P_n(\cos\theta_s) e^{-i\omega t},\ s = 1, 2. \quad (4)$$

У формулі (4) $j_n(\bar{k}_s \bar{r}_s)$ – сферичні функції Бесселя. Риска над символом позначає величини, які стосуються краплі.

Довільні сталі $A_n^{(s)}$ і $\bar{A}_n^{(s)}$ визначимо із граничних умов на поверхнях сферичних крапель, які вимагають при переході через поверхні крапель неперервності радіальних компонент швидкості зовнішньої і внутрішньої рідини і неперервності величини тиску:

$$v_{r_s}^{(s)}\Big|_{r_s = R_s} = \bar{v}_{r_s}^{(s)}\Big|_{r_s = R_s},\ p^{(s)}\Big|_{r_s = R_s} = \bar{p}^{(s)}\Big|_{r_s = R_s},\ s = 1, 2. \quad (5)$$

Для того, щоб потенціал звукового поля в зовнішній рідині

$$\Phi = \Phi_i + \Phi_d = \Phi_i + \sum_{s=1}^{2} \Phi_d^{(s)} \quad (6)$$

записати в кожній з локальних сферичних систем координат скористаємося теоремами додавання для сферичних хвильових функцій [3]. Взявши при цьому до уваги формулу для потенціалу первинної акустичної хвилі (2), поданій у s-й сферичній системі координат у вигляді

$$\Phi_i^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2Ae^{(-1)^S ikl/2} i^n j_n(kr_s) P_n(\cos\theta_s) e^{-i\omega t}, \quad (7)$$

одержимо в кожній з локальних систем координат формулу для потенціалу звукового поля (6)

$$\Phi^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[2Ae^{(-1)^S ikl/2} i^n j_n(kr_s) + A_n^{(s)} h_n^{(1)}(kr_s) + S_n^{(s)} j_n(kr_s)\Big] P_n(\cos\theta_s) e^{-i\omega t},\ s = 1, 2. \quad (8)$$

$$S_n^{(s)} = \sum_{p=0}^{\infty} A_p^{(q)} Q_{0n0p}^{(s,q)}(kR_{sq}, \theta_{sq});\ s, q = 1, 2;\ s \neq q;$$

$$R_{sq} = R_{qs} = l.$$

Зауважимо, що координати центру O_s s-ї краплі в q-й сферичній системі координат позначаємо як r_{qs}, θ_{qs}, φ_{qs}.

Співвідношення для $Q_{0n0p}^{(s,q)}\left(kR_{sq},\theta_{sq}\right)$ обчислюється за формулою, приведеною в [3].

Із граничних умов (5), взявши до уваги формули:

$$v_{r_s}^{(s)} = \frac{\partial\Phi^{(s)}}{\partial r_s}, \quad p^{(s)} = -\rho_0 \frac{\partial\Phi^{(s)}}{\partial t},$$
$$\bar{v}_{r_s}^{(s)} = \frac{\partial\Psi^{(s)}}{\partial r_s}, \quad \bar{p}^{(s)} = -\rho_s \frac{\partial\Psi^{(s)}}{\partial t}, \tag{9}$$

одержуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь для обчислення сталих коефіцієнтів $A_n^{(s)}$ і $\bar{A}_n^{(s)}$ в потенціалах акустичних хвиль

$$kh_n^{(1)'}\left(kR_s\right)A_n^{(s)} - k_s j_n'\left(k_s R_s\right)\bar{A}_n^{(s)} + kS_n^{(s)} j_n'\left(kR_s\right) =$$
$$= -2Ake^{(-1)^s ikl/2} i^n j'\left(kR_s\right); \tag{10}$$
$$\rho_0 h_n^{(1)}\left(kR_s\right)A_n^{(s)} - \rho_s j_n\left(k_s R_s\right)\bar{A}_n^{(s)} + \rho_0 S_n^{(s)} j_n\left(kR_s\right) =$$
$$= -2A\rho_0 e^{(-1)^s ikl/2} i^n j_n\left(kR_s\right),\ s = 1,2$$

Одержана система алгебраїчних рівнянь задовольняє умовам єдиності розв'язку, який знаходимо методом редукції. Обчислені коефіцієнти визначають потенціал акустичного поля.

4. Обчислення акустичних радіаційних сил, які обумовлюють взаємодію крапель

Обчислення радіаційної сили, яка діє на краплю в рідині, зводиться до осереднення в часі (за період первинної хвилі) гідродинамічної сили. У зв'язку з симетрією хвильового поля відносно осі Oz гідродинамічна сила направлена вздовж цієї осі:

$$F_z^{(s)} = -\iint\limits_S p^{(s)} \cos\theta_s dS \tag{11}$$

У формулі (11) S – площа поверхні сферичної краплі.

При обчисленні гідродинамічних сил (11), які діють на краплі, відповідно з прийнятим методом дослідження, збурення тиску в рідині будемо визначати по формулі [1], [2]

$$p = -\rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho_0\left(grad\ \Phi\right)^2 + \frac{\rho_0}{2a_0^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2. \tag{12}$$

Зауважимо, що у формулі для тиску (12) необхідно використовувати дійсну частину співвідношення для потенціалу (8) звукового поля. Подамо її в такому вигляді

$$\operatorname{Re}\Phi^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(K_n^{(s)}\cos\omega t + L_n^{(s)}\sin\omega t\right)P_n\left(\cos\theta_s\right). \tag{13}$$

У формулі (13) використано такі позначення:

$$K_n^{(s)} = B_{1n}^{(s)} + C_{1n}^{(s)} + D_{1n}^{(s)};\ L_n^{(s)} = B_{2n}^{(s)} + C_{2n}^{(s)} + D_{2n}^{(s)};$$
$$B_{1n}^{(s)} = 2A\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k\frac{l}{2}\right) - \right.$$
$$\left. -(-1)^s \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin(k)\frac{l}{2}\right] j_n\left(kr_s\right);$$
$$B_{2n}^{(s)} = 2A\left[\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k\frac{l}{2}\right) + \right.$$
$$\left. +(-1)^s \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(k\frac{l}{2}\right)\right] j_n\left(kr_s\right);$$
$$C_{1n}^{(s)} = A_{1n}^{(s)} j_n\left(kr_s\right) - A_{2n}^{(s)} y_n\left(kr_s\right);$$
$$C_{2n}^{(s)} = A_{1n}^{(s)} y_n\left(kr_s\right) + A_{2n}^{(s)} j_n\left(kr_s\right);$$
$$A_n^{(s)} = \operatorname{Re}A_n^{(s)} + i\operatorname{Im}A_n^{(s)} = A_{1n}^{(s)} + i\operatorname{Im}A_{2n}^{(s)};$$
$$D_{1n}^{(s)} = \operatorname{Re}S_n^{(s)} j_n\left(kr_s\right);\ D_{2n}^{(s)} = \operatorname{Im}S_n^{(s)} j_n\left(kr_s\right).$$

В подальшому при позначенні дійсної частини потенціалу $\Phi^{(s)}$ символ Re вказувати не будемо.

Складова гідродинамічної сили (11), яка обумовлена першим доданком у формулі для тиску (12), при осередненні гідродинамічної сили за часом дорівнює нулю, тому при обчисленні гідродинамічної сили перший доданок у формулі для тиску враховувати не будемо, маючи на увазі наступне осереднення гідродинамічної сили за часом. Отже,

$$p^{(s)} = \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{a_0^2}\left(\frac{\partial\Phi^{(s)}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial\Phi^{(s)}}{\partial r_s}\right)^2 -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{r_s^2}\left(\frac{\partial\Phi^{(s)}}{\partial\theta_s}\right)^2 \tag{14}$$

При цьому тиск обчислюється при умові $r_s = R_s$.

Визначимо внесок у величину гідродинамічної сили, яка діє на краплю, кожного з доданків у формулі (14) для тиску в акустичній хвилі. Внесок першого доданка у величину гідродинамічної сили $F_z^{(s)}$ визначається інтегралом

$$F_{z1}^{(s)} = -\frac{\pi\rho_0 R_s^2}{a_0^2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial\Phi^{(s)}}{\partial t}\right)^2 \sin\theta_s\cos\theta_s d\theta_s,\ s=1,2 \quad (15)$$

Після інтегрування (15) одержуємо формулу

$$F_{z1}^{(s)} = -4\pi\rho_0\alpha_s^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}\times$$
$$\times\left[K_n^{(s)}K_{n+1}^{(s)}\sin^2\omega t + L_n^{(s)}L_{n+1}^{(s)}\cos^2\omega t\right],\ \alpha_s = kR_s. \quad (16)$$

У формулі (16) не враховано доданки, які після осереднення за часом дорівнюють нулю. Після осереднення за часом співвідношення (16), знаходимо

$$\left\langle F_{s1}^{(s)}\right\rangle = -2\pi\rho_0\alpha_s^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}\times$$
$$\times\left[K_n^{(s)}K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)}L_{n+1}^{(s)}\right] \quad (17)$$

Внесок другого доданку формули (14) визначається інтегралом

$$F_{z2}^{(s)} = \pi\rho_0 R_s^2\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial\Phi^{(s)}}{\partial r}\right)^2 \cos\theta_s\sin\theta_s d\theta_s,\ s=1,2\ . \quad (18)$$

Інтегрування (18) дає внесок другого доданку з (14)

$$F_{z2}^{(s)} = 4\pi\rho_0\alpha_s^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}\times$$
$$\times\left(K_n^{(s)'}K_{n+1}^{(s)'}\cos^2\omega t + L_n^{(s)'}L_{n+1}^{(s)'}\sin^2\omega t\right). \quad (19)$$

Після осереднення (19) за часом одержуємо внесок в радіаційну силу другого доданку з (14)

$$\left\langle F_{z2}^{(s)}\right\rangle = 2\pi\rho_0 (kR_s)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+1)}\times$$
$$\times\left(K_n^{(s)'}K_{n+1}^{(s)'} + L_n^{(s)'}L_{n+1}^{(s)'}\right). \quad (20)$$

Діючи аналогічним чином, знаходимо внесок третього доданку з формули (14) у радіаційну силу, яка діє на s-у краплю,

$$\left\langle F_{z3}^{(s)}\right\rangle = 2\pi\rho_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}\left(K_n^{(s)}K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)}L_{n+1}^{(s)}\right).$$

Отже, після осереднення в часі гідродинамічної сили (11), одержано формулу для обчислення акустичних радіаційних сил, які діють на кожну з крапель:

$$\left\langle F_z^{(s)}\right\rangle = \left\langle F_{z1}^{(s)}\right\rangle + \left\langle F_{z2}^{(s)}\right\rangle + \left\langle F_{z3}^{(s)}\right\rangle,\ s=1,2.. \quad (23)$$

Величини радіаційних сил, які діють на кожну з крапель, та їх напрям дії, визначають поведінку крапель в рідині – вони віддаляються чи зближуються, що може бути застосовано при розробці технологічних процесів, основаних на використанні акустичних полів.

Досліджено задачу про дію середньої в часі гідродинамічної (радіаційної) сили на краплі іншої рідини, ніж зовнішня, і розроблено метод її розв'язування, який дозволяє досліджувати поведінку рідких сферичних крапель під дією акустичних полів. В даній роботі запропоновано підхід, який включає постановку задачі в загальній формі незалежно від відношення довжини акустичної хвилі до розмірів об'єктів і до відстані між ними.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за фінансової підримки Національного фонду досліджень України (Проєкт 0120U105260 «Дифракційні процеси і радіаційні сили в обмежених гідропружних системах»)

Список використаних джерел

1. Zhuk A.P. Hydrodynamic interaction of two spherical particles from sound waves // Sov. Appl. Mech. – 1984. – **20**, №9. – P. 875-880.
2. King L.V. On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres // Proc.Roy. Soc. Ser. A. 1934. – **147**, №861. – P. 212-240.
3. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – Киев: Наук. думка, 1972. – 254 с.

References

1. ZHUK, A.P. (1984) Hydrodynamic interaction of two spherical particles from sound waves. *Sov. Appl. Mech*. **20**(9). p. 875-880.
2. KING, L.V. (1934) On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres. *Proc.Roy. Soc. Ser. A*. **147(**861). p. 212-240.
3. GUZ, A.N. and GOLOVCHAN, V.T. (1972) *Difractsiya uprugikh voln v mnogosvyaznykh telakh*. Kiev: Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 11.03.23