revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O CONHECIMENTO MATEMÁTICO CONSTITUÍDO COM UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR: RELATO E REFLEXÕES

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2023.12.28.447-461

Karoline Frazão Alves[1]
Akin de Sá Silva[2]
Paulo Wichnoski[3]

Resumo: Neste trabalho, relatamos a experiência vivida com um clássico problema de otimização volumétrica, tomado como uma atividade de Modelagem Matemática para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Refletimos sobre os conhecimentos matemáticos constituídos e sobre os modos constituintes, com aquilo que foi exposto em relatório de aula por quatro sujeitos que vivenciaram a atividade. Como síntese articuladora desse pensar reflexivo, inferimos que, os conhecimentos matemáticos constituídos convergiram aos conhecimentos vislumbrados a priori e, classicamente, abordados pelo problema, porém, extrapolaram a solução esperada, indo além do que é sugerido corriqueiramente pelos livros-texto. O modo que se constituíram se revelou amparado na literatura, na observação, na experimentação, na demonstração e, em partes, mediado pelo processo indutivo. Além disso, os sujeitos recorreram à tecnologia digital e, ocasionalmente, ao diálogo com o professor. Avaliamos positivamente a experiência vivida com a Modelagem Matemática que não limitou o problema à sua solução e abriu a possibilidade de distanciar-se dos modos usuais que ele é abordado nos livros-texto em sala de aula.
Palavras-chave: Constituição de conhecimento. Cálculo diferencial e integral. Modelagem Matemática. Ensino superior.

THE MATHEMATICAL KNOWLEDGE CONSTITUTED WITH A MATHEMATICAL MODELING ACTIVITY IN HIGHER EDUCATION: REPORT AND REFLECTIONS

Abstract: In this paper we reported the experience with a classical volumetric optimization problem, taken as a Mathematical Modeling activity for the teaching of Differential and Integral Calculus. We reflected on the mathematical knowledge acquired and on the constituent modes, with what was exposed in a class report by four subjects who experienced the activity. As a synthesis articulating this reflective thinking, we infer that the mathematical knowledge constituted converged to the knowledge glimpsed a priori and classically addressed by the problem, but went beyond the expected solution, going further than what is commonly suggested by textbooks. The way they were constituted was supported by literature, observation, experimentation, demonstration and, in parts, mediated by the inductive process. In addition, the students used digital technology and, occasionally, dialog with the teacher. We positively evaluated the experience with Mathematical Modeling that did not limit the problem to its solution and opened the possibility of distancing from the usual ways it is approached in textbooks and in the classroom.
Keywords: Knowledge production. Differential and Integral Calculus. Mathematical Modeling. Higher Education.

[1] Estudante de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia. Universidade Federal do Paraná – setor Palotina – E-mail: karoline.frazao@ufpr.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6552-6706
[2] Estudante de Farmácia. Universidade Federal do Paraná – E-mail: akin.sa.silva@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2802-906X
[3] Doutor em Educação em Ciências e Educação Matemática. Professor colaborador da Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO) e do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas (PPGECEMTE) da Universidade Federal do Paraná – setor Palotina – E-mail: wichnoski@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1183-0897

Introdução

A Educação Matemática, em seus diversos modos de ser, preocupa-se, também, com o sujeito que se está a educar (matematicamente). Isso significa que, para além de ensinar matemática, há uma preocupação com os modos que esse sujeito aprende e constitui conhecimentos[4]. Nesse sentido, educar matematicamente é atuar de modo que as ações didático-pedagógicas o incluam no processo de conhecer e constituir conhecimentos matemáticos, emancipando-o do professor e de quaisquer ações que o privem de ser, no mundo, um sujeito cooperativo.

Na tentativa de fazer uma Educação Matemática que atenda, mesmo que parcialmente, a estes princípios, e que não se limite ao livro didático adotado, foi proposta uma atividade de Modelagem Matemática, adaptando-se um problema clássico do cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real, para alunos do curso de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia de uma Universidade Pública paranaense. A realização da atividade demandou algumas semanas de trabalho fora da sala de aula e foi concluída com uma apresentação oral por parte dos alunos, na intenção de ensejar um diálogo sobre o conteúdo de máximos e mínimos locais de funções de uma variável real e suas aplicações.

Com essa proposta, um grupo de alunos apresentou uma conjectura que extrapolou os conhecimentos matemáticos corriqueiramente sugeridos pelos livros-texto ao abordarem esse problema. Essa experiência se mostrou uma possibilidade de conhecer e constituir conhecimentos, desenvolvendo, assim, capacidades de fazer matemática e, a ela, dar sentido, conforme relatam os sujeitos:

> ***Relato dos sujeitos:*** *o experimento de otimização de recursos possibilitou o estudo e a compreensão dos conceitos e das regras de derivação, com ênfase na área de variação de grandezas, onde observou-se os pontos máximo e mínimo da função resultante do cálculo realizado para construir a caixa com seu maior potencial de volume, de modo que evite ao máximo o desperdício do material utilizado. Desse modo, podemos constatar a importância da aplicação de derivadas no desenvolvimento das ciências da engenharia, em especial, na resolução de problemas de otimização.*

À vista disso, a experiência se mostrou exitosa e, também, solo fértil para o

[4] Ao nos referirmos a constituição do conhecimento matemático, dizemos dos conhecimentos constituídos pelos sujeitos da vivência enquanto conteúdos matemáticos a serem aprendidos, e não a produção de conhecimentos cientificamente novos no campo da matemática.

empreendimento dos processos de Modelagem Matemática e, por isso, foi tomada como ensejo para esse texto, cujo objetivo é expor a experiência vivida com a atividade de Modelagem Matemática e as reflexões que disso se abriram ao enfocarmos os conhecimentos matemáticos emergentes, bem como os modos que foram constituídos.

Ao enfocar que conhecimentos matemáticos são constituídos pelos alunos do curso de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia e como se constituíram com uma atividade de Modelagem Matemática, encontramos naquilo que os sujeitos expressaram ao descreverem o vivido, uma oportunidade de compreensão. De acordo com Paulo e Silva (2011), a descrição, quando feita "pelo próprio sujeito da vivencia (sic), já carrega em sua estrutura ou em sua forma de apresentação, a hermenêutica, na medida em que se auto-interpreta (sic) para expor-se" (PAULO; SILVA, 2011, p. 4) e serve como fonte de conhecimento ao professor que, em sala de aula, atua na postura fenomenológica, como foi o caso.

Dizer que a postura didática assumida na condução da atividade foi fenomenológica, significa que houve uma abertura para o outro; um cuidado com as possibilidades de ser, o aluno, um sujeito no ambiente universitário; uma preocupação com os modos de ser do aluno em um ambiente enxertado de aspectos históricos, culturais, sociais e políticos e, por isso, "consideramos a Educação em toda a sua complexidade" (MONDINI; MOCROSKY; PAULO, 2018, p. 153).

Isso implica compreender a construção do conhecimento e a construção da realidade como fenômenos dados em um mesmo movimento – o de existir – e ver "as atividades nas dimensões temporal e cultural, nas quais elas significam e fazem sentido" (MONDINI; MOCROSKY; PAULO, 2018, p. 153). Sem impor verdades absolutas, o trabalho pedagógico fenomenológico trabalha ao nível do real vivido abrindo-se para "o sentido e o significado mundano das teorias, das ideologias e das expressões culturais e históricas" (MONDINI; MOCROSKY; PAULO, 2018, p. 153).

O conteúdo deste trabalho e o modo que o estruturamos se aproxima do estudo de Mondini, Mocrosky e Paulo (2018), que apresenta as possibilidades de constituição de conhecimentos matemáticos relacionados ao cálculo diferencial e integral, o sentido do constituído e a potencialidade da Investigação Matemática com o auxílio de *software* para esse fim. Todavia, dele se diferencia à medida que, para além de expor o processo e as possibilidades de constituição de conhecimento, enfatizamos e refletimos sobre o conhecimento matemático emergente de uma atividade de Modelagem Matemática e os modos que foram constituídos. Dessas considerações preambulares sobre o trabalho, expomos a concepção de Modelagem

Matemática assumida para o planejamento e condução da atividade que apresentamos.

Sobre a concepção de Modelagem Matemática assumida

A História da matemática nos mostra que o desenvolvimento da matemática se deu a partir da necessidade de solucionar problemas práticos relativos à diferentes épocas e contextos. À vista disso, vincular a matemática à atividade humana de constituição do conhecimento no processo de ensino e aprendizagem, é valorizar sua própria história e contribuir para o enfraquecimento de visões platonistas acerca dessa ciência. A Modelagem Matemática em sala de aula tem se mostrado solo profícuo para isso.

Em linhas gerais, a Modelagem Matemática aborda, por meio da matemática, situações advindas de outras realidades não matemáticas, e empresta esquemas explicativos da Matemática Aplicada para se fundamentar na Educação Matemática, sem ser, por ela, determinada. Nesse sentido, funciona como uma estratégia para analisar, explicar e entender a realidade de fenômenos biológicos, físicos, químicos, sociais, culturais e outros.

No âmbito da Educação Matemática, Almeida, Silva e Vertuan (2012) nos dizem que "uma atividade de Modelagem Matemática tem em uma situação problemática a sua origem e tem como característica essencial a possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à matemática" (p. 15). Em termos operacionais, dada uma situação inicial (problemática), os autores esquematizam o trabalho pedagógico com a Modelagem Matemática nas fases de interação, matematização e resolução, interpretação de resultados e validação, as quais caracterizam "um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias do sujeito em relação a um problema" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15).

Tal como os lemos e interpretamos, a fase da inteiração é relativa ao primeiro contato com a situação problemática, é o ato de inteira-se, de informar-se sobre o problema proposto para, então, buscar dados e informações úteis. A fase da matematização e resolução consiste na formulação de hipóteses que auxiliem na tradução do problema para a linguagem Matemática, isto é, na elaboração de um modelo matemático que o explique, que fomente prováveis soluções e previsões. Por fim, na fase de interpretação de resultados e validação, há a avaliação do conhecimento matemático constituído e respectivas aplicações dos procedimentos utilizados, bem como a comunicação disso aos pares.

Nesta perspectiva, a Modelagem Matemática se configura como uma atividade disparada com uma situação problemática real, caminhando para a matematização e a resolução, culminando na validação e interpretação de resultados encontrados, ou seja, a Modelagem Matemática é uma atividade desenvolvida com "um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias do sujeito em relação a um problema" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15).

De acordo com Almeida, Fatori e Souza (2010), no contexto de ensino e aprendizagem com a Modelagem Matemática, o processo de obtenção e interpretação do modelo, bem como os conteúdos matemáticos que com ele emergem, assume fundamental importância. Naquilo que concerne ao modelo, Almeida, Silva e Vertuan (2012) nos dizem que ele é "uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam" (p. 13). Na vivência aqui relatada, consideramos que o protótipo da caixa exposto com a Figura 1, o gráfico exposto com a Figura 2, as informações expostas com o Quadro 1 e a expressão algébrica $V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$ e suas restrições, são diferentes modos que os sujeitos utilizaram para representar a situação problemática inicial e, portanto, se constituem modelos matemáticos.

Em conformidade com Almeida, Silva e Vertuan (2012) e com Almeida, Fatori e Souza (2010), Schrenk e Vertuan (2022) entendem a Modelagem Matemática em sala de aula "*como uma prática pedagógica, realizada no âmbito de um grupo, que tem como objetivo colocar os estudantes em movimento de investigação de uma situação aberta, não necessariamente matemática, com recursos matemáticos (conceitos, estratégias e modelos)*" (p. 221, grifos dos autores).

Alinhados às ideias expostas, a experiência vivida com a Modelagem no ensino de cálculo diferencial e integral de funções de uma variável, aqui relatada e refletida, encaminhou-se de modo que, aos alunos, foi dada a oportunidade de indagarem uma situação real por meio da matemática, cujos conceitos e ideias foram se fazendo com o desenvolvimento da atividade. Nesse sentido, com os autores supracitados, percebemos a Modelagem Matemática como uma prática pedagógica que oportuniza a atribuição de sentido e a compreensão da realidade com a matemática e, ao revés, a compreensão da matemática com a realidade. Os desdobramentos que disso se abriram, em termos dos conhecimentos matemáticos construídos e dos modos constituintes, é o conteúdo da próxima seção.

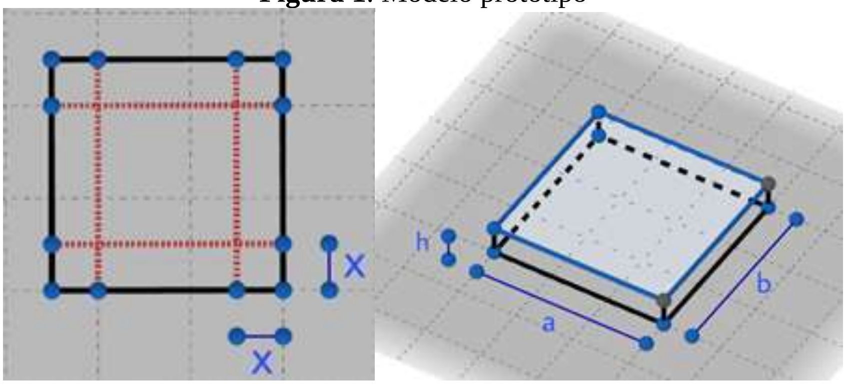
Uma exposição analítica sobre a Modelagem Matemática realizada

O exposto nesta seção deriva da nossa leitura e compreensão do relatório de aula apresentado pelos sujeitos da vivência. Portanto, nosso interesse, aqui, reside na exposição dos modos que os sujeitos mostraram lidar com o problema proposto, bem como os conhecimentos matemáticos construídos. Nesse sentido, o que expomos procede por análise do feito por outros sujeitos, mas que por nós foi interpretado e descrito objetivamente; por isso, é uma exposição analítica. Dito de outro modo, o destaque desta seção está na forma como os conhecimentos matemáticos foram se construindo e aparecendo no processo da solução do problema.

A situação proposta foi adaptada do clássico problema[5] de otimização volumétrica para uma caixa sem tampa de base quadrada, comumente contido nos livros-texto voltados à disciplina de cálculo diferencial e integral de funções de uma variável, e assim foi enunciada: considere uma lâmina quadrada e, a partir dela, construa uma caixa, sem tampa, de modo que o volume suportado pela caixa seja o máximo.

Ao buscarem por modos de construir a caixa nas condições propostas, o relatório tomado como material de análise deste trabalho mostra que os sujeitos encontraram em Stewart (2013) a sugestão de retirar uma medida quadrada e igual dos quatro vértices da lâmina e dobrar as laterais restantes a um ângulo de 90º, conforme mostra a Figura 1 por eles construída, onde x representa a medida retirada em cada lado da lâmina.

Figura 1: Modelo protótipo



Fonte: relatório de aula.

Em Costa et al. (2012, p. 153), os sujeitos buscaram compreender o volume de um paralelepípedo e assim o enunciaram: "O volume V de um paralelepípedo retângulo de arestas a, b e c é [...] dado pelo produto da área da base pela altura". Aplicando essa definição de volume ao paralelepípedo que modela a caixa a ser construída (Figura 1), argumentaram que se pode representar o seu volume por $V = A_b \times h$, tal que $a \times b$ denota a área da base, instituído

[5] Em Leithold (1994), o problema é assim enunciado: "Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas a partir de pedaços de papelão com 12cm² cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Queremos encontrar o comprimento do lado do quadrado a ser cortado para obter uma caixa com maior volume possível" (p. 224).

como A_b e c refere-se à altura h.

Segundo o que interpretamos do relatório de aula, os valores das laterais a e b são conhecidos, no entanto, h é o valor que será determinado para encontrar o volume máximo da caixa. Notando que ao dobrar as laterais da lâmina, a medida x torna-se a altura da caixa, isto é, $h = x$ e, além disso, que a lâmina tem formato quadrado, o que implica em $a = b$, os sujeitos expressaram o volume do paralelepípedo quadrado como $V = A_b \times h$ e substituindo as respectivas medidas, construíram a Equação 1, que segue:

$V(x) = \big((a-2x)(a-2x)\big) \cdot x \leftrightarrow V(x) = a^2 \cdot x - 2x^2a - 2x^2a + 4x^3 \leftrightarrow V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$.

A Equação 1 é percebida pelos sujeitos como uma função que relaciona o volume da caixa em função da medida quadrada a ser retirada dos quatro vértices da lâmina. Além disso, perceberam que, para que x pertença ao domínio da função, existem algumas condições de existência, quais sejam: $i)\ x > 0$ e $ii)\ a - 2x > 0$. Essas condições, segundo os sujeitos, são decorrentes do fato de que x é a medida da altura da caixa e, desta forma, não pode ser menor ou igual a zero; do contrário, não haveria possibilidades de cortar a caixa. Ademais, cada lado da lâmina é cortado em x unidades duas vezes, de modo que, o comprimento da caixa deve ser maior que zero e igual a $a - 2x$.

Preocupando-se com a estética da caixa, os sujeitos testaram alguns protótipos, retirando dos quatro vértices da lâmina, quadrados com lados de medidas inteira a fim de facilitar a construção da caixa. Os valores testados seguem no Quadro 1.

Quadro 1: Valores testados para os lados da lâmina e respectivas medidas da altura da caixa

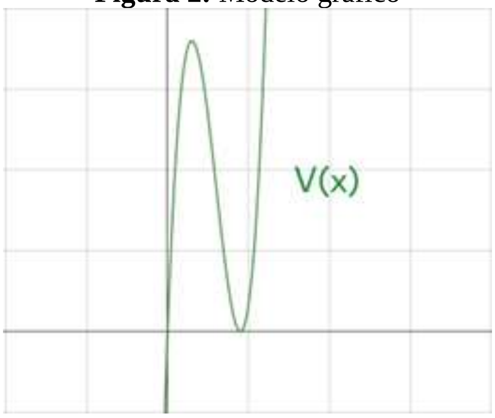
Medidas dos lados da lâmina quadrada (cm)	6	12	18	24	30	36	42	48	54
Medidas dos lados da área quadrada retirada (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fonte: relatório de aula.

Com essas tentativas, notaram que, para caixas de base quadrada, a medida dos lados da lâmina era seis vezes maior que a medida dos lados da região quadrada retirada. Tinham, então, uma conjectura: se a medida dos lados da lâmina quadrada for múltipla de 6, então, a medida da altura da caixa vai assumir números naturais. Porém, nesse momento, não investigaram de modo analítico a sua veracidade, e mostraram estarem mais preocupados com a resolução do problema proposto.

Com os testes realizados e expostos no Quadro 1, os sujeitos optaram por construir uma caixa com uma lâmina de dimensões *18 cm x 18 cm*. Para tanto, perceberam que era preciso encontrar a medida de x a ser retirada, de modo que, o volume suportado pela caixa fosse o máximo, o que requereu encontrar a função modelo da situação. Com a Equação 1, considerando $a = 18$, o modelo algébrico por eles encontrado foi $V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$. Considerando as condições i e ii, e as possibilidades expostas com o Quadro 1, observaram que, a medida x que correspondente ao lado da área quadrada a ser retirada dos quatro vértices deveria cumprir a condições de $x > 0$ e $18 - 2x > 0 \rightarrow x < 9$ e, portanto, $0 < x < 9$. Com isso, ilustraram graficamente o modelo e suas restrições de domínio, e expuseram com a Figura 2.

Figura 2: Modelo gráfico



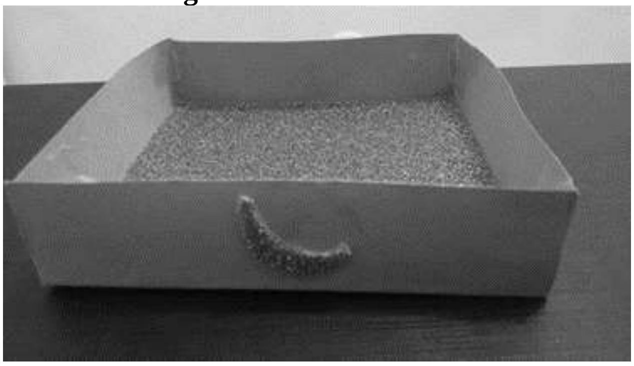
Fonte: relatório de aula.

A partir disso, os sujeitos relataram:

Relato dos sujeitos: *O máximo volume é dado pela ordenada do ponto mais alto da curva que representa o modelo, chamado de ponto máximo local. Stewart (2013) define o ponto de máximo local de uma função f como sendo o número $f(c)$ que satisfaz $f(c) \geq f(x)$ quando o valor de x está suficientemente próximo do valor de c. Ainda segundo Stewart (2013, p. 250), "nos pontos de máximo [...] as retas tangentes são horizontais e, portanto, cada uma tem inclinação 0. Sabemos que a derivada é a inclinação da reta tangente; assim, parece que $f'(c) = 0$". Todavia, se c é um número pertencente ao domínio da função f e se $f'(c) = 0$ e, além disso, se $f'(c)$ não existir, então c é um ponto crítico de f (LEITHOLD, 1994). À vista disso, segue como consequência que para a existência de um ponto de máximo ou mínimo local em um ponto c é necessário que c seja um ponto crítico. Salvaguardadas as diferenças de notação, $V(x)$ é uma função polinomial e, portanto, diferenciável. Disso segue que $V'(x) = 3 \times 4x^{3-1} - 2 \times 72x^{2-1} + 1 \times 324x^{1-1} = \frac{12x^2 - 144x + 324}{12} = x^2 - 12x + 27$ (Equação 2). Ao igualar a Equação 2 a zero, obtém-se uma equação quadrática, cuja* *solução pode ser obtida pelo método*[6] *resolutivo para equações do segundo grau. Para a equação* $x^2 - 12x + 27 = 0$ *, segue que* $x_1 = 3$ *e* $x_2 = 9$ *são soluções e, portanto, são pontos críticos e possíveis pontos de máximo ou mínimo. Segundo Stewart (2013), se* f'' *for contínua nas proximidades do ponto c e se* $f'(c) = 0$ *e* $f''(c) < 0$*, então* f *tem um máximo local em* c*. Do fato de* $V'(3) = 0$ *e* $V'(9) = 0$ *e que* $V''(x) = 2x - 12$ *é contínua em todos os números reais por ser uma função polinomial, podemos tomar uma decisão acertada sobre o ponto máximo. Para isso, fizemos* $V''(3) = 2 \times 3 - 12 = -6$ *e* $V''(9) = 2 \times 9 - 12 = 6$*. Note-se que somente para* $c = 3$*, as condições* $f'(c) = 0$ *e* $f''(c) < 0$ *são satisfeitas, o que nos garante que nele,* $V\ (x)$ *tem um ponto de máximo local. Desse modo é possível concluir que se forem retiradas regiões quadradas com* $3\ cm$ *de lado de cada vértice de uma lâmina quadrada de dimensões* $18\ cm \times 18\ cm$*, é possível construir uma caixa cujo máximo volume suportado é* $432\ cm^3$*, conforme calculamos:* $V(3) = 4 \times (3)^3 - 4 \times 18 \times (3)^2 + 18^2 \times (3) = 432\ cm^3$.

Após esse relato, os sujeitos apresentaram a imagem da caixa construída, ilustrada na Figura 3.

Figura 3: Caixa construída



Fonte: relatório de aula.

A conjectura levantada pelos sujeitos no início da atividade e que ainda não tinha sido abordada analiticamente, foi retomada. Antes de entregar o relatório de aula final, os sujeitos a apresentaram para o professor e solicitaram auxílio para comprová-la ou refutá-la. Com o diálogo estabelecido com o professor, intuíram que a relação entre a medida dos lados da lâmina quadrada e a medida da altura da caixa poderia estar entre um dos pontos críticos x_1 ou x_2 de

[6] Dada uma equação de segundo grau com a forma $ax^2 + bx + c = 0$, suas solução podem ser encontradas pela expressão $x = -b \pm \sqrt{\Delta}/2a$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, para valores reais de a, b, c e Δ. Se $\Delta > 0$, há duas raízes reais e distintas; se $\Delta = 0$, há duas raízes reais e iguais; e se $\Delta < 0$, há duas raízes complexas (NASCIMENTO, 2015).

$V'(x)$ e os lados da lâmina inicial. Buscando meios de validá-la, conforme relatam, assim procederam:

> ***Relato dos sujeitos:*** *Consideramos uma lâmina quadrada com lados de medidas inteiras a, dos quais retiram-se uma medida $2x$, sendo x um número natural conforme Figura 1. Então tem-se que $V(x) = (a-2x)^2 \times x \leftrightarrow V(x) = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$, ou equivalentemente $y = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$ (Equação 3). Derivando implicitamente a Equação 3 em função de x e com a um número real, obtemos $y' = a^2 - 8ax + 12x^2$. Recordando, com Stewart (2013), que para encontrar os valores de máximo ou de mínimo local é preciso encontrar os pontos tais que $y' = 0$, temos como consequência a equação $a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$, cujas soluções, encontradas pela expressão referenciada na nota 6, são $x_1 = \frac{a}{2}$ e $x_2 = \frac{a}{6}$, ou seja, $a = 2x$ ou $a = 6x$. À vista disso, concluímos que se $a = 2x$ o volume da caixa é nulo, restando apenas a possibilidade de $a = 6x$.*

Com isso, compreendemos que os sujeitos concluíram pela veracidade da conjectura e, com o auxílio do professor, assim a enunciaram:

> ***Relato dos sujeitos:*** *seja $x \in N$ a medida dos lados da região quadrada a ser retirada da lâmina quadrada, e y a medida dos lados da lâmina, então $y = 6.x$.*

Dessa exposição, que apresentou os conhecimentos matemáticos emergentes do problema de otimização volumétrica de caixas de base quadrada, o conhecimento matemático emergente para além da solução do problema e o modo que foram constituídos, trazemos, na próxima seção, algumas reflexões sobre aquilo que explicitaram os sujeitos que vivenciaram a atividade de Modelagem Matemática.

Reflexões sobre o relatado

Ao nos voltarmos para o descrito pelos sujeitos que vivenciaram a atividade de Modelagem Matemática e perguntarmos pela constituição do conhecimento matemático, nos é possibilitado perceber o alcance que a atividade teve no tocante aos conteúdos e aos processos matemáticos envolvidos. Com um olhar retrospectivo, vemos que a atividade corroborou com a mobilização e construção de conhecimentos matemáticos em diferentes níveis, diferenciados aqui em três grupos.

O grupo 1 abrange os conhecimentos que, em tese, já haviam sido construídos em algum momento da vida escolar dos sujeitos; os conhecimentos ditos prévios. O grupo 2 é constituído pelos conhecimentos vislumbrados, a priori, pelo professor e comumente relacionados com o problema, ao ser abordado em sua forma clássica. E, o grupo 3, é formado pelos conhecimentos não vislumbrados à partida pelo professor e, tampouco, emergentes com a abordagem clássica do problema. Para fins de elucidação, expomo-los no Quadro 2.

Quadro 2: Conhecimentos matemáticos emergentes da atividade de Modelagem Matemática

Grupos	Descrição	Conhecimentos Matemáticos
1	Conhecimentos prévios dos sujeitos mobilizados no decorrer da atividade.	• Equação • Função • Raízes de função • Área • Volume • Produtos notáveis • Operações aritméticas • Derivadas • Método para obter as raízes de uma função
2	Conhecimentos, em tese, novos para os sujeitos, e relacionados com o objetivo da atividade.	• Pontos críticos de funções de uma variável real • Pontos de máximos locais de funções de uma variável real • Relação entre o ponto de máximo local e a derivada primeira
3	Conhecimentos, em tese, novos para os sujeitos e que extrapolaram o objetivo da atividade.	• Derivadas implícitas • Proposição: seja $x \epsilon N$ a medida dos lados da região quadrada a ser retirada da lâmina quadrada, e y a medida dos lados da lâmina, então $y = 6{\cdot}x$.

Fonte: os autores.

Os conhecimentos que constituem os grupos 1 e 2 reforçam a atividade de Modelagem Matemática como alternativa pedagógica que pode “algumas vezes [...] ser usada para introduzir conceitos matemáticos, outras vezes com a finalidade de aplicar conceitos já conhecidos” (BLUM; NISS, 1991 apud ALMEIDA; FATORI; SOUZA, 2010, p. 7). No que tange ao grupo 1, a associação do problema em estudo com conhecimentos já construídos pelos sujeitos “desencadeia a atribuição de sentido e a compreensão dos conceitos matemáticos” (ALMEIDA; FATORI; SOUZA, 2010, p. 15).

O grupo 3 revela que, mesmo que o problema carregue uma intencionalidade pedagógica, o modo como foi estruturado – pretensamente aberto e desvinculado de uma estrutura interrogativa – o afastou da tradicionalidade com que é apresentado e abriu espaços para os sujeitos vislumbrarem outras descobertas e construírem conhecimentos não necessariamente relacionadas à sua solução e, em partes, não tratados pelos livros-texto voltados ao cálculo diferencial e integral.

Aportados em Almeida, Silva e Vertuan (2012), Schrenk e Vertuan (2022) nos dizem que

> [...] a Modelagem Matemática como prática pedagógica se alinha ao entendimento de que o ensino não visa apenas a obtenção de um produto final, mas às oportunidades de aprendizagem suscitadas no desenvolvimento de uma

> atividade, momentos em que os estudantes utilizam tanto de conhecimentos já estudados, quanto os ainda não vistos, de modo que o estudante consiga aprender o que ainda não sabe e consolidar o que já estudou, de forma contextualizada e com sentido para ele (p. 212-213).

Contudo, a emergência do grupo 3 mostra que o conjunto de conhecimentos matemáticos emergentes dessa atividade não ficou limitado entre a situação inicial e a situação final, extrapolando para outra situação. Isso mostra, por sua vez, a imprevisibilidade do alcance de uma atividade de Modelagem Matemática que, no ambiente de sala de aula, não se restringe à Matemática Aplicada, tampouco se encaminha, necessariamente, para a construção de um modelo matemático, nem para a solução do problema. O aluno é convidado à problematização e à investigação, criando perguntas, selecionando, organizando e manipulando informações em face de situações reais. Ainda que os sujeitos da vivência tenham encontrado um modelo matemático exposto em linguagem algébrica para modelar a situação, ele não limitou a atividade que contemplou outros tipos de modelo (protótipo e gráfico), os conteúdos que com a resolução do problema foram emergindo e a reflexão sobre o constituído.

Ao olharmos para o conhecimento matemático constituído, nos atentamos, também, para o modo pelo qual o constituído se revelou. Com aquilo que analiticamente expusemos, compreendemos que, nessa atividade de Modelagem Matemática, os sujeitos mostraram constituir conhecimentos recorrendo à tecnologia digital, à literatura, à observação, à experimentação, à demonstração e a um pensar que se configurou, em partes, indutivo. Além disso, ainda que timidamente, o diálogo dos sujeitos com o professor também se mostrou um modo de constituir conhecimentos.

O pensar indutivo aparece na construção do modelo algébrico ($V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$) e da conjectura. A observação e a experimentação constituíram as ações iniciais da atividade, por meio das quais os sujeitos testaram alguns protótipos para a construção almejada e conjecturaram sobre a relação entre a medida do lado da região a ser retirada da lâmina inicial e a medida do lado da lâmina inicial. A demonstração foi o modo pelo qual os sujeitos e o professor encontraram para validar o prognóstico estabelecido, o qual utilizou os conhecimentos construídos com a atividade (pontos críticos, pontos de máximo e de mínimo), conhecimentos anteriormente construídos (raízes de função, equação), bem como conhecimentos a construir (derivadas implícitas).

Naquilo que concerne à literatura, inferimos que os conhecimentos nela sistematizados ampararam a busca pela solução do problema e, em certo sentido, orientaram o como proceder. Esse aporte na literatura não é prejudicial ao processo de conhecer e constituir conhecimentos, porém, em se tratando especificamente da literatura sobre o cálculo diferencial e integral, Diogo (2015, p. 26) nos diz que, comumente, ela "não convida o aluno ao diálogo, nem à descoberta, mas impõe um primado, sustentado pelo rigor e pela lógica". Essa afirmação evidencia uma restrição e uma obediência do fazer do aluno ao livro-texto consultado, que se torna explícita na atividade realizada, quando os sujeitos expõem somente os procedimentos que solucionam o caso particular do problema de otimização volumétrica, abandonando o caso geral, inicialmente considerado.

Além disso, utilizaram recursos tecnológicos digitais para construir diferentes modelos, conforme mostram as Figuras 1 e 2. Nesse sentido, compreendemos que a tecnologia digital serviu como aporte para o pensar indutivo, para o estabelecimento de relações entre os modelos protótipo, gráfico e algébrico, bem como para a visualização do comportamento do fenômeno modelado. Segundo Silva e Vertuan (2018), essa recorrência à tecnologia digital se dá de modo natural, uma vez que os sujeitos da vivência aqui relatada são seres tecnológicos e "recorreram aos recursos de que dispunham, não apenas por uma necessidade advinda da resolução do problema, mas por ser esse o meio que utilizam para lidar com problemas quando as atividades escolares não os podam e impedem" (p. 332).

Sobre o uso de tecnologias digitais em práticas pedagógicas com a Modelagem Matemática, Silva e Vertuan (2018) advertem ser um indicativo de mudança de paradigma nos modos de ensinar e aprender, que impõe a necessidade de reconhecer que "o 'fazer Matemática' [...] relaciona-se, intimamente, à liberdade de os alunos recorrerem e utilizarem instrumentos e meios de pensar, muitas vezes, para além do que dominam/conhecem os docentes" (p. 332). Isso aponta para um desapego do aluno em relação ao professor que, historicamente tem se reforçado com práticas unilaterais, nas quais a figura do professor incide sobre a figura dos alunos que escutam, memorizam e repetem.

Nesse sentido, a Modelagem Matemática se mostrou emancipadora. Emancipar significa tornar independente, libertar (FERREIRA, 2010). Pode-se dizer que emancipado é aquele que não está mais preso pelo outro e, portanto, traz a sensação de alívio. Ao passo que a Modelagem Matemática assim se caracteriza, liberta os alunos de toda ação externa que, porventura, possa os condicionar e mostra-lhes possibilidades outras. Na experiência aqui relatada, ao possibilitar certa liberdade nos modos de proceder e pensar, permitiu aos sujeitos expressar suas ideias, testá-las e defendê-las racionalmente, ações que reverberam em aprender.

Assim, compreendemos que a vivência com a Modelagem Matemática foi capaz de despertar a autonomia matemática e o pensamento crítico, e acreditamos que, à medida que isso se torne recorrente nas aulas de matemática, pode reverberar em outras instâncias da vida dos sujeitos, que deixam de ser apenas alunos e despertam para a cidadania. Caso assim seja, a Modelagem Matemática apresenta aos alunos uma matemática que pode ser vista

> [...] como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social [...] [mostrando] que os fundamentos (da matemática) mergulham, tanto como os de outro qualquer ramo da ciência, na vida real (CARAÇA, 1984, p. xxiii, inserção nossa).

À guisa de conclusão, avaliamos positivamente a atividade de Modelagem Matemática realizada, porque ao se estruturar aberta, não limitou a construção do conhecimento matemático à solução do problema ou à construção de um modelo matemático, mas abriu outras possibilidades, distanciando-se dos modos usuais que os conhecimentos matemáticos são apresentados nos livros- texto ao abordarem o problema proposto, em sua forma clássica.

Referências

ALMEIDA, L. M. W; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W; FATORI, L. H.; SOUZA, L. G. S. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática. **Revista Ciência e Tecnologia**, v. 10, n. 16, 2010.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 1ª Edição. Lisboa: Sá da Costa, 1984.

COSTA, D. M. B. et al. Geometria espacial métrica. In COSTA, D. M. B.; TEIXEIRA, J. L.; SIQUEIRA, P. H.; SOUZA, L. V. **Elementos de Geometria**: Geometria Plana e Espacial. 3 ed. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, p. 150-172, 2012. Disponível em: <http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/elementos.pdf>. Acesso em 5 jul. 2022.

DIOGO, M. G. V. S. **Uma Abordagem Didático-Pedagógica do Cálculo Diferencial e Integral I Na formação de professores de Matemática.** 2015, 256p. Tese (doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

FERREIRA, A. B. O. **Mini Aurélio:** o dicionário da Língua Portuguesa. 8 ed. Curitiba: Positivo, 2010.

LEITHOLD, L. **Cálculo com Geometria Analítica**. 3 ed. São Paulo: Harbra & Row do Brasil, 1994.

MONDINI, F.; MOCROSKY, L. F.; PAULO, R. M. O ensino de Cálculo Diferencial e

Integral I: possibilidades de investigação. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 23, n. 59, p. 150-162, 2018.

NASCIMENTO, D. A. **Métodos para Encontrar Raízes Exatas e Aproximadas de Funções Polinomiais até o 4º Grau**. 81 f. Dissertação (mestrado profissional em matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

PAULO, R. M.; SILVA, R. H. G. Aulas Investigativas e a formação do professor de Matemática. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13, Recife. **Anais** [...] Brasil, p. 1-11, 2011.

SCHRENK, M. J.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática como Prática Pedagógica: Uma Possível Caracterização em Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 24, n. 1, p. 194-224, 2022.

STEWART, J. **Cálculo**. Vol. 1. 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Recebido em: 16 de julho de 2022
Aprovado em: 23 de agosto de 2022