УДК 519.95

Е.В. Чаусова

ДИНАМИЧЕСКАЯ СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ СПРОСА И УСТАРЕВАНИЕМ ЗАПАСОВ В УЗЛАХ СЕТИ

Рассматривается динамическая сетевая модель системы управления запасами с интервально заданным спросом и устареванием запасов. Для анализа и расчета оптимальной стратегии управления применяется аппарат интервальной математики. С привлечением полной интервальной арифметики Каухера получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления, достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления. Найдена оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Разработан вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления. Рассмотрен численный пример.

Динамические сетевые модели описывают широкий класс систем управления запасами [1, 2]. В качестве примера можно привести системы снабжения, производства-распределения, транспортные, информационные, финансовые и другие системы. Узлы сети задают виды и размеры управляемых запасов, а дуги – управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки перераспределяют ресурсы между узлами сети, возможно, перерабатывая их, и планируют поставки извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы в узлах сети, который формируется как со стороны других узлов, так и внешнего окружения.

Проблеме оптимизации динамических потоков в сети посвящено большое количество работ (см., к примеру, [1, 2] и обширную библиографию к ним). Современная теория предлагает алгоритмы оптимального управления как детерминированными, так и стохастическими динамическими сетями. Однако детерминированные модели не учитывают априорную неопределенность, свойственную реальным системам управления запасами. Вероятностные – требуют точного задания вероятностных характеристик неопределенных параметров системы (факторов неопределенности) и довольно сложны в смысле получения численных результатов. При этом во многих случаях нет основания или недостаточно информации, чтобы рассматривать факторы неопределенности как случайные (то есть адекватно описываемые теоретико-вероятностными моделями). Это приводит к необходимости учета неопределенности нестохастической (или, в общем случае, неизвестной) природы.

Интересный подход, основанный на концепции «неизвестных, но ограниченных» воздействий (unknown-but-bounded inputs), предлагается в работах Ф. Бланчини, Ф. Ринальди и В. Уковича [3–5]. В них рассматриваются динамические сетевые модели систем управления запасами в предположении, что неизвестный спрос принадлежит заданному множеству. Такой подход приводит к минимаксным игровым постановкам и гарантированным решениям в смысле заданного критерия. Авторы [3–5] используют аппарат теории множеств. Однако теоретико-множественное представление результатов приводит к трудностям при проверке условий существования оптимальных стратегий управления и вычисления их параметров. Кроме того, предложенные в этих работах модели не учитывают возможное устаревание запаса в узлах сети (порчу, естественную убыль, моральный износ и т.д.).

В работах [6–10] неопределенность спроса в системе управления запасами предлагается моделировать в виде интервала, в границах которого спрос произвольным образом принимает свои значения. Нижнюю и верхнюю границы изменения возможных значений спроса всегда можно оценить с достаточной степенью достоверности по статистическим данным или руководствуясь накопленным опытом и интуитивными предположениями. При этом для анализа и расчета оптимальной стратегии управления запасами используется аппарат интервальной математики.

В настоящей работе рассматривается динамическая сетевая модель системы управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и устареванием запаса в узлах сети. С привлечением полной интервальной арифметики Каухера определяются необходимые и достаточные условия существования допустимого управления и достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления. Оценивается скорость сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Разрабатывается вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления запасами. Предлагается численный пример.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим систему управления запасами в дискретном времени (с периодическим контролем уровня запасов), представленную в виде динамической сети. Динамика сети описывается следующим рекуррентным соотношением:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad t \ge 0, \qquad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояний системы, i-я компонента которого задает уровень запаса на i-м узле сети; $u(t) \in R^q$ – вектор управляющих воздействий (управление), компоненты которого представляют управляемые потоки в сети в момент времени t; $d(t) \in R^m$ – вектор неуправляемых воздействий (спрос), компоненты которого описывают неуправляемые потоки в сети в момент времени t; структура сети определяется структурой матриц $B \in R^{n\times q}$, $E \in R^{n\times m}$; диагональная матрица $A = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)$, $0 < \alpha_i \le 1$, $i = \overline{1,n}$, учитывает устаревание запаса в узлах сети.

Относительно спроса $d(t)$ известно лишь то, что он произвольным образом принимает значения в заданном интервале

$$d(t) \in \boldsymbol{D}, \quad t \ge 0, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{D} \in IR^m$, $\boldsymbol{D} = [\underline{D}, \overline{D}]$, $\boldsymbol{D} \ge 0$.

На состояния системы $x(t)$ и управления $u(t)$ накладываются ограничения, которые обусловлены возможностями системы:

$$x(t) \in \mathrm{X}, \quad t \ge 0; \qquad (3)$$

$$u(t) \in \boldsymbol{U}, \quad t \ge 0, \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{X} \in IR^n$, $\boldsymbol{X} = [0, \overline{X}]$; $\boldsymbol{U} \in IR^q$, $\boldsymbol{U} = [0, \overline{U}]$.

Здесь и далее используется стандартная система обозначений [16]. Интервалы и другие интервальные величины (векторы, матрицы) выделяются жирным шрифтом. Арифметические операции с интервальными величинами рассматриваются как операции соответствующих интервальных арифметик: классической интервальной арифметики IR [11–13], где IR есть множество всех правильных интервалов $IR = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x} \le \overline{x},\ \underline{x}, \overline{x} \in R\}$, либо полной интервальной арифметики Каухера KR [14, 15], где $KR = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in R\}$ – расширенное множество интервалов. Под векторами (точечными или интервальными) всюду понимаются вектор-столбцы.

Определение 1. Будем называть функцию $u(t)=U(x(t), t)$, $u(t)\in \boldsymbol{U}$, допустимым на интервале $\boldsymbol{X}$ управлением для состояния $x(t)$ в момент времени t, $t \ge 0$, если для любого значения спроса $d(t)\in \boldsymbol{D}$ выполнено включение $x(t+1)\in \boldsymbol{X}$,, где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1).

Определение 2. Будем называть стратегию $\Phi=\{u(t), t \ge 0\}$, $u(t)\in \boldsymbol{U}$, допустимой на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегией управления для начального состояния $x(0)\in \boldsymbol{X}$, если $u(t)$ является допустимым на интервале $\boldsymbol{X}$ управлением для состояния $x(t)$ в момент времени t, $t \ge 0$, где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1).

Определение 3. Будем называть $\hat{x}, \hat{x}\in \boldsymbol{X}$, допустимым уровнем запаса в сети, если для любого начального состояния $x(0)\in \boldsymbol{X}$ существует допустимая на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегия $\Phi\in\Phi(x(0))$ такая, что $x(t)\in \mathrm{X}(0,\hat{x})$, $t \ge \tau \ge 0$, где интервальнозначная [11–13] функция $\boldsymbol{X}(a, b) = [a, b]$ определена для любых $a \le b$, $a,b\in R^n$; $\Phi(x(0))$ – множество стратегий, допустимых на интервале $\boldsymbol{X}$ при начальном состоянии $x(0)\in \boldsymbol{X}$, а $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1).

Очевидно, что если для любого начального состояния $x(0)\in \boldsymbol{X}$ существует допустимая стратегия управления $\Phi\in\Phi(x(0))$, то $\overline{X}$ является допустимым уровнем запаса. Однако, как известно, при неоправданно высоком уровне запаса система несет потери от омертвления капитала в запасах и замедления его оборачиваемости. Поэтому необходимо найти оптимальный допустимый уровень запаса в сети $\hat{x}^*$, минимизирующий расходы системы на хранение запаса (максимальные возможные расходы за один период):

$$C(\hat{x}) = h'\hat{x}, \tag{5}$$

и стратегию управления запасами $\Phi^*\in\Phi(x(0))$, гарантирующую включение

$$x(t)\in \boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*), \quad t \ge \tau^* \ge 0, \tag{6}$$

где $h\in R^n$ – вектор затрат, $h \ge 0$, $h \ne 0$, i-я компонента которого представляет затраты на хранение единицы запаса в i-м узле сети; символ «'» (штрих сверху) означает транспонирование.

Стратегию $\Phi^*\in\Phi(x(0))$, удовлетворяющую (6), будем называть оптимальной допустимой стратегией управления для начального состояния $x(0)\in \boldsymbol{X}$, а время τ^* – скоростью сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса $\hat{x}^*$. При оптимальной стратегии управления Φ^* затраты системы за один период, начиная с момента времени τ^*, будут удовлетворять ограничению $C(x(t)) \le C(\hat{x}^*)$ для любого значения спроса $d(t)\in \boldsymbol{D}$, $t \ge \tau^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ДОПУСТИМОГО УРОВНЯ ЗАПАСА В СЕТИ

Терема 1 (о существовании допустимого управления). Для любого состояния системы $x(t)\in \mathbf{X}$ в момент времени t, $t \ge 0$, допустимое на интервале $\boldsymbol{X}$ управление $u(t)=U(x(t), t)$, $u(t)\in \boldsymbol{U}$, существует и определяется из включения

$$Ax(t) + Bu(t) \in \boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED}, \tag{7}$$

если и только если выполнены условия

$$\mathrm{widED} \le \mathrm{widX}; \tag{8}$$

$$\boldsymbol{ED} \in \{-BU\}, \tag{9}$$

где $\mathrm{wid}\,\mathbf{x} = \overline{\mathrm{x}} - \underline{\mathrm{x}}$ – ширина интервала $\mathbf{x}$; $\boldsymbol{ED}$ – интервал, полученный умножением вещественной матрицы $\boldsymbol{E}$ на интервальный вектор $\boldsymbol{D}$ [11–13]; opp $\mathbf{x} = [-\,\mathbf{x}, -\overline{\mathrm{x}}]$ есть интервал, противоположный к интервалу $\mathbf{x}$ [14, 15]; множество $\{-BU\}=\{x\in R^n \mid x = -Bu, u\in \boldsymbol{U}\}$.

Доказательство. Построим управление $u(t)$ в момент времени t в виде (7). Заметим, что включение (7) имеет смысл, если и только если выполнено условие (8). Действительно,

$$\underline{\mathrm{X} + \mathrm{oppED}} \le \overline{\mathrm{X} + \mathrm{oppED}} \Leftrightarrow \underline{X} - \underline{ED} \le \overline{X} - \overline{ED} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{ED} - \underline{ED} \le \overline{X} - \underline{X} \Leftrightarrow \mathrm{widED} \le \mathrm{widX}.$$

Покажем, что такое управление существует для любого $x(t)\in \boldsymbol{X}$. Из (7) имеем

$$\forall x(t)\in \boldsymbol{X}\ \exists u(t)\in \boldsymbol{U} \mid Ax(t) + Bu(t) \in \boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x(t)\in \boldsymbol{X}\ \exists u(t)\in \boldsymbol{U} \mid Ax(t) \in \boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED} - Bu(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x(t)\in \boldsymbol{X} \mid Ax(t) \in \boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED} + \{-BU\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x(t)\in \boldsymbol{X} \mid Ax(t) \in \{\boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED} - BU\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{AX} \subseteq \{\boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED} - BU\},$$

где $\boldsymbol{AX}$ есть интервал, полученный умножением диагональной матрицы A на интервальный вектор $\boldsymbol{X}$, множество

$$\{\boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED} - BU\} = \{x \in R^n \mid x = x_d - Bu,$$

$$x_d \in \boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED}, u \in \boldsymbol{U}\}.$$

Учитывая то, что $\boldsymbol{AX} \subseteq \boldsymbol{X}$ для матрицы A = $=\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $0 < \alpha_i \le 1$, $i = \overline{1, n}$, и интервального вектора $\boldsymbol{X} = [0, \overline{X}], \boldsymbol{X} \in IR^n$, имеем

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{AX} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED} + \boldsymbol{ED} \subseteq \boldsymbol{AX} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED} + \{-BU\} =$$

$$= \{\boldsymbol{AX} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED} - \boldsymbol{BU}\} \subseteq \{\boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED} - \boldsymbol{BU}\},$$

если и только если выполнено условие (9). Следовательно, управление $u(t)=U(x(t),t)$, $u(t)\in \boldsymbol{U}$, гарантирующее (7), существует для любого $x(t)\in \boldsymbol{X}$.

Покажем далее, что такое управление является допустимым на интервале $\boldsymbol{X}$. Действительно,

$$\forall x(t)\in \boldsymbol{X}\ \exists u(t)\in \boldsymbol{U} \mid Ax(t) + Bu(t) \in \boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x(t)\in \boldsymbol{X}\ \exists u(t)\in \boldsymbol{U} \mid Ax(t) + Bu(t) + \boldsymbol{ED} \subseteq \boldsymbol{X} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x(t)\in \boldsymbol{X}\ \exists u(t)\in \boldsymbol{U}\ \forall d(t)\in \boldsymbol{D} \mid Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \in \boldsymbol{X}.$$

По определению 1 управление $u(t)$ является допустимым на интервале $\boldsymbol{X}$ для состояния $x(t)\in \boldsymbol{X}$ в момент времени t, $t \ge 0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Интервал $\boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED}$ определяет уровень запаса, необходимого и достаточного для полного и своевременного удовлетворения спроса при выполнении ограничения (3). Логично предположить, что $\underline{\boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED}} \ge 0$. Это условие выполняется, если и только если $\underline{ED} \le 0$.

Следствие 1. Для любого начального состояния $x(0)\in \boldsymbol{X}$ допустимая на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегия управления $\Phi\in\Phi(x(0))$ существует, если и только если выполнены условия (8), (9). Доказательство легко получить с учетом определения (2).

Терема 2 (о виде оптимального допустимого уровня запаса). Оптимальный допустимый уровень запаса в сети $\hat{x}^*$, минимизирующий функцию затрат (5), имеет вид

$$\hat{x}^* = \overline{ED} - \underline{ED}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия существования допустимой на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегии управления (8), (9) и $\hat{x}\in \boldsymbol{X}$ – допустимый уровень запаса. Тогда по определению (3) для любого начального состояния $x(0)\in \boldsymbol{X}$ существует допустимая стратегия стояния $x(0)\in \boldsymbol{X}$ существует допустимая стратегия $\Phi\in\Phi(x(0))$ такая, что $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \in \in \mathrm{X}(0,\hat{x}),\ \ t\ge\tau-1\ge 0,$ для любого $d(t)\in\boldsymbol{D}$. Следовательно,

$$x(t+1) = Ax(t)+Bu(t)+\boldsymbol{ED}\in\boldsymbol{X}(0,\hat{x}),\quad t\ge\tau-1\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(t+1) = Ax(t)+Bu(t)\in\boldsymbol{X}(0,\hat{x})+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED},\ t\ge\tau-1\ge 0.$$

(Заметим, что здесь, в отличие от определения 3, $\tau\ge 1$. Однако, если $x(0)\in\boldsymbol{X}(0,\hat{x})$, то получаем $\tau\ge 0$.) Последнее соотношение имеет смысл, если и только если

$$\underline{\boldsymbol{X}(0,\hat{x})+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}}\le\overline{\boldsymbol{X}(0,\hat{x})+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\underline{ED}\le\hat{x}-\overline{ED}\Leftrightarrow\hat{x}\le\overline{ED}-\underline{ED}.$$

Учитывая то, что $\hat{x}\in\boldsymbol{X}$, получаем $\hat{x}\in[\overline{ED}-\underline{ED},\overline{X}]$ (в силу (8) этот интервал – правильный).

Далее, так как функция затрат (5) монотонно возрастает по $\hat{x}$, то для любого вектора $h\ge 0,\ h\ne 0$, минимум функции (5) доставляет $\hat{x}^*=\overline{ED}-\underline{ED}$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Для оптимального допустимого уровня запаса $\hat{x}^*$ вида (10) справедливо включение

$$\mathrm{wid}\boldsymbol{ED}\le\mathrm{wid}\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)\,. \qquad (11)$$

Допустим, что в некоторый момент времени τ^* состояние системы попало в интервал $\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$. Учитывая (11), можно применить теорему 1 для $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$. По теореме 1 для любого состояния $x(t)\in\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$ в момент времени $t,\ t\ge 0$, допустимое на интервале $\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$ управление $u(t)=U(x(t),t),\ u(t)\in\boldsymbol{U}$, существует и определяется из включения

$$Ax(t)+Bu(t)\in\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}\,. \qquad (12)$$

С учетом того, что $\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}=[-\underline{ED},-\underline{ED}]$, из (12) получаем матричное уравнение

$$Ax(t)+Bu(t)=-\underline{ED}\,. \qquad (13)$$

Управления $u(t),\ u(t)\in\boldsymbol{U}$, удовлетворяющие (13), гарантируют включения $x(t)\in\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$ для $t\ge\tau^*$ и составляют оптимальную стратегию управления (будем называть их оптимальными управлениями).

Замечание 3. Величина $-\underline{ED}$ определяет оптимальный уровень предельного запаса в системе для $t\ge\tau^*$. Причем любое управление $u(t),\ u(t)\in\boldsymbol{U}$, удовлетворяющее (13), является оптимальным в смысле (6). В этом случае для $t\ge\tau^*$ управления $u(t)$ логично выбирать, минимизируя затраты на управления (транспортные расходы, затраты на производство и т.д.) при условиях $u(t)\in\boldsymbol{U}$ и (13).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ДОПУСТИМОЙ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ

Пусть для любого начального состояния $x(0)\in\boldsymbol{X}$ существует допустимая на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегия управления. Для существования оптимальной в смысле (6) допустимой стратегии управления этого достаточно в двух случаях:

– когда оптимальный допустимый уровень запаса $\hat{x}^*=\overline{X}$, тогда любая допустимая на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегия управления будет оптимальной;

– когда оптимальный допустимый уровень запаса $\hat{x}^*\le\overline{X},\ \hat{x}^*\ne\overline{X}$, и начальный уровень запаса $x(0)\in \boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$, тогда любая допустимая на интервале $\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$ стратегия управления будет оптимальной.

В этих случаях проблема существования оптимальной допустимой стратегии управления не возникает и скорость сходимости $\tau^*=0$. Оптимальные управления $u^*(t),\ u^*(t)\in\boldsymbol{U}$, составляющие оптимальную стратегию $\Phi^*\in\Phi(x(0))$, являются решениями уравнения (13) в каждый момент времени $t\ge 0$.

Рассмотрим далее случай, когда начальный запас превосходит оптимальный допустимый уровень запаса $x(0)\in\boldsymbol{X}(\hat{x}^*,\overline{X}),\ \hat{x}^*\le\overline{X},\ \hat{x}^*\ne\overline{X}$. Определим для этого случая условия существования оптимальной допустимой стратегии $\Phi^*\in\Phi(x(0))$ и скорость сходимости τ^* к оптимальному допустимому уровню запаса $\hat{x}^*$.

Терема 3. (о существовании оптимальной допустимой стратегии). Для любого начального состояния $x(0)\in\boldsymbol{X}$ существует оптимальная допустимая на интервале X стратегия управления $\Phi^*\in\Phi(x(0))$, если выполнены условия (8), (9) и существует $\varepsilon>0$ такое, что

$$\boldsymbol{X}(\underline{ED},A\overline{ED})+\varepsilon\boldsymbol{X}(0,\theta)\subseteq\{-BU\}\,, \qquad (14)$$

где $\theta\in R^n,\theta=\overline{X}-\hat{x}^*$. Причем сходимость к оптимальному допустимому уровню запаса $\hat{x}^*$ достигается не более чем за конечное число шагов

$$T=\max_{i=1,n}\left\lceil\frac{\ln\dfrac{\varepsilon}{1-\alpha_i+\varepsilon}}{\ln\alpha_i}\right\rceil+1\,, \qquad (15)$$

где $\lceil x\rceil$ – наименьшее целое, большее числа x.

Доказательство. Введем вектор

$$\tilde{x}(t+1)=Ax(t)+Bu(t),\quad t\ge 0\,,$$

который определяет уровень запаса в сети после поставки в момент времени t, но до очередного предъявления спроса. Тогда $x(t+1)=\tilde{x}(t+1)+Ed(t),\ \ t\ge 0$. Покажем, что $x(t+1)\in\boldsymbol{X}$ для любого значения спроса $d(t)\in\boldsymbol{D}$, если и только если $\tilde{x}(t+1)\in\boldsymbol{X}+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}$.

Действительно,

$$\forall d(t)\in\boldsymbol{D}|\ \tilde{x}(t+1)+Ed(t)\in\boldsymbol{X}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\tilde{x}(t+1)+\boldsymbol{ED}\subseteq\boldsymbol{X}\Leftrightarrow\tilde{x}(t+1)\in\boldsymbol{X}+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}.$$

Покажем по индукции, что для любого начального состояния $x(0)\in\boldsymbol{X}$ существует допустимая на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегия $\Phi\in\Phi(x(0))$ такая, что

$$\tilde{x}(t)\in\Big[-\underline{ED},\max\Big\{-\underline{ED},A^{t-1}(\overline{X}-\overline{ED})-$$
$$-\varepsilon(I+A+\ldots+A^{t-2})\theta\Big\}\Big],t\ge 1, \qquad (16)$$

где $I\in R^{n\times n}$ – единичная матрица. Так как выполнены условия (8), (9), то по теореме 1 для любого начального состояния $x(0)\in\boldsymbol{X}$ существует допустимое управление такое, что

$$\tilde{x}(1)\in\boldsymbol{X}+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}=[-\underline{ED},\overline{X}-\overline{ED}]\,.$$

С учетом соотношения $-\underline{ED}=\hat{x}^*-\overline{ED}\le\overline{X}-\overline{ED}$ ясно, что для $t=1$ включение (16) справедливо. Далее, пусть (16) справедливо для произвольного $t,\ t\ge 2$. Покажем, что оно справедливо для $t+1$. Заметим, что условие (14) можно представить в виде

$$\mathrm{X}(A\underline{ED},A\overline{ED})+\varepsilon\mathrm{X}(0,\theta)+\mathrm{X}((I-A)\underline{ED},0)\subseteq\{-BU\}. \qquad (17)$$

Рассмотрим $\tilde{x}(t+1)=Ax(t)+Bu(t)=A(\tilde{x}(t)+Ed(t-1)+$

$+\,Bu(t)\pm\varepsilon\theta(t)\pm\tilde\theta(t)$. Согласно условию (17), существует управление $u(t)\in\boldsymbol{U}$ такое, что $AEd(t-1)+\varepsilon\theta(t)+ +\tilde\theta(t)+Bu(t)=0$ для любого d $(t-1)\in\boldsymbol{D}$ и любых $\theta(t)\in\boldsymbol{X}(0,\theta)$, $\tilde\theta(t)\in\boldsymbol{X}((I-A)\underline{ED},0)$. Тогда

$$\tilde x(t+1)=Ax(t)-\varepsilon\theta(t)-\tilde\theta(t)\,, \tag{18}$$

где

$$\theta(t)\in\boldsymbol{X}(0,\theta)\,,\ \tilde\theta(t)\in\boldsymbol{X}((I-A)\underline{ED},0)\,. \tag{19}$$

Определим вектора $\theta(t),\tilde\theta(t)$ с компонентами

$$\theta_i(t)=\begin{cases}\theta_i, & \text{if}\ \ \alpha_i\tilde x_i(t)-\varepsilon\theta_i\ge-\underline{ED}_i,\\ \max\left(0,\dfrac{\alpha_i\tilde x_i(t)+\underline{ED}_i}{\varepsilon}\right), & \text{else},\end{cases}$$
$$\tilde\theta_i(t)=\begin{cases}0, & \text{if}\ \ \alpha_i\tilde x_i(t)-\varepsilon\theta_i\ge-\underline{ED}_i,\\ \min\left(0,\alpha_i\tilde x_i(t)+\underline{ED}_i\right), & \text{else}.\end{cases} \tag{20}$$

Покажем, что $\theta(t),\tilde\theta(t)$ вида (20) удовлетворяют условию (19). Согласно (20), $\theta_i(t)$ либо принимает значение θ_i (верхней границы i-ой компоненты интервала $\boldsymbol{X}(0,\theta)$), либо равна нулю (нижней границе i-й компоненты интервала $\boldsymbol{X}(0,\theta)$), либо $\theta_i(t)=\dfrac{\alpha_i\tilde x_i(t)+\underline{ED}_i}{\varepsilon}>0$, причем из условия $\alpha_i\tilde x_i(t)-\varepsilon\theta_i<-\underline{ED}_i$ следует $\theta_i(t)=\dfrac{\alpha_i\tilde x_i(t)+\underline{ED}_i}{\varepsilon}<\theta_i$, откуда получаем включение $\theta(t)\in\boldsymbol{X}(0,\theta)$. Далее, $\tilde\theta_i(t)$ либо равна нулю (верхней границе i-ой компоненты интервала $\mathrm{X}((I-A)\underline{ED},0)$); либо $\tilde\theta_i(t)=\alpha_i\tilde x_i(t)+\underline{ED}_i<0$, причем в силу предположения индукции (16) имеем $\tilde x_i(t)\ge-\underline{ED}_i$, откуда $\tilde\theta_i(t)\ge(1-\alpha_i)\underline{ED}_i$, что и доказывает включение $\tilde\theta(t)\in\boldsymbol{X}((I-A)\underline{ED},0)$.

Таким образом, из (18) получаем

$$\tilde x_i(t+1)=\begin{cases}\alpha_i\tilde x_i(t)-\varepsilon\theta_i, \text{если}\ \alpha_i\tilde x_i(t)-\varepsilon\theta_i\ge-ED_i,\\ -\underline{ED}_i, \text{иначе},\end{cases}$$

откуда, с учетом предположения индукции (16),

$$\tilde x_i(t+1)\in\left[-\underline{ED}_i,\max\left\{-\underline{ED}_i,\alpha_i^t(\overline{X}_i-\overline{ED}_i)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\varepsilon(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{t-1})\theta_i\right\}\right]. \tag{21}$$

Кроме того, учитывая соотношения

$$\alpha_i^t(\overline{X}_i-\overline{ED}_i)-\varepsilon(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{t-1})\theta_i\le\overline{X}_i-\overline{ED}_i,$$
$$-\underline{ED}_i=\hat x^*-\overline{ED}_i\le\overline{X}_i-\overline{ED}_i,$$

получаем включение

$$\left[-\underline{ED}_i,\max\left\{-\underline{ED}_i,\alpha_i^t(\overline{X}_i-\overline{ED}_i)-\varepsilon(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{t-1})\theta_i\right\}\right]\subseteq$$
$$\subseteq[-\underline{ED}_i,\overline{X}_i-\overline{ED}_i].$$

Таким образом, $\tilde x(t+1)\in\boldsymbol{X}+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}$ и $x(t+1)\in\boldsymbol{X}$ для любого $d(t)\in\boldsymbol{D}$. По определению 1 управление $u(t)$, удовлетворяющее (21), является допустимым на интервале $\boldsymbol{X}$ в момент времени t. Следовательно, утверждение (16) имеет силу для любого $t\ge 1$.

Покажем, что стратегия $\Phi\in\Phi(x(0))$, является оптимальной, т.е. начиная с некоторого момента времени τ^* выполнено включение (6). Рассмотрим случай, когда $\theta_i=0$ ($\hat x_i^*=\overline{X}_i$). При этом включение (16) примет вид

$$\tilde x_i(t)\in\left[-\underline{ED}_i,\max\left\{-\underline{ED}_i,\alpha_i^{t-1}(\hat x_i^*-\overline{ED}_i)\right\}\right],\ t\ge 1\,.$$

Заметим, что

$$\alpha_i^{t-1}(\hat x_i^*-\overline{ED}_i)=\alpha_i^{t-1}(-\underline{ED}_i)\le\left\langle 0<\alpha_i\le 1,\underline{ED}_i\le 0\right\rangle\le-\underline{ED}_i\,,$$

следовательно,

$$\tilde x_i(t)\in\left[-\underline{ED}_i,-\underline{ED}_i\right]=\mathrm{X}(0,\hat x_i^*)+\mathrm{opp}\mathrm{ED}_i,\quad t\ge 1\,,$$

что гарантирует включение $x_i(t)\in\mathrm{X}(0,\hat x_i^*),\ t\ge 0$ (с учетом того, что $x_i(0)\in\boldsymbol{X}(0,\hat x_i^*),\quad t\ge 0$).

Для случая, когда $\theta_i>0$, найдем момент времени τ^*, начиная с которого $\tilde x_i(t)\in\left[-\underline{ED}_i,-\underline{ED}_i\right],\ t\ge\tau^*$. Рассмотрим функцию

$$f_i(t)=\alpha_i^{t-1}(\overline{X}_i-\overline{ED}_i)-\varepsilon(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{t-2})\theta_i=$$
$$=\alpha_i^{t-1}(\overline{X}_i-\overline{ED}_i)-\varepsilon\frac{1-\alpha_i^{t-1}}{1-\alpha_i}\theta_i.$$

Учитывая то, что

$$f_i(t)=\alpha_i^{t-1}(\overline{X}_i-\overline{ED}_i)-\varepsilon\frac{1-\alpha_i^{t-1}}{1-\alpha_i}\theta_i=$$
$$=\alpha_i^{t-1}(\theta_i-\underline{ED}_i)-\varepsilon\frac{1-\alpha_i^{t-1}}{1-\alpha_i}\theta_i\le$$
$$\le-\underline{ED}_i+\alpha_i^{t-1}\theta_i-\varepsilon\frac{1-\alpha_i^{t-1}}{1-\alpha_i}\theta_i,$$

нетрудно показать, что функция $f_i(t)$ убывает по t и

$$f_i(t)\le-\underline{ED}_i\ \text{ для }\quad t\ge\left\lceil\frac{\ln\dfrac{\varepsilon}{1-\alpha_i+\varepsilon}}{\ln\alpha_i}\right\rceil+1\,.$$

Следовательно, из (16) имеем

$$\tilde x_i(t)\in\left[-\underline{ED}_i,-\underline{ED}_i\right]=\mathrm{X}(0,\hat x_i^*)+\mathrm{opp}ED_i,$$
$$t\ge\left\lceil\frac{\ln\dfrac{\varepsilon}{1-\alpha_i+\varepsilon}}{\ln\alpha_i}\right\rceil+1,$$

откуда получаем

$$x(t)\in\boldsymbol{X}(0,\hat x^*),\qquad t\ge\underbrace{\max_{i=\overline{1,n}}\left\lceil\frac{\ln\dfrac{\varepsilon}{1-\alpha_i+\varepsilon}}{\ln\alpha_i}\right\rceil+1}_{=T}\,.$$

Таким образом, стратегия $\Phi\in\Phi(x(0))$, удовлетворяющая (16), является оптимальной, а скорость сходимости к оптимальному допустимому уровню $\tau^*=T$, где T определяется соотношением (15). Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 3 следует, что если выбирать управление $u(t)\in\boldsymbol{U}$ в момент времени t так, чтобы

$$Ax(t)+Bu(t)\in$$
$$\in\left[-\underline{ED},\max\left\{-\underline{ED},A^t(\overline{X}-\overline{ED})-\varepsilon(I-A)^{-1}(I-A^t)\theta\right\}\right]\subseteq$$
$$\subseteq\left[-\underline{ED},\max\left\{-\underline{ED},-\underline{ED}+(A^t-\varepsilon(I-A)^{-1}(I-A^t))\theta\right\}\right],$$

то, начиная с момента времени $T-1$, будем иметь

$$Ax(t)+Bu(t)\in\left[-\underline{ED},-\underline{ED}\right]=-\underline{ED},\quad t\ge T-1\,,$$

что гарантирует

$$x(t)\in\boldsymbol{X}(0,\hat x^*),\quad t\ge T\,,$$

следовательно, стратегия $\Phi=\{u(t),\ t\ge 0\}$является оптимальной в смысле (6).

Для того чтобы увеличить скорость сходимости системы, будем определять управления $u^*(t)$ в момент времени $t, t \geq 0$, составляющие оптимальную стратегию $\Phi^*=\{u^*(t),\ t\geq 0\}$ из решения следующей оптимизационной задачи:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Rightarrow \min_{u(t), \lambda_1, \ldots \lambda_n} \tag{22}$$

при ограничениях

$$-\underline{ED} \leq Ax(t) + Bu(t) \leq -\underline{ED} + \Lambda\theta, -\underline{ED} + \Lambda\theta \leq \overline{X} - \overline{ED},$$
$$u(t) \in \mathrm{U}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0,$$

где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1) ($x(0)$ – известное начальное состояние запаса); $\Lambda=\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n)$ – диагональная $n \times n$ -матрица; $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n \in R$ – вспомогательные параметры. Момент времени τ^*, $\tau^*<T$, начиная с которого $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, определяет скорость сходимости системы.

Замечание 4. В случае единичной матрицы $A=\mathrm{Diag}(1,1,\ldots 1)$ (без учета устаревания запаса) оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса $\hat{x}^*$ определяется по формуле $T=$ $= [1/\varepsilon] + 1$. (Эта оценка получается в результате предельного перехода $\alpha_i \to 1, i=\overline{1,n}$, в формуле (15).)

ПРИМЕР

Рассмотрим систему производства-распределения, которая описывается динамической сетью, представленной на рис. 1.

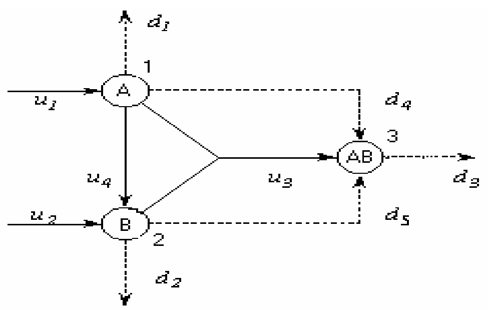

Рис. 1. Структура сети

Сеть состоит из трех узлов: узлы 1, 2 производят продукцию A и B, которая используется для производства продукции AB в 3-м узле. Управляемые потоки u_1, u_2 определяют интенсивность производства продукции A и B соответственно; u_4 перераспределяет дополнительные производственные возможности системы между производственными линиями A и B (если u_4=0, то все дополнительные возможности системы направлены на производство продукции A); u_3 описывает производственную линию, которая из A и B производит продукцию AB. Неуправляемые потоки d_1, d_2, d_3 определяют спрос в узлах сети на продукцию A, B и AB соответственно; d_4, d_5 представляют спрос в 3-ем узле на продукцию A и B.

Динамика сети описывается рекуррентным соотношением (1) со структурными матрицами

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, учитывающая устаревание запаса, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Неопределенность спроса и ограничения на состояния системы и управления заданы в виде соответствующих интервалов

$$D = \begin{pmatrix} [5, 25] \\ [20, 30] \\ [60, 80] \\ [0, 20] \\ [0, 30] \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} [0,130] \\ [0,120] \\ [0,150] \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} [0,190] \\ [0, 55] \\ [0,100] \\ [0, 70] \end{pmatrix}.$$

Для данной системы оптимально допустимый уровень запаса $\hat{x}^* = (40 \ \ 20 \ \ 50)'$ (формула (10)), условия теоремы 3 выполнены (ε = 0.158), максимальная скорость сходимости T = 5 (формула (15)).

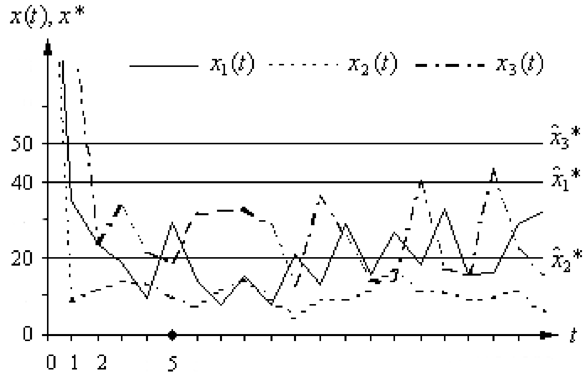

Рис. 2. Динамика изменения запаса в узлах сети

В каждый момент времени t, $t \geq 0$, решая задачу (22), получаем оптимальное управление $u^*(t)$. Рис. 2 показывает динамику изменения запаса в узлах сети при оптимальной стратегии управления $\Phi^*=\{u^*(t),\ t \geq 0\}$, $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, для начального состояния запаса $x(0)=$ $=(130\ 120\ 150)'$. Видно, что скорость сходимости $\tau^*=2$, так как $x(t) \in \boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$ для $t \geq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ловецкий С.Е., Меламед И.И.* Динамические потоки в сетях // Автоматика и телемеханика. 1987. № 11. С. 7–29.
2. *Glover F., Klingman D., Phillips N.V.* Network models in optimization and their applications in practice. NY.: Wiley, 1992.
3. *Blanchini F., Rinaldi F., Ukovich W.* A network design problem for a distribution system with uncertain demands // SIAM Journal on Optimization. 1997. Vol. 7, №. 2. P. 560–578.
4. *Blanchini F., Rinaldi F., Ukovich W.* Least Inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown demand // IEEE Transaction on Robotics and Automation. 1997. Vol. 13, №. 5. P. 633–645.
5. *Blanchini F., Pesenti R., Rinaldi F., Ukovich W.* Feedback control on production-distribution systems with unknown demand and delays // IEEE Transaction on Robotics and Automation. 2000. Vol. 16, №. 3. P. 313–317.
6. *Домбровский В.В., Чаусова Е.В.* Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6. Ч. 2. С. 271–274 (спец. выпуск, CD).
7. *Чаусова Е.В.* Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и задержками в поставках // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2001. Т. 8. № 2. С. 719–720.

8. *Чаусова Е.В.* Динамическая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1(I). С. 195–200.
9. Chausova E.V. Dynamic network inventory control model with interval nonstationary demand uncertainty // GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics: Book of Abstracts. Paris: Universite Pierre et Marie Curie, Laboratory LIP6, 2002. P. 101.
10. *Чаусова Е.В.* Динамическая сетевая модель с интервально заданным нестационарным спросом // Дискретный анализ и исследование операций: Материалы Российской конференции. Новосибирск: Изд–во Института математики, 2002. С. 248.
11. *Moore R.E.* Methods and applications of interval analysis. Philadelphia: SIAM, 1979.
12. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
13. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
14. *Шарый С.П.* Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 67–114.
15. *Kaucher E.* Interval analysis in the extended interval space *IR* // Computing Supplement. 1980. V. 2. P. 33–49.
16. *Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A., Rump S.M., Shary S.P., Hentenryck P.* Standardized notation in interval analysis // Reliable Computing, to appear.

Статья представлена кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике экономического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 30 мая 2003 г.