



# Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

## Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

### Efekty nieporządku w zimnych gazach atomowych

Marcin Płodzień

Praca doktorska  
Promotor: **prof. dr hab. Krzysztof Sacha**

Kraków 2014

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej  
Uniwersytet Jagielloński

## Oświadczenie

Ja niżej podpisany *Marcin Płodzień* (nr legitymacji: 1000818) doktorant Wydziału Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego oświadczam, że przedłożona przeze mnie rozprawa doktorska pt. „*Efekty nieporządku w zimnych gazach atomowych*” jest oryginalna i przedstawia wyniki badań wykonanych przeze mnie osobiście pod kierunkiem prof. dr. hab. Krzysztofa Sacha. Pracę napisałem samodzielnie.

Oświadczam, że moja rozprawa doktorska została opracowana zgodnie z Ustawą o prawie autorskim i prawach pokrewnych z dnia 4 lutego 1994. (Dziennik Ustaw 1994 nr 24 poz. 83 wraz z późniejszymi zmianami).

Jestem świadom, że niezgodność niniejszego oświadczenia z prawdą ujawniona w dowolnym czasie, niezależnie od skutków prawnych wynikających z ww. ustawy, może spowodować unieważnienie stopnia nabytego na podstawie tej rozprawy.

Kraków, dnia 07.05.2014 r.

.....

*podpis doktoranta*

Kraków, 7 maja 2014 r.



UNIWERSYTET  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

## Oświadczenie

Instytut Fizyki

imienia

Mariana Smoluchowskiego

**Zakład Optyki Atomowej**

Oświadczam, że zapoznałem się i akceptuję ostateczną wersję pracy doktorskiej mgr. Marcina Płodzienia pt. „Efekty nieporządku w zimnych gazach atomowych”.

prof. Krzysztof Sacha

ul. Reymonta 4

PL 30-059 Kraków

tel. +48(12) 663-57-79

fax +48(12) 633-84-94

e-mail:

krzysztof.sacha@uj.edu.pl

Kraków, 7 maja 2014 r.



UNIWERSYTET  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

### Opinia promotora

Instytut Fizyki

Pan Marcin Płodzień przygotował pod moim kierunkiem pracę doktorską pt. „Efekty nieporządku w zimnych gazach atomowych”.

imienia

Mariana Smoluchowskiego

W trakcie niespełna czterech lat studiów doktoranckich miałem możliwość obserwować jak rozwija się młody i utalentowany człowiek. Współpraca z Panem Marcinem Płodzieniem była dla mnie wielką przyjemnością. Talent, pracowitość i zaangażowanie w pracę naukową pozwoliły mu osiągnąć wiele ciekawych wyników, które złożyły się na pracę doktorską. Wyniki rozprawy doktorskiej otrzymał samodzielnie, a moja rola sprowadzała się do dyskusji pomysłów naukowych i otrzymanych wyników oraz pomocy w redagowaniu artykułów naukowych.

Zakład Optyki Atomowej

Pan Marcin Płodzień jest fizykiem teoretykiem, ale to czym się zajmował związane było zawsze z badaniami eksperymentalnymi. Rozprawa doktorska dotyczy propozycji nowatorskich eksperymentów lub wyjaśnienia wyników otrzymanych już w laboratorium. Uważam, że wyjątkową zaletą Pana Marcina Płodzienia jest umiejętność współpracy z eksperymentatorami, czego mogłem doświadczyć w trakcie jego studiów doktoranckich.

  
prof. Krzysztof Sacha

ul. Reymonta 4

PL 30-059 Kraków

tel. +48(12) 663-57-79

fax +48(12) 633-84-94

e-mail:

krzysztof.sacha@uj.edu.pl

## Podziękowania

Składam serdeczne podziękowania mojemu promotorowi prof. dr. hab. Krzysztofowi Sacha za wiele wspólnych rozmów i nieocenioną pomoc merytoryczną przez cały okres prowadzonych przeze mnie badań.

Dziękuję kierownikowi Zakładu Optyki Atomowej Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie prof. dr. hab. Jakubowi Zakrzewskiemu oraz dr. Romanowi Marcinkowi za utrzymywanie zarówno przyjaznej atmosfery jak i skutecznej motywacji do pracy.

Podziękowania składam Danusi Myrek za cierpliwość i nieocenioną pomoc we wszystkich sprawach administracyjnych.

Dziękuję moim koleżankom i kolegom z Zakładu Optyki Atomowej Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie, tj. (w kolejności alfabetycznej): Omowi Duttcie, Bartoszowi Głowaczowi, Arkowi Kosiorowi, Mateuszowi Łąckiemu, Michałowi Maikowi, Jankowi Majorowi, Małgorzacie Mochol, Annie Przysiężnej, Katarzynie Targońskiej oraz Markowi Smaczyńskiemu za wiele godzin wspólnie spędzonego czasu w świetnej atmosferze.

Za wszystkie wspólne dobre chwile dziękuję moim przyjaciołom spoza środowiska akademickiego, tj. Edycie Goncerz, Krzyškowi Strojowi, Amadeuszowi Ley oraz mojemu nauczycielowi Sensei Dariuszowi Ziębie.

Dziękuję moim rodzicom Wiesławie i Zbigniewowi oraz siostrze Klaudii za niewyczerpane pokłady humoru.

Pragnę podziękować również państwu Marii i Michałowi Kaleta za niezwykłą życzliwość oraz pomoc.

Na samym końcu składam podziękowania Angelice za cierpliwość i wyrozumiałość.

Badania były finansowane przez Narodowe Centrum Nauki w ramach grantu nr DEC-2011/01/N/ST2/00418.



*“Stań się częścią Natury: rośnij w niej i z nią. Jeśli poprawnie rozumiesz i słuchasz jej praw, stajesz się jej integralną częścią (...). Nie ma takiego, kto mógłby przelamać jej prawa. ”*

Morihei Ueshiba

**Pracę dedykuję Angelice.**

## Streszczenie

W pracy przedstawiono wyniki badań nad efektami związanymi z nieporządkiem w zimnych gazach atomowych. Każdy z rozdziałów stanowi zwarte podsumowanie wyników zawartych w publikacjach autora dołączonych do rozprawy.

Pierwszy rozdział pracy poświęcony jest wprowadzeniu do zjawiska lokalizacji Andersona oraz omawia właściwości statystyczne potencjałów przypadkowych realizowanych w eksperymentach z zimnymi gazami atomowymi.

Drugi rozdział poświęcony jest koncepcji lasera przypadkowego dla fal materii. Pierwsza część rozdziału zawiera wprowadzenie do zagadnienia optycznych laserów przypadkowych, w których za selekcję spektralną modów odpowiada koherentne wielokrotne rozpraszanie. Budując analogię dla fal materii zbadaliśmy teoretycznie możliwość zaobserwowania emisji wąskiego spektralnie pakietu falowego, którego właściwości zdeterminowane są przez właściwości statystyczne optycznego potencjału przypadkowego.

Rozdział trzeci zawiera wyniki badań nad lokalizacją Andersona jednowymiarowych solitonów w kondensacie Bosego-Einsteina. We wstępie omówiono efektywną jednocząstkową teorię opisującą kwantowo-mechanicznie środek masy solitonów w kondensacie Bosego-Einsteina znajdującego się w zewnętrznym potencjale przypadkowym. Kolejny paragraf rozdziału poświęcony jest oddziaływającym jasnym solitonom w potencjale przypadkowym. W ramach rachunku zaburzeń oraz przeprowadzając symulacje numeryczne zbadaliśmy wpływ oddziaływań na lokalizację Andersona solitonów. Następny paragraf omawia możliwość zaobserwowania lokalizacji Andersona środka ciemnego solitonu. W ostatniej części paragrafu przedstawione są wyniki badań nad wielocząstkową lokalizacją Andersona wielociałowego układu z oddziaływaniami przyciągającymi.

Rozdział czwarty poświęcony jest analizie wyników eksperymentu ze spinorowym kondensatem Bosego-Einsteina w zewnętrznym niejednorodnym polu magnetycznym. Po rozseparowaniu składowych kondensatu spinorowego i dokonaniu pomiaru gęstości atomów obserwowane są prążki. Wielokrotna realizacja eksperymentu z takimi samymi warunkami wskazuje na ich przypadkowe położenie. W rozdziale przedstawiono model teoretyczny tłumaczący przypadkowe położenie prążków oraz omówiono jego implikacje dla innych układów eksperymentalnych.

Rozdział piąty zawiera podsumowanie najważniejszych wyników przedstawionych w rozprawie.

## Abstract

The dissertation presents the results of the research on disorder effects in cold atomic gases. Each chapter provides a concise summary of the results of the publications attached to the dissertation.

The first chapter constitutes an introduction to the Anderson localization phenomenon and discusses statistical properties of disorder potentials that can be realized in experiments with cold atomic gases.

The second chapter is devoted to the concept of a random laser for matter waves. The first part of the chapter contains an introduction to optical random lasers where emitted radiation is the result of a coherent multiple scattering. Building an analogy for matter waves, we examine theoretically a possibility for emission of spectrally narrow wave packets whose properties are determined by statistical properties of an optical disorder potential.

The third chapter contains the results of the studies of the Anderson localization of solitons in a Bose-Einstein condensate. We discuss the effective one-body theory that describes quantum-mechanically the center of mass of a soliton in a Bose-Einstein condensate. In the framework of the perturbation theory and with the help of numerical simulations we examine the influence of the interaction between a pair of solitons on the Anderson localization. We also discuss a possibility of the Anderson localization of dark solitons. Last part of the chapter presents the research of the Anderson localization of a many-body system with attractive interactions.

The fourth chapter is devoted to the analysis of the experiment with a spinor Bose-Einstein condensate in the presence of an external inhomogeneous magnetic field. Atomic density measurement reveals that fringes appear in the wave packets corresponding to different spin components. Repeated preparation of the experiment with the same conditions indicates that the fringes position is random. This chapter presents a theoretical model that explains random positions of the fringes and discusses its implications for other experiments with spinor Bose-Einstein condensates.

The fifth chapter contains summary of the main results presented in this dissertation.



## Spis publikacji

1. M. Płodzień, K. Sacha,  
*“Matter-waves analog of an optical random laser”*,  
**Phys. Rev. A 84, 023624 (2011)**  
Wszystkie wyniki zostały otrzymane przez doktoranta.
2. M. Płodzień, K. Sacha,  
*“Breakdown of Anderson localization of interacting quantum bright solitons”*,  
**Phys. Rev. A 86, 033617 (2012)**  
Wszystkie wyniki zostały otrzymane przez doktoranta.
3. M. Mochol, M. Płodzień, K. Sacha,  
*“Dark soliton in a disorder potential”*,  
**Phys. Rev. A 85, 023627 (2012)**  
Kwantowy opis ciemnego solitonu oraz symulacje numeryczne w sekcji III stanowią osiągnięcie doktoranta.
4. D. Delande, K. Sacha, M. Płodzień, S. K. Avazbaev, J. Zakrzewski,  
*“Many-body Anderson localization in one dimensional systems”*,  
**New J. Phys. 15 (2013) 045021**  
Wyniki symulacji w ramach efektywnej teorii jednociałowej przedstawione na rys. 5 zostały otrzymane przez doktoranta.
5. M. Witkowski, R. Gartman, B. Nagórny, M. Piotrowski, M. Płodzień, K. Sacha, J. Szczepkowski, J. Zachorowski, M. Zawada, W. Gawlik,  
*“Matter-wave interference versus spontaneous pattern formation in spinor Bose-Einstein condensates”*,  
**Phys. Rev. A 88, 025602 (2013)**  
Cały teoretyczny opis eksperymentu oraz symulacje numeryczne stanowią osiągnięcie doktoranta.

# Spis treści

|  |    |
|--|----|
| <b>1. Wprowadzenie</b>   | 5  |
| 1.1. Lokalizacja Andersona   | 5  |
| 1.2. Optyczny potencjał przypadkowy  | 9  |
| <b>2. Atomowy laser przypadkowy</b>  | 12 |
| 2.1. Wstęp   | 12 |
| 2.2. Odpowiednik optycznego lasera przypadkowego dla fal materii   | 13 |
| 2.3. Podsumowanie  | 18 |
| 2.4. Publikacje związane z rozdziałem  | 19 |
| <b>3. Solitony w potencjale przypadkowym</b>   | 20 |
| 3.1. Wstęp   | 20 |
| 3.2. Oddziałujące jasne solitony w potencjale przypadkowym   | 26 |
| 3.3. Lokalizacja Andersona ciemnego solitonu   | 30 |
| 3.4. Porównanie efektywnego opisu lokalizacji Andersona jasnego solitonu z w pełni wielociałowymi symulacjami numerycznymi | 30 |
| 3.5. Publikacje związane z rozdziałem  | 33 |
| <b>4. Kondensat spinorowy w niejednorodnym zewnętrznym polu magnetycznym</b>   | 35 |
| 4.1. Wstęp   | 35 |
| 4.2. Eksperyment i model teoretyczny z atomami w niejednorodnym polu magnetycznym  | 38 |
| 4.3. Wnioski   | 42 |
| 4.4. Publikacje związane z rozdziałem  | 43 |
| <b>5. Podsumowanie</b>   | 44 |
| <b>A. Implementacja numeryczna optycznego potencjału przypadkowego</b>   | 45 |
| <b>B. Numeryczne obliczanie długości lokalizacji Andersona</b>   | 46 |
| B.1. Długość lokalizacji Andersona w jednym wymiarze   | 46 |
| B.2. Długość lokalizacji Andersona w dwóch wymiarach   | 47 |

**Bibliografia** . . . . . 58

# 1. Wprowadzenie

W rozdziale przedstawimy koncepcję lokalizacji Andersona oraz omówimy potencjały przypadkowe realizowane w eksperymentach z zimnymi gazami atomowymi.

## 1.1. Lokalizacja Andersona

Koncepcja silnej lokalizacji (lokalizacji Andersona) została zaproponowana w pracy P. W. Andersona z 1958 [1], w której rozważano przejście przewodnik - izolator na sieci. Anderson rozważał model ciasnego wiązania dla nieoddziałujących ze sobą elektronów mogących tunelować z jednego oczka sieci do sąsiedniego, w którym nieporządek pojawiał się jako losowa energia elektronu w oczku. Hamiltonian ciasnego wiązania ma postać

$$H = \sum_i \epsilon_i |i\rangle\langle i| + \sum_{i \neq j} J |i\rangle\langle j|, \quad (1.1)$$

gdzie  $\epsilon_i$  jest losową energią w oczku, a  $J$  amplitudą tunelowania. Anderson badał prawdopodobieństwo pozostania elektronu w danym oczku sieci pokazując istnienie pewnej krytycznej wartości amplitudy nieporządku, dla której współczynnik dyfuzji elektronu wynosi zero. Zanik transportu elektronowego związany jest ze zmianą charakteru funkcji falowej nośników ładunku - od rozciągniętej wzdłuż całego układu po eksponencjalnie zlokalizowaną. Lokalizacja Andersona związana jest z efektami interferencyjnymi pomiędzy pętlami, po których może poruszać się elektron. Rozważmy efekty interferencyjne dwóch pakietów falowych, które poruszają się po dwóch niewiele różniących się od siebie zamkniętych pętlach (innymi słowy po czasie  $t$  powracają do punktu startowego). Oznaczając amplitudę prawdopodobieństwa przejścia cząstki z punktu  $r_0$  po zamkniętej pętli  $C_1$  jako  $A_1$ , a po innej pętli  $C_2$  jako  $A_2$ , prawdopodobieństwo powrotu cząstki do punktu startowego wynosi:

$$P = |A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2\Re(A_1^* A_2). \quad (1.2)$$

Dla każdych dwóch pętli wyraz interferencyjny może być dodatni bądź ujemny. Gdy  $A_2$  jest pętlą odwróconą w czasie,  $A_2 = A_1^*$ , to prawdopodobieństwo powrotu do punktu wyjścia wynosi

$$P = 4|A_1|^2, \quad (1.3)$$

co wpływa na zredukowanie transportu w układzie. Efekt ten nazywany jest w literaturze *slabą lokalizacją* [2, 3], która jest prekursorem lokalizacji Andersona. Biorąc pod uwagę efekty interferencyjne od kolejnych pętli transport w układzie może być całkowicie wstrzymany i mamy wtedy do czynienia z *silną lokalizacją* - lokalizacją Andersona.

Rozważmy falę o długości  $\lambda$  i liczbie falowej  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Gdy średnia droga swobodna  $l$ , tzn. odległość którą pokona fala pomiędzy kolejnymi rozproszczeniami, jest dużo większa od jej długości  $\lambda$ , to transport ma charakter dyfuzyjny. W sytuacji gdy  $l$  jest rzędu  $\lambda$  pojawiają się efekty interferencyjne i opis dyfuzyjny załamuje się. Jednym z kryteriów zajścia lokalizacji Andersona jest stosunek średniej drogi swobodnej  $l$  do długości fali  $\lambda$ , tzn.:

$$kl \leq (kl)_c, \quad (1.4)$$

gdzie  $(kl)_c = const.$  jest stałą rzędu jedności. Warunek ten nazywany jest kryterium Ioffa-Regel'a [4]. Gdy  $k \gg 1/l$  fale propagują dyfuzyjnie, natomiast gdy  $k \ll 1/l$  fale są zlokalizowane w małym obszarze przestrzeni. Obszar parametrów  $l$  i  $\lambda$  pomiędzy obszarem zlokalizowanym a dyfuzyjnym, tzn.  $(kl)_c$ , nazywany jest obszarem krytycznym. Jak przekonamy się w dalszej części rozdziału takie przejście pomiędzy obszarem zlokalizowanym, a dyfuzyjnym ma miejsce jedynie dla wymiaru  $d \geq 3$ , w niższych wymiarach wszystkie stany są zlokalizowane.

Definicję lokalizacji Andersona można wprowadzić analizując stany własne hamiltonianu z nieporządkiem. Rozważmy hamiltonian postaci  $\hat{H} = \hat{H}_0 + V$ , gdzie  $\hat{H}_0$  jest kinetyczną częścią, a  $V$  jest potencjałem przypadkowym, którego stany własne oznaczmy jako  $\psi_{n,\{V\}}$ , gdzie  $n$  numeruje wartości własne, a  $\{V\}$  oznacza konkretną realizację nieporządku. Mówimy, iż lokalizacja Andersona w pewnym zakresie energii ma miejsce, gdy dla stanów z tego zakresu energii oraz prawie wszystkich realizacji nieporządku  $\{V\}$  istnieją położenia  $\mathbf{r}_{n,\{V\}}$  oraz współczynniki  $C_{n,\{V\}}$  spełniające

$$|\psi_{n,\{V\}}(\mathbf{r})| \leq C_{n,\{V\}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{n,\{V\}}|}{2l_{loc}}}, \quad (1.5)$$

gdzie parametr  $l_{loc}$ , nazywany długością lokalizacji Andersona, nie zależy od realizacji nieporządku. Powyższa definicja ma ciekawe konsekwencje dla dyfuzyjnego transportu pakietu falowego w nieporządku. Uśredniony po wielu realizacjach nieporządku średni kwadrat położenia jest ograniczony z góry, tzn.

$$\langle r^2 \rangle < const, \quad (1.6)$$

co implikuje zanik współczynnika dyfuzji  $D$  w  $d$  wymiarowym układzie

$$D = \frac{1}{2d} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle r^2 \rangle}{t} = 0. \quad (1.7)$$

Lokalizacja Andersona zależy od wymiarowości układu. W pracy [5] badano lokalizację w skończonym układzie otwartym o rozmiarze  $L$ . Funkcja falowa może wypływać z układu, zatem można wprowadzić skończony czas życia stanu  $\tau = \hbar/\delta E$ , gdzie energia  $\delta E$  (“Thouless energy”) wynosi  $\delta E = \hbar D(E)/L^2$ , a  $D(E)$  jest współczynnikiem dyfuzji dla cząstki o energii  $E$ . Thouless pokazał, iż właściwości transportu w  $d$  wymiarowym układzie zależne są od relacji pomiędzy  $\delta E$ , a rozseparowaniem energetycznym stanów  $\Delta E$ . Wygodnym parametrem rozróżniającym zakres lokalizacji od zakresu dyfuzyjnego jest tzw. “liczba Thoulessa”

$$g = \frac{\delta E}{\Delta E} = \hbar \nu_0(E) D(E) L^{d-2}, \quad (1.8)$$

przy czym  $\Delta E = 1/[\nu_0(E)L^d]$  jest średnią odległością energetyczną między stanami w układzie, a  $\nu_0(E)$  jest gęstością stanów. Dla  $g > 1$  stany przekrywają się i wspomagają transport w układzie, natomiast dla  $g < 1$  stany są silnie energetycznie oddzielone od siebie, nie przekrywają się i nie wspomagają transportu. W skończonym układzie otwartym kryterium dla lokalizacji Andersona jest

$$g < g_c \simeq 1. \quad (1.9)$$

W pracy [6] postulowano, iż wielkość  $g$  jest jedyną wielkością potrzebną do opisu transportu w układzie. Wychodząc z tego założenia, można zdefiniować funkcję skalowania  $\beta(g)$  niezależną od mikroskopowych właściwości układu, a następnie badać zachowanie funkcji skalującej w zależności od wymiarowości układu i jego rozmiaru. Zakłada się, że właściwości układu na większej skali długości mogą być otrzymane poprzez wprowadzenie parametru skalującego  $b$ :

$$g(L + bL) = f(b, g(L)), \quad (1.10)$$

Zapisując iloraz różnicowy dla  $g$

$$\frac{g(L + bL) - g(L)}{bL} = \frac{f(b, g(L)) - g(L)}{bL}, \quad (1.11)$$

a następnie przechodząc z  $b \rightarrow 0$  otrzymujemy równania Gell-Mana - Low'a, w którym funkcja skalowania jest pochodną logarytmiczną przewodnictwa  $g$  po rozmiarze układu  $L$

$$\beta(g) = \frac{d \ln g}{d \ln L}. \quad (1.12)$$

Kryterium Thouless'a dla  $g \gg g_c$  mówi nam, że przewodnictwo dane jest przez (1.8), natomiast dla  $g \ll g_c$  przewodnictwo maleje eksponencjalnie z rozmiarem układu  $g \sim e^{-L/l_{loc}}$ , gdzie  $l_{loc}$  jest długością lokalizacji. Asymptotyczne zachowania dają nam ograniczenia na funkcję  $\beta(g)$ :

$$\beta(g) = \begin{cases} d - 2 & g \gg g_c \\ \ln g + const & g \ll g_c \end{cases}. \quad (1.13)$$

Zakładając ciągłość i monotoniczność funkcji  $\beta(g)$  możliwe jest jej jakościowe zbadanie w funkcji rozmiaru  $L$  układu dla każdego wymiaru  $d$  z osobna. Ponieważ dla wymiarów  $d \leq 2$  funkcja  $\beta \leq 0$  teoria skalowania przewiduje, że wszystkie stany są zlokalizowane i zwiększanie rozmiarów układu zawsze prowadzi do eksponencjalnie zanikającego przewodnictwa. W jednym wymiarze wszystkie fale dla dowolnie małego nieporządku lokalizują się na skali długości rzędu średniej drogi swobodnej  $l_{loc} = 2l$  [3]. W dwóch wymiarach również wszystkie stany są zlokalizowane, jednak długość lokalizacji zależy eksponencjalnie od średniej drogi swobodnej  $l_{loc} \approx l e^{\frac{\pi kl}{2}}$ , co w praktyce oznacza iż dla skończonego układu fale o dużych pędach są praktycznie zdelokalizowane [3]. Jednak odpowiednio zwiększając rozmiar układu wszystkie stany wykażą andersonowski profil. Dla wymiaru  $d \geq 3$  istnieje krytyczna wartość  $g_c$  ( $\beta(g_c) = 0$ ) rozdzielająca stany zlokalizowane od niezlokalizowanych. Długość lokalizacji Andersona dla stanów zlokalizowanych wynosi  $l_{loc} \sim \frac{1}{(kl)_c - k}$ , gdzie  $(kl)_c$  jest wartością krytyczną (1.4) rozdzielającą obszar zlokalizowany od dyfuzyjnego [3].

Lokalizacja Andersona, będąca jednocząstkowym efektem interferencyjnym, została zaobserwowana dla wielu rodzajów fal, np. dla fal dźwiękowych [7] czy mikrofal [8, 9].

## 1.2. Optyczny potencjał przypadkowy

Kondensat Bosego-Einsteina jest idealnym narzędziem do badania lokalizacji Andersona. Oddziaływania między atomami mogą być wyłączone dzięki rezonansom Feshbacha [10, 11], a bezpośrednia możliwość pomiaru gęstości atomów pozwala bezpośrednio zaobserwować lokalizację Andersona [12, 13, 14]. Kolejną zaletą zimnych gazów atomowych jest pełna kontrola nieporządku realizowanego w eksperymentach.

Potencjał przypadkowy odczuwany przez atomy pochodzi od światła laserowego rozpraszanego na matówce. Atom odczuwa obecność zewnętrznego pola elektromagnetycznego  $\vec{E}(\mathbf{r})$  o częstotliwości  $\omega_L$  poprzez sprzężenie swojego momentu dipolowego  $\vec{d}$  z tymże polem. Sprzężenie to powoduje zależne od położenia przesunięcie poziomów energetycznych atomu, dzięki któremu możliwe jest np. jego pułapkowanie. Potencjał oddziaływania atomu z polem opisywać będziemy przy użyciu potencjału

$$V(\mathbf{r}) = \frac{3\pi^2\Gamma}{2\omega_0^3} \frac{I(\mathbf{r})}{\delta}, \quad (1.14)$$

gdzie  $\omega_0$  jest rezonansową częstotliwością przejścia ze stanu podstawowego do stanu wzbudzonego atomu,  $\Gamma$  jest odwrotnością czasu rozpadu stanu wzbudzonego,  $\delta = \omega_L - \omega_0$  jest odstrojeniem pola elektromagnetycznego od przejścia rezonansowego, a  $I(\mathbf{r}) = |E(\mathbf{r})|^2$  jest natężeniem pola elektromagnetycznego. Gdy  $\delta > 0$  mówimy o odstrojeniu ku niebieskiemu (ang. “blue-detuning”) i oddziaływanie jest odpychające, gdy  $\delta < 0$  mówimy o odstrojeniu ku czerwieni (ang. “red-detuning”) i oddziaływania są przyciągające.

Fala elektromagnetyczna posłużyć może do wygenerowania potencjału przypadkowego odczuwanego przez atomy jeżeli przepuścimy ją przez porowatą powierzchnię (zwaną dalej matówką). Zgodnie z zasadą Huygensa, każdy punkt matówki staje się źródłem nowej fali kulistej, która posiada przypadkową fazę. Emitowane fale interferują ze sobą i w punkcie  $\mathbf{r}$  pole elektromagnetyczne jest sumą wielu fal kulistych z przypadkowymi fazami. W dalszej części rozdziału omówimy właściwości statystyczne optycznych potencjałów przypadkowych.

### Własności statystyczne optycznych potencjałów przypadkowych

Liniowo spolaryzowane monochromatyczne pole elektromagnetyczne w punkcie  $\mathbf{r}$  położonym daleko za matówką jest liniową superpozycją amplitud z przypadkowymi fazami od  $K$



niezależnych źródeł rozpraszania znajdujących się na matówce, tzn.:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{k=1}^K |a_k| e^{i\phi_k} = \Re[E(\mathbf{r})] + i \Im[E(\mathbf{r})]. \quad (1.15)$$

Zgodnie z *Centralnym Twierdzeniem Granicznym* [15] dla  $K \rightarrow \infty$  rozkład prawdopodobieństwa części rzeczywistej i urojonej  $E(\mathbf{r})$  wynosi

$$P(\Re[E(\mathbf{r})], \Im[E(\mathbf{r})]) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|E(\mathbf{r})|^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.16)$$

Dokonując zamiany zmiennych  $I(\mathbf{r}) = |E(\mathbf{r})|^2 = [\Re[E(\mathbf{r})]]^2 + [\Im[E(\mathbf{r})]]^2$  oraz  $\phi(\mathbf{r}) = \text{ArcTan}\left(\frac{\Im[E(\mathbf{r})]}{\Re[E(\mathbf{r})]}\right)$  otrzymujemy rozkład prawdopodobieństwa dla natężenia i fazy pola elektromagnetycznego:

$$P(I, \phi) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-I/2\sigma^2} \quad (1.17)$$

$$P(I) = \int_0^{2\pi} P(I, \phi) d\phi = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-I/2\sigma^2} \quad (1.18)$$

$$P(\phi) = \int_0^\infty P(I, \phi) dI = \frac{1}{2\pi}. \quad (1.19)$$

Rozkład fazy jest rozkładem jednorodnym, natomiast średnia wartość natężenia wynosi  $\bar{I} = \int_0^\infty P(I) I dI = 2\sigma^2$ , a wariancja  $\Delta I = \sqrt{\bar{I}^2 - \bar{I}^2} = \bar{I}$ .

Własności statystyczne optycznego potencjału przypadkowego o rozkładzie gaussowskim dane są przez dwupunktową funkcję korelacji [15] natężenia pola elektromagnetycznego, która wynosi

$$\overline{I(\mathbf{r})I(\mathbf{r}')} = \overline{|E(\mathbf{r})|^2 |E(\mathbf{r}')|^2} = \overline{|E(\mathbf{r})|^2} \overline{|E(\mathbf{r}')|^2} + \overline{E^*(\mathbf{r})E(\mathbf{r}')} \overline{E^*(\mathbf{r}')E(\mathbf{r})}. \quad (1.20)$$

Pamiętając, że średnie natężenie pola definiujemy jako  $\bar{I} = \overline{|E(\mathbf{r})|^2}$ , powyższe wyrażenie możemy zapisać w postaci

$$\overline{I(\mathbf{r})I(\mathbf{r}')} = \bar{I}(1 + |w(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2), \quad (1.21)$$

gdzie wyraz

$$w(\mathbf{r}) = \frac{\overline{E^*(\mathbf{r} + \mathbf{r}')E(\mathbf{r}')}}{\overline{|E(\mathbf{r})|^2}} \quad (1.22)$$

nazywamy funkcją korelacji pola. Natężenie  $I(\mathbf{r})$  możemy wyrazić jako fluktuacje  $J(\mathbf{r})$  wokół wartości średniej  $\bar{I}$ , tzn.  $I(\mathbf{r}) = \bar{I} + J(\mathbf{r})$  i  $\overline{J(\mathbf{r})} = 0$ , wtedy

$$\overline{I(\mathbf{r})I(\mathbf{r}')} = \bar{I}^2 + \overline{J(\mathbf{r})J(\mathbf{r}')}. \quad (1.23)$$

Porównując (1.21) z (1.23) otrzymujemy dwupunktową funkcję korelacji fluktuacji natężenia światła:

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \stackrel{def}{=} \overline{J(\mathbf{r})J(\mathbf{r}')} = \bar{I}^2 |w(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 = V_0^2 C(\boldsymbol{\rho}) = P(\boldsymbol{\rho}), \quad (1.24)$$

gdzie  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $V_0 \equiv \bar{I}$  i  $C(\boldsymbol{\rho}) \equiv |w(\boldsymbol{\rho})|^2$ . Funkcja  $C(\boldsymbol{\rho})$  mówi nam o dwupunktowej funkcji korelacji potencjału przypadkowego, w którym znajdują się zimne atomy.

Zgodnie z *twierdzeniem Wienera – Chinczyna* [16] spektrum mocy stacjonarnego procesu jest  $d$ -wymiarową transformatą Fouriera funkcji korelacji

$$\hat{P}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int P(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} = \frac{V_0^2}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} = V_0^2 \hat{C}(\mathbf{q}). \quad (1.25)$$

Pamiętając o związku splotu dwóch funkcji  $f(\mathbf{r})$  i  $g(\mathbf{r})$

$$[f * g](\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{\rho}) g(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}, \quad (1.26)$$

z ich transformatą Fouriera

$$f(\widehat{\mathbf{r}})g(\widehat{\mathbf{r}}) = [\hat{f} * \hat{g}](\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{k}) \hat{g}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (1.27)$$

równanie (1.25) możemy zapisać w postaci

$$\hat{P}(\mathbf{q}) = \frac{V_0^2}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{w}(\mathbf{k}) \hat{w}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (1.28)$$

## 2. Atomowy laser przypadkowy

W rozdziale omówimy nową koncepcję dla fal materii - *Atomowy Laser Przypadkowy* (ang. "atom random laser", ARL), która stanowi nowe połączenie pomiędzy optyką kwantową a fizyką fal materii. Omówimy wyniki naszych badań nad ARL w jednym wymiarze oraz przedstawimy przewidywania dla dwóch wymiarów.

### 2.1. Wstęp

Konwencjonalny laser wymaga dwóch składników: ośrodka wzmacniającego oraz rezonatora odpowiadającego za selekcję modów. Światło odbijane pomiędzy przeciwległymi ścianami rezonatora wzmacniane jest za każdym razem gdy propaguje wzdłuż wnęki po czym opuszcza układ przez częściowo przepuszczające lustro. Gdy wzmocnienie optyczne jest na tyle duże, iż kompensuje straty w wyniku emisji i absorpcji materiałowej pojawia się akcja laserowa.

Rozpatrzmy ośrodek wzmacniający z nieporządkiem. Wielokrotnie rozpraszający się foton wykonuje błądzenie przypadkowe, przez co zwiększa się czas oddziaływania z ośrodkiem. Zazwyczaj akty rozproszenia prowadzą do strat, które chcemy minimalizować, jednak gdy ilość centrów rozpraszania jest bardzo duża pojawia się ciekawy scenariusz: niepotrzebna jest wnęka rezonansowa, gdyż ośrodek wzmacniający sam pułapkuje i wzmacnia światło. Letokhov w swojej pracy [17] analizował dyfuzję światła ze wzmocnieniem. Całkowite wzmocnienie w układzie jest proporcjonalne do jego objętości podczas gdy straty do powierzchni. Gdy objętość ośrodka osiągnie krytyczną wartość wzmocnienie światła może być wyższe od strat i zachodzi akcja laserowa.

Model Letokhova dyfuzji ze wzmocnieniem zaniedbuje zjawiska interferencyjne. W optycznym laserze przypadkowym światło zachowuje fazę wskutek wielokrotnego rozproszenia i zjawiska interferencji nie mogą być zaniedbywane. W laserze przypadkowym za strukturę emitowanych modów odpowiadają efekty wielokrotnego koherentnego rozpraszania [18]. W większości materiałów nieuporządkowanych natężenie światła jest zdelokalizowane w całej objętości, jednak istnieją materiały, w których światło może ulec lokalizacji będącej

analogiem lokalizacji Andersona [19, 20]. Intuicyjny obraz lokalizacji fotonów można otrzymać wyobrażając sobie, że prawdopodobieństwo powrotu światła do miejsca w ośrodku, w którym uległo rozproszeniu jest różne od zera, a foton może obiegać zamknięte pętle w przestrzeni. W ten sposób pojawiają się zlokalizowane eksponencjalnie mody w układzie, w których światło jest spułapkowane i efekty emisji laserowej ulegają wzmocnieniu [21, 22]. Akcja lasera przypadkowego została eksperymentalnie zaobserwowana w pracach [23, 24, 25, 26].

W pracy [27] rozważaliśmy odmienną sytuację. Ośrodkiem rozpraszającym jest optyczny potencjał przypadkowy, natomiast emitowana będzie koherentna wiązka fal materii w kondensacie Bosego-Einsteina. Odpowiednia konstrukcja optycznego potencjału przypadkowego, w której zachodzi ekspansja kondensatu Bosego-Einsteina prowadzi do okna pędowego atomów, w którym nie zachodzi lokalizacja Andersona. Atomy z tego okna opuszczają obszar nieporządku podczas gdy pozostałe atomy lokalizują się w nim. Za emisję spektralną fal materii odpowiadają efekty wielokrotnego koherentnego rozproszenia.

## 2.2. Odpowiednik optycznego lasera przypadkowego dla fal materii

W standardowym laserze atomowym analogiem wnęki rezonansowej lasera optycznego jest pułapka harmoniczna. Makroskopowe obsadzenie stanu podstawowego przez atomy stanowi kondensat Bosego-Einsteina. Stopniowe wypuszczanie atomów z pułapki jest realizacją standardowego lasera atomowego [28]. Pojawia się zatem pytanie, czy można przygotować układ, w którym właściwości statystyczne potencjału przypadkowego zdeterminują emitowany mod fal materii. W tym paragrafie pokażemy, iż optyczny potencjał przypadkowy może być przygotowany w taki sposób, że atomy o pewnym wąskim zakresie pędów nie ulegną lokalizacji Andersona.

### Apertura układu i spektrum mocy

Rozważmy liniowo spolaryzowane światło laserowe padające na matówkę. Zgodnie z zasadą Huygensa każdy punkt do którego dociera czoło fali, staje się źródłem nowej fali kulistej. Pole elektromagnetyczne pochodzące od monochromatycznej fali płaskiej o długości  $\lambda$  rozproszonej na matówce obserwowane w punkcie  $P = (x, y)$ , który jest oddalony od matówki na dystans  $z$  dużo większy niż jej rozmiar  $R$  ( $z \gg R$ ) można przedstawić jako funkcję apertury  $A(\eta, \xi)$  oraz

funkcję odpowiedzi  $h(x, y, \eta, \xi)$  [29], tzn.:

$$E(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y, \eta, \xi) A(\eta, \xi) d\eta d\xi, \quad (2.1)$$

gdzie funkcja  $(\eta, \xi)$  to współrzędne punktu na matówce i  $A(\eta, \xi)$  znika poza matówką, tzn. dla  $r = \sqrt{\eta^2 + \xi^2} > R$ . W przybliżeniu przyosiowym funkcja odpowiedzi może zostać przedstawiona jako

$$h(x, y, \eta, \xi) \approx \frac{1}{i\lambda z} e^{ik\sqrt{z^2 + (x-\eta)^2 + (y-\xi)^2}}, \quad (2.2)$$

gdzie  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  jest liczbą falową padającego światła. Pamiętając, że  $z \gg R$ ,  $z \gg x - \eta$ ,  $z \gg y - \xi$  dokonujemy rozwinięcia wykładnika w eksponencie oraz zaniedbujemy wyrazy kwadratowe w  $\eta$  i  $\xi$ , dostając

$$h(x, y, \eta, \xi) \approx \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[(x^2+y^2)-2(x\eta+y\xi)]}. \quad (2.3)$$

Możemy teraz zapisać wyrażenie na pole elektryczne w punkcie  $(x, y)$  daleko za matówką w postaci:

$$E(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta, \xi) e^{-\frac{ik}{z}(x\eta+y\xi)} d\eta d\xi. \quad (2.4)$$

Z powyższego wynika, iż w przybliżeniu przyosiowym pole elektromagnetyczne daleko za matówką jest transformatą Fouriera funkcji apertury  $A(\eta, \xi)$ .

Dwupunktowa funkcja korelacji pola  $E(x, y)$  wynosi:

$$\overline{E^*(x, y)E(x', y')} = \frac{1}{\lambda^2 z^2} e^{-\frac{ik}{2z}[(x^2-x'^2)+(y^2-y'^2)]} \times \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A^*(\eta, \xi)A(\eta', \xi')} e^{\frac{ik}{z}(x\eta+y\xi-x'\eta'-y'\xi')} d\eta d\eta' d\xi d\xi'. \quad (2.5)$$

Zakładając drobną strukturę powierzchni matówki pole elektryczne w jej obszarze jest nieskorelowane, tzn.:

$$\overline{A^*(\eta, \xi)A(\eta', \xi')} \propto I(\eta, \xi)\delta(\eta - \eta')\delta(\xi - \xi'), \quad (2.6)$$

gdzie  $I(\eta, \xi) = V_0\kappa(\eta, \xi)$  jest natężeniem pola w płaszczyźnie matówki z funkcją  $\kappa(\eta, \xi)$  równą zeru poza obszarem matówki i równą jedności na jej powierzchni. Biorąc pod uwagę równania

(1.22), (2.5) oraz (2.6) otrzymujemy dwupunktową funkcję korelacji:

$$C(x - x', y - y') = |w(x - x', y - y')|^2 = \left[ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\eta, \xi) e^{\frac{ik}{z} [(x-x')\eta + (y-y')\xi]} d\eta d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\eta, \xi) d\eta d\xi} \right]^2, \quad (2.7)$$

która zależy od natężenia światła w płaszczyźnie matówki. Algorytm numerycznej implementacji optycznych potencjałów przypadkowych opisany jest w dodatku A.

### Atomowy laser przypadkowy w jednym wymiarze

Rozważmy sytuację, w której przygotowujemy kondensat Bosego-Einsteina w pułapce harmoniczej. Pułapka harmoniczna zostaje wyłączona, a następnie włączamy potencjał przypadkowy. Chmura atomowa rozszerza się w obecności nieporządku, który dzięki odpowiedniej modyfikacji apertury układu działa jak filtr środkowo-przepustowy. W efekcie atomy należące do wąskiego przedziału pędów, propagujące się niemal bez rozprośnień, opuszczają obszar nieporządku. W takiej sytuacji otrzymujemy realizację pewnych elementów atomowego lasera przypadkowego, tzn. wielokrotne koherentne rozproszenie decyduje które fale materii będą emitowane z ośrodka.

Rozpatrzmy na początku typową sytuację eksperymentalną, w której wytwarzany jest przypadkowy potencjał dla atomów. W słabym nieporządku atom o pędzie  $k$  w wyniku koherentnego rozproszenia ulega lokalizacji Andersona. Odwrotność długości lokalizacji w przybliżeniu Borna jest proporcjonalna do spektrum mocy nieporządku  $l_{loc}^{-1} \propto \hat{P}(2k)$  [3], gdzie

$$\hat{P}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \hat{w}(q) \hat{w}(k - q) \quad (2.8)$$

to spektrum mocy, a  $\hat{w}(k)$  jest transformatą Fouriera funkcji korelacji. W standardowym przypadku natężenie światła na matówce o rozmiarze  $R$  wynosi

$$I(z) = \Theta(R - |z|), \quad (2.9)$$

gdzie  $\Theta$  jest funkcją Heaviside'a, co w sytuacji jednowymiarowej prowadzi do funkcji korelacji

$$\hat{w}(k) = \pi \sigma_R \Theta(1 - |k \sigma_R|), \quad (2.10)$$

gdzie  $\sigma_R$  jest długością korelacji nieporządku. Dla takiej apertury spektrum mocy maleje liniowo i wynosi zero gdy  $k \geq \frac{2}{\sigma_R}$ . Atomy o pędach powyżej granicznej wartości  $\frac{2}{\sigma_R}$ , w przybliżeniu Borna, nie lokalizują się. Wydawać by się mogło, iż stoi to w sprzeczności ze stwierdzeniem o lokalizacji Andersona wszystkich atomów o dowolnym pędzie w jednym wymiarze [30]. W rzeczywistości lokalizacja nadal ma miejsce, ale długość lokalizacji staje się bardzo duża dla  $k > \frac{2}{\sigma_R}$ , o czym można się przekonać uwzględniając kolejne rzędy rachunku perturbacyjnego [31].

Przeanalizujmy teraz co się stanie, gdy zaczniemy modyfikować aperturę. Modyfikując funkcję  $I(z)$  poprzez wstawienie nieprzepuszczającej przeszkody o szerokości  $\rho < R$  pośrodku matówki otrzymujemy

$$\hat{w}(k) = \pi \left( \frac{1}{\sigma_R} - \frac{1}{\sigma_\rho} \right)^{-1} [\Theta(1 - |k\sigma_R|) - \Theta(1 - |k\sigma_\rho|)], \quad (2.11)$$

gdzie  $\sigma_\rho \propto \rho^{-1}$ . Gdy szerokość wstawionej przeszkody spełnia  $\rho > R/3$  interferencja światła po przejściu przez taką matówkę prowadzi do ciekawego rezultatu: pojawia się dodatkowy zakres pędów  $\sigma_R^{-1} - \sigma_\rho^{-1} < k < 2\sigma_\rho^{-1}$ , dla których spektrum mocy wynosi zero, a zatem długość lokalizacji Andersona staje się bardzo duża, atomy nie lokalizują się i mogą opuścić ośrodek z nieporządkiem.

Wstawiając kolejną przeszkodę możemy zwiększyć ilość przedziałów pędów z rozbieżną, w ramach przybliżenia Borna, długością lokalizacji. Zmodyfikowana apertura ma postać

$$I(z) = \Theta(R - |z|) - \Theta(\rho - |z|) + \Theta(\zeta - |z|), \quad (2.12)$$

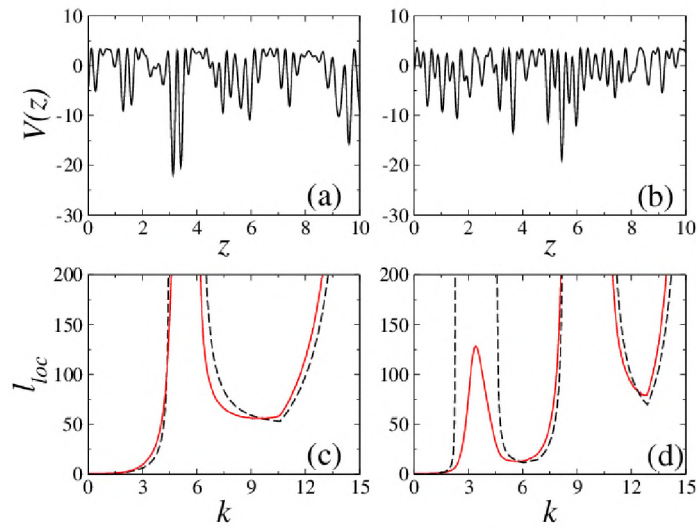
gdzie  $\zeta < \rho$  oraz

$$\hat{w}(k) = \pi \left( \frac{1}{\sigma_R} - \frac{1}{\sigma_\rho} + \frac{1}{\sigma_\zeta} \right)^{-1} [\Theta(1 - |k\sigma_R|) - \Theta(1 - |k\sigma_\rho|) + \Theta(1 - |k\sigma_\zeta|)], \quad (2.13)$$

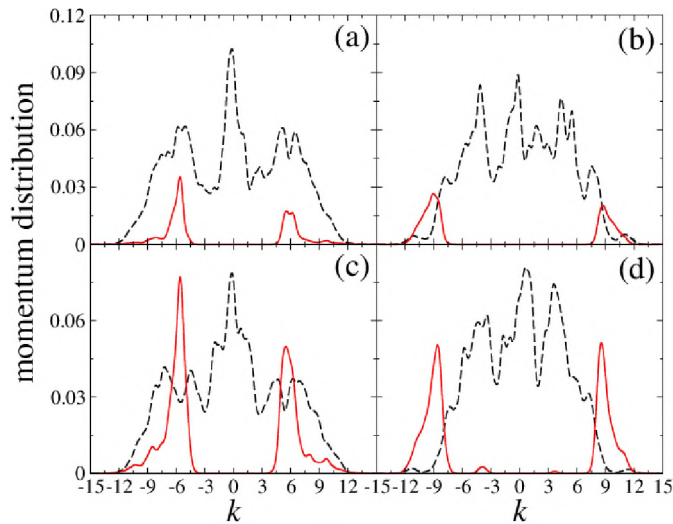
z  $\sigma_\zeta = \alpha/\zeta$ .

Na rysunku (rys. 2.1) przedstawione są przykładowe realizacje nieporządku w wyniku modyfikacji apertury oraz stowarzyszone z nimi długości lokalizacji Andersona (w przybliżeniu Borna oraz otrzymane numerycznie metodą macierzy transferu (ang. “Transfer Matrix”, TM, dodatek B)).

Przeprowadziliśmy symulację eksperymentu, w którym chmura atomowa uwolniona z pułapki harmoniczej ewoluuje w odpowiednio przygotowanym nieporządku. Zbadaliśmy spektrum



Rysunek 2.1: Na rysunkach (a) i (b) przedstawione są przykładowe realizacje nieporządku odpowiednio dla jednej oraz dwóch przesłód umieszczonych na matówkach. Na rysunkach (c) i (d) przedstawione są długości lokalizacji Andersona w funkcji pędu w przybliżeniu Borna (czarna przerywana linia) oraz otrzymane numerycznie (czerwona linia). Rysunek pochodzi z pracy [27].



Rysunek 2.2: Rozkład pędów atomów, które opuściły nieporządek (czerwone linie) oraz które zostały zlokalizowane (czarne przerywane linie). Rysunki (a) i (c) pokazują rozkład pędów w różnych chwilach ewolucji atomów w nieporządku przygotowanym z jedną przesłoną na matówce. Analogicznie rysunki (b) i (d) dla dwóch przesłon. Można zaobserwować wyraźne piki odpowiadające atomom, które opuszczają nieporządek. Położenia pików zgadzają się z oknami pędowymi, dla których długość lokalizacji jest rozbieżna. Rezultaty zostały otrzymane w wyniku numerycznego całkowania równania Grossa - Pitajewskiego. Rysunek pochodzi z pracy [27].



atomów, które opuściły obszar nieporządku oraz spektrum atomów, które uległy lokalizacji (rys. 2.2). Zaobserwowane rozkłady pędów zgadzają się z przewidywaniami teoretycznymi pokazując, iż procesy koherentnego rozpraszania mogą determinować które atomy, tzn. o jakich pędach, są emitowane z ośrodka.

### Atomowy laser przypadkowy w dwóch wymiarach

W dwóch wymiarach długość lokalizacji Andersona, w przybliżeniu Borna, eksponencjalnie zależy od średniej drogi swobodnej  $l_B$  [3]

$$l_{loc} = l_B e^{\pi/2kl_B}, \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{l_B} = \frac{\eta}{k\sigma_R^2} \int \frac{d\phi}{2\pi} (1 - \cos(\phi)) \hat{P} \left( 2k\sigma_R \sin \frac{\phi}{2} \right), \quad (2.15)$$

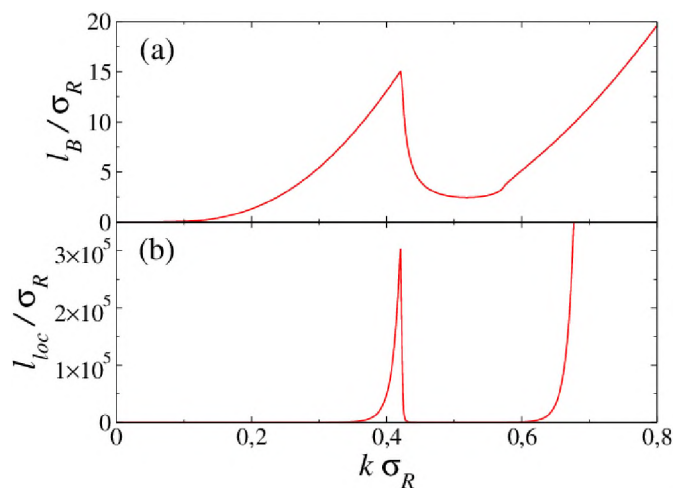
przy czym parametr  $\eta = V_0/E_\sigma$  jest stosunkiem amplitudy nieporządku do charakterystycznej skali energii, tzw. energii korelacji  $E_{\sigma_R} = \sigma_R^{-2}$ . Średnia droga swobodna zależy od spektrum mocy nieporządku, a więc również od apertury. Na rysunku (rys. 2.3) przedstawiamy średnią drogę swobodną i długość lokalizacji Andersona, w przybliżeniu Borna, w dwóch wymiarach dla zmodyfikowanej apertury opisanej przez

$$I(\mathbf{r}) = \Theta(R - |\mathbf{r}|) - \Theta(\rho - |\mathbf{r}|) + \Theta(\zeta - |\mathbf{r}|). \quad (2.16)$$

Modyfikacja polega na nałożeniu na matówkę dwóch nieprzepuszczających światła współosiowych pierścieni. Niemonotoniczne zachowanie średniej drogi swobodnej jest eksponencjalnie wzmocnione w długości lokalizacji Andersona. Prace nad symulacją numeryczną eksperymentu trwają.

### 2.3. Podsumowanie

W naszej pracy [27] badaliśmy odpowiednik optycznego lasera przypadkowego dla fal materii. Pokazaliśmy, iż dla odpowiednio przygotowanego nieporządku długość lokalizacji Andersona jest niemonotoniczną funkcją pędu. Podobne niemonotoniczne zachowanie długości lokalizacji Andersona przedstawiono w późniejszej pracy [32], w której zamiast modyfikacji apertury wykorzystano dwie współbieżne nakładające się wiązki laserowe padające na matówkę.



Rysunek 2.3: Na górnym rysunku przedstawiona jest średnia droga swobodna a na dolnym długość lokalizacji Andersona w dwóch wymiarach dla przykładowej modyfikacji apertury. Jak widać niemonotoniczne zachowanie  $l_B$  jest eksponencjalnie wzmocnione w długości lokalizacji Andersona. Rysunek pochodzi z pracy [27].

## 2.4. Publikacje związane z rozdziałem

— M. Płodzień, K. Sacha,

*Matter-waves analog of an optical random laser,*

**Phys. Rev. A 84, 023624 (2011)**

Wszystkie wyniki zostały otrzymane przez doktoranta.

## 3. Solitony w potencjale przypadkowym

Solitony w kondensacie Bosego-Einsteina to rozwiązania równania Grossa-Pitajewskiego, które nie zmieniają swojego kształtu w czasie ewolucji. Odpowiednio poprawiony opis średniopolewy przewiduje, że w obecności potencjału przypadkowego środek masy solitonu może być andersonowsko zlokalizowany. W rozdziale przedstawiono omówienie wyników prac nad efektami związanymi z lokalizacją solitonów w kondensacie Bosego-Einsteina.

### 3.1. Wstęp

#### Teoria średniego pola dla kondensatu Bosego-Einsteina

Kondensat Bosego-Einsteina to układ  $N$  bozonów znajdujących się w tym samym jednocząstkowym stanie kwantowym:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \propto \psi_0(\mathbf{r}_1) \dots \psi_0(\mathbf{r}_N). \quad (3.1)$$

W obecności oddziaływań między atomami powyższa postać funkcji falowej układu jest jedynie przybliżeniem rzeczywistego stanu podstawowego. Chcemy, aby w obecności oddziaływań (oddziaływania kontaktowe) nasz wybór funkcji  $\psi_0$  jak najlepiej przybliżał stan podstawowy. Korzystając z metody wariacyjnej minimalizujemy energię układu:

$$E = \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi_0(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi_0(\mathbf{r})|^2 + \frac{g_0}{2} |\psi_0(\mathbf{r})|^4 \right] d^3 r, \quad (3.2)$$

gdzie  $g_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a$ ,  $a$  to długość rozpraszania,  $m$  to masa atomu,  $V(\mathbf{r})$  potencjał zewnętrzny.

Nakładając warunek normalizacji funkcji falowej  $\psi_0$  do liczby cząstek  $N$  i dokonując wariacji względem  $\psi_0^*$  dostajemy równanie Grossa - Pitajewskiego (GP):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_0(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}) + g_0 |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \psi_0(\mathbf{r}) = \mu \psi_0(\mathbf{r}), \quad (3.3)$$

gdzie  $\mu$  jest potencjałem chemicznym, co łatwo sprawdzić z definicji:

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N}. \quad (3.4)$$

Równanie GP w swojej strukturze jest równaniem Schrödingera z nieliniowym wyrazem odpowiadającym za oddziaływanie pojedynczego atomu z potencjałem pochodzącym od chmury atomowej  $g_0|\psi_0|^2$ . Gdy  $g_0 < 0$  to potencjał jest przyciągający, dla  $g_0 > 0$  potencjał jest odpychający.

### Jasny soliton w kondensacie Bosego-Einsteina

Rozważmy pułapkę harmoniczną, w której częstość w kierunkach poprzecznych spełnia  $\hbar\omega_{\perp} > \mu$ . Mamy wówczas do czynienia z efektywnie jednowymiarowym układem.

Jasnym solitonem nazywamy rozwiązanie równania GP w jednym wymiarze z przyciągającymi oddziaływaniami  $g_0 < 0$ . Wprowadzając nowe jednostki energii, długości i czasu:

$$\begin{aligned} E_0 &= 4m\omega_{\perp}^2 a^2, \\ l_0 &= \frac{\hbar}{2|a|m\omega_{\perp}}, \\ t_0 &= \frac{\hbar}{4a^2 m\omega_{\perp}^2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

funkcjonał energii i równanie GP w jednym wymiarze przyjmują postać:

$$E = \int \left[ \frac{1}{2} |\partial_z \psi_0|^2 - \frac{1}{2} |\psi_0|^4 - \mu |\psi_0|^4 \right] dz. \quad (3.6)$$

$$i\partial_t \psi = -\frac{1}{2} \partial_z^2 \psi - |\psi|^2 \psi, \quad (3.7)$$

Interesuje nas rozwiązanie stacjonarne  $\psi = e^{-i\mu t} \psi_0$ , gdzie  $\psi_0$  wynosi [33]:

$$\begin{aligned} \psi_0(z-r) &= e^{i\phi} \frac{N}{2 \cosh[N(z-r)/2]}, \\ N &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(z)|^2 dz, \\ \mu &= -\frac{N^2}{8}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie  $r$  i  $\phi$  to arbitralne parametry określające położenie środka masy solitonu oraz jego globalną fazę, wielkość  $2/N$  jest szerokością solitonu.

### Teoria Bogoliubowa dla jasnego solitonu

Rozważając jasny soliton w zewnętrznym słabym potencjale  $V(z)$  spodziewamy się niewielkiej modyfikacji jego profilu oraz energii. Standardowa metoda pozwalająca policzyć poprawki do funkcji falowej i energii polega na linearyzacji równania GP. Rozwiązanie postulowanego rozwiązania postaci:

$$\psi = e^{-i\mu t}[\psi_0 + \delta\psi] \quad (3.9)$$

proceedzi nas do dwóch sprzężonych równań Bogoliubowa dla  $\delta\psi$  i  $\delta\psi^*$  w pierwszym rzędzie w  $\delta\psi$  i  $V$  [34, 35],

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\psi^* \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\psi^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ -S^* \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

gdzie

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial_z^2 - 2|\psi_0|^2 - \mu & -\psi_0^2 \\ \psi_0^{*2} & \frac{1}{2}\partial_z^2 + 2|\psi_0|^2 + \mu \end{pmatrix},$$

$$S = V(z)\psi_0(z - r).$$

Rozwiązań poszukujemy w bazie prawostronnych wektorów własnych operatora  $\mathcal{L}$ . Wszystkie wektory własne  $(u_n, v_n)$  do niezerowych energii mają swoje mody sprzężone, które są lewostronnymi wektorami własnymi operatora  $\mathcal{L}$ , natomiast dwa mody zerowe:

$$\begin{pmatrix} u_\phi \\ v_\phi \end{pmatrix} = i\partial_\phi \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_0^* \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\begin{pmatrix} u_r \\ v_r \end{pmatrix} = i\partial_r \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_0^* \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

mają swoje mody sprzężone postaci [34, 35]:

$$\begin{pmatrix} u_\phi^{sp} \\ v_\phi^{sp} \end{pmatrix} = \partial_N \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_0^* \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\begin{pmatrix} u_r^{sp} \\ v_r^{sp} \end{pmatrix} = i \frac{z-r}{N} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ -\psi_0^* \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Zaburzenie solitonu możemy rozłożyć w kompletnej bazie:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\psi^* \end{pmatrix} &= \frac{\phi' - \phi}{i} \begin{pmatrix} u_\phi \\ v_\phi \end{pmatrix} + P_\phi \begin{pmatrix} u_\phi^{sp} \\ v_\phi^{sp} \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{r' - r}{i} \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \end{pmatrix} + P_r \begin{pmatrix} u_r^{sp} \\ v_r^{sp} \end{pmatrix} \\ &\quad + \sum_{n, E_n > 0} \left[ b_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + b_n^* \begin{pmatrix} v_n^* \\ u_n^* \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdzie  $\phi'$  i  $r'$  są przesunięciami fazy i położenia.

Deformacja kształtu solitonu opisana jest zmiennymi zespolonymi  $b_n$  w równaniu (3.15). Wstawiając (3.15) do (3.10) i rzutując na wektory sprzężone otrzymujemy równanie ruchu dla  $b_n$ :

$$i\partial_t b_n = E_n b_n + s_n, \quad (3.16)$$

$$s_n = \langle u_n | S \rangle + \langle v_n | S^* \rangle. \quad (3.17)$$

Rozwiązując powyższe równania z założeniem, że początkowo soliton jest niezaburzony, tzn.  $b_n(0) = 0$ , otrzymujemy:

$$\delta\psi = \sum_{n, E_n > 0} \frac{s_n}{E_n} [(e^{-iE_n t} - 1)u_n(z-r) + (e^{iE_n t} - 1)v_n^*(z-r)]. \quad (3.18)$$

Pierwszy wzbudzony mod Bogoliubowa ma energię równą  $E_1 = |\mu| = \frac{N^2}{8}$ , oznacza to, że pomiędzy stanem podstawowym, a pierwszym stanem wzbudzonym jest duża przerwa energetyczna. Zatem dla słabego nieporządku,  $V_0 \ll \mu$ , zmiana kształtu solitonu jest zaniedbywalna. Nie rozważaliśmy jeszcze jednak jak zachowuje się środek masy solitonu, gdy pojawia się słaby potencjał  $V(z)$ . Zachowanie środka masy opisane jest modem zerowym (3.12), ponieważ mod ten opisuje przesunięcie solitonu.

## Złamanie i przywrócenie symetrii dla jasnego solitonu

Pełny kwantowomechaniczny hamiltonian  $N$  atomów komutuje z operatorem translacji, co implikuje istnienie wspólnej bazy własnej operatorów. Rozwiązanie średniopolowe łamie tę symetrię, gdyż zależy od arbitralnej wartości położenia środka masy solitonu  $r$ . Analogiczna sytuacja ma miejsce dla operatora  $e^{i\hat{N}\phi}$ , gdzie  $\hat{N}$  jest operatorem liczby cząstek, a  $\phi$  jest globalną fazą solitonu.

Problem łamania symetrii w teorii średniego pola można ominąć poprzez nieperturbacyjny opis położenia środka masy oraz fazy solitonu, traktując je jak zmienne dynamiczne. Zamiast przygotowywać linowe rozwinięcie wokół  $\delta\phi = \phi' - \phi$  oraz  $\delta r = r' - r$  potraktujmy  $\phi$  i  $r$  jak zmienne dynamiczne [36]:

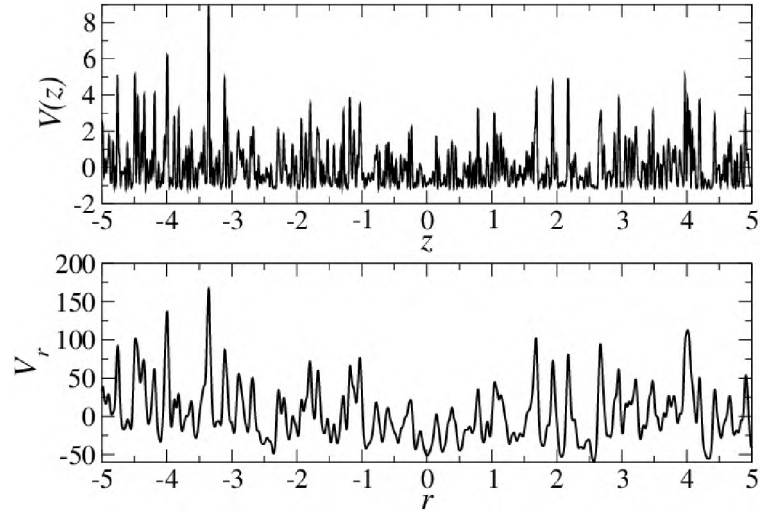
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \psi_0(z-r) \\ \psi_0^*(z-r) \end{pmatrix} + P_\phi \begin{pmatrix} u_\phi^{sp}(z-r) \\ v_\phi^{sp}(z-r) \end{pmatrix} + P_r \begin{pmatrix} u_r^{sp}(z-r) \\ v_r^{sp}(z-r) \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{n, E_n > 0} \left[ b_n \begin{pmatrix} u_n(z-r) \\ v_n(z-r) \end{pmatrix} + b_n^* \begin{pmatrix} v_n^*(z-r) \\ u_n^*(z-r) \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Wstawiając (3.19) do funkcjonału energii i ograniczając się do wyrazów kwadratowych w  $P_\phi$ ,  $P_r$ ,  $b_n$  i  $V$  otrzymujemy hamiltonian układu w obecności potencjału przypadkowego:

$$\begin{aligned} H &= \frac{P_r^2}{2m_r} + \int V(z)|\psi_0(z-r)|^2 dz + \frac{P_\phi^2}{2m_\phi} \\ &+ 2P_\phi \langle \partial_N \psi_0 | V \psi_0 \rangle + \sum_{n, E_n > 0} (E_n b_n^* b_n + (b_n + b_n^*) s_n), \end{aligned} \quad (3.20)$$

gdzie  $m_r = N$  jest masą solitonu (równą liczbie cząstek), a  $m_\phi = -\frac{4}{N}$  “masą” związaną z fazą. Przechodząc do kwantowomechanicznego hamiltonianu  $\hat{H}$  widzimy, że pęd związany z fazą komutuje z hamiltonianem, tzn.  $[\hat{P}_\phi, \hat{H}] = 0$ , gdzie  $\hat{P}_\phi = \hat{N} - N = -i\partial_\phi$ . Możemy zatem wybrać stan z ustaloną liczbą cząstek  $|N\rangle$  taki, że  $\hat{P}_\phi |N\rangle = 0$ . Następnie obliczając wartość oczekiwaną hamiltonianu  $\hat{H}$  dla  $|N\rangle$  w stanie próżni Bogoliubowa  $\langle N; 0_B | \hat{H} | N; 0_B \rangle$  otrzymujemy hamiltonian efektywny dla środka masy solitonu:

$$\hat{H}_r = \frac{\hat{P}_r^2}{2N} + \int V(z)|\psi_0(z-r)|^2 dz. \quad (3.21)$$



Rysunek 3.1: Górny rysunek przedstawia pojedynczą realizację optycznego potencjału przypadkowego odstrojonego ku niebieskiemu. Rysunek dolny przedstawia wygładzony potencjał przypadkowy odczuwany przez środek masy jasnego solitonu  $V_r = \int V(z)|\psi_0(z-r)|^2 dz$ . Rysunek pochodzi z pracy [37].

Środek masy solitonu nie odczuwa potencjału zewnętrznego bezpośrednio, ale odczuwa wygładzony potencjał będący splotem potencjału przypadkowego z własnym profilem (rys. 3.1). W pracach [34, 35] pokazano, że jeśli  $V(z)$  jest potencjałem przypadkowym to stany własne (3.21) wykazują profil andersonowski.

### Ciemny soliton w kondensacie Bosego-Einsteina

Ciemnym solitonem nazywamy rozwiązanie równania GP w jednym wymiarze dla  $g_0 > 0$ . Wprowadźmy jednostki energii, długości i czasu:

$$\begin{aligned} E_0 &= \mu_0, \\ l_0 &= \xi, \\ t_0 &= \frac{\hbar}{\mu_0}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

gdzie  $\rho_0$  jest gęstością cząstek, a  $\xi = \hbar/\sqrt{mg_0\rho_0}$  jest długością zabliznienia. Potencjał chemiczny układu wynosi  $\mu_0 = g_0\rho_0$ . Rozwiązaniem równania GP opisującym stacjonarny ciemny soliton jest

$$\psi_0(z-r) = e^{-i\phi} \sqrt{\rho_0} \tanh(z-r), \tag{3.23}$$

gdzie  $\phi$  jest globalną fazą, a  $r$  jest położeniem solitonu. Należy zauważyć, iż ciemny soliton w przeciwieństwie do jasnego solitonu jest stanem wzbudzonym równania GP.



Podobny rachunek jak w przypadku jasnego solitonu prowadzi do następującego efektywnego kwantowego hamiltonianu opisującego położenie ciemnego solitonu w obecności słabego zewnętrznego potencjału:

$$\begin{aligned}\hat{H}_r &= -\frac{\hat{P}_r^2}{2|M_r|} + \int V(z)|\psi_0(z-r)|^2 dz \\ &= -\left(\frac{\hat{P}_r^2}{2|M_r|} + \frac{|M_r|}{4} \int dz \frac{V(z)}{\cosh^2(z-r)}\right),\end{aligned}\quad (3.24)$$

który ma strukturę taką samą jak w przypadku jasnego solitonu (3.21). Różnica między opisem efektywnym jasnego i ciemnego solitonu związana jest z inną masą efektywną ciemnego solitonu wynoszącą  $M_r = -4\rho_0$ . Masa efektywna równa jest podwojonej liczbie cząstek w bruzdzie solitonowej (w jasnym solitonie równa jest liczbie wszystkich cząstek w układzie).

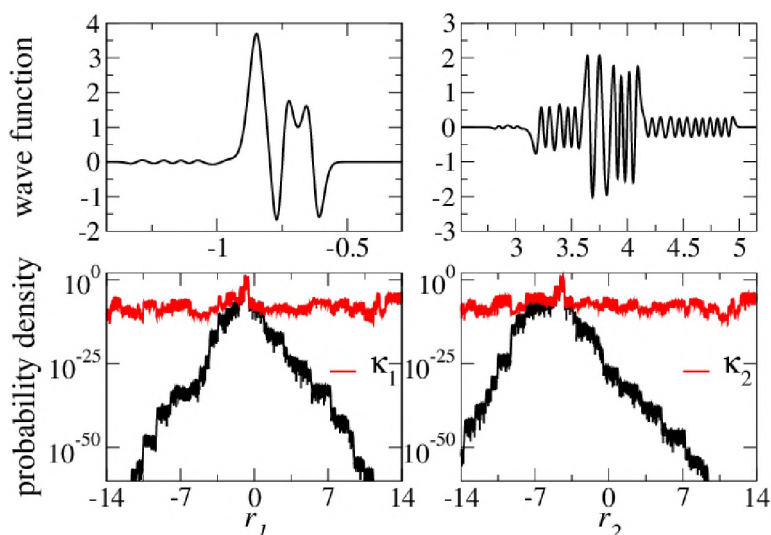
### 3.2. Oddziałujące jasne solitony w potencjale przypadkowym

W układach fizyki fazy skondensowanej nie jest możliwe bezpośrednie badanie wpływu oddziaływań między cząstkami na lokalizację Andersona. Ciekawym układem, w którym możemy badać zachowanie zlokalizowanych andersonowsko stanów pod wpływem oddziaływań, są jasne solitony w kondensacie Bosego-Einsteina. Solitony możemy traktować jako cząstki kwantowe posiadające masę.

W pracy [37] badaliśmy zachowanie zlokalizowanych andersonowsko stanów w obecności oddziaływania między nimi. Rozważaliśmy układ opisany hamiltonianem

$$\begin{aligned}H &= H_{r_1} + H_{r_2} + U \\ U &= -N^3 \cos(\Delta\phi) e^{-\frac{N}{2}\Delta r},\end{aligned}\quad (3.25)$$

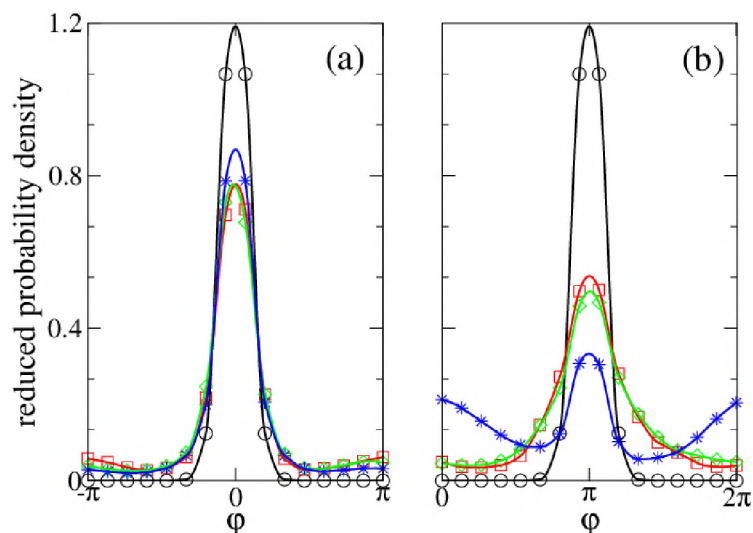
gdzie  $H_r$  mają postać (3.21), a  $U$  jest potencjałem oddziaływania między solitonami o masie  $N$  zależnym od ich wzajemnej odległości  $\Delta r$  oraz względnej fazy  $\Delta\phi$  [38]. Przeprowadzając niezależny od czasu rachunek zaburzeń oraz przygotowując ewolucję w czasie układu dwóch solitonów opisanych hamiltonianem (3.25) badaliśmy wpływ potencjału  $U$  na początkowo andersonowsko zlokalizowane solitony. W wyniku oddziaływania solitonów gęstości prawdopodobieństwa stanów własnych pełnego hamiltonianu (3.25) nie wykazują eksponencjalnego profilu. Mechanizm zaniku andersonowskiej lokalizacji jest inny od tych



Rysunek 3.2: Rysunki górne przedstawiają dwa zlokalizowane stany własne efektywnego hamiltonianu środka masy jasnego solitonu (3.21). Rysunki dolne przedstawiają gęstość prawdopodobieństwa solitonów bez oddziaływań (czarna linia) oraz jednocząstkowe gęstości otrzymane w rachunku perturbacyjnym (czerwona linia). Andersonowskie ogony znikają, jednak pik w gęstości prawdopodobieństwa znalezienia solitonu nie zmienił swojego położenia. Rysunek pochodzi z pracy [37].

znanych w literaturze [39, 40]. Gdy oddziaływanie zależy jedynie od względnej odległości między cząstkami, w rachunku perturbacyjnym diagonalizujemy macierz zaburzenia, a szukane stany własne są kombinacją liniową stanów własnych hamiltonianu (3.21). Otrzymane gęstości prawdopodobieństwa są sumą eksponencjalnie zlokalizowanych gęstości. W przypadku jasnych solitonów posiadających dodatkowy stopień swobody, tzn. fazę, poprawka do energii w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń znika, gdyż  $U \propto \cos(\Delta\phi)$ . Niezerowy przyczynek pojawia się dopiero w drugim rzędzie. Wysokoenergetyczne stany własne mają bardzo dużą długość lokalizacji Andersona co w praktyce oznacza, iż w skończonych układach są one zdelokalizowane. Sprzęgnięcie stanów niezaburzonych z takimi wysokoenergetycznymi stanami prowadzi do delokalizacji jasnych solitonów. Na rysunku (rys. 3.2) przedstawione są przykładowe zlokalizowane stany własne efektywnego hamiltonianu środka masy solitonu (3.21) oraz zredukowane gęstości prawdopodobieństwa otrzymane w rachunku zaburzeń. Andersonowskie ogony znikają, jednak pik w gęstości prawdopodobieństwa położenia każdego z solitonów nie zmienił swojej pozycji.

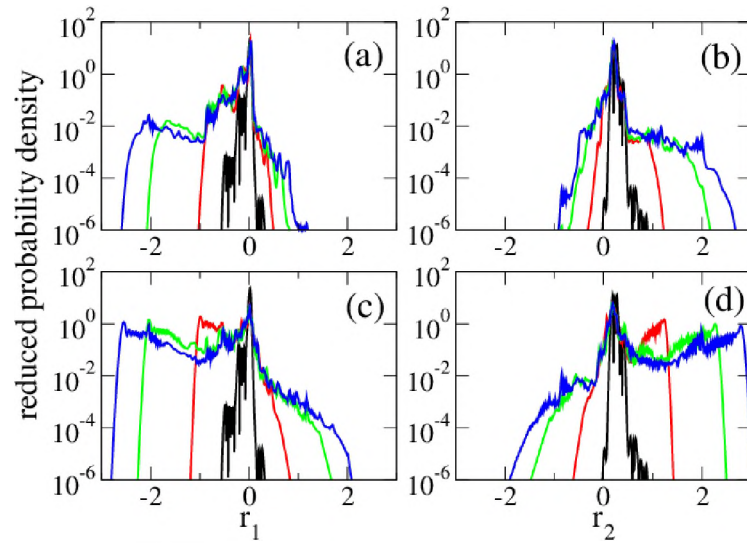
Przeprowadzając rachunek zaburzeń zmuszeni byliśmy do założenia słabego oddziaływania między solitonami. Chcąc wyjść poza przybliżenia rachunku perturbacyjnego przygotowaliśmy ewolucję czasową stanu kwantowego dwóch niezależnych andersonowsko zlokalizowanych solitonów znajdujących się blisko siebie. Całkując w czasie równanie Schrödingera



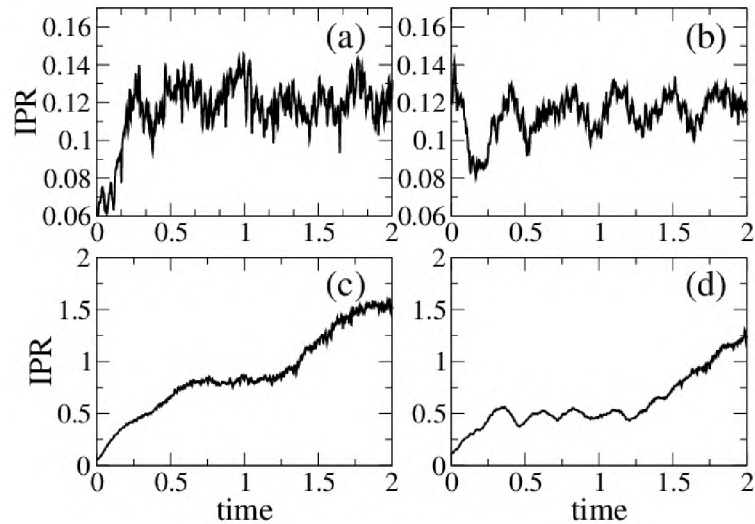
Rysunek 3.3: Zredukowana gęstość prawdopodobieństwa dla względnej fazy solitonów dla różnych chwil czasowych. Czarne kółka odpowiadają rozkładowi fazy w chwili początkowej. Na lewym rysunku rozkład fazy wycentrowany wokół  $\phi = 0$  pozostaje niemal niezmienny w czasie ewolucji, co oznacza iż przyciągający charakter oddziaływań między solitonami nie zmienia się. Inna sytuacja ma miejsce na prawym rysunku, gdzie początkowy odpychający charakter oddziaływań w czasie ewolucji zmieniał się, tzn. prawdopodobieństwo przyciągania i odpychania się solitonów było niemal równe (niebieska linia). Rysunek pochodzi z pracy [37].

z hamiltonianem (3.25) uwzględniającym oddziaływania między solitonami przygotowaliśmy symulację dla dwóch przypadków oddziaływań, tzn. gdy stan początkowy opisujący względną fazę solitonów jest wycentrowany w  $\phi = 0$  - oddziaływanie jest przyciągające oraz w  $\phi = \pi$  - oddziaływanie jest odpychające (rys. 3.3). Rozkład fazy wycentrowany wokół zera pozostaje niemal niezmienny w czasie trwania ewolucji układu, co oznacza, iż solitony cały czas się przyciągają. Odmienna sytuacja ma miejsce gdy początkowy rozkład fazy wycentrowany jest w  $\phi = \pi$ . Rozkład ten zmienia się w czasie ewolucji, co oznacza, iż charakter oddziaływań między solitonami zmienia się w czasie - od niemal jedynie odpychających po sytuację, w której solitony odpychają się i przyciągają z podobnym prawdopodobieństwem. Efekty delokalizacji, tzn. rozmycie zredukowanej gęstości prawdopodobieństwa położenia solitonu, są dużo większe dla drugiego przypadku (rys. 3.4). Aby porównać efekt ilościowo na rysunku (rys. 3.5) przedstawiono ewolucję czasową skali długości, na której środek masy solitonu jest zlokalizowany (ang. “Inverse Participation Ratio”, IPR).

Podsumowując, w pracy omówiliśmy nietypowy mechanizm delokalizacji wynikający z oddziaływań zależnych zarówno od odległości, jak i względnej fazy solitonów. Wyniki prac są wskazówką dla grup eksperymentalnych chcących badać lokalizację Andersona jasnych solitonów.



Rysunek 3.4: Zredukowana gęstość prawdopodobieństwa położenia każdego z solitonów dla różnych chwil czasowych. Czarna linia odpowiada chwili początkowej, niebieska chwili końcowej ewolucji. Rysunki (a) i (b) odpowiadają sytuacji, gdy solitony w chwili początkowej się przyciągają. Rysunki (c) i (d), gdy solitony w chwili początkowej się odpychają. Rysunek pochodzi z pracy [37].



Rysunek 3.5: Ewolucja czasowa skali długości, na której zlokalizowany jest środek masy każdego z dwóch oddziałujących solitonów. Rysunki (a) i (b) odpowiadają początkowym oddziaływaniom przyciągającym. Rysunki (c) i (d) początkowym oddziaływaniom odpychającym. Rysunek pochodzi z pracy [37].

Aby zaobserwować wspomniany efekt należy unikać wzbudzeń wielosolitonowych (tzw. “soliton trains”) [41].

### **3.3. Lokalizacja Andersona ciemnego solitonu**

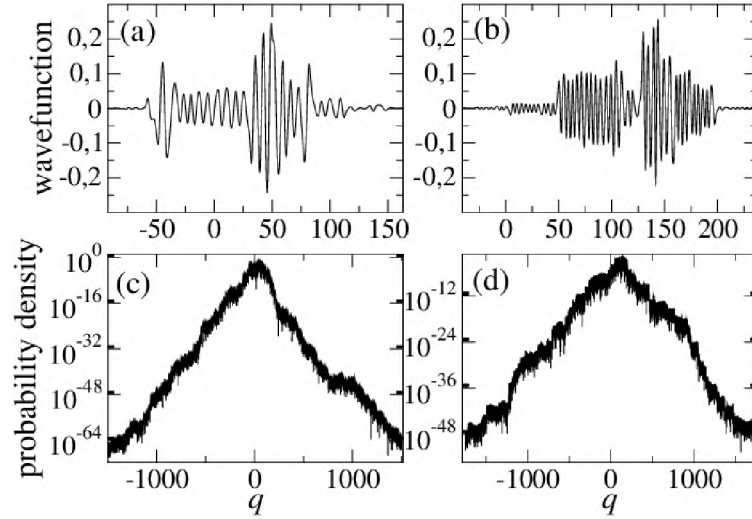
W przeciwieństwie do jasnego solitonu, będącego stanem podstawowym równania GP, ciemny soliton to kolektywnie wzbudzony stan układu, w którym aby zmniejszyć energię należy przyspieszyć soliton. Oznacza to, że energetycznie korzystniejsze dla układu jest wzbudzenie stopnia swobody związanego z położeniem solitonu.

Jak zostało pokazane w [34, 35] środek masy jasnego solitonu może ulec lokalizacji Andersona w potencjale przypadkowym jeśli jego amplituda jest znacznie mniejsza od potencjału chemicznego układu. Efektywny hamiltonian  $H_r$  opisujący położenie ciemnego solitonu jest bardzo podobny do hamiltonianu dla jasnego solitonu. Można oczekiwać, że dla ciemnego solitonu również zajdzie lokalizacja Andersona. Należy jednak pamiętać, iż z powodu malejącej do zera, wraz z rozmiarem układu, przerwy energetycznej odpowiadającej wzbudzeniom fononów nie możemy otrzymać trwałego zlokalizowanego ciemnego solitonu, ponieważ rozpada się on emitując fonony z charakterystycznym czasem życia. Istotne staje się wyliczenie czasu życia takiego zlokalizowanego stanu.

W pracy [42] przedstawiliśmy przykłady andersonowsko zlokalizowanych stanów własnych hamiltonianu opisującego położenie ciemnego solitonu (rys. 3.6 ) oraz oszacowaliśmy ich czasy życia. Otrzymane czasy życia są rzędu czasu życia kondensatu w standardowych eksperymentach, co stanowi ważną informację z doświadczalnego punktu widzenia. Eksperymentatorzy mają wystarczającą ilość czasu aby wzbudzić ciemny soliton, poczekać aż jego środek masy ulegnie lokalizacji Andersona, a następnie dokonać pomiaru gęstości.

### **3.4. Porównanie efektywnego opisu lokalizacji Andersona jasnego solitonu z w pełni wielociałowymi symulacjami numerycznymi**

Przewidywania lokalizacji Andersona solitonów, które przedstawiłem do tej pory, bazowały na efektywnym kwantowym opisie położenia solitonu w obecności nieporządku. W niniejszej części przedstawię krótko wyniki numeryczne symulacji wielociałowych, otrzymanych przez współautorów mojej pracy [43], które potwierdzają poprawność stosowanego przeze mnie opisu



Rysunek 3.6: Przykładowy andersonowsko zlokalizowanych stanów własnych efektywnego hamiltonianu (3.24) opisującego położenie ciemnego solitonu w obecności nieporządku. Rysunek pochodzi z pracy [42].

efektywnego. Pozwalają one także rzucić światło na problem co dzieje się z oddziałującym układem  $N$ -ciał, gdy obserwujemy lokalizację Andersona.

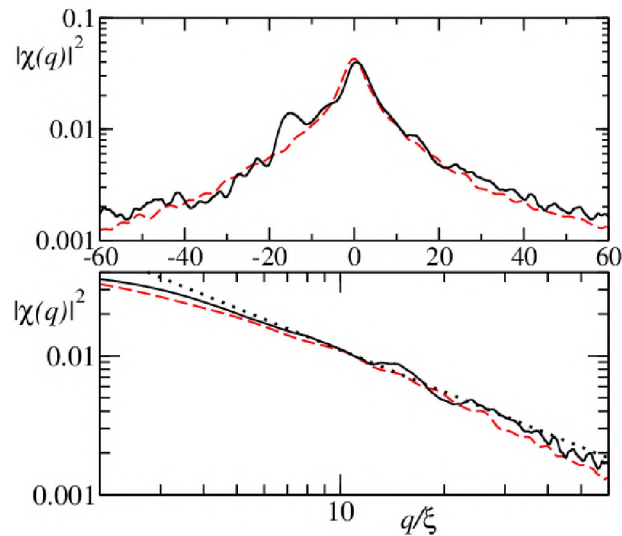
Rozważamy jednowymiarowy układ  $N$  bozonów z przyciągającymi oddziaływaniami kontaktowymi. W formalizmie drugiej kwantyzacji hamiltonian układu ma postać (zakładamy  $m = \hbar = 1$ )

$$\hat{H} = \int dz \hat{\psi}^\dagger(z) \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) \right] \hat{\psi}(z) + \frac{g}{2} \int dz \hat{\psi}^\dagger(z) \hat{\psi}^\dagger(z) \hat{\psi}(z) \hat{\psi}(z) \quad (3.26)$$

gdzie  $g < 0$  jest miarą siły oddziaływań, a  $V(z)$  jest zewnętrznym potencjałem. Bez potencjału zewnętrznego dla dużej ilości atomów w opisie średniopółowym stan podstawowy układu odpowiada sytuacji kiedy każdy atom znajduje się w stanie jednocząstkowym będącym jasnym solitonem

$$\psi_0(z) = \sqrt{\frac{N}{2\xi}} \frac{e^{-i\theta}}{\cosh z/\xi}. \quad (3.27)$$

o szerokości  $\xi = -\frac{2}{Ng}$ , globalnej fazie  $\theta$  i potencjałem chemicznym  $\mu = -N^2g^2/8$ . Ansatz Bethe'go [44] daje nam dokładny stan podstawowy wielociałowego układu w jednym wymiarze. Rozwiązanie takie przewiduje jednorodną gęstość atomów. Źródłem różnic pomiędzy opisem wielociałowym, a średniopółowym jest sposób opisu środka masy układu. We właściwym opisie środek masy musi być opisany kwantowym operatorem położenia. Poprawność efektywnej teorii dla długich czasów życia układu nie jest oczywista, a każdy nieuwzględniony wielociałowy efekt może zniszczyć lokalizację Andersona. Jednocząstkowy opis nie daje również jasnej odpowiedzi



Rysunek 3.7: Gęstość prawdopodobieństwa położenia środka masy solitonu w końcowej chwili czasowej ewolucji otrzymana w symulacji wielocząłowej (linia ciągła, uśredniona po 96 realizacjach nieporządku) oraz w ramach opisu jednocząstkowego (linia przerywana uśredniona po 1000 realizacjach nieporządku). Czerwona kropkowana krzywa na dolnym rysunku przedstawia przewidywanie  $1/|q|$  teoretyczne dla jednocząłowej teorii. Rysunek pochodzi z pracy [43].

w jaki sposób lokalizacja Andersona środka masy ujawni się w eksperymencie. Celem pracy było przygotowanie symulacji numerycznych układu wielocząłowego i odpowiedź na pytanie czy lokalizacja Andersona przeżywa w obecności oddziaływań oraz w jaki sposób ujawni się w eksperymencie.

W pracy [43] przy pomocy pełnego wielocząłkowego hamiltonianu z nieporządkiem numerycznie przeanalizowano układ  $N$  bozonów w jednym wymiarze i pokazano, że lokalizacja Andersona przeżywa w obecności przyciągających oddziaływań międzycząłkowych. Nie zaniebując żadnego procesu fizycznego można wysymulować wynik pomiaru położenia wszystkich atomów w eksperymencie.

Początkowo, środek masy solitonu dany jest gaussowskim pakietem będącym stanem podstawowym pułapki harmoniczej, który po jej wyłączeniu rozszerza się w obecności nieporządku. Każda ze składowych energetycznych pakietu scharakteryzowana jest własną długością lokalizacji. Cały pakiet, będący superpozycją zlokalizowanych stanów, wykazuje algebraiczną lokalizację na dużych odległościach [35]. Na rysunku (rys. 3.7) przedstawiono porównanie wyników ewolucji środka masy solitonu w opisie wielocząłowym i efektywnym jednocząłkowym. Zgodność opisu efektywnego i pełnego wielocząłkowego jest bardzo dobra i potwierdza poprawność stosowanej przeze mnie metody.

W przypadku jasnego solitonu oddziaływania między atomami są przyciągające. Ciekawym pytaniem jest czy oddziaływania przyciągające wspomagają czy nie wspomagają lokalizację Andersona ? Aby odpowiedzieć na to pytanie, porównaliśmy długość lokalizacji Andersona środka masy przyciągających się cząstek z długością lokalizacji Andersona pojedynczej cząstki w tym samym nieporządku dla takiej samej energii przypadającej na cząstkę oraz dla tego samego wektora falowego przypadającego na cząstkę  $k/N$ . Dla pędów  $k < 1/\sigma_0$  oraz dla słabego nieporządku stosunek wynosi:

$$\frac{L_1(k/N)}{L_N(k)} = N^2 \left[ \frac{\pi k \xi}{\sinh \pi k \xi} \right]^2 \frac{1 - k \sigma_0}{1 - k \sigma_0 / N}. \quad (3.28)$$

Czynnik  $N^2$  mocno faworyzuje lokalizację solitonu i odzwierciedla kolektywne zachowanie  $N$  przyciągających się bozonów. Kolejne wyrazy wpływają na delokalizację, co odzwierciedla fakt, iż środek masy solitonu odczuwa wygładzony nieporządek, który mniej efektywnie lokalizuje cząstki i skutkuje większą długością lokalizacji Andersona. O tym, czy wygrają efekty lokalizacji czy delokalizacji decydują wartości parametrów  $N$ ,  $k\xi$  oraz  $k\sigma_0$ , zatem nie można udzielić jednoznacznej odpowiedzi czy oddziaływania przyciągające wspomagają czy nie wspomagają lokalizację Andersona.

### 3.5. Publikacje związane z rozdziałem

— M. Płodzień, K. Sacha,

*Breakdown of Anderson localization of interacting quantum bright solitons,*

**Phys. Rev. A 86, 033617 (2012)**

Wszystkie wyniki zostały otrzymane przez doktoranta.

— M. Mochol, M. Płodzień, K. Sacha,

*Dark soliton in a disorder potential,*

**Phys. Rev. A 85, 023627 (2012)**

Kwantowy opis ciemnego solitonu oraz symulacje numeryczne w sekcji III stanowią osiągnięcie doktoranta.

— D. Delande, K. Sacha, M. Płodzień, S. K. Avazbaev, J. Zakrzewski,

*Many-body Anderson localization in one dimensional systems,*

**New J. Phys. 15 (2013) 045021**



Wyniki symulacji w ramach efektywnej teorii jednociałowej przedstawione na rys. 5 zostały otrzymane przez doktoranta.

## 4. Kondensat spinorowy w niejednorodnym zewnętrznym polu magnetycznym

W rozdziale wprowadzimy pojęcie kondensatu spinorowego oraz omówimy pokrótce jego własności. Następnie omówimy wyniki przeprowadzonego eksperymentu z kondensatem spinorowym o spinie  $F = 2$  atomów rubidu-87 w zewnętrznym niejednorodnym polu magnetycznym. Przedstawimy model teoretyczny tłumaczący wyniki doświadczenia oraz omówimy jego przewidywania dla innych układów eksperymentalnych.

### 4.1. Wstęp

Kiedy kondensat Bosego-Einsteina jest spułapkowany w pułapce magnetycznej spin każdego atomu zorientowany jest wzdłuż kierunku lokalnego pola magnetycznego, zatem spinowe stopnie swobody są zamrożone i w przybliżeniu pola średniego idealny kondensat opisujemy funkcją skalarną. Odmienna sytuacja ma miejsce, gdy kondensat spułapkowany jest w optycznej pułapce dipolowej. Kierunek spinu każdego atomu może zmieniać się w wyniku oddziaływań międzyatomowych. Funkcja falowa opisująca kondensat ma  $2F + 1$  wyrazów, które zależą od położenia i czasu. Kondensat, w którym nie zaniebujemy spinowych stopni swobody nazywamy kondensatem spinorowym [45]. Funkcję falową idealnego kondensatu spinorowego  $N$  atomów możemy zapisać w postaci:

$$\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \prod_{i=1, N} \begin{bmatrix} \Psi_{m_F}(\vec{r}_i) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_{-m_F}(\vec{r}_i) \end{bmatrix},$$

gdzie  $\Psi_{m_F}$  to jednocząstkowe funkcje odpowiadające atomom o rzucie spinu  $m_F = \{-F, \dots, F\}$  na wybraną oś kwantyzacji.

W opisie średniopolowym jednocząstkowa energia atomu bez oddziaływań wynosi:

$$E_0 = \int dr \sum_{m_F=-2,2} \Psi_{m_F}^* \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(r) - pm_F + qm_F^2 \right] \Psi_{m_F},$$

gdzie współczynnik  $p = -g\mu_B B$  związany jest z liniowym efektem Zeemana, a współczynnik  $q = \frac{(g\mu_B B)^2}{E_{hf}}$  z kwadratowym efektem Zeemana, gdzie energia  $E_{hf}$  jest rozszczepieniem struktury nadsubtelnej. Energia spinowych oddziaływań dwucząstkowych ma postać:

$$E_{int} = \int dr \left[ \frac{c_0}{2} n^2 + \frac{c_1}{2} |F|^2 + \frac{c_2}{2} |A|^2 \right],$$

przy czym  $n = \sum_{m_F} |\psi_{m_F}|^2$  jest gęstością wszystkich atomów w kondensacie. Wyraz

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\Psi_2\Psi_{-2} - 2\Psi_1\Psi_{-1} + \Psi_0^2), \quad (4.1)$$

jest amplitudą pary singletowej spinu, a kwadrat amplitudy operatora spinu  $|F|^2 = \sum_{\mu} F_{\mu}(r)^* F_{\mu}(r)$  składa się z elementów

$$F_{\mu}(r) = \sum_{m_F, m'_F} \psi_{m_F}^*(r) (F_{\mu})_{m_F m'_F} \psi_{m'_F}(r), \quad (4.2)$$

gdzie  $F_{\mu}$  są macierzami operatorów rzutu spinów w bazie własnej  $|m_F\rangle_z$ . W naszym przypadku rozważamy atomy o spinie  $F = 2$ , zatem

$$F_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$F_y = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & -i\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$F_z = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Równania GP dla komponentu  $m_F$  otrzymujemy wykonując pochodną wariacyjną energii  $E_0 + E_{int}$  po  $\psi_{m_F}^*$ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{m_F}(r)}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \psi_{m_F}^*(r)}, \quad (4.6)$$

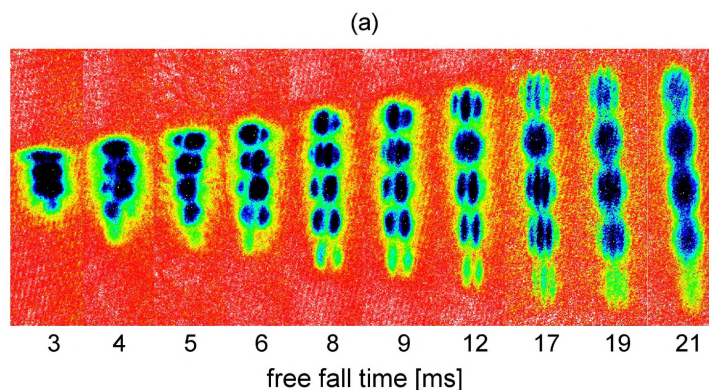
co prowadzi do następujących równań opisujących ewolucję w czasie komponentów spinora:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_{\pm 2}}{\partial t} &= \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + V(r) \mp 2p + 4q + c_0 n \pm 2c_1 F_z - \mu \right] \psi_{\pm 2} \\ &\quad + c_1 F_{\mp} \psi_{\pm 1} + \frac{c_2}{\sqrt{5}} A \psi_{\mp 2}^*, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_{\pm 1}}{\partial t} &= \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + V(r) \mp p + q + c_0 n \pm c_1 F_z - \mu \right] \psi_{\pm 1}, \\ &\quad + c_1 \left( \frac{\sqrt{6}}{2} F_{\mp} \psi_0 + F_{\pm} \psi_{\pm 2} \right) - \frac{c_2}{\sqrt{5}} A \psi_{\mp 1}^*, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} &= \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + V(r) + c_0 n - \mu \right] \psi_0 \\ &\quad + \frac{\sqrt{6}}{2} c_1 (F_+ \psi_1 + F_- \psi_{-1}) + \frac{c_2}{\sqrt{5}} A \psi_0^*, \end{aligned} \quad (4.7)$$

gdzie

$$F_+ = F_-^* = 2(\psi_2^* \psi_1 + \psi_{-1}^* \psi_{-2}) + \sqrt{6}(\psi_1^* \psi_0 + \psi_0^* \psi_{-1}), \quad (4.8)$$

$$F_z = 2(|\psi_2|^2 - |\psi_{-2}|^2) + |\psi_1|^2 - |\psi_{-1}|^2. \quad (4.9)$$



Rysunek 4.1: Komponenty kondensatu spinorowego (od  $|m_F = +2\rangle_z$  na samej górze, do  $|m_F = -2\rangle_z$  na samym dole) po różnym czasie spadku  $t_I$  w niejednorodnym polu magnetycznym przestrzennie rozseparowane przez silny impuls Sterna-Gerlacha działający w kierunku osi  $z$ . W każdym komponencie obserwujemy prążki interferencyjne, których ilość zwiększa się wraz z czasem oddziaływania kondensatu z polem niejednorodnym  $B_d$ . Rysunek pochodzi z pracy [46].

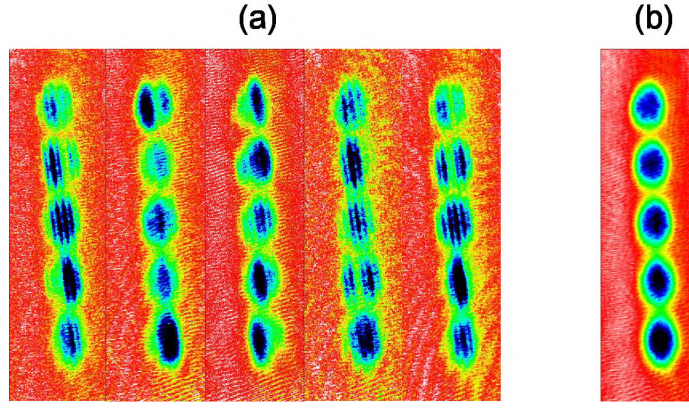
W ramach teorii pola średniego w kolejnej części rozdziału rozważymy oddziaływanie spinorowego kondensatu Bosego - Einsteina o spinie  $F = 2$  z zewnętrznymi słabymi niejednorodnymi polami magnetycznymi.

## 4.2. Eksperyment i model teoretyczny z atomami w niejednorodnym polu magnetycznym

### Eksperyment - Niejednorodność pierwszego rzędu

W pracy [46] omawiamy eksperyment z kondensatem Bosego-Einsteina atomów rubidu-87 w stanie  $|F = 2, m_F = 2\rangle_x$  w pułapce wydłużonej horyzontalnie w kierunku  $x$ . Pole magnetyczne pułapki zastąpiono przez słabe, niejedrodne pole magnetyczne  $B_d$ , w którym kondensat swobodnie opada w polu grawitacyjnym przez czas  $t_I$ , a następnie składowe  $m_F$  kondensatu są przestrzennie rozseparowane przez silny impuls Sterna-Gerlacha wzdłuż prostopadłej osi  $z$ , po czym następuje pomiar absorpcyjny. Wyniki eksperymentu przedstawione są na rysunku (rys. 4.1), w którym każdy z paneli odpowiada różnym czasom oddziaływania  $t_I$  spadającego kondensatu z niejednorodnym polem magnetycznym  $B_d$ .

Każda składowa  $|m_F\rangle_z$  kondensatu spinorowego posiada prążki interferencyjne, których ilość wzrasta wraz z czasem oddziaływania  $t_I$  atomów z polem niejednorodnym  $B_d$ . Położenie prążków jest przypadkowe, o czym można się przekonać przygotowując wiele realizacji eksperymentu z takimi samymi warunkami początkowymi i uśredniając po wszystkich



Rysunek 4.2: (a) Pięć różnych realizacji eksperymentu z takimi samymi warunkami początkowymi oraz (b) uśrednienie po 72 realizacjach. Rysunek pochodzi z pracy [46].

realizacjach. Na rysunku (rys. 4.2) w części (a) przedstawiono pięć realizacji eksperymentu z takimi samymi warunkami początkowymi, a w części (b) uśrednienie po 72 takich realizacjach.

### Model teoretyczny

Podczas wyłączenia pułapki magnetycznej przy przechodzeniu pola magnetycznego przez zerową wartość następuje mieszanie Majorany stanów  $|m_F\rangle_x$  [47]. Następnie atomy w różnych stanach  $|m_F\rangle_x$  w niejednorodnym polu wzdłuż osi  $x$  poruszają się z różnymi prędkościami względnymi, co prowadzi do obrazu interferencyjnego po zmianie osi kwantyzacji z osi  $x$  na oś  $z$  wskutek impulsu Sterna-Gerlacha.

W modelowaniu zjawiska założyliśmy, bez straty ogólności, iż wszystkie atomy znajdują się w zerowym stanie pędowym  $\psi$  w kombinacji liniowej stanów  $|m_F\rangle_x$ , która odpowiada  $|m_F = 2\rangle_z$ . Stan początkowy kondensatu ma postać:

$$|\Psi(t=0)\rangle = \psi(x, z)|m_F = 2\rangle_z = \psi(x, z) \left( \frac{1}{4}|m_F = 2\rangle_x - \frac{1}{2}|m_F = 1\rangle_x \right. \quad (4.10)$$

$$\left. + \sqrt{\frac{3}{8}}|m_F = 0\rangle_x \right. \quad (4.11)$$

$$\left. - \frac{1}{2}|m_F = -1\rangle_x + \frac{1}{4}|m_F = -2\rangle_x \right). \quad (4.12)$$

Niejednorodne pole magnetyczne wzdłuż osi  $x$  postaci  $B_d = (B_{d0} + \partial_x B_d x)\hat{x}$  oddziałuje z atomami przez czas  $t_I$ . Każdy komponent nabywa fazę  $m_F\phi = m_F g_F \mu_B B_{d0} t_I / \hbar$  oraz pęd

$m_F k = m_F g_F \mu_B \frac{\partial B_d}{\partial x} t_I / \hbar$ . Po czasie  $t = t_I$  stan układu wynosi:

$$|\Psi\rangle(t = t_I) = \frac{1}{4}\psi_{k_2}(x, z, t_I)|m_F = 2\rangle_x - \frac{1}{2}\psi_{k_1}(x, z, t_I)|m_F = 1\rangle_x + \quad (4.13)$$

$$+ \sqrt{\frac{3}{8}}\psi_{k_0}(x, z, t_I)|m_F = 0\rangle_x \quad (4.14)$$

$$- \frac{1}{2}\psi_{k_{-1}}(x, z, t_I)|m_F = -1\rangle_x + \frac{1}{4}\psi_{k_{-2}}(x, z, t_I)|m_F = -2\rangle_x, \quad (4.15)$$

gdzie każdy z komponentów  $m_F$  opisany jest stanem

$$\psi_{k_{m_F}}(x, z, t) |m_F\rangle_x = e^{im_F(kx+\phi)} |m_F\rangle_x. \quad (4.16)$$

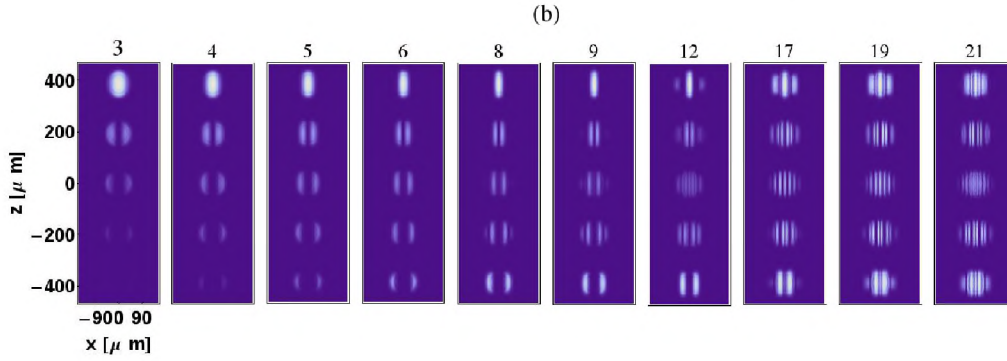
Komponenty poruszające się z różnymi prędkościami ulegają zmieszaniu przy zmianie osi kwantyzacji z  $x$  na  $z$ , co skutkuje obrazem interferencyjnym podczas rzutowania funkcji falowej  $|\Psi(t_I)\rangle$  na różne stany  $|m_F\rangle_z$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{1}{256} |\psi_{k_2} + 4\psi_{k_1} + 6\psi_{k_0} + 4\psi_{k_{-1}} + \psi_{k_{-2}}|^2, \\ \rho_1 &= \frac{1}{64} |\psi_{k_2} + 2\psi_{k_1} - 2\psi_{k_{-1}} - \psi_{k_{-2}}|^2, \\ \rho_0 &= \frac{3}{128} |\psi_{k_2} - 2\psi_{k_0} + \psi_{k_{-2}}|^2, \\ \rho_{-1} &= \frac{1}{64} |\psi_{k_2} - 2\psi_{k_1} + 2\psi_{k_{-1}} - \psi_{k_{-2}}|^2, \\ \rho_{-2} &= \frac{1}{256} |\psi_{k_2} - 4\psi_{k_1} + 6\psi_{k_0} - 4\psi_{k_{-1}} + \psi_{k_{-2}}|^2, \end{aligned} \quad (4.17)$$

gdzie

$$\rho_{m_F}(x, z) = |{}_z\langle m_F | \Psi(t_I) \rangle|^2. \quad (4.18)$$

Wyniki przedstawionego prostego modelu zgadzają się z pełnymi symulacjami numerycznymi, które przeprowadziliśmy zakładając stan początkowy atomów jako profil Thomasa-Fermiego, a następnie całkując w czasie równanie Schrödingera uwzględniając jedynie oddziaływanie atomów z polem magnetycznym [45]. W symulacjach zaniedbaliśmy oddziaływania między atomami, gdyż w eksperymencie po wyłączeniu pułapki gęstość atomów szybko staje się niewielka. Wyniki symulacji dla różnych czasów oddziaływania atomów z niejednorodnym polem przedstawione są na rysunku (rys. 4.3). Możemy zaobserwować jasną antysymetrię pomiędzy składowymi  $\pm m_F$ , którą widać również w wynikach eksperymentalnych.



Rysunek 4.3: Komponenty kondensatu spinorowego (od  $|m_F = +2\rangle_z$  na samej górze, do  $|m_F = -2\rangle_z$  na samym dole) po różnym czasie spadku  $t_I$  w niejednorodnym polu magnetycznym przestrzennie rozseparowane przez impuls Sterna-Gerlacha. W każdym komponencie można zauważyć prążki interferencyjne, których ilość zwiększa się wraz z czasem oddziaływania kondensatu z polem niejednorodnym  $B_d$ . Rysunek pochodzi z pracy [46].

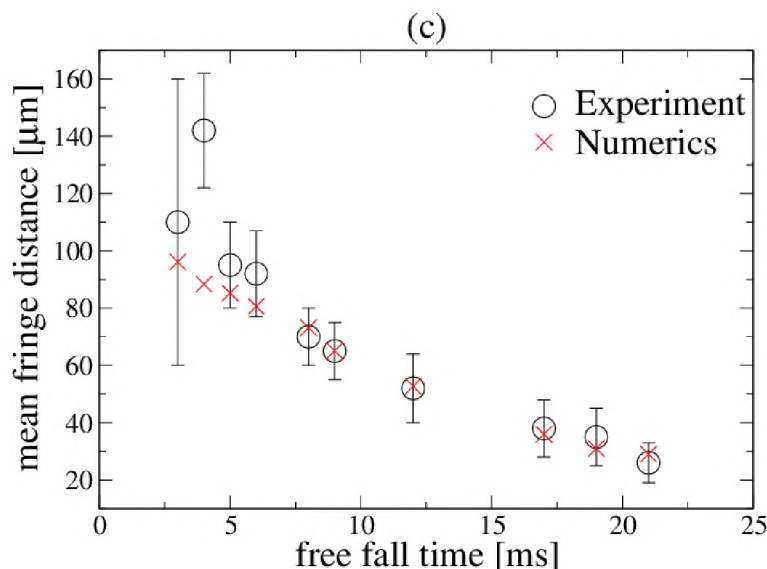
W celu ilościowego porównania wyników eksperymentu z symulacjami numerycznymi na rysunku (rys. 4.4) przedstawiliśmy odległość między prążkami dla składowej  $|m_F = +2\rangle_z$  w funkcji czasu oddziaływania  $t_I$  atomów z polem  $B_d$ . Zgodność z eksperymentem jest bardzo dobra.

Przesunięcie prążków o połowę okresu przestrzennego stowarzyszone jest ze zmianą fazy o  $\pi$ . Dla warunków w przeprowadzonym eksperymencie taka zmiana fazy ma miejsce, gdy pole magnetyczne zmieni się o wartość  $\Delta B_{d0} \sim 10^{-4}G$ , która jest bliska stabilności układu cewek generujących pole magnetyczne. Zatem niestabilność układu generującego pole magnetyczne prowadzi do przypadkowego położenia prążków w różnych realizacjach eksperymentalnych.

### Niejednorodność drugiego rzędu

Gdy niejednorodność pola jest niewielka, ale czas oddziaływania z nim jest duży, efekty interferencyjne mają miejsce i mogą zaburzyć badane zjawisko. Zakładając eliminację wszystkich gradientów nie można zaniedbać niejednorodności wyższych rzędów. Rozważmy przypadek jednowymiarowy w obecności pułapki harmoniczej bez zewnętrznych pól magnetycznych. Wszystkie atomy odczuwają ten sam potencjał pułapkujący. Gdy uwzględnimy niejednorodność pola magnetycznego drugiego rzędu, tzn. gdy zewnętrzne pole magnetyczne wynosi  $B_d = (B_0 + \alpha x^2/2)\hat{x}$ , każdy z komponentów  $|m_F\rangle_x$  odczuwa inny potencjał pułapkujący w ramach liniowego efektu Zeemana. Skutkuje to względnym ruchem komponentów  $|m_F\rangle_x$ , co w wyniku wyrzutowania stanów na oś  $z$  ukaże strukturę interferencyjną.





Rysunek 4.4: Eksperymentalne i teoretyczne odległości między prążkami dla  $|m_F = +2\rangle_z$  w funkcji czasu oddziaływania. Rysunek pochodzi z pracy [46].

Przeprowadziliśmy symulację numeryczną układu, w którym jednowymiarowy kondensat spinorowy ewoluje w obecności pułapki harmoniczej z uwzględnieniem oddziaływań spinowych oraz w obecności zewnętrznego pola magnetycznego z niejednorodnością drugiego rzędu. W tym celu całkowaliśmy numerycznie równania (4.7). Parametry symulacji odpowiadają parametrom z pracy [48], w której badano dynamiczną niestabilność w kondensacie spinorowym. W pierwszym przypadku w symulacjach uwzględniliśmy obecność pułapki harmoniczej oraz krzywiznę pola magnetycznego. W drugim przypadku zaniedbaliśmy obecność krzywizny pola. Przypadek bez krzywizny jest dramatycznie różny od przypadku z krzywizną, w którym struktury interferencyjne pojawiają się dużo wcześniej niż efekty związane z dynamiczną niestabilnością. W ostatniej symulacji rozważyliśmy obecność krzywizny, jednak podczas rzutowania nie zmienialiśmy osi kwantyzacji. Jak należało się spodziewać struktury interferencyjne nie były widoczne.

### 4.3. Wnioski

W rozdziale przedstawiliśmy wyniki eksperymentu ewolucji kondensatu spinorowego w niejednorodnym polu magnetycznym [46] oraz model teoretyczny tłumaczący obserwacje. Pojawiająca się struktura interferencyjna w każdym komponencie  $m_F$  kondensatu wynika ze względnej prędkości komponentów wyrzutowanych na oś prostopadłą do kierunku wektora ich prędkości.

Pokazaliśmy również, iż nawet w obecności pułapki harmoniczej, gdy oddziaływania między atomami są istotne, skompensowanie jedynie gradientów zewnętrznych pól magnetycznych nie usuwa efektów interferencyjnych w eksperymencie, gdy ten trwa przez długi czas. Pokazaliśmy, iż obecność krzywizny pola magnetycznego, która wpływa na efektywną częstość pułapki odczuwaną przez każdy z komponentów  $m_F$ , prowadzi do względnego ruchu atomów i w efekcie pojawiają się efekty interferencyjne, które mogą być mylone z efektami dynamicznej niestabilności.

Wyniki naszych badań stanowią ważną informację dla grup eksperymentalnych, które nie mogą zaniedbać efektów związanych z czasem trwania eksperymentu, stabilnością układów generujących pola magnetyczne oraz układów kompensujących zewnętrzne niejednorodności wyższych rzędów.

#### **4.4. Publikacje związane z rozdziałem**

- M. Witkowski, R. Gartman, B. Nagórny, M. Piotrowski, M. Płodzień, K. Sacha, J. Szczepkowski, J. Zachorowski, M. Zawada, W. Gawlik,  
*“Matter-wave interference versus spontaneous pattern formation in spinor Bose-Einstein condensates”*,  
**Phys. Rev. A 88, 025602 (2013)**

Cały teoretyczny opis eksperymentu oraz symulacje numeryczne stanowią osiągnięcie doktoranta.

## 5. Podsumowanie

W pracy omówiliśmy wyniki badań nad efektami nieporządku w zimnych gazach atomowych.

Przedstawiliśmy koncepcję lasera przypadkowego dla fal materii. Przedstawiliśmy propozycje eksperymentu wraz z przewidywaniami teoretycznymi w układzie jedno- i dwuwymiarowym.

Omówiliśmy zagadnienie wpływu oddziaływań pomiędzy jasnymi solitonami na lokalizację Andersona. Wynik pracy stanowi wskazówkę dla grup eksperymentalnych chcących badać lokalizację Andersona jasnego solitonu w kondensacie Bosego-Einsteina. Aby zobserwować badane zjawisko należy unikać wzbudzeń wielosolitonowych, gdyż oddziaływania między solitonami niszczą lokalizację Andersona.

Zbadaliśmy możliwość lokalizacji Andersona ciemnego solitonu oraz obliczyliśmy czas życia andersonowsko zlokalizowanego stanu. Otrzymany czas życia jest rzędu czasów życia kondensatów w standardowych eksperymentach, co daje nadzieję na eksperymentalne zbadanie lokalizacji Andersona ciemnego solitonu.

Zbadaliśmy wpływ międzycząstkowych oddziaływań przyciągających na lokalizację Andersona. Wyniki pracy stanowią również dowód poprawności efektywnego opisu jednociąłowego dla jasnego solitonu w kondensacie Bosego-Einsteina.

Ostatnia część pracy poświęcona była zachowaniu spinorowego kondensatu w obecności zewnętrznych niejednorodnych pól magnetycznych. Na podstawie naszego modelu teoretycznego wyjaśniliśmy źródło przypadkowego położenia prążków interferencyjnych w różnych realizacjach eksperymentalnych oraz wskazaliśmy implikacje dla innych układów eksperymentalnych.

## A. Implementacja numeryczna optycznego potencjału przypadkowego

Optyczny potencjał przypadkowy w dwóch wymiarach można otrzymać numerycznie wg następującej procedury [49, 50, 51]:

1. Tablicę  $E$  o wymiarach  $N \times N$  wypełniamy zespolonymi liczbami losując część rzeczywistą i urojoną z rozkładu normalnego - jest to zespolone pole elektromagnetyczne.
2. Przechodzimy do przestrzeni pędów wykonując Dyskretną Transformatę Fouriera (Discrete Fourier Transform, DFT, [52])  $\tilde{E} = \mathcal{DFT}[E]$ . Każdy punkt  $\tilde{E}(m_1, m_2)$  przemnażamy przez funkcję obcięcia  $\kappa(m_1, m_2) = \Theta(R - r(m_1, m_2))$ , gdzie  $R$  jest promieniem matówki, a  $r(m_1, m_2)$  odlegością liczoną względem środka tablicy,  $\Theta$  jest funkcją Heaviside'a. Otrzymujemy  $\tilde{E}_{cutoff}$ .
3. Wracamy do przestrzeni rzeczywistej poprzez odwrotną transformatę Fouriera:  $E = \mathcal{DFT}^{-1}[\tilde{E}_{cutoff}]$ .
4. Potencjał przypadkowy otrzymujemy wyliczając  $V(i, j) = |E_{cutoff}(i, j)|^2$ .
5.  $V$  przesuwamy i normalizujemy tak aby średnia wartość wynosiła  $\bar{V} = 0$ , a odchylenie standardowe  $std(V) = 1$ .
6. Tablicę  $V$  przemnażamy przez zadaną przez amplitudę nieporządku  $V_0$  - w ten sposób wygenerowaliśmy potencjał przypadkowy z funkcją korelacji zdefiniowaną poprzez funkcję  $\kappa(m_1, m_2)$  podobnie jak w równaniu (2.7).

Długość korelacji otrzymanego potencjału przypadkowego wynosi  $\sigma = \frac{N}{2\pi R}$ . Chcąc otrzymać układ jednowymiarowy dokonujemy analogicznej procedury dla tablicy  $E$  o długości  $N$ .

## B. Numeryczne obliczanie długości lokalizacji Andersona

### B.1. Długość lokalizacji Andersona w jednym wymiarze

Rozważmy zdyskretyzowane stacjonarne równanie Schrödingera

$$-J[a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n] + V_n a_n = E a_n \quad (\text{B.1})$$

gdzie  $J = \frac{\hbar^2}{2m(\delta z)^2}$ ,  $\delta z$  jest krokiem dyskretyzacji,  $E$  jest energią własną, a  $V_n$  jest wartością potencjału przypadkowego w punkcie  $z_n$ . Powyższe równanie można przepisać w postaci rekurencyjnej

$$a_{n+1} = \left( \frac{V_n - E}{J} + 2 \right) a_n - a_{n-1}, \quad (\text{B.2})$$

Przepisując powyższe równanie w postaci macierzowej otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

gdzie

$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{V_n - E}{J} + 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

co prowadzi do

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n T_i \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Macierz  $\mathcal{M} = \prod_{i=1}^n T_i$  nazywamy macierzą transferu, która jest produktem  $n$  losowych macierzy sparametryzowanych energią  $E$  i konkretną realizacją nieporządku  $\{V\}$ . Twierdzenie Oseledec'a [53] i Furstenberg'a [54] mówi, że wektor początkowy  $(a_0, a_1)^T$  asymptotycznie zachowuje

się jak  $e^{\pm\gamma'(E)n}$  dla  $n \rightarrow \infty$ , gdzie  $\gamma'(E)$  jest dodatnią, nielosową wielkością. Dla zadanej amplitudy nieporządku  $V_0$  wielkość  $\gamma(E) = \gamma'(E)/\delta z$  jest wykładnikiem Lapunowa opisującym eksponencjalne zachowanie  $a$ . Dla każdej realizacji nieporządku  $\{V\}$  istnieje dokładnie jeden wektor eksponencjalnie zanikający z  $n \rightarrow \infty$  [55], a otrzymany wykładnik Lapunowa jest odwrotnością długości lokalizacji  $l_{loc} = \gamma(E)^{-1}$ .

Eksponencjalny wzrost elementów macierzy  $\mathcal{M}$  uniemożliwia proste iteracyjne obliczanie jej wartości własnych, w związku z czym wymagana jest regularyzacja macierzy transferu w trakcie iteracji. Dla układów w jednym wymiarze wygodniejszą metodą obliczania długości lokalizacji Andersona jest analizowanie wielkości  $R_n = \frac{\psi_n}{\psi_{n-1}}$ . Wykładnik Lapunowa  $\gamma'(E)$  dany jest przez

$$\gamma'(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln R_n, \quad (\text{B.6})$$

gdzie  $R_n$  spełnia rekurencyjną zależność

$$R_{n+1} = V_n - E - \frac{1}{R_n}. \quad (\text{B.7})$$

Iterując powyższe równanie oraz sumując w każdym kroku  $\ln R_n$  zgodnie z (B.6) otrzymujemy odwrotność długość lokalizacji Andersona.

## B.2. Długość lokalizacji Andersona w dwóch wymiarach

W pracy nie prezentuję wyników numerycznego wyliczenia długości lokalizacji Andersona w dwóch wymiarach, gdyż rachunki są dopiero w fazie wstępnej. Mimo to przedstawiam metodę pozwalającą wyliczyć długość lokalizacji Andersona w przypadku dwuwymiarowym ufając, że niniejszy dodatek stanowić będzie użyteczną informację dla osób, które zetkną się z moją pracą i będą zainteresowane analizą lokalizacji Andersona w układach wielowymiarowych.

W układach dwuwymiarowych obliczenie długości lokalizacji Andersona jest dużo bardziej złożone numerycznie niż w przypadku jednowymiarowym. Wynika to z faktu eksponencjalnej zależności długości lokalizacji od energii. W paragrafie tym przedstawimy, bazujący na jednoparametrowej teorii skalowania, algorytm pozwalający otrzymać długość lokalizacji Andersona [56]. Pomysł polega na dyskretyzacji przestrzeni i analizowaniu pasa składającego się z  $N$  plasterków o długości  $M$ , gdzie  $M \ll N$ , i obliczaniu efektywnej długości lokalizacji  $\lambda_M$

w takim pasie. Następnie analizując zachowanie wielkości  $\Lambda = \frac{\lambda M}{M}$  w zależności od długości plastra  $M$ , energii cząstki  $E$  i amplitudy nieporządku  $V_0$ , jesteśmy w stanie otrzymać długość lokalizacji Andersona w dwóch wymiarach.

## Funkcja Green'a

Dla hamiltonianu ciasnego wiązania w jednym wymiarze otrzymujemy równanie Schrödingera w postaci (B.2), tzn.:

$$a_{n+1} = (E - V_n)a_n - a_{n-1}. \quad (\text{B.8})$$

Spodziewamy się, że dla wymiarów  $d > 1$  istnieje jego uogólnienie postaci

$$A_{n+1} = (E - H_n)A_n - A_{n-1}. \quad (\text{B.9})$$

Dla wymiaru  $d = 2$  macierz  $H_n$  jest hamiltonianem w  $n$ -tym plastrze o długości  $M$  niesprzężonym do plastrów  $n - 1$  oraz  $n + 1$ . Poniżej przedstawimy wyprowadzenie równania (B.9).

Rozważmy hamiltonian dla  $N$  plastrów, każdy o długości  $M$ , tzn.:

$$H(N) = \sum_{n=1}^N H_n^0 + \sum_{n=2}^N H_n^J = H_N^0 + H_N^V, \quad (\text{B.10})$$

gdzie  $H_n^0$  jest hamiltonianem w plastrze  $n$

$$H_n^0 = \sum_{j=1}^M [\epsilon_{nj}|n, j\rangle\langle n, j| + J(|n, j\rangle\langle n, j+1| + h.c.)], \quad (\text{B.11})$$

a  $H_n^J$  jest związany z tunelowaniem między plastrami

$$H_n^J = \sum_{j=1}^M J(|n, j\rangle\langle n-1, j| + h.c.). \quad (\text{B.12})$$

Dodając do układu  $N + 1$  plaster otrzymujemy

$$H(N+1) = H(N) + \sum_{j=1}^M \epsilon_{N+1, j}|N+1, j\rangle\langle N+1, j| + \sum_{j=1}^M J(|N+1, j\rangle\langle N, j| + h.c.), \quad (\text{B.13})$$

w którym możemy wyszczególnić

$$\begin{aligned}
H_0(N+1) &= H(N) + \sum_{j=1, M} \epsilon_{N+1, j} |N+1, j\rangle \langle N+1, j|, \\
H' &= \sum_{j=1}^M J(|N+1, j\rangle \langle N, j| + h.c.).
\end{aligned}
\tag{B.14}$$

Ostatecznie hamiltonian dla  $N+1$  plastrów zapisujemy w postaci

$$H(N+1) = H_0(N+1) + H'. \tag{B.15}$$

Interesuje nas rezolwenta  $G(N+1)$  hamiltonianu  $H(N+1)$ , czyli rozwiązanie równania

$$(z - H(N+1))G(N+1) = 1. \tag{B.16}$$

Zajmijmy się jednak najpierw rezolwentą operatora  $H_0(N+1)$ , która spełnia równanie

$$(z - H_0(N+1))G_0(N+1) = 1. \tag{B.17}$$

Korzystając z  $G = \frac{1}{z-H} = \sum_{\alpha} \frac{|\alpha\rangle \langle \alpha|}{z-E_{\alpha}}$  możemy zapisać

$$\begin{aligned}
G_0(N+1) &= \frac{1}{z - H_0(N+1)} = \frac{1}{z - H(N) - \sum_{j=1, M} \epsilon_{N+1, j} |N+1, j\rangle \langle N+1, j|} \\
&= \frac{1}{z - H(N)} + \sum_{j=1}^M \frac{|N+1, j\rangle \langle N+1, j|}{z - \epsilon_{N+1, j}} \\
&= G(N) + \sum_{j=1}^M \frac{|N+1, j\rangle \langle N+1, j|}{z - \epsilon_{N+1, j}}.
\end{aligned}
\tag{B.18}$$

Wracając do  $G(N+1)$  i korzystając z tożsamości

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{B} + \frac{1}{B}(B-A)\frac{1}{A}, \tag{B.19}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
A &= z - H_0 - H', \\
B &= z - H_0,
\end{aligned}
\tag{B.20}$$



otrzymujemy równanie na rezolwentę hamiltonianu  $H(N + 1)$ :

$$G(N + 1) = G_0(N + 1) + G_0(N + 1)H'G(N + 1). \quad (\text{B.21})$$

Interesuje nas funkcja Green'a sprzęgająca pierwszy i ostatni plaster w pasku, zatem musimy obliczyć element macierzowy

$$\langle 1, i | G(N + 1) | N + 1, k \rangle = \langle 1, i | G_0(N + 1) | N + 1, k \rangle + \langle 1, i | G_0(N + 1) H' G(N + 1) | N + 1, k \rangle. \quad (\text{B.22})$$

Pierwsze wyrażenie po prawej strony znika, gdyż

$$\langle 1, i | G_0(N + 1) | N + 1, k \rangle = \underbrace{\langle 1, i | G(N) | N + 1, k \rangle}_{=0} + \sum_{j=1}^M \frac{\overbrace{\langle 1, i | N + 1, j \rangle \langle N + 1, j | N + 1, k \rangle}^{=0}}{z - \epsilon_{N+1,j}}, \quad (\text{B.23})$$

zatem

$$\begin{aligned} \langle 1, i | G(N + 1) | N + 1, k \rangle &= \langle 1, i | \left( G(N) + \sum_{j=1}^M \frac{|N + 1, j \rangle \langle N + 1, j|}{z - \epsilon_{N+1,j}} \right) H' G(N + 1) | N + 1, k \rangle \\ &= \langle 1, i | G(N) H' G(N + 1) | N + 1, k \rangle \\ &= \langle 1, i | G(N) \sum_{j=1}^M J(|N + 1, j \rangle \langle N, j| + |N, j \rangle \langle N + 1, j|) G(N + 1) | N + 1, k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^M J \langle 1, i | G(N) | N, j \rangle \langle N + 1, j | G(N + 1) | N + 1, k \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Wprowadźmy operator rzutowy na podprzestrzeń związaną z  $N + 1$  plastrzem

$$P = \sum_{j=1}^M |N + 1, j \rangle \langle N + 1, j|, \quad (\text{B.25})$$

oraz

$$Q = 1 - P. \quad (\text{B.26})$$

Wykorzystując te operatory możemy zapisać

$$PG(z)P = \frac{P}{z - PH_0P - PR(z)P}, \quad (\text{B.27})$$

gdzie

$$R(z) = H' + H' \frac{Q}{z - QH_0(N+1)Q - QH'Q} H'. \quad (\text{B.28})$$

Zatem

$$\begin{aligned} H(N+1) &= H_0(N+1) + H', \\ H_{N+1} &\equiv PH_0(N+1)P, \\ PR(z)P &= PH' \frac{Q}{z - Q(H_0 + H')Q} H'P \\ &= J^2 \langle N, j | \frac{1}{z - Q(H_0 + H')Q} | N, k \rangle \\ &= J^2 \langle N, j | G(N) | N, k \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned} G_{1,N+1} &= \langle 1, j | G(N+1) | N+1, k \rangle, \\ G_{N+1,N+1} &= \langle N+1, j | G(N+1) | N+1, k \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} G_{1,N+1} &= JG_{1,N}G_{N+1,N+1}, \\ G_{N+1,N+1} &= \frac{1}{E - H_{N+1} - J^2G_{N,N}} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

oraz

$$G_{1,N+1}(E - H_{N+1} - J^2G_{N,N}) = JG_{1,N}. \quad (\text{B.32})$$

Wstawiając  $G_{N,N} = \frac{1}{J}G_{1,N-1}^{-1}G_{1,N}$  otrzymujemy

$$G_{1,N+1}(E - H_{N+1} - J^2 \frac{1}{J} G_{1,N-1}^{-1} G_{1,N}) = JG_{1,N}. \quad (\text{B.33})$$

Mnożąc powyższe równanie z lewej przez  $G_{1,N+1}^{-1}$  oraz z prawej przez  $G_{1,N}^{-1}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} (E - H_{N+1} - JG_{1,N-1}^{-1}G_{1,N})G_{1,N}^{-1} &= JG_{1,N+1}^{-1} \\ (E - H_{N+1})G_{1,N}^{-1} &= JG_{1,N+1}^{-1} + JG_{1,N-1}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Definiując  $A_{N+1} = G_{1,N}^{-1}$  otrzymujemy

$$(E - H_{N+1})A_{N+1} = JA_{N+2} + JA_N, \quad (\text{B.35})$$

co jest równoważne uogólnieniu równania Schrödingera (B.8) dla hamiltonianu ciasnego wiązania w jednym wymiarze

$$\begin{aligned} A_{N+1} &= (E - H_N)\frac{1}{J}A_N - A_{N-1} \\ A_1 &= 1 \\ A_0 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Przyjmijmy  $J = 1$ .

### Długość lokalizacji w pasie

Długość lokalizacji Andersona  $\lambda_M$  w pasie o  $n$  plastrach, każdy o długości  $M$ , definiujemy jako

$$\frac{2}{\lambda_M} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Tr}|G_{1n}|^2, \quad (\text{B.37})$$

gdzie  $G_{1n}$  jest funkcją Green'a sprzęgającą pierwszy plaster z ostatnim [56]. Aby otrzymać  $\lambda_M$  należy iterować równanie (B.36). Jednak trudność związana z eksponencjalnym wzrostem elementów macierzowych  $A_n = G_{1,n-1}^{-1}$  przy  $n \rightarrow \infty$  wymaga od nas regularyzacji macierzy  $A_n$  w trakcie procedury iteracyjnej, podobnie jak miało to miejsce w jednym wymiarze. Wprowadźmy macierz jednostkową  $B_0 = 1$  i rozważmy kolejne kroki iteracyjne równania (B.36).

1.  $n = 1$

$$A_2 = (E - H_1)A_1 - A_0. \quad (\text{B.38})$$

Wykonując prawostronne mnożenie równania (B.38) przez  $A_1^{-1}$  otrzymujemy

$$\bar{A}_2 = (E - H_1)\bar{A}_1 - \bar{A}_0, \quad (\text{B.39})$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{A}_2 &= A_2 A_1^{-1}, \\ \bar{A}_1 &= 1, \\ \bar{A}_0 &= A_0 A_1^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Zdefiniujmy zregularyzowaną macierz  $B_0$  jako

$$\bar{B}_1 = B_0 A_1^{-1} \frac{1}{b_1}, \quad (\text{B.41})$$

gdzie  $b_1$  jest normą macierzy  $\bar{B}_1$ , tzn.

$$b_1^2 = \|B_0 A_1^{-1}\|^2 = \|A_1^{-1}\|^2. \quad (\text{B.42})$$

Norma macierzy  $C$  zdefiniowana jest jako  $\|C\| = \sqrt{\sum_{i,j} |C_{i,j}|^2} = \sqrt{\text{Tr}|C|^2}$ .

2.  $n = 2$

Postępując analogicznie jak w kroku poprzednim wykonujemy:

$$\bar{A}_3 = (E - H_2)\bar{A}_2 - \bar{A}_1 / \times \bar{A}_2^{-1}, \quad (\text{B.43})$$

otrzymując

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}}_3 &= (E - H_2)\bar{\bar{A}}_2 - \bar{\bar{A}}_1 \\ \bar{\bar{A}}_3 &= \bar{A}_3 \bar{A}_2^{-1} \\ \bar{\bar{A}}_2 &= 1 \\ \bar{\bar{A}}_1 &= \bar{A}_1 \bar{A}_2^{-1} \\ \bar{\bar{B}}_2 &= \bar{B}_1 \bar{A}_2^{-1} \frac{1}{b_2} \\ b_2^2 &= \|\bar{B}_1 \bar{A}_2^{-1}\|^2 = \frac{1}{b_1^2} \|B_0 A_1^{-1} \bar{A}_2^{-1}\|^2 = \frac{1}{b_1^2} \|B_0 A_1^{-1} A_1 A_2^{-1}\|^2 = \frac{1}{b_1^2} \|A_2^{-1}\|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

3.  $n = 3$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{A}}_4 &= (E - H_3)\overline{\overline{A}}_3 - \overline{\overline{A}}_2 / \times \overline{\overline{A}}_3^{-1} \\
\overline{\overline{\overline{A}}}_4 &= (E - H_3)\overline{\overline{\overline{A}}}_3 - \overline{\overline{\overline{A}}}_2 \\
\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}_4 &= \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}_4 \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}_3^{-1} \\
\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}}_3 &= 1 \\
\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}}}_2 &= \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}}}_2 \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}}}_3^{-1} \\
\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{B}}}}}}}_3 &= \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{B}}}}}}}_3 \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}}}}_3^{-1} \frac{1}{b_3} \\
b_3^2 &= \|\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{B}}}}}}_3 \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}}}_3^{-1}\|^2 = \frac{1}{b_2^2} \|\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{B}}}}}_1 \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}}_2^{-1} (\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}}_3 \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}}_2^{-1})^{-1}\|^2 = \frac{1}{b_2^2} \|\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{B}}}}}_1 \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}}_3^{-1}\|^2 = \frac{1}{b_2^2 b_1^2} \|B_0 A_1^{-1} \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}}_3^{-1}\|^2.
\end{aligned} \tag{B.45}$$

Pamiętając, że

$$\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}}_3 = A_3 A_1^{-1}, \tag{B.46}$$

otrzymujemy

$$b_3^2 = \frac{1}{b_2^2 b_1^2} \|A_3^{-1}\|^2. \tag{B.47}$$

Łatwo teraz zauważyć, że zachodzi

$$\begin{aligned}
\|A_{n+1}^{-1}\|^2 &= b_{n+1}^2 b_n^2 \dots b_1^2, \\
\ln Tr|G_{1,n}|^2 &= 2(\ln b_{n+1} + \ln b_n + \dots + \ln b_1).
\end{aligned} \tag{B.48}$$

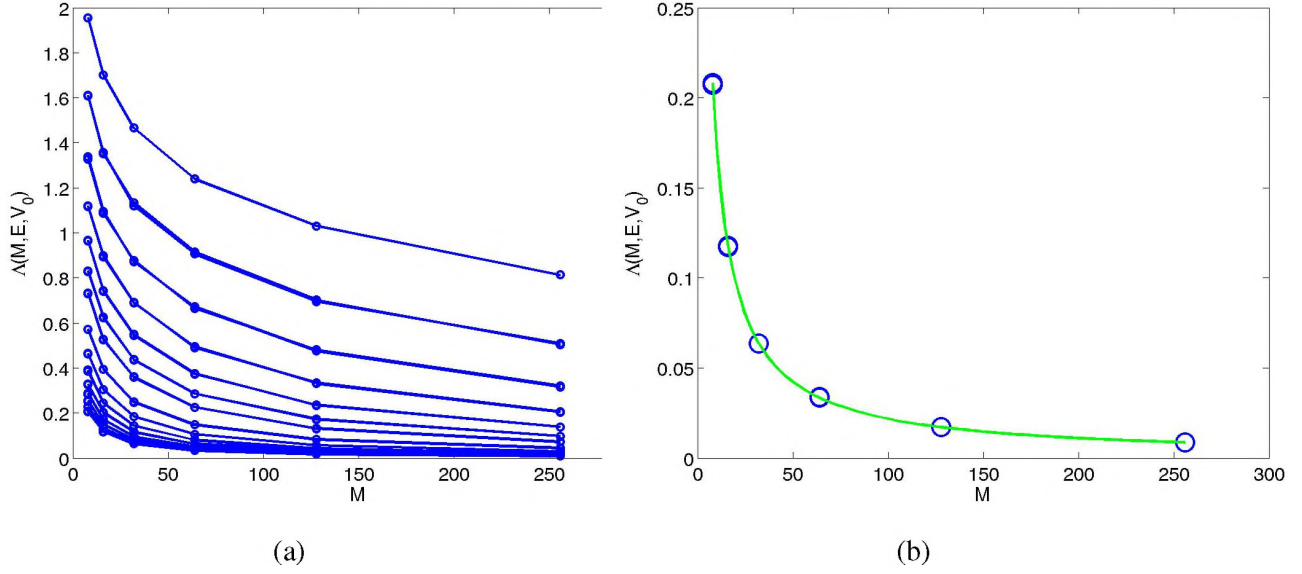
Długość lokalizacji w pasie o  $n$  plastrach, długości  $M$  każdy, wynosi

$$\lambda_M^{(n)} = -\frac{n}{c_{n+1}}, \tag{B.49}$$

gdzie  $c_{n+1} = c_n + \ln b_{n+1}$ . Iterację należy przeprowadzać tak długo, aż względna dokładność  $\varepsilon$  wielkości  $\lambda_M^{(n)}$  zostanie osiągnięta. Procedury regularyzacji nie trzeba przeprowadzać dla każdego kroku. Łatwo można pokazać, że wyniki są zgodne dla regularyzacji dokonanej co  $n_0$  kroków. W praktyce  $n_0 = 10$ .

## Skalowanie

Rozważmy potencjał przypadkowy, o amplitudzie  $V_0$ , losowany z rozkładu jednorodnego z zakresu  $[-V_0/2, V_0/2]$ . Dla fali o energii  $E$  w nieporządku o amplitudzie  $V_0$  oznaczmy długość lokalizacji w pasie o szerokości  $M$  jako  $\lambda_M = \lim_{n \rightarrow N_{max}} \lambda_M^{(n)}$ . Zdefiniujmy następnie



Rysunek B.1: Rysunek (a) przedstawia zbiór  $\Lambda$  w funkcji długości plastra  $M = \{8, 16, 32, 64, 128, 256\}$  dla fali o energii  $E = 0$  dla różnych amplitud nieporządku  $V_0 = \{15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6.5, 6, 5.5, 5, 4.5, 4\}$  (krzywa na samym dole odpowiada największej wartości  $V_0$ , krzywa na samej górze odpowiada najmniejszej wartości  $V_0$ ). Na rysunku (b) przedstawione jest dopasowanie wielomianu trzeciego stopnia w  $\xi/M$  (zielona linia) dla danych odpowiadających maksymalnej amplitudzie nieporządku i energii fali  $E = 0$  (niebieskie kółka). Uzyskana wartość  $\xi$  ustanawia absolutną pozycję krzywej skalowania.

efektywną długość lokalizacji wyrażoną w jednostkach długości plastra  $M$

$$\Lambda(M, E, V_0) = \frac{\lambda_M}{M}. \quad (\text{B.50})$$

Zgodnie z hipotezą skalowania istnieje funkcja  $f$  spełniająca

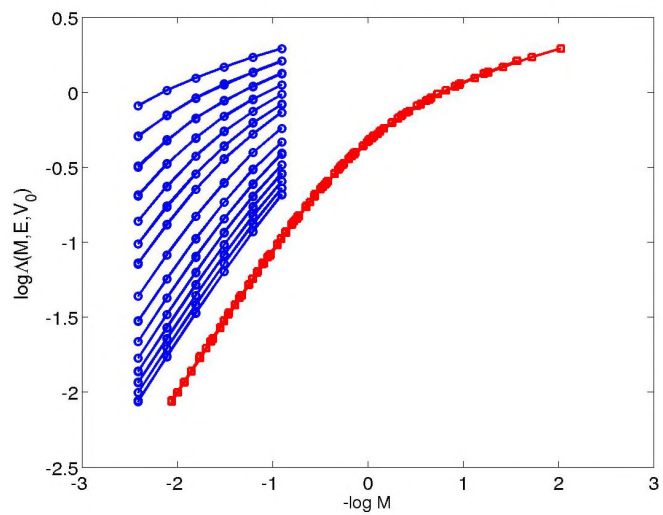
$$\Lambda(M, E, V_0) = f[\xi(E, V_0)/M], \quad (\text{B.51})$$

gdzie

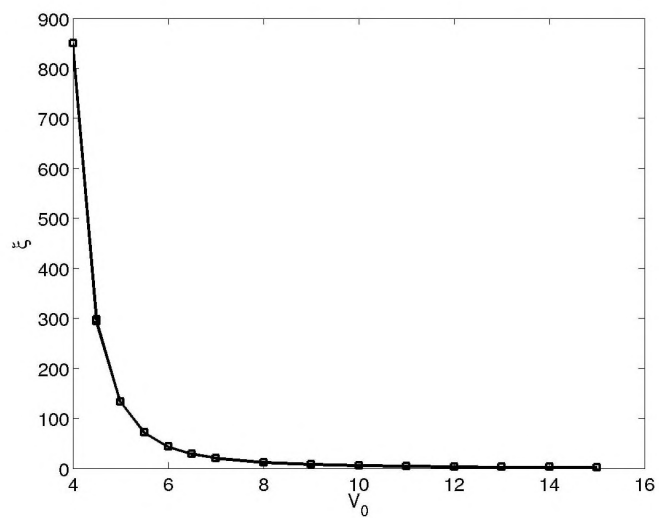
$$\xi(E, V_0) = M f^{-1}(\Lambda(M, E, V_0)), \quad (\text{B.52})$$

to szukana długość lokalizacji, która jest parametrem skalującym charakterystycznym dla zadanej energii fali  $E$  oraz zadanej amplitudy nieporządku  $V_0$ . Gdy  $\Lambda \ll 1$  to długość lokalizacji w pasku  $\lambda_M$  jest dużo mniejsza od jego szerokości, zatem  $\lambda_M$  zbiega się do  $\xi(E, V_0)$  i  $f(x) = x$ .

Nanosząc na wykres wielkość  $\Lambda(M, E, V_0)$  w funkcji  $M$  otrzymujemy zestaw krzywych scharakteryzowanych różnymi energiami fal  $E$  oraz amplitudami nieporządku  $V_0$  (rys. B.1 (a)).



(a)



(b)

Rysunek B.2: Rysunek (a) przedstawia dane przed przesunięciem (niebieskie linie) oraz krzywą skalowania (czerwona linia). Rysunek (b) przedstawia długość lokalizacji w funkcji amplitudy nieporządku  $V_0$  dla energii  $E = 0$ .

Naszym celem jest znalezienie przesunięcia każdej krzywej, wzdłuż osi poziomej, o parametr  $\ln \xi_j$  (gdzie  $j$  numeruje kolejne pary parametrów  $(E_j, V_{0j})$ ) tak aby wszystkie dane ułożyły się na jednej krzywej skalowania. Absolutne położenie krzywej otrzymamy fitując wielomian w  $\xi/M$  do zbioru danych  $(M, \Lambda)$  dla najmniejszej energii  $E$  i największej amplitudy  $V_0$  (rys. B.1 (b)). Mając ustaloną absolutną pozycję krzywej skalowania możemy minimalizować wariancję  $\ln M - \ln \xi(E)$  dla każdego punktu dla każdej wartości  $\Lambda$ :

$$S = \sum_i \left[ \frac{1}{N_i} \sum_j [\ln M_{ij} - \ln \xi(E_j, V_{0j})]^2 - \left[ \frac{1}{N_i} \sum_j (\ln M_{ij} - \ln \xi(E_j, V_{0j})) \right]^2 \right], \quad (\text{B.53})$$

gdzie  $i$  przebiega po wszystkich wartościach  $\Lambda$ ,  $j$  po wszystkich parach  $(E, V_0)$ , a  $M_{ij}$  jest interpolowaną długością pasa dla zadanej pary  $(E, V_0)$ . Przesuwając wszystkie dane wzdłuż osi poziomej, o znaną wartość  $\ln \xi(E_j, V_{0j})$ , otrzymujemy krzywą skalowania (rys. B.2 (a)). Na rysunku (rys. B.2 (b)) przedstawione są otrzymane długości lokalizacji w funkcji amplitudy nieporządku  $V_0$  dla zadanej energii fali  $E = 0$ .

Przy ustalonej amplitudzie nieporządku  $V_0$  analogiczna procedura pozwoli otrzymać zależność długości lokalizacji Andersona od energii cząstki  $E$ .



# Bibliografia

- [1] P.W. Anderson. *Physical Review*, 109(5):1492, 1958.
- [2] B. L. Altshuler, D. Khmel'nitzkii, A. I. Larkin, and P. A. Lee. *Phys. Rev. B*, 22:5142, 1980.
- [3] C. A. Muller and D. Delande. *Chapter 9 in Les Houches 2009 - Session XCI: Ultracold Gases and Quantum Information*. Oxford University Press, 2011.
- [4] A.F. Ioffe and A.R. Regel. *Prog. Semicond.*, 4:237, 1960.
- [5] J.T. Edwards and D.J. Thouless. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 5(8):807, 1972.
- [6] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan. *Phys. Rev. Lett.*, 42:673, 1979.
- [7] R.L. Weaver. *Wave motion*, 12:129, 1990.
- [8] D.S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini. *Nature*, 390.
- [9] F. Scheffold, R. Lenke, R. Tweer, and G. Marget. *Nature*, 398.
- [10] I. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. *Nature*, 392:151, 1998.
- [11] C. Chin, R. Grimm, and E. Julienne, P. and Tiesinga. *Rev. Mod. Phys.*, 82:1225, 2010.
- [12] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect. *Nature*, 453:891, 2008.
- [13] G. Roati, C. D'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. For, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio. *Nature*, 453(7197):895, 2008.
- [14] F. Jendrzejewski, A. Bernard, K. Mueller, C. Patrick, V. Josse, M. Piraud, L. Pezze, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer. *Nature Phys.*, 8, 2012.
- [15] M. K Simon. *Probability Distributions Involving Gaussian Random Variables*. Springer, 2002.
- [16] L. Mandel and E. Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, 1996.
- [17] V. S. Letokhov. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 53.
- [18] C. Hui. *Optics and Photonics News*, 16:24, 2005.
- [19] S. John. *Phys. Rev. Lett.*, 58:2486, 1987.
- [20] M. Segev, Y. Silberberg, and D. N. Christodoulides. *Nature Photonics*, 7:197, 2013.
- [21] P. Pradhan and N. Kumar. *Phys. Rev. B*, 50:9644, 1994.
- [22] C.-K. Nam and Z.-Q. Zhang. *Phys. Rev. B*, 66:073101, 2002.
- [23] C. Gouedard, D. Husson, D. Sauteret, F. Auzel, and A. Migul. *J. Opt. Soc. Am*, 10:2358, 1993.

- [24] N. M. Lawandy, R. M. Balachandran, A. S. L. Gomes, and E. Sauvain. *Nature*, 368:436, 1994.
- [25] D. S. Wiersma and S. Cavalier. *Nature*, 414:708, 2001.
- [26] M. Noginov. *Solid-state random lasers*. Berlin: Springer, 2005.
- [27] M. Płodzień and K. Sacha. *Phys. Rev. A*, 84(2):023624, 2011.
- [28] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H. J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. *Science*, 275.
- [29] E. Hecht. *Optics, 4th edition*. Addison Wesley, 2002.
- [30] S. Kotani and B. Simon. *Commun. Math. Phys.*, 112:103, 1987.
- [31] P. Lugan, A. Aspect, L. Sanchez Palencia, D. Delande, G. Gremaud, C.A. Muller, and C. Miniatura. *Phys. Rev. A*, 80:023605, 2009.
- [32] M. Piraud and L. Sanchez-Palencia. *The European Physical Journal Special Topics*, 217(1):91, 2013.
- [33] P.G. Drazin and R. S. Johnson. Cambridge University Press, 1989.
- [34] K. Sacha, C. A. Muller, D. Delande, and J. Zakrzewski. *Phys. Rev. Lett.*, 103(21):210402, 2009.
- [35] K. Sacha, D. Delande, and J. Zakrzewski. *Acta Physica Polonica A*, 116:772, 2009.
- [36] J. Dziarmaga. *Phys. Rev. A*, 70(6):063616, 2004.
- [37] M. Płodzień and K. Sacha. *Phys. Rev. A*, 86:033627, 2013.
- [38] B. A. Malomed. *Phys. Rev. E*, 1998.
- [39] D. L. Shepelyansky. *Phys. Rev. Lett.*, 73.
- [40] J. C. Flores. *Phys. Rev. B*, 62.
- [41] K. E. Strecker, K. E. Partridge, G. B. Truscott, A. G. Hulet, and G. Randall. *Nature*, 417(6885):150, 2002.
- [42] M. Mochol, M. Płodzień, and K. Sacha. *Phys. Rev. A*, 85:023627, 2012.
- [43] D. Delande, K. Sacha, M. Płodzień, S.K. Avazbaev, and J. Zakrzewski. *New J. Phys.*, 15:045021, 2013.
- [44] J. B. McGuire. *J. Math. Phys.*, 5:622, 1964.
- [45] M. Ueda and Y. Kawaguchi. *Phys. Rep.*, 520, 2012.
- [46] R. Witkowski, M. Gartman, B. Nagórny, M. Piotrowski, M. Płodzień, K. Sacha, J. Szczepkowski, J. Zachorowski, M. Zawada, and W. Gawlik. *Phys. Rev. A*, 88:025602, 2013.
- [47] E. Majorana. *Nuovo Cimento*, 9:43, 1932.
- [48] J. Kronjäger, C. Becker, P. Soltan-Panahi, K. Bongs, and K. Sengstock. *Phys. Rev. Lett.*, 105:090402, 2010.
- [49] J.M. Huntley. *Appl. Opt.*, (3):4316, 1989.
- [50] P. Horak, J Y. Courtois, and G. Grynberg. *Phys. Rev. A*, 58:3953, 1998.
- [51] R. Kuhn. *Coherent Transport of Matter Waves in Disordered Optical Potentials*. PhD thesis, 2009.

- [52] E. Brigham. *The fast Fourier transform and its applications*. Prentice Hall, 1988.
- [53] V. I. Oseledec. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 19:197, 1968.
- [54] H. Furstenberg. *Trans. Am. Math. Soc.*, 108:377, 1963.
- [55] B. van Tiggelen. *Diffuse Waves in Complex Media, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, Les Houches, France, March 17-27, 1998*. 1998.
- [56] A. MacKinnon and B. Kramer. *Z. Phys. B*, 53:1, 1983.

## Matter-wave analog of an optical random laser

Marcin Płodzień and Krzysztof Sacha

*Instytut Fizyki imienia Mariana Smoluchowskiego and Mark Kac Complex Systems Research Center, Uniwersytet Jagielloński,  
ulica Reymonta 4, PL-30-059 Kraków, Poland*

(Received 22 March 2011; published 16 August 2011)

The accumulation of atoms in the lowest energy level of a trap and the subsequent out coupling of these atoms is a realization of a matter-wave analog of a conventional optical laser. Optical random lasers require materials that provide optical gain but, contrary to conventional lasers, the modes are determined by multiple scattering and not a cavity. We show that a Bose-Einstein condensate can be loaded in a spatially correlated disorder potential prepared in such a way that the Anderson localization phenomenon operates as a bandpass filter. A multiple scattering process selects atoms with certain momenta and determines laser modes which represents a matter-wave analog of an optical random laser.

DOI: [10.1103/PhysRevA.84.023624](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.023624)

PACS number(s): 03.75.Pp, 42.55.Zz

Conventional optical lasers require two ingredients: material that provides optical gain and an optical cavity responsible for coherent feedback and selection of resonant laser modes. However, it is also possible to achieve laser action without the optical cavity provided the gain material is an active medium with disorder [1]. Forty years ago Letokhov analyzed a light diffusion process with amplification and predicted that gain could overcome loss if the volume of a system exceeded a critical value [2]. Random lasing (i.e., light amplification in disordered gain media), achieved in a laboratory in the 1990s, attracts much experimental attention and offers possibilities for interesting applications [1,3–7]. Theoretical understanding of this phenomenon is still imperfect. Although the Letokhov model of diffusion with gain is useful in predicting certain properties of random lasers, it neglects coherent phenomena. There are various theoretical models of random lasing but it is widely accepted that interference in a multiple scattering process determines the spatial and spectral mode structure of a random laser [1].

Bose-Einstein condensation (BEC) of dilute atomic gases is a macroscopic accumulation of atoms in the lowest energy level of a trap when the temperature of the gas decreases [8]. This tendency of occupying a single state through the mechanism of stimulated scattering of bosons is an analog of mode selection in optical lasers due to the stimulated emission of photons. Gradual release of atoms from a trapped BEC allows for the realization of a matter-wave analog of a conventional optical laser [9–14]. The atom trap is an analog of the optical cavity. The lowest mode of the trap is a counterpart of an optical resonant mode. In conventional optical lasers the output coupler is usually a partially transmitting mirror. In atom lasers it involves, for example, a change of the internal state of the atom by means of a radio-frequency transition.

In the present paper we propose the realization of a matter-wave analog of an optical random laser. Suppose the BEC of a dilute atomic gas has been achieved in a trapping potential. That is, we begin with the accumulation of atoms in a single mode of the resonator (i.e., the lowest eigenstate of the trap). Then, let us turn off the trap and turn on a weak disorder potential. Starting with a BEC we have a guarantee that the disorder medium is *pumped* with coherent matter waves. We would like to raise the question of whether it is possible to

prepare spatially correlated disorder potential in such a way that narrow peaks can be observed in the spectrum of atoms that are able to leave the area of the disorder potential? In other words: if the multiple scattering of atoms in a disorder medium can lead to a selective spectral emission of matter waves from the medium?

In cold atom physics a disorder potential can be realized by means of an optical speckle potential [15,16]. Transmission of coherent light through a diffusing plate leads to a random intensity pattern in the far field. Atoms experience the presence of the radiation as an external potential  $V(\mathbf{r}) \propto \chi |E(\mathbf{r})|^2$  proportional to the intensity of the light field  $E(\mathbf{r})$  and atomic polarizability  $\chi$  whose sign depends on the detuning of the light frequency from the atomic resonance. Diffraction from the diffusive plate onto the location of atoms determines correlation functions of the speckle potential. We assume that the origin of the energy is shifted so that  $\overline{V(\mathbf{r})} = 0$  where the overbar denotes an ensemble average over disorder realizations. Standard deviation of the speckle potential  $V_0$  measures the strength of the disorder.

Let us begin with a one-dimensional (1D) problem. In a weak disorder potential atoms with  $k$  momentum undergo multiple scattering, diffusive motion, and finally localize with an exponentially decaying density profile due to the Anderson localization process, provided that the system size exceeds the localization length [17–19]. Taking the Born approximation to the second order in the potential strength, the inverse of the localization length is [20]  $l_{\text{loc}}^{-1} = (mV_0/\hbar^2k)^2 \mathcal{P}(2k)$ , where the Fourier transform of the pair correlation function of the speckle potential is

$$\mathcal{P}(k) = \int \frac{dq}{2\pi} \gamma(q)\gamma(k-q), \quad (1)$$

and  $\gamma(k) = \int dz \tilde{\gamma}(z)e^{-ikz}$  is the Fourier transform of the complex degree of coherence  $\tilde{\gamma}(z) = \overline{E^*(z+z')E(z')}/|E(z)|^2 = \int dy \mathcal{A}(y)e^{izy/\alpha} / \int dy \mathcal{A}(y)$ .  $\mathcal{A}(y)$  describes the aperture of the optics and  $\alpha$  is a constant dependant on the wavelength of the laser radiation and the distance of the diffusive plate from the atomic trap. In Ref. [21], where the experimental realization of the Anderson localization of matter waves is reported (see also [22]), a simple Heaviside step function  $\mathcal{A}(z) = \Theta(R - |z|)$  describes the aperture. The corresponding

$\gamma(k) = \pi\sigma_R\Theta(1 - |k\sigma_R|)$ , where  $\sigma_R = \alpha/R$  is the correlation length of the speckle potential. Consequently the power spectrum (1) decreases linearly and becomes zero for  $|k| \geq 2/\sigma_R$ . Thus, the Born approximation predicts an effective mobility edge at  $|k| = 1/\sigma_R$ , that is, atoms with larger momenta do not localize [21,23] (actually higher order calculations [24] show they do localize but with very large localization lengths, much larger than the system size in the experiment). Hence, neglecting atom interactions, if the width of the initial atom momentum distribution exceeds the mobility edge particles at the tail of the distribution avoid the Anderson localization and may leave the disorder area.

Let us modify the experiment reported in Ref. [21] by introducing an obstacle at the center of the diffusive plate so that the aperture is now described by  $\mathcal{A}(z) = \Theta(R - |z|) - \Theta(\rho - |z|)$  where  $\rho < R$ . It implies that

$$\gamma(k) = \pi \left( \frac{1}{\sigma_R} - \frac{1}{\sigma_\rho} \right)^{-1} [\Theta(1 - |k\sigma_R|) - \Theta(1 - |k\sigma_\rho|)], \quad (2)$$

where  $\sigma_\rho = \alpha/\rho$ . If the size of the obstacle  $\rho > R/3$ , interference of light passing through such a *double-slit* diffusive plate creates a peculiar speckle potential. That is, the power spectrum (1) disappears for  $|k| \geq 2/\sigma_R$  as previously but it is also zero for  $\frac{1}{\sigma_R} - \frac{1}{\sigma_\rho} < |k| < \frac{2}{\sigma_\rho}$ . Thus, according to the Born approximation there is a momentum interval where the localization length diverges. It implies that the Anderson localization process is able to operate as a bandpass filter letting particles with specific momenta leave the region of the disorder. Detection of escaping atoms should reveal a peak in the momentum spectrum corresponding to the interval where the localization length diverges.

Introducing two (or more) obstacles in the diffusive plate we can increase the number of momentum intervals with diverging  $l_{loc}$ . In Fig. 1 we present examples of the speckle potentials in the single obstacle case and the case of two obstacles located symmetrically around the plate center. In the latter case the aperture is described by  $\mathcal{A}(z) = \Theta(R - |z|) - \Theta(\rho - |z|) + \Theta(\xi - |z|)$  where  $\xi < \rho$  and

$$\gamma(k) = \pi \left( \frac{1}{\sigma_R} - \frac{1}{\sigma_\rho} + \frac{1}{\sigma_\xi} \right)^{-1} [\Theta(1 - |k\sigma_R|) - \Theta(1 - |k\sigma_\rho|) + \Theta(1 - |k\sigma_\xi|)], \quad (3)$$

with  $\sigma_\xi = \alpha/\xi$ . Figure 1 also presents localization lengths obtained numerically in the transfer-matrix calculation [24] that confirms the Born predictions.

To simulate an experiment we follow the parameters used in Ref. [21] where Anderson localization of matter waves has been observed. We assume that a BEC of  $N = 1.7 \times 10^4$   $^{87}\text{Rb}$  atoms is initially prepared in a quasi-1D harmonic trap with longitudinal and transverse frequencies  $\omega/2\pi = 5.4$  Hz and  $\omega_\perp/2\pi = 70$  Hz, respectively. In the following we adopt the harmonic oscillator units  $E_0 = \hbar\omega$ ,  $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ , and  $t_0 = 1/\omega$  for energy, length, and time, respectively. When the trapping potential is turned off and the speckle potential is turned on the expansion of the atomic cloud is initially dominated by the particle interactions until the density drops significantly and the atoms start feeling only the disorder potential. This initial stage of the gas expansion sets the momentum distribution of the atoms which may be

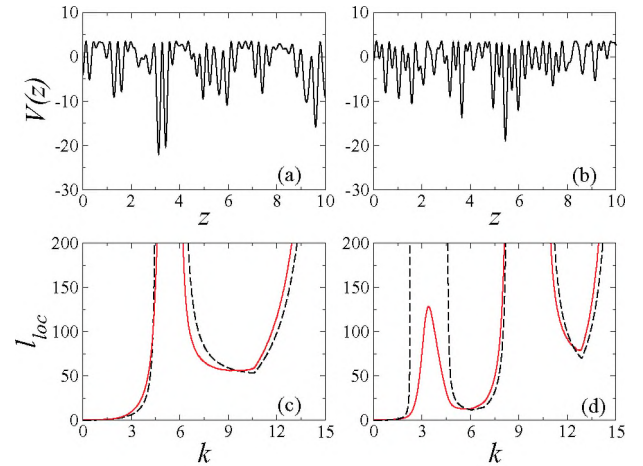


FIG. 1. (Color online) Examples of the speckle potential (top panels) and the corresponding localization length (bottom panels) obtained within the Born approximation (dashed black curves) and numerically in the transfer-matrix calculations (solid red curves). Panels (a) and (c) show the results for the single obstacle in the diffusive plate where  $\sigma_R = 0.066$  ( $0.31 \mu\text{m}$ ),  $\sigma_R/\sigma_\rho = 0.4$  and  $V_0 = 3.5$ . Panels (b) and (d) correspond to the case of two obstacles with the same  $\sigma_R$  and  $V_0$  but  $\sigma_R/\sigma_\rho = 0.7$  and  $\sigma_R/\sigma_\xi = 0.1$ . The results are shown for  $^{87}\text{Rb}$  atoms. Red detuning of the laser radiation from the atomic resonance is assumed. All values are presented in the harmonic oscillator units, that is, energy  $E_0 = \hbar\omega$  and length  $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$  where  $\omega/2\pi = 5.4$  Hz.

approximated by an inverted parabola with an upper cutoff  $k_{\max} = 2\sqrt{\mu} = 12.7$  where  $\mu$  is the initial chemical potential of the system [23,25].

The disorder potentials we choose are attainable in the experiment reported in Ref. [21], that is, they extend 862 units (4 mm) along the  $z$  direction with the correlation length  $\sigma_R = 0.066$  ( $0.31 \mu\text{m}$ ). We consider the potentials obtained by introducing one or two obstacles in the diffusive plate that are presented in Fig. 1. If the atomic cloud starts at the center of the disorder potentials and if the cutoff of the momentum distribution is  $k_{\max} \lesssim 13$  then we may expect that time evolution leads to emission of atoms with  $|k| \approx 5.5$  in the single obstacle case [cf. Figs. 1(a) and 1(c)] and with  $|k| \approx 9$  in the case of two obstacles [cf. Figs. 1(b) and 1(d)]. In the latter case we may expect also a small leakage of atoms with  $|k| \approx 3.5$ . For  $|k| \approx 3.5$  the localization length shown in Fig. 1(d) reaches locally a maximum value of  $l_{loc} \approx 120$ . Before the particle interactions become negligible the gas spreads over a significant range of the disorder region. Therefore the Anderson localization is not able to diminish completely the leakage of atoms with  $|k| \approx 3.5$ .

Starting with the ground state of the stationary Gross-Pitaevskii equation [9–15] in the presence of the harmonic trap, we integrate the time-dependent Gross-Pitaevskii equation when the trap is turned off and a disorder is turned on. Figure 2 shows momentum distributions of atoms that escaped from the disorder region and those that are localized for the disorder potentials corresponding to Fig. 1 at different moments in time. The expected selective spectral emissions of atoms are apparent in the figure. Interestingly in Fig. 2(d), that is, for

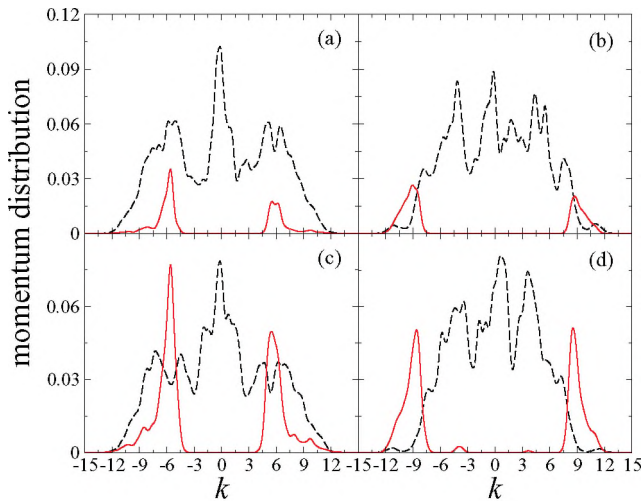


FIG. 2. (Color online) Momentum distributions of the atoms localized in the disorder potential (dashed black lines) and the atoms which escaped from the disorder area (solid red lines). Panels (a) and (c) show the results for a single experimental realization of the disorder with parameters as in Figs. 1(a) and 1(c) while panels (b) and (d) are related to the parameters as in Figs. 1(b) and 1(d). Panel (a) corresponds to the evolution time  $t = 100$  (2.9 s), panel (b) to  $t = 70$  (2 s), panels (c) and (d) to  $t = 200$  (5.7 s). Fraction of atoms that escaped the disorder region is about 9% in (a) and (b), and 20% in (c) and (d). In order to take into account experimental resolution all data have been convoluted with Gaussian of  $\Delta k = 0.3$  width. All values are presented in the harmonic oscillator units, that is, energy  $E_0 = \hbar\omega$ , length  $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ , and time  $t_0 = 1/\omega$  where  $\omega/2\pi = 5.4$  Hz.

longer evolution time, small peaks around  $|k| \approx 3.5$  become visible.

Finally let us consider a possibility of the realization of an atom analog of an optical random laser in 2D. The Boltzmann transport mean-free path  $l_B$  is the characteristic spatial scale beyond which memory of the initial direction of the particle momentum is lost. In 2D  $l_{\text{loc}} = l_B e^{\pi k l_B / 2}$  and thus the localization length is much larger than  $l_B$  which is in contrast to the 1D case where these two quantities are nearly identical  $l_{\text{loc}} = 2l_B$  [19]. For the circularly shaped diffusing plate with the radius  $R$  the classical transport mean-free path [25,26], to the second order in the potential strength, reads

$$\frac{1}{l_B} = \frac{\eta^2}{k\sigma_R^2} \int \frac{d\phi}{2\pi} (1 - \cos \phi) \mathcal{P} \left( 2k\sigma_R \sin \frac{\phi}{2} \right), \quad (4)$$

where  $\eta = V_0/E_\sigma$  is the ratio of the potential strength and correlation energy  $E_\sigma = \hbar^2/(m\sigma_R^2)$  with  $\sigma_R = \alpha/R$ . The power spectrum  $\mathcal{P}(k)$  of the optical speckle potential disappears for  $k \geq 2/\sigma_R$ . Nevertheless, the  $l_B$  (and consequently also  $l_{\text{loc}}$ ) is always finite. In the bulk 2D system an initially prepared atomic wave packet follows a diffusive motion at short time but eventually the dynamics slow down and freeze due to the Anderson localization process [25–27].

By introducing obstacles in the diffusive plate we are able to shape the power spectrum of the speckle potential. On one hand the fact that  $\mathcal{P}(k)$  may disappear at certain momentum intervals does not mean divergence of the corresponding transport mean-free path (4). On the other hand any nonmonotonic

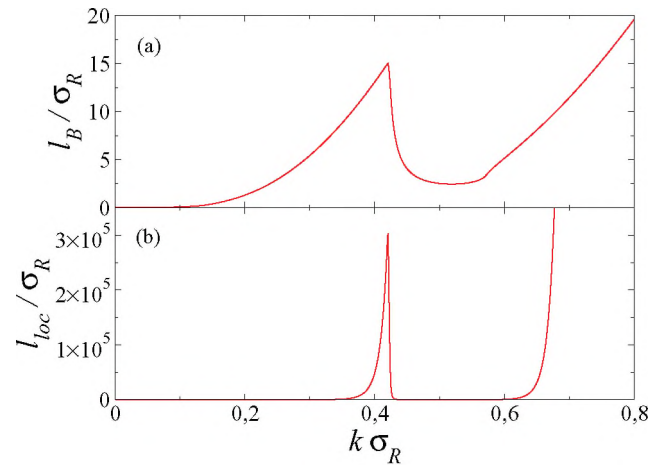


FIG. 3. (Color online) The Boltzmann transport mean-free path (a) and the localization length (b) for atoms in the 2D speckle potential created by transmission of a laser beam through the circularly shaped diffusive plate with the obstacle in the form of a ring, that is, the aperture of the optics is described by  $\Theta(R - |\mathbf{r}|) - \Theta(\rho - |\mathbf{r}|) + \Theta(\zeta - |\mathbf{r}|)$  with  $\sigma_R/\sigma_\rho = 0.99$  and  $\sigma_R/\sigma_\zeta = 0.15$ . The potential strength corresponds to  $\eta = 0.15$ . The quantities presented in the figure are dimensionless.

behavior of  $l_B(k)$  is dramatically amplified in the behavior of  $l_{\text{loc}}(k)$  because the localization length is an exponential function of  $l_B$ . In Fig. 3 we present an example related to the obstacle in the form of a ring, that is, the aperture of the optics is described by  $\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \Theta(R - |\mathbf{r}|) - \Theta(\rho - |\mathbf{r}|) + \Theta(\zeta - |\mathbf{r}|)$ . At  $k\sigma_R \approx 0.4$  both  $l_B$  and  $l_{\text{loc}}$  show a maximum. However, while the transport mean-free path changes by only a few in the neighboring region the localization length changes by four orders of magnitude. If the width of the momentum distribution of a BEC loaded in such a disorder potential is smaller than  $0.6/\sigma_R$  and the radius of the disorder medium is greater than  $10^3\sigma_R$  but less than  $10^5\sigma_R$  the multiple scattering process leads to an isotropic emission of atoms with  $k \approx 0.4/\sigma_R$ .

We have outlined a proposal for the realization of a matter-wave analog of an optical random laser. Spatially correlated disorder potential for atoms with a peculiar pair correlation function can be created by transmitting a laser beam through a diffusive plate with obstacles. The resulting Anderson localization length reveals nonmonotonic behavior as a function of particle momentum. It allows for filtering momenta of particles that leave the area of the disorder, if the size of the disorder medium is suitably chosen. The disorder medium is assumed to be initially loaded with a BEC which guarantees that the matter waves emitted from the medium are coherent. We have restricted ourselves to the 1D and 2D cases but the atom analog of an optical random laser can be also anticipated in 3D. In 3D the Ioffe-Regel criterion discriminates between waves that are Anderson localized ( $kl_B \lesssim 1$ ) or not [19,28]. Thus, a spatially correlated disorder potential for which the Ioffe-Regel criterion is not fulfilled for specific momenta should allow for selective emission of matter waves in 3D.

Our proposal is directly applicable to atomic matter-wave experiments. From the point of view of the optical random lasers our analysis is not complete because it is restricted to

passive random materials without gain. There is an interesting question whether a disorder with properties similar to those analyzed here play a role in optical random lasers and which modes are important when the gain is included in a system.

The nonmonotonic behavior of the localization length results in the appearance of a multiple effective mobility edge if a disorder system is finite. Wave transport is then unusual and interesting on its own. A shallow nonmonotonical behavior

of the Anderson localization length versus energy has been observed also in a classical wave system, see Ref. [29].

*Note added in proof.* Recently, we became aware of a related theoretical study [30].

We are grateful to D. Delande for encouraging discussion and to R. Marcinek and J. Zakrzewski for critical reading of the manuscript. This work is supported by the Polish Government within research projects 2009-2012 (MP) and 2008-2011 (KS).

- 
- [1] D. S. Wiersma, *Nat. Phys.* **4**, 359 (2008).  
 [2] V. S. Letokhov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **53**, 1442 (1967) [*Sov. Phys. JETP* **26**, 835 (1968)].  
 [3] N. M. Lawandy *et al.*, *Nature (London)* **368**, 436 (1994).  
 [4] D. S. Wiersma and A. Lagendijk, *Phys. Rev. E* **54**, 4256 (1996).  
 [5] H. Cao *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **73**, 3656 (1998); H. Cao, Y. G. Zhao, S. T. Ho, E. W. Seelig, Q. H. Wang, and R. P. H. Chang, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2278 (1999).  
 [6] S. V. Frolov, Z. V. Vardeny, and K. Yoshino, *Phys. Rev. B* **57**, 9141 (1999); T. V. Shahbazyan, M. E. Raikh, and Z. V. Vardeny, *ibid.* **61**, 13266 (2000).  
 [7] D. S. Wiersma, *Nature (London)* **406**, 135 (2000).  
 [8] M. H. Anderson *et al.*, *Science* **269**, 198 (1995).  
 [9] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 582 (1997).  
 [10] E. W. Hagley *et al.*, *Science* **283**, 1706 (1999).  
 [11] I. Bloch, T. W. Hansch, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3008 (1999).  
 [12] G. Cennini, G. Ritt, C. Geckeler, and M. Weitz, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240408 (2003).  
 [13] W. Guerin, J. F. Riou, J. P. Gaebler, V. Josse, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 200402 (2006).  
 [14] A. Couvert *et al.*, *Europhys. Lett.* **83**, 50001 (2008).  
 [15] J. T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J. Arlt, K. Sacha, J. Zakrzewski, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170411 (2005).  
 [16] D. Clément *et al.*, *New J. Phys.* **8**, 166 (2006).  
 [17] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).  
 [18] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 287 (1985).  
 [19] B. van Tiggelen, in *Diffuse Waves in Complex Media*, edited by J.-P. Fouque, NATO Advanced Study Institutes, Ser. C, Vol. 531 (Kluwer, Dordrecht, Netherlands, 1999).  
 [20] I. M. Lifshits, S. Gredeskul, and L. A. Pastur, *Introduction to the Theory of Disordered Systems* (Wiley, New York, 1988).  
 [21] J. Billy *et al.*, *Nature (London)* **453**, 891 (2008).  
 [22] G. Roati *et al.*, *Nature (London)* **453**, 895 (2008).  
 [23] L. Sanchez-Palencia, D. Clement, P. Lugan, P. Bouyer, G. V. Shlyapnikov, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 210401 (2007).  
 [24] E. Gurevich and O. Kenneth, *Phys. Rev. A* **79**, 063617 (2009); P. Lugan, A. Aspect, L. Sanchez-Palencia, D. Delande, B. Gremaud, C. A. Muller, and C. Miniatura, *ibid.* **80**, 023605 (2009).  
 [25] C. Miniatura *et al.*, *Eur. Phys. J. B* **68**, 353 (2009).  
 [26] R. C. Kuhn, C. Miniatura, D. Delande, O. Sigwarth, and C. A. Muller, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 250403 (2005).  
 [27] M. Robert-de Saint-Vincent, J. P. Brantut, B. Allard, T. Plisson, L. Pezze, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, T. Bourdel, and P. Bouyer, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 220602 (2010).  
 [28] R. C. Kuhn *et al.*, *New J. Phys.* **9**, 161 (2007).  
 [29] D. Čapeta, J. Radic, A. Szameit, M. Segev, and H. Buljan, *Phys. Rev. A* **84**, 011801(R) (2011).  
 [30] M. Piraud, A. Aspect, and L. Sanchez-Palencia, e-print arXiv:1104.2314.

**Breakdown of Anderson localization of interacting quantum bright solitons in a disorder potential**

Marcin Płodzień and Krzysztof Sacha

*Instytut Fizyki imienia Mariana Smoluchowskiego and Mark Kac Complex Systems Research Center, Uniwersytet Jagielloński, ulica Reymonta 4, PL-30-059 Kraków, Poland*

(Received 18 May 2012; published 17 September 2012)

The center of mass of a bright soliton in a Bose-Einstein condensate may reveal Anderson localization in the presence of a weak disorder potential. We analyze the effects of interactions between two bright solitons on the Anderson localization phenomenon. Perturbation calculus shows that even very weak interactions modify localization properties of the system eigenstates. For stronger interactions (i.e., when the solitons are close to each other), the localization is totally broken. It implies that in order to experimentally observe the Anderson localization effects, a single bright soliton has to be prepared and excitation of soliton trains must be avoided.

DOI: [10.1103/PhysRevA.86.033617](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.033617)

PACS number(s): 03.75.Lm, 72.15.Rn, 05.30.Jp

**I. INTRODUCTION**

Fifty years ago Anderson discovered that the transport of noninteracting particles can be totally suppressed in the presence of a disorder [1]. Waves fail to propagate in a disorder medium, due to destructive interference, and become exponentially localized. Anderson localization possesses different properties in different dimensions [2]. In one dimension any amount of a diagonal disorder leads to Anderson localization. Particles propagating with momentum  $k$  in a disordered medium multiple scatter, undergo diffusive motion and finally localize with an exponentially decaying density profile [3–7]. Anderson localization is a single-particle phenomenon. Interaction between particles can break the localization [8–11]. In addition, long-range correlations of a disorder [12–15] or the presence of nonlinear terms in wave equations [16–18] can be responsible for the transition from localized to extended states.

Ultracold atomic gases are ideal systems to theoretically and experimentally investigate quantum many-body phenomena. Anderson localization of such matter waves was realized in a laboratory first in one dimension [19,20] and recently also in three dimensions [21,22]. In these experiments, in order to get rid of particle interactions, either Feshbach resonances were employed or a low atomic density limit was reached. Particle interactions, which are harmful to experiments with Anderson localization of atomic matter waves, become vital to realize solitonic states in Bose-Einstein condensates (BEC). In ultracold atomic gases both dark and bright solitons were demonstrated experimentally [23–29]. An analysis of quantum character of the degree of freedom that describes position of the solitons allows for invention of interesting ideas for experiments. Bright soliton scattering on a potential barrier leads to a superposition of macroscopically distinct objects [30–32]. Interaction between two bright solitons allows for preparation of quantum entanglement of a pair of such macroscopic particles [33]. Bright or dark solitons can Anderson localize in the presence of an external disorder potential [34–37].

In the present article we concentrate on the Anderson localization phenomena of a pair of bright solitons in the presence of an optical speckle potential. Two bright solitons interact between each other and the interaction can lead to delocalization of their centers of mass. The soliton interaction is unusual as compared to typical particle interactions. Apart

from the relative distance, the interaction potential also depends on the relative phase between solitons.

The paper is organized as follows. In Sec. II we describe shortly an improved version of the Bogoliubov approach that allows for the description of quantum bright solitons. In Sec. III we present an effective quantum Hamiltonian for two interacting solitons in a weak disorder potential. Analysis of the delocalization effects using time-independent perturbation theory and by means of numerical integration of the Schrödinger equation is described in Sec. IV. We conclude in Sec. V.

**II. QUANTUM BRIGHT SOLITON IN A DISORDER POTENTIAL**

Let us consider a Bose-Einstein condensate in an effectively one-dimensional (1D) box of size  $L$  with attractive interactions between atoms. In the mean-field description, an  $N$ -body quantum state is a product  $\psi(z_1, t)\psi(z_2, t)\dots\psi(z_N, t)$ , where  $\psi(z, t)$  fulfills the 1D Gross-Pitaevskii equation (GPE) [38,39]:

$$i\partial_t\psi(z, t) = -\frac{1}{2}\partial_z^2\psi(z, t) - |\psi(z, t)|^2\psi(z, t). \quad (1)$$

In Eq. (1), and in the entire paper, we have adopted the following units for energy, length, and time,

$$E_0 = 4m\omega_\perp^2 a^2, \quad l_0 = \frac{\hbar}{2|a|m\omega_\perp}, \quad t_0 = \frac{\hbar}{4a^2 m\omega_\perp^2}, \quad (2)$$

where  $\omega_\perp$  denotes a transverse harmonic confinement frequency,  $a$  is the atomic  $s$ -wave scattering length, and  $m$  stands for the mass of the atoms. The ground-state solution of the GPE is a bright soliton that describes a localized wave packet which evolves without changing its shape,

$$\psi(z, t) = e^{-i\mu t}\psi_0(z - r), \quad (3)$$

$$\psi_0(z - r) = e^{i\phi} \frac{N}{2\cosh[(z - r)N/2]}, \quad (4)$$

where the chemical potential  $\mu = -N^2/8$ . We assume that the norm of the solution equals the total particle number (i.e.,  $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = N$ ). The soliton has two degrees of freedom (i.e., the center-of-mass position  $r$  and the phase  $\phi$ ). The bright soliton can be considered as the  $N$ -body bound state where an ionization of a single particle costs energy  $|\mu|$  [40].



In the Bogoliubov description of the system there appear two zero modes. The first is related to the global gauge symmetry; the other originates from the translational symmetry of the  $N$ -particle system [41,42]. Both these symmetries are broken by the classical solution (4) where a specific phase of the wave function and a concrete position of the soliton center are chosen. In order to recover the symmetries and describe degrees of freedom related to the zero modes in a nonperturbative way, we follow the Dziarmaga's approach [44]. This approach allows us to obtain a simple Hamiltonian that describes the center of mass of the soliton and its phase in the presence of a weak external potential  $V(z)$ ,

$$\hat{\mathcal{H}} \approx \hat{H}_r + \frac{\hat{P}_\phi^2}{2m_\phi} + \hat{P}_\phi \int V(z) \partial_N |\psi_0(z-r)|^2 dz, \quad (5)$$

with

$$\hat{H}_r = \frac{\hat{P}_r^2}{2N} + \int V(z) |\psi_0(z-r)|^2 dz, \quad (6)$$

where  $\psi_0$  is the solution (4) and  $m_\phi = -4/N$ . The Hermitian operator,

$$\hat{P}_r = -i\partial_r, \quad (7)$$

is the momentum operator of the soliton center of mass. The other Hermitian operator, related to the soliton phase, is the particle number operator,

$$\hat{P}_\phi = -i\partial_\phi = \hat{N} - N. \quad (8)$$

We may restrict ourselves to the Hilbert space with exactly  $N$  particles, where  $\hat{P}_\phi = 0$ , because  $[\hat{P}_\phi, \hat{\mathcal{H}}] = 0$ .

The external potential  $V(z)$  also couples the center-of-mass degree of freedom with the Bogoliubov quasiparticles. However, this coupling has been neglected because if the strength of the potential is much smaller than the modulus of the chemical potential of the system, excitations of the quasiparticles can be omitted. Indeed, the lowest quasiparticle energy equals  $|\mu| = N^2/8$  and for  $|V(z)| \ll |\mu|$  the perturbation is not able to *ionize* a particle from the solitonic bound state [35,36].

The eigenstates of the  $N$ -particle system can be written as follows:

$$|\Psi\rangle = \chi(r) \xi_N(\phi) |0\rangle_B, \quad (9)$$

where  $|0\rangle_B$  is the Bogoliubov quasiparticle vacuum state,  $\xi_N(\phi) = 1/\sqrt{2\pi}$  ensures that we describe the system with precisely  $N$  particles (i.e.,  $\hat{P}_\phi \xi_N = 0$ ), and  $\chi(r)$  is an eigenstate of the center-of-mass Hamiltonian (6). The single particle density can be approximated, to the leading order in  $N$ , by

$$\rho(z) = \langle \hat{\psi}^\dagger(z) \hat{\psi}(z) \rangle \approx \int |\chi(r)|^2 |\psi_0(z-r)|^2 dr, \quad (10)$$

where  $\hat{\psi}(z)$  is the bosonic field operator.

Equation (6) shows that the mass center of the soliton experiences a potential which is a convolution of the original external potential with the soliton profile. When the external potential is a disorder potential (e.g., an optical speckle potential [17,19]), the center of mass of the soliton becomes Anderson localized [34]. The eigenstates of the Hamiltonian (6) have a shape with an overall exponential

envelope,

$$|\chi(r)|^2 \propto \exp\left(-\frac{|r-r_0|}{l_0}\right), \quad (11)$$

where  $r_0$  is the mean position of the soliton and  $l_0$  is the localization length. In the Born approximation and for the soliton momentum  $P_r > N/(2\pi)$  but smaller than the inverse of the correlation length of the original speckle potential, the localization length increases exponentially with  $P_r$  [34]:

$$l_0 \propto \exp\left(\frac{\pi P_r}{N}\right). \quad (12)$$

Similar effects are also predicted in the dark soliton case [37]. The position of a dark soliton becomes Anderson localized in the presence of a disorder.

### III. QUANTUM DESCRIPTION OF A PAIR OF BRIGHT SOLITONS

Let us consider a pair of identical bright solitons where one is located at  $r_1$  and the other at  $r_2$ . If  $|r_1 - r_2|$  is much greater than the soliton size, a superposition of wave functions (4) is a good approximation for the double soliton solution of the GPE (1). In the quantum description, following a similar approach as in the single soliton case, we obtain the quantum Hamiltonian that describes the centers of mass and the phases of two independent solitons in the presence of a weak external potential:

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^2 \left[ \hat{H}_{r_i} + \frac{\hat{P}_{\phi_i}^2}{2m_{\phi_i}} + \hat{P}_{\phi_i} \int V(z) \partial_N |\psi_0(z-r_i)|^2 dz \right], \quad (13)$$

where  $\phi_i$ 's stand for the phases of the solitons and  $r_i$ 's for the positions of their mass centers. The operator is

$$\hat{P}_{\phi_i} = -i\partial_{\phi_i} = \hat{N}_i - N, \quad (14)$$

and  $m_{\phi_i} = -4/N$ . The Hamiltonian is

$$\hat{H}_{r_i} = \frac{\hat{P}_{r_i}^2}{2N} + \int V(z) |\psi_0(z-r_i)|^2 dz, \quad (15)$$

where  $\hat{P}_{r_i} = -i\partial_{r_i}$ . The independent solitons can Anderson localize in the presence of a weak disorder potential. However, in order to analyze the localization properties of the solitons we have to take into account their mutual interaction. One soliton experiences the presence of the other one because the tails of their profiles overlap. It results in an interaction potential which drops exponentially with an increase of the solitons relative distance [45]:

$$\hat{U} = -N^3 \cos(\phi_1 - \phi_2) e^{-N|r_2-r_1|/2}. \quad (16)$$

Interestingly, the character of the interaction depends on the solitons relative phase. For  $\phi_1 - \phi_2 \approx 0$  they attract each other but if the relative phase is close to  $\pi$  there are repulsive interactions. The Anderson localization of the noninteracting solitons takes place in the  $r_1$  and  $r_2$  space only because there is no external disorder in the  $\phi_1$  and  $\phi_2$  space. We will see that because the interaction potential depends on the phases, the interaction-induced delocalization is different as compared

to a typical situation where only relative particle distance determines an interaction potential [8–11].

The total particle number is a constant quantity. In order to take advantage of this constant of motion let us express the Hamiltonian of the system in terms of the average and relative phases:

$$\Phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, \quad (17)$$

$$\varphi = \phi_2 - \phi_1, \quad (18)$$

with the corresponding momenta,

$$\hat{P}_\Phi = \hat{P}_{\phi_2} + \hat{P}_{\phi_1} = \hat{N}_1 + \hat{N}_2 - 2N, \quad (19)$$

$$\hat{P}_\varphi = \frac{\hat{P}_{\phi_2} - \hat{P}_{\phi_1}}{2} = \frac{\hat{N}_2 - \hat{N}_1}{2}. \quad (20)$$

The final Hamiltonian of two interacting bright solitons in the presence of a weak external potential reads

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{U}, \quad (21)$$

where

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \frac{\hat{P}_\varphi^2}{2m_\varphi}, \quad (22)$$

with

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{r_1} - \hat{P}_\varphi \int V(z) \partial_N |\psi_0(z - r_1)|^2 dz, \quad (23)$$

$$\hat{H}_2 = \hat{H}_{r_2} + \hat{P}_\varphi \int V(z) \partial_N |\psi_0(z - r_2)|^2 dz, \quad (24)$$

and  $m_\varphi = -2/N$ . In the derivation of the Hamiltonian (22) we have restricted it to the  $2N$ -particle Hilbert space where  $\hat{P}_\Phi = 0$  that is allowed because  $[\hat{P}_\Phi, \hat{H}] = 0$ . Contrary to  $\hat{P}_\Phi$ , the operator  $\hat{P}_\varphi$  does not commute with  $\hat{H}$  and particles can be transferred between the solitons during the time evolution of the system.

Having a quantum state  $\Psi(r_1, r_2, \varphi)$ , obtained from the diagonalization of the Hamiltonian (21), we are able to calculate the single-particle density which, in the leading order in  $N$ , reads

$$\rho(z) \approx \int [|\psi_0(z - r_1)|^2 + |\psi_0(z - r_2)|^2] \times |\Psi(r_1, r_2, \varphi)|^2 dr_1 dr_2 d\varphi. \quad (25)$$

#### IV. IMPACT OF SOLITON INTERACTIONS ON ANDERSON LOCALIZATION

In the presence of an external disorder potential  $V(z)$  the center of mass of a quantum bright soliton may reveal Anderson localization. When two such solitons are prepared in the presence of a disorder, the localization effects can be destroyed due to mutual interaction between them. In the following we analyze the impact of the interaction on the Anderson localization phenomenon within the time-independent perturbation approach and by means of numerical integration of the Schrödinger equation generated by the Hamiltonian (21).

We will consider a finite system of length  $L$  and focus on a disorder potential corresponding to an optical speckle potential [17,19]. Such a potential can be created by shining laser light on the so-called diffusive plate. In the far field

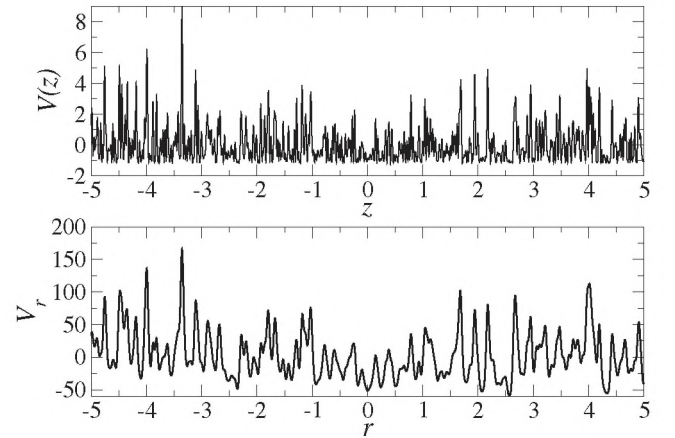


FIG. 1. (Top panel) An example of an optical speckle potential  $V(z)$  for correlation length  $\sigma_0 = 0.01$  and strength  $V_0 = 1.125$ . (Bottom panel) Disorder potential experienced by a center of mass of a bright soliton, that is, after convolution with the soliton profile,  $V_r = \int V(z) |\psi_0(z - r)|^2$ , for  $N = 60$ .

the light intensity fluctuates in space which is experienced by atoms as an external disorder potential. The potential is characterized by zero mean value  $\overline{V(z)} = 0$ , where the overbar denotes an ensemble average over disorder realizations, standard deviation  $V_0 = [\overline{V(z)^2}]^{1/2}$  and autocorrelation function  $\overline{V(z')V(z'+z)} = V_0^2 \frac{\sin^2(z/\sigma_0)}{(z/\sigma_0)^2}$  where  $\sigma_0$  is the correlation length of the disorder. An example of an optical speckle potential is plotted in Fig. 1. Interestingly, properties of a speckle potential can be easily modified. Especially, one can create a disorder where Anderson localization operates as a band-pass filter that allows for the realization of a matter-wave analog of an optical random laser [46,47].

#### A. Time-independent perturbation approach

In this section we investigate eigenstates of the Hamiltonian (21) treating the interaction potential  $\hat{U}$  as a small perturbation. The energies and eigenstates of the unperturbed system ( $\hat{U} = 0$ ) read

$$E_{n_1 n_2 n_\varphi}^{(0)} = E_{n_1 n_\varphi} + E_{n_2 n_\varphi} + E_{n_\varphi}, \quad (26)$$

$$\Psi_{n_1 n_2 n_\varphi}^{(0)}(r_1, r_2, \varphi) = \chi_{n_1 n_\varphi}(r_1) \chi_{n_2 n_\varphi}(r_2) \xi_{n_\varphi}(\varphi),$$

where  $\xi_{n_\varphi}(\varphi)$  is an eigenstate of the  $\hat{P}_\varphi$  operator related to the eigenvalue  $n_\varphi$ . The energy  $E_{n_\varphi}$  is an eigenvalue of the  $\hat{P}_\varphi^2/(2m_\varphi)$  operator. We assume that the numbers of particles that form each of the two solitons is equal to  $N$ . Thus, the unperturbed system is characterized by  $n_\varphi = 0$  and  $\xi_0(\varphi) = 1/\sqrt{2\pi}$ . The states  $\chi_{n_1 n_\varphi}(r_1)$  and  $\chi_{n_2 n_\varphi}(r_2)$  are eigenstates of the Hamiltonians (23) and (24), respectively, and  $E_{n_1 n_\varphi}$  and  $E_{n_2 n_\varphi}$  are the corresponding eigenenergies with  $n_\varphi = 0$ . These eigenstates are Anderson localized in the presence of the disorder.

The first-order energy correction vanishes,

$$E_{n_1 n_2 0}^{(1)} = \langle \Psi_{n_1 n_2 0}^{(0)} | \hat{U} | \Psi_{n_1 n_2 0}^{(0)} \rangle = 0. \quad (27)$$

This is because  $\hat{U} \sim \cos \varphi$ . The only states  $\Psi_{n'_1 n'_2 n'_\varphi}^{(0)}$  coupled by the interaction potential to  $\Psi_{n_1 n_2 0}^{(0)}$  correspond to  $n'_\varphi = \pm 1$ . The lowest order energy correction is of the second-order  $E_{n_1 n_2 0}^{(2)}$ . In the lowest nonvanishing order the system eigenstates read

$$\Psi_{n_1 n_2 0} \approx \Psi_{n_1 n_2 0}^{(0)} + \sum_{n'_1, n'_2} \alpha_{n'_1 n'_2 1} \Psi_{n'_1 n'_2 1}^{(0)} \quad (28)$$

$$+ \sum_{n''_1, n''_2} \alpha_{n''_1 n''_2 -1} \Psi_{n''_1 n''_2 -1}^{(0)}, \quad (29)$$

where

$$\alpha_{n'_1 n'_2 1} = \frac{\langle \Psi_{n'_1 n'_2 1}^{(0)} | \hat{U} | \Psi_{n_1 n_2 0}^{(0)} \rangle}{E_{n_1 n_2 0}^{(0)} - E_{n'_1 n'_2 1}^{(0)}}, \quad (30)$$

$$\alpha_{n''_1 n''_2 -1} = \frac{\langle \Psi_{n''_1 n''_2 -1}^{(0)} | \hat{U} | \Psi_{n_1 n_2 0}^{(0)} \rangle}{E_{n_1 n_2 0}^{(0)} - E_{n''_1 n''_2 -1}^{(0)}}. \quad (31)$$

Reduced probability density for finding the first soliton localized at  $r_1$  is

$$\begin{aligned} \kappa_1(r_1) &= \int |\Psi_{n_1 n_2 0}(r_1, r_2, \varphi)|^2 d\varphi dr_2 \\ &= |\chi_{n_1 0}(r_1)|^2 + \sum_{n'_2} \left| \sum_{n'_1} \alpha_{n'_1 n'_2 1} \chi_{n'_1 1}(r_1) \right|^2 \\ &\quad + \sum_{n''_2} \left| \sum_{n''_1} \alpha_{n''_1 n''_2 -1} \chi_{n''_1 -1}(r_1) \right|^2, \end{aligned} \quad (32)$$

and the probability  $\kappa_2(r_2)$  for finding the second soliton at  $r_2$  can be calculated analogously.

As an example we choose parameters of an optical speckle potential like in Ref. [19] where Anderson localization of a BEC has been realized. The length of the system, in the units (2),  $L = 28$  (i.e., 4 mm), the transverse harmonic confinement corresponds to  $\omega_\perp = 2\pi \times 70$  Hz and the correlation length of the disorder  $\sigma_0 = 0.01$  (i.e., 1.32  $\mu\text{m}$ ). We assume that each of the two solitons consists of  $N = 60$   $^{85}\text{Rb}$  atoms with the modified  $s$ -wave scattering length by means of a Feshbach resonance (i.e.,  $a = -5.77$  nm). The optical speckle potential is created by blue detuned light with an intensity which results in the disorder strength  $V_0 = 1.125$  that is 400 times smaller than the chemical potential of the system.

Diagonalization of the Hamiltonians (23) and (24) allows us to obtain unperturbed Anderson localized eigenstates  $\chi_{n_1 0}(r_1)$  and  $\chi_{n_2 0}(r_2)$ . We have chosen two pairs of these eigenstates for further analysis. The first pair is related to eigenenergies  $E_{n_1 0} = 9.93$  and  $E_{n_2 0} = 14.52$  and the estimated localization lengths  $l_{n_1 0} \approx 0.020$  and  $l_{n_2 0} \approx 0.026$ . They are relatively strongly localized on a scale comparable to the soliton size  $2/N = 0.03$ . The other pair is related to  $E_{n_1 0} = 42$  and  $E_{n_2 0} = 46.6$ , and  $l_{n_1 0} \approx 0.088$  and  $l_{n_2 0} \approx 0.095$ , respectively. Both pairs of the eigenstates are shown in Figs. 2 and 3. The relative distance between the solitons in each pair is much larger than the soliton size which implies that the soliton interaction is extremely weak and the perturbation approach is justified. In the considered cases, the second-order energy corrections  $E_{n_1 n_2 0}^{(2)}$  are seven orders of magnitude smaller than the energy gap between  $E_{n_1 n_2 0}^{(0)}$  and the nearest neighboring level.

Figures 2 and 3 also show the reduced probability densities  $\kappa_i(r_i)$  [Eq. (32)]. Delocalization effects of the solitons are

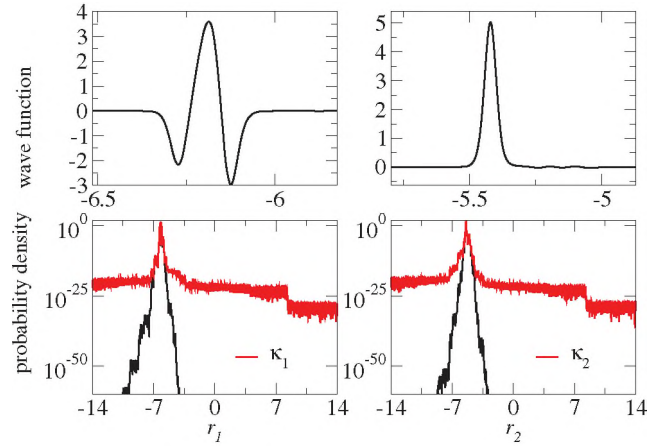


FIG. 2. (Color online) (Top panels) Eigenstates,  $\chi_{n_1 0}(r_1)$  and  $\chi_{n_2 0}(r_2)$ , of the Hamiltonians (23) and (24) corresponding to the eigenvalues  $E_{n_1 0} = 9.93$  and  $E_{n_2 0} = 14.52$ . Localization lengths are  $l_{n_1 0} \approx 0.020$ ,  $l_{n_2 0} \approx 0.026$ . (Bottom panels) Probability densities  $|\chi_{n_1 0}(r_1)|^2$  and  $|\chi_{n_2 0}(r_2)|^2$  (black, bottom lines) and the reduced probability densities for centers of mass of solitons  $\kappa_1(r_1)$  and  $\kappa_2(r_2)$  (red, upper lines) obtained within the perturbation approach. The correlation length of the disorder potential is  $\sigma_0 = 0.01$  and its strength  $V_0 = 1.125$ . Total number of particles in the system  $2N = 120$ .

hardly visible when we look at the densities in linear scale because the soliton interactions are very weak. However, logarithmic plots indicate that characteristic exponential profiles are not present. The mechanism of the breakdown of Anderson localization in a finite system, considered here, is the following. The interaction potential couples an unperturbed state  $\Psi_{n_1 n_2 0}^{(0)}$  to states  $\Psi_{n'_1 n'_2 1}^{(0)} = \chi_{n'_1 1} \chi_{n'_2 1} \xi_1$  and  $\Psi_{n''_1 n''_2 -1}^{(0)} = \chi_{n''_1 -1} \chi_{n''_2 -1} \xi_{-1}$  where wave functions  $\chi_{n'_1 1}(r_1)$  and  $\chi_{n''_1 -1}(r_1)$  reveal greater localization lengths the higher the corresponding eigenenergies  $E_{n'_1 1}$  and  $E_{n''_1 -1}$  are. If the localization lengths start to be comparable to the system size  $L$  the wave functions  $\chi_{n'_1 1}(r_1)$  and  $\chi_{n''_1 -1}(r_1)$  become delocalized, extended states. Contributions of the extended states in (28) are responsible for

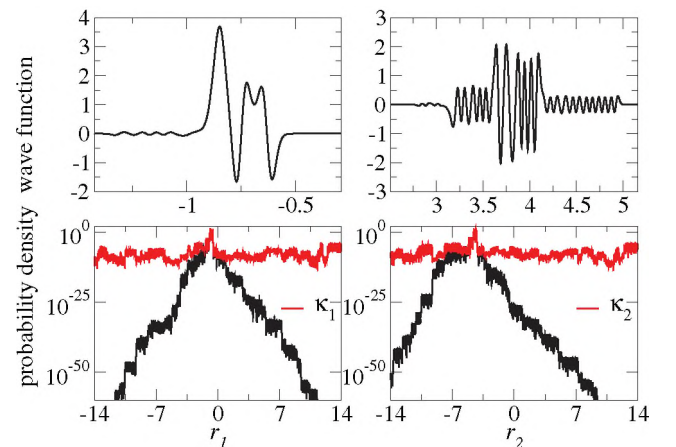


FIG. 3. (Color online) The same as in Fig. 2 but for  $E_{n_1 0} = 42$  and  $E_{n_2 0} = 46.6$ . Localization lengths of the eigenstates  $\chi_{n_1 0}(r_1)$  and  $\chi_{n_2 0}(r_2)$  are  $l_{n_1 0} \approx 0.088$  and  $l_{n_2 0} \approx 0.095$ , respectively.

the breakdown of the exponential decay that can be observed in Figs. 2 and 3. In the unperturbed state  $\Psi_{n_1 n_2 0}^{(0)}$ , the number of particles forming each soliton is well defined and equal to  $N = 60$ . Corrections,  $\alpha_{n'_1 n'_2 1} \Psi_{n'_1 n'_2 1}^{(0)}$  and  $\alpha_{n'_1 n'_2 -1} \Psi_{n'_1 n'_2 -1}^{(0)}$ , to the unperturbed state indicate that the delocalization is accompanied by transfers of a particle from one soliton to the other. By decreasing the distance between the unperturbed, localized solitons we increase the interaction energy and breakdown of exponential profiles start closer to the localization centers. If the unperturbed solitons are located far away from each other it may happen that the corrections to the unperturbed state are too small to disturb exponential localization in a finite system. This is in contrast to a more typical situation where an interaction potential depends only on the relative distance between particles. In fact, suppose for a moment that  $\hat{U}$  is only a function of  $|r_1 - r_2|$ , then the degenerate unperturbed states  $\Psi_{n_1 n_2 0}^{(0)}$  and  $\Psi_{n_2 n_1 0}^{(0)}$  are coupled by  $\hat{U}$ . Diagonalization of  $\hat{U}$  within the degenerate subspace results in a linear combination of these states. Thus, even if  $\hat{U} \rightarrow 0$ , each soliton is described by  $\kappa_i(r_i)$  which is a sum of the densities  $|\chi_{n_1 0}(r_i)|^2$  and  $|\chi_{n_2 0}(r_i)|^2$  that are localized at two different positions. In the case considered in this publication such a mechanism is not present and the breakdown of the Anderson localization is a higher order effect.

### B. Beyond perturbation approach: numerical integration of the Schrödinger equation

The interaction-induced delocalization effects, described in the previous section, are very weak. This is due to the fact that by employing the perturbation approach we have to restrict ourselves to situations where unperturbed solitons are localized far away from each other. In this section we will see that if the solitons are initially localized sufficiently close to each other the interactions can totally destroy the localization of solitons.

In the present section we show results of numerical integration of the Schrödinger equation corresponding to the Hamiltonian (21). We assume that initially the system is prepared in the following state:

$$\Psi(r_1, r_2, \varphi) = \chi_{n_1 0}(r_1) \chi_{n_2 0}(r_2) \xi(\varphi), \quad (33)$$

where  $\chi_{n_i 0}$  are eigenstates of the Hamiltonians (23) and (24) corresponding to eigenenergies  $E_{n_1 0} = 10.44$  and  $E_{n_2 0} = 12.88$ . They are Anderson localized around  $r_1 \approx 0.18$  and  $r_2 \approx 0$  with the localization lengths  $l_{n_1 0} \approx 0.029$  and  $l_{n_2 0} \approx 0.032$ . The parameters of the disorder potential are the same as in the previous section, however, the size of the system has been reduced to  $L = 8$ . In numerical integration of the Schrödinger equation the space  $(r_1, r_2, \varphi)$  has been discretized and we have adopted absorbing boundary conditions at the ends of the  $r_i$  axes and periodic boundary conditions in the  $\varphi$  degree of freedom. The numerical integration is time consuming because in order to reproduce the correlation length of the disorder, the number of points in the  $r_i$  spaces have to be very big. On the other hand, the number of points corresponding to the  $\varphi$  degree of freedom can be chosen to be quite small.

Time evolution of the relative phase  $\varphi$  is much faster than the evolution of the centers of mass of the solitons because the corresponding *mass* parameters are very different (i.e.,  $m_\varphi =$

$-2/N$  while the soliton masses equal  $N$ ). We choose as an initial state  $\xi(\varphi)$  the ground state of an effective Hamiltonian,

$$\hat{H}_{\varphi, \text{eff}} = \frac{\hat{p}_\varphi^2}{2m_\varphi} + \hat{U}_{\text{eff}}(\varphi) + \hat{P}_\varphi \beta, \quad (34)$$

where

$$\begin{aligned} \beta &= \int dz dr [|\chi_{n_2 0}(r)|^2 - |\chi_{n_1 0}(r)|^2] \\ &\quad \times V(z) \partial_N |\psi_0(z-r)|^2. \\ \hat{U}_{\text{eff}}(\varphi) &= \int dr_1 dr_2 |\chi_{n_1 0}(r_1)|^2 |\chi_{n_2 0}(r_2)|^2 \\ &\quad \times \hat{U}(r_1, r_2, \varphi) \propto -\cos \varphi. \end{aligned} \quad (35)$$

Such a ground state is strongly peaked around  $\varphi = 0$  which implies that initially the solitons attract each other. In time evolution of the state (33) we may expect that the reduced probability density,

$$\kappa_\xi(\varphi) = \int |\Psi(r_1, r_2, \varphi)|^2 dr_1 dr_2, \quad (36)$$

follows the probability density of an instantaneous ground state of the Hamiltonian (34) where  $\hat{U}_{\text{eff}}$  and  $\beta$  are obtained by substituting in Eq. (35)  $|\chi_{n_i 0}(r_i)|^2$  by time-evolving  $\kappa_i(r_i)$ .

Figures 4(a) and 4(b) show time evolution of the reduced probability densities  $\kappa_i(r_i)$ . Interaction between solitons is

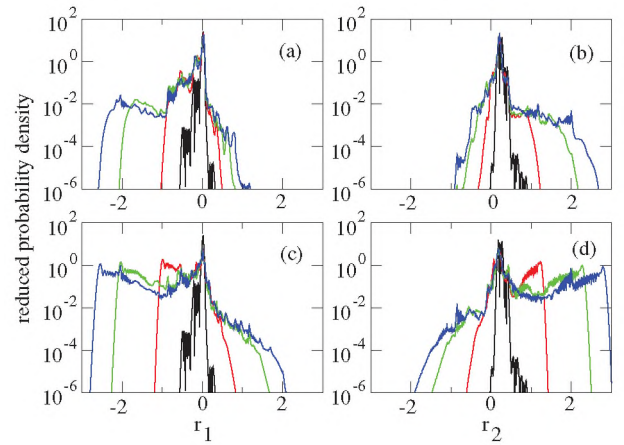


FIG. 4. (Color online) Reduced probability densities  $\kappa_i(r_i)$ , Eq. (32), for different moments of time. In each panel, from the origin to the right, the curves are related to the following:  $t = 0$  (black),  $t = 0.5$  (red),  $t = 1$  (green), and  $t = 1.25$  (blue). The unit of time is  $t_0 = 29$  s [see Eq. (2)]. Panels (a) and (b) show the reduced probability densities  $\kappa_1(r_1)$  and  $\kappa_2(r_2)$ , respectively, and are related to the case where the solitons attract each other, that is, the initial state  $\xi(\varphi)$  in Eq. (33) is chosen as the ground state of the effective Hamiltonian (34). Panels (c) and (d) are related to the case where the solitons initially repel each other, that is, the initial state  $\xi(\varphi)$  is the ground state of the effective Hamiltonian (34) shifted so that the maximal density is located at  $\varphi = \pi$ . The initial states  $\chi_{n_1 0}(r_1)$  and  $\chi_{n_2 0}(r_2)$  in Eq. (33) correspond to  $E_{n_1 0} = 10.44$  and  $E_{n_2 0} = 12.88$  and their localization length are  $l_{n_1 0} \approx 0.029$  and  $l_{n_2 0} \approx 0.032$ . Size of the system is  $L = 8$ , the correlation length of the disorder potential  $\sigma_0 = 0.01$ , and its strength  $V_0 = 1.125$ . Total number of particles in the system  $2N = 120$ .

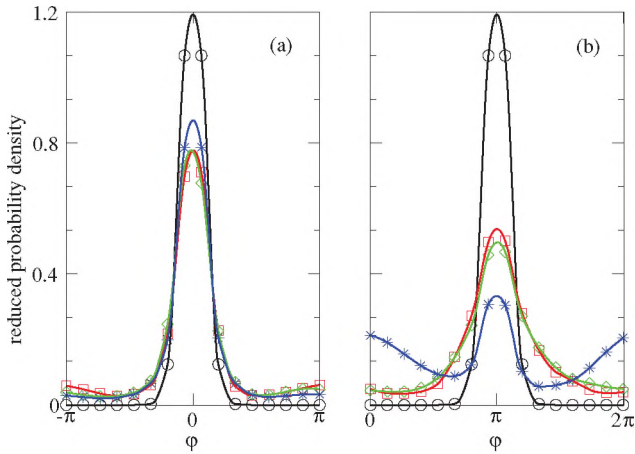


FIG. 5. (Color online) Reduced probability density  $\kappa_\xi(\varphi)$ , Eq. (36), for different moments of time. In both panels black circles are related to  $t = 0$ , red squares to  $t = 0.5$ , green diamonds to  $t = 1$ , and blue stars to  $t = 1.25$ . Panel (a) corresponds to the results presented in Figs. 4(a) and 4(b), that is, to the case when the solitons attract each other. Panel (b) is related to the data shown in Figs. 4(c) and 4(d), that is, to the case when the solitons initially repel each other. Note that the range of the horizontal axis in the panels is different, that is,  $(-\pi, \pi)$  in (a) and  $(0, 2\pi)$  in (b).

responsible for the breakdown of the initial Anderson localization of the solitons. The delocalization effects are much stronger than those analyzed in the previous section. Plots of the reduced probability density  $\kappa_\xi(\varphi)$  presented in Fig. 5(a) indicate that while  $\kappa_\xi(\varphi)$  does not precisely follow the density of the instantaneous ground state of (34), the initial degree of coherence between the solitons is practically preserved in the time evolution. The density  $\kappa_\xi(\varphi)$  is concentrated around zero (i.e., the relative phase between the solitons  $\varphi \approx 0$ ) and consequently the solitons always attract each other.

In Figs. 4 and 5 we also show the evolution of the reduced probability densities in the case when the solitons initially repel each other; that is, as an initial state  $\xi(\varphi)$  in (33) we have chosen the ground state of the effective Hamiltonian (34) but this state has been shifted so that the density maximum is not localized around  $\varphi = 0$  but around  $\varphi = \pi$ . In the present case the delocalization of the solitons is stronger than in the case when the solitons attract each other. Moreover, initial repulsion of the solitons weakens in time [i.e., the probability density  $\kappa_\xi(\varphi)$  becomes nearly uniformly distributed with small maxima around both  $\varphi = \pi$  and  $\varphi = 0$ ].

In order to analyze the delocalization of the solitons quantitatively we present time evolution of the inverse participation ratio (IPR) in Fig. 6. The inverse participation ratio,

$$\text{IPR} = \left[ \int \kappa_r^2(r) dr \right]^{-1}, \quad (37)$$

is the length scale on which the center of mass of a soliton is localized [48]. While the delocalization of the solitons in the case of the attractive soliton interactions is not very big [Figs. 6(a) and 6(b)], the solitons that initially repel each other reveal substantial delocalization on the time scale presented

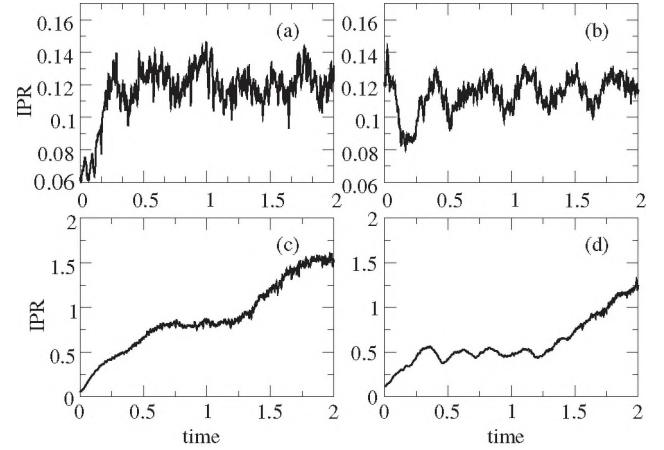


FIG. 6. Evolution of the IPR [see Eq. (37)]. Panels (a) and (b) correspond to the results presented in Figs. 4(a) and 4(b), that is, to the case when the solitons attract each other. Panels (c) and (d) are related to the data shown in Figs. 4(c) and 4(d), that is, to the case when the solitons initially repel each other.

in Fig. 6. Indeed, the IPR shown in Figs. 6(c) and 6(d) is comparable to the size of the system  $L = 8$ .

In Ref. [49], the many-body evolution of a BEC, where all atoms occupy a double soliton solution of the GPE, has been analyzed by numerical simulations. The authors consider the cases where the relative phase between the solitons is precisely defined and it is either 0 or  $\pi$ . In both cases they observe a loss of phase coherence between the solitons which leads to dramatic fragmentation of the condensate. Our results show that if the solitons attract each other and the initial state for the phase degree of freedom is chosen properly, the phase coherence changes very little in the time scale needed for delocalization of the soliton centers of mass. Indeed, if we choose as an initial state for the phase degree of freedom the ground state of the effective Hamiltonian (34), the probability density (36) remains localized at the bottom of the effective potential  $\tilde{U}_{\text{eff}}$ , Eq. (35), during time evolution.

If a pair of bright solitons is prepared in a laboratory, each density measurement is expected to reveal two solitons [42,43] located at positions  $r_i$  with probabilities  $\kappa_i(r_i)$ . Averaging atomic density over many realizations of the same experiment we obtain a density profile which can be compared to the single-particle density  $\rho(z)$  [see Eq. (25)]. In Fig. 7 we show the time evolution of  $\rho(z)$ . Even on a linear scale the delocalization effects can be clearly visible, especially in the case when the solitons initially repel each other.

Experimental realization of the Anderson localization of a single soliton and observation of the delocalization effects in the case of a pair of interacting solitons requires the absence of decoherence effects. The most dangerous are atomic losses which localize centers of mass of the solitons and prevent interference phenomena needed in the Anderson localization process. In the present paper we concentrate on  $^{85}\text{Rb}$  atoms in the vicinity of the Feshbach resonance at magnetic field of 155 G. The scattering length assumed in our analysis corresponds to the magnetic field of about 169 G. For this magnetic field the two- and three-body loss rates measured experimentally are  $10^{-14} \text{ cm}^3/\text{s}$  and  $10^{-27} \text{ cm}^6/\text{s}$ , respectively,

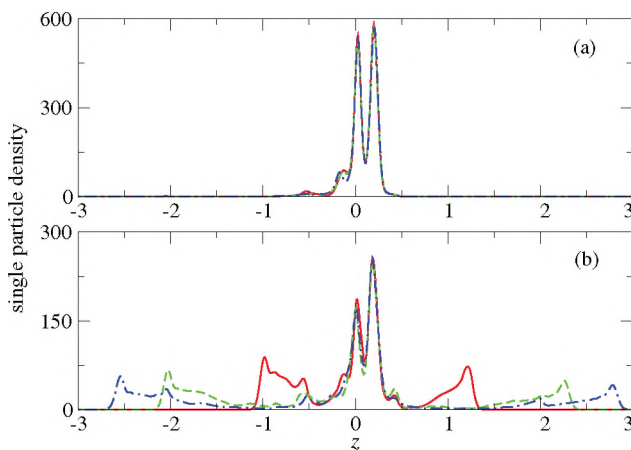


FIG. 7. (Color online) Single-particle density  $\rho(z)$ , Eq. (25), for different moments of time. In both panels the red solid line is related to  $t = 0.5$ , green dashed line to  $t = 1$ , and blue dotted/dashed line to  $t = 1.25$ . (a) Corresponds to the results presented in Figs. 4(a) and (b), that is, to the case when the solitons attract each other. (b) Related to the data shown in Figs. 4(c) and 4(d), that is, to the case when the solitons initially repel each other.

and the background loss time is 450 s [50]. Assuming that the density profile of the atomic cloud is a product of the 1D soliton density and the density of the harmonic oscillator ground state in the transverse directions, the resulting lifetime is 160 s [i.e., 5.5 in the units (2)]. This seems to be sufficient time to see the delocalization effects analyzed in the present publication.

## V. CONCLUSION

We have considered quantum bright solitons in the presence of an external disorder potential. When a single soliton is placed in the disorder, Anderson localization of its center of mass is predicted by [34]. If two solitons are present the mutual interaction between them can be responsible for the breakdown of the localization. We have analyzed this phenomenon within the perturbation approach and by means of numerical integration of the Schrödinger equation. The perturbation approach shows that exponential tails of the probability densities of the centers of mass of the solitons disappear due to coupling of an unperturbed eigenstate to high energy delocalized states that is induced by the solitons interaction. The interaction-induced delocalization is different from the typical situation [8–11] because apart from the relative distance between the solitons, the interaction potential depends also on the relative phase between them. In the numerical integration, where we can afford stronger interactions than in the perturbation analysis, we observe that the localization of the solitons can be totally broken.

The results obtained in the present publication can be verified in experiments. They also indicate that in order to observe experimentally the Anderson localization of solitons, a single soliton has to be excited and preparation of soliton trains should be avoided.

## ACKNOWLEDGMENT

This work is supported by the Polish National Science Centre under Projects No. DEC-2011/01/N/ST2/00418 (M.P.) and No. DEC-2011/01/B/ST3/00512 (K.S.).

- 
- [1] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).  
 [2] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).  
 [3] N. F. Mott and W. D. Twose, *Adv. Phys.* **10**, 107 (1961).  
 [4] K. Ishii, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **53**, 77 (1973).  
 [5] B. U. Felderhof, *J. Stat. Phys.* **43**, 267 (1986).  
 [6] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 287 (1985).  
 [7] B. van Tiggelen, in *Diffuse Waves in Complex Media*, edited by J.-P. Fouque, NATO Advanced Study Institutes, Ser. C, Vol. 531 (Kluwer, Dordrecht, 1999).  
 [8] D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2607 (1994).  
 [9] Y. Imry, *Europhys. Lett.* **30**, 405 (1995).  
 [10] D. Weinmann, A. Müller-Groeling, J.-L. Pichard, and K. Frahm, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1598 (1995).  
 [11] J. C. Flores, *Phys. Rev. B* **62**, 33 (2000).  
 [12] David H. Dunlap, H.-L. Wu, and Philip W. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 88 (1990).  
 [13] V. Bellani, E. Diez, R. Hey, L. Toni, L. Tarricone, G. B. Parravicini, F. Domínguez-Adame, and R. Gómez-Alcalá, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2159 (1999).  
 [14] F. A. B. F. de Moura and M. L. Lyra, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3735 (1998).  
 [15] H. Cheraghchi, S. M. Fazeli, and K. Esfarjani, *Phys. Rev. B* **72**, 174207 (2005).  
 [16] D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1787 (1993).  
 [17] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J. Arlt, K. Sacha, J. Zakrzewski, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170411 (2005).  
 [18] A. S. Pikovsky and D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 094101 (2008).  
 [19] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect, *Nature (London)* **453**, 891 (2008).  
 [20] G. Roati, C. D’Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio, *Nature (London)* **453**, 895 (2008).  
 [21] S. S. Kondov, W. R. McGehee, J. J. Zirbel, and B. DeMarco, *Science* **334**, 66 (2011).  
 [22] F. Jendrzejewski, A. Bernard, K. Müller, P. Cheinet, V. Josse, M. Piraud, L. Pezz, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer, *Nature Physics* **8**, 398 (2012).  
 [23] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198 (1999).  
 [24] J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, Charles W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider, and W. D. Phillips, *Science* **287**, 97 (2000).

- [25] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, *Science* **296**, 1290 (2002).
- [26] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, *Nature (London)* **417**, 150 (2002).
- [27] S. L. Cornish, S. T. Thompson, and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 170401 (2006).
- [28] A. Weller, J. P. Ronzheimer, C. Gross, J. Esteve, M. K. Oberthaler, D. J. Frantzeskakis, G. Theocharis, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 130401 (2008).
- [29] C. Becker, S. Stellmer, P. Soltan-Panahi, S. Dörscher, M. Baumert, E. M. Richter, J. Kronjäger, K. Bongs, and K. Sengstock, *Nature Physics* **4**, 496 (2008).
- [30] C. Weiss and Y. Castin, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 010403 (2009).
- [31] A. I. Streltsov, O. E. Alon, and L. S. Cederbaum, *Phys. Rev. A* **80**, 043616 (2009).
- [32] A. D. Martin and J. Ruostekoski, *New J. Phys.* **14**, 043040 (2012).
- [33] M. Lewenstein and B. A. Malomed, *New J. Phys.* **11**, 113014 (2009).
- [34] K. Sacha, C. A. Müller, D. Delande, and J. Zakrzewski, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 210402 (2009).
- [35] K. Sacha, D. Delande, J. Zakrzewski, *Acta Physica Polonica* **A116**, 772 (2009).
- [36] C. A. Müller, *Appl. Phys. B* **102**, 459 (2011).
- [37] M. Mochol, M. Płodzień, and K. Sacha, *Phys. Rev. A* **85**, 023627 (2012).
- [38] L. P. Pitaevskii, *Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961); E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
- [39] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [40] R. Kanamoto, H. Saito, and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **67**, 013608 (2003).
- [41] Y. Lai and H. A. Haus, *Phys. Rev. A* **40**, 844 (1989).
- [42] Y. Castin, in *Coherent Atomic Matter Waves*, Lecture Notes of Les Houches Summer School, edited by R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David (EDP Sciences and Springer-Verlag, Paris, 2001), pp. 1–136.
- [43] D. Delande, K. Sacha, M. Płodzień, S. K. Avazbaev, and J. Zakrzewski, arXiv:1207.2001.
- [44] J. Dziarmaga, *Phys. Rev. A* **70**, 063616 (2004).
- [45] B. A. Malomed, *Phys. Rev. E* **58**, R864 (1998).
- [46] M. Płodzień and K. Sacha, *Phys. Rev. A* **84**, 023624 (2011).
- [47] M. Piraud, A. Aspect, and L. Sanchez-Palencia, *Phys. Rev. A* **85**, 063611 (2012).
- [48] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2010).
- [49] A. I. Streltsov, O. E. Alon, and L. S. Cederbaum, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 240401 (2011).
- [50] J. L. Roberts, N. R. Claussen, S.L. Cornish, and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 728 (2000).

**Dark soliton in a disorder potential**Małgorzata Mochol,<sup>\*</sup> Marcin Płodzień, and Krzysztof Sacha*Instytut Fizyki imienia Mariana Smoluchowskiego and Mark Kac Complex Systems Research Center, Uniwersytet Jagielloński, Ulica Reymonta 4, PL-30-059 Kraków, Poland*

(Received 29 November 2011; published 21 February 2012)

We consider a dark soliton in a Bose-Einstein condensate in the presence of a weak disorder potential. Deformation of the soliton shape is analyzed within the Bogoliubov approach and by employing an expansion in eigenstates of the Pöschl-Teller Hamiltonian. Comparison of the results with the numerical simulations indicates that the linear response analysis reveals a good agreement even if the strength of disorder is of the order of the chemical potential of the system. In the second part of the paper we concentrate on the quantum nature of the dark soliton and demonstrate that the soliton may reveal Anderson localization in the presence of disorder. The Anderson-localized soliton may decay due to quasiparticle excitations induced by the disorder. However, we show that the corresponding lifetime is much longer than the condensate lifetime in a typical experiment.

DOI: [10.1103/PhysRevA.85.023627](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.023627)

PACS number(s): 03.75.Lm, 72.15.Rn, 05.30.Jp

**I. INTRODUCTION**

Ultracold atomic gases have become a playground where complex systems of solid-state physics, nonlinear quantum optics, or even cosmology can be efficiently simulated and investigated [1,2]. The level of experimental control and detection is unprecedented and allows one to build quantum simulators, i.e., experimentally controlled systems that are able to mimic other systems difficult to investigate directly [3]. Since the first laboratory achievement of Bose-Einstein condensation the list of problems investigated experimentally and theoretically in ultracold atomic gases has become very long and includes superfluid phases of both bosonic and fermionic atomic species [4,5], collective excitations like solitons and vortices [6–12], insulating phases of solid-state physics [13–15], transport properties and Anderson localization effects [16–19], and atomic systems in the presence of artificial gauge potentials [20–22].

Particularly interesting is the interplay between particle interactions and disorder phenomena in quantum many-body systems. Anderson localization [23], which is essentially a single-particle phenomenon, is vulnerable to particle interactions [24–29]. In experiments with atomic gases the localization was observed when the interactions were practically turned off by employing Feshbach resonances or by reducing the density of the atomic cloud [16–19].

Particle interactions play a vital role in soliton formation. The mean-field description of atomic Bose-Einstein condensates reduces to the Gross-Pitaevskii equation (GPE) [30–32], which possesses a localized wave-packet solution (i.e., bright soliton) for attractive particle interactions and a solution with a phase flip (i.e., dark soliton) for repulsive interactions. Both kinds of solitons have been observed experimentally [6–9].

While the GPE is a single-particle description with the interactions included in the mean-field approximation, one can anticipate quantum many-body effects that go beyond such a description. The center of mass of a bright soliton is a degree of freedom which, when properly described quantum mechanically, allows for the analysis of interesting phenomena

like soliton scattering on a potential barrier which leads to a superposition of macroscopically distinct objects [33] or quantum entanglement of a pair of solitons [34]. It is also shown that despite the fact that particle interactions are present and are responsible for the bright soliton formation, the center of mass of the soliton can reveal Anderson localization in a weak disorder potential [35,36]. One may raise the natural question whether similar localization can also be observed in the case of a dark soliton. In the bright soliton case a huge energy gap for quasiparticle excitations guarantees that the shape of the soliton is not perturbed by a weak disorder potential. Then the only degree of freedom affected by the disorder is the center of mass and (as has been shown recently) it becomes Anderson localized. In the dark soliton case the situation is more delicate because there is practically no gap for quasiparticle excitations. Consequently, one may expect that coupling between the degree of freedom that describes the soliton position and the quasiparticle subsystem induced by the disorder can destroy Anderson localization of the dark soliton. In the present paper we address this problem and show that the dark soliton localization can be observed experimentally because the lifetime of the localized states is sufficiently long.

The paper is organized as follows. In Sec. II we analyze the deformation of a dark soliton solution in the presence of a weak external potential within the Bogoliubov approach and by reducing the description to the problem of the Pöschl-Teller potential. Such a classical description of the soliton allows us to conclude that the deformation effect is very weak. It implies that in the quantum description of the soliton we may expect that coupling between the degree of freedom that describes the soliton position and the quasiparticle subsystem can be neglected. This is confirmed in Sec. III, where we switch to the quantum description and calculate the lifetimes of Anderson-localized dark solitons. We conclude in Sec. IV.

**II. CLASSICAL DESCRIPTION**

We consider  $N_0$  bosonic atoms with repulsive interactions in a one-dimensional (1D) box potential of length  $L$  at zero temperature (for experimental realization of a box potential see [37]). The mean-field description assumes that all atoms

<sup>\*</sup>malgorzata.mochol@uj.edu.pl



occupy the same single-particle state  $\phi_0$ , which is a solution of the GPE [30],

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\phi_0 + g_0|\phi_0|^2\phi_0 = \mu_0\phi_0, \quad (1)$$

where  $g_0 = 2\hbar a\omega_\perp$ ,  $\mu_0$  is the chemical potential of the system,  $a$  stands for the  $s$ -wave scattering length of the atoms, and  $\omega_\perp$  denotes the transverse harmonic confinement frequency. By virtue of the nonlinear term in the GPE, there exists a stationary dark soliton solution which, far from the boundary of the box potential, takes the form

$$\phi_0(x-q) = e^{-i\theta}\sqrt{\rho_0}\tanh\left(\frac{x-q}{\xi}\right), \quad (2)$$

where  $\theta$  is an arbitrary phase,  $\rho_0$  stands for the atomic density away from the soliton position  $q$ , and  $\xi = \hbar/\sqrt{m g_0 \rho_0}$  is the so-called healing length. The chemical potential of the system is  $\mu_0 = g_0 \rho_0$ . The description of a dark soliton restricted to the classical wave equation, (1), is called the classical description. It is in contrast to the quantum description in Sec. III, where, for example, the position of a dark soliton  $q$  becomes a quantum degree of freedom. We consider a finite 1D system. However, in order to describe the system in a region away from the boundary of the box potential, we may use analytical solutions corresponding to the infinite configuration space which, if necessary, can be modified to satisfy boundary conditions [38], e.g.,  $\phi_0(x=0) = 0$  and  $\phi_0(x=L) = 0$ .

In the remainder of the paper we adapt the following units for energy, length, and time, respectively:

$$E_0 = \mu_0, \quad l_0 = \xi, \quad t_0 = \frac{\hbar}{\mu_0}. \quad (3)$$

#### A. Deformation of a dark soliton: Expansion in Bogoliubov modes

We would like to describe the deformation of a dark soliton solution in the presence of a weak disorder potential. The disorder potentials we are interested in correspond to optical speckle potentials which are created experimentally by shining laser radiation on a so-called diffusive plate [28,39]. In the far field, light forms a random intensity pattern which is experienced by atoms as an external disorder potential. Diffraction effects are responsible for a finite correlation length of the speckle potentials. Interestingly, properties of such a disorder can be easily engineered that allows, e.g., for preparation of a matter-wave analog of an optical random laser [40].

Bright soliton deformation in an optical speckle potential has been already considered in Ref. [41]; see also [42]. Dark soliton propagation and its radiation in the presence of randomly distributed Dirac  $\delta$  potentials have been considered in Ref. [43]; see also [44,45]. In the case of repulsive particle interactions the deformation of a condensate ground state in an optical speckle potential has also been the subject of scientific publications [46–49]. In the present paper we consider the problem of the repulsive interactions but we deal with a localized soliton structure; i.e., there is a phase flip of the condensate wave function at the position of a soliton.

In our considerations the dark soliton is placed in a bounded and weak external potential  $V(x)$ . To calculate a small perturbation of the solitonic wave function we start with the time-independent GPE, which, in our units, (3), takes the form

$$-\frac{1}{2}\partial_x^2\phi(x) + \frac{1}{\rho_0}|\phi(x)|^2\phi(x) + V(x)\phi(x) = \mu\phi(x), \quad (4)$$

and substitute  $\phi = \phi_0 + \delta\phi$  and  $\mu = \mu_0 + \delta\mu = 1 + \delta\mu$ , where  $\delta\phi$  is a small perturbation of the soliton wave function, (2), and  $\delta\mu$  is a small contribution to the chemical potential which allows us to correct a possible change in the total particle number due to the presence of  $V(x)$ . Keeping linear terms only, we obtain the time-independent, nonhomogeneous Bogoliubov–de Gennes equations,

$$\mathcal{L}\begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\phi^* \end{bmatrix} = V\begin{bmatrix} -\phi_0 \\ \phi_0^* \end{bmatrix} + \delta\mu\begin{bmatrix} \phi_0 \\ -\phi_0^* \end{bmatrix}, \quad (5)$$

where

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{2}{\rho_0}|\phi_0|^2 - 1 & +\frac{1}{\rho_0}\phi_0^2 \\ -\frac{1}{\rho_0}\phi_0^{*2} & \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{2}{\rho_0}|\phi_0|^2 + 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

In order to solve Eq. (5) we would like to expand the two-component vector  $(\delta\phi, \delta\phi^*)^T$  in a complete basis that consists of eigenvectors of the non-Hermitian operator  $\mathcal{L}$ . This basis has been published in Ref. [38] (see also [50,51]), and here we only present the results and comment on essential elements of the derivation. Collecting the complete basis, one has to be careful because the  $\mathcal{L}$  operator is not diagonalizable [35,38,50,51]. There are right eigenstates of  $\mathcal{L}$ , i.e.,  $\mathcal{L}|\psi_k\rangle = \epsilon_k|\psi_k\rangle$ , where  $|\psi_k\rangle = (|u_k\rangle, |v_k\rangle)^T$  and [38]

$$u_k(x) = \frac{e^{ikx}e^{-i\theta}}{4\sqrt{\pi}\epsilon_k^{3/2}}\left[(k^2 + 2\epsilon_k)\left(\frac{k}{2} + i\tanh(x-q)\right) + \frac{k}{\cosh^2(x-q)}\right], \quad (7)$$

$$v_k(x) = \frac{e^{ikx}e^{i\theta}}{4\sqrt{\pi}\epsilon_k^{3/2}}\left[(k^2 - 2\epsilon_k)\left(\frac{k}{2} + i\tanh(x-q)\right) + \frac{k}{\cosh^2(x-q)}\right], \quad (8)$$

which correspond to the familiar Bogoliubov spectrum,

$$\epsilon_k = \frac{1}{2}\sqrt{4k^2 + k^4}. \quad (9)$$

These eigenstates are called phonons and their adjoint vectors  $|\psi_k^{\text{ad}}\rangle = (|u_k\rangle, -|v_k\rangle)^T$  are also the left eigenmodes of  $\mathcal{L}$ . Due to symmetries of the  $\mathcal{L}$  operator  $|\tilde{\psi}_k\rangle = (|\tilde{u}_k\rangle, |\tilde{v}_k\rangle)^T = (|u_k^*\rangle, |u_k^*\rangle)^T$  are the right eigenmodes corresponding to eigenvalues  $\tilde{\epsilon}_k = -\epsilon_k$ , and  $|\tilde{\psi}_k^{\text{ad}}\rangle = (-|v_k^*\rangle, |u_k^*\rangle)^T$  are their adjoint vectors. In the infinite configuration space right eigenvectors and adjoint vectors fulfill  $\langle\tilde{\psi}_k^{\text{ad}}|\psi_{k'}\rangle = \langle u_k|u_{k'}\rangle - \langle v_k|v_{k'}\rangle = \delta(k-k')$ . In a box potential the wave vector becomes quantized, i.e.,  $k_n = n\pi/L$ , where  $n = 1, 2, \dots$ , and there is a tiny energy gap for the phonon excitations.

Phonons apart, there exist two zero-eigenvalue modes of  $\mathcal{L}$  corresponding to broken gauge U(1) and translational symmetries [38],

$$\begin{bmatrix} u_\theta \\ v_\theta \end{bmatrix} = i \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_0^* \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} u_q \\ v_q \end{bmatrix} = i \frac{\partial}{\partial q} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_0^* \end{bmatrix}, \quad (11)$$

respectively. They appear as zero-eigenvalue vectors because a shift of the global phase  $\theta$  or a change of the soliton position  $q$  in solution (2) does not lead to a change in the system energy. The zero modes fulfill  $\langle u_q | u_\theta \rangle - \langle v_q | v_\theta \rangle = 0$  and they are orthogonal to the modes adjoint to the phonons. Vectors adjoint to the zero modes are not left eigenvectors of the  $\mathcal{L}$  and they can be found by solving [51]

$$\mathcal{L} \begin{bmatrix} u_{\theta,q}^{\text{ad}} \\ v_{\theta,q}^{\text{ad}} \end{bmatrix} = \frac{1}{M_{\theta,q}} \begin{bmatrix} u_{\theta,q} \\ v_{\theta,q} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

where  $M_{\theta,q}$  are determined by normalization conditions  $\langle u_{\theta,q}^{\text{ad}} | u_{\theta,q} \rangle - \langle v_{\theta,q}^{\text{ad}} | v_{\theta,q} \rangle = 1$ . One gets [38]

$$\begin{bmatrix} u_\theta^{\text{ad}} \\ v_\theta^{\text{ad}} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial N_0} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_0^* \end{bmatrix} - iR \begin{bmatrix} u_q \\ v_q \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} u_q^{\text{ad}} \\ v_q^{\text{ad}} \end{bmatrix} = -\frac{i}{4\sqrt{\rho_0}} \begin{bmatrix} e^{-i\theta} \\ -e^{i\theta} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

where  $M_\theta = \rho_0(\partial N_0/\partial \rho_0)$ ,  $M_q = -4\rho_0$ , and  $R = (2q - L)\rho_0/M_q M_\theta$ . We have  $\langle u_q^{\text{ad}} | u_\theta \rangle - \langle v_q^{\text{ad}} | v_\theta \rangle = 0$  and  $\langle u_\theta^{\text{ad}} | u_q \rangle - \langle v_\theta^{\text{ad}} | v_q \rangle = 0$ . A small contribution of the zero mode  $(u_q, v_q)^T$  in Eq. (13) allows one also to fulfill  $\langle u_q^{\text{ad}} | u_\theta^{\text{ad}} \rangle - \langle v_q^{\text{ad}} | v_\theta^{\text{ad}} \rangle = 0$ .

Now we have all the vectors to build a complete basis and the deformation of the soliton can be expanded in that basis:

$$\begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\phi^* \end{bmatrix} = \Delta\theta \begin{bmatrix} u_\theta \\ v_\theta \end{bmatrix} + P_\theta \begin{bmatrix} u_\theta^{\text{ad}} \\ v_\theta^{\text{ad}} \end{bmatrix} + \Delta q \begin{bmatrix} u_q \\ v_q \end{bmatrix} + P_q \begin{bmatrix} u_q^{\text{ad}} \\ v_q^{\text{ad}} \end{bmatrix} + \sum_k \left( b_k \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} + b_k^* \begin{bmatrix} v_k^* \\ u_k^* \end{bmatrix} \right). \quad (15)$$

Substituting (15) into (5) results in

$$\begin{aligned} V \begin{bmatrix} -\phi_0 \\ \phi_0^* \end{bmatrix} + \delta\mu \begin{bmatrix} \phi_0 \\ -\phi_0^* \end{bmatrix} &= \frac{P_\theta}{M_\theta} \begin{bmatrix} u_\theta \\ v_\theta \end{bmatrix} + \frac{P_q}{M_q} \begin{bmatrix} u_q \\ v_q \end{bmatrix} \\ &+ \sum_k \epsilon_k \left( b_k \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} - b_k^* \begin{bmatrix} v_k^* \\ u_k^* \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Projecting this equation onto the adjoint vectors, we can obtain the expansion coefficients and a small correction to the chemical potential. Note that there is no restriction for a choice of small deviation  $\Delta\theta$  and  $\Delta q$ , which is due to the fact that these coefficients are related to the zero modes. However, while  $\theta$  can be arbitrary, we will see that  $q$  cannot because the external potential breaks the translational symmetry but does not affect the U(1) symmetry. Coefficient  $\Delta\theta$  is related to a shift in the global phase of the soliton solution, (2), and

without loss of generality, we may choose  $\Delta\theta = 0$ . For the coefficient  $P_\theta$  we get

$$\frac{P_\theta}{M_\theta} = -2\langle \partial_{N_0} \phi_0 | V \phi_0 \rangle + \delta\mu - iR(\langle u_q | V \phi_0 \rangle + \langle v_q | V \phi_0^* \rangle). \quad (17)$$

The last term on the right-hand side can be written as

$$\langle u_q | V \phi_0 \rangle + \langle v_q | V \phi_0^* \rangle \sim \int_0^L dx |\phi_0(x - q)|^2 \partial_x V(x), \quad (18)$$

which represents a force acting on the soliton. A similar effective force appears in the approach used in Ref. [52]. For the stationary solution it is obvious that the soliton position  $q$  is chosen so that such a force is 0. Then also an arbitrary shift of the soliton position should be 0, i.e.,  $\Delta q = 0$  in Eq. (15). With such a choice of the soliton position, the coefficient  $P_\theta$  is directly related to a change in the total particle number which we assume to be 0. Hence,  $P_\theta = dN = 0$  and Eq. (17) allows us to obtain the correction to the chemical potential,

$$\begin{aligned} \delta\mu &= 2\langle \partial_{N_0} \phi_0 | V \phi_0 \rangle \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L dy (\tanh y + y \operatorname{sech}^2 y) \tanh y V(y + q). \end{aligned} \quad (19)$$

Projecting (16) onto the adjoint mode (14) results in  $P_q = 0$ , which can be expected because  $P_q$  has an interpretation of the soliton momentum, and for the stationary state it should be 0.

Thus, with the proper choice of the soliton position and a suitable correction of the chemical potential, all coefficients in Eq. (15) are 0 except

$$b_k = \frac{1}{\epsilon_k} [-\langle u_k | V \phi_0 \rangle - \langle v_k | V \phi_0^* \rangle], \quad (20)$$

which contains full information about soliton deformation in a weak external potential. Finally, the stationary solitonic solution in the presence of a weak external potential reads

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \sum_k [b_k u_k(x) + b_k^* v_k^*(x)]. \quad (21)$$

## B. Deformation of a dark soliton: Expansion in modes of the Pöschl-Teller potential

The Bogoliubov approach is suitable for the description of the eigenmodes of collective or elementary excitations of a Bose-Einstein condensate [31,32]. However, if we are interested in the description of a stationary state of the GPE and if such a state can be represented as a real function, one may introduce a substantial simplification. We will see that the description of dark soliton deformation reduces to an expansion of a wave-function perturbation in modes of the Pöschl-Teller potential [53]. Such an approach has been applied in the analysis of a bright soliton deformation in a weak disorder potential [41] and it turns out that it is also suitable in the dark soliton case.

Let us start again with the stationary GPE but assume that the solution we are looking for is a real function:

$$\left( -\frac{1}{2} \partial_x^2 + \frac{1}{\rho_0} \phi^2 - \mu + V(x) \right) \phi = 0. \quad (22)$$

Similarly to the Bogoliubov approach, we introduce  $\mu = \mu_0 + \delta\mu = 1 + \delta\mu$  and  $\phi = \phi_0 + \delta\phi$  but assume that in Eq. (2) the global phase  $\theta = 0$ . Keeping linear terms only, rewriting  $\phi_0^2(x - q) = \rho_0 \tanh^2(x - q) = \rho_0[1 - \cosh^{-2}(x - q)]$ , and changing variable  $x \rightarrow x + q$ , we obtain

$$(H_0 + 2)\delta\phi = \delta\mu\phi_0 - V(x + q)\phi_0, \quad (23)$$

where

$$H_0 = -\frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{3}{\cosh^2(x)} \quad (24)$$

is the Hamiltonian for a particle in the Pöschl-Teller potential [53]. To compute  $\delta\phi$  we need to invert the operator  $H_0 + 2$ . All the eigenstates of the Hamiltonian  $H_0$  are known in the literature [54]. There are two bound states,

$$\psi_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sech}(x)^2, \quad (25)$$

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\text{sech}(x)\tanh(x), \quad (26)$$

with eigenenergies  $E_0 = -2$  and  $E_1 = -\frac{1}{2}$ , respectively, and scattering states

$$\psi_k(x) = \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{k^2 - 2 + 3\text{sech}(x)^2 + 3ik \tanh(x)}{[(1 + k^2)(4 + k^2)]^{1/2}}, \quad (27)$$

with  $E_k = \frac{k^2}{2}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . We can therefore expand the deformation  $\delta\phi$  over an orthonormal basis of eigenfunctions,

$$\delta\phi = \alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 + \int dk \alpha_k \psi_k(x), \quad (28)$$

and compute coefficients  $\alpha_j$  by projecting Eq. (23) on the proper eigenmodes,

$$(E_j + 2)\alpha_j = \int dx \psi_j^*(x)[\delta\mu\phi_0 - V(x + q)\phi_0]. \quad (29)$$

Wave function (25) is a zero mode, i.e.,  $(H_0 + 2)\psi_0 = 0$ . Thus, Eq. (23) can be solved provided the projection of its right-hand side on the zero mode vanishes. Therefore we require

$$\begin{aligned} & -\langle \psi_0 | V \phi_0 \rangle + \delta\mu \langle \psi_0 | \phi_0 \rangle \\ & = -\langle \psi_0 | V \phi_0 \rangle \sim \langle \partial_x \phi_0 | V \phi_0 \rangle \\ & = -\int_0^L dx \phi_0^2(x - q) \partial_x V(x) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

In Eq. (30) we have taken advantage of  $\langle \psi_0 | \phi_0 \rangle = 0$  and the fact that the zero mode is also the translation mode of the dark soliton, i.e.,  $\psi_0 \sim \partial_x \phi_0$ . Condition (30) implies that the soliton position  $q$  should be chosen so that the force acting on it is 0 [cf. with (18)]. From Eq. (29) we do not get any restriction for the value of  $\alpha_0$ . However, because  $\alpha_0 \psi_0$  has an interpretation of a shift of the soliton position, we should choose  $\alpha_0 = 0$  if we are interested in a stationary solution.

In order to solve Eq. (23) we have to invert the operator  $H_0 + 2$  in the Hilbert space with the zero mode excluded, which is simple because all eigenfunctions of  $H_0$  are known. That is,

$$\delta\phi(x) = \int dy K(x, y)[\delta\mu\phi_0 - V(y + q)\phi_0], \quad (31)$$

where the symmetric kernel  $K(x, y)$  reads

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \frac{2}{3} \psi_1(x) \psi_1^*(y) + 2 \int \frac{\psi_k(x) \psi_k^*(y)}{4 + k^2} \\ &= -\frac{1}{16} \text{sech}^2(x) \text{sech}^2(y) \\ &\quad \times \{ \sinh^2 2x + \sinh^2 2y + 4 \cosh 2x + 4 \cosh 2y \\ &\quad - 3 - (\cosh 2x + \cosh 2y + 3) |\sinh 2x - \sinh 2y| \\ &\quad - 4 \sinh|x - y| \sinh x \sinh y - 6|x - y| \}. \end{aligned} \quad (32)$$

In the Bogoliubov approach, even if we are restricted to the phonon subspace, the  $\mathcal{L}$  operator possesses a zero eigenvalue if the configuration space is infinite [see (9)]. Therefore it is not straightforward to obtain a simple form of the relevant kernel because integration over phonon subspace should actually be substituted by summation over discrete values of the wave vector.

Finally, we have to determine the correction to the chemical potential. In the Bogoliubov approach there is a specific mode responsible for a change in the total particle number which is orthogonal to all other Bogoliubov modes, and to keep the particle number constant it is sufficient to ensure that the wavefunction perturbation does not have any contribution from this mode. In the present approach the chemical potential has to be determined by the normalization condition  $\langle \phi | \phi \rangle = N_0 + O(\delta\phi^2)$ , which implies  $\langle \phi_0 | \delta\phi \rangle = 0$  and thus

$$\begin{aligned} \delta\mu &= \frac{\int dx dy \phi_0(x) K(x, y) V(y + q) \phi_0(y)}{\int dx dy \phi_0(x) K(x, y) \phi_0(y)} \\ &= \frac{1}{L} \int dy (\tanh y + y \text{sech}^2 y) \tanh y V(y + q), \end{aligned} \quad (33)$$

which is the same expression as in the Bogoliubov approach [cf. with (19)].

The final expression for a stationary solitonic solution in the presence of a weak external potential reads

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_0(x) - \int dy K(x, y) V(y + q) \phi_0(y) \\ &\quad + \delta\mu \frac{\partial \phi_0(x)|_{\mu_0}}{\partial \mu_0}, \end{aligned} \quad (34)$$

where we have made use of  $\int dy K(x, y) \phi_0(y) = \frac{\partial \phi_0(x)|_{\mu_0}}{\partial \mu_0}$ , with  $\phi_0|_{\mu_0} \equiv \phi_0$  being a wave function with fixed chemical potential  $\mu_0 = 1$ .

In the bright soliton case [41] the eigenfunction  $\psi_1$  (not  $\psi_0$  as in the dark soliton problem) turns out to be a translation mode of the system, and also the  $H_0 + 2$  operator is substituted by  $H_0 + 1/2$ . Consequently, one obtains a different expression for the symmetric kernel, which is expected because the bright soliton represents a localized wave packet while the dark soliton is a phase flip at a soliton position with otherwise uniform density.

### C. Comparison with numerical calculations

We will compare the perturbative approaches introduced in Secs. II A and II B with the results of numerical calculations in the case of a dark soliton in a weak optical speckle potential. However, first we consider a simple harmonic potential,

$$V(x) = -V_0 \cos(k_0 x), \quad (35)$$

which, on one hand, is a generic example because any potential can be expanded in a Fourier basis and, on the other hand, allows us to obtain simple expressions for expansion coefficients.

In the Bogoliubov approach, Eq. (20), for potential (35), one gets

$$b_k = -iV_0\sqrt{\rho_0}\frac{\sqrt{\pi}}{2k(4+k^2)\sqrt{\epsilon_k}} \times \left\{ k_0^2 \left( \operatorname{csch}\frac{\pi(k-k_0)}{2} + \operatorname{csch}\frac{\pi(k+k_0)}{2} \right) + 4k[\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)] \right\}. \quad (36)$$

This coefficient contains Dirac  $\delta$  functions which tell us that the condensate density will be modulated with a period of  $2\pi/k_0$ . At small  $k$  the coefficient diverges,

$$b_k \sim \frac{1}{\sqrt{|k|}} + O(|k|^{3/2}), \quad (37)$$

but the contribution to the soliton wave function from long-wave-length phonons is finite,

$$b_k u_k + b_k^* v_k^* \sim \text{const} + O(k^2). \quad (38)$$

Thus, in order to calculate soliton deformation we may assume an infinite configuration space because the singularity at  $k \rightarrow 0$  is actually not dangerous. The correction to the chemical potential  $|\delta\mu| < \frac{4V_0}{k_0 L}$  [see Eq. (19)] disappears in the limit of  $k_0 L \rightarrow \infty$ , which is a consequence of the self-averaging property of potential (35) (see [47]).

In the approach that involves modes of the Pöschl-Teller potential, Eq. (29) yields

$$\alpha_k = iV_0\sqrt{\rho_0}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{8(1+k^2)^{1/2}(4+k^2)^{3/2}}} \times \left\{ (k^2 - 3k_0^2 + 4) \left( \operatorname{csch}\frac{\pi(k-k_0)}{2} + \operatorname{csch}\frac{\pi(k+k_0)}{2} \right) - 12k[\delta(k+k_0) + \delta(k-k_0)] \right\} \quad (39)$$

for scattering modes and

$$\alpha_1 = V_0\sqrt{\frac{2\rho_0}{3}}\frac{\pi}{2}(1-k_0^2)\operatorname{sech}\left(\frac{k_0\pi}{2}\right) \quad (40)$$

for the bound state  $\psi_1$ , where we have assumed that the system is infinite and thus the correction  $\delta\mu = 0$ . There are Dirac  $\delta$  functions present in Eq. (39) similarly as in the Bogoliubov coefficients, but contrary to the Bogoliubov case, the coefficients  $\alpha_k$  possess no singularity at  $k = 0$ .

Note that coefficients (36) and (39) are proportional to  $V_0$ . Thus, for  $V_0 \ll 1$  (i.e., for a potential strength much lower than the chemical potential of the system), the perturbation of the condensate wave function is certainly negligible. Deformation of the soliton shape depends on the relation of  $k_0$  to the inverse of the healing length. For  $k_0 \ll 1$ , i.e., if the potential changes on a scale much larger than the healing length of the system, we may employ the Thomas-Fermi profile [30] and approximate the condensate wave function by  $\phi(x) \approx \sqrt{\rho_0[1-V(x)]}\tanh(x/\xi)$ , where  $\xi = 1/\sqrt{1+V_0}$  is a local healing length around the soliton position. Thus, for  $k_0 \ll 1$ , the soliton shape is still given by the hyperbolic tangent

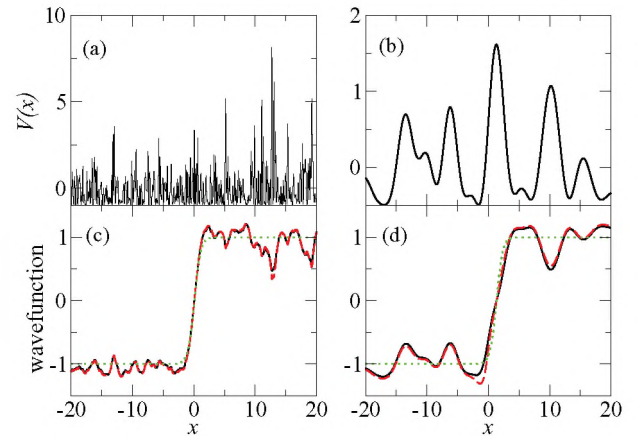


FIG. 1. (Color online) (a) An example of an optical speckle potential with correlation length  $\sigma_R = 0.05$  and  $V_0 = 1$ ; (c) the corresponding exact solution of the Gross-Pitaevskii equation obtained numerically [solid (black) line] and within the perturbation approach [dashed (red) line]; see Eq. (34) [Eq. (21) leads to the same results]. (b), (d) The same as (a) and (c) but for  $\sigma_R = 1$  and  $V_0 = 0.5$ . Dotted (green) lines in (c) and (d) correspond to unperturbed soliton wave functions, (2).

function but its size is smaller. In the other limit, i.e., for  $k_0 \gg 1$ , the condensate wave function reveals harmonic oscillations superposed on the hyperbolic tangent function. Indeed, for  $k_0 \gg 1$ , Eq. (39) implies that the dominant contribution comes from  $k \approx k_0$ , which behaves like  $V_0/k_0^2$ . Thus, even if we increase  $V_0$  but choose  $k_0 \gg 1$ , the wave-function perturbation is still negligible due to smoothing effects. Finally, we would like to stress that plotting  $\phi$  obtained in the Bogoliubov approach and with the help of the Pöschl-Teller modes, one gets exactly the same results.

For comparison with numerics we have chosen the case of an optical speckle potential. Such a potential is characterized by zero mean value  $\overline{V(x)} = 0$ , where the overbar denotes an ensemble average over disorder realizations, standard deviation  $V_0 = [V(x)^2]^{1/2}$ , and autocorrelation function  $\overline{V(x')V(x'+x)} = V_0^2 \frac{\sin^2(x/\sigma_R)}{(x/\sigma_R)^2}$ , where  $\sigma_R$  is the correlation length of the disorder. In Fig. 1 we show examples of the solitonic solutions in the presence of an optical speckle potential for a much smaller correlation length ( $\sigma_R = 0.05$ ), comparable ( $\sigma_R = 1$ ) to the healing length, and for  $V_0 = 1$  and  $V_0 = 0.5$ , respectively, obtained within the perturbation approaches and by a numerical solution of the GPE. The agreement is surprisingly good, even though the strength of the disorder is of the order of the chemical potential. For  $\sigma_R = 0.05$  the disorder changes rapidly and its effect on the condensate is significantly smaller than for  $\sigma_R = 1$ .

We have considered a dark soliton in a box potential and analyzed its deformation due to the presence of a weak disorder potential. Our results can also be applied to the system in the presence of, e.g., a shallow harmonic trap. Indeed, if we are interested in the deformation of the condensate wave function in the vicinity of the trap center and if the change in the harmonic potential energy on a scale of the soliton size is much smaller than the disorder strength, i.e.,  $\omega^2 \ll V_0$ , where  $\omega$  is the harmonic trap frequency, the effect of the presence of the trap on the soliton deformation can be neglected.

### III. QUANTUM DESCRIPTION

In the previous section, in order to describe ultracold atoms, we applied the mean-field approximation, where it is assumed that a many-body system is in a state where all atoms occupy the same single-particle wave function. Solution of the GPE is an optimal choice for such a single-particle wave function. Then a stationary dark soliton appears as a solution of the classical wave equation and its position is given by a real number  $q$ . In the present section we take into account situations when particles do not necessary occupy the same single-particle state. It turns out that the problem can be described within the quantum version of the Bogoliubov approach, where, e.g.,  $q$  becomes a quantum mechanical operator  $\hat{q}$  and the soliton position is described by a probability distribution. This approach has rather a semiclassical nature. The full quantum analysis would involve the  $N$ -body problem as done in Refs. [55,56] for bright solitons in optical fibers (see also Ref. [32]).

#### A. Effective Hamiltonian

An effective Hamiltonian that describes a bright soliton in the presence of a weak external potential was introduced in Ref. [36]. It is based on the Dziarmaga idea of how to describe nonperturbatively degrees of freedom corresponding to Bogoliubov zero modes [38]. Derivation of the effective Hamiltonian in the dark soliton case follows the same reasoning and therefore we present the key elements only.

In the previous section once the global phase  $\theta$  of wave function (2) and the soliton position  $q$  were chosen, no deviations of them were considered. Small deviations can be described with the help of the zero modes [cf. (10)/(11) and (15)], while large deviations need modifications of the description. The expansion of the wave-function perturbation around a given value of the soliton position  $q$  [see (15)] is actually not necessary because one may treat  $q$  as a dynamical variable and the same is true for  $\theta$  [38]. This way we obtain

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi \\ \phi^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_0^* \end{bmatrix} + P_\theta \begin{bmatrix} u_\theta^{\text{ad}} \\ v_\theta^{\text{ad}} \end{bmatrix} + P_q \begin{bmatrix} u_q^{\text{ad}} \\ v_q^{\text{ad}} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_k \left( b_k \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} + b_k^* \begin{bmatrix} v_k^* \\ u_k^* \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

In Eq. (41) all modes depend on  $q$  and  $\theta$  and can follow large changes in the soliton position and global phase. Substituting (41) into the energy functional,

$$H = \int dx \left[ \frac{1}{2} |\partial_x \phi|^2 + V |\phi|^2 + \frac{1}{2\rho_0} |\phi|^4 - \mu |\phi|^2 \right], \quad (42)$$

leads to

$$\begin{aligned} H &= -\frac{P_q^2}{2|M_q|} + \int dx V(x) |\phi_0(x-q)|^2 \\ &+ \frac{P_\theta^2}{2M_\theta} + 2P_\theta \langle u_\theta^{\text{ad}} | V \phi_0 \rangle \\ &+ \sum_k [\epsilon_k b_k^\dagger b_k + s_k (b_k + b_k^*)], \end{aligned} \quad (43)$$

with

$$s_k = \langle u_k | V \phi_0 \rangle + \langle v_k | V \phi_0^* \rangle, \quad (44)$$

where only terms of the order  $O(P^2, b^2, PV, bV)$  are kept. Note that Eq. (43) is the Hamiltonian formulation of the classical perturbation theory applied in Sec. II A. That is, fixed points of the Hamilton equations generated by Eq. (43) [36] correspond to stationary solutions analyzed in Sec. II A. We know from Sec. II that such stationary solutions are in very good agreement with the exact numerical calculations for the disorder strength even of the order of the chemical potential of the system, i.e., for  $V_0 \approx 1$ .

In the so-called second quantization formalism the quantum many-body Hamiltonian corresponds to (42), where the wave function  $\phi$  is substituted by a bosonic field operator  $\hat{\phi}$ . Then also the expansion coefficients in Eq. (41) become operators,

$$\hat{P}_q = -i \partial_q, \quad (45)$$

$$\hat{P}_\theta = \hat{N} - N_0 = -i \partial_\theta, \quad (46)$$

and fulfill commutation relations

$$[\hat{q}, \hat{P}_q] = i, \quad [\hat{\theta}, \hat{P}_\theta] = i, \quad [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (47)$$

Energy functional (43) does not depend on  $\theta$ , thus, in the quantum description  $[\hat{P}_\theta, \hat{H}] = 0$ , and we may restrict it to the Hilbert subspace with exactly  $N_0$  particles; i.e., for any state in this subspace  $\hat{P}_\theta |\psi\rangle = 0$ , and the quantum effective Hamiltonian reduces to

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_B + \hat{H}_1, \quad (48)$$

where

$$\begin{aligned} \hat{H}_q &= -\frac{\hat{P}_q^2}{2|M_q|} + \int dx V(x) |\phi_0(x-q)|^2 \\ &= -\left( \frac{\hat{P}_q^2}{2|M_q|} + \frac{|M_q|}{4} \int dx \frac{V(x)}{\cosh^2(x-q)} \right), \end{aligned} \quad (49)$$

$$\hat{H}_B = \sum_k \epsilon_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \quad (50)$$

$$\hat{H}_1 = \sum_k s_k (\hat{b}_k + \hat{b}_k^\dagger). \quad (51)$$

The Hamiltonian  $\hat{H}_q$  describes soliton motion in an effective potential which turns out to be a convolution of the original potential with density  $|\phi_0|^2$ . Owing to  $|\phi_0|^2 = \rho_0 \tanh^2(x-q) = \frac{|M_q|}{4} [1 - \cosh^2(x-q)]$  and  $\overline{V(x)} = 0$ ,  $\hat{H}_q$  becomes similar to the corresponding Hamiltonian for a bright soliton in a weak external potential [35]. The term  $\hat{H}_B$  describes quasiparticle subsystem (phonons) and  $\hat{H}_1$  is the part of the Hamiltonian that couples the soliton position degree of freedom with phonons. In the classical description (Sec. II) such a coupling is responsible for the deformation of the stationary condensate wave function. In the following we do not look for eigenstates of the total Hamiltonian  $\hat{H}$  but rather consider eigenstates of  $\hat{H}_q$  and calculate the lifetime of the system prepared in these eigenstates due to the coupling with the quasiparticle subsystem induced by  $\hat{H}_1$ .

We would like to emphasize striking differences between the classical description and the present quantum description. They are most apparent in the absence of an external potential. Indeed, for  $V(x) = 0$ , the soliton position in the classical description can be chosen arbitrarily but it is well defined.

In the quantum approach the Hamiltonian  $\hat{H}_q$  tells us that eigenstates of the system correspond to eigenstates of the momentum operator  $\hat{P}_q$  and the corresponding probability distributions for the soliton position are totally delocalized. Thus, similarly to the bright soliton case [32], dramatic condensate fragmentations are predicted in the quantum approach of a dark soliton [57].

### B. Anderson localization of a dark soliton

The final form of the Hamiltonian  $\hat{H}_q$  is similar to that of the Hamiltonian for the center of mass of a bright soliton in a weak external potential [36]. The effective mass  $|M_q|$  in Eq. (49) is equal to two times the number of particles missing in a dark soliton notch, while in the bright soliton case it is given by the total number of particles in a system. A bright soliton is the ground-state solution of the GPE and excitation of its center of mass increases the energy of the system. A dark soliton corresponds to a collectively excited system, and in order to decrease the system energy, one has to, e.g., accelerate the soliton. Indeed, excitations of the soliton position degree of freedom actually decrease the system energy due to the minus sign in front of expression (49).

It has been shown that in the presence of a weak disorder potential the center of mass of a bright soliton reveals Anderson localization [35]. The same phenomenon can be expected for dark solitons. For  $V(x)$  being an optical speckle potential with the correlation length  $\sigma_R$  smaller than the healing length of the system, we obtain the effective potential in Eq. (49), where the healing length plays a role in the effective correlation length. The generic properties of the Anderson localization in 1D allow us to expect that all eigenstates of the Hamiltonian  $\hat{H}_q$  are exponentially localized, i.e., have a shape with the overall envelope [58,59]

$$|\psi_n(q)|^2 \propto \exp\left(-\frac{|q - q_0|}{l_{\text{loc}}}\right), \quad (52)$$

where  $\hat{H}_q \psi_n(q) = E_n \psi_n(q)$ ,  $q_0$  is the mean position of the soliton, and  $l_{\text{loc}} = l_{\text{loc}}(E_n)$  is the localization length. Indeed, in Fig. 2 we present examples of the Anderson-localized eigenstates for two values of the standard deviation of the speckle potential  $V_0$ . The parameters we have chosen correspond to  $N_0 = 10^5$   $^{87}\text{Rb}$  atoms in a quasi-1D box potential of  $L = 3550$  (3.37 mm) with the harmonic potential of  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 370$  Hz in the transverse directions; the correlation length of the speckle potential  $\sigma_R = 0.28$  (0.27  $\mu\text{m}$ ) [16]. The energy units, (3), are the following:  $E_0/\hbar = 789$  Hz,  $l_0 = 0.96$   $\mu\text{m}$ , and  $t_0 = 1.27$  ms.

In order to obtain predictions for Anderson localization of solitons we have neglected coupling of the soliton position degree of freedom to the quasiparticle subsystem. In the bright soliton case such an approximation is justified because there is a huge energy gap for quasiparticle excitations, and if the strength of the potential is much smaller than the chemical potential of the system, corrections to the effective Hamiltonian  $\hat{H}_q$  are negligible [36]. In the dark soliton case there is practically no energy gap for phonon excitations, i.e., minimal  $\epsilon_k$  [see (9)] corresponds to  $k = \pi/L$ , which tends to 0 for a large system. Moreover, a dark soliton is a collectively excited state, which may decay to lower energy states by

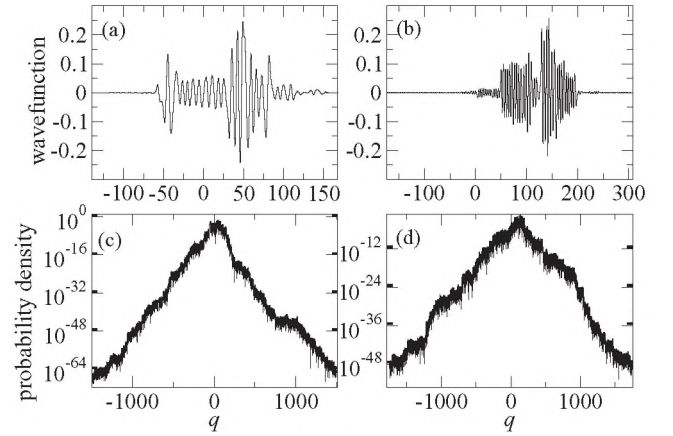


FIG. 2. (a), (b) Examples of eigenstates of the effective Hamiltonian  $\hat{H}_q$  [see (49)]; (c), (d) the corresponding probability densities on log scale. The correlation length of the speckle potential  $\sigma_R = 0.28$  and the strength  $V_0 = 7 \times 10^{-5}$  (a), (c) and  $V_0 = 1.4 \times 10^{-4}$  (b), (d). Eigenstates correspond to the eigenvalue  $E_n = -3.03 \times 10^{-3}$  (a), (c) and  $E_n = -8.58 \times 10^{-3}$  (b), (d) and reveal the localization length  $l_{\text{loc}} = 10.5$  and  $l_{\text{loc}} = 15.7$ , respectively.

emission of phonons. If the strength of the disorder potential  $V_0 \ll 1$ , we know from the classical analysis that the shape of a stationary dark solution of the GPE is negligibly deformed by the external potential. In the quantum description we may thus expect that the lifetime of Anderson-localized eigenstates is sufficiently long and allows for experimental observations of the localization effects.

Suppose we choose an initial state  $|\Psi\rangle$  of an  $N_0$ -particle system where the soliton position is described by an eigenstate  $\psi_n(q)$  of the Hamiltonian  $\hat{H}_q$  corresponding to an eigenvalue  $E_n$  and there is no phonon excitation; i.e., we deal with the quasiparticle vacuum state,

$$|\Psi\rangle = |\psi_n, 0_B\rangle = \psi_n(q)|0_B\rangle, \quad (53)$$

where  $\hat{b}_k|0_B\rangle = 0$  for each  $k$ . In the first order in  $\hat{H}_1$  [see (51)] the system may decay to another eigenstate  $\psi_m(q)$  corresponding to an eigenvalue  $E_m$  emitting a single phonon of energy  $\epsilon_k$ . According to the Fermi golden rule the decay rate reads

$$\Gamma = 2\pi \sum_m \gamma_m, \quad (54)$$

where

$$\gamma_m = |\langle \psi_m, 1_k | \hat{H}_1 | \psi_n, 0_B \rangle|^2 g(\epsilon_k) = |\langle \psi_m | s_k | \psi_n \rangle| g(\epsilon_k). \quad (55)$$

The sum in Eq. (54) runs over all eigenstates  $\psi_m$  for which we can find such a phonon that the energy conservation  $E_n = E_m + \epsilon_k$  is fulfilled. We assume a continuum phonon spectrum, (9), with the energy gap corresponding to  $k = \pi/L$ . The density of states is

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon}{[2(\epsilon^2 + 1)(\sqrt{\epsilon^2 + 1} - 1)]^{1/2}}. \quad (56)$$

The lifetime of the Anderson-localized states presented in Figs. 2(a) and 2(c) is  $\tau = 1/\Gamma = 8 \times 10^5$  (17 min), and in Figs. 2(b) and 2(d),  $\tau = 2.5 \times 10^5$  (5 min), which means

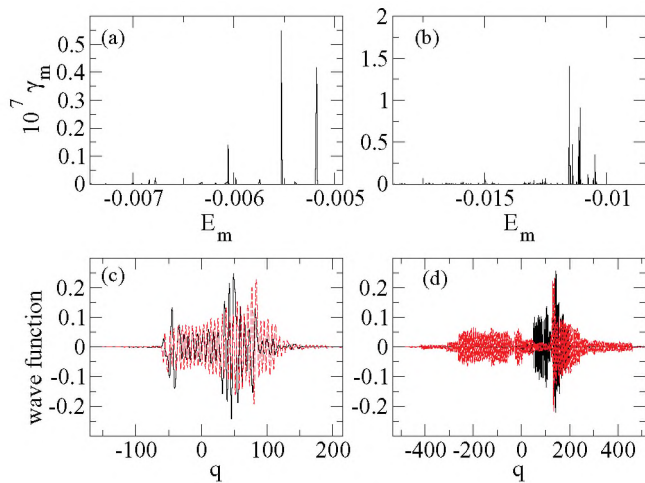


FIG. 3. (Color online) (a, b) Contributions  $\gamma_m$  [Eq. (55)] to the total decay rate  $\Gamma$  as a functions of energy  $E_m$ . (c, d) Initial states  $\psi_m(q)$  of the system [solid (black) lines] and eigenstates  $\psi_m(q)$  [dashed (red) lines] corresponding to the most probable decay channels, i.e., maximal values of  $\gamma_m$ . Parameters chosen in (a, c) and (b, d) are the same as in the corresponding panels in Fig. 2.

that there is by far enough time to perform experiments until they can decay due to phonon emissions. In Fig. 3 we show contributions  $\gamma_m$  to the decay rate, (54), and  $\psi_m$  states corresponding to the largest values of  $\gamma_m$ . Figure 3 indicates that the most probable decay leads the system to states localized in the vicinity of the initial localization region.

The long lifetime of Anderson-localized states is very promising from the experimental point of view. Indeed, it means that there is sufficient time to excite a dark soliton in an ultracold atomic gas, wait until it localizes in the presence of a weak disorder potential, and perform an atom density measurement. If the soliton is Anderson localized, the distribution of soliton positions collected in many realizations of the experiment [57] will reveal an exponential profile.

Experiments with dark solitons have been performed in the presence of a harmonic trap [6,60–64]. In this case, in order to observe the Anderson localization of the solitons, the trap has to be sufficiently shallow. That is, the ground-state extension of the soliton position in the harmonic trap without the disorder must be much larger than the localization length predicted in our analysis, i.e.,  $\frac{1}{\sqrt{|M_q|\omega}} \gg l_{\text{loc}}$  where  $\omega$  is the harmonic trap frequency.

#### IV. CONCLUSIONS

We have considered a dark soliton in dilute ultracold atomic gases in the presence of a weak disorder potential. Our consideration is divided into classical and quantum descriptions. The classical approach concerns the analysis of stationary solutions of the GPE and the effect of deformation of the soliton shape by the disorder. We have employed two methods: the Bogoliubov approach and the expansion of a wave-function perturbation in eigenmodes of the Pöschl-Teller potential. These two methods lead to the same results, however, the expansion in the Pöschl-Teller modes turns out to be more convenient and, in particular, allows us to obtain a very simple form of the soliton perturbation in terms of an integral kernel. Comparison of the perturbative calculations with the numerical results shows surprisingly good agreement even for the strength of an external potential as great as the chemical potential of the system. If the strength is much smaller than the chemical potential, the wave-function deformation is negligibly small.

The Bogoliubov approach is invaluable in the quantum description where we are interested in many-body eigenstates of the system. If the strength of an external potential is much smaller than the chemical potential, the dark soliton position may be described by an effective quantum Hamiltonian which is weakly coupled to the quasiparticle subsystem. The effective Hamiltonian turns out to be similar to the corresponding Hamiltonian in the problem of a bright soliton in a weak external potential. Similarly to the bright soliton case we predict Anderson localization of a dark soliton in the presence of a disorder potential. Because there is a coupling between the soliton position degree of freedom and the quasiparticle subsystem, the localized states may decay via the phonon emission process. We have investigated the lifetimes of Anderson-localized states and it turns out that for typical experimental conditions they exceed condensate lifetimes that make experimental observations of the dark soliton localization realistic.

#### ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Polish Government within Research Project No. 2009-2012 (M.M.) and by the National Science Centre under Projects No. DEC-2011/01/N/ST2/00418 (M.P.) and DEC-2011/01/B/ST3/00512 (K.S.).

- [1] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [2] D. Jaksch and P. Zoller, *Ann. Phys.* **315**, 52 (2005).
- [3] I. Buluta and F. Nori, *Science* **326**, 108 (2009).
- [4] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004).
- [5] M. Inguscio, W. Ketterle, and C. Salomon (eds.), *Ultra-cold Fermi Gases, Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CLXIV, Varenna 2006* (IOS Press, Amsterdam, 2007).

- [6] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198 (1999).
- [7] J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, Charles W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider, and W. D. Phillips, *Science* **287**, 97 (2000).
- [8] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, *Science* **296**, 1290 (2002).

- [9] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, *Nature* **417**, 150 (2002).
- [10] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
- [11] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).
- [12] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle, *Science* **292**, 476 (2001).
- [13] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998).
- [14] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **40**, 546 (1989).
- [15] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, *Nature* **415**, 39 (2002).
- [16] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clement, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect, *Nature* **453**, 891 (2008).
- [17] G. Roati, C. D'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio, *Nature* **453**, 895 (2008).
- [18] S. S. Kondov, W. R. McGehee, J. J. Zirbel, and B. DeMarco, *Science* **334**, 66 (2011).
- [19] F. Jendrzejewski, A. Bernard, K. Müller, P. Cheinet, V. Josse, M. Piraud, L. Pezze, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer, e-print [arXiv:1108.0137](https://arxiv.org/abs/1108.0137).
- [20] Y.-J. Lin, R. L. Compton, A. R. Perry, W. D. Phillips, J. V. Porto, and I. B. Spielman, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 130401 (2009).
- [21] Y.-J. Lin, R. L. Compton, K. J. Garcia, J. V. Porto, and I. B. Spielman, *Nature* **462**, 628 (2009).
- [22] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliunas, and P. Öhberg, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1523 (2011).
- [23] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [24] B. Damski, J. Zakrzewski, L. Santos, P. Zoller, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080403 (2003).
- [25] J. E. Lye, L. Fallani, M. Modugno, D. S. Wiersma, C. Fort, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 070401 (2005).
- [26] C. Fort, L. Fallani, V. Gurrera, J. E. Lye, M. Modugno, D. S. Wiersma, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170410 (2005).
- [27] D. Clément, A. F. Varon, M. Hugbart, J. A. Retter, P. Bouyer, L. Sanchez-Palencia, D. M. Gangardt, G. V. Shlyapnikov, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170409 (2005).
- [28] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J. Arlt, K. Sacha, J. Zakrzewski, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170411 (2005).
- [29] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, R. Tiemeyer, K. Sacha, J. Zakrzewski, M. Lewenstein, W. Ertmer, and J. J. Arlt, *New J. Phys.* **8**, 230 (2005).
- [30] L. P. Pitaevskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **40**, 646 (1961) [*Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961)]; E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
- [31] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [32] Y. Castin, in *Les Houches Session LXXII, Coherent Atomic Matter Waves 1999*, edited by R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David (Springer-Verlag, Berlin, 2001).
- [33] C. Weiss and Y. Castin, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 010403 (2009).
- [34] M. Lewenstein and B. A. Malomed, *New J. Phys.* **11**, 113014 (2009).
- [35] K. Sacha, C. A. Müller, D. Delande, and J. Zakrzewski, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 210402 (2009).
- [36] K. Sacha, D. Delande, and J. Zakrzewski, *Acta Phys. Pol. A* **116**, 772 (2009).
- [37] T. P. Meyrath, F. Schreck, J. L. Hanssen, C.-S. Chuu, and M. G. Raizen, *Phys. Rev. A* **71**, 041604R (2005).
- [38] J. Dziarmaga, *Phys. Rev. A* **70**, 063616 (2004).
- [39] D. Clement, A. F. Varon, J. A. Retter, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer, *New J. Phys.* **8**, 165 (2006).
- [40] M. Płodzień and K. Sacha, *Phys. Rev. A* **84**, 023624 (2011); M. Piraud, A. Aspect, and L. Sanchez-Palencia, e-print [arXiv:1104.2314](https://arxiv.org/abs/1104.2314).
- [41] C. Müller, *Appl. Phys. B* **102**, 459 (2011).
- [42] S. A. Gredeskul and Y. S. Kivshar, *Phys. Rep.* **216**, 1 (1992).
- [43] N. Bilas and N. Pavloff, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 130403 (2005).
- [44] Y. S. Kivshar and B. Luther-Davies, *Phys. Rep.* **298**, 81 (1998).
- [45] D. J. Frantzeskakis, *J. Phys. A* **43**, 213001 (2010).
- [46] S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. B* **49**, 12938 (1994).
- [47] L. Sanchez-Palencia, *Phys. Rev. A* **74**, 053625 (2006).
- [48] C. Gaul, N. Renner, and C. A. Müller, *Phys. Rev. A* **80**, 053620 (2009).
- [49] C. Gaul and C. A. Müller, *Phys. Rev. A* **83**, 063629 (2011).
- [50] M. Lewenstein and L. You, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3489 (1996).
- [51] Y. Castin and R. Dum, *Phys. Rev. A* **57**, 3008 (1998).
- [52] D. E. Pelinovsky and P. G. Kevrekidis, *Z. Angew. Math. Phys.* **59**, 559 (2008).
- [53] G. Pöschl and E. Teller, *Z. Phys.* **83**, 143 (1933).
- [54] J. Lekner, *Am. J. Phys.* **75**, 1151 (2007).
- [55] Y. Lai and H. A. Haus, *Phys. Rev. A* **40**, 844 (1989).
- [56] Y. Lai and H. A. Haus, *Phys. Rev. A* **40**, 854 (1989).
- [57] J. Dziarmaga and K. Sacha, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **39**, 57 (2006); R. V. Mishmash, I. Danshita, C. W. Clark, and L. D. Carr, *Phys. Rev. A* **80**, 053612 (2009); J. Dziarmaga, P. Deuar, and K. Sacha, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 018903 (2010); R. V. Mishmash and L. D. Carr, *ibid.* **105**, 018904 (2010).
- [58] I. M. Lifshitz, S. A. Gredeskul, and L. A. Pastur, *Introduction to the Theory of Disordered Systems* (Wiley, New York, 1988).
- [59] B. van Tiggelen, in *Diffuse Waves in Complex Media, NATO Advanced Study Institutes, Ser. C, Vol. 531*, edited by J.-P. Fouque (Kluwer, Dordrecht, 1999).
- [60] B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. A. Regal, D. L. Feder, L. A. Collins, C. W. Clark, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2926 (2001).
- [61] C. Becker, S. Stellmer, P. Soltan-Panahi, S. Dörscher, M. Baumert, E.-M. Richter, J. Kronjäger, K. Bongs, and K. Sengstock, *Nature Phys.* **4**, 496 (2008).
- [62] S. Stellmer, C. Becker, P. Soltan-Panahi, E.-M. Richter, S. Dörscher, M. Baumert, J. Kronjäger, K. Bongs, and K. Sengstock, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 120406 (2008).
- [63] A. Weller, J. P. Ronzheimer, C. Gross, J. Esteve, M. K. Oberthaler, D. J. Frantzeskakis, G. Theocharis, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 130401 (2008).
- [64] I. Shomroni, E. Lahoud, S. Levy, and J. Steinhauer, *Nature Phys.* **5**, 193 (2009).



## Many-body Anderson localization in one-dimensional systems

This content has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text.

View [the table of contents for this issue](#), or go to the [journal homepage](#) for more

Download details:

IP Address: 149.156.89.220

This content was downloaded on 24/04/2014 at 12:44

Please note that [terms and conditions apply](#).

## Many-body Anderson localization in one-dimensional systems

Dominique Delande<sup>1,5</sup>, Krzysztof Sacha<sup>2,3</sup>, Marcin Płodzień<sup>2</sup>,  
Sanat K Avazbaev<sup>1,4</sup> and Jakub Zakrzewski<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Kastler Brossel, UPMC-Paris6, ENS, CNRS; 4 Place Jussieu, F-75005 Paris, France

<sup>2</sup> Instytut Fizyki imienia Mariana Smoluchowskiego, Uniwersytet Jagielloński, ulica Reymonta 4, PL-30-059 Kraków, Poland

<sup>3</sup> Mark Kac Complex Systems Research Center, Uniwersytet Jagielloński, ulica Reymonta 4, PL-30-059 Kraków, Poland

<sup>4</sup> ARC Centre for Antimatter–Matter Studies, Curtin University of Technology, GPO Box U1987, Perth, Western Australia 6845, Australia

E-mail: [Dominique.Delande@lkb.upmc.fr](mailto:Dominique.Delande@lkb.upmc.fr)

*New Journal of Physics* **15** (2013) 045021 (11pp)

Received 18 December 2012

Published 23 April 2013

Online at <http://www.njp.org/>

doi:10.1088/1367-2630/15/4/045021

**Abstract.** We show, using quasi-exact numerical simulations, that Anderson localization in a disordered one-dimensional potential survives in the presence of attractive interaction between particles. The localization length of the particles' center of mass—computed analytically for weak disorder—is in good agreement with the quasi-exact numerical observations using the time evolving block decimation algorithm. Our approach allows for simulation of the entire experiment including the final measurement of all atom positions.

<sup>5</sup> Author to whom any correspondence should be addressed.



Content from this work may be used under the terms of the [Creative Commons Attribution 3.0 licence](http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/). Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI.

**Contents**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introduction</b>                                    | <b>2</b>  |
| <b>2. The model and its solution</b>                      | <b>3</b>  |
| <b>3. Simulation of a measurement</b>                     | <b>8</b>  |
| <b>4. Comparison with the effective one-body approach</b> | <b>9</b>  |
| <b>5. Summary</b>   | <b>10</b> |
| <b>Acknowledgments</b>                                    | <b>10</b> |
| <b>References</b>   | <b>11</b> |

**1. Introduction**

Anderson localization (AL) has been widely investigated in the last 50 years [1, 2]. The possibility of directly observing localization of the wavefunction in cold atomic gases has led to a recent revival of interest in localization properties in general, and in AL in particular. AL is characterized by the inhibition of transport in a quantum system, whose classical counterpart behaves diffusively. It is accompanied by an exponential localization of eigenstates in the configuration space,  $|\psi(r)|^2 \propto \exp(-|r|/L)$ , where  $L$  is the localization length. AL is due to the interference between various multiple scattering paths which favors the return of the particle to its initial position and thus decreases the probability of it traveling a long distance. As the geometry of these paths depends on the system dimension, so AL features depend on the dimension too. For one-dimensional (1D) systems, AL is a generic single-particle behavior even for very small disorder when the particle ‘flies’ above the potential fluctuations.

A fundamental question is to understand how interaction between particles affects AL. Presently, there is no consensus on the possible existence and properties of many-body localization. Some results suggest that AL survives for few-body systems, although with a modified localization length [3]; studies of cold bosonic systems in the mean-field regime show that AL is destroyed and replaced by a sub-diffusive behavior [4, 5], but the validity of the mean-field approximation at long times is questionable. There are even predictions that AL survives at finite temperature in the thermodynamic limit, in the presence of interactions [6]. In this paper, we show, using a specific example, that 1D AL survives in the presence of attractive interactions and is even a rather robust phenomenon. The novelty of our approach is that it uses a quasi-exact numerical scheme to solve the full many-body problem in the presence of disorder. Here, quasi-exact means that all numerical errors can be controlled and reduced below an arbitrary value, just at the cost of increased computational resources. The big advantage of this approach is not to rely on neglecting *a priori* any physical process.

Atomic matter waves have several advantages that made possible an unambiguous demonstration of single-particle AL in 1D [7, 8]: atom–atom interaction can be reduced by either diluting the atomic gas or using Feshbach resonances, ensuring a very long coherence time of the atomic matter wave; the spatial and temporal orders of magnitude are very convenient, allowing a direct spatio-temporal visualization of the dynamics; all microscopic ingredients are well controlled; and a disordered potential can be created by using the effective potential induced by a far detuned optical speckle.

## 2. The model and its solution

We consider  $N$  identical bosonic atoms in a 1D system, in the regime of attractive two-body interactions. We assume the dilute regime where the atom–atom average distance is larger than the scattering length and take the low-energy limit where the interaction can be modeled by a (negative) Dirac-delta potential. The many-body Hamiltonian can be written, using the standard second quantization formalism (assuming unit mass for the particles and taking  $\hbar = 1$ ):

$$\hat{H} = \int dz \hat{\psi}^\dagger(z) \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) \right] \hat{\psi}(z) + \frac{g}{2} \int dz \hat{\psi}^\dagger(z) \hat{\psi}^\dagger(z) \hat{\psi}(z) \hat{\psi}(z), \quad (1)$$

where  $g < 0$  is the strength of the atom–atom interaction and  $V(z)$  is an external potential.

For large  $N$ , in the absence of an external potential, the ground state of this system is described—within the mean field approach—as a bright soliton, a composite particle with two external degrees of freedom: an irrelevant phase  $\theta$ , and a classical parameter: the position  $q$  of the center of mass. The particle density—normalized to the number  $N$  of particles—is given by  $|\phi_0(z - q)|^2$  where

$$\phi_0(z) = \sqrt{\frac{N}{2\xi}} \frac{e^{-i\theta}}{\cosh z/\xi}. \quad (2)$$

$\xi = -\frac{2}{Ng}$  is the characteristic size of the soliton. The associated chemical potential is  $\mu = -N^2 g^2 / 8$ .

This mean-field approach does not describe properly the many-body ground state of the system. Indeed, in the absence of an external potential, the many-body ground state is known exactly, thanks to the Bethe ansatz [9] which predicts e.g. uniform atomic density. The source of discrepancy lies in a classical treatment of the center of mass  $q$  of the system. In a proper description,  $q$  must be thought of as the quantum position operator of the soliton, the composite particle formed by the  $N$  particles. In the presence of an external potential, it is possible to construct an effective one-body (EOB) Hamiltonian describing the  $q$  dynamics quantum mechanically [10–13]. Assuming a fixed soliton shape, the EOB Hamiltonian is

$$H_q = \frac{p_q^2}{2N} + \int dz |\phi_0(z - q)|^2 V(z), \quad (3)$$

where  $p_q$  is the momentum conjugate to  $q$  [10–13]. It describes a composite particle with mass  $N$  evolving in a potential that is the convolution of the bare potential with the soliton envelope. The key point of the EOB approach is that the internal degrees of freedom of the soliton are hidden in the reduction of the many-body wavefunction to a single one-body wavefunction  $\varphi(q, t)$  describing the evolution of the soliton center of mass. This is possible because the internal degrees of freedom of the bright soliton are gapped, with an energy gap equal to  $-\mu = N^2 g^2 / 8$ , so that a weak external perturbation cannot populate internal excited states of the bright soliton, in contrast with the dark soliton case [14].

Because the EOB Hamiltonian (3) describes a 1D system exposed to a disordered potential, it displays AL. Within the EOB approximation, the soliton center of mass is localized with a localization length depending on the energy. As an example, we will use—as in real experiments [7]—the disorder created by a light speckle shone on a cold atomic gas.

The localization length of the EOB model has been calculated (in the weak disorder limit) in [11–13]:

$$\frac{1}{L_N(k)} = \frac{N^4 \xi^2 \pi^3 \sigma_0 V_0^2 (1 - k\sigma_0)}{\sinh^2 \pi k \xi} \Theta(1 - k\sigma_0), \quad (4)$$

where  $k$  is the wavevector of the soliton,  $V_0$  the rms amplitude of the disordered potential,  $\sigma_0$  its correlation length of the speckle and  $\Theta$  the Heaviside function.

What is the validity of the EOB theory at long time? The answer is far from obvious. Any many-body effect not taken into account within the EOB could break the reduction of the problem into an EOB wavefunction evolving under the effective Hamiltonian (3). In particular, it could easily spoil the phase coherence of the EOB wavefunction and consequently AL. It is the goal of this paper to perform a quasi-exact many-body numerical test of the EOB approach. In order to be as close as possible to a realistic experiment [7], we follow the temporal evolution of an initially localized many-body wavepacket. In a first step, we compute the ground state of  $N$  interacting particles in the presence of a harmonic trap, but without disorder: this produces a bright soliton localized near the trap center. In a second step, the harmonic trap is abruptly switched off and the disordered speckle potential abruptly switched on, leaving the many-body system to expand in the presence of disorder, and eventually localize thanks to many-body AL.

In the presence of an external potential, the many-body problem cannot be solved exactly. One must rely on quasi-exact numerical approaches. A convenient way is to discretize the continuous Hamiltonian, equation (1), over a discrete lattice [15, 16]. The discretization of space to a chain of sites located at equally spaced positions  $z_l = l\delta$  together with a three-point discretization of the Laplace operator allows us to write the Hamiltonian in a tight-binding Bose–Hubbard form [15]

$$H = \sum_l \left[ -J(a_l^\dagger a_{l+1} + \text{h.c.}) + \frac{U}{2} a_l^\dagger a_l^\dagger a_l a_l + V_l a_l^\dagger a_l \right] \quad (5)$$

with  $J = \frac{1}{2\delta^2}$ ,  $U = \frac{g}{\delta}$  and  $V_l = V(z_l)$  (an additional trivial constant term  $1/\delta^2$  has been dropped).

For numerical purposes the infinite space is restricted to the  $[-K\delta, K\delta]$  interval leading to a 1D chain of  $M = 2K + 1$  discrete sites.  $N$  identical bosons are distributed on these  $M$  sites. A basis of the total Hilbert space can be built using the direct product of Fock states on each site  $|i_1, i_2, \dots, i_M\rangle$  with the constraint that the sum of occupation numbers  $\sum_{l=1, \dots, M} i_l$  is equal to  $N$ . The size of this basis increases exponentially with the system size, making its use unpractical for large many-body problems. Instead, we use a variational set of matrix product states (MPSs). An MPS is a state which can be written as

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_M: i_1, \dots, i_M} \Gamma_{\alpha_1}^{[1], i_1} \lambda_{\alpha_1}^{[1]} \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2}^{[2], i_2}, \dots, \Gamma_{\alpha_{n-1} 1}^{[M], i_M} |i_1, \dots, i_M\rangle, \quad (6)$$

where  $\Gamma^{[l], i_l}$  ( $\lambda^{[l]}$ ) are site (bond)-dependent matrices (vectors). To describe exactly a generic state in terms of MPSs, a large number (exponentially increasing with  $M$ ) of  $\alpha_l$  values is needed. However, typical low-energy states are only slightly entangled so that  $\lambda_{\alpha_l=1, 2, \dots}^{[l]}$  are rapidly decaying numbers, which allows for introduction of a cutoff  $\chi$  in the sum over Greek indices above, resulting in tractable numerical computations [17]. For a ground state protected by a gap, the area theorem [18] ensures that an efficient MPS representation exists. In the physical situation discussed by us, the area law has no direct applicability.

The  $i_1, \dots, i_M$  indices are, in principle, restricted to the  $[0, N]$  interval. In practice, since it is highly unlikely that all the bosons occupy a single site of the system, we lower the cutoff in

the sums assuming some  $N_{\max} < N$ . While the maximum average occupation number (at sites near the center of mass of the soliton) is  $N\delta/2\xi = 2.5$ , we found surprisingly that a relatively high  $N_{\max} = 14$  is needed for convergent results, while the  $\chi$  value may be kept relatively low.

The ground state as well as the dynamics may be quasi-exactly studied using the time evolving block decimation (TEBD) algorithm [17, 19], essentially equivalent to the time-dependent density matrix renormalization group approach [20, 21]. The TEBD algorithm describes how the  $\Gamma^{[l]}$  and  $\lambda^{[l]}$  evolve in time under the influence of a Hamiltonian containing simple terms local on each site as well as hopping terms of the type  $a_l a_{l+1}^\dagger$  which transfer one particle from site  $l$  to site  $l+1$ . A maximum of  $N = 25$  particles could be included in our calculations; similar results are obtained for ten particles.

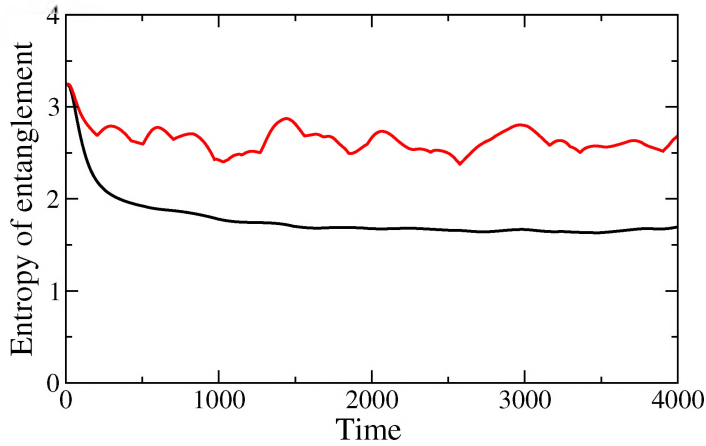
We use the soliton size  $\xi$  as the unit of length; consequently the time unit is  $\xi^2$ . We use the EOB as a guide to choose the parameters of the many-body numerical experiment. For example, the trap must be shallow enough not to distort the soliton shape (2), but still strong enough to confine its center of mass  $q$  over a distance only slightly larger than its size. We chose  $\Delta q = \sqrt{\frac{8}{5}}\xi$ ; the frequency,  $\omega$ , of the trapping harmonic potential  $\omega^2 z^2/2$  is thus such that  $N\omega = 5/8\xi^2$ , i.e.  $\omega = 0.025/\xi^2$ . In order for the localization length to be reasonably short, we choose the strength of the external potential comparable to the initial average energy of the soliton  $\omega/4$ , that is  $V_0 = 2.5 \times 10^{-4}$ . We also choose the correlation length of the speckle potential  $\sigma_0 = 0.4\xi$  to be significantly shorter than the soliton size, so that the EOB potential in equation (3) is free of the peculiarities of the speckle potential [26].

Several sources of errors exist in the TEBD algorithm and must be controlled. The first one is due to the spatial discretization. Getting accurate results requires the discretization unit,  $\delta$ , to be much smaller than both the soliton size  $\xi$  and the de Broglie wavelength  $2\pi/k$ , where  $k$  is the typical wavevector contained in the initial wavepacket for the center of mass in the EOB description. We use  $\delta = \xi/5$ ; a twice smaller step produces slightly different quantitative results, but the difference is practically invisible on the scale of the figures shown in our work. In order to avoid reflections from the boundaries, the number of lattice points must be sufficiently large; 1921 points are used, but only the central 1201 ones are shown in the plots. A second source of error is the temporal discretization of the evolution operator. We use the standard Trotter expansion [17], whose error can be controlled by varying the time step ( $\delta t = 0.008\xi^2$  is used). A third source of error is the truncation of the MPS at each step. This error is monitored through the so-called ‘discarded weight’, that is the weight of the components which have to be discarded from the time evolved many-body state to keep it in MPS form with a fixed parameter  $\chi$ —the number of bonds between sites. This can be a serious problem when the entropy of entanglement grows as a function of time. It may even prevent calculation to be run beyond some rather short time, especially when the system is significantly excited above the ground state [22].

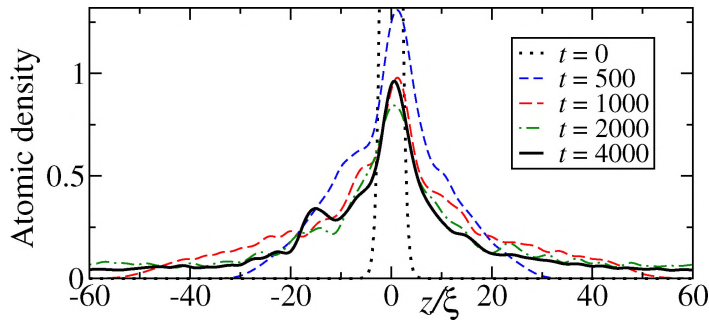
The entropy of entanglement is defined as the supremum over all possible bipartitions of the system. Explicitly, we compute

$$S = \sup_l S_l = \sup_l \left[ - \sum_\alpha (\lambda_\alpha^{[l]})^2 \ln(\lambda_\alpha^{[l]})^2 \right] \quad (7)$$

with  $l$  running over all bonds. Typically, the maximum is reached for a link close to the center of the system but it can depend on the disorder and fluctuate in time. Quite surprisingly, we have not observed any significant growth of the entropy of entanglement when AL sets in, see



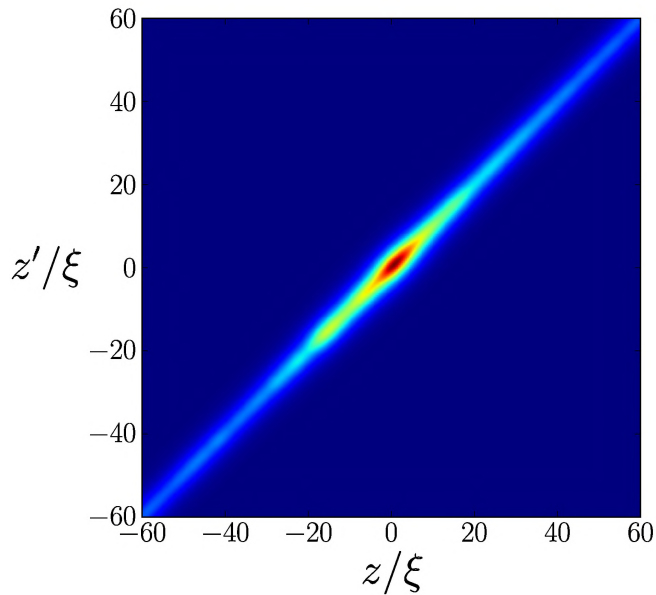
**Figure 1.** Time evolution of the entropy of entanglement, equation (7), for an initially localized bright soliton expanding in a disordered speckle potential, obtained using the many-body TEBD algorithm. No significant growth of the entropy is observed. The red curve is the largest entropy among 96 different realizations of disorder while the black curve corresponds to the average over these realizations. Parameters are given in the text.



**Figure 2.** Spatial atomic density of an initially localized bright soliton, under the influence of a disordered speckle potential, using the quasi-exact many-body TEBD algorithm, at various times. After an initial expansion, the atomic density freezes at long time, a signature of many-body AL. Parameters are given in the text. The results presented are averaged over 96 realizations of the disorder.

figure 1, a result quite opposite to that observed in [23]. This may be attributed to the fact that the energy of our many-body state is quite small (see the discussion above). The converged calculations reported here use  $N_{\max} = 14$ ,  $\chi = 30$  yielding the internal Hilbert space dimension per site as 450. The results have been compared with those with lower  $N_{\max}$  as well as those for  $\chi = 40$  (for shorter times) to check that the results presented are fully converged. All in all, we were able to run the fully controlled calculation up to time  $t = 4000$ .

Figure 2 shows the particle density in configuration space obtained at increasing times averaged over 96 realizations of the disorder. In the absence of disordered potential, the initial wavepacket is expected to spread ballistically. The EOB physics gives the characteristic time

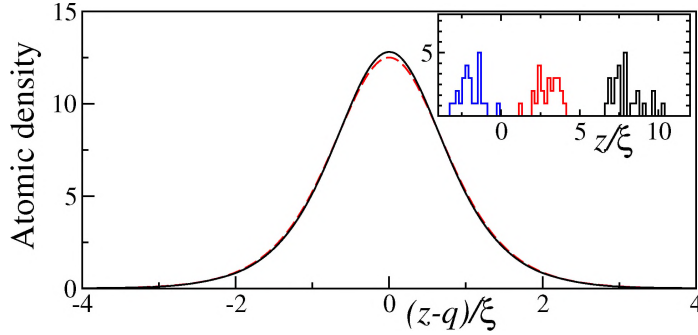


**Figure 3.** One-body density matrix of the many-body state at  $t = 4000$  (see figure 2) in configuration space. It is strongly concentrated along the diagonal  $z = z'$  with a transverse width of the order of the soliton size  $\xi$ . This is a direct proof that the many-body system can be described by a compact composite particle, a bright soliton, whose center of mass is widely spread.

for this spreading,  $t = 1/\omega = 40$ , much shorter than the time scale in the figure. At  $t = 500$  and  $1000$ , one clearly sees that the central part of the wavepacket is already more or less localized while the ballistic front for  $|z|/\xi > 20$  ( $|z|/\xi > 40$  for  $t = 1000$ ) has not yet been scattered and keeps a Gaussian shape similarly as in the EOB description. This corresponds to the wavepacket components with the highest energy and consequently the longest localization length. AL has already been set up at  $t = 2000$  and does no longer evolve further, compare with  $t = 4000$ . Therefore, figure 2 provides evidence for many-body AL taking place in a quasi-exact full many-body numerical simulation. At the final time (100 times the characteristic spreading time), we do not observe any indication that AL could be destroyed.

The description of the final state as an MPS makes it possible to easily compute more complicated quantities, such as correlation functions. The simplest is the one-body density matrix  $\langle \psi^\dagger(z)\psi(z') \rangle$ , shown in figure 3. It clearly displays extremely strong correlations between positions  $z$  and  $z'$ , reinforcing the observation that AL probably survives far beyond  $t = 4000$ . The interpretation is simple in terms of bright solitons: all atoms are grouped in a soliton of size  $\xi$ , but the center of mass of the soliton itself is widely spread. This has an important consequence: the largest eigenvalue of the one-body density matrix—a value often used as a quantitative criterion for Bose–Einstein condensation [27]—is on average 0.14, much smaller than unity; in contrast, the value at  $t = 0$  is 0.84. Thus, while the initial state can be considered as a true condensate, the temporal dynamics destroys condensation; any description of our many-body system using the mean field theory via the Gross–Pitaevskii equation (which by construction describes a 100% condensate) *must* fail. In other words, our many-body AL is necessarily beyond the mean field description.





**Figure 4.** Atomic density measured with respect to the center of mass of the  $N$  particles, at time  $t = 4000$ , after AL has set in. A large number of individual ‘measurements’ of the particle positions—three examples are shown in the inset—are performed for various disorder realizations, and the resulting average is displayed in the main panel. The agreement between the full many-body calculation (solid line) and the prediction of equation (2) for the soliton shape (dashed line) is excellent.

### 3. Simulation of a measurement

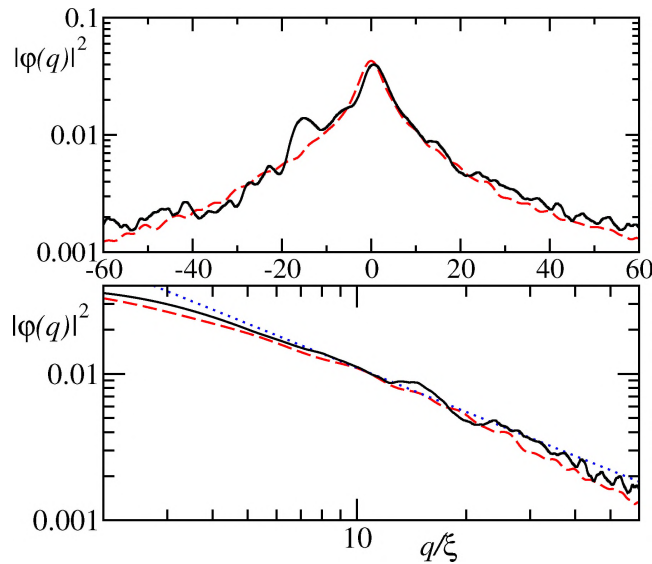
Being able to write the many-body state as an MPS has considerable further advantages, especially if it is—like in our calculations—in the so-called canonical form [21]. For example, expectation values of local operators such as  $a_l^\dagger a_l$  or  $a_l^\dagger a_{l+1}$  involve only simple contractions on the local  $\Gamma^{[l]}$  tensors and  $\lambda^{[l]}$  vectors. It makes it also possible to mimic the measurement process of particle positions as follows. The reduced density matrix  $\rho^{[l]}$  on site  $l$  is easily constructed by contracting the  $\Gamma^{[l]}$  tensor with the neighboring  $\lambda^{[l-1]}$  and  $\lambda^{[l]}$  vectors:

$$\rho_{j,i}^{[l]} = \sum_{\alpha_{l-1}, \alpha_l} [\lambda_{\alpha_{l-1}}^{[l-1]}]^2 \Gamma_{\alpha_{l-1}\alpha_l}^{[l],i} [\Gamma_{\alpha_{l-1}\alpha_l}^{[l],j}]^* [\lambda_{\alpha_l}^{[l]}]^2. \quad (8)$$

We then randomly choose the number of particles ‘measured’ on site  $l$  following the statistical populations, diagonal elements of the on-site reduced density matrix. Once a given occupation number  $i$  is chosen, we project the MPS state onto the subspace with  $i_l = i$  and normalize it. This involves only simple contractions on the local  $\Gamma$  tensors and  $\lambda$  vectors, producing another MPS. The process can be iterated on all sites, and is particularly simple if sites are scanned consecutively starting from one edge and propagating toward the other edge. It is simple to prove that the probability distribution of the measurements is independent of the order used for scanning the various sites.

An individual ‘measurement’ produces a single set of occupation numbers  $(i_1, i_2, \dots, i_M)$  (whose sum is of course  $N$ ) whose probability is exactly  $|\langle i_1, i_2, \dots, i_M | \psi \rangle|^2$ . By performing a series of ‘measurements’, we can sample interesting physical quantities, such as the position of the soliton center of mass,  $\langle q \rangle = \sum_l l \delta i_l / N$ , and the particle density with respect to this center of mass. Note that these quantities are hard to measure by other means as they involve correlation functions of high order (typically up to  $N$ ) [24, 25].

Examples of our procedure are given in the inset of figure 4. In this way, we extract both the position of the center of mass of the soliton and the atomic density relative to the center of mass. The latter quantity is shown in figure 4 for time  $t = 4000$  in comparison with the analytic



**Figure 5.** Probability density for the center of mass of the soliton at time  $t = 4000$ , numerically computed using the many-body quasi-exact dynamics (solid line, averaged over 96 disorder realizations) and the EOB theory (dashed line, averaged over 10 000 realizations). The good agreement shows that the many-body problem actually displays AL, as predicted by a simple theory for a composite particle. The dotted line in the lower panel (double logarithmic plot) is the  $1/|q|$  approximate prediction of the EOB theory [11].

prediction, equation (2). The agreement is excellent, showing that the internal structure of the soliton is fully preserved for a long time, even after AL has set in. The small difference is a  $1/N$  finite size effect.

#### 4. Comparison with the effective one-body approach

The EOB theory is able to quantitatively predict the long time limit for the spatial density probability of the soliton center of mass, see the detailed derivation and calculations in [11]. Initially, the center of mass is in the ground state of the harmonic trap (a Gaussian wavepacket) that, after the trap is switched off, expands over a range of energies, each energy component being characterized by its own localization length. Each component displays approximate exponential localization in the long time limit (in a 1D system, Anderson localized eigenstates do not strictly decay exponentially, see e.g. [28, 29]). Their superposition displays approximate algebraic localization at long distance, as discussed in [11].

In figure 5, we show the comparison between the full many-body calculation and the EOB corresponding numerical simulation with Hamiltonian (3). Note that the many-body result is here plotted for the center-of-mass position, which can slightly differ from the atomic density; the latter, in the EOB approach, is the convolution of the former by the soliton shape. At the scale of the figure, the soliton is extremely narrow so that the result of the convolution is almost equal to the center-of-mass density, compare with figure 2. The agreement between the many-body and the EOB calculations is clearly excellent. In figure 5, we also show the  $1/|q|$  leading

behavior predicted by the EOB theory, equation (13) of [11]. It predicts the observed behavior quite well but does not aim at being quantitative, because of the existence of a sub-leading logarithmic term. Namely, at very large distance, the exponential term  $\exp[-\beta \ln^2(\gamma|q|)]$ , where  $\gamma$  and  $\beta$  are constants, present in equation (13) of [11] becomes important, leading to a faster decrease of the distribution and eventually to a finite rms displacement  $\langle q^2 \rangle$  of the soliton. Note also that the formula, equation (13) of [11], assumes a weak disorder (Born approximation), an assumption not fully satisfied here.

Finally, we compare the localization length of the center of mass of attractively interacting particles with the localization length of a single particle in the same disordered potential. A meaningful comparison must be performed for the same total energy per particle, or equivalently for the same wavevector per particle; this thus corresponds to a wavevector  $N$  times larger for the soliton, composed of  $N$  individual particles. Within the EOB approach, the ratio is, for  $k\sigma_0 < 1$  and weak disorder,

$$\frac{L_1(k/N)}{L_N(k)} = N^2 \left[ \frac{\pi k \xi}{\sinh \pi k \xi} \right]^2 \frac{1 - k\sigma_0}{1 - k\sigma_0/N}. \quad (9)$$

The physical interpretation is simple and interesting. The  $N^2$  factor strongly favors localization of the soliton and reflects the collective behavior of the  $N$  attractive bosons when placed in the disordered potential. The second factor—and to a lesser extent, the third one—is smaller than unity and favors delocalization of the soliton. It reflects the fact that the center of mass of the soliton does not feel the raw potential, but rather its convolution with the soliton shape, see equation (3); being smoother, the convoluted disordered potential scatters less efficiently than the raw one, leading to an increase of the localization length. It is ultimately due to the dispersion of the atom positions around the center of mass of the soliton. Whether the localization or the delocalization effect wins depends on the parameter values. For the parameters used here, if  $k\xi > 1.8$ , the localization length of the soliton is longer than the single atom localization length, shorter otherwise. Thus, no general statement on whether attractive interactions favor AL or not can be made.

## 5. Summary

To summarize, we have shown the existence of many-body AL for attractive bosons in the presence of a disordered potential. The claim is based on quasi-exact many-body numerical simulations using the TEBD algorithm, which incorporate all complicated phenomena that could spoil the internal phase coherence of the many-body composite object, a bright soliton, displaying AL. Moreover, we obtain excellent agreement between the many-body calculation and a one-body effective theory, which goes beyond standard mean field theories such as the Gross–Pitaevskii equation. Our quasi-exact many-body approach allows for simulation of the entire experiment starting from the initial state in a harmonic trap till the destructive measurement of all atom positions.

## Acknowledgments

Computing resources have been provided by GENCI and IFRAF. This work was performed within the Polish–French bilateral programme POLONIUM no. 27742UE. Support from the

Polish National Science Center via project numbers DEC-2011/01/N/ST2/00418 (MP) and DEC-2012/04/A/ST2/00088 (KS and JZ) is acknowledged.

## References

- [1] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492
- [2] Lagendijk A, van Tiggelen B A and Wiersma D S 2009 *Phys. Today* **62** 24
- [3] Shepelyansky D L 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 2607
- [4] Pikovsky A S and Shepelyansky D S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 094101
- [5] Ivanchenko M V, Lapyteva T V and Flach S 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 240602
- [6] Aleiner I L, Altshuler B L and Shlyapnikov G 2010 *Nature Phys.* **6** 900
- [7] Billy J *et al* 2008 *Nature* **453** 891
- [8] Roati G *et al* 2008 *Nature* **453** 895
- [9] McGuire J B 1964 *J. Math. Phys.* **5** 622
- [10] Weiss C and Castin Y 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 010403
- [11] Sacha K, Müller C A, Delande D and Zakrzewski J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 210402
- [12] Sacha K, Delande D and Zakrzewski J 2009 *Acta Phys. Pol. A* **116** 772
- [13] Müller C A 2011 *Appl. Phys. B* **102** 459
- [14] Mochol M, Płodzień M and Sacha K 2012 *Phys. Rev. A* **85** 023627
- [15] Schmidt B and Fleischhauer M 2007 *Phys. Rev. A* **75** 021601
- [16] Glick J A and Carr L D 2011 arXiv:1105.5164
- [17] Vidal G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 147902
- [18] Eisert J, Cramer M and Plenio M B 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 277
- [19] Vidal G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 040502
- [20] White S R and Feiguin A E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 076401
- [21] Schollwöck U 2011 *Ann. Phys.* **326** 96
- [22] Daley A J, Kollath C, Schollwöck U and Vidal L G 2004 *J. Stat. Mech.* **2004** P04005
- [23] Bardarson J H, Pollmann F and Moore J E 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 017202
- [24] Dziarmaga J, Deuar P and Sacha K 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 018903
- [25] Mishmash R V and Carr L D 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 018904
- [26] Lugan P *et al* 2009 *Phys. Rev. A* **80** 023605
- [27] Pethick C J and Smith H 2001 *Bose Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [28] Gogolin A A 1988 *Phys. Rep.* **166** 269
- [29] Müller C A and Delande D 2010 Disorder and interference: localization phenomena *Ultracold Gases and Quantum Information (Les Houches Summer School Session XCI)* ed C Miniatura *et al* (Oxford: Oxford University Press)

**Matter-wave interference versus spontaneous pattern formation in spinor Bose-Einstein condensates**Marcin Witkowski,<sup>1,2</sup> Rafał Gartman,<sup>1</sup> Bartłomiej Nagórny,<sup>1</sup> Marcin Piotrowski,<sup>1,3</sup> Marcin Płodzień,<sup>3</sup> Krzysztof Sacha,<sup>3</sup> Jacek Szczepkowski,<sup>4</sup> Jerzy Zachorowski,<sup>3</sup> Michał Zawada,<sup>1,\*</sup> and Wojciech Gawlik<sup>3</sup><sup>1</sup>*Institute of Physics, Faculty of Physics, Astronomy and Informatics, Nicolaus Copernicus University, Grudziądzka 5, PL-87-100 Toruń, Poland*<sup>2</sup>*Institute of Physics, University of Opole, Oleska 48, PL-45-052 Opole, Poland*<sup>3</sup>*Institute of Physics, Jagiellonian University, Reymonta 4, PL-30-059 Kraków, Poland*<sup>4</sup>*Institute of Physics, Polish Academy of Sciences, al. Lotników 32-46, PL-02-668 Warszawa, Poland*

(Received 20 March 2013; published 29 August 2013)

We describe effects of matter-wave interference of spinor states in the  $^{87}\text{Rb}$  Bose-Einstein condensate. The components of the  $F = 2$  manifold are populated by forced Majorana transitions and then fall freely due to gravity in an applied magnetic field. Weak inhomogeneities of the magnetic field, present in the experiment, impose relative velocities onto different  $m_F$  components, which show up as interference patterns upon measurement of atomic density distributions with a Stern-Gerlach imaging method. We show that interference effects may appear in experiments even if gradients of the magnetic field components are eliminated but higher-order inhomogeneity is present and the duration of the interaction is long enough. In particular, we show that the resulting matter-wave interference patterns can mimic spontaneous pattern formation in the quantum gas.

DOI: [10.1103/PhysRevA.88.025602](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.025602)

PACS number(s): 67.85.-d, 03.75.Mn, 75.50.Mm

Atom interferometry is a well-established technique which allows sensitive measurements of many physical quantities. Important examples include atomic clocks and frequency standards [1,2], precision gravitational measurements [3,4], and measurements of fundamental physical constants [5,6]. One crucial parameter that determines the interference structure is the phase difference of interfering components. As discussed below, in spinor condensates this phase difference can be efficiently controlled by a magnetic field which paves the way towards magnetometric applications (earlier work on cold-atom magnetometry has been recently reviewed in Ref. [7]).

In this work we report on the application of spinor Bose-Einstein condensate (BEC) to atom-wave interferometry and demonstrate its sensitivity to very weak magnetic fields. We indicate that even in meticulously performed experiments the residual magnetic fields and their inhomogeneity can create interference patterns of atomic density distributions which seriously affect the investigated atomic samples. Apart from possible practical applications, like in magnetometry or imaging, we show that the phase shifts of individual components of the spinor condensate may often mimic the effects of other interactions. One example of such effects is the spontaneous pattern formation resulting from the interaction of spinor components, which has been intensively studied recently [8–10].

Below we present results of our studies with the spinor BEC of  $^{87}\text{Rb}$  atoms ( $F = 2$ ) which expand the field of atomic interferometry to spinor condensates and demonstrate very high sensitivity of the distributions of atomic densities to weak magnetic fields. The observations are interpreted theoretically in terms of the matter-wave interference. We also investigate theoretically matter-wave interference in the case of trapped atoms when there is no first-order gradient but a curvature of the axial magnetic field component. The analysis shows that

the matter-wave interference is a very general phenomenon which can occur in many specific experimental situations.

Most of the previous studies of spinor condensates were conducted with optical dipole traps which store atoms with all spin components rather than just the low magnetic-field seeking spin states of magnetic traps [10]. In the described experiment, however, the condensate is formed by  $^{87}\text{Rb}$  atoms in a single magnetic component of their ground state contained in the magnetic trap (MT). An additional difference between the present and previous studies is that, in contrast to the *in situ* experiments with high-density samples, we work with an expanding condensate where the atomic densities are sufficiently low that the atomic interaction can be neglected.

In the experiment, we collect up to  $10^6$   $^{87}\text{Rb}$  atoms in the  $|F = 2, m_F = 2\rangle_x$  state in the Ioffe-Pritchard QUIC-like MT [11]. The axis of the elongated condensate is aligned horizontally, along the  $x$  axis. The sample is analyzed in the horizontal radial direction by an absorption imaging with the resonant probe beam in the  $y$  direction. A system of coils compensates the ambient magnetic fields to below 25 mG and imposes a weak field during gravitational free fall of the BEC released from the trap. Additional two coils control the inhomogeneity of the fields in two orthogonal directions down to about 7 mG/cm. The magnetic field created by the coils is calibrated by observing an expansion of the atomic cloud in the field of six counter-propagating molasses beams of equal intensities. The electronically controlled turning off the MT and an extra pair of the Helmholtz coils which alter the decay of the magnetic field on the axis of the Ioffe coil produce a zero transition of one of the components of the magnetic field with a variable speed. At the crossing, the Majorana transitions [12] mix the  $|m_F\rangle_x$  sublevels and populate various magnetic states of the atoms in a way similar to that reported in [13]. The approaching of the total magnetic field to the zero value is crucial for the experiment. Its details are described elsewhere [14].

After mixing of the  $|m_F\rangle_x$  states the MT field is adiabatically replaced by a weak, inhomogeneous magnetic

\*zawada@fizyka.umk.pl

field  $\vec{B}_d$ . The spinor BECs fall freely due to gravity in this field. The gradient of the  $x$  component of  $\vec{B}_d$  leads to new relative velocities of the  $|m_F\rangle_x$  components, which are, however, too small to spatially separate the components. For typical values of the applied gradients of tens of mG/cm and time of flight in the presence of the field of 2 to 20 ms, the resulting velocities are on the order of  $50 \mu\text{m/s}$ . Such low velocities are sufficient for the interference effects discussed below. After the time of flight, the spinor BECs are spatially separated by a vertical Stern-Gerlach (SG) force acting for 1–2 ms. The population distribution among individual  $|m_F\rangle_z$  components is recorded 3 ms later. The strong vertical SG force projects atoms onto a new quantization axis. Atoms belonging to different spinor components, moving with different velocities can be projected onto the same  $|m_F\rangle_z$  states, which results in the interference pattern, see Fig. 1.

In the modeling we assume the particles are initially in the zero momentum state  $\psi(\vec{r})$  and in a combination of  $|m_F\rangle_x$  states which we choose to be  $|m_F = 2\rangle_z$ , as a generic example. All experimental absorption images are obtained in the  $XZ$  plane; hence, we restrict the discussion to the two-dimensional (2D) model.

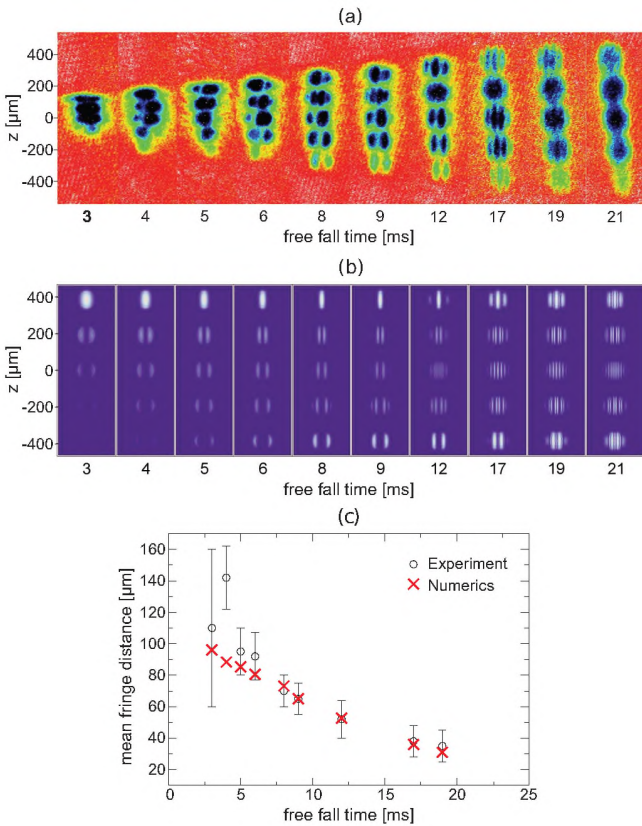


FIG. 1. (Color online) Spinor condensates after a free fall of indicated time and separated vertically by the SG force pulse. Spatial separation reveals the interference pattern in the form of vertical fringes in the five spinor components. (a) Experimental results. Different vertical splittings reflect different values of the SG gradient at different distances from the trap center. (b) Results of numerical simulations as described in the text. (c) Dependence of the mean fringe distance in the  $m_F = 2$  component on the free-fall time.

The presence of a slightly inhomogeneous magnetic field directed along the  $x$  axis,  $\vec{B}_d = (B_{d0} + x \frac{\partial B_d}{\partial x})\hat{x}$ , for the time from  $t = 0$  to  $t_I$  results in a force different for different spin components  $m_F$ . The momentum transfer also depends on  $m_F$  and each component acquires a phase proportional to  $m_F B_{d0} t$ . In a simple analytic model at  $t = t_I$  each  $|m_F\rangle_x$  component is of the form

$$\psi_{k_{m_F}}(x, z) |m_F\rangle_x = e^{im_F(kx + \phi)} |m_F\rangle_x, \quad (1)$$

with  $k = g_F \mu_B \frac{\partial B_d}{\partial x} t_I / \hbar$  and  $\phi = g_F \mu_B B_{d0} t_I / \hbar$ .

The density structures are visualized by projecting  $|\Psi(t_I)\rangle$  on different  $|m_F\rangle_z$  states to obtain

$$\rho_{m_F}(x, z) = |{}_z\langle m_F | \Psi(t_I) \rangle|^2. \quad (2)$$

Each  $\rho_{m_F}$  reveals an interference pattern resulting from the interaction of an atom with the inhomogeneous field  $\vec{B}_d$ . Note that by changing  $B_{d0}$ , or changing slightly the interaction time  $t_I$ , we can shift the interference pattern along the  $x$  direction, since the phase  $\phi$  in Eq. (1) is a common parameter of translation for all plane waves.

In the full numerical simulation we assume the initial Thomas-Fermi (TF) profile wave packet of the form  $\psi(x, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{R^2 - x^2 - z^2} / R^2$  with  $R = 60 \mu\text{m}$ . The nonlinear term in the Gross-Pitaevskii (GP) equation [15,16] is negligible because after turning off the MT, atomic gas expands and particle interactions become quickly negligible. Thus, we integrate the Schrödinger equation with the magnetic interaction term  $g_F \mu_B \hat{F} \cdot \vec{B}$ , where  $\hat{F}$  stands for the spin operator [17]. Then, the SG pulse and further evolution are included. To avoid high momenta in the numerical simulation, slightly different parameters of the SG field were chosen, i.e., 500 mG/cm acting for 20 ms. In that way, the fast spatial separation of different  $m_F$  components is substituted for longer evolution but with smaller momenta.

Figure 2 shows integrated densities  $n_{m_F}(x) = \int \rho_{m_F}(x, z) dz$ , where  $\rho_{m_F}(x, z)$  is given in Eq. (2), at

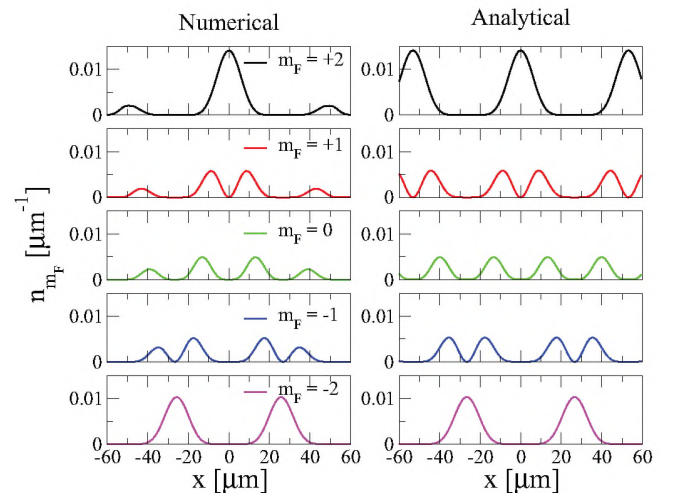


FIG. 2. (Color online) Integrated probability densities  $n_{m_F}(x)$  at  $t = t_I$ . The left panels correspond to the numerical simulation and the right ones to the results of a simple analytical model.

$t = t_I$  compared to the prediction of the simple analytic model. We have chosen  $B_{d0} = 0$ ,  $\frac{\partial B_d}{\partial x} = 22.3$  mG/cm, and  $t_I = 12$  ms. In the analytical model the spatial degrees of freedom are described by plane waves, consequently there is no overall change in the corresponding density profiles. However, structures of the interferences patterns are perfectly the same as in the case of the numerical approach.

The results of the numerical simulation are in good agreement with the experimental data (Fig. 1). In both cases we can see clear antisymmetry between the interference fringes for  $m_F$  and  $-m_F$  components. Vertical integration of the images in Figs. 1(a), 1(b), and 2 yields structureless distributions reconstructing the initial TF profiles. Because of the limited resolution of our detection system, the theoretically predicted interference patterns reveal more fine structures than in the experiment. Moreover, even a very small force acting in the  $y$  direction can rotate the interference pattern so that the direction of the absorption imaging is not parallel to the planes of the interference fringes. In contrast to numerical simulations which were performed for a constant SG gradient, the experimental patterns expand vertically in time, since the SG field in our trap has different gradients at different distances from the trap center.

Successive realizations of the experiment [Fig. 3(a)] show that the horizontal positions of the interference fringes vary since each experiment is realized in about 1–2 min. intervals and the phase of the fringes strongly depends on the  $B_{d0}$  value. Under conditions of our experiment the phase change of  $\pi$  corresponds to  $\Delta B_{d0} \approx 10^{-4}$  G, which is close to the long-term stability limit of our power supplies. Because of random phases in each of the realizations, after averaging over 72 measurements, the interference structures disappear in regular TF envelopes of each BEC component [Fig. 3(b)].

It is very difficult to eliminate all external magnetic fields in a laboratory. Consequently, if there is a very weak inhomogeneous magnetic field but the time of its interaction with atoms is long, the interference effects can arise. If the strength of the field changes slightly from one experimental realization to another, or the interaction time is not repeated with the precision much better than the Larmor period, the

interference fringes can move by more than their spatial period and the experimental data appear as if there was spontaneous pattern formation.

Even if the linear gradient is compensated, the higher-order inhomogeneities may be still present in experimental realizations. We have verified that a small, second-order inhomogeneity can result in interference effects even in the presence of the trap and particle interactions. To this end we integrate the 1D GP equation,  $i\hbar\partial_t\psi_{m_F} = \partial\mathcal{H}/\partial\psi_{m_F}^*$ ,

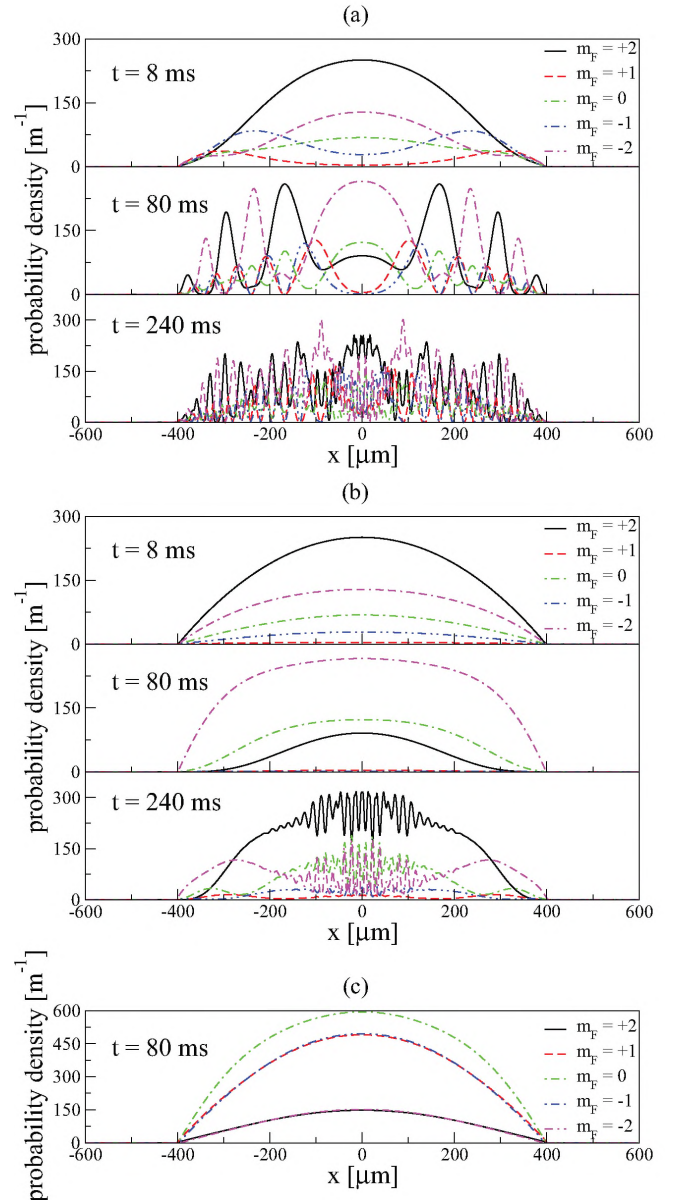


FIG. 4. (Color online) (a) Atomic densities after evolution in the presence of the harmonic trap and the inhomogeneous magnetic field with  $\alpha = 60$  mG/cm<sup>2</sup> for different times  $t$  as indicated in the panels. Different spin components  $|m_F\rangle_z$  are plotted with different lines. (b) The same as in (a) but in the absence of the field inhomogeneity, i.e., for  $\alpha = 0$ . In (c) we show similar data as in the middle panel of (a) but the densities correspond to different  $|m_F\rangle_x$  components, i.e., we project the spin state on the  $x$  axis.

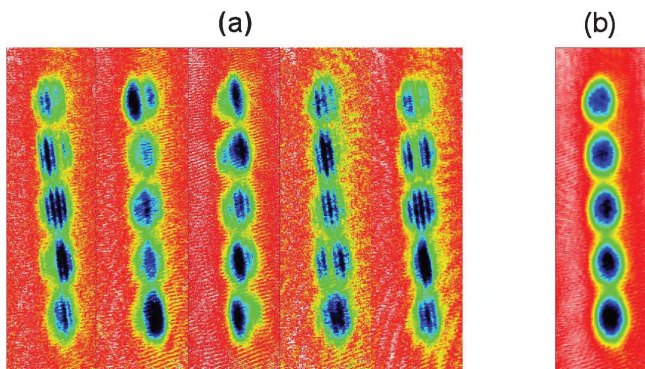


FIG. 3. (Color online) (a) Five successive realizations of the interference starting from the same experimental conditions. (b) The image averaged over 72 realizations.

corresponding to the energy density [17]

$$\mathcal{H} = \sum_{m_F} \psi_{m_F}^* \left[ -\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - p(x) m_F q(x) m_F^2 \right] + \psi_{m_F} + \frac{c_0}{2} n^2(z) + \frac{c_1}{2} |\vec{F}|^2 + \frac{c_2}{2} |\Theta|^2, \quad (3)$$

where  $p(x)$  and  $q(x)$  stand for the linear and quadratic Zeeman energies, respectively. They depend on  $x$  because we assume the nonvanishing curvature of the axial magnetic field,  $\vec{B} = (B_0 + \alpha x^2/2)\hat{x}$ .

In our simulations of the effect of the second-order magnetic field inhomogeneity on the matter-wave interference we apply parameters corresponding to the experiment reported in Ref. [8], i.e.,  $B_0 = 1.1$  G, the curvature  $\alpha = 60$  mG/cm<sup>2</sup>,  $\omega/2\pi = 0.8$  Hz, the interaction coefficients in 1D  $c_0 = 0.116\sqrt{\hbar^3\omega/m}$ ,  $c_1 = 1.64 \times 10^{-2}c_0$ ,  $c_2 = -1.72 \times 10^{-3}c_0$ , and total number of atoms  $\int n(x)dx = \int dx \sum_{m_F} |\psi_{m_F}|^2 = 2.1 \times 10^5$ . Initially, atoms are prepared in the state  $|\Psi(0)\rangle = \psi(x)|m_F = 2\rangle_z$ , where  $\psi(x)$  is the TF profile of a single-component condensate in the harmonic trap.

The initial spin state  $|m_F = 2\rangle_z$  is a superposition of different  $|m_F\rangle_x$  states. The presence of the inhomogeneous field leads to different trapping potentials for different  $|m_F\rangle_x$ . Indeed, the linear Zeeman term makes the harmonic trap slightly more shallow or more steep depending on  $m_F$  (the frequency change corresponding to the considered conditions is  $0.038m_F\omega$ ). Consequently, atomic wave packets corresponding to different signs of  $m_F$  start breathing out of phase. Such a relative motion results in interference patterns if at the end of the temporal evolution  $|\Psi(t)\rangle$  is projected on different  $|m_F\rangle_z$  states, see Fig. 4(a). However, if  $|\Psi(t)\rangle$  is projected on the  $|m_F\rangle_x$  states no interference fringes emerge because there is no mixing of the differently breathing wave packets. It is illustrated in Fig. 4(c) where we show similar data as in Fig. 4(a) but with the densities corresponding to different  $|m_F\rangle_x$  components. The projection on the  $|m_F\rangle_x$  components was used in experiment [8] where the SG field separated spatially the  $|m_F\rangle_x$  components, rather than the  $|m_F\rangle_z$  ones.

Figure 4(a) shows that the first signature of the interference effects is visible already at  $t \approx 8$  ms. At  $t = 80$  ms we can see well-developed interference patterns, while for  $t \geq 240$  ms the density profiles become irregular. The irregular profiles appear due to the presence of the spin-dependent interactions. If we turn off these interactions, we observe the regular patterns for times much greater than 240 ms. For a given  $B_0$  and  $t$ , the interference pattern is the same in different experimental realizations, provided the evolution time  $t$  does

not change more than a small fraction of the Larmor precession period and  $B_0$  does not fluctuate more than, e.g.,  $10^{-5}$  G for  $t = 80$  ms. Otherwise one observes random shifts of the pattern. The presence of the curvature changes dramatically the system behavior. For comparison, in Fig. 4(b) we present the results for  $B_0 = 1.1$  G but with  $\alpha = 0$  which are very different from the case shown in Fig. 4(a) where the curvature is included. That is, there is no modulation of the atomic densities in Fig. 4(b) until the dynamical instability becomes visible.

In this report we have analyzed the matter-wave interference of an expanding <sup>87</sup>Rb spinor BEC. The experimental observations agree very well with theoretical simulations and demonstrate that such BECs are extremely sensitive to magnetic field inhomogeneity. In addition to the modeling of the experiment described above, we have analyzed the case of higher-order inhomogeneities and applied the developed approach to model matter-wave interference in the case when there is no first-order gradient but a curvature of the axial magnetic field component. In the analyzed situation, very well pronounced interference patterns have been obtained. This study shows that even very weak magnetic inhomogeneities, difficult to avoid in experiments, result in interference patterns which may mimic the patterns attributed to dynamical instabilities. The matter-wave interference appears thus to be a very general phenomenon, possible to occur in a wide range of experimental conditions. In particular, since it may occur independently of other interactions in spinor BECs, the fact cannot be excluded that in many experiments where pattern formation is attributed to dynamical instability, the atom-wave interference plays an important role. We have demonstrated that the interference pattern created by an inhomogeneous magnetic field, with a gradient of 30 mG/cm, for example, acting for about 10 ms will be noticeably shifted if the magnetic field changes by  $10^{-4}$  G in different experimental realizations. The described results are thus interesting for precision measurements of magnetic fields. The detailed analysis of such applications goes, however, beyond the scope of the present work and will be published elsewhere [14].

The authors are grateful to M. Matuszewski, D. Stamper-Kurn, M. Gajda, A. Szczepkiewicz, and K. Rzążewski for numerous discussions. This work was performed in the National Laboratory of AMO Physics in Torun and partially supported by the Polish Grants No. N N202 230237, No. DEC-2011/01/N/ST2/00418 (M. Płodzień), and No. DEC-2012/04/A/ST2/00088 (KS), and the TEAM Project of the FNP.

- [1] R. Wynands and S. Weyers, *Metrologia* **42**, S64 (2005).  
 [2] C. J. Borde, *Metrologia* **39**, 435 (2002).  
 [3] J. B. Fixler, G. T. Foster, J. M. McGuirk, and M. A. Kasevich, *Science* **315**, 74 (2007).  
 [4] G. Lamporesi, A. Bertoldi, L. Cacciapuoti, M. Prevedelli, and G. M. Tino, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 050801 (2008).  
 [5] S. Gupta, K. Dieckmann, Z. Hadzibabic, and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 140401 (2002).

- [6] S. Dimopoulos, P. W. Graham, J. M. Hogan, M. A. Kasevich, and S. Rajendran, *Phys. Rev. D* **78**, 122002 (2008).  
 [7] W. Gawlik and J. Higbie, in *Optical Magnetometry*, edited by D. Budker and D. F. Jackson Kimball (Oxford University Press, Oxford, 2013).  
 [8] J. Kronjäger, C. Becker, P. Soltan-Panahi, K. Bongs, and K. Sengstock, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 090402 (2010).



- [9] E. M. Bookjans, A. Vinit, and C. Raman, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 195306 (2011).
- [10] D. M. Stamper-Kurn and M. Ueda, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 1191 (2013).
- [11] F. Bylicki, M. Zawada, W. Gawlik, A. Noga, J. Zachorowski, W. Jastrzebski, J. Szczepkowski, and M. Witkowski, *Acta Phys. Pol. A* **113**, 691 (2008).
- [12] E. Majorana, *Nuovo Cimento* **9**, 43 (1932).
- [13] X. Ma, L. Xia, F. Yang, X. Zhou, Y. Wang, H. Guo, and X. Chen, *Phys. Rev. A* **73**, 013624 (2006).
- [14] M. Witkowski *et al.* (unpublished).
- [15] E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
- [16] L. P. Pitaevskii, *Sov. Phys. JETP-USSR* **13**, 451 (1961).
- [17] Y. Kawaguchi and M. Ueda, *Phys. Rep.* **520**, 253 (2012).

Kraków, 23.04.2014



UNIWERSYTET  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

## Oświadczenie o współautorstwie

Instytut Fizyki

imienia

Mariana Smoluchowskiego

**Zakład Optyki Atomowej**

W pracy M. Płodzień, K. Sacha „*Matter waves analog of an optical random laser*” **Phys. Rev. A** **84**, 023624 (2011) mój wkład polegał na dyskusji idei atomowego lasera przypadkowego i wyników otrzymanych przez Pana Marcina Płodzienia oraz na pomocy w redagowaniu artykułu. Oceniam go na 10-20%.

prof. Krzysztof Sacha

ul. Reymonta 4

PL 30-059 Kraków

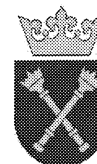
tel. +48(12) 663-57-79

fax +48(12) 633-84-94

e-mail:

krzysztof.sacha@uj.edu.pl

Kraków, 23.04.2014



UNIwersytet  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

## Oświadczenie o współautorstwie

Instytut Fizyki

imienia

Mariana Smoluchowskiego

**Zakład Optyki Atomowej**

W pracy M. Płodzień, K. Sacha, „*Breakdown of Anderson localization of interacting quantum bright solitons*” **Phys. Rev. A 86, 033617 (2012)** mój wkład polegał na dyskusji wyników otrzymanych przez Pana Marcina Płodzienia oraz na pomocy w redagowaniu artykułu. Oceniam go na 10-20%.

  
prof. Krzysztof Sacha

ul. Reymonta 4

PL 30-059 Kraków

tel. +48(12) 663-57-79

fax +48(12) 633-84-94

e-mail:

krzysztof.sacha@uj.edu.pl

Małgorzata Mochol  
Instytut Fizyki, WFAiIS UJ  
ul. W. Reymonta 4, Kraków  
malgorzata.mochol@uj.edu.pl

Kraków, 23.04.2014

### Oświadczenie o współautorstwie

W pracy M. Mochol, M. Płodzień, K. Sacha, „Dark soliton in a disorder potential” **Phys. Rev. A** **85**, **023627 (2012)** mój wkład polegał na wykonaniu obliczeń i przygotowaniu sekcji II artykułu dotyczącej analizy deformacji klasycznego ciemnego solitonu w słabym potencjale zewnętrznym.

Mój wkład w tę pracę oceniam na 60 %.

Małgorzata Mochol  
Podpis

Kraków, 23.04.2014



UNIWERSYTET  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

## Oświadczenie o współautorstwie

Instytut Fizyki

imienia

Mariana Smoluchowskiego

**Zakład Optyki Atomowej**

W pracy M. Mochol, M. Płodzień, K. Sacha, „*Dark soliton in a disorder potential*” **Phys. Rev. A 85, 023627 (2012)** mój wkład polegał na dyskusji wyników otrzymanych przez Panią Małgorzatę Mochol i Pana Marcina Płodzienia oraz na pomocy w redagowaniu artykułu. Oceniam go na 10%.

  
prof. Krzysztof Sacha

ul. Reymonta 4

PL 30-059 Kraków

tel. +48(12) 663-57-79

fax +48(12) 633-84-94

e-mail:

krzysztof.sacha@uj.edu.pl

Name: Delande Dominique

Paris, April 16th, 2014

Institution: Laboratoire Kastler-Brossel, CNRS-ENS-UPMC

Address: 4 place Jussieu 75005 Paris France

## Statement of co-authorship

In the work D. Delande, K. Sacha, M. Plodzien, S. K. Avazbaev, J. Zakrzewski, „Many-body Anderson localization in onedimensional systems”, **New J. Phys.** **15 (2013) 045021** my contribution was to develop the computer code for the quasi-exact numerical simulations of the 1D many-body dynamics, and to perform the numerically intensive final runs used for the publication.

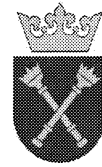
Percentage contribution to the work I estimate at 30 %.

Name: Delande Dominique

Signature:

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'DD' with a stylized flourish at the end.

Kraków, 23.04.2014



UNIWERSYTET  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

## Oświadczenie o współautorstwie

Instytut Fizyki

imienia

Mariana Smoluchowskiego

**Zakład Optyki Atomowej**

W pracy D. Delande, K. Sacha, M. Płodzień, S. K. Avazbaev, J. Zakrzewski,  
„*Many-body Anderson localization in one-dimensional systems*” **New J. Phys.**  
**15 (2013) 045021** mój wkład polegał na dyskusji wyników oraz na udziale w  
redagowaniu artykułu. Oceniam go na 10-20%.

  
prof. Krzysztof Sacha

ul. Reymonta 4

PL 30-059 Kraków

tel. +48(12) 663-57-79

fax +48(12) 633-84-94

e-mail:

krzysztof.sacha@uj.edu.pl

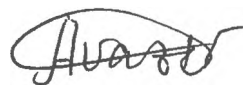
Sanat Avazbaev  
Applied Physics Department  
Curtin University  
Perth 6845  
Western Australia  
Australia

Perth,  
April 14, 2014

## Statement of co-authorship

In the work D. Delande, K. Sacha, M. Plodzien, S. K. Avazbaev, J. Zakrzewski, „*Many-body Anderson localization in one dimensional systems*”, **New J. Phys.** **15** (2013)

**045021** my contribution was performing numerical simulations. Percentage contribution to the work I estimate at 15%.



Sanat Avazbaev.





UNIwersytet  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

Kraków, 27 kwietnia 2014

## Oświadczenie o współautorstwie

Instytut Fizyki

imienia

Mariana Smoluchowskiego

**Zakład Optyki Atomowej**

W pracy D. Delande, K. Sacha, M. Płodzień, S. K. Avazbaev, J. Zakrzewski, „*Many-body Anderson localization in one-dimensional systems*” **New J. Phys.** **15 (2013) 045021** mój wkład polegał na uczestnictwie w postawieniu problemu (wraz z D. Delande i K. Sachą), wstępnych testach numerycznych w ramach napisanego wspólnie z D. Delande programu wielociałowego, dyskusji wyników i uczestnictwie w pisaniu artykułu.

Mój wkład w tę pracę oceniam na 20 % podkreślając małą użyteczność podawania wkładów procentowych. Otrzymanie wyników naukowych i ich opublikowanie jest skomplikowanym nieliniowym procesem, gdzie wkłady poszczególnych współautorów trudno uznać za addytywne.

Jakub Zakrzewski

ul. Reymonta 4

PL 30-059 Kraków

tel. +48(12) 663-55-55

fax +48(12) 633-84-94

e-mail:

[jakub.zakrzewski@uj.edu.pl](mailto:jakub.zakrzewski@uj.edu.pl)

Imię i nazwisko: Marcin Witkowski

Miejscowość i data: Toruń 28.04.2014

Afiliacja: 1. Krajowe Laboratorium Fizyki Atomowej, Molekularnej i Optycznej,  
Grudziądzka 5, 87-100 Toruń  
2. Instytut Fizyki, Uniwersytet Opolski, Oleska 48, 45-052 Opole

### OŚWIADCZENIE

Oświadczam, że w pracy Matter-wave interference versus spontaneous pattern formation in spinor Bose-Einstein condensates M. Witkowski, R. Gartman, B. Nagórny, M. Piotrowski, M. Płodzień, K. Sacha, J. Szczepkowski, J. Zachorowski, M. Zawada, W. Gawlik, Phys Rev A 88, 025602 (2013) mój udział polegał na przygotowaniu układu eksperymentalnego, przeprowadzeniu części pomiarów, których wyniki zostały zaprezentowane w pracy na rysunkach Fig.1a i Fig.3. Wykonałem również inne doświadczenie (nieopisane w pracy) oraz dokonałem numerycznej analizy jego wyników, co pozwoliło na zamieszczenie we wnioskach końcowych uwagi o możliwości wykorzystania przedstawionej w pracy techniki bazującej na interferencji fal materii do precyzyjnych pomiarów pola magnetycznego. Mój procentowy wkład w powstanie pracy oceniam na 33%.

Marcin Witkowski

dr Rafał Gartman

Bydgoszcz 23.04.2014

Instytut Fizyki UMK

Sułkowskiego 42/19  
85-634 Bydgoszcz

email: rafalgartman@gmail.com

### Oświadczenie o współautorstwie

Marcin Witkowski, Rafał Gartman, Bartłomiej Nagórny, Marcin Piotrowski, Marcin Płodzień, Krzysztof Sacha, Jacek Szczepkowski, Jerzy Zachorowski, Michał Zawada, and Wojciech Gawlik  
„Matterwave interference versus spontaneous pattern formation in spinor BoseEinstein condensate”  
Phys. Rev. A 88, 025602 (2013).

Mój wkład w powstanie niniejszej pracy polegał na przygotowaniu ilustracji 1a oraz 3 a i b, a także na opracowaniu wyników eksperymentów przedstawionych na ryc. 1a.

Mój wkład w tę pracę oceniam na 15 %

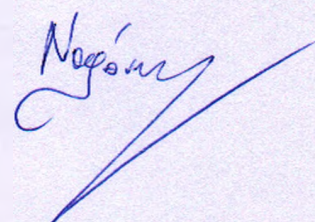


Bartłomiej Nagórny  
Instytut fizyki  
ul, Grudziądzka 5  
87-100 Toruń  
nagornyb@wp.pl

Toruń 28.04.2014r.

## Oświadczenie o współautorstwie

Oświadczam, że w pracy M. Witkowski, R. Gartman, B. Nagórny, M. Piotrowski, M. Płodzień, K. Sacha, J. Szczepkowski, J. Zachorowski, M. Zawada, W. Gawlik, 2013, „Matter-wave interference versus spontaneous pattern formation in spinor Bose-Einstein condensates”, Phys. Rev. A., 88, 025602 [2013], mój wkład polegał na uczestnictwie pod kierunkiem dra M. Zawady w analizie wyników pomiarów oraz skonstruowaniu jednej z cewek niezbędnej do otrzymania prezentowanych wyników. Mój wkład w tę pracę oceniam na 10 %.



Toruń, 27 kwietnia 2014

Marcin Piotrowski  
Instytut Fizyki UJ  
ul. Reymonta 4,  
30-059  
mr.piotrowski@uj.edu.pl

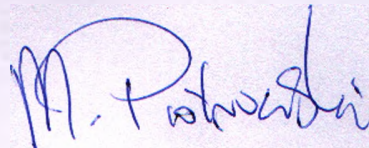
## Oświadczenie o współautorstwie

Marcin Witkowski, Rafał Gartman, Bartłomiej Nagórny, Marcin Piotrowski, Marcin Płodzień, Krzysztof Sacha, Jacek Szczepkowski, Jerzy Zachorowski, Michał Zawada, and Wojciech Gawlik,  
*„Matter-wave interference versus spontaneous pattern formation in spinor Bose-Einstein condensates”*  
Phys. Rev. A 88, 025602 (2013)

Mój wkład w powstanie niniejszej pracy polegał na udziale w wykonywaniu pomiarów kondensatów spinorowych w KL FAMO w Toruniu.

Mój wkład w tę pracę oceniam na 8.33%.

Marcin Piotrowski



Kraków, 23.04.2014



UNIwersytet  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

## Oświadczenie o współautorstwie

Instytut Fizyki

imienia

Mariana Smoluchowskiego

**Zakład Optyki Atomowej**

W pracy M. Witkowski, R. Gartman, B. Nagórny, M. Piotrowski, M. Płodzień, K. Sacha, J. Szczepkowski, J. Zachorowski, M. Zawada, and W. Gawlik, „*Matter-wave interference versus spontaneous pattern formation in spinor Bose-Einstein condensates*”, **Phys. Rev. A** **88**, 025602 (2013) mój wkład polegał na dyskusji teoretycznej części wyników otrzymanych przez Pana Marcina Płodzienia oraz na pomocy w redagowaniu artykułu. Oceniam go na 5%.

  
prof. Krzysztof Sacha

ul. Reymonta 4

PL 30-059 Kraków

tel. +48(12) 663-57-79

fax +48(12) 633-84-94

e-mail:

krzysztof.sacha@uj.edu.pl

Jacek Szczepkowski  
Instytut Fizyki  
Polska Akademia Nauk  
al. Lotników 32/46  
02-668 Warszawa  
e-mail [jszczep@ifpan.edu.pl](mailto:jszczep@ifpan.edu.pl)

Warszawa, 23.04.2014

## Oświadczenie o współautorstwie

Marcin Witkowski, Rafał Gartman, Bartłomiej Nagórny, Marcin Piotrowski, Marcin Płodzień, Krzysztof Sacha, Jacek Szczepkowski, Jerzy Zachorowski, Michał Zawada, and Wojciech Gawlik,  
„Matter-wave interference versus spontaneous pattern formation in spinor Bose-Einstein condensates”  
Phys. Rev. A 88, 025602 (2013)

Mój wkład w powstanie niniejszej pracy polegał na współwykonaniu pomiarów prezentowanych w pracy, przystosowaniu układu sterowania polami magnetycznymi do wymagań stawianych w doświadczeniu.

Mój wkład w tę pracę oceniam na 5 %

Podpis



Jerzy Zachorowski  
Instytut Fizyki im. Mariana Smoluchowskiego  
Uniwersytet Jagielloński  
ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków  
[jerzy.zachorowski@uj.edu.pl](mailto:jerzy.zachorowski@uj.edu.pl)

Kraków, 29 kwietnia 2014

## Oświadczenie o współautorstwie

Dotyczy artykułu:

Marcin Witkowski, Rafał Gartman, Bartłomiej Nagórny, Marcin Piotrowski, Marcin Płodzień, Krzysztof Sacha, Jacek Szczepkowski, Jerzy Zachorowski, Michał Zawada, and Wojciech Gawlik,  
„Matter-wave interference versus spontaneous pattern formation in spinor Bose-Einstein condensates”  
Phys. Rev. A 88, 025602 (2013)

Mój wkład w powstanie niniejszej pracy polegał na analizie i modelowaniu pól magnetycznych w pułapce oraz w obszarze oddziaływania atomów.  
Mój wkład w tę pracę oceniam na 5%.

*Jerzy Zachorowski*



Michał Zawada  
Krajowe Laboratorium FAMO  
Instytut Fizyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika  
Grudziądzka 5, 87-100 Toruń  
zawada@fizyka.umk.pl

Toruń, 24.04.2014

## Oświadczenie o współautorstwie

Marcin Witkowski, Rafał Gartman, Bartłomiej Nagórny, Marcin Piotrowski, Marcin Płodzień, Krzysztof Sacha, Jacek Szczepkowski, Jerzy Zachorowski, Michał Zawada, and Wojciech Gawlik, „Matter-wave interference versus spontaneous pattern formation in spinor Bose-Einstein condensates”  
Phys. Rev. A 88, 025602 (2013)

Mój wkład w powstanie niniejszej pracy polegał na kierowaniu grupą doświadczalną podczas eksperymentu, zaplanowaniu doświadczeń, wykonaniu części pomiarów i przygotowaniu części tekstu publikacji.



Wojciech Gawlik  
Instytut Fizyki UJ  
gawlik@uj.edu.pl

Kraków, 7. 05. 2014

## Oświadczenie o współautorstwie

Marcin Witkowski, Rafał Gartman, Bartłomiej Nagórny, Marcin Piotrowski, Marcin Płodzień, Krzysztof Sacha, Jacek Szczepkowski, Jerzy Zachorowski, Michał Zawada, and Wojciech Gawlik,  
„Matter-wave interference versus spontaneous pattern formation in spinor Bose-Einstein condensates”  
Phys. Rev. A 88, 025602 (2013)

Mój wkład w powstanie niniejszej pracy polegał na przygotowaniu układu doświadczalnego i jakościowej analizie wyników.

Mój wkład w tę pracę oceniam na 10%

Wojciech Gawlik