MAp Journal
Mathematics & Applications
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

INVERS MOORE-PENROSE SEBAGAI REPRESENTASI MATRIKS PROYEKSI ORTHOGONAL

MOORE-PENROSE INVERSE AS THE REPRESENTATION OF ORTHOGONAL PROJECTION MATRIX

Sri Wigantono[1§], Moh. Nurul Huda[2], Qonita Qurrota A'yun[3], Hardina Sandariria[4], Dimas Raditya Sahputra[5], Tuhfatul Janan[6]
[1]Universitas Mulawarman [Email: sriwigantono@fmipa.unmul.ac.id]
[2]Universitas Mulawarman [Email: moh.nurulhuda@fmipa.unmul.ac.id]
[3]Universitas Mulawarman [Email: qonitaqurrota@fmipa.unmul.ac.id]
[4]Universitas Mulawarman [Email: hardinasandariria@fmipa.unmul.ac.id]
[5]Universitas Mulawarman [Email: dimasrsahputra@gmail.com]
[6]STAI Muhammadiyah Probolinggo [Email: tuhfatuljanan4@gmail.com]
[§]*Corresponding Author*

Received 26 Mei 2023; Accepted 7 Juni 2023; Published 30 Juni 2023;

Abstrak

Invers matriks adalah salah satu sifat penting dari matriks. Kajian invers matriks khususnya matriks singular telah dikembangkan oleh Moore dan dilanjutkan oleh Penrose yaitu invers untuk sebarang matriks yang kemudian disebut dengan invers Moore-Penrose. Kriteria invers Moore-Penrose dapat merepresentasikan sebuah proyeksi pada ruang ruang vektor V sepanjang W dengan V dan W saling orthogonal atau ditulis $W = V^{\perp}$ yang disebut matriks proyeksi orthogonal pada V. Pada artikel ini akan disajikan lemma dan teorema terkait konstruksi invers Moore-Penrose dari perkalian matriks. Kemudian, matriks persegi merupakan matriks proyeksi orthogonal pada ruang vektor V jika dan hanya jika memenuhi dua kondisi yaitu matriks tersebut bersifat idempoten dan bersifat simetris. Dua sifat tersebut dipenuhi oleh matriks $I - A^{+}A$ dan $I - AA^{+}$ yang secara berturut-turut merupakan matriks proyeksi orthogonal pada $Ker(A)$ dan $Ker(A')$. Akibatnya dapat dikonstruksi invers Moore-Penrose A^{+}dari matriks persegi A yang merupakan suatu perkalian dari beberapa matriks serta memenuhi sifat tertentu.

Kata Kunci: matriks proyeksi, matriks proyeksi orthogonal, invers Moore-Penrose.

Abstract

The inverse of matrix is one of the important properties of matrix. This properies, especially singular matrix, has been developed by Moore and continued by Penrose. Then, this inverse called Moore-Penrose inverse. The Moore-Penrose invers criteria can represent a projection on a vector space V along W with V and W are orthogonal to each other or can written with $W = V^{\perp}$ which is called orthogonal projection matrix on V. This research will present lemmas and theorems related to the Moore-Penrose invers construction of the multiplication matrix. Then, a square matrix is an orthogonal projection matrix on a vector space V if and only if it satisfies two conditions, that are idempotent and symmetric. These two properties are satisfied by matrices $I - A^{+}A$ and $I - AA^{+}$ which respectively are orthogonal projection matrices on $Ker(A)$ and $Ker(A')$. As a result, the Moore-Penrose inverse A^{+} can be constructed from a square matrix A which is an multiplication of several matrices and fulfills certain properties.

***Keywords**: projection matrix, orthogonal projection matrix, Moore-Penrose inverse*

1. Pendahuluan

Aljabar matriks merupakan salah satu cabang matematika yang telah dikembangkan oleh seorang matematikawan Inggris yang bernama Arthur Cayley (1821-1895). Matriks berkembang karena peranannya dalam beberapa bidang, misalnya bidang ekonomi, industri, biologi dan masalah transportasi. Salah satu sifat penting matriks yaitu invers matriks. Suatu matriks persegi memiliki invers jika matriks tersebut nilai determinannya tidak nol atau biasa disebut matriks nonsingular. Sebaliknya suatu matriks persegi yang determinannya bernilai nol maka dinamakan matriks singular [1]. Pada tahun 1920, Moore mengembangkan kajian terkait invers dari matriks singular. Moore memperkenalkan dan mengkonstruksi resiprokal umum. Kemudian, Moore menunjukkan ketunggalannya, menunjukkan sifat-sifat penting serta menunjukkan penerapannya pada persamaan-persamaan linear [2]. Kemudian pada tahun 1955 Penrose mengembangkan kajian matriks dari Moore yang menunjukkan bahwa untuk sebarang matriks yang mempunyai elemen real ataupun kompleks terdapat dengan tunggal matriks invers tergeneralisir yang kemudian dikenal sebagai invers Moore-Penrose. Pada[3] diberikan suatu metode untuk menghitung invers Moore-Penrose dari berbagai macam bentuk matriks. Manfaat invers Moore Penrose sendiri salah satunya yaitu dapat menyelesaikan suatu persamaan linear [4].

Invers matriks bebas yang non-singular sudah dikaji pada [5]. Lebih lanjut, kajian terkait invers Moore-Penrose terus berkembang. Struktur entri-entri matriks sebarang dapat dikonstruksi untuk rank matriks $r \geq 2$ [6]. Kemudian, pada [7] juga didapat bentuk invers Moore-Penrose dari matriks blok ukuran 2×2. Selain itu, invers Moore-Penrose juga dapat dikonstruksi untuk Matriks Fuzzy [8]. Invers Moore-Penrose juga digunakan dalam merestorasi atau memperbaiki suatu gambar untuk memperoleh gambar yang telah tergradasi menuju ke bentuk asli dari gambar [9].

Salah satu sifat yang dimiliki matriks yaitu dapat merepresentasikan sebuah pemetaan linear. Suatu proyeksi juga dapat direpresentasikan oleh sebuah matriks seperti pada pemetaan linear yang disebut matriks proyeksi. Selain itu proyeksi orthogonal juga dapat direpresentasikan oleh sebuah matriks yang disebut matriks proyeksi orthogonal [10]. Metode iteratif untuk menghitung proyeksi orthogonal untuk sebarang matriks telah dikembangkan dengan melibatkan invers Moore-Penrose [11]. Lebih lanjut, penelitian terkait proyeksi orthogonal dari perkalian dua matriks pada *range* suatu operator dapat dinyatakan dengan invers Moore-Penrose [12]. Matriks proyeksi orthogonal sendiri ada kaitannya dengan dua ruang vektor yang saling orthogonal yaitu misalkan V, W yang merupakan ruang bagian tak kosong $\mathbb{R}^n$ dengan $\mathbb{R}^n = V \oplus W$ dan saling orthogonal dapat ditulis $W = V^\perp$ [1].

Pada penelitian ini akan dikaji salah satu sifat invers Moore Penrose yaitu dapat merepresentasikan matriks proyeksi orthogonal [13]. Pada artikel ini juga ditinjau kembali sifat-

sifat matriks proyeksi orthogonal dan kaitannya dalam mengkonstruksi invers Moore-Penrose dari perkalian matriks yang berentri bilangan real dan berbentuk persegi.

2. Landasan Teori

Pada bagian ini akan diberikan beberapa teorema mengenai matriks proyeksi dan matriks proyeksi orthogonal. Selanjutnya, diberikan lemma terkait teorema matriks proyeksi orthogonal. Notasi $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ menyatakan himpunan matriks berukuran $n\times n$ yang semua elemennya adalah bilangan real.

Definisi 2.1. [14] *Misalkan* V *adalah ruang vektor atas* F *dan* $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ *adalah himpunan bagian tak kosong dari* V *. Ruang bagian dari* V *yang dibangun oleh* S *didefinisikan sebagai*

$$span(S)=\{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n:\alpha_i\in F, i=1,2,..,n\}$$

Definisi 2.2. [15] Untuk sebarang $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ didefinisikan **Kernel** dari matriks A dengan $Ker(A)=\{x\in\mathbb{R}^n|Ax=0\}$.

Teorema 2.3. [16] Jika $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, maka

$$rank(A)+nullitas\ (A)=n.$$

BUKTI. Misalkan $v\in\mathbb{R}^n$. Jika $rank\ (A)=n$, maka berdasarkan teorema ke-*invertible*-an matriks, solusi satu-satunya dari $Av=0$ adalah solusi trivial $v=0$. Akibatnya diperoleh $Ker(A)=\{0\}$ sehingga $nullitas\ (A)=0$. Oleh karena itu diperoleh $rank(A)+nullitas(A)=n$. Sekarang misalkan $rank(A)=r<n$. Artinya terdapat $n-r>0$ variabel bebas dari solusi $Av=0$. Misalkan $v_1,v_2,\dots,v_{n-r}$ adalah solusi yang didapat dengan mengatur setiap variabel bebas secara berurutan menjadi 1 dan variabel bebas sisanya ke 0 Dari sini $\{v_1,v_2,\dots,v_{n-r}\}$ bebas linier. Lebih lanjut setiap solusi $Ax=0$ adalah kombinasi linier dari $v_1,v_2,\dots,v_{n-r}$ yang artinya merentang $Ker(A)$. Akibatnya $\{v_1,v_2,\dots,v_{n-r}\}$ adalah basis $Ker(A)$ dan $nullitas\ (A)=n-r$. ▫

Lemma 2.4. [10] *Misalkan* $J\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *dan jika* $J^2=J$, *maka* $\mathbb{R}^n=span\ (J)\oplus Ker\ (J)$ *dan* $Ker(J)=span(I_n-J)$.

BUKTI. Pembuktian Lemma 2.4 telah diberikan pada [10].

Definisi 2.5. [17] *Misalkan* S *dan* T *adalah ruang bagian dari suatu ruang vektor* V *atas lapangan* F *dengan dimensi hingga dengan* $V=S\oplus T$. *Misalkan pula* $s\in S$ *dan* $t\in T$ *. Operator linier* $\rho:V\to V$ *dengan definisi* $\rho(s+t)=s$ *disebut proyeksi pada* S *sepanjang* T.

Selanjutnya, disajikan teorema mengenai matriks proyeksi.

Teorema 2.6. [10]. *Misalkan* $J\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Misalkan pula* V *dan* W *adalah ruang bagian dari* $\mathbb{R}^n$ *atas lapangan* $\mathbb{R}$, *dengan* $V=span\ (J)$ *dan* $W=Ker(J)$. *Matriks* J *merupakan matriks proyeksi pada* V *sepanjang* W *jika hanya jika* $J^2=J$.

BUKTI. Pembuktian Teorema 2.6 telah diberikan pada [10].

Teorema 2.7. [10] *Misalkan V dan W adalah ruang bagian dari ruang vektor $\mathbb{R}^n$ atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. Matriks $J \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ merupakan matriks proyeksi pada V sepanjang W jika hanya jika dua kondisi berikut terpenuhi:*

i. $Jx = x, \forall x \in V$
ii. $Jy = 0, \forall y \in W$.

BUKTI. Pembuktian Teorema 2.7 telah diberikan pada [10].

Teorema 2.8. [10] *Matriks $J \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ merupakan matriks proyeksi orthogonal jika dan hanya jika dua kondisi berikut terpenuhi:*

i. $J^2 = J$
ii. $J' = J$

dengan J' adalah transpose matriks J.

BUKTI. Pembuktian Teorema 2.8 telah diberikan pada [10].

Definisi 2.9. [4] *Terdapat dengan tunggal matriks A^+ yang selanjutnya disebut invers Moore-Penrose dari matriks persegi $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jika memenuhi empat kriteria berikut*

i. $AA^+A = A$
ii. $A^+AA^+ = A^+$
iii. $(AA^+)' = AA^+$
iv. $(A^+A)' = A^+A$

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dikaji teorema mengenai invers Moore-Penrose suatu matriks yang dikonstruksi dari perkalian matriks tertentu. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa matriks $I - A^+A$ dan $I - AA^+$ secara berturut-turut adalah matriks proyeksi orthogonal pada $Ker(A)$ dan $Ker(A')$.

Misalkan $Ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ dan $Ker(A') = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = 0\}$. Misalkan pula $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Kemudian, berdasarkan Definisi 2.9 diperoleh

$$\begin{aligned}(I - A^+A)^2 &= (I - A^+A)(I - A^+A)\\ &= I - A^+A - A^+A + (A^+A)^2\\ &= I - 2A^+A + A^+AA^+\\ &= I - 2A^+A + A^+ \qquad (1)\\ &= I - A^+A\end{aligned}$$

dan juga diperoleh

$$\begin{aligned}(I - A^+A)' &= I' - (A^+A)'\\ &= I - A^+A. \qquad (2)\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (1), Persamaan (2), dan Teorema 2.8 didapat bahwa matriks $I - A^+A$ adalah matriks proyeksi orthogonal pada Ker(A). Kemudian, berdasarkan Teorema 2.7 diperoleh $x = (I - A^+A)x$ sehingga didapat

$$\begin{aligned}Ax &= A(I - A^+A)x\\ &= (A - AA^+A)x\\ &= (A - A)x\\ &= 0\end{aligned}$$

yang berarti $(I - A^+A)x \in Ker(A)$.

Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2.9 diperoleh

$$\begin{aligned}(I - AA^+)^2 &= (I - AA^+)(I - AA^+)\\ &= I - 2AA^+ + (AA^+)^2\\ &= I - 2AA^+ + AA^+AA^+\\ &= I - 2AA^+ + AA^+ \qquad (3)\\ &= I - AA^+ ,\end{aligned}$$

dan juga didapat

$$(I - AA^+)' = I' - (AA^+)'$$
$$= I - AA^+. \quad (4)$$

Berdasarkan Persamaan (3), Persamaan (4), dan Teorema 2.8 didapatkan matriks $I - AA^+$ adalah matriks proyeksi orthogonal pada $Ker(A')$. Kemudian, berdasarkan Teorema 2.7 diperoleh $x = (I - AA^+)x$. Dari sini didapat

$$\begin{aligned} A'x &= A'(I - AA^+)x \\ &= (A' - A'\,AA^+)x \\ &= (A' - A'\,(AA^+)')x \\ &= (A' - (AA^+A)')x \\ &= (A' - A')x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ini berarti $(I - AA^+)x \in Ker(A')$.

Dengan demikian matriks proyeksi orthogonal pada $Ker(A)$ dan $Ker(A')$ secara berturut-turut yaitu $I - AA^+$ dan $I - A^+A$ yang secara eksplisit juga dapat direpresentasikan pula oleh basis-basis dari $Ker(A)$ dan $Ker(A')$ yang ditunjukkan pada Lemma 3.1 berikut.

Lemma 3.1. [13] *Misalkan $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dan $k = dim\,(Ker(A))$ dengan $k < n$. Misalkan $P, Q \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ adalah dua matriks yang kolom-kolomnya berturut-turut membentuk basis $Ker(A\,)$ dan $Ker(A')$. Jika $AP = 0$ dan $Q'A = 0$ dengan $P'P$ dan $Q'Q$ matriks nonsingular, maka berlaku*

i. $A^+A = I - P(P'P)^{-1}P'$

ii. $AA^+ = I - Q(Q'Q)^{-1}Q'$.

BUKTI. Karena vektor-vektor kolom matriks P dan Q berturut-turut membentuk basis $Ker(A)$ dan $Ker(A')$, maka vektor kolom kedua matriks tersebut bebas linier. Misalkan p_k adalah vektor kolom matriks P dengan $k = 1,2,\dots,n$ dan misalkan $span(P) = span\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Misalkan pula $x_1 \in span(P)$ sehingga x_1 dapat dinyatakan sebagai

$$x_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_n p_n = P\alpha\,.$$

Karena $x_1 \in span(P) = \mathrm{Ker}(A)$ dan $I - A^+A$ merupakan matriks proyeksi orthogonal pada $\mathrm{Ker}(A)$, maka berdasarkan Teorema 2.7 diperoleh

$$(I - A^+A)x_1 = x_1 = P\alpha \quad (5)$$

Dari Persamaan (5) diperoleh $x_1 = P\alpha$. Kemudian kalikan sisi kiri kedua ruas dengan P' sehingga diperoleh

$$P'x_1 = P'P\alpha \text{ atau } (P'P)^{-1}P'x_1 = \alpha. \quad (6)$$

Subtitusikan Persamaan (6) ke Persamaan (5) sehingga diperoleh

$(I - A^+A)x_1 = x_1 = P\alpha = P(P'P)^{-1}P'x_1$. Di sisi lain misalkan $x_2 \in span(P)^\perp = \mathrm{Ker}(A)^\perp$, maka $P'x_2 = 0$. Karena $P'x_2 = 0$ diperoleh $P(P'P)^{-1}P'x_2 = 0$ sehingga $(I - A^+A)x_2 = 0$. Kemudian, misalkan $x \in \mathbb{R}^n$. Karena $I - A^+A$ merupakan matriks proyeksi orthogonal pada $Ker(A)$, maka didapat $x = x_1 + x_2$ dengan $x_1 \in \mathrm{Ker(A)} = span(P)$ dan $x_2 \in span(P)^\perp = Ker(A)^\perp$. Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned} (I - A^+A)x &= (I - A^+A)(x_1 + x_2) \\ &= (I - A^+A)x_1 + (I - A^+A)x_2 \\ &= P(P'P)^{-1}P'x_1 + 0 \\ &= P(P'P)^{-1}P'x_1 + P(P'P)^{-1}P'x_2 \\ &= P(P'P)^{-1}P'(x_1 + x_2) \\ &= P(P'P)^{-1}P'x\,. \end{aligned}$$

Dengan demikian didapatkan $(I - A^+A)x = P(P'P)^{-1}P'x$ yang berarti $(I - A^+A) = P(P'P)^{-1}P'$ atau $A^+A = I - P(P'P)^{-1}P'$.

Selanjutnya, misalkan q_k adalah vektor kolom matriks Q dengan $k = 1,2,..,n$ dan $span(Q) = span\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Misalkan pula $y_1 \in span(Q)$ sehingga $y_1 = \{\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \cdots + \alpha_n q_n\} = Q\alpha$.

Karena $y_1 \in span(Q) = Ker(A')$ dan matriks $I - AA^+$ merupakan matriks proyeksi orthogonal pada $Ker(A')$, maka berdasarkan Teorema 2.7 diperoleh

$$(I - AA^+)y_1 = y_1 = Q\alpha. \quad (7)$$

Dari Persamaan (7) diperoleh $y_1 = Q\alpha$. Kemudian, kalikan sisi kiri kedua ruas dengan matriks Q' sehingga diperoleh

$$Q'y_1 = Q'Q\alpha \text{ atau } (Q'Q)^{-1}Q'y_1 = \alpha. \quad (8)$$

Selanjutnya, subtitusikan Persamaan (8) ke Persamaan (7) sehingga diperoleh

$$(I - AA^+)y_1 = y_1 = Q\alpha = Q(Q'Q)^{-1}Q'y_1.$$

Di sisi lain misalkan $y_2 \in span(Q)^\perp = \text{Ker}(A')^\perp$, maka $Q'y_2 = 0$. Karena $Q'y_2 = 0$, maka diperoleh $Q(Q'Q)^{-1}Q'y_2 = 0$ sehingga $(I - AA^+)y_2 = 0$. Selanjutnya, misalkan $y \in \mathbb{R}^n$. Karena $I - AA^+$ merupakan matriks proyeksi orthogonal pada $\text{Ker}(A')$, maka $y = y_1 + y_2$ dengan $y_1 \in \text{Ker}(A') = span(Q)$ dan $x_2 \in span(b)^\perp = \text{Ker}(A')^\perp$. Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}(I - AA^+)y &= (I - AA^+)(y_1 + y_2)\\ &= (I - AA^+)y_1 + (I - AA^+)y_2\\ &= Q(Q'Q)^{-1}Q'y_1 + 0\\ &= Q(Q'Q)^{-1}Q'y_1\\ &\quad + Q(Q'Q)^{-1}Q'y_2\\ &= Q(Q'Q)^{-1}Q'(y_1 + y_2)\\ &= Q(Q'Q)^{-1}Q'y.\end{aligned}$$

Karena $(I - AA^+)y = Q(Q'Q)^{-1}Q'y$, maka diperoleh $(I - AA^+) = Q(Q'Q)^{-1}Q'$ atau $AA^+ = I - Q(Q'Q)^{-1}Q'$. □

Selanjutnya, akan dikonstruksi invers Moore-Penrose dari perkalian matriks yang disajikan pada Lemma 3.2 berikut.

Lemma 3.2. [13]*Misalkan* $A, B, D, N \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *dengan* D, N *adalah dua matriks nonsingular. Jika* $B = DAN$, *maka* $A = D^{-1}BN^{-1}$ *dan* $A^+ = A^+ANB^+DAA^+$.

BUKTI. Karena D adalah matriks nonsingular dan karena $B = DAN$, maka diperoleh

$$D^{-1}B = D^{-1}DAN.$$

Selanjutnya, karena N adalah matriks nonsingular, maka didapat

$$\begin{aligned}D^{-1}BN^{-1} &= D^{-1}DANN^{-1}\\ &= A.\end{aligned}$$

Selanjutnya, misalkan $W = NB^+D$ dengan B^+ adalah invers Moore-Penrose dari B sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}AWA &= D^{-1}BN^{-1}\,NB^+DD^{-1}BN^{-1}\\ &= D^{-1}BB^+BN^{-1}\\ &= D^{-1}BN^{-1}\\ &= A.\end{aligned}$$

Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}A &= AWA\\ A^+A &= A^+AWA \text{ (kedua ruas dikalikan } A^+)\\ A^+AA^+ &= A^+AWAA^+ \text{(kedua ruas dikalikan } A^+).\end{aligned}$$

Karena $A^+AA^+ = A^+$ dan $W = NB^+D$, maka didapat $A^+ = A^+ANB^+DAA^+$. □

Berdasarkan Lemma 3.1 dan Lemma 3.2 dapat dikonstruksi invers Moore-Penrose dari perkalian matriks tersebut bila diketahui matriks $I - A^+A$ dan $I - AA^+$ berturut-turut merupakan matriks proyeksi orthogonal pada $Ker(A)$ dan

$Ker(A')$ yang ditunjukkan pada Teorema 3.3 berikut.

Teorema 3.3. [13] *Misalkan* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *dengan* $k = dim\ (Ker(A), k < n$. *Kemudian, misalkan* $P, Q \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ *yang secara berturut-turut adalah dua matriks yang kolom-kolomnya membangun* $Ker(A)$ *dan* $Ker(A')$. *Jika* $B, D, N \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *dengan* D, N *adalah dua matriks nonsingular dan* $B = DAN$, *maka* $A = D^{-1}BN^{-1}$ *dan* $A^+ = (I - P(P'P)^{-1}P')NB^+D\ (I - Q(Q'Q)^{-1}Q')$.

BUKTI. Karena $B = DAN$, maka berdasarkan Lemma 3.2 diperoleh $D^{-1}BN^{-1} = A$ dan invers Moore-Penrose dari matriks A tersebut dengan $A = D^{-1}BN^{-1}$ adalah $A^+ = A^+ANB^+DAA^+$. Selanjutnya, berdasarkan Lemma 3.1 yang menyatakan bahwa $A^+A = I - P(P'P)^{-1}P'$ dan $AA^+ = I - Q(Q'Q)^{-1}Q'$, maka diperoleh $A^+ = (I - P(P'P)^{-1}P')NB^+D(I - Q(Q'Q)^{-1}$. □

4. Kesimpulan Dan Saran

Sebuah matriks $J \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ merupakan matriks proyeksi orthogonal pada V jika hanya jika memenuhi kedua sifat berikut yaitu $J^2 = J$ dan $J' = J$. Selanjutnya, matriks $I - A^+A$ dan $I - AA^+$ berturut-turut merupakan matriks proyeksi orthogonal pada $Ker(A)$ dan $Ker(A')$. Vektor-vektor kolom dari matriks $P, Q \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ secara berturut-turut membentuk basis dari $Ker(A)$ dan $Ker(A')$ sehingga didapat $A^+A = I - P(P'P)^{-1}P'$ dan $AA^+ = I - Q(Q'Q)^{-1}Q'$. Dari sini didapatkan invers Moore-Penrose dari $A = D^{-1}BN^{-1}$ dengan matriks $A, B, D, N \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dan D, N merupakan matriks nonsingular yaitu $A^+ = (I - P(P'P)^{-1}P')NB^+D\ (I - Q(Q'Q)^{-1}Q')$.

5. Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] J. L. Goldberg, *Matrix Theory With Applications*. United State of America: McGraw-Hill College, 1991.

[2] A. Ben-Israel, "The Moore of the Moore-Penrose inverse," *Electronic Journal of Linear Algebra*, vol. 9, pp. 150–157, 2002, doi: 10.13001/1081-3810.1083.

[3] M. A. Rakha, "On the Moore-Penrose generalized inverse matrix," *Appl Math Comput*, vol. 158, no. 1, pp. 185–200, Oct. 2004, doi: 10.1016/j.amc.2003.09.004.

[4] C. R. Rao and S. K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*. New York: John Wiley & Son, 1971.

[5] T. Britz, "The inverse of a non-singular free matrix," *Linear Algebra Appl*, vol. 338, pp. 245–249, 2001.

[6] T. Britz, "The Moore-penrose inverse of a free matrix," *Electronic Journal of Linear Algebra*, vol. 16, pp. 208–215, 2007, doi: 10.13001/1081-3810.1196.

[7] J.-M. Miao, "General Expressions for the Moore-Penrose Inverse of a 2 x 2 Block

Matrix," *Linear Algebra Appl*, pp. 1–15, 1991.

[8] A. R. Manikandan and C. A. Kumar, "The Moore Penrose Inverse and Spectral Inverse of Fuzzy Matrices," 2021.

[9] S. Chountasis, V. N. Katsikis, and D. Pappas, "Applications of the Moore-Penrose inverse in digital image restoration," *Math Probl Eng*, vol. 2009, 2009, doi: 10.1155/2009/170724.

[10] H. Yanai, K. Takeuchi, and Y. Takane, *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*. New York: Springer, 2011.

[11] S. Srivastava and D. K. Gupta, "AN ITERATIVE METHOD FOR ORTHOGONAL PROJECTIONS OF GENERALIZED INVERSES," *Journal of applied mathematics & informatics*, vol. 32, no. 1_2, pp. 61–74, Jan. 2014, doi: 10.14317/jami.2014.061.

[12] J. M. Mwanzia, M. Kavila, and J. M. Khalagai, "Moore-Penrose inverse of linear operators in Hilbert space," *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, vol. 15, no. 2, pp. 5–13, Nov. 2022, doi: 10.5897/ajmcsr2022.0919.

[13] E. Bozzo, "The Moore-Penrose inverse of the normalized graph Laplacian," *Linear Algebra Appl*, vol. 439, no. 10, pp. 3038–3043, Nov. 2013, doi: 10.1016/j.laa.2013.08.039.

[14] S. Ling and C. Xing, *Coding Theory: A First Course*. New York: Cambridge University Press, 2004.

[15] H. Anton, *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga, 1987.

[16] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan*. Jakarta: Erlangga, 2004.

[17] S. Roman, *Advance Linear Algebra*, 2nd ed. New York: Springer, 2005.