



Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No. Especial, Diciembre, 2022, Ecuador (p. 290 -299). Edición Continua
<https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index>
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí

DOI: <https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4733>

IDENTIFICACIÓN DE REGIONES CONTENIENDO ÓRBITAS PERIÓDICAS PARA UNA ECUACIÓN MODIFICADA DE VAN DER POL

Ramón Hernan Veliz Bravo ^{1*} , Antonio Ramón Acosta Orellana ² , Luis Bladismir Ruiz Leal ³ .


¹Instituto de Posgrado Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador. Email: rveliz0822@utm.edu.ec

² Yachay Tech, 100119 Urcuquí, Ecuador. Email: aacosta@yachaytech.edu.ec

³Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador.
Email: luis.ruiz@utm.edu.ec

*Autor para correspondencia: rveliz0822@utm.edu.ec

Recibido: 01-06-2022 / Aceptado: 13-12-2022 / Publicación: 27-12-2022

Editor Académico: Carmen Judith Vanegas Espinoza .

RESUMEN

La ecuación clásica de Van der Pol data de los años 20 del siglo pasado. Desde ese entonces distintas modificaciones han sido consideradas y resaltan aquellas asociadas al comportamiento del ritmo cardíaco. La lista es extensa y para nuestro propósito resaltamos los trabajos realizados de [Grudziński y Jan J Żebrowski (2004)] y [Lopez-Chamorro et al. (2018)]. En este trabajo, concretamente, consideramos la siguiente modificación, que aparece en [Grudziński y Jan J Żebrowski (2004)]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha(x - \nu_1)(x - \nu_2) \frac{dx}{dt} + x(x+d)(x+e)/ed = 0, \quad d, e, \alpha > 0.$$

Aquí obtenemos condiciones sobre los parámetros que intervienen para construir regiones conteniendo órbitas periódicas y además se persigue que, por lo menos en algún sector, que estas regiones sean óptimas en el sentido del área encerrada. Nuestro trabajo, cuyas ideas siguen aquellas desarrolladas en [Acosta et al. (2022)], es netamente analítico y en este sentido es poco lo que se ha hecho. Los resultados que conocemos se basan en simulaciones numéricas, ver por ejemplo [Zduniak (2014)].

Palabras clave: Estabilidad, Órbitas periódicas, Osciladores, Sistemas no lineales, Van Der Pol.

IDENTIFICATION OF REGIONS CONTAINING PERIODIC ORBITS FOR AN EQUATION MODIFIED FROM VAN DER POL

ABSTRACT

The classical equation of Van der Pol dates from the 20s years of the last century. Since then different modifications have been considered and stand out those associated with the behavior of the heart rhythm. The list is extensive and for our purpose we highlight the work carried out by [Grudziński y Jan J Żebrowski (2004)] and [Lopez-Chamorro et al. (2018)]. In this work, specifically, we consider the following modification that appears in [Grudziński y Jan J Żebrowski (2004)].

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha (x - \nu_1) (x - \nu_2) \frac{dx}{dt} + x(x+d)(x+e)/ed = 0, \quad d, e, \alpha > 0.$$

Here we obtain conditions about the parameters that intervene to build regions containing periodic orbits and furthermore, it is pursued that, at least in some sector, these regions are optimal in the sense of the enclosed area. Our work, whose ideas follow those developed in [Acosta et al. (2022)], is clearly analytical and in this sense to the extent we know little about what has been done. The results we know are based on numerical simulations, see for example [Zduniak (2014)].

Keywords: Nonlinear Systems, Oscillators, Periodic Orbits, Stability, Van Der Pol.

IDENTIFICAÇÃO DE REGIÕES CONTENDO ÓRBITAS PERIÓDICAS PARA UMA EQUAÇÃO DE VADERPOL MODIFICADA

RESUMO

A clássica equação de Van der Pol remonta à década de 1920. Desde então, várias modificações foram consideradas e se destacam aqueles associados ao comportamento da frequência cardíaca. A lista é extensa e para nosso propósito destacamos o trabalho realizado por [Grudziński y Jan J Żebrowski (2004)] e [Lopez-Chamorro et al. (2018)]. Neste trabalho, especificamente, consideramos a seguinte modificação, que aparece em [Grudziński y Jan J Żebrowski (2004)]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha (x - \nu_1) (x - \nu_2) \frac{dx}{dt} + x(x+d)(x+e)/ed = 0, \quad d, e, \alpha > 0.$$

Aqui obtemos condições sobre os parâmetros que intervêm para construir regiões contendo órbitas e também persegue que, pelo menos em algum setor, essas regiões sejam ótimas no sentido da área cercada. Nosso trabalho, cujas ideias seguem as desenvolvidas em [Acosta et al. (2022)], é claramente analítico e nesse sentido até que ponto sabemos pouco sobre o que foi feito. Os resultados que conhecemos são baseados em simulações numéricas, veja por exemplo [Zduniak (2014)].

Palavras chave: Estabilidade, Órbitas Periódicas, Osciladores, Sistemas Não lineares, Van Der Pol.

Citación sugerida: Veliz, R., Acosta, A., Ruiz, Luis. (2022). IDENTIFICACIÓN DE REGIONES CONTENIENDO ÓRBITAS PERIÓDICAS PARA UNA ECUACIÓN MODIFICADA DE VAN DER POL. Revista Bases de la Ciencia, 7(No Especial), Diciembre, 290-299. DOI: <https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4733>



1. INTRODUCCIÓN

El trabajo realizado en los años 20 por el físico e ingeniero Holandes Balthasar Van Der Pol con sistemas que presentan oscilaciones periódicas, lo condujo a lo que se conoce actualmente como oscilador de Van Der Pol, el cual es un sistema amortiguado no lineal de segundo orden que tiene un ciclo limite, para comprender sus características ver [Strogatz (2018)], [Hale y Koçak (1991)] dicho oscilador se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} + \alpha (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0 \quad (1.1)$$

donde α es un parámetro escalar que sirve de control para la fuerza de amortiguamiento no lineal. Desde su aparición este sistema ha sido ampliamente estudiado, por ejemplo en [Sánchez (2014)] donde se estudia el comportamiento del sistema, su punto de equilibrio y estabilidad. Además, ha sido utilizado para modelar fenómenos en diversas ciencias, por ejemplo se ha utilizado para describir el potencial de acción de las neuronas, en la modelación del comportamiento de las placas tectónicas, y del comportamiento del corazón, cuyo primer modelo fue propuesto por Van Der Pol y Van Der Mark en [Pol y Mark (1928)].

Los estudios realizados a la ecuación (1.1) han aportado a la descripción de la dinámica de la ecuación, de la misma manera se han realizado modificaciones que se ajustan mejor a lo que corresponde a modelar la dinámica del corazón, ver [Lopez-Chamorro et al. (2018)], [Grudziński y Jan J Żebrowski (2004)], [J. J. Żebrowski et al. (2007)] donde se considera la ecuación:

$$\ddot{x} + \alpha (x - \nu_1) (x - \nu_2) \dot{x} + \frac{x(x+d)(x+e)}{ed} = 0, \quad (1.2)$$

siendo los parámetros escalares reales que satisfacen las siguientes condiciones: $\alpha > 0$, $0 < e < d$, $\nu_1 \nu_2 < 0$ y $-e < \nu_1 < 0$.

Este trabajo se enfoca, principalmente, en la identificación de regiones que encierran órbitas periódicas para la ecuación (1.2). Nuestra exposición, cuyas ideas siguen aquellas desarrolladas en [Acosta et al. (2022)], donde $\nu_1 = -\nu_2$, es netamente analítico y en este sentido es poco lo que se ha hecho. Así, los resultados que conocemos se basan en búsquedas numéricas a través de interpolaciones, ver por ejemplo [Zduniak (2014)] .

Debemos resaltar que el trabajo de [Acosta et al. (2022)] esta inspirado en ideas provenientes de [Yanqian (1986)] y [Hale y Koçak (1991)]. Así, siguiendo estas tres referencias convertimos la ecuación (1.2) en un sistema planar equivalente de ecuaciones de primer orden. Se construye una curva cerrada dependiendo de los parámetros asociados al modelo, la cual se obtendrá juntando trozos de órbitas procedentes de sistemas planares que resultan al desprestigiar los términos del sistema equivalente, trozos de nullclines del sistema equivalente y algunos segmentos de recta. Así la curva resultante determinará una región positivamente invariante conteniendo órbitas periódicas.

El trabajo esta organizado como sigue: En la sección 2 planteamos el problema y discutimos algunos aspectos importantes relacionados con el sistema planar asociado a la ecuación (1.2). La sección 3, está dedicada a presentar nuestro principal resultado. Consideramos trozos de curva que permiten armar la curva cerrada que constituirá la frontera de la región positivamente invariante que se busca. La sección cierra con la observación de que la inestabilidad del origen permite concluir la existencia de órbitas periódicas. Por último, en la sección 4 ofrecemos algunas observaciones y recomendaciones finales sobre otros aspectos importantes de la ecuación considerada aquí.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

A efectos del análisis geométrico que se realiza en este trabajo, convertimos la ecuación de Van Der Pol modificada (1.2) en un sistema planar equivalente de ecuaciones de primer orden. En efecto, al introducir las variables $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \frac{dx}{dt}$ la ecuación (1.2) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha(x_1 - \nu_1)(x_1 - \nu_2)x_2 - \frac{x_1(x_1 + d)(x_1 + e)}{ed}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Nuestro planteamiento es muy sencillo y consiste en la construcción de una región positivamente invariante, asociada al sistema (2.1), acotada por una curva cerrada que encierra al origen. Además, se quiere garantizar la existencia de órbitas periódicas en la región a ser construida.

2.1. Puntos de equilibrio

Se identifican tres puntos de equilibrio para el sistema (2.1) y estos son:

$$P_1(0, 0), \quad P_2(-e, 0), \quad P_3(-d, 0).$$

Ahora recordamos las condiciones sobre los cinco parámetros que aparecen en el sistema (2.1): $\alpha > 0$, $0 < e < d$, $\nu_1\nu_2 < 0$ y $-e < \nu_1 < 0$.

Para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (2.1) nos basamos en el estudio realizado en (9788429191295), notamos que su matriz Jacobiana J viene dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha(2x_1 - (\nu_1 + \nu_2))x_2 - 1 & -\alpha(x_1 - \nu_1)(x_1 - \nu_2) \\ -2\frac{(e+d)}{ed}x_1 - \frac{3}{ed}x_1^2 & \end{pmatrix}.$$

Primero consideramos $P_1(0, 0)$. Aquí $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha\nu_1\nu_2 \end{pmatrix}$ y los valores propios, de esta matriz, los cuales son $\lambda = \frac{-2\nu_1\nu_2 \pm \sqrt{\alpha^2\nu_1^2\nu_2^2 - 4}}{2}$ poseen parte real positiva. Así $P_1(0, 0)$ es inestable.

Para $P_2(-e, 0)$, se tiene que $J(-e, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{e}{d} & -\alpha(e + \nu_1)(e + \nu_2) \end{pmatrix}$. En este caso los valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha(e + \nu_1)(e + \nu_2) - \sqrt{\alpha^2(e + \nu_1)^2(e + \nu_2)^2 + 4(1 - \frac{e}{d})}}{2}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{-\alpha(e + \nu_1)(e + \nu_2) + \sqrt{\alpha^2(e + \nu_1)^2(e + \nu_2)^2 + 4(2 - \frac{e}{d})}}{2}.$$

Se tiene que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$. Por lo tanto $P_2(-e, 0)$ es inestable y en particular es un punto de ensilladura. Finalmente, para $P_3(-d, 0)$ se tiene que $J(-d, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{d}{e} & -\alpha(d + \nu_1)(d + \nu_2) \end{pmatrix}$. Aquí los valores propios son

$$\lambda = \frac{-\alpha(d + \nu_1)(d + \nu_2) \pm \sqrt{\alpha^2(d + \nu_1)^2(d + \nu_2)^2 + 4(1 - \frac{d}{e})}}{2}$$

y ambos tienen parte real negativa. Por lo tanto $P_3(-d, 0)$ es estable.

2.2. Nullclines

Cuando se dibuja el retrato de fase para un sistema planar, esto es visualización de las órbitas, las nullclines pueden ser una guía importante. Estas son definidas como las curvas en las que $\dot{x}_1 = 0$ o $\dot{x}_2 = 0$, segmentos verticales u horizontales. En el caso del sistema (2.1) se tienen las ecuaciones $x_2 = 0$ (segmentos verticales) y

$$-\alpha(x_1 - \nu_1)(x_1 - \nu_2)x_2 - \frac{x_1(x_1 + d)(x_1 + e)}{ed} = 0 \text{ (segmentos horizontales)}. \quad (2.2)$$

Al despejar x_2 en la ecuación (2.2) se obtiene

$$x_2 = -\frac{x_1(x_1 + d)(x_1 + e)}{\alpha ed(x_1 - \nu_1)(x_1 - \nu_2)} \quad (2.3)$$

y se observa que el gráfico correspondiente a (2.2) tiene tres componentes. Además, hay tres asíntotas a la gráfica de (2.2), dos verticales cuyas ecuaciones son $x_1 = \nu_1$, $x_1 = \nu_2$ y una oblicua con ecuación

$$x_1 + \alpha ed x_2 + e + d + \nu_1 + \nu_2 = 0, \quad (2.4)$$

ver figura 1.

3. DESARROLLO

3.1. CONSTRUCCIÓN DE UNA REGIÓN POSITIVAMENTE INVARIANTE

Nuestro objetivo, en esta sección, es construir una región positivamente invariante limitada por una curva cerrada \mathcal{K} que encerrará el origen. La curva \mathcal{K} se obtendrá juntando varios arcos de curva que provienen de algunos sistemas que resultan cuando se desprecian algunos términos del sistema (2.1). También entrará en juego, como un primer arco de curva en \mathcal{K} , las nullclines correspondientes a la ecuación (2.2).

Comenzamos ahora a construir la curva \mathcal{K} . El primer arco de curva está contenido en la nullcline correspondiente a la ecuación (2.2). Este comienza en el punto de equilibrio $P_2(-e, 0)$ y termina en

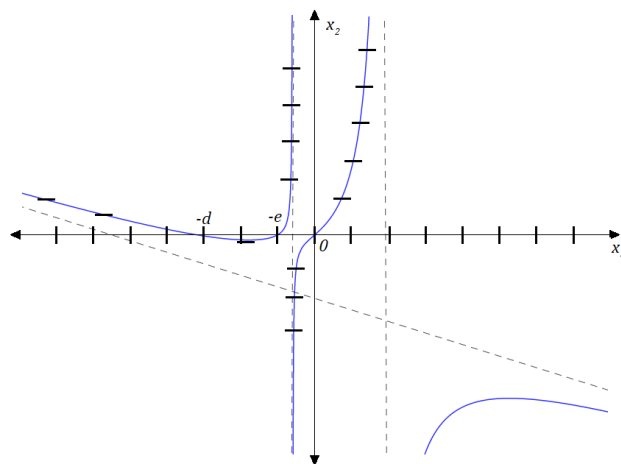


Figura 1. Nullclines verticales y horizontales

cierto punto $A(x_{10}, x_{20})$, con $-e < x_{10} < \nu_1$. Para obtener con precisión las coordenadas de A estudiamos los puntos de tangencia de una órbita del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \alpha\nu_1\nu_2x_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

con la componente de la nullcline que se está considerando. Al derivar implícitamente la ecuación (2.2) se tiene como resultado

$$-\alpha [2x_1\dot{x}_1x_2 + x_1^2\dot{x}_2] + \alpha(\nu_1 + \nu_2)[\dot{x}_1x_2 + \dot{x}_2x_1] - \alpha\nu_1\nu_2\dot{x}_2 - \dot{x}_1 - \frac{2(e+d)}{ed}x_1\dot{x}_1 - \frac{3}{ed}x_1^2\dot{x}_1 = 0 \tag{3.2}$$

y usando (3.1) en (3.2) se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} -2\alpha x_1x_2^2 - \alpha x_1^2(-x_1 - \alpha\nu_1\nu_2x_2) + \alpha(\nu_1 + \nu_2)[x_2^2 + (-x_1 - \alpha\nu_1\nu_2x_2)x_1] \\ - \alpha\nu_1\nu_2(-x_1 - \alpha\nu_1\nu_2x_2) - x_2 - \frac{2(e+d)}{ed}x_1x_2 - \frac{3}{ed}x_1^2x_2 = 0. \end{aligned}$$

Ahora, por medio de (2.3), podemos escribir la expresión anterior en términos de x_1 y resulta

$$\begin{aligned} \frac{(x_1+d)(x_1+e)}{ed} \left(-\frac{2}{\alpha ed} \frac{x_1^2(x_1+d)(x_1+e)}{(x_1-\nu_1)^2(x_1-\nu_2)^2} - \frac{\alpha x_1^2\nu_1\nu_2}{(x_1-\nu_1)(x_1-\nu_2)} \right. \\ \left. + \frac{(\nu_1+\nu_2)}{\alpha ed} \frac{x_1(x_1+d)(x_1+e)}{(x_1-\nu_1)^2(x_1-\nu_2)^2} + \frac{\alpha(\nu_1+\nu_2)\nu_1\nu_2}{(x_1-\nu_1)(x_1-\nu_2)}x_1 \right. \\ \left. - \frac{\alpha\nu_1^2\nu_2^2}{(x_1-\nu_1)(x_1-\nu_2)} + \frac{1}{\alpha(x_1-\nu_1)(x_1-\nu_2)} \right. \\ \left. + \frac{2(e+d)}{\alpha ed(x_1-\nu_1)(x_1-\nu_2)}x_1 + \frac{3}{\alpha ed(x_1-\nu_1)(x_1-\nu_2)}x_1^2 \right) \\ + \alpha x_1^2 - \alpha(\nu_1 + \nu_2)x_1 + \alpha\nu_1\nu_2 = 0 \end{aligned}$$

Un estudio de la ecuación anterior indica que el primer miembro de esta es positivo cuando se reemplaza $x_1 = -e$ y cuando x_1 tiende a ν_1 se observa que el primer miembro toma valores negativos. Por lo tanto, la ecuación anterior posee soluciones en el intervalo $(-e, \nu_1)$. De estas la más próxima a ν_1 es nuestra elección para la primera coordenada del punto A , es decir x_{10} . Ahora, x_{20} se obtiene al reemplazar x_{10} en (2.3). Luego, el arco de curva en la nullcline correspondiendo a la ecuación (2.2) conectando los puntos P_2 y A , denotado mediante P_2A , es la primera pieza en \mathcal{K} . Se tiene que P_2A es cruzado de izquierda a derecha por las órbitas de la ecuación (2.1) (segmentos horizontales).

Para el segundo arco de curva de \mathcal{K} consideramos la órbita del sistema (3.1) que arranca en A , $t \geq 0$, y seguimos su trayectoria hasta intersectar la recta de ecuación

$$-x_1 + \alpha\nu_1\nu_2x_2 = 0. \tag{3.3}$$

Esta intersección produce un punto $B(x_{11}, x_{21})$. Nuestra segunda pieza de la curva \mathcal{K} , la cual denotamos mediante AB , es la porción de la órbita de (3.1) que conecta los puntos A y B . Ahora, debido a que

$$-x_1 + \alpha\nu_1\nu_2x_2 > -\alpha(x_1 - \nu_1)(x_1 - \nu_2)x_2 - \frac{x_1(x_1+d)(x_1+e)}{ed},$$

resulta para los puntos de AB , a excepción cuando $x_1 = 0$, que la curva AB es atravesada de izquierda a derecha por las órbitas del sistema (2.1).

Para la tercera pieza de nuestra curva \mathcal{K} , se presentan dos casos: $x_{11} \geq \nu_2$ y $x_{11} < \nu_2$.

En este momento prestamos atención al primer caso, el otro lo discutiremos posteriormente. Aquí consideramos la órbita del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}\quad (3.4)$$

que arranca en B y seguimos su trayectoria hasta intersectar el eje x_1 , obteniéndose así un punto $C(x_{12}, x_{22})$ en el cual $x_{22} = 0$. La tercera pieza que conforma la curva \mathcal{K} , denotada por BC , está compuesta por la porción de la órbita de (3.4), lo cual es un arco de circunferencia, que conecta los puntos B y C . Se tiene, debido a la desigualdad

$$-\alpha(x_1 - \nu_1)(x_1 - \nu_2)x_2 - \frac{x_1(x_1+d)(x_1+e)}{ed} < -x_1$$

que el arco de circunferencia BC es atravesado de derecha a izquierda por las órbitas del sistema (2.1). Para obtener la cuarta pieza de \mathcal{K} se considera la intersección de la recta de ecuación $x_1 = x_{12}$ con la recta de ecuación (2.4), la cual recordamos es la asíntota oblicua a la nullcline del sistema (2.1) correspondiente a la ecuación (2.2). Esto produce un punto $D(x_{13}, x_{23})$ y el segmento de recta vertical CD , siendo $x_{13} = x_{12}$, constituye la cuarta pieza de \mathcal{K} . Aquí las órbitas del sistema (2.1) cruzan el segmento CD de derecha a izquierda.

Para obtener la quinta pieza de \mathcal{K} consideramos nuevamente el sistema (3.1) y la recta de ecuación (3.3). Comenzando con el punto D seguimos la órbita de (3.1) hasta que esta intersecta la recta de ecuación (3.3) en un punto $E(x_{14}, x_{24})$. La porción de la órbita de (3.1) conectando los puntos D y E , denotada por DE , es la quinta pieza de \mathcal{K} . Esta es cruzada de derecha a izquierda por las órbitas de la ecuación (2.1) debido a que

$$-\alpha(x_1 - \nu_1)(x_1 - \nu_2)x_2 - \frac{x_1(x_1+d)(x_1+e)}{ed} > -x_1 + \alpha\nu_1\nu_2x_2.$$

Para lo que resta en la construcción de la curva \mathcal{K} consideramos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_1(x_1+d)(x_1+e)}{ed}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Asociado a (3.5) resaltamos algunos hechos importantes. Primero que todo, los sistemas (2.1) y (3.5) comparten los mismos puntos de equilibrio, es decir, $P_1(0, 0)$, $P_2(-e, 0)$ y $P_3(-d, 0)$. Más aún, para (3.5) se puede probar que P_2 es un punto de ensilladura, mientras que P_1 y P_3 son centros, es decir, los valores propios de las matrices jacobianas correspondientes tienen parte real igual a cero. También se tiene que el sistema (3.5) es conservativo y

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + x_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{d} \right) x_1 + \frac{1}{4ed}x_1^2 \right)$$

es una cantidad conservativa. Así, cuando se considera el sistema (3.5) con una condición inicial (x_1^0, x_2^0) , se obtiene una órbita cuya gráfica se encuentra asociada a la ecuación

$$x_2^2 = 2E(x_1^0, x_2^0) - x_1^2 \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{d} \right) x_1 + \frac{1}{2ed}x_1^2 \right).$$

En particular, estamos interesados cuando $x_1^0 = -e$ y $x_2^0 = 0$, esto es el punto de ensilladura P_2 . En este escenario de la ecuación anterior se obtiene

$$x_2^2 = \frac{1}{3}e^2 \left(1 - \frac{e}{2d} \right) - x_1^2 \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{d} \right) x_1 + \frac{1}{2ed}x_1^2 \right).\quad (3.6)$$

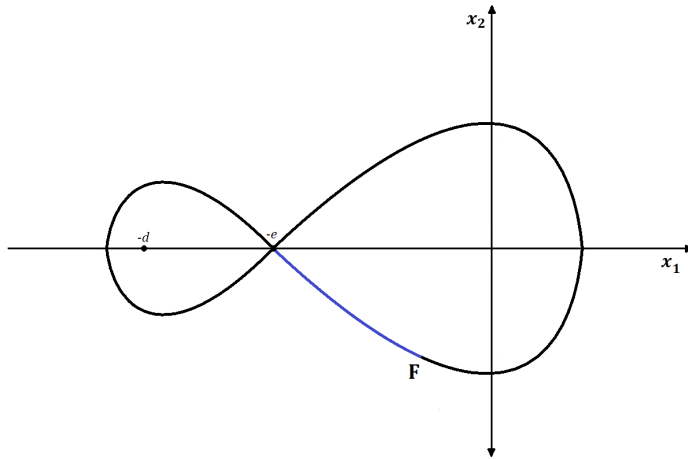


Figura 2. Gráfico correspondiente a (13)

La grafica asociada a (3.6) contiene dos lazos, uno encierra al origen y el otro al punto $(-d, 0)$ como se observa en la figura 2.

Continuando con la construcción de los arcos de curva restantes, escogemos los parámetros α, ν_1, ν_2, e y d con el objetivo que el punto E se encuentre en el interior de la región aislada por el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación (3.6), bajo la condición $-e < x_1 < \nu_1$. Así, las coordenadas del punto E están bajo las siguientes dos condiciones

$$-e < x_{14} < \nu_1$$

y

$$-\sqrt{\frac{1}{3}e^2 \left(1 - \frac{e}{2d}\right) - x_{14}^2 \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{d}\right) x_{14} + \frac{1}{2ed} x_{14}^2\right)} \leq x_{24} < 0 \tag{3.7}$$

La sexta pieza de la curva \mathcal{K} es el segmento de línea vertical EF , siendo $F(x_{15}, x_{25})$ con $x_{15} = x_{14}$, el punto sobre la gráfica de la ecuación (3.6) para el cual

$$x_{25} = -\sqrt{\frac{1}{3}e^2 \left(1 - \frac{e}{2d}\right) - x_{14}^2 \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{d}\right) x_{14} + \frac{1}{2ed} x_{14}^2\right)}.$$

Esta pieza de \mathcal{K} es cruzada por las órbitas de la ecuación (2.1) de derecha a izquierda.

Ahora, completamos la última pieza de \mathcal{K} . Esta la constituye el arco de curva que comienza en F y termina en $P_2(-e, 0)$, recorrido en sentido horario, correspondiente a los puntos que satisfacen la ecuación (3.6). Los puntos que conforman la última pieza de \mathcal{K} , denotados FP_2 , son cruzados por las órbitas de la ecuación (3.6) de derecha a izquierda debido a que

$$-\alpha (x_1 - \nu_1) (x_1 - \nu_2) x_2 - \frac{x_1 (x_1 + d) (x_1 + e)}{ed} > -\frac{x_1 (x_1 + d) (x_1 + e)}{ed}.$$

Con la construcción del arco de curva FP_2 , finalmente se obtiene la curva cerrada. Además, se sigue de la discusión previa, por la forma en que las órbitas de (2.1) penetran los distintos arcos de curva, que la región encerrada es positivamente invariante. Una representación grafica mostrando las siete piezas de \mathcal{K} se ve en la figura 3.

Concluimos ahora la discusión sobre la existencia de una región positivamente invariante para el caso $x_{11} < \nu_2$. En este escenario nuestra curva cerrada \mathcal{K} estará constituida por ocho piezas. Aquí insertamos el segmento de recta horizontal con extremos los puntos $B(x_{11}, x_{21})$ y $B_1(\nu, x_{21})$. Se observa que las órbitas del sistema (2.1) cruzan el segmento BB_1 de arriba hacia abajo. El resto de la discusión continua como antes y ahora nuestra curva cerrada es $\mathcal{K} = P_2ABB_1CDEFP_2$.

Respecto a la existencia de órbitas periódicas podemos afirmar ahora, debido a que el origen es inestable con ambos valores propios de la correspondiente matriz jacobiana siendo con parte real positiva, que la región encerrada por \mathcal{K} contiene órbitas periódicas.

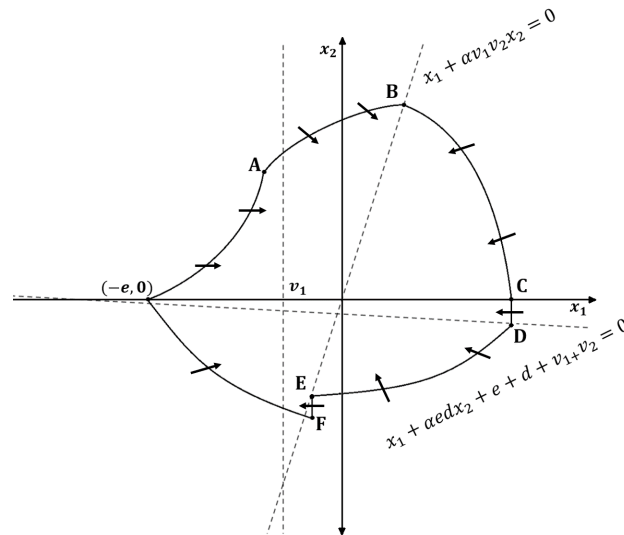


Figura 3. Región positivamente invariante

4. CONCLUSIÓN

Hemos desarrollado, siguiendo ideas expuestas en [Acosta et al. (2022)], una estrategia que nos permite construir una región que es positivamente invariante para el sistema (2.1). La región, la cual contiene órbitas periódicas encerrando al origen, está limitada por una curva a trozos que es cerrada y posee siete u ocho piezas, dependiendo de configuraciones de los parámetros que intervienen. A diferencia del trabajo [Acosta et al. (2022)] en donde la ecuación modificada de Van der Pol considerada tiene un término de amortiguamiento no lineal simétrico y aparecen cuatro parámetros, en nuestro caso el término de amortiguamiento no lineal es asimétrico y esto conduce a la aparición de un parámetro extra.

Agradecimiento 1. *Agradecemos a la Secretaría de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación por el auspicio brindado a la presente investigación.*

5. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERESES DE LOS AUTORES

Los autores expresan no tener conflicto de intereses

6. REFERENCIAS

- Acosta, A., Gallo, R., García, P., y Peluffo-Ordóñez, D. (2022). Positive invariant regions for a modified Van Der Pol equation modeling heart action.
- Grudziński, K., y Żebrowski, J. J. [Jan J]. (2004). [Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 336(1-2), 153-162. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.01.020>
- Hale, J. K., y Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4426-4>
- Lopez-Chamorro, F. M., Arciniegas-Mejia, A. F., Imbajoa-Ruiz, D. E., Rosero-Montalvo, P. D., García, P., Castro-Ospina, A. E., Acosta, A., y Peluffo-Ordóñez, D. H. (2018). Cardiac Pulse Modeling Using a Modified van der Pol Oscillator and Genetic Algorithms. En *Bioinformatics and Biomedical Engineering* (pp. 96-106). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-78723-7_8
- Pol, B. V. D., y Mark, J. V. D. (1928). LXXII. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 6(38), 763-775. <https://doi.org/10.1080/14786441108564652>
- Ross, S. L. (2021). *Ecuaciones diferenciales*. Reverte. https://www.ebook.de/de/product/40287787/shepley_1_ross_ecuaciones_diferenciales.html
- Sánchez, B. B. (2014). *Análisis, Construcción, simulación y sincronización de circuitos electrónicos prototipos de caos* (Tesis de maestría). Universidad Politécnica de Madrid.
- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9780429492563>
- Yanqian. (1986). *Theory of limit cycles*. American Mathematical Society.
- Zduniak, B. (2014). [Numerical Analysis of the Coupled Modified van der Pol Equations in a Model of Heart Action]. *BIOMATH*, 3(1). <https://doi.org/10.11145/j.biomath.2013.12.281>
- Żebrowski, J. J. [J. J.], Grudziński, K., Buchner, T., Kuklik, P., Gac, J., Gielerek, G., Sanders, P., y Baranowski, R. (2007). Nonlinear oscillator model reproducing various phenomena in the dynamics of the conduction system of the heart. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 17(1), 015121. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1063/1.2405128>

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	Contribución
Ramón Veliz	Búsqueda bibliográfica, diseño del artículo y redacción.
Antonio Acosta	Concepción, revisión, análisis y criterio.
Luis Ruiz	Metodología, Revisión y búsqueda bibliográfica.