REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO NO ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS SOB A ÓTICA VANHIELIANA

André Pereira da Costa

Marcelo Câmara dos Santos

V6 - Nº 2 - julho / dezembro - 2017

SUBMISSÃO: 25 de outubro de 2017

ACEITAÇÃO: 27 de dezembro de 2017

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO NO ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS SOB A ÓTICA VANHIELIANA[1]

The development of geometric thinking in the study of notable quadrilatters based on van-hiele's theory

André Pereira da Costa
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
andre.pcosta@outlook.com

Marcelo Câmara dos Santos
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

RESUMO

O estudo objetiva identificar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos de uma turma do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública de Recife-PE, antes e após a aplicação de uma sequência didática que explorou os quadriláteros notáveis. Como instrumento de coleta de dados, utilizamos um teste, constituído por cinco questões sobre o mencionado conceito geométrico. Para tanto, consideramos como referencial teórico a teoria de Van-Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Os dados produzidos mostram que antes da aplicação da sequência didática todos os estudantes estavam no primeiro nível de Van-Hiele, no qual ocorre o reconhecimento das figuras geométricas apenas pela sua aparência física. Contudo, após a aplicação, encontramos um pouco menos de um terço dos estudantes atuando já no segundo nível vanhieliano. O aumento da diversidade nas respostas dos alunos ocorreu devido a uma ampliação do seu repertório de figuras por meio da sequência didática.

Palavras-chave: Pensamento Geométrico. Quadriláteros. Van-Hiele.

ABSTRACT

The study aims to identify the levels of development of geometric thinking of the students in a class in the 6th grade of elementary school to a public school in Recife-PE, before and after the application of a didactic sequence that explored the notable quadrilaterals. As a data collection instrument, we use test, formed of five questions about the aforementioned geometric concept. Therefore, we consider as a theoretical reference the Van-Hiele theory to the development of geometric thinking. The data produced show that before the application of the didactic sequence all students worked on the first level of Van-Hiele, in which occurs the recognition of geometric figures only by their physical appearance. However, after application, we found just under a third of the students already working at the second level of Van-Hiele. The increase in diversity in the students' responses occurred due to an expansion of their repertoire of figures through the didactic sequence.

Key words: Geometric Thinking. Quadrilaterals. Van-Hiele

1 Trata-se de um recorte da pesquisa de mestrado do primeiro autor (COSTA, 2016), cujo objetivo foi analisar os efeitos de uma sequência didática na construção do conceito de quadriláteros notáveis, utilizando como recurso didático o software de Geometria Dinâmica GeoGebra. A pesquisa foi desenvolvida em uma turma do sexto ano do ensino fundamental em uma escola da rede pública do município de Recife – Pernambuco, Brasil. Tal dissertação consistiu ainda numa replicação de pesquisa, na qual foram utilizados os instrumentos de coleta de dados elaborados e aplicados por Câmara dos Santos (1992; 2001), em uma pesquisa semelhante desenvolvida também em uma escola pública de Recife.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, podemos observar o grande progresso com as pesquisas no âmbito da Educação Matemática no Brasil, em especial, no campo do ensino da Geometria (GRAVINA, 2001; KOPKE, 2006; LEIVAS, 2009; FRADE, 2012; AMÂNCIO, 2013; CICARINI, 2015; entre outros). Tal progresso tem proporcionado algumas melhorias no contexto da sala de aula de Matemática (CASTRO FILHO; CÂMARA DOS SANTOS; BITTAR, 2008), auxiliando o professor em seu trabalho pedagógico, na organização de situações didáticas que favoreçam a aprendizagem dos estudantes.

Apesar de todos esses avanços, estudos (SENA; DORNELES, 2013; CALDATTO; PAVANELLO, 2015; NASSER, 2017) apontam que a Geometria continua sendo explorada de forma tímida na educação básica, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, o que tem gerado uma grande inquietação em educadores matemáticos, favorecendo, assim, para um amplo debate acerca do assunto em diversas regiões do país.

Os alunos do ensino básico têm apresentado baixos desempenhos em Geometria nas avaliações em larga escala, em âmbitos estadual (PERNAMBUCO, 2015), nacional (BRASIL, 2015) e internacional (OECD, 2015). Somando a isso, pesquisas educacionais (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2016c; 2017; COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2016; 2017a; 2017b) mostram que pessoas de diferentes níveis escolares apresentam dificuldades conceituais de aprendizagem em relação aos quadriláteros notáveis, o que reforça a necessidade de se desenvolver o estudo sobre intervenções pedagógicas que superem essas dificuldades.

É importante destacar que além do modo como certo conteúdo é abordado em sala de aula, ou o fato de não ser abordado, existem outros fatores que contribuem para que o aluno apresente dificuldades conceituais de aprendizagem. Algumas das dificuldades podem surgir em decorrência da natureza dos objetos que estão em evidência, de entraves específicos que, em geral, não são analisados em profundidade. Nessa direção, Baltar Bellemain (2004) argumenta que, ao refletir sobre as prováveis explicações para erros e entraves conceituais de aprendizagem, faz-se necessário discutir acerca do que vem da complexidade própria daquele objeto de saber e que pode ser reforçado ou desestabilizado pela maneira como é trabalhado em sala de aula e o que por sua natureza não é complicado, mas que ou está ausente ou é trabalhado de maneira aligeirada ou equivocada.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

Diante destas circunstâncias, buscamos identificar os níveis de pensamento geométrico em que se encontravam os alunos do 6º ano do ensino fundamental, antes e após a aplicação da sequência didática, por meio de um teste de sondagem relacionado aos quadriláteros notáveis; e também verificar os avanços de níveis de pensamento geométrico dos alunos (do primeiro nível para o segundo nível segundo Van-Hiele).

Nesse sentido, consideramos como referencial teórico principal a teoria de Van-Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, desenvolvida em 1957 pelos educadores matemáticos holandeses Pierre Marie Van-Hiele e Dina Van-Hiele Geodolf.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A teoria dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico foi desenvolvida pelos educadores matemáticos holandeses Pierre Marie Van-Hiele e Dina Van-Hiele Geodolf, como resultados de suas pesquisas realizadas em nível de doutorado na Real Universidad de Utrecht (Holanda). Tendo por base a Epistemologia Genética de Jean Piaget, esses pesquisadores investigaram sobre os reais fatores geradores de dificuldades apresentadas por alunos da educação básica em relação à Geometria.

Dina produziu um experimento didático em sua tese, constituído por um conjunto de atividades, por meio do qual os estudantes avançaram em sua aprendizagem geométrica. Já com um foco cognitivo, Pierre analisou o comportamento das estruturas do pensamento geométrico desses alunos, quando eles tiveram contato com as atividades elaboradas por Dina.

Van-Hiele (1957) verificou a existência de diferentes níveis de pensamento geométrico em relação à aprendizagem de conceitos geométricos. Logo, à medida que o aluno aprende Geometria, ele avança entre os níveis, passando de um nível "menos elaborado" para um nível "mais desenvolvido", iniciando pelo reconhecimento das figuras geométricas por meio de seu aspecto global, concluindo com a compreensão de diferentes sistemas axiomáticos. Dessa forma, há uma hierarquia entre os níveis de Van-Hiele. Costa e Câmara dos Santos (2015b, p. 3-4) argumentam que:

> [...] diferentemente de Piaget, que estabeleceu intervalos de idades mais ou menos próximas para estágios de progresso da inteligência, Van-Hiele observou que os níveis de progresso do

> pensamento geométrico são influenciados pela educação e incentivo norteados pela escola e não pela maturação biológica e pela idade do sujeito.

O principal aspecto que diferencia a teoria piagetiana da teoria vahieliana é que enquanto a primeira é uma teoria do desenvolvimento cognitivo, do desenvolvimento da inteligência, a segunda é uma teoria da aprendizagem, especificamente da aprendizagem geométrica. Piaget (1999) preocupou-se em entender os mecanismos mentais que o sujeito emprega para compreender a realidade, investigando também o processo de construção do conhecimento. Dessa forma, ele identificou quatro elementos que influenciam no desenvolvimento da inteligência: maturidade biológica, experiência com a realidade física, interações e equilibração, sendo o último o mais determinante para a mudança de estágios de desenvolvimento cognitivo. Van-Hiele (1957) estudou as estruturas do pensamento geométrico do indivíduo, investigando o que ocorre com essas estruturas durante a aprendizagem da Geometria pelo estudante. Assim, percebeu que a instrução e o estímulo recebidos são determinantes para que o indivíduo alcance certo nível de desenvolvimento do seu pensamento geométrico.

> [...] as experiências de ensino, as metodologias, as intervenções pedagógicas, os recursos didáticos empregados, os instrumentos avaliativos adotados e as temáticas trabalhadas em sala de aula, constituem aspectos fundamentais dos processos de ensino e de aprendizagem. Além disso, o docente deve considerar o nível de pensamento do estudante no processo de organização, planejamento e de construção desses aspectos (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015b, p.4).

Nesse sentido, o modelo teórico vanhieliano serve tanto como um guia à aprendizagem em Geometria, como um apoio ao professor durante a avaliação das aprendizagens dos estudantes em relação aos conceitos geométricos. Na elaboração da teoria, Van-Hiele considerou que o ensino da Geometria objetiva criar condições para que o aluno construa uma teia de conexões, impulsionando a expressão de pensamentos, na qual essas relações apresentam uma organização lógica e dedutiva (CÂMARA DOS SANTOS, 2001). Além disso, essa teia de conexões deve ser uma produção específica do aluno e o papel do professor é de mediar essa construção.

O autor ainda discute algumas razões para que essa teia de relações não seja oferecida pronta aos estudantes, mas que seja construída por eles. Em primeiro lugar, essa teia pronta a ser empregada não permitiria ao estudante entender essas conexões, pois elas não têm relações com suas experiências pessoais. Desse modo, rapidamente o estudante esqueceria os conceitos ensinados. Em segundo lugar, a teia não apresentaria qualquer articulação com a realidade próxima do estudante, tendo em vista que ela seria produzida em pequenas porções e o estudante não teria a capacidade de articular o que aprendeu recentemente com as conexões da teia que lhe foi apresentada. Por fim, muito embora o estudante obtenha êxito ao utilizar essa teia acabada, ele não será capaz de elaborar uma teia com um arcabouço relacional dedutivo em um campo diferente, isto é, em momentos diferentes das situações que geraram o aprendizado. Sobre a obtenção dessa teia, Costa e Câmara dos Santos (2015b, p. 4) indagam que:

> [...] a construção dessa teia relacional dedutiva demanda um extenso caminho em que se podem verificar distintos níveis de pensamento geométrico. Além disso, todos esses níveis possuem especificidades, nos quais os objetos matemáticos admitem também posições diferentes.

A teoria vanhieliana é constituída por um total de cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Assim, à medida que os alunos estudam os conteúdos escolares vinculados à Geometria, eles progridem entre os níveis por meio de uma sequência hierárquica. Cada nível possui um vocabulário geométrico próprio, logo, os conceitos apresentam status diferentes. O Quadro 1, elaborado por Ontário (2006), traduzido e adaptado por Costa (2016), apresenta um resumo dos níveis vanhielianos.

Quadro 01 - Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele

DESCRIÇÃO	COMPORTAMENTOS OBSERVÁVEIS	EXEMPLO DE AFIRMAÇÃO
Primeiro nível Percepção e classificação de figuras geométricas pela aparência.	- usa vocabulário geométrico; - reconhece, nomeia, compara e reproduz figuras geométricas de acordo com sua aparência global; - apresenta dificuldades em representar mentalmente uma figura geométrica (as figuras são observadas, mas não conceituadas; cada uma é percebida globalmente, como uma entidade); - as classes ou grupos de figuras geométricas são iguais.	"É um quadrado, pode ser visto claramente... seus lados são todos iguais e isso é certo".
Segundo nível A partir da análise das figuras geométricas pode-se descobrir as propriedades.	- reconhece algumas das propriedades comuns e distintas das figuras geométricas; - nomeia propriedades de figuras geométricas, mas não em subclasses dentro de uma família de polígonos; - generaliza as propriedades de uma figura geométrica para todas as figuras geométricas da mesma família; - classifica as figuras geométricas com base em suas propriedades.	"Esta figura é um quadrado porque apresenta quatro vértices, quatro ângulos retos, quatro lados iguais e dois pares de lados paralelos"

Terceiro nível Estabelecimento de ligações entre as figuras geométricas e entre as propriedades de uma dada figura geométrica.	- deduz algumas das propriedades de uma figura geométrica; - reconhece e estabelece subclasses de figuras geométricas; - elabora e verifica certas hipóteses; - compreende e utiliza as relações de inclusão e exclusão; - desenvolve listas de propriedades que são necessárias e suficientes para descrever uma figura geométrica qualquer; - formula argumentos matemáticos claros e suficientes usando o vocabulário causal (p. ex., por que, porque, assim) e consequência lógica (p. ex. se... então... desde que... então...).	“É um quadrado, mas também um losango, porque a propriedade que descreve o losango é, todos os lados são congruentes entre si. Então eu acho que o quadrado é uma espécie de losango”.
Quarto nível Estudo das definições, das provas, dos teoremas, axiomas e postulados.	- apresenta evidências, não se limitando a memorização; - prova um enunciado de diferentes maneiras; - inclui subclasses de figuras geométricas e suas relações.	“Um paralelogramo com dois lados adjacentes congruentes deve ser um losango”.
Quinto nível Estudo da Geometria Abstrata.	- utiliza sistemas dedutivos abstratos; - trabalha com Geometria Não-Euclidiana; - faz ligações entre os conceitos e desenvolve, às vezes, novos postulados.	

Fonte: Costa (2016, p. 71).

Com base na teoria de Van-Hiele (1957), cada nível é marcado por características próprias, que se diferenciam em comparação aos outros níveis. Como exemplo disso, podemos mencionar o vocabulário empregado pelos alunos e o status ocupado pelos objetos do saber geométrico. Logo, para obter sucesso nas intervenções pedagógicas, o professor deve articular o ensino de Geometria com o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos seus alunos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O estudo apresenta uma abordagem quanti-qualitativa pois “o qualitativo e o quantitativo se complementam e podem ser utilizados em conjunto nas pesquisas, possibilitando melhor contribuição para compreender os fenômenos educacionais investigados” (SOUZA, KERBAUY, 2017, p.01).

Participaram dessa pesquisa 30 alunos do 6º ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública do Recife-PE, sendo 15 meninos e 15 meninas, com idades entre 10 e 11 anos. Destacamos que na análise dos dados, a identidade dos participantes foi preservada, logo, cada estudante recebeu um código, formado por uma letra e um número com dois dígitos: A01, A02, A03,..., A30.

O instrumento de coleta de dados utilizado nesse estudo foi um teste (CÂMARA DOS SANTOS, 1992; 2001) formado por cinco quesitos, que exploram a construção e a classificação dos quadriláteros. Tal teste foi aplicado em dois momentos.

No primeiro momento, que chamamos de "pré-sequência", o teste foi realizado 60 dias antes da aplicação de uma sequência didática, sobre o mencionado conceito, com esses mesmos estudantes. No segundo, o período "pós-sequência", o teste ocorreu 15 dias após a aplicação dessa sequência. A análise dos dados produzidos durante a etapa referente ao desenvolvimento da sequência didática pode ser encontrada em Costa e Câmara dos Santos (2016a; 2017).

Nessa direção, o teste buscou identificar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico em que se encontram os participantes do estudo, antes e após a aplicação da sequência didática.

A primeira questão do teste era composta por duas fases, como verificamos nas figuras 1 e 2. Na primeira fase, o aluno era convidado a produzir um retângulo no espaço chamado "Sua Figura" e, após, em "Figura do seu colega", deveria criar uma outra figura de quatro lados, que não fosse um retângulo. A Figura 1 apresenta esse primeiro período.

Figura 1 – Extrato da primeira fase da primeira questão do teste

Q01) Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega:

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:

Fonte: Câmara dos Santos (2009)

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

Na segunda fase desse item, o estudante deveria justificar suas produções, logo, no espaço "Sua figura é um retângulo", mencionar o motivo da primeira figura ser um retângulo, e em "A de seu colega não é um retângulo", dizer por que a segunda não era um retângulo. A Figura 2 ilustra essa etapa.

Figura 2 – Extrato da segunda fase da primeira questão do teste

Justifique por quê:

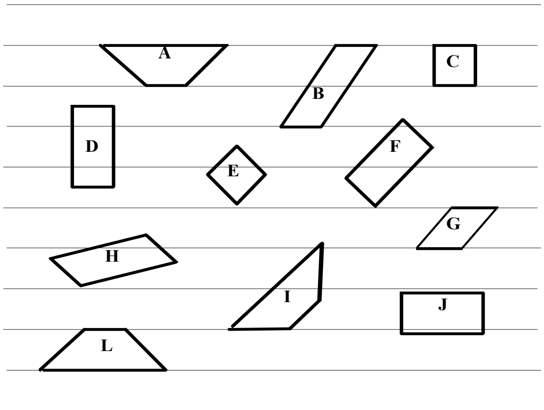
Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
________________	________________
________________	________________
________________	________________
________________	________________
________________	________________
________________	________________
________________	________________

Fonte: Câmara dos Santos (2009)

Na análise das justificativas dos estudantes referentes a essas produções, categorizamos as respostas em três classes: a) *pragmática*, quando o estudante menciona a aparência física ou formato da figura em sua resposta; b) *aplicativa*, na qual, a definição usual da figura é utilizada como justificativa; c) *relacional*, quando o aluno cita as propriedades das figuras produzidas. Essa categorização foi elaborada por Câmara dos Santos (1992; 2001)

A segunda questão do teste explorou a classificação de onze quadriláteros notáveis em grupos de família: retângulos, trapézios, quadriláteros, quadrados, paralelogramos e losangos. Assim, os alunos foram solicitados a organizar as figuras disponibilizadas, como ilustrado na Figura 3, isto é, eles deveriam identificar a quais famílias poderia pertencer cada figura, conforme indicado na Figura 4.

Figura 3 – Quadriláteros utilizados na segunda questão no teste



Fonte: Câmara dos Santos (2009, p.207).

Ao realizar essa classificação, os alunos deveriam registrar na segunda coluna do quadro, referente ao item "Figuras", a letra correspondente à figura geométrica traçada no papel com linhas.

Figura 4 – Quadro utilizado na classificação das figuras em famílias

Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	
Trapézios:	
Quadriláteros:	
Quadrados:	
Paralelogramos:	
Losangos:	

Fonte: Câmara dos Santos (2009).

Nesse item, definimos os seguintes critérios de análise dos dados:

- Classificação dos quadrados – Estarão nesse grupo as figuras C e E;
- Classificação dos retângulos – Figuras C, D, E, F e J;
- Classificação dos losangos – Figuras C e E[1];
- Classificação dos paralelogramos – Figuras B, C, D, E, F, G, H e J;

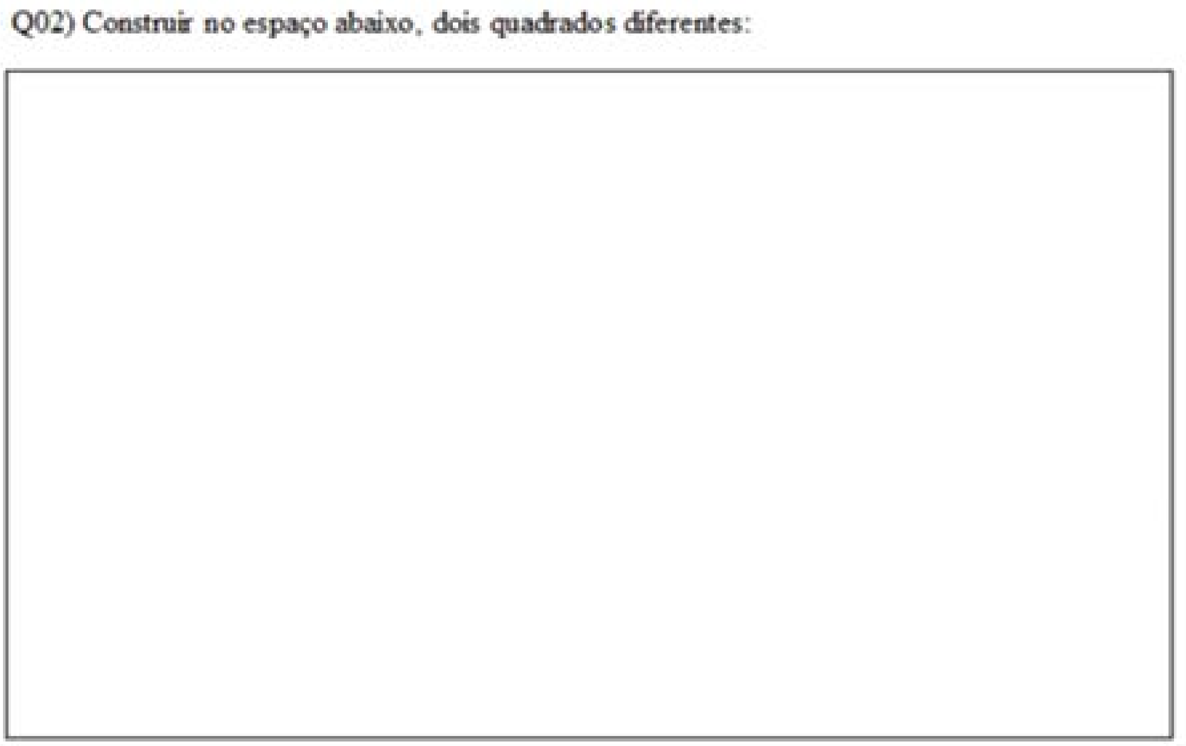
1 Neste estudo, foram traçados apenas losangos quadrados devido à dificuldade dos estudantes do ensino básico em reconhecerem-nos como losangos. Geralmente, essas figuras são classificadas apenas como quadrados.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

- Classificação dos trapézios – Figuras A, I e L[2];

Na terceira questão do teste, os estudantes foram convidados a produzirem dois quadrados diferentes, conforme a Figura 5.

Figura 5 – Extrato da segunda questão do teste


Q02) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:

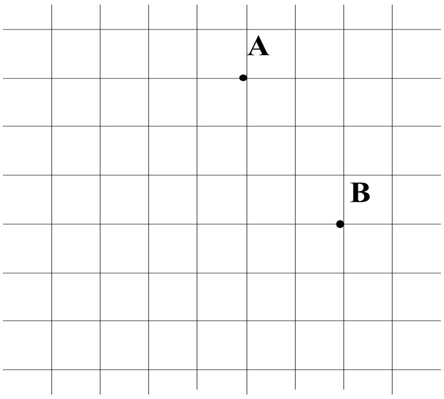
Fonte: Câmara dos Santos (2009)

O objetivo da questão foi verificar se os critérios utilizados pelos alunos na diferenciação dos dois quadrados faziam menção aos atributos dos níveis do pensamento geométrico, propostos por Van-Hiele (1957): uso do aspecto global (primeiro nível); referência às propriedades (segundo nível); inclusão de classe (terceiro nível).

Na quarta questão do teste, os estudantes foram orientados a construírem um losango *ABCD* (como ilustrado pela Figura 6) a partir de dois nós dados em uma malha quadriculada, que representam dois dos seus vértices.

2 Conforme Câmara dos Santos (1992), a seleção dos trapézios foi aleatória, logo, não há uma justificativa pela escolha dos trapézios isósceles.

Figura 6 – Vértices A e B marcados na malha quadriculada



Fonte: Câmara dos Santos (2009, p.208).

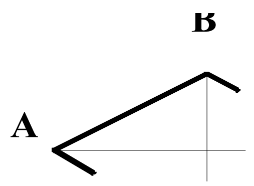
A finalidade desse item era identificar as estratégias empregas pelos alunos na resolução do problema, isto é, se na produção do losango eles faziam referência apenas à aparência global da figura ou se aplicavam as propriedades, nesse caso, fazendo uso das diagonais do losango.

Nesse sentido, elaboramos três categorias para as produções: *perceptiva* – quando o estudante faz referência apenas à aparência global do losango na construção; *reflexiva* – quando o aluno aplica as propriedades do losango na produção, isto é, das suas diagonais; *divergente* – quando o estudante produz outro tipo de quadrilátero notável, que diverge do losango.

A quinta questão do teste apresentava um losango *ABCD*, que teve uma parte apagada (Figura 7), e os estudantes eram questionados se era possível reconstruir esse quadrilátero notável (ou não), sendo que eles deveriam explicitar suas respostas, ou seja, deveriam justificar se era possível (ou não) refazer o losango.

Nessa questão, o objetivo era analisar as estratégias empregadas pelos discentes na reconstrução da figura, isto é, se eles faziam referência ao aspecto global da figura ou se utilizavam suas propriedades.

Figura 7– Losango ABCD com um pedaço apagado



Fonte: Câmara dos Santos (2009, p.209).

Na análise das justificativas, consideramos três categorias: a) *referência ao aspecto global* – quando o estudante faz uso da aparência física do losango na justificativa; b) *uso implícito das diagonais do losango* – quando o aluno menciona as diagonais do losango de forma implícita em sua explicação; c) *apelo à ideia de simetria* – quando, na justificativa, o discente menciona o conceito de simetria.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

No primeiro item pediu-se aos estudantes que construíssem um retângulo e, em seguida, uma figura diferente de um retângulo (em um primeiro momento). Os alunos deveriam explicitar suas produções por escrito (em um segundo momento). Aqui estávamos interessados em analisar as estratégias utilizadas por eles para realizar a diferenciação entre suas construções. Na Tabela 1 são apresentados os quadriláteros notáveis produzidos pelos alunos como "não retângulos", antes e após a aplicação da sequência didática[3].

Tabela 1 – Figuras geométricas consideradas como "não retângulo" por quantidade de aluno

FIGURAS	ANTES DA SEQUÊNCIA	DEPOIS DA SEQUÊNCIA
Trapézio	01	08
Paralelogramo	01	02
Losango	04	04
Quadrado	24	16

Fonte: Costa (2016).

Pela tabela, em relação ao teste aplicado antes da sequência didática, podemos constatar que, da mesma forma como na pesquisa de Câmara dos Santos (1992; 2001), o quadrilátero notável mais escolhido como um "não retângulo" pela maior

3 É importante destacar na Tabela está se denominando as figuras de acordo com os desenhos produzidos pelos alunos e que se caracterizavam efetivamente como não-retangulares – ou seja, paralelogramos não-retangulares e losangos não-quadrados.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

parte dos estudantes foi o quadrado, sendo construído por 24 participantes no nosso estudo, ou seja, quatro quintos do total não reconheceram o quadrado como um retângulo.

Esse fenômeno pode ter ocorrido, provavelmente, pelo fato de o quadrado e o retângulo (padrão) apresentarem diferenças em suas aparências físicas, característica essa típica do primeiro nível de Van-Hiele. Após a aplicação da sequência didática, esse índice caiu para 16 estudantes, ou seja, menos de três quintos do total de participantes, o que parece representar um avanço no pensamento geométrico em relação ao momento anterior. Em Costa e Câmara dos Santos (2016a; 2017) há indicação de como foi feita a intervenção didática, assim, é possível saber que o aumento da diversidade nas respostas dos alunos ocorreu graças a uma ampliação do seu repertório de figuras por meio da sequência didática.

Em seguida, o quadrilátero notável mais frequente como um "não retângulo", ocupando o segundo lugar, foi o losango. Isso foi observado em quatro alunos, tanto antes como depois da aplicação da sequência didática. Todavia, em Câmara dos Santos (1992; 2001), o losango só apareceu após a sequência. Nesse caso, a opção pelo losango parece ser uma tentativa desses alunos buscarem características próprias da figura, como mecanismo para distinguir esses dois quadriláteros notáveis.

Em terceiro lugar, o trapézio foi considerado como um não retângulo por um estudante no teste aplicado antes da sequência, e por oito alunos no período "pós-sequência". Novamente, parece que os estudantes procuram por características intrínsecas ao quadrilátero notável, bem como de suas propriedades como uma forma de promover a distinção. Essa é uma tendência própria do segundo nível de Van-Hiele, pois é marcado pelo reconhecimento dessas figuras geométricas como detentoras de propriedades. Esse aumento na porcentagem de indicação seria decorrente de aumento de repertório, promovido pela intervenção, conforme sinalizam Costa e Câmara dos Santos (2016a; 2017). Por fim, em quarto lugar, o paralelogramo foi escolhido na fase "pré-sequência" por um aluno, e na "pós-sequência" por dois discentes.

Nesse primeiro momento do item analisado, ao realizamos uma comparação entre os resultados produzidos antes e depois da aplicação da sequência didática, constatamos uma relevante melhoria do desempenho por parte dos estudantes, a partir de uma mudança de nível no modelo de Van-Hiele.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

Conforme mencionado no tópico referente a metodologia, na análise das justificativas dos estudantes referentes às suas produções, categorizamos as respostas em três classes: *pragmática*, *aplicativa* e *relacional.* A Tabela 2 apresenta os resultados.

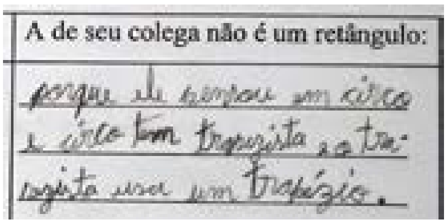
Tabela 2 – Categorização das respostas referentes à segunda construção

CLASSES	ANTES DA SEQUÊNCIA	DEPOIS DA SEQUÊNCIA
Pragmática	05	-
Aplicativa	23	23
Relacional	02	07

Fonte: Costa (2016).

Evidenciamos pela Tabela 2 que antes da aplicação da sequência didática havia cinco alunos na classe pragmática, 23 (quase quatro quintos) na aplicativa, e dois na relacional. Após a aplicação, encontramos novamente 23 alunos trabalhando na classe aplicativa, e sete na relacional. Além disso, não identificamos alunos situados na classe pragmática. Algumas ilustrações dessas classes estão apresentadas nas Figuras 8, 9 e 10.

Figura 8 – Justificativa do aluno A06 sobre a segunda figura na classe pragmática (apenas pré-teste)


A de seu colega não é um retângulo:
porque ele lembrou um circo e circo tem trapezista e o trapezista usa um trapézio.

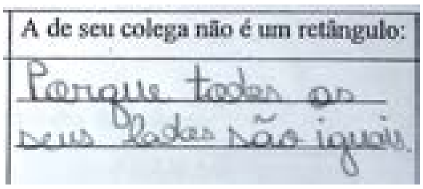
Aluno A06 (pré-teste)

Fonte: Costa (2016)

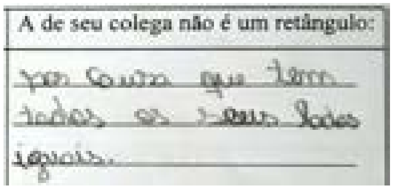
Apesar de o estudante A06 ter produzido um trapézio com um "não-retângulo", em sua justificativa, demonstrada na figura acima (Figura 8), ele faz referência a um trapézio de circo, mencionando, nesse caso, a aparência desse instrumento como meio de diferenciação. Então, no item estudado da fase "pré-sequência", tal aluno atuou no primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele.

O aluno A03 construiu um quadrado como um "não-retângulo", e sua justificativa apresentada pela Figura 9a, podemos verificar que ele argumentou que o quadrado não é um retângulo, pois possui todos os lados iguais. Aqui é evidente que esse aluno faz uso de parte da definição usual de quadrado como mecanismo de distinção entre suas figuras produzidas, isto é, ele considerou que o quadrado é um quadrilátero que possui todos os lados e ângulos internos iguais. Tal fenômeno também ocorreu no caso do aluno A19, depois da aplicação da sequência didática (Figura 9b). Diante disso, esses alunos ainda não alcançaram o segundo nível vanhieliano nesse item investigado.

Figuras 9 (a) e (b) – Justificativas dos alunos A03 e A19 referentes à segunda figura na classe aplicativa (pré-teste e pós-teste)


A de seu colega não é um retângulo:
Porque todos os
seus lados não iguais.

(a) Aluno A03 (pré-teste)

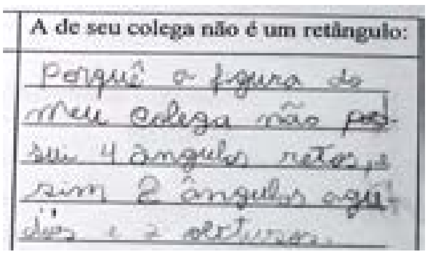

A de seu colega não é um retângulo:
por causa que tem
todos os seus lados
iguais.

(b) Aluno A19 (pós-teste)

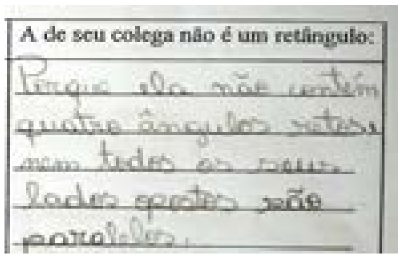
Fonte: Costa (2016).

O aluno A16 construiu um losango como um "não retângulo" antes da aplicação da sequência didática, e em sua resposta (Figura 10a), explicou que sua figura não é um retângulo, pois não possui quatro ângulos retos, mas sim, dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos. Notamos aqui que esse aluno faz referência a uma propriedade de alguns tipos de losangos, logo, há outros tipos de losangos que não apresentam essa propriedade. O quadrado, por exemplo, que é um tipo especial de losango, apresenta todos os ângulos internos retos, sendo também um tipo especial de retângulo. Diante disso, apesar de A16 ter mencionado as propriedades de alguns tipos de losango nesse item, ele ainda não alcançou o segundo nível de Van-Hiele, atuando na transição entre os níveis iniciais vanhielianos.

Figuras 10 (a) e (b) – Justificativas dos alunos A16 e A22 acerca da segunda figura na classe relacional (pré-teste e pós-teste)


A de seu colega não é um retângulo:
Porquê a figura do
meu colega não pos-
sui 4 ângulos retos, e
sim 2 ângulos agu-
dos e 2 obtusos.

(a) Aluno A16 (pré-teste)


A de seu colega não é um retângulo:
Porque ela não contém
quatro ângulos retos,
nem todos os seus
lados opostos são
paralelos.

(b) Aluno A22 (pós-teste)

Fonte: Costa (2016).

No caso do segundo aluno, no momento "pós-sequência", A22 produziu um trapézio isósceles, explicitando, como pode ser observado na Figura 10b, que esse

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

quadrilátero notável diverge do retângulo por não possuir quatro ângulos retos e ainda porque nem todos os seus lados opostos são paralelos. Matematicamente, essas propriedades são válidas para esse tipo de trapézio. Assim, verificamos que A22 atingiu o segundo nível de Van-Hiele, para o item analisado.

Esses dados também mostram que os alunos avançaram em seus pensamentos geométricos por meio da sequência didática, porque há uma considerável redução de alunos trabalhando na esfera pragmática (que apresenta características do primeiro nível de Van-Hiele), uma estabilidade no índice da esfera aplicativa e um crescimento na esfera relacional (que apresenta evidências do segundo nível vanhieliano). Nesse sentido, há estudantes que alcançaram o segundo nível de Van-Hiele, e outros estudantes que avançaram no próprio primeiro nível, ficando bem próximos de atingir o nível seguinte. Em relação a esses últimos alunos, que evoluíram dentro do primeiro nível, as suas produções parecem mostrar que eles passaram de um "subnível menos elaborado" para um "subnível mais elaborado" desse nível de pensamento geométrico. Portanto, é possível pensar sobre a existência de subníveis no primeiro nível de Van-Hiele.

Em relação à pesquisa de Câmara dos Santos (1992; 2001), observamos algumas diferenças referentes aos nossos dados. Por exemplo, esse pesquisador não identificou nenhum estudante atuando no nível relacional durante o período "pré-sequência". Enquanto que no "pós-sequência", ele não encontrou nenhum estudante no nível pragmático. Em nosso estudo, observamos alunos trabalhando nesse mesmo nível apenas na segunda produção. Além disso, da mesma forma como no estudo desse pesquisador, identificamos alunos na transição entre os dois níveis de pensamento geométrico investigados.

Tanto antes como depois da aplicação da sequência didática, os estudantes construíram quadrados, losangos, paralelogramos e trapézios e os consideraram como "não retângulos", fazendo referência à aparência dessas figuras, bem como as suas propriedades. No momento "pós-sequência", houve uma redução de número de alunos utilizando o aspecto global nas explicações, e um aumento da quantidade de alunos aplicando as propriedades. Assim, fica evidente que os alunos avançaram entre os níveis iniciais de pensamento geométrico.

No segundo item foram apresentados aos estudantes onze quadriláteros notáveis de diferentes formas e em diversas posições. A atividade consistiu em classificar essas figuras em diferentes famílias de quadriláteros, como está ilustrado na Figura 3.

Os alunos foram orientados a organizarem as figuras a partir das seguintes categorias: retângulos, trapézios, quadriláteros, quadrados, paralelogramos e losangos. Nesse item, buscamos verificar se os alunos conseguiriam considerar as figuras geométricas a partir de grupos de família, durante a categorização.

No caso do reconhecimento das figuras retangulares, realizando uma comparação entre os dois momentos de aplicação do teste de sondagem, observamos um crescimento no índice, isto é, antes do desenvolvimento da sequência didática (26 participantes) houve mais estudantes reconhecendo o retângulo do que no período após a sequência (29 alunos), o que nos dá indício de que houve um avanço no pensamento geométrico dos estudantes.

Os paralelogramos oblíquos também foram considerados como retângulos, por dois alunos na fase "pré-sequência" e por um estudante na "pós-sequência". Tal fato pode ocorrer, porque o paralelogramo e o retângulo apresentam aparências físicas em comum, além de possuírem propriedades comuns. No caso do losango, ele foi considerado como retângulo por um participante antes da aplicação da sequência, sendo que após a sequência, houve um crescimento desse índice, passando para seis discentes da turma investigada. Esse crescimento também pode representar um avanço no pensamento geométrico dos estudantes.

O quadrado foi reconhecido como retângulo no período "pré-sequência" por apenas um estudante. No "pós-sequência", esse índice apresentou um crescimento, alcançando sete participantes. Aqui também há evidências de avanços no pensamento geométrico desses estudantes, pois foram capazes de realizar a inclusão de classe entre o quadrado e o retângulo. Tal resultado diverge do estudo de Câmara dos Santos (1992; 2001), em que nenhum aluno considerou o quadrado como retângulo antes e depois da aplicação da sequência didática. Além disso, tanto na fase "pré-sequência" como na "pós-sequência", nenhum aluno reconheceu os trapézios como retângulos.

No que se refere à classificação no grupo dos trapézios, observamos que 27 alunos participantes conseguiram reconhecer os trapézios em diferentes posições no momento "pré-sequência". No "pós-sequência" esse índice subiu para 29 discentes. Tal crescimento nesse índice pode ser um indicativo de que os estudantes avançaram

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

em seu pensamento geométrico, pois os alunos foram capazes de reconhecer essa figura em sua representação geométrica. Os paralelogramos, em diferentes posições, também foram identificados como trapézios, sendo observado por um aluno no "pré-sequência" e por dois no "pós-sequência". Esse fenômeno parece ter ocorrido pelo fato de, para os estudantes, esses dois tipos de quadriláteros notáveis possuírem aparentemente lados "tortos", ou seja, consideraram a aparência física das figuras.

Em relação à categorização das figuras geométricas na família dos quadriláteros, notamos que a maioria dos estudantes conseguiu reconhecer as onze figuras como quadriláteros, tanto no "pré-sequência" (22 alunos) em média 75% como no "pós-sequência" (24 estudantes). Nesse sentido, fica evidente que há um crescimento do número de alunos que realizou tal classificação, o que pode representar um avanço em seu pensamento geométrico.

Observamos que os paralelogramos foram identificados como quadriláteros por 21 estudantes no "pré-sequência", sendo que no "pós-sequência", esse número subiu para 23. Os trapézios foram reconhecidos como quadriláteros por 20 participantes no "pré-sequência" e por 21 no "pós-sequência". Os quadrados (em forma prototípica) foram considerados por 24 alunos no "pré-sequência" e por 27 no "pós-sequência". O losango (em posição prototípica – referente à figura E) foi identificado por 24 discentes no "pré-sequência" e por 26 no "pós-sequência". Os retângulos foram reconhecidos por 24 alunos no "pré-sequência" e por 25 no "pós-sequência". Esses dados mostram que houve crescimento dos índices para todas as figuras fornecidas classificadas como quadriláteros, o que parece fornecer evidências avanços no pensamento geométrico dos estudantes, pelo fato da maioria dos alunos conseguir incluir as diferentes figuras na classe dos quadriláteros.

Em seguida, ocorreu a classificação dos onze quadriláteros na família dos quadrados. Foi possível observamos que o quadrado em posição prototípica foi considerado como quadrado por 28 integrantes da turma no "pré-sequência" e por 29 "pós-sequência". O losango em posição prototípica foi reconhecido como quadrado por 20 estudantes no "pré-sequência" e por 21 no "pós-sequência". Aqui, tanto no caso do reconhecimento do quadrado como do losango, observamos crescimentos dos índices, o que pode evidenciar que os alunos avançaram em seu pensamento geométrico, pois, por exemplo, no caso do losango, ou esses alunos estabeleceram a inclusão de classe (do losango com o quadrado) ou eles reconhecem o quadrado em posição não padrão (o que indica uma autonomia em relação as figuras em posição prototípica). Além disso, o paralelogramo em posição similar ao losango foi identificado por um participante tanto no "pré-sequência" como no "pós-sequência".

Dando continuidade, a turma categorizou as figuras geométricas na classe dos paralelogramos. Verificamos que os paralelogramos foram reconhecidos por 22 alunos no "pré-sequência" e por 25 no "pós-sequência". O losango foi considerado como paralelogramo por seis participantes no "pré-sequência" e por cinco no "pós-sequência". O quadrado em posição prototípica foi identificado como paralelogramo por seis estudantes no "pré-sequência" e no "pós-sequência". Os retângulos foram reconhecidos no "pré-sequência" e no "pós-sequência" por sete discentes. Tais dados parecem confirmar que houve um avanço no pensamento geométrico desses estudantes, pois, por exemplo, em relação ao paralelogramo, mais estudantes foram capazes de reconhecê-lo por meio de sua representação geométrica.

Além disso, os trapézios foram identificados como paralelogramos por dois membros da turma no "pré-sequência" e por três no "pós-sequência". Esse resultado ocorre, pois o trapézio e o paralelogramo apresentam lados "tortos", o que pode levar os estudantes a considerar o trapézio como um paralelogramo.

Por fim, os estudantes classificaram as figuras geométricas no grupo dos losangos. O losango (na posição prototípica) foi identificado por 20 integrantes da turma no "pré-sequência" e por 24 no "pós-sequência". Ou seja, no "pós-sequência" houve mais alunos capazes de reconhecer os losangos a partir de sua representação geométrica. O quadrado na posição canônica (figura C) foi reconhecido como losango por quatro alunos no "pré-sequência" e por oito no "pós-sequência". Nesse caso, ou esses estudantes articularam as propriedades do quadrado com as do losango, ou reconheceram o apenas o quadrado "inclinado" (Figura E).

Câmara dos Santos (1992; 2001) verificou em sua pesquisa que 3% dos estudantes reconheceram o quadrado como sendo um losango no "pré-sequência", sendo que no "pós-sequência" 33% dos alunos conseguiram realizar essa identificação. Em ambos os casos, os estudantes parecem demostrar um importante avanço em seu pensamento geométrico, tendo em vista que, em geral, na sala de aula de Matemática, o losango é apresentado quase sempre com seus lados oblíquos à folha de papel. Tal aspecto pode dificultar o reconhecimento do quadrado como losango por parte dos estudantes.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

Os retângulos não quadrados foram considerados no grupo losango por um aluno no "pré-sequência" e por seis estudantes no "pós-sequência". Tal fato é um erro conceitual, que merece ser investigado de forma mais refinada em estudos futuros.

Os paralelogramos com ângulos internos oblíquos (figuras B e H) foram reconhecidos como losangos por quatro alunos no "pré-sequência" e por cinco no "pós-sequência". Esse fenômeno também foi observado por Câmara dos Santos (2001) tanto no "pré-sequência" como no "pós-sequência". No "pré-sequência", o pesquisador verificou 25% dos estudantes considerando os paralelogramos (não losangos) como sendo losangos, todavia, no "pós-sequência" esse índice caiu para 8%. Em ambos os casos, parece que os estudantes apresentam uma compreensão de losangos como um tipo de retângulo "torto". Além disso, os trapézios não foram considerados losangos tanto no "pré-sequência" como no "pós-sequência".

É importante destacar que um terço dos estudantes, isto é, 10 participantes, não demonstraram nesse item que avançaram em seu pensamento geométrico, pois apresentaram a mesma resposta nos dois testes, como é o caso, por exemplo, do Aluno A02.

Além disso, observamos que tanto no "pré-sequência" como no "pós-sequência", A02 reconheceu os retângulos (figuras D, F e J), os trapézios (figuras A, I, L) e os quadriláteros (todas as figuras). O estudante considerou as figuras C e E na classe dos quadrados. Ele ainda identificou a figura E como sendo um losango. Também, reconheceu os paralelogramos (figuras B, G e H) nesse grupo. Nesse item analisado, não é possível afirmar se o estudante avançou em seu pensamento geométrico, tendo em vista que apresentou a mesma produção para os dois testes.

No terceiro item, os estudantes foram orientados a produzirem dois quadrados diferentes. O objetivo com essa questão foi identificar os critérios utilizados pelos alunos na diferenciação entre as figuras.

Nessa questão, os estudantes não apresentam grandes dificuldades em reconhecer um quadrado, seja pela sua aparência física, seja pelas suas propriedades. Na Tabela 3 apresentamos os quadriláteros notáveis considerados pelos estudantes para a segunda figura, nos dois testes.

Tabela 3 – Quadriláteros notáveis escolhidos para a segunda figura pelos estudantes no pré-teste e no pós-teste

FIGURAS	ANTES DA SEQUÊNCIA	DEPOIS DA SEQUÊNCIA
Quadrado	18	16
Losango quadrado	09	14
Retângulo	02	-
Paralelogramo	01	-

Fonte: Costa (2016).

Pela Tabela 3, verificamos que no "pré-sequência" a maioria dos estudantes pesquisados, 18 do total, diferenciou as duas produções apenas pelo tamanho das figuras, ou seja, produziram dois quadrados de tamanhos diferentes. Todavia, no "pós-sequência" esse índice reduziu para 16 alunos. As evidências parecem mostrar que houve um avanço no pensamento geométrico desses estudantes, pelo fato da redução desse índice (menos alunos considerando apenas o tamanho da figura como diferença).

Esses primeiros resultados do item são diferentes da pesquisa de Câmara dos Santos (1992; 2001), que observou que a porcentagem de estudantes que realizaram a diferenciação entre as duas figuras somente pelo seu tamanho foi diminuída de 48% (no "pré-sequência") para 31% ("pós-sequência").

O losango quadrado foi reconhecido como um quadrado por nove estudantes no "pré-sequência", e por 14 discentes no "pós-sequência". Aqui esses alunos mobilizaram as propriedades dessas figuras na construção, e ainda foram capazes de realizar a inclusão de classe entre esses dois quadriláteros notáveis. Esses dados parecem mostrar que houve avanço no pensamento geométrico dos estudantes, pois é evidente o crescimento do número de alunos que diferenciaram as duas figuras (quadrado e losango) pela sua posição na folha de papel, evidenciando uma relevante autonomia em relação às figuras prototípicas.

Em comparação com o estudo de Câmara dos Santos (1992; 2001), notamos algumas diferenças. Em nosso estudo, no "pré-sequência" havia um em cada três estudantes diferenciando as duas construções pela posição na folha de papel, enquanto que em Câmara dos Santos havia um em cada cinco alunos. Todavia, nos dois estudos, foi notado que no "pós-sequência" aproximadamente a metade dos participantes foi capaz de realizar essa diferenciação.

No "pré-sequência", o retângulo (não quadrado) foi escolhido como sendo um quadrado por dois participantes do estudo e o paralelogramo (com ângulos internos oblíquos) por apenas um aluno. Porém, no "pós-sequência" nenhum estudante apresentou tais escolhas. Tal fenômeno parece demostrar um avanço no pensamento geométrico desses estudantes, pelo fato de que esses alunos parecem ter percebido, por exemplo, que o retângulo tem somente os quatro ângulos internos de medidas congruentes, e o quadrado além dos ângulos internos congruentes, também apresenta os lados de medidas congruentes (assim, poderá concluir que todo quadrado é retângulo, mas o inverso não ocorre).

No pré-teste, os alunos escolheram quadrados, losangos, retângulos e o paralelogramo como segunda figura no item, fazendo referência ao aspecto global das figuras, e também, de suas propriedades.

No "pós-sequência" ficou evidente o crescimento do número de estudantes mobilizando as propriedades do losango e do quadrado na construção, realizando a inclusão de classe entre essas figuras. Desse modo, há indícios de que eles progrediram em seu pensamento geométrico. É importante destacar que não verificamos estudantes escolhendo trapézios como segunda figura tanto no "pré-sequência" como no "pós-sequência".

No quarto item os estudantes foram orientados a construírem um losango *ABCD* (como ilustrado pela Figura 6) a partir de dois nós dados em uma malha quadriculada, que representam dois dos seus vértices. Como dito anteriormente, as produções dos estudantes foram classificadas com base em três categorias: *perceptiva, reflexiva* e *divergente.*

Na Tabela 4, podemos encontrar a categorização das produções dos estudantes para o item analisado. Embora o item tenha disponibilizado uma malha, a maioria dos estudantes não conseguiu produzir adequadamente o losango no "pré-sequência".

Tabela 4 - Categorização das construções dos estudantes em relação à produção do losango por meio de dois pontos dados

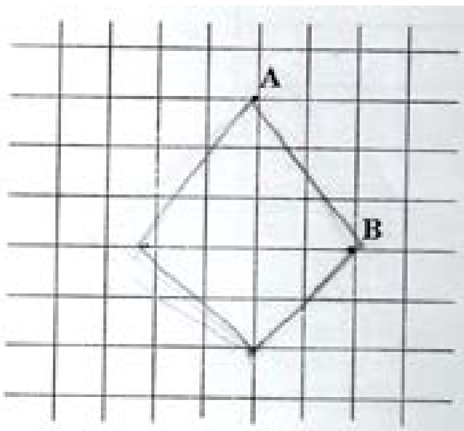
CATEGORIAS	ANTES DA SEQUÊNCIA	DEPOIS DA SEQUÊNCIA
Perceptiva	17	12
Reflexiva	11	17
Divergente	-	01
Não respondeu	02	-

Fonte: Costa (2016).

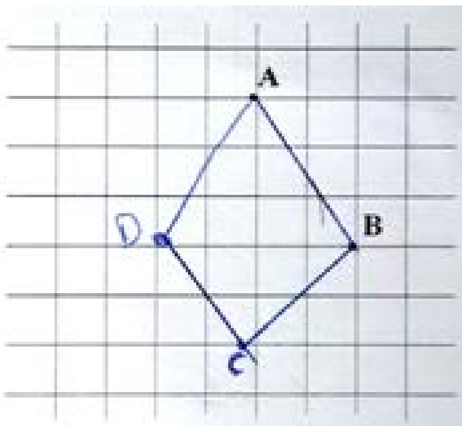
Pela tabela, observamos que a maior parte dos participantes no “pré-sequência”, 17 do total (quase três a cada cinco alunos) se encontrava na classe perceptiva, isto é, na construção do losango esses estudantes fizeram referência apenas ao aspecto global da figura, que é a característica do primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele. No entanto, esse índice reduziu no “pós-sequência” para 12 discentes (o que corresponde a dois entre cinco alunos). Na figura 11, encontramos um exemplo para a classe perceptiva (“pré-sequência” e “pós-sequência”).

Podemos observar que mesmo com o auxílio da malha, os alunos A11 e A24 não consideram nem a definição (todos os lados com medidas congruentes) e nem as propriedades (as diagonais cortam-se ao meio) do losango na construção, produzindo uma figura com todos os lados com medidas diferentes (A24) e uma figura com apenas dois lados congruentes. Ou seja, eles consideram apenas o aspecto global do losango (classe perceptiva).

Figuras 11 – Respostas dos alunos A11 e A24 sobre a quarta questão dos testes (classe perceptiva)



(a) Aluno A11 (pré-teste)

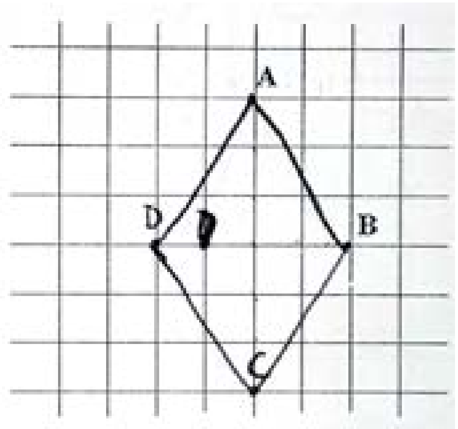


(b) Aluno A24 (pós-teste)

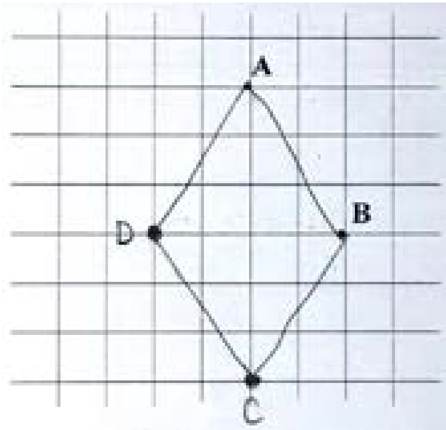
Fonte: Dados da pesquisa.

No “pré-sequência”, foram identificados 11 estudantes trabalhando na esfera reflexiva, referente a uso das propriedades do losango na sua construção, que se refere ao segundo nível vanhieliano. No "pós-sequência", houve um aumento do número de alunos atuando nessa esfera, cerca de 17 do total (quase três entre cinco estudantes). A Figura 12 apresenta uma ilustração sobre esse caso.

Figuras 12 – Respostas dos alunos A01 e A08 sobre a quarta questão dos testes (classe reflexiva)



(a) Aluno A01 (pré-teste)



(b) Aluno A08 (pós-teste)

Fonte: Dados da pesquisa

Esses primeiros resultados referentes ao item, notamos que há diferença em relação à pesquisa de Câmara dos Santos (1992; 2001), na qual foi verificado menos da metade atuando na classe reflexiva no "pré-sequência", enquanto no "pós-sequência", tal índice cresceu para 80% da turma (correspondendo a quatro entre cinco estudantes).

Além disso, um dos estudantes produziu um paralelogramo (não losango) em vez de um losango no "pós-sequência", ficando na esfera divergente. É importante destacar que dois dos estudantes não responderam o item no "pré-sequência".

Nesse item, os dados produzidos evidenciam que os estudantes avançaram significativamente em seu pensamento geométrico, pois há um aumento do número de alunos na classe reflexiva e uma redução de estudantes na esfera perceptiva.

Identificamos alunos construindo losangos por meio de suas propriedades e também por sua aparência global. Também, observamos um estudante produzindo um paralelogramo, todavia, não evidenciamos nenhum participante construindo trapézios, retângulos e triângulos.

O quinto item apresentava um losango *ABCD*, que teve uma parte apagada, e os estudantes eram questionados se era possível reconstruir esse quadrilátero notável (ou não), sendo que eles deveriam explicitar suas respostas, ou seja, deveriam justificar se era possível (ou não) refazer o losango.

Evidenciamos que no "pré-sequência" 26 estudantes disseram que era possível reconstruir o losango, três discentes afirmaram que não era viável refazer o losango que teve um pedaço apagado, e um aluno não respondeu o item. No "pós-sequência", 28 participantes disseram que era possível refazer o losango, enquanto que dois estudantes foram contrários.

Entre os discentes que afirmaram que era possível reconstruir a figura no "pré-sequência" e no "pós-sequência", observamos três tipos de justificativa: *referência ao aspecto global; uso implícito das diagonais do losango*; *apelo à ideia de simetria.*

Notamos que um primeiro grupo de estudantes fez uso apenas da aparência global da figura, afirmando que só seria necessário ligar os pontos e a figura estaria reconstruída. Tal fato foi verificado entre 20 participantes no "pré-sequência" e 18 alunos no "pós-sequência".

O segundo grupo de discentes fez uso implícito[4] das diagonais, justificando que era necessário determinar a medida dos comprimentos dos segmentos de reta que formam as diagonais para reconstruir o losango apagado. Tal resposta foi observada entre nove membros da turma no "pré-sequência" e entre 12 estudantes no "pós-sequência". Além disso, no "pré-sequência", um dos estudantes fez apelo à ideia de simetria na sua justificativa, no entanto, no "pós-sequência", não identificamos alunos que fizessem uso dessa ideia.

Em comparação com a pesquisa de Câmara dos Santos (1992; 2001), notamos diferenças percentuais no que se refere aos dados. Por exemplo, o pesquisador identificou no "pré-sequência" 40% dos estudantes se referindo, de algum modo, às diagonais do losango, sendo que no "pós-sequência" tal índice chegou a 80%. Outro dado interessante verificado foi que no "pós-sequência" 33% dos discentes fizeram uso da ideia de simetria na explicação, sendo que esse conceito não foi trabalhado na pesquisa.

4 Aqui utilizamos o termo implícito, pois os estudantes não mencionam diretamente o termo "diagonal", mas sim segmentos de reta ou linha.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

Os dados produzidos nessa questão parecem mostrar que houve avanço no pensamento geométrico desses alunos, pelo fato da redução do número de alunos fazendo uso da aparência do losango na reconstrução, e também pelo aumento de estudantes mobilizando, mesmo que implicitamente, as diagonais desse quadrilátero notável.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em relação ao pensamento geométrico dos estudantes antes da aplicação da sequência didática, no "pré-sequência", verificamos que todos os estudantes estavam no primeiro nível de Van-Hiele, no qual ocorre o reconhecimento das figuras geométricas apenas pela sua aparência física. Contudo, no "pós-sequência", encontramos um pouco menos de um terço dos estudantes atuando já no segundo nível vanhieliano.

Assim como na pesquisa de Câmara dos Santos (1992; 2001), no que se refere ao desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico, considerando a teoria de Van-Hiele (1957), verificamos um progresso nesse processo, pois uma parte dos estudantes participantes avançou entre os níveis iniciais (do primeiro nível para o segundo nível), por meio da sequência didática (sendo verificado entre oito alunos participantes do nosso estudo).

Observamos, também, que 13 alunos não alcançaram a passagem do primeiro para o segundo nível, mas esses alunos progrediram significativamente dentro do próprio nível, deixando-os bem próximos do nível seguinte. Diante dessa constatação, conjecturamos a possibilidade da existência de subníveis no primeiro nível vanhieliano. Nesse sentido, investigaremos essa hipótese em uma nova linha de investigação, isto é, em nível de doutorado.

Foi-nos possível ainda identificar nove alunos trabalhando nos dois níveis, tal fato é um indício de que podem existir faixas de transição entre os níveis vanhielianos, como também foi verificado por Câmara dos Santos (1992; 2001). Esse fenômeno demanda a necessidade da realização de estudos futuros sobre isso.

Além disso, em algumas questões do teste, alguns estudantes demostraram o pensamento geométrico característico do terceiro nível de Van-Hiele, no qual, ocorre a inclusão de classe (por exemplo, reconhecer um quadrado como um retângulo e com um losango, pois apresentam propriedades em comum). Esses indícios parecem mostrar que um mesmo aluno pode estar em diferentes níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele, mas isso, de acordo com o tipo de atividade e com o tipo de conceito matemático explorado, como verificaram os pesquisadores Gutiérrez, Jaime e Fortuny (1991).

É importante destacar que outros fatores também podem influenciar ao avanço do pensar em Geometria, como bem discutem Nasser e Sant'anna (2010). Essas autoras afirmam que o desenvolvimento do pensamento geométrico é ainda marcado pelas experiências dos estudantes, pelo contexto social, pelas relações estudante-professor e estudante-estudante, do número de aulas de Geometria, etc.

De modo geral, julgamos que os objetivos traçados no estudo foram alcançados. Todavia, algumas questões necessitam uma discussão mais refinada em estudos posteriores, sobretudo, em relação à superação de várias dificuldades referentes à pregnância das figuras prototípicas para os quadriláteros notáveis, como verificados nesta pesquisa e também no estudo de Câmara dos Santos (1992; 2001).

REFERÊNCIAS

AMÂNCIO, R. A. **O desenvolvimento do pensamento trabalhando polígonos especialmente quadriláteros**. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

BALTAR BELLEMAIN, P. M. **Um candidato a obstáculo à aprendizagem dos conceitos de comprimento e área como grandezas**. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 2., 2004, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: Edidora IME-UERJ.

BRASIL. **SAEB** – 2015. Matemática. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2015. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/inep-apresenta-resultados-do-saeb-prova-brasil-2015/21206> Acesso em: 27 fev 2017.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino da geometria no Brasil: de 1500 até aos dias atuais. **Revista Quadrante (Lisboa)**, v. 24, p. 103-128, 2015.

CÂMARA DOS SANTOS, M. **Analyse didactique d'un materiel pour les premiers apprentissages en géométrie**. Mémoire de master en Didactique des Disciplines Scientifiques, Lyon, Université Claude Bernarde Lyon 1, 1992.

________________. **Effets de l´utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le developpement de la pensée géométrique**. In: CONGRES INTERNATIONAL CABRI GÉOMÈTRE, 2., 2001, Montreal. Annales... Montreal: Cabri World Committee, pp.1-12, 2001.

________________. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Org.). **A Pesquisa em Educação Matemática:** Repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 140p. pp. 177-211, 2009.

CASTRO FILHO, J.A.; CÂMARA DOS SANTOS, M.; BITTAR, M. Desafios para a pesquisa em educação matemática na sala de aula. In. SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, Recife-PE, 2008. **Anais...** Recife: SBEM – Regional PE, 2008.

CICARINI, A.M.O.T. **Geometria Plana e Grafismo indígena o estudo de suas relações no contexto histórico do grupo Tukano de alunos da Licenciatura Intercultural dos povos indígenas do Alto do Rio Negro**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

COSTA, A. P. Evoluindo o raciocínio geométrico por meio de uma sequência didática: o caso dos quadriláteros. **Anais...** 18 Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação, Recife, 2014.

________________. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

COSTA, A. P.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. **Anais**... 14 Conferência Interamericana de Educação Matemática, Tuxtla Gutiérrez, 2015a.

________________. Investigando os níveis de pensamento geométrico de alunos do 6º ano do ensino médio: um estudo envolvendo os quadriláteros. **Anais**... 4 Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Ilhéus, 2015b.

________________. Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: um olhar para as estratégias dos estudantes do 6º ano do ensino fundamental. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v.5, p.3-17, 2016a.

________________. Níveis de pensamento geométrico de alunos do ensino médio no estado de Pernambuco: um estudo sob o olhar vanhieliano. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.7, p.1-19, 2016b.

________________. O pensamento geométrico de professores de Matemática do ensino básico: um estudo sobre os quadriláteros notáveis. **Educação Online**, Rio de Janeiro, n.22, pp.1-19, 2016c.

________________. O uso do GeoGebra no ensino de quadriláteros notáveis: um estudo com alunos do 6º ano do ensino fundamental. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 6, p. 10-24, 2017.

COSTA, A. P.; ROSA DOS SANTOS, M. Um estudo sobre o pensamento geométrico de estudantes de licenciatura em matemática no estado de Pernambuco. In. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., São Paulo-SP, 2016. **Anais...** São Paulo: SBEM – Regional SP, 2016.

________________. Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de uma Licenciatura em Matemática no Estado de Pernambuco: um estudo sob a ótica da teoria de Van-Hiele. **Educação Online**, Rio de Janeiro, n. 25, pp.1-23,2017a.

________________. O pensamento geométrico de professores de Matemática em formação inicial. **Educação Matemática em Revista – RS**, Porto Alegre, v.1, n. 17, pp.1-20,2017b.

FRADE, R. **Composição e/ou Decomposição de Figuras Planas no Ensino Médio:** Van Hiele uma opção. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotéticodedutivo**. 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A.; FORTUNY, J. F. **An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels**. Journal for Research in Mathematics Education , vol. 22, n. 3, pp. 237-251, 1991.

KOPKE, R. C. M. **Geometria, desenho, escola e transdisciplinaridade:** abordagens possíveis para a educação. 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

NASSER, L. Visão de Licenciandos sobre as justificativas em Geometria apresentadas na Escola Básica. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 6, p. 04-22, 2017.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele.** 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFJR, 101p, 2010.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. **Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année**. Géométrie et sens de l'espace: Formes géométriques. Fascicule 1. Toronto, le Ministère, p.12, 2006.

OECD. PISA. 2015. **PISA:** Results in Focus. Organisation for Economic Co-operation and Development: OECD, 2015. Disponível em: <https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf> Acesso em: 27 fev 2017.

PERNAMBUCO. Secretaria da Educação. **SAEPE** – 2015. Matemática. Revista da Gestão Escolar. UFJF, Juiz de Fora, 2015. Disponível em: <http://www.saepe.caedufjf.net/wp-content/uploads/2016/05/PE-SAEPE-2015-RG-RE-WEB2.pdf> Acesso em: 27 fev 2017.

SOUZA, K.R.; KERBAUY, M.T.M. Abordagem quanti-qualitativa: superação da dicotoamia quantitativa-qualitativa na pesquisa em educação. **Educação e Filosofia**, v.31, n.61, pp.1-19, 2017.

PIAGET, J. **Seis estudos de psicologia**. Trad. M. A. M. D'Amorim e P. S.L. Silva. 24.ed. Rio de Janeiro: Forense Universitaria, 1999.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013.

VAN-HIELE, P. M. **El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometria**. 1957. Tesis (Doctorado en Matemáticas y Ciencias Naturales) - Universidad Real de Utrecht: Utrecht,1957.