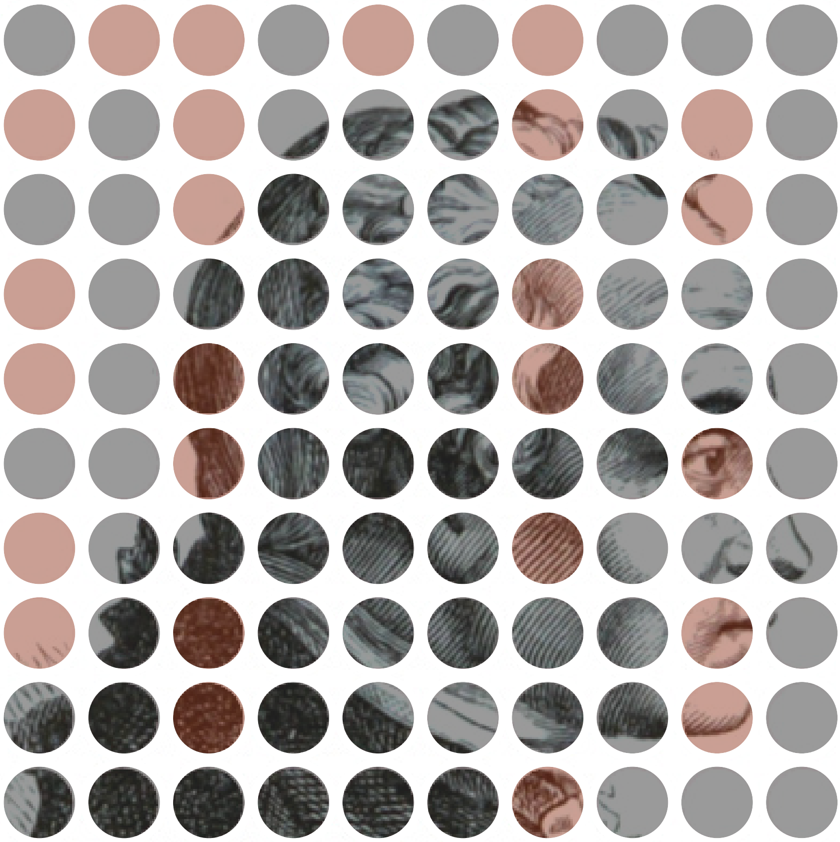
SieB

Ralf Krömer, Gregor Nickel,
Daniel Koenig und Shafie Shokrani (Hrsg.) | **Band 11 • 2019**

Siegener Beiträge zur Geschichte
und Philosophie der Mathematik



Mathematik in der Tradition des Neukantianismus

**Siegener Beiträge
zur Geschichte und Philosophie der Mathematik**

Daniel Koenig, Gregor Nickel, Shafie Shokrani
und Ralf Krömer (Hrsg.)

SieB

Mathematik in der Tradition des Neukantianismus

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 11 (2019)

Mit Beiträgen von:

G. Gabriel & S. Schlotter | K. Herrmann | D. Koenig | T. Mormann |

M. Neuber | S. Shokrani

M. Carl & E.-M. Engelen | G. Nickel | Ch. Thiel

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Daniel Koenig
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
koenig@mathematik.uni-siegen.de

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Shafie Shokrani
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
shokrani@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 11 (2019)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2019

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Vorwort

> Es ist schon ein großer und nöthiger Beweis der Klugheit oder Einsicht, zu wissen, was man vernünftiger Weise fragen solle. Denn wenn die Frage an sich ungereimt ist und unnöthige Antworten verlangt, so hat sie außer der Beschämung dessen, der sie aufwirft, bisweilen noch den Nachtheil, den unbehutsamen Anhörer derselben zu ungereimten Antworten zu verleiten und den belachenswerthen Anblick zu geben, daß einer (wie die Alten sagten) den Bock melkt, der andre ein Sieb unterhält.
> Immanuel Kant

Dem aufmerksamen Publikum der Siegener Beiträge dürfte es nicht entgehen, dass das Sieb aus Immanuel Kants Gleichnis[1] bereits das Vorwort zu **SieB 4** (2014) eröffnete. Dabei handelt es sich allerdings nicht um ein Versehen, wir nehmen vielmehr Otto Liebmanns[2] Refrain "Also muß auf Kant zurückgegangen werden!" auf und spielen damit zugleich auf ein Leitmotiv der Beiträge in der ersten Hälfte dieses Bandes an.

"Mathematik in der Tradition des Neukantianismus" war nämlich das Thema einer internationalen Tagung, die im März 2018 in Siegen stattfand. Dass die Philosophie der Mathematik für die Autoren dieser Denktradition ein zentrales Anliegen war, ist einerseits selbstverständlich. Spielt doch bereits für Kant das 'Phänomen Mathematik' in vielerlei Hinsicht eine Schlüsselrolle, unter anderem als positives Beispiel gegen den Skeptizismus (synthetische Urteile *a priori* sind möglich!) wie auch als 'Kontrastmittel', um den (begrenzten) Möglichkeiten philosophischen Denkens Kontur zu verleihen (u. a. auch gegen die Parallelführung von Philosphie und Mathematik bei Leibniz). Und gerade das Spannungsgefüge zwischen Leibniz und Kant prägt die Bemühungen der Neu-Kantianer. Auf der anderen Seite werden der historische Blick auf das frühe 20. Jahrhundert wie auch die aktuellen Überlegungen zur Philosophie der Mathematik dominiert von Autoren analytischer Prägung,

[1] KrV B82ff. Nachforschungen zu Kants Bezugnahme auf „die Alten" präsentiert Daniel S. Robinson: *Kant and Demonax–A Footnote to the History of Philosophy.* Philosophy and Phenomenological Research **10**, No. 3 (1950), 374-379.

[2] Vgl. Ders.: "Kant und die Epigonen. Eine kritische Abhandlung." Stuttgart 1865.

Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät
Departement Mathematik
AG Philosophie und Geschichte der Mathematik

UNIVERSITÄT SIEGEN

Francesca Biagioli
Wien

Gottfried Gabriel
Konstanz

Kay Herrmann
Chemniz

Daniel Koenig
Siegen

Thomas Mormann
San Sebastian

Matthias Neuber
Tübingen

Volker Peckhaus
Paderborn

Helmut Pulte
Bochum

Shafie Shokrani
Siegen

Christian Thiel
Erlangen

Mathematik in der Tradition des Neukantianismus

Tagung an der Universität Siegen
Emmy-Noether-Campus, Raum: D-201
15. - 16.3. 2018

Weitere Informationen unter:
https://www.uni-siegen.de/fb6/phima/nkm
Anmeldung und Kontakt:
shokrani@mathematik.uni-siegen

www.uni-siegen.de

die ja selbst in mannigfacher Weise Methode oder zumindest Stilmittel der Mathematik immitiert. Als Kontrapunkt zur Dominanz der analytischen Tradition zeigen die unterschiedlichen Strömungen des Neu-Kantianismus ein vielfältiges und viel zu wenig diskutiertes Spektrum von Positionen und Entwicklungslinien. So unterstrich die Tagung, dass eine Beschäftigung mit der Mathematikphilosophie im Neu-Kantianismus sowohl aus philosophiehistorischer wie aus systematischer Hinsicht ausgesprochen fruchtbar ist.

Thomas Mormann stellt den originellen wissenschaftsphilosophischen Ansatz der Marburger Schule (Cohen, Natorp, Cassirer) vor und zeigt insbesondere, welchen auch systematischen Stellenwert eine mathematische Theorie infinitesimaler Größen haben kann. Zwei Beiträge sind einem Philosophen der Marburger Tradition gewidmet. Daniel Koenig betrachtet in seinem Beitrag die Wechselwirkungen von Ernst Cassirers Beschäftigung mit den Nicht-Euklidischen Geometrien und seiner allgemeine Auffassung vom Raum, die er im Kontext seiner Kulturphilosophie, der Philosophie der Symbolischen Formen, entwickelt. In dieser setzt sich Cassirer auch mit dem Grundlagenstreit der Mathematik auseinander. Diese Auseinandersetzung rekonstruiert Matthias Neuber in seinem Beitrag und zeigt dabei Interpretationsprobleme auf, die sich durch Cassirers Fokus auf die "idealen Elemente" ergeben. Leonard Nelson, Begründer der "Neuen Fries'schen Schule" und Göttinger 'Hausphilosoph', kann in mancherlei Hinsicht als Antipode Cassirers betrachtet werden. Kai Herrmann zeichnet die Linie von Fries bis Nelson nach und stellt dessen mathematik-philosophische Überlegungen vor. Shafie Shokrani untersucht Nelsons erkenntniskritisches Konzept des "Sokratischen Philosophierens" und gleicht es mit seinen Platonschen Bezugspunkten ab. Gottfried Gabriel und Sven Schlotter zeigen schließlich überraschende Parallelen zwischen Gottlob Frege und Otto Liebmann, die insbesondere im Rahmen der jeweiligen Philosophie der Mathematik expliziert werden. Die eingehende Rezeption Freges bei Marburger und Südwestdeutschen Neukantianern zeigt wiederum, dass sich in historischer Perspektive analytische und 'klassisch-kontinentale' Strömungen der Philosophie durchaus überkreuzen.

Drei weitere Beiträge runden die farbenfrohe Palette dieser Siegener Beiträge ab. Merlin Carl und Eva-Maria Engelen stellen Bemerkungen Kurt Gödels zur Mengenlehre vor, die in seinen bislang noch unveröffentlichten bzw. gerade edierten Notizbüchern niedergelegt sind, und die einen originellen philosophischen wie auch einen mathematischen Umgang mit dem Mengenkonzept zeigen. Gregor Nickel stellt Motive der Kosmologie des Nikolaus Cusanus vor, wobei ein besonderes Augenmerk auf die Rolle der Mathematik gerichtet wird. Christian Thiel präsentiert mit einer Analyse von Heinrich Behmanns Beiträgen zur Grundlagendebatte ein wichtiges Kapitel der Logik-Geschichte des 20. Jahrhunderts. Sein eingeplanter Beitrag zur Neu-Kantianer-Tagung musste leider aus persönlichen Gründen entfallen; umso schöner ist es, dass er in diesem Bande dennoch mit einem Beitrag präsent ist.

Wir freuen uns sehr, nunmehr den elften Band der Siegener Beiträge vorlegen zu können. Ganz im Geiste seiner Vorgänger dokumentiert er die Pluralität von Themen, Perspektiven und Methoden — und kann hoffentlich ein Anstoß für einen produktiven Diskurs sein im Bemühen um ein besseres Verstehen 'der' Mathematik. Allen Autoren danken wir sehr herzlich für ihre Bereitschaft, daran mitzuwirken.

Unser Dank gilt darüber hinaus Kordula Lindner-Jarchow für die verlagsseitige Betreuung der Reihe, Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik und nicht zuletzt dem Team von UniPrint für den stets sorgfältigen und schnellen Druck.

Daniel Koenig Ralf Krömer Gregor Nickel Shafie Shokrani

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Mathematik in der Tradition des Neukantianismus

Freges Philosophie der Mathematik im Kontext des Neukantianismus

Gottfried Gabriel & Sven Schlotter

Zwischen Frege und den Neukantianern bestehen in vielen Punkten Übereinstimmungen. Dies gilt insbesondere für die Vertreter des werttheoretischen oder Südwestdeutschen Neukantianismus in der Tradition Hermann Lotzes. Alle Aspekte dieser Nähe sind hier nicht auszubreiten, gemäß der Themenstellung erfolgt eine Beschränkung auf die Philosophie der Mathematik. Im ersten Teil des Beitrags wird es um das Verhältnis von Arithmetik und Geometrie gehen, wobei überraschende Gemeinsamkeiten zwischen Frege und dem Neukantianer Otto Liebmann nachgewiesen werden. Der zweite Teil erörtert die unterschiedlichen Rezeptionen von Freges Logizismus durch Jonas Cohn, Paul Natorp, Heinrich Rickert, Ernst Cassirer und Bruno Bauch.

1 Das Verhältnis von Arithmetik und Geometrie

Freges Philosophie der Mathematik ist zwar nicht durchgehend kantisch, wohl aber in Teilen *neu*kantianisch. Die Neukantianer haben keineswegs Kant in allen Punkten zugestimmt. Dies gilt schon für Liebmann, dessen Ruf „Also muß auf Kant zurückgegangen werden!“ die neukantianische Tradition eingeleitet hat (Liebmann 1865). Für die Neukantianer war aber klar, dass man nicht nur auf Kant *zurück*, sondern auch über ihn *hinaus* zu gehen habe. Wilhelm Windelband formulierte es (1883) explizit: „Kant verstehen, heißt über ihn hinausgehen.“ (Windelband 1915, S. IV) Legt man diese Einstellung zugrunde, so darf man auch Frege dem Neukantianismus zurechnen.[1]

[1] Der folgende Text greift in Teilen zurück auf Gabriel/Schlotter 2017.

Frege anerkennt Kants Auffassung, dass die Geometrie eine synthetisch-apriorische Wissenschaft ist, weil die Geltung ihrer Axiome, die für ihn diejenigen der euklidischen Geometrie sind, auf reiner Anschauung beruhe. Die Arithmetik soll dagegen als Zweig der Logik und damit als analytisch nachgewiesen werden. Plausibel zu machen versucht Frege sein Anliegen dadurch, dass er danach fragt, welches „Gebiet“ die Wahrheiten der Arithmetik im Unterschied zur Geometrie „beherrschen“ (Frege 1884, § 14). Er stellt fest, dass das Gebiet der Geometrie das des „räumlich Anschaulichen“ (im Unterschied zum zeitlich Anschaulichen) ist, und zwar des wirklichen und des bloß vorgestellten. Mit dieser Zuweisung geht aber eine Beschränkung der Geometrie einher. Das räumlich Anschauliche ist ihr Gebiet, aber auch *nur* das räumlich Anschauliche. Weiter als unsere Anschauungsmöglichkeit reicht das „begriffliche Denken“, dessen Gebiet das überhaupt „Denkbare“ ist. Nun beherrschen die arithmetischen Wahrheiten nach Frege „das Gebiet des Zählbaren“. Das Zählbare erstreckt sich aber nicht nur auf das Anschauliche (wirkliche oder bloß vorgestellte), sondern auch auf das nicht-anschauliche Denkbare, so dass die arithmetischen Wahrheiten ein größeres Gebiet beherrschen als die geometrischen.

Für Frege dienen diese Überlegungen dazu, die Anbindung der Arithmetik an die Logik bereits vor der Ausführung seines logizistischen Programms plausibel zu machen. Beide Argumentationen zusammenfassend könnte man sagen: Die logischen Gesetze definieren das Gebiet des Denkbaren, die Arithmetik erstreckt sich im Unterschied zur Geometrie auf alles Denkbare, also ist zu vermuten, dass die Arithmetik der Logik näher steht als der Geometrie: „Sollten also nicht die Gesetze der Zahlen mit denen des Denkens in der innigsten Verbindung stehen?“ (Frege 1884, § 14)[2]

Frege leitet diese Überlegungen, in denen er die Arithmetik in den Bereich des begrifflichen, diskursiven Denkens hinüberzuziehen sucht, mit einer kurzen Betrachtung der nicht-euklidischen Geometrie ein. Er stellt fest, dass ein nicht-euklidischer Raum nicht anschaubar, aber immerhin denkbar sei. Die Tendenz seiner Überlegung geht dahin, dass die Annahme der Verneinung eines Grundsatzes der (euklidischen) Geometrie noch nicht das Denken in Widerspruch mit sich selbst bringe, während dies bei den Grundsätzen der Arithmetik der Fall sei.

Freges Überlegungen weisen hier große Übereinstimmungen mit den Auffassungen des Neukantianers Otto Liebmann auf, der Freges philosophischer Kollege in Jena war. So trifft Liebmann unter Rekurs auf die nicht-euklidische Geometrie eine Unterscheidung zwischen „logischer Notwendigkeit“ und „Anschauungs-Notwendigkeit“, wonach das kontradiktorische Gegenteil eines anschaulich notwen-

[2] Vgl. auch zum Folgenden ergänzend: Frege 1885/86, S. 94f.

digen Satzes lediglich „nicht anschaubar“, aber denkbar sei (Liebmann 1880, S. 77).[3] Dies im Unterschied zum kontradiktorischen Gegenteil eines logisch notwendigen Satzes. Genauer müsste man hier im Sinne Freges hinzufügen, dass die Negation eines logischen Gesetzes nicht als *geltend* denkbar ist. Den Inhalt selbst muss man ja zunächst denken können, um ihm sodann die Geltung abzusprechen, d. h. seine Negation im Urteil anzuerkennen. Kants Auffassung im Wesentlichen zustimmend stellt Liebmann fest:

> Kants Kritizismus enthält nun, genau besehen, dreierlei Behauptungen. Erstens: Die Axiome der Euklidischen Geometrie und damit der Euklidische Raum sind *nicht logische* Notwendigkeiten. Zweitens: Sie sind aber für mich und jedes mir gleichartige Anschauungsvermögen unvermeidlich, das heißt ihr Gegenteil [ist], wiewohl durchaus keinen Widerspruch enthaltend, intuitiv [d. h. anschaulich, Verf.] nicht vorstellbar; sie sind reine Anschauungsnotwendigkeiten oder, was dasselbe besagt, Anschauungen *a priori*. Drittens: Weil durch die Organisation meines Anschauungsvermögens, *aber nicht* durch die Logik als notwendig gegeben, sind sie *subjektiv*. (Liebmann 1880, S. 77)

Die hier angesprochene Subjektivität meint eine Subjektbezogenheit im Sinne des *transzendentalen* Idealismus und nicht des subjektiven Idealismus. Frege dürfte dieser Reformulierung Kants zustimmen, sogar der Charakterisierung der euklidischen Axiome als „subjektiv“, wenn man seine eigene Bestimmung von Objektivität hinzuzieht, die unter anderem Unabhängigkeit vom „Anschauen“ verlangt (Frege 1884, § 26, Schluss).

Aus solchen Überlegungen ergibt sich für Liebmann dann eine ganz entsprechende Verhältnisbestimmung von Logik, Arithmetik (Größenlehre) und Geometrie, wie wir sie bei Frege vorgefunden haben:

> Während unsere Geometrie nur für solche Intelligenzen, die in derselben Raumform wie wir anschauen, Apodiktizität besitzt, erstreckt sich die Apodiktizität der allgemeinen Größenlehre, sowie der Logik auf alle, wie auch immer gearteten Intelligenzen überhaupt. Der Umfang oder Geltungsbereich der beiden letzteren übertrifft daher den der ersteren; er schließt ihn konzentrisch ein. (Liebmann 1880, S. 253)

Die übereinstimmende Sicht kommt auch in der Beurteilung derjenigen Erkenntnissubjekte zum Ausdruck, die fingiert oder nicht-fingiert Denkgesetzen folgen, die

[3] Es ist belegt, dass Frege die zweite Auflage von Liebmanns Buch zur Zeit der Abfassung der *Grundlagen der Arithmetik* aus der Jenaer Universitätsbibliothek ausgeliehen hat. Siehe Kreiser 1984, S. 25.

den unseren widersprechen. Frege sieht hier (in den *Grundgesetzen der Arithmetik*) keine andere Möglichkeit, als „eine bisher unbekannte Art der Verrücktheit" zu diagnostizieren (Frege 1893, S. XVI). Dasselbe müsste Frege seinem Logizismus folgend auch von denjenigen sagen, deren arithmetische Grundgesetze den unseren widersprechen. So heißt es denn auch, noch als Frage formuliert, in den *Grundlagen*: „Stürzt nicht alles in Verwirrung, wenn man einen von diesen [„Grundsätzen der Zahlenwissenschaft"] leugnen wollte?" (Frege 1884, § 14) Dieselbe Auffassung finden wir wörtlich bereits bei Liebmann, der bezogen auf den elementaren arithmetischen Satz „$3 \times 3 = 9$" erklärt, jemand, der diesen Satz „*verstünde* ohne ihn sofort ein für alle mal zu *glauben*", d. h. als zeitlose Wahrheit anzuerkennen, „wäre für uns ein Verrückter" (Liebmann 1880, S. 240). Anders im Falle der Geometrie:

> Würde uns Jemand versichern, er schaue einen Raum an, oder die Welt in einem Raume an, worin der pythagoreische Lehrsatz ungültig sei, so würden wir zuerst an seiner Glaubwürdigkeit oder Geistesgesundheit zweifeln, dann diese prüfen, und falls sie [die] Probe bestünde, eingestehen müssen: dieser Mann, obwohl logisch gleichartig mit mir, besitzt ein dem meinigen heterogenes, mir unverständliches Anschauungsvermögen. (Liebmann 1880, S. 79)

Frege dient der Vergleich mit der Geometrie in den *Grundlagen der Arithmetik* dazu, den Status der Arithmetik als reine Vernunftwissenschaft zu unterstreichen. Als eigenständiges erkenntnistheoretisches Thema spielt die Geometrie bei ihm ansonsten zunächst keine besondere Rolle. In der geometrischen Dissertation findet sich lediglich der Satz, den man wohl im kantischen Sinne verstehen darf, „dass die ganze Geometrie zuletzt auf Axiomen beruht, welche ihre Gültigkeit aus der Natur unseres Anschauungsvermögens herleiten" (Frege 1873, S. 3). Obwohl Frege sich als Mathematiker weiter mit Themen der Geometrie befasst und entsprechende Lehrveranstaltungen abgehalten hat (Kreiser 2001, Kap. 4), rückt diese *erkenntnistheoretisch* erst wieder in den Blick, nachdem er die Realisierung der logizistischen Begründung der Arithmetik auf Grund der Russellschen Antinomie aufgegeben hat.

Zunächst kommt Frege auf die kantische Auffassung zurück, dass die Arithmetik eine synthetisch-apriorische Wissenschaft ist. Indem er von dem Aufbau eines *inhaltlichen* axiomatischen Systems ausgeht, Hilberts Idee *formaler* Axiomensysteme lehnt Frege bekanntlich ab, und fordert, dass alle Schlüsse rein logisch sind, gilt für ihn:

(1) Ein Grundgesetz ist synthetisch genau dann, wenn es eine nicht-logische Wahrheit ist.

(2) Ein Grundgesetz ist apriorisch genau dann, wenn es eine nicht-aposteriorische Wahrheit ist.

(3) Eine Wissenschaft ist genau dann synthetisch-apriorisch, wenn alle ihre Grundgesetze (Axiome) apriorisch sind und unter diesen Grundgesetzen mindestens ein synthetisch-apriorisches ist. (Vgl. Frege 1884, § 3)

In der nachgelassenen Schrift *Logik in der Mathematik* führt Frege die Gesetzesform der vollständigen Induktion als Grundgesetz der Arithmetik an, für das (1) und (2) gelten. Das Gesetz ist danach sowohl synthetisch als auch apriorisch. Damit enthält die Arithmetik mindestens ein synthetisch-apriorisches Grundgesetz, und da alle ihre Grundgesetze apriorisch sind, ist sie gemäß (3) eine synthetisch-apriorische Wissenschaft. Ein Bezug der Arithmetik auf die Anschauungsform der Zeit, wie er sich bei Kant findet, fehlt bei Frege. Dies liegt letztlich daran, dass die Anschauungsform der Zeit über (die in der Zeit erfolgenden) Zählhandlungen ins Spiel kommt. Zählhandlungen bilden nach Frege aber die Grundlage der „Kleinkinder-Zahlen“, die der späte Frege nun explizit ablehnt, weil von ihnen „keine Brücke“ zu den anderen Zahlarten führe: „Das Zählen, aus einem Erfordernis des handelnden Lebens psychologisch entsprungen, hat die Gelehrten irre geführt.“ (Frege 1983, S. 296f.) Ein wesentlicher Punkt für Frege ist, dass aus der geometrischen Erkenntnisquelle und nicht aus dem ‘und so weiter’ „das Unendliche im eigentlichen und strengsten Sinne des Wortes“ fließt. Als Beispiel führt er unter anderem an, dass wir auf jeder geraden Strecke „unendlich viele Punkte“ haben (Frege 1983, S. 293). Frege meint also das Aktual-Unendliche und erklärt im Sinne des angeblichen Satzes über dem Eingang der platonischen Akademie „Kein Eintritt ohne Geometrie“[4]:

> Hier kommen sich Geometrie und Philosophie am nächsten. Sie gehören ja zusammen. Ein Philosoph, der keine Beziehungen zur Geometrie hat, ist nur ein halber Philosoph, und ein Mathematiker, der keine philosophische Ader hat, ist nur ein halber Mathematiker. (Frege 1983, S. 293)

In seinen letzten Überlegungen zu einer Neubegründung der Arithmetik geht Frege so weit, dass er für die gesamte Mathematik, also auch für die Arithmetik, die „geometrische Erkenntnisquelle“ und damit die „Anschauung“ als „Beweisgrund“ in Anspruch nimmt (Frege 1983, S. 298; vgl. dazu Kaulbach 1983). Damit weist Frege wie Kant die gesamte Mathematik als synthetisch-apriorische Wissenschaft aus:

[4] Auf diesen Satz beruft sich auch Liebmann 1900, S. IV.

> Je mehr ich darüber nachgedacht habe, desto mehr bin ich zu der Überzeugung gekommen, dass Arithmetik und Geometrie auf demselben Grunde erwachsen sind und zwar auf geometrischem, sodass die ganze Mathematik eigentlich Geometrie ist. (Frege 1983, S. 297)

Anders als bei Kant ist damit die gesamte Mathematik auf die reine Anschauungsform des Raumes gegründet, wobei die reine Anschauungsform der Zeit außen vor bleibt.

2 Die Rezeption von Freges Logizismus

Die Rolle der Anschauung und in diesem Zusammenhang die Frage nach dem Verhältnis von „*Sinnlichkeit* und *Verstand*" als den von Kant unterschiedenen „zwei Stämme[n] der menschlichen Erkenntnis" (Kant 1911, B 29) war im Neukantianismus ein zentrales Thema. Die unterschiedlichen Auffassungen entzündeten sich naturgemäß an der Frage nach den Erkenntnisquellen der Mathematik. Zur Entscheidung stand hier, ob die Begründung der Mathematik rein logisch-begrifflich möglich ist oder ob diese zusätzlich der reinen Anschauung bedarf. Für Kant besteht bekanntlich die Geometrie in der Konstruktion ihrer Begriffe in der reinen Anschauungsform des Raumes und die Arithmetik in der Konstruktion ihrer Begriffe in der reinen Anschauungsform der Zeit. Das Beispiel der Mathematik dient Kant als Nachweis der Möglichkeit synthetischer Urteile a priori, weil die mathematischen Urteile für ihn nicht rein logisch aus Begriffen, also analytisch, begründbar sind, sondern zu ihrer Begründung zusätzlich der reinen Anschauung bedürfen. Der Mathematik kommt also für die Transzendentalphilosophie eine exemplarische erkenntnistheoretische Stellung zu, da sich an ihr entscheidet, ob die transzendentale Logik einer Ergänzung durch eine transzendentale Ästhetik bedarf.

Im Kontext dieser Überlegungen haben sich verschiedene Neukantianer zu Beginn des 20. Jahrhunderts auch mit Positionen Freges auseinandergesetzt. Damit gehörten sie zu den ersten, die seinem Werk innerhalb der deutschen akademischen Philosophie Beachtung schenkten. Ein wesentlicher Anstoß zur Rezeption kam freilich aus dem Ausland. Er bestand darin, dass Bertrand Russell im Anhang der *Principles of Mathematics* (1903, S. 501ff.) eindringlich die Leistungen Freges herausstellte.[5] Diesem Hinweis folgte der Freiburger Neukantianer Jonas Cohn in seinem 1908 erschienenen Buch *Voraussetzungen und Ziele des Erkennens*. Einer ausführlichen Diskussion der Zahlauffassung Russells fügt er die Bemerkung an: „Eine verwandte Theorie hat vor Russell Frege ausgebildet; ich bin leider nicht

[5] Zur Frege-Rezeption insgesamt siehe Wille 2013.

imstande, diese Form zugrunde zu legen, da ich Freges Begriffsschrift nicht lesen kann.“ (Cohn 1908, S. 515) Trotz des genannten Hindernisses hat Cohn die philosophische Bedeutung von Freges Überlegungen doch klar erkannt. In besonderer Weise würdigt er die konsequente Unterscheidung zwischen „logischer Begründung“ und „genetischer Ableitung“. So hätten Frege und Russell „mit einer viele Philosophen beschämenden Einsicht“ hervorgehoben, dass der logische Inhalt der Zahl ganz unabhängig von der Art sei, in der ein beliebiger Mensch die Zahlen vorstelle (Cohn 1908, S. 175f.).

In ähnlich anerkennender Weise äußerte sich Cohns Freiburger Kollege Rickert 1911 im Aufsatz *Das Eine, die Einheit und die Eins.* Der „Gedanke, es habe sich der Satz $2+2=4$ vielleicht erst durch natürliche Züchtung im Kampf ums Dasein aus $2+2=5$ entwickelt,“ erscheint ihm mit Frege „schlechthin absurd, wie jede darwinistische oder pragmatistische ‘Logik’“ (Rickert 1911, S. 30).[6] Bei aller Abgrenzung von naturalistischen Zahlauffassungen, wobei sich Rickert (1911, S. 29) zustimmend auf Freges Ablehnung der empiristischen „Pfefferkuchen- und Kieselsteinarithmetik“ beruft, wendet er sich doch andererseits auch ganz entschieden gegen eine „rationalistische“ bzw. „logizistische“ Position, welche die Zahlen als rein logische Gebilde ansieht. Deren Widerlegung ist der Hauptteil seines Aufsatzes gewidmet. Dabei handelt es sich nicht um einen direkten Angriff auf Frege, wie der heutige Leser vermuten könnte, sondern um eine interne Auseinandersetzung zwischen den beiden Hauptströmungen des Neukantianismus. Sie betrifft vor allem die Unterscheidung zwischen Anschauung und Begriff.

Die Vertreter der südwestdeutschen Schule hielten grundsätzlich an Kants Position fest, wonach sich die beiden „Stämme der Erkenntnis“ zwar unterscheiden lassen, aber wechselseitig aufeinander angewiesen sind, um Erkenntnis zu ermöglichen. Im Gegensatz dazu waren die Marburger Neukantianer darum bemüht, die Rolle der Anschauung zu minimieren oder gar zu eliminieren. Dementsprechend strebten sie für die Mathematik in kritischer Absetzung von Kant eine logische Begründung ohne Berufung auf reine Anschauung an. In dieser Frage sahen sich die Marburger durchaus im Einklang mit der modernen mathematischen und logischen Forschung, deren Ergebnisse sie intensiv rezipierten. Die Geschichte der modernen Mathematik stellte sich ihnen als eine Geschichte der Zurückdrängung anschaulicher Elemente dar, die von Descartes’ analytischer Geometrie bis hin zu Hilberts *Grundlagen der Geometrie* reichte.[7]

[6] Eine wesentlich erweiterte zweite Auflage ist als gesonderte Abhandlung erschienen: Rickert 1924. Rickert hat Frege sogar einen Sonderdruck dieses Aufsatzes geschickt. Zum Inhalt von dessen Antwort vgl. Gabriel/Schlotter 2017, S. 203ff.

[7] Die Marburger Position findet sich – von Hilbert beeinflusst – auch bei Rudolf Carnap, der ursprünglich in seiner von Bruno Bauch betreuten Dissertation *Der Raum* (1922) dem „Anschauungsraum“ neben dem „formalen Raum“ und dem „physischen Raum“ noch einen Platz

Als Repräsentant der Marburger Auffassung hebt Cassirer in seinem Aufsatz *Kant und die moderne Mathematik* (1907, S. 31) hervor, dass die Fortbildung der kantischen Philosophie und die „Logistik" in der Tendenz übereinstimmen, insofern beide über die Lehre von der „reinen Sinnlichkeit" hinweg geschritten seien. Während Cassirer in diesem Zusammenhang ausführlich auf die Auffassungen von Russell und Couturat eingeht, findet Frege noch keine Erwähnung. Aber drei Jahre später, im Buch *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, nimmt er durchaus wohlwollend und kenntnisreich auf die Zahlbegründung in den *Grundlagen der Arithmetik* Bezug. Dabei erkennt Cassirer an, dass durch Frege (und Russell) eine „außerordentliche Befreiung und Vertiefung" gegenüber der sensualistischen Auffassung erreicht worden sei (Cassirer 1910, S. 69). Er bezieht sich ebenfalls auf Freges Kritik an der „Arithmetik der 'Kieselsteine und Pfeffernüsse'" (S. 37), die in dieser Formulierung geradezu zu einem geflügelten Wort im Neukantianismus geworden ist.[8] Cassirer wendet dann allerdings ein, dass der „kritische Grundgedanke [...] nicht zu vollkommener Durchführung" gelangt sei. Denn es reiche nicht aus, „den rein *begrifflichen* Charakter der Zahlaussage zu betonen" (S. 69), solange man den Begriff selbst noch als etwas Existierendes voraussetze. Hierin erblickt Cassirer einen Rest des alten Substanz-Denkens, das er gerade überwinden möchte.

Ein solches Substanzdenken betrifft allerdings nur die gegenständliche Auffassung der Anzahlen, die diese als bestimmte Klassen von Klassen fasst. Sie kann man für das Zustandekommen der Russellschen Antinomie verantwortlich machen. Nicht aber bestimmt ein Substanzdenken Freges wesentliche Einsicht, die von Herbart vorbereitet worden ist, dass Zahlangaben Angaben zweiter Stufe sind, nämlich Angaben darüber, wie viele Gegenstände unter die entsprechenden Sortalbegriffe fallen. Dabei geht es um den Zusammenhang zwischen Zahlaussagen und Existenzaussagen, wonach Existenzaussagen unbestimmte Zahlaussagen und Zahlaussagen bestimmte Existenzaussagen sind. Freges quantorenlogische Darstellung der Zahlaussagen hat unabhängig von der klassenlogischen Fassung des Anzahlbegriffs, die zur Russellschen Antinomie geführt hat, Bestand.

Die quantorenlogische Darstellung der Zahlen sei hier kurz erläutert: Die Aussage, dass dem Begriff F die Zahl 0 zukommt, besagt, dass die Anzahl der Gegenstände, die unter den Begriff (erster Stufe) F fallen, 0 ist. Frege drückt dies unter Verwendung des Allquantors so aus, dass für beliebige Gegenstände verneint wird, dass sie unter den Begriff F fallen (Frege 1884, § 55). In moderner Notation: $\forall x \neg F(x)$. Diese Darstellung ergibt sich, weil Frege in seinem Symbolismus auf die Einführung eines Existenzquantors verzichtet und die Existenz mit Hilfe von Allquantor und Negator ausdrückt. Die genannte Aussage ist logisch äquivalent mit der negativen

einräumte.

[8] Siehe auch Cassirer 1929, S. 402.

Existenzaussage ‘Es ist nicht der Fall, dass es einen Gegenstand gibt, der unter den Begriff F fällt’: $\neg\exists x F(x)$. ‘Dem Begriff F kommt die Zahl 1 zu’ besagt ‘Es gibt einen und nur einen Gegenstand, der unter den Begriff F fällt.’ Dies wird so definiert, dass „nicht allgemein, was auch a sei, der Satz gilt, dass a nicht unter F falle, und [...] aus den Sätzen ‘a fällt unter F’ und ‘b fällt unter F’ allgemein folgt, dass a und b dasselbe sind“ (Frege 1884, § 55). Die Übersetzung dieser Definition in den (heutigen) logischen Formalismus ergibt (bei Ersetzung von ‘a’ durch ‘x’ und ‘b’ durch ‘y’):

$$\neg\forall x \neg F(x) \wedge \forall x \forall y [(F(x) \wedge F(y)) \rightarrow x = y],$$

was logisch äquivalent ist mit

$$\exists x [F(x) \wedge \forall y (F(y) \rightarrow y = x)]$$

Es folgt dann noch die Definition des Übergangs von einer beliebigen Zahl n zur nächstfolgenden Zahl $n + 1$.

Cassirer zitiert zwar in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* die entsprechenden Passagen aus den *Grundlagen der Arithmetik* und fasst den wesentlichen Punkt so zusammen: „Jedes Urteil über Zahlenverhältnisse legt nicht den Objekten, sondern ihren Begriffen bestimmte Merkmale bei.“[9] Eine systematische Würdigung dieser Einsicht bleibt freilich aus. Vorwerfen kann man Cassirer dies allerdings nicht, da Frege ja in den *Grundlagen* bei der quantorenlogischen Darstellung von Zahlaussagen nicht stehengeblieben ist, sondern die Vergegenständlichung der Anzahlen im Folgenden selbst vollzieht.

Die Einführung der Zahlen (Anzahlen) als logische Gegenstände wird von Frege damit begründet, dass Zahlwörter als Eigennamen von Zahlen verwendet werden, indem wir von ‘*der* Eins’ und ‘*der* Zwei’ usw. sprechen. Zu überlegen ist, ob die Verwendung des bestimmten Artikels und die damit verbundene Substantivierung, die Frege zu seiner ‘substanziierenden’ Vergegenständlichung der Zahlen verleitet hat, nicht einfach Ausdruck eines Abstraktionsschritts ist, indem davon abgesehen wird, *was* gezählt wird. Indem man von ‘der Sieben’ und ‘der Fünf’ spricht und etwa die Gleichung ‘$7+5 = 12$’ bildet, gibt man zu verstehen, dass – egal, was man zählt – 7 Dinge plus 5 Dinge stets 12 Dinge sind. Dabei deutet der alltagssprachliche Ausdruck ‘Dinge’ unbestimmt Sortalbegriffe erster Stufe an und steht damit für eine entsprechende Begriffsvariable. In ähnlicher Weise lässt eine Formulierung

[9] Cassirer 1910, S. 61, mit Bezug auf Frege 1884, § 46. Genauer müsste es im Sinne Freges ‘Eigenschaften’ statt ‘Merkmale’ heißen.

wie „Wir waren fünf“ (so der Titel der Autobiographie von Viktor Mann, des Bruders von Heinrich und Thomas Mann) offen, welches Sortal hier zu ergänzen ist. Einzusetzen wäre etwa ‘Geschwister’, ‘Kinder’ usw.

Eine ambivalente Haltung, wie sie bei Cassirer zu finden ist, nimmt auch Paul Natorp in seinem 1910 veröffentlichten Buch *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften* ein. Bereits im ersten Abschnitt zählt er Frege zu den „vorwärts strebenden“ Mathematikern, die den Dualismus von reiner Anschauung und reinem Denken ganz verwerfen und mit Anstrengung daran arbeiten würden, „den Bau der Mathematik rein auf logischem Fundament zu errichten“ (Natorp 1910, S. 3). Doch distanziert er sich zugleich von einer „extremen Richtung“, welche sich bei diesem Vorhaben auf eine Logik stütze, die unter dem Namen der „Logistik“ oder „symbolischen Logik“ im Grunde nichts anderes als eine Erweiterung der traditionellen „Formallogik“ darstelle. Als Vorläufer und Wegbereiter dieser Richtung wird ausdrücklich Frege genannt. Dagegen ist zu sagen, dass eine solche Zuschreibung keineswegs dem Selbstverständnis Freges entspricht, für den die Logik nicht ohne Inhalte auskommt. Freges Logizismus, der ja besagt, dass die Arithmetik ein Zweig der Logik ist, setzt geradezu ein inhaltliches Verständnis der Logik voraus; denn aus bloßen Formen lassen sich keine arithmetischen Inhalte gewinnen.

Differenzierter fällt Natorps Einschätzung in einem späteren Abschnitt des Buches aus, in dem er sich mit Freges „Ableitungsversuch“ der Null und der Eins auseinandersetzt. Hier wird zugestanden, dass Frege den „reinen Grundgesetzen des Denkens“, welche die Zahl ausdrücke, schon auf der Spur sei. Allerdings wisse er sie noch nicht von den übrigen reinen Denkfunktionen abzusondern und in ihren wahren logischen Beziehungen zu sehen (Natorp 1910, S. 112ff.; vgl. hierzu Thiel 1997). Eine solche Begründung der Mathematik aus dem korrelativen Zusammenwirken der logischen Urfunktionen strebt Natorp selbst an.

Es ist gerade dieser Marburger „Logizismus“, gegen den sich Rickert in seinem Aufsatz zum Zahlbegriff richtet. Deutlich ausgesprochen wird dieser Bezug im *Literarisch-kritischen Nachtrag* zur zweiten Auflage von Rickerts Beitrag:

> Die vorstehende Arbeit ist nicht so sehr gegen den einseitigen Empirismus [...], als vielmehr gegen den einseitigen Logizismus gerichtet, wie er nach Kant [...] besonders von dem „Marburger“ Kantianismus vertreten worden ist. (Rickert 1924, S. 87)

Um diesen Gegner gleichsam an seiner empfindlichsten Stelle zu treffen, will Rickert den Nachweis erbringen, dass selbst die Arithmetik als rationalste aller Wissenschaften nicht mit rein logischen Mitteln auskomme.[10] Dabei spricht sich Rickert mit großem Nachdruck für eine scharfe Grenzziehung zwischen Mathematik und Logik aus. Nach seiner Ansicht hat es die Logik (als Lehre vom Logos) in ihrer reinsten Ausprägung mit den Formen der Gegenständlichkeit überhaupt zu tun. Die Mathematik als Einzelwissenschaft hingegen befasst sich mit inhaltlich schon in besonderer, nämlich quantitativer Weise bestimmten Gegenständen. Im Falle der Arithmetik sind das die Zahlen. Zwar gesteht Rickert in Übereinstimmung mit Frege zu, dass diese als mathematische Gegenstände nicht wirklich wie physische oder psychische Dinge sind, jedoch folge aus der Anerkennung dieser „Unwirklichkeit" noch nicht ihr rein logischer Charakter. Vielmehr handele es sich bei der Zahl um ein Gebilde, das neben logischen Bestimmungen auch alogische Elemente enthalte. Um das „alogische Wesen der Zahl" zu betonen, grenzt Rickert diese im Fortgang seiner Untersuchung vom *Begriff* der Zahl ab: „Es gibt beliebig viele Eins, beliebig viele Zwei usw., die alle als Exemplare unter die Begriffe der Eins, der Zwei usw. fallen, wenn es auch selbstverständlich nur *je einen* Begriff der Eins, der Zwei usw. geben kann". (Rickert 1911, S. 69)

Gerade hierin erblickt nun Bruno Bauch einen Rückfall in die „von Frege verspottete Arithmetik der Kieselsteine und Pfeffernüsse" (Bauch 1926, S. 63). Erscheinen doch Rickerts Auffassung zufolge die Zahlen selbst wiederum als zählbare, wenn auch unwirkliche, Gegenstände. Obwohl Bauch meistens den Südwestdeutschen Neukantianern zugezählt wird, hat er sich andererseits auch stark den Positionen der Marburger angenähert. Überdies unterhielt er in Jena enge Beziehungen zu Frege .[11] Dessen Versuch, die Arithmetik zu „logisieren", verteidigt Bauch besonders eindringlich in der 1926 erschienenen Schrift *Die Idee*. Seinem Lehrer Rickert schreibt er hier – ohne Namensnennung, aber mit deutlicher Referenz – ins Stammbuch: „Eine wissenschaftliche Tat, wie die Leistung Freges, darf der Logiker, der heute über das Wesen der Zahlen mitsprechen will, nicht mehr ignorieren." (Bauch 1926, S. 71)

Insgesamt ist zu hoffen, dass die hier vorgelegte problemgeschichtliche Betrachtung von Freges Philosophie der Mathematik im Kontext des Neukantianismus die möglichen und vielleicht auch unmöglichen Alternativen einer systematischen Begründung von Arithmetik und Geometrie aufgewiesen hat, die im Weiteren zu diskutieren wären.

---

[10] Die Rolle der Anschauung hebt Rickert in diesem Zusammenhang besonders hervor und betont im Anschluss an Kant: „Begriffe ohne Anschauungen oder Formen ohne Inhalte sind 'leer'." (Rickert 1924, S. 86) Weiter spricht er dann (ebd.) von der „Anschauung" als dem „Irrationalen" und fügt (S. 87) im Sinne der Verbindung von Begriff und Anschauung hinzu: „Wer erkennen will, muß denken *und* schauen. Er braucht das Eine und das Andere."

[11] Vgl. auch Bauch 1942. Zu Bauch siehe ausführlich Schlotter 2004.

Literatur

Bauch, Bruno 1926: Die Idee. Leipzig.

Bauch, Bruno 1942: Zum Problem der Zahl; in: Die Tatwelt 18, S. 93–104.

Carnap, Rudolf 1922: Der Raum. Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre (Kant-Studien, Ergänzungshefte, Nr. 56). Berlin.

Cassirer, Ernst 1907: Kant und die moderne Mathematik; in: Kant-Studien 12, S. 1–49.

Cassirer, Ernst 1910: Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik. Berlin.

Cassirer, Ernst 1929: Philosophie der symbolischen Formen. Dritter Teil: Phänomenologie der Erkenntnis. Berlin.

Cohn, Jonas 1908: Voraussetzungen und Ziele des Erkennens. Untersuchungen über die Grundfragen der Logik. Leipzig.

Frege, Gottlob 1873: Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene. Diss. Göttingen. Jena.

Frege, Gottlob 1884: Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau.

Frege, Gottlob 1885/86: Über formale Theorien der Arithmetik; in: Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft 19, S. 94–104.

Frege, Gottlob 1893: Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet, Bd. 1. Jena.

Frege, Gottlob 1983: Nachgelassene Schriften, hg. von H. Hermes/F. Kambartel/F. Kaulbach. 2. Aufl. Hamburg.

Gabriel, Gottfried/Schlotter, Sven 2017: Frege und die kontinentalen Ursprünge der analytischen Philosophie. Münster.

Kant, Immanuel 1911: Kritik der reinen Vernunft (zweite Auflage); in: Kants gesammelte Schriften (Akademie-Ausgabe), Bd. 3. Berlin.

Kaulbach, Friedrich 1983: Der neue Ansatz und die geometrische Erkenntnisquelle (Einleitung zu Frege 1983), S. XXV–XXXIII.

Kreiser, Lothar 1984: G. Frege „Die Grundlagen der Arithmetik“ – Werk und Geschichte; in: Frege Conference 1984, hg. von G. Wechsung. Berlin (Ost), S. 13–27.

Kreiser, Lothar 2001: Gottlob Frege. Leben – Werk – Zeit. Hamburg.

Liebmann, Otto 1865: Kant und die Epigonen. Eine kritische Abhandlung. Stuttgart.

Liebmann, Otto 1880: Zur Analysis der Wirklichkeit. Eine Erörterung der Grundprobleme der Philosophie. 2. Aufl. Straßburg.

Liebmann, Otto 1900: Zur Analysis der Wirklichkeit. Eine Erörterung der Grundprobleme der Philosophie. 3. Aufl. Straßburg.

Natorp, Paul 1910: Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig.

Rickert, Heinrich 1911: Das Eine, die Einheit und die Eins. Bemerkungen zur Logik des Zahlbegriffs; in: Logos 2, S. 26–78.

Rickert, Heinrich 1924: Das Eine, die Einheit und die Eins. Bemerkungen zur Logik des Zahlbegriffs. Zweite, umgearbeitete Aufl. (Heidelberger Abhandlungen zur Philosophie und ihrer Geschichte, hg. von E. Hoffmann u. H. Rickert, Nr. 1). Tübingen.

Russell, Bertrand 1903: The Principles of Mathematics. Cambridge.

Schlotter, Sven 2004: Die Totalität der Kultur. Philosophisches Denken und politisches Handeln bei Bruno Bauch. Würzburg.

Thiel, Christian 1997: Natorps Kritik an Freges Zahlbegriff; in: Frege in Jena. Beiträge zur Spurensicherung, hg. von G. Gabriel u. W. Kienzler. Würzburg, S. 123–128.

Wille, Matthias 2016: „Largely unknown". Gottlob Frege und der posthume Ruhm. Münster.

Windelband, Wilhelm 1915: Präludien. Aufsätze und Reden zur Philosophie und ihrer Geschichte, Bd. 1. 5. Aufl. Tübingen.

Leonard Nelson: Mathematische Erkenntnis als synthetisches Apriori

Kay Herrmann

Motivation

Die Philosophie der Mathematik von Leonard Nelson verdient in mehrerlei Hinsicht besonderes Interesse: Der eng an Kant anschließende Wissenschaftlichkeitsanspruch seiner Philosophie weckte das Interesse David Hilberts, der in Nelson den geeigneten Philosophen sieht, die philosophischen Implikationen seines axiomatischen Programms zu klären. Leonard Nelson gehört zu den frühen Interpreten der modernen mathematischen Axiomatik. Seine Überlegungen zur mathematischen Erkenntnis machen die Möglichkeiten und Grenzen der Übertragbarkeit der kantischen Philosophie auf die moderne Mathematik deutlich.

1 Anmerkungen zur Rolle der Mathematik in der Fries-Nelson'schen Philosophie

Fries

Der erste umfassende Entwurf einer *Philosophie der Mathematik* (noch vor Novalis) geht auf Jakob Friedrich Fries zurück. Zwar präsentierte etwa 130 Jahre vor Fries in Jena (1693) Erhard Weigel[1] einen Entwurf einer Philosophie der Mathematik (*Philosophia Mathematica, Theologia Naturalis solida, Per singulas scien-*

[1] Erhard Weigel wurde 1625 geboren und starb 1699 in Jena. Er war tätig als Mathematiker, Astronom, Philosoph und Pädagoge. Mit seinen Bemühungen, die Methoden der Mathematik zur Grundlage aller übrigen Wissenschaften zu machen, beeinflusste er seine Schüler Leibniz und Pufendorf.

tias continuata); doch bei Weigel waren noch theologische, ontologische, logische, physikalische und mathematische Überlegungen vermischt (vgl. König/Geldsetzer: Vorbemerkung der Herausgeber zum 13. Band (vgl. WW 13, S. 42*)).

Seinem 1822 erschienenen Werk ‚Mathematische Naturphilosophie' stellte Fries eine Philosophie der Mathematik voran, die ca. 60 % dieser Arbeit beansprucht. Damit entwickelte Fries eine eigene Disziplin, die *Mathesis prima*: „Auf solche Art ergibt sich die Aufgabe einer eignen Wissenschaft, *Mathesis prima* oder *Philosophie der Mathematik* genannt, deren Frage ist: woher kommt uns die mathematische Erkenntniß und welche Ansprüche hat sie im ganzen System der menschlichen Ueberzeugungen zu machen?" (Fries, Mathematische Naturphilosophie, S. 35)

Im Jahre 1824 erhielt Fries eine Physikprofessur. Es begann eine Zeit intensiver Beschäftigung mit Mathematik und Physik, die zugleich mit zahlreichen Kontakten zu Naturwissenschaftlern und Mathematikern verbunden war. Die Arbeiten von Fries stießen auch bei Carl Friedrich Gauß und Wilhelm Weber auf große Beachtung und Wertschätzung. So wurde die letzte größere Arbeit von Fries, sein ‚Versuch einer Kritik der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung' (1842), von Gauß interessiert aufgenommen (vgl. Herrmann 2000, S. 143).

Die Fries'sche Schule (1847–1849)

Ernst Friedrich Apelt, Heinrich Johann Theodor Schmid, der Zoologe Oscar Schmidt und der Mathematiker Oskar Schlömilch gehörten zu den wichtigsten Vertretern der Fries'schen Schule, die ein interdisziplinäres Projekt von Philosophen und mathematisch-naturwissenschaftlich orientierten Wissenschaftlern darstellte.

Schlömilch erlangte als Mathematiker und Wissenschaftsorganisator Bekanntheit. Er wurde am Weimarer Gymnasium von dem Fries-Schüler Ludwig Kunze in Mathematik und Physik unterrichtet. Von Kunzes Lehrweise war Schlömilch angetan. Schlömilch kam im Frühjahr 1839 an die Jenaer Universität. Er begann zunächst mit dem Studium der Philosophie. Die Philosophie von Fries übte auf ihn eine besondere Anziehungskraft aus. Auf Fries' Anraten hin setzte Schlömilch 1840 sein Studium an der Universität zu Berlin fort, wo er bei Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet über die Theorie bestimmter Integrale und über die Zahlentheorie hörte. Schlömlich übernahm das Unendlichkeitskonzept von Fries, der das Aktual-Unendliche ablehnte und das Unendliche als Unvollendbares bestimmte, eine nicht zeittypische Position (vgl. Herrmann 2000, S. 208).

Die Neue Fries'sche Schule

Die mit Fries und der Fries'schen Schule begonnene Tradition einer engen Verbindung von Philosophie und Mathematik setzte sich in der Neuen Fries'schen Schule fort. Leonard Nelson, der Initiator der Neuen Fries'schen Schule, gründete noch während seiner Zeit am Französischen Gymnasium in Berlin einen philosophischen Diskussionskreis, dem u. a. auch der Mathematiker Gerhard Hessenberg angehörte. Bei Hessenberg nahm Nelson private Mathematikstunden. Als Nelson 1901 sein Studium in Heidelberg begann, besuchte er u. a. das mathematische Kolleg von Leo Königsberger, das ihn sehr beeindruckte (vgl. Peckhaus 1990, S. 130). Nachdem Nelson zum Wintersemester 1903/04 nach Göttingen wechselte, gründete er einen festen philosophischen Kreis, die „Neue Fries'sche Schule“ Gerhard Hessenberg gehörte zu den Gründungsmitgliedern und prägenden Vertretern der Neuen Fries'schen Schule. Mit seinem Vortrag „Über die kritische Mathematik“ (1903) zeigte Hessenberg erstmals eine Verbindung zwischen David Hilberts axiomatischem Programm und der Fries'schen Philosophie auf (vgl. Peckhaus 1990, S. 134). Dieser Ansatz wurde von Hessenberg und später von Nelson im Detail ausgearbeitet. Hessenberg und Nelson betrachteten Fries als Vorläufer der *kritischen Mathematik*. Nach Nelson zeige „die moderne Axiomatik ein durchaus analoges Verhältnis, wie es zwischen der Friesschen Vernunftkritik und dem System der Metaphysik besteht, wo auch die Prinzipien des Systems zum Gegenstand der Kritik gemacht werden, ...“ (Nelson, Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik, S. 199). Nelson merkt an: „Was ist nun die heute jedem Mathematiker vertraute axiomatische Methode anderes als jene Friessche regressive Methode zur Aufdeckung der Prinzipien?“ (Nelson, Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik, S. 198) Bei Fries' regressiver Methode wird der *Inhalt* des Systems der Metaphysik zum *Gegenstand* derjenigen Erkenntnis, die *Inhalt* der Kritik ist. Analog gehe, so Nelson, die moderne Axiomatik vor: Die Sätze, die den *Inhalt* des Systems der Mathematik ausmachen, werden zum *Gegenstand* der Sätze, die den *Inhalt* der Axiomatik ausmachten (vgl. Nelson, Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik, S. 198).

Eine besondere Förderung wurde Nelson durch die Göttinger Mathematiker David Hilbert und Felix Klein zuteil. Mathematik, Physik und Philosophie bilden nach Hilberts Auffassung einen zusammenhängenden Wissenskomplex, wobei insbesondere der Zusammenhang zwischen Philosophie und Mathematik zu pflegen sei. Diesen Anspruch sah Hilbert vor allem durch Edmund Husserl und Leonard Nelson vertreten.

Ab dem Jahre 1904 setzte sich bei Hilbert die Überzeugung durch, dass die Grundlegung der Mathematik auch Anstrengungen philosophischer Art bedürfe. Der Briefwechsel mit Frege zwischen 1899 und 1900 dürfte hierbei eine Rolle gespielt haben (vgl. Peckhaus 1990, S. 151). In Nelson sah Hilbert einen fähigen Philosophen, eine solche Aufgabe leisten zu können. Nachdem Husserl zum Sommersemester 1916 einen Ruf an die Universität Freiburg i. Br. angenommen hatte, versuchte Hilbert, Nelson fest an die Göttinger Universität zu binden. So ist es maßgeblich dem persönlichen Engagement David Hilberts zu verdanken, dass Nelson am 28. Juni 1919 zum Extraordinarius an der Göttinger Universität berufen wurde (vgl. Peckhaus 1990, S. 223). Der hohe Stellenwert, den Hilbert Nelson beimaß, geht u. a. auch aus einem Schreiben Hilberts an den Minister hervor, in dem er Argumente für die Berufung Nelsons sammelte:

> „Ich kann ein[en] wichtigen Teil meines Lebensprogramms nicht durchführen ohne N[elson]. N[elson] ist der Sauerteig[,] er wird hier eine Ausschlag gebende, auf feste Principien gerichtete Schule vertreten: Seine Berufung ist Kulturtat 1sten Ranges: Reformation des Geistes des Professorentums. Ohne N[elson] bin ich Nichts in der Fakultät." (SUB Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 482, Bl. 15; zitiert nach: Peckhaus 1990, S. 224)

Eine Schlüsselrolle innerhalb der Neuen Fries'schen Schule spielte der Mathematiker Paul Bernays, der 1909 nach Göttingen kam und 1912/13 Mitglied der von Nelson gegründeten Jakob-Friedrich-Fries-Gesellschaft wurde. Nach Nelsons Tod bemühte sich Bernays, der sich später der Philosophie Ferdinand Gonseths zuwandte, intensiv um eine Reform des kritischen Ansatzes. Dabei löste er sich von der Fries'schen Annahme einer bereits vor jeglicher Erfahrung fest in unserer Vernunft liegenden Erkenntnis. Er betonte, dass gerade in der modernen Mathematik die kantische Lehre von der reinen Anschauung wieder Bedeutung erlangt habe. Denn für den Aufbau der Mathematik müsse eine gewisse Art rein anschaulicher Erkenntnis als Ausgangspunkt genommen werden. Bernays erwähnt z. B. die „anschauliche Vorstellung des Diskreten". (Bernays 1933, S. 108.) Denn ausgehend vom Diskreten könne man auf konstruktive Art und Weise Kombinatorik und Arithmetik entwickeln. Bernays wies in diesem Zusammenhang auf Leopold Kronecker und Luitzen E. J. Brouwer hin, die die Mathematik allein aus dem Anschaulichen heraus zu entwickeln versuchten (vgl. Bernays 1933, S. 110). Zwar stehe Hilberts Standpunkt hierzu in Opposition, doch messe auch Hilbert dem Anschaulichen eine ausgezeichnete Stellung bei (vgl. Bernays 1933, S. 111):

> „Im Gegensatz zu den früheren Bestrebungen von Frege und Dedekind erlangen wir die Überzeugung, daß als Vorbedingung für die Möglichkeit wissenschaftlicher Erkenntnis gewisse anschauliche Vorstellungen und Einsichten unentbehrlich sind und die Logik allein nicht

> ausreicht. Das Operieren mit dem Unendlichen kann nur durch das Endliche gesichert werden.“ (Hilbert 1925, S. 190)

Auch die Nelson-Schülerin Grete (Henry-)Hermann beschäftigte sich zunächst intensiv mit Mathematik. Sie studierte bei Emmy Noether Mathematik und bei Leonard Nelson Philosophie. Mit ihrer Arbeit ‚Zur Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale (unter Benutzung nachgelassener Sätze von K. Hentzelt)‘ wurde sie 1925 bei Emmy Noether promoviert.

2 Das synthetische Apriori und der Wissenschaftlichkeitsanspruch der Philosophie

Nelson stand in der Tradition des kantischen Kritizismus, der die Quelle objektiver Erkenntnisse weder in der Logik noch in der Empirie sucht. Nach Kant ermöglichen allein synthetische Urteile a priori die Objektivität von Erkenntnissen, indem die *synthetischen Urteile a priori* die *Bedingungen der Möglichkeit für Erfahrung überhaupt* formulieren. Den Terminus *a priori* führt Kant in der Einleitung seiner ‚Kritik der reinen Vernunft, 2. Aufl. 1787‘ ein. Zunächst beginnt er mit einer ‚negativen‘ Bestimmung von Erkenntnissen a priori:

> „Wir werden also im Verfolg unter Erkenntnissen a priori nicht solche verstehen, die von dieser oder jener, sondern die schlechterdings von aller Erfahrung unabhängig stattfinden.“ (KrV, 2 f.)

Im Anschluss an diese ‚negative‘ (d. h. das Erfahrungsmäßige ausschließende) Bestimmung des Apriorischen fragt Kant nach einem Kriterium zur Unterscheidung zwischen apriorischen (oder reinen) und aposteriorischen (oder empirischen) Erkenntnissen:

> „Es kommt hier auf ein Merkmal an, woran wir sicher ein reines Erkenntniß von empirischen unterscheiden können.“ (KrV, 3)

Die gesuchten Kriterien sind für ihn die *Notwendigkeit* und die *Allgemeinheit* einer Erkenntnis. Mit diesen Kriterien nimmt er eine ‚positive‘ Charakterisierung des Apriorischen vor. Die Begriffe *Notwendigkeit* und *(strenge bzw. unbeschränkte) Allgemeinheit* sind für Kant die einzigen ‚positiven‘ Merkmale des Apriorischen:

> „Findet sich also erstlich ein Satz, der zugleich mit seiner Nothwendigkeit gedacht wird, so ist er ein Urtheil a priori; ist er überdem auch von keinem abgeleitet, als der selbst wiederum als ein nothwendiger

> Satz gültig ist, so ist er schlechterdings a priori. Zweitens: Erfahrung giebt niemals ihren Urtheilen wahre oder strenge, sondern nur angenommene und comparative Allgemeinheit (durch Induction), so daß es eigentlich heißen muß: so viel wir bisher wahrgenommen haben, findet sich von dieser oder jener Regel keine Ausnahme. Wird also ein Urtheil in strenger Allgemeinheit gedacht, d. i. so, daß gar keine Ausnahme als möglich verstattet wird, so ist es nicht von der Erfahrung abgeleitet, sondern schlechterdings a priori gültig.“ (KrV, 3 f.)

Das von Kant vertretene Konzept des synthetischen Apriori, dem sich Nelson anschließt, ist nicht vereinbar mit einem biologistischen Apriori-Konzept, wie es später von Konrad Lorenz und im Rahmen der ihm nachfolgenden Evolutionären Erkenntnistheorie vertreten wurde. Die Evolutionäre Erkenntnistheorie deutet das Apriori empirisch im Sinne einer stammesgeschichtlich entstandenen Organfunktion, die (darwinistisch betrachtet) in Anpassung an Umgebungsfaktoren entstanden sei. Empiristische Reinterpretationsversuche für das Apriori stehen der kantischen Tradition diametral entgegen, da diese die Frage nach dem Grund der objektiven Geltung von wissenschaftlicher Erkenntnis nicht klären. Selbst wenn eine empirische Theorie der Erkenntnis (etwa im Sinne der evolutionären Erkenntnistheorie) zutreffen sollte, bliebe eben das kantische Problem offen, woher wissenschaftliche Erkenntnisse ihre Objektivität nähmen, wenn alle Regeln nur empirisch bewährt wären. Besser und kürzer als Kant selbst lässt sich die Kritik an jeder empirischen Theorie der Erkenntnis kaum formulieren:

> „Denn wo wollte selbst Erfahrung ihre Gewißheit hernehmen, wenn alle Regeln, nach denen sie fortgeht, immer wieder empirisch, mithin zufällig wären; daher man diese schwerlich für erste Grundsätze gelten lassen kann.“ (KrV, 5)

Leonard Nelson knüpft hier an: Die Metaphysik liefere die Kriterien für die Unterscheidung zwischen vernünftigen und unvernünftigen sowie zwischen wissenschaftlichen und unwissenschaftlichen Denkweisen (vgl. Nelson, Ist metaphysikfreie Naturwissenschaft möglich? 273f.).

An Kant kritisierte Nelson, dass dieser versucht habe, die metaphysischen Grundsätze zu *beweisen* (vgl. Nelson, Über das sogenannte Erkenntnisproblem S. 229). Nelson hielt, anknüpfend an Fries, entgegen, dass die Philosophie die metaphysischen Grundsätze, auf denen die Wissenschaften beruhen, lediglich nach dem regressiv-abstraktiven Verfahren aufweisen könne. Dabei müsse die Philosophie selbst den Charakter einer strengen Wissenschaft haben. Der Prototypus einer strengen Wissenschaft ist seit jeher die Mathematik. Es liegt somit nahe, dass

Mathematik und mathematische Erkenntnis für Nelson von besonderem Interesse sind.

3 Nelsons Konzept der mathematischen Erkenntnis

Das Begründungsproblem in der Mathematik besteht in der Frage, worauf mathematische Erkenntnisse gründen bzw. welche Erkenntnisquelle sie haben. Zur Lösung des Begründungsproblems in der Mathematik kamen für Nelson weder der Empirismus noch Gottlob Freges Logizismus (vgl. Gottfried Gabriels Beitrag in diesem Band) infrage.

Ausgangspunkt für Nelsons Überlegungen hinsichtlich der Erkenntnisquelle mathematischer Erkenntnisse ist einerseits deren Anspruch auf allgemeine und notwendige Geltung, weshalb die Erfahrung als Erkenntnisquelle mathematischer Urteile ausscheide. Die mathematischen Erkenntnisse können somit keine empirischen Erkenntnisse sein. Andererseits schließe der Nachweis des synthetischen Charakters der mathematischen Erkenntnisse nach Nelson aus, dass diese der Logik entstammen. Somit können mathematische Erkenntnisse auch keine logischen Wahrheiten sein. Die Logik könne lediglich durch ihre Schlüsse die Gewissheit apodiktischer Grundsätze auf die Lehrsätze übertragen, aber die apodiktische (nicht-empirische) Geltung müsse den Grundsätzen bereits innewohnen (vgl. Nelson, Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie, S. 14). Die mathematischen Sätze gründen nach Nelson vielmehr in der *mathematischen Anschauung* (vgl. Nelson, Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie, S. 11 f.) Nelsons Begriff der *mathematischen Anschauung* entspricht Kants Begriff der *reinen Anschauung* (vgl. Nelson, Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie, S. 12).

3.1 Zur Rolle der Anschauung

Die Rolle des *Anschaulichen* in der Mathematik steht in Nelsons Vortrag ‚Des fondaments de la géométrie (1914)' im Blickfeld. Nelson beginnt mit der Fragestellung, ob es eine Erkenntnis gibt, die nicht auf Logik rückführbar ist und trotzdem nicht aus der Erfahrung geschöpft werden kann. Er hebt hervor, dass die Arithmetisierung der Mathematik das Anschauliche zurückgedrängt habe und eher eine logizistische Konzeption begünstige. Hierfür spreche die Entwicklung der Analysis, aber auch, dass es gelungen sei, den Raumbegriff als Sonderfall einer *n-dimensionalen Mannigfaltigkeit* ohne Zuhilfenahme der Anschauung zu entwickeln (vgl. Nelson, Über die Grundlagen der Geometrie, S. 162 f.). Doch Nelson hält entgegen, dass es unmöglich sei, den Begriff der Ausdehnung allein durch ein logisches Verfahren zu gewinnen.

Analog argumentiert er im Hinblick auf den Begriff des Differenzialquotienten:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = l$$

Mit dem durch Grenzwertbildung vollzogenen Übergang vom Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zum Differenzialquotienten $l = \frac{dy}{dx}$ werde der Übergang von einer Sekante zu einer Tangente nachgebildet. Ohne die anschauliche Vorstellung eines solchen Überganges gelange man zu dem sinnlosen Ausdruck:

$$\frac{0}{0}$$

Es gäbe kein analytisches Verfahren, das diesem anschaulichen Übergang entspreche (vgl. Nelson, Über die Grundlagen der Geometrie, S. 166).

Nelson folgert, dass, je mehr es gelänge, die Anschauung aus dem System der Geometrie zurückzudrängen, desto leichter sie in deren Grundlagen wiedergefunden werden könne. Als Beispiel nennt er die projektive Geometrie. Gemäß dem Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie können in den Sätzen der projektiven Geometrie die Begriffe *Punkt* und *Gerade* ausgetauscht werden, ohne dass sich ein Widerspruch ergebe. Aber den Unterschied zwischen *Punkt* und *Gerade* könne man nur der Anschauung entnehmen (vgl. Nelson, Über die Grundlagen der Geometrie, S. 170).

Nelson setzt sich mit dem Einwand auseinander, dass die Anschauung oft trüge. Er nennt als Beispiel das Möbius'sche Band, auf dessen Oberfläche man von jedem Punkt aus jeden beliebigen anderen Punkt erreichen könne, ohne dabei dessen Rand zu überschreiten – was eine eher kontraintuitive Vorstellung sei. Allerdings könne man daraus nicht schließen, dass uns die *Anschauung* täusche. Vielmehr hätten wir zu früh von den Besonderheiten des Möbius'schen Bandes abstrahiert, und somit sei unsere Aufmerksamkeit nicht auf den Unterschied zwischen zweiseitigen und einseitigen Oberflächen gelenkt worden. Der Grund für die Täuschung liege nicht in der Anschauung, sondern in einer vorschnellen *Reflexion.* Gerade die Anschauung könne diese Täuschung aufdecken (vgl. Nelson, Über die Grundlagen der Geometrie, S. 172).

Die Konstruierbarkeit in der Anschauung gilt Nelson als Kriterium der mathematischen Existenz (vgl. Nelson, Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie,

S. 42). Denn allein die logische Widerspruchsfreiheit sei nicht bereits gleichbedeutend mit mathematischer Existenz. So seien zwar Begriffe wie *größte Primzahl*[2], *regulärer Siebenflächner* logisch möglich, dennoch mathematisch nicht existent. Nelson konstatiert, dass sich keine ‚positiven' Kriterien der mathematischen Existenz aus bloßer Logik ableiten lassen.

3.2 Der synthetisch-apriorische Charakter der mathematischen Erkenntnis

a) Apriorität

Im Zentrum der Philosophie der Mathematik von Nelson steht die Behauptung vom synthetisch-apriorischen Charakter der mathematischen Urteile. Wie auch Kant unterschied Nelson zwischen *Erkenntnissen a posteriori* und *Erkenntnissen a priori*. Er nennt eine Erkenntnis *a posteriori* oder *empirisch*, wenn sie auf sinnliche Wahrnehmung gründet. Ist dies nicht der Fall, wird sie als Erkenntnis *a priori* bezeichnet (vgl. Nelson, Kant und die nicht-euklidische Geometrie, S. 70).

Die Apriorität der mathematischen Sätze belegt Nelson mit dem Hinweis, dass die Allgemeinheit dieser Sätze eine andere Quelle voraussetze als die Wahrnehmung; diese Sätze seien nicht durch die Messung sinnlich gegebener Naturkörper gewonnen worden (vgl. Nelson, Kant und die nicht-euklidische Geometrie, S. 74).

Empirisch könne ein geometrischer Satz weder bestätigt noch widerlegt werden. Ergäbe eine Vermessung des physikalischen Raumes nicht-euklidische Verhältnisse, könne daraus nicht auf die Widerlegung der euklidischen Geometrie geschlossen werden, vielmehr wäre gezeigt, dass sich die physikalischen Verhältnisse durch die euklidische Geometrie nicht in adäquater Weise beschreiben lassen (vgl. Nelson, Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie, S. 26). Nelson plausibilisiert diese Überlegung durch folgende Analogie: Der Satz von der Gleichheit aller Radien eines Kreises gilt ausnahmslos für alle Kreise, dennoch ist er nicht geeignet, die Form jedes einzelnen (wirklichen) Rades zu beschreiben (vgl. Nelson, Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie, S. 28).

[2] Erstaunlicherweise spricht Nelson dem Begriff *größte Primzahl* logische Möglichkeit zu, obwohl bereits der Beweis von Euklid zeigen konnte, dass die Annahme einer größten Primzahl auf einen logischen Widerspruch führt. Dasselbe gilt für den regulären Siebenflächner. In Euklids Elementen wird bewiesen, dass es genau fünf platonische Körper gibt. Für den Kantianer Nelson sind die *größte Primzah*l oder der *reguläre Siebenflächner* zwar logisch, aber nicht synthetisch möglich, weil sie nicht konstruierbar sind. Aus diesem Blickwinkel zeigt der Beweis von Euklid die synthetische Unmöglichkeit dieser mathematischen Objekte.

Da die Mathematik keine Erfahrungswissenschaft sei, könne man ihre Axiome auch nicht als Hypothesen bezeichnen. Nicht die Induktion führe zu den Grundsätzen der Geometrie, sondern das *regressive Verfahren der Abstraktion.* Die Induktion setze allgemeine, nicht-empirische Obersätze bereits voraus. So konnte Kepler seine Gesetze der Planetenbewegung aufstellen, weil er bereits a priori über die Gesetze der Kegelschnitte verfügte.

Bei der Abstraktion wird von einem verbundenen Ganzen der Erkenntnis ausgegangen, und dann der apriorische Teil abgetrennt und gesondert zu Bewusstsein gebracht. Auf diese Weise konnte etwa die euklidische Geometrie an in der Natur vorfindlichen hinreichend starren Körpern aufgefunden werden. Diese wäre möglicherweise nie entdeckt worden, befänden wir uns in einer Welt, in der es keinerlei starre Körper gibt, was allerdings den Gültigkeitsanspruch der euklidischen Geometrie nicht einschränkt.

b) Synthetizität

Nelson schließt unmittelbar an die in Kants Einleitung in die ‚Kritik der reinen Vernunft, 2. Aufl. 1787‘ getroffene Unterscheidung zwischen *analytischen* und *synthetischen* Urteilen an. Er stellt diese Unterscheidung am Urteil „S ist P“ dar. In Überstimmung mit Kant definiert er: Ist das Prädikat P im Subjekt S bereits enthalten, handle es sich um ein analytisches Urteil, komme P als Neues zu S hinzu, müsse von einem synthetischen Urteil gesprochen werden (vgl. Nelson, Kant und die nicht-euklidische Geometrie, S. 61 f.) Nelson illustriert diese Unterscheidung anhand der Eigenschaften des Kreises. Der Satz ‚Alle Radien eines Kreises haben dieselbe Länge‘ liege bereits in der Definition des Kreises, weshalb es sich um ein analytisches Urteil handle. Dagegen müsse die Behauptung ‚Der Quotient aus Umfang und Durchmesser eines Kreises ergibt die Zahl Pi‘ eine andere Erkenntnisquelle haben als den begriffszergliedernden Verstand, da sich diese Aussage nicht unmittelbar aus der Definition des Kreises ergäbe. Diese Aussage sei kein analytischer Satz, also keine logische Wahrheit, sondern ein synthetisches Urteil. Die Logik könne somit nicht die Erkenntnisquelle mathematischer Urteile sein.

Im Hinblick auf den nicht-logischen Charakter der arithmetischen Urteile zitiert Nelson den von Gottfried Wilhelm Leibniz anscheinend aus rein logischen Prämissen geführten Beweis des Satzes $2 + 2 = 4$. Die Zahlen 2, 3, 4 werden zunächst rein definitorisch eingeführt:

(1) $2 := 1 + 1$

(2) $3 := 2 + 1$

(3) $4 := 3 + 1$ usw.

Zu zeigen ist $2 + 2 = 4$.

Beweis:

Schritt 1: Mit (1) folgt $2 + 2 = 2 + (1 + 1)$

Schritt 2: Aus Schritt 1 folgt: $2 + (1 + 1) = (2 + 1) +1$

Schritt 3: Aus Schritt 2 folgt mit (2): $2 + (1 + 1) = 3 + 1$

Schritt 4: Aus Schritt 3 folgt mit (1) und (3) $2 + 2 = 4$

Um den Beweis zu führen, musste in Schritt 2 vom *Assoziativgesetz der Addition* Gebrauch gemacht werden. Nelson weist darauf hin, dass es sich beim Assoziativgesetz der Addition nicht um eine „Identität im logischen Sinne" (Nelson, Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie, S. 41) handle. Aus heutiger Sicht ist hinzuzufügen, dass sich in der Tat auch nicht-assoziative Algebren ohne logischen Widerspruch entwickeln lassen, was für Nelsons These vom nicht-logischen Charakter des Assoziativgesetzes spricht. Nelson erwähnt in diesem Zusammenhang, dass sich ohne logischen Widerspruch ein System von Zahlen denken lasse, das das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht erfüllt, was aus heutiger Sicht ebenso zutreffend ist.

Als Synthetizitätskriterium gilt für Nelson „die logische Widerspruchslosigkeit des Gegenteils" (Nelson, Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie, S. 23) oder anders ausgedrückt: die widerspruchsfreie Möglichkeit des Gegenteils (Widerspruchsfreiheit der Verneinung).

Dieses Synthetizitätskriterium spielt für den Nachweis des synthetisch-apriorischen Charakters der geometrischen Axiome eine Schlüsselrolle. Gerade durch die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien sieht Nelson seine Argumente für den synthetisch-apriorischen Charakter der mathematischen Erkenntnisse bestätigt. Nach der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien entbrannte ein Streit über den Charakter und den Ursprung der mathematischen Axiome. So vertrat Hermann von Helmholtz die Auffassung vom empirischen Ursprung der mathematischen Axiome. Nelson dagegen sah in den nicht-euklidischen Geometrien einen Beleg für den synthetisch-apriorischen Charakter der mathematischen Erkenntnisse.

Die nicht-euklidischen Geometrien wurden gewonnen, indem ein Axiom (konkret das Parallelenaxiom) durch eine widersprechende Annahme ersetzt werden konnte, ohne dass sich aus dem Axiomensystem ein logischer Widerspruch hätte ableiten lassen (vgl. Nelson, Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie, S. 16). Nelson schloss daraus auf den synthetischen (nicht-logischen) Charakter der geometrischen Axiome (vgl. Nelson, Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie, S. 23).

3.3 Nelsons Fazit

Nelsons Resümee besteht also in der Feststellung: Die Mathematik könne weder in der Logik noch in der Erfahrung ihre Erkenntnisquelle haben, es müsse eine andere Erkenntnisquelle geben, und zwar die mathematische Anschauung.

Nelson betonte, dass aus dem synthetischen Charakter der geometrischen Axiome nicht auf deren empirischen Ursprung geschlossen werden könne, denn zwischen Logik und Empirie stehe eben noch die Wissenschaft aus synthetisch-apriorischen Sätzen. Aristoteles habe den Fehler gemacht, alle Erkenntnis in logische und empirische einzuteilen, tatsächlich ergebe sich aber folgendes Bild (vgl. Nelson, Kant und die nicht-euklidische Geometrie, S. 77):

Erkenntnis	**A priori**	**A posteriori**
Analytisch	Logik	---
Synthetisch	Mathematik	Empirie

4 Ein Bewertungsversuch des Nelson'schen Erkenntniskonzeptes der Mathematik

Nelsons Konzept der mathematischen Erkenntnis gründet wesentlich auf zwei Annahmen: *Anschaulichkeit* und *Synthetizität.*

a) Anschaulichkeit

Dass die mathematischen Axiome nicht aus der Erfahrung stammen, darin stimmen Nelson und Hilbert überein, dennoch haben die Axiome bei Hilbert nicht den Charakter *synthetischer Urteile a priori.* Nach Hilbert stellen die Axiome *indirekte Definitionen für die Objekte* dar, indem sie die Objekte über ihnen zugewiesene Eigenschaften bestimmen (vgl. Neßelmann, 2010 S. 1).

Ein Axiomensystem im Sinne Hilberts hat für sich genommen keine inhaltliche Bedeutung. Hilbert gibt keine explizite Definition von Begriffen wie *Punkt*, *Linie* usw. an. Er legt also nicht fest, *was* der betreffende mathematische Gegenstand ist. Gerade weil das Axiomensystem eine formale Struktur ohne inhaltliche Bedeutung ist, gilt es, von diesem die Gütekriterien *Widerspruchsfreiheit*, *Unabhängigkeit* und *Vollständigkeit* zu zeigen.

Nelson argumentierte, dass erst die Anschauung die Existenz mathematischer Objekte garantieren könne:

> „Es kann folglich auch jeder Existenzbeweis für einen geometrisch nicht darstellbaren und überhaupt nicht unmittelbar anschaulichen Begriff nur auf Grund einer mittelbaren Berufung auf die Anschauung geführt werden." (Nelson, Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie, S. 35)

Hilbert ging allerdings einen anderen Weg. Seiner Ansicht nach komme es nur auf den Erfolg der eingeführten Begriffe an:

> „Nein, wenn über den Nachweis der Widerspruchsfreiheit hinaus noch die Frage der Berechtigung zu einer Maßnahme einen Sinn haben soll, so ist es doch nur die, ob die Maßnahme von einem entsprechenden Erfolge begleitet ist. In der Tat, der Erfolg ist notwendig; er ist auch hier die höchste Instanz, der sich jedermann beugt." (Hilbert, 1925 S. 163)

In seiner Vorbemerkung zu Nelsons Aufsatz ‚Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik' weist Wilhelm Ackermann darauf hin, dass Nelsons Orientierung auf die Anschauung Hilberts Standpunkt nicht gerecht werde. Zwar vertrete Hilbert die Auffassung, dass ein Teil der Mathematik (nicht nur die Metamathematik) auf eine anschaulich-finite Erkenntnisquelle zurückgehe (näher ausgeführt in § 2 von Bd. 1 der ‚Grundlagen der Mathematik' von Hilbert und Bernays), dass aber zu diesen finiten Schlussweisen die transfiniten hinzukommen müssten, die nicht mehr auf eine anschauliche Erkenntnisquelle zurückgehen (vgl. Ackermann, GS III, S. 188).

Da Nelson das konstitutive Prinzip der Mathematik in der reinen Anschauung sah, gelangte er zu der folgenreichen Schlussfolgerung, dass die Auflösung mathematischer Probleme vollständig im Bereich des Verstandes liege, weshalb von jeder mathematischen Aufgabe entweder eine ‚positive' Auflösung möglich sein oder der Beweis ihrer Unlösbarkeit erbracht werden müsse:

> „..., daß jedes mathematische Problem *entscheidbar* sein muß, in dem Sinne, daß wir über Wahrheit oder Falschheit jedes mathematischen Satzes durch reines Denken, ohne alle Hilfe von außen, zu entscheiden vermögen, .." (Nelson, Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik, S. 204)

Gegen diese These wandte später Ackermann ein, dass im Jahre 1935 Alonzo Church darlegte, dass es kein Entscheidungsverfahren gibt, um die Richtigkeit oder Falschheit aller zahlentheoretischen Sätze festzustellen (vgl. Ackermann, Anmerkungen zur Neuausgabe der vorstehenden Abhandlung (zu S. 106), S. 125).

b) Synthetizität

Den Synthetizitätsnachweis führt Nelson vermöge des *Prinzips der Widerspruchslosigkeit der Verneinung.*

Die nachstehende Tabelle soll dieses Prinzip verdeutlichen.

Der Satz A ist analytisch.	**Der Satz A ist synthetisch.**
„Nicht A" führt auf einen logischen Widerspruch. Bsp.: „Die Katze sei definiert als das fleischfressende Säugetier mit einziehbaren Krallen." (Nelson, Kant und die nicht-euklidische Geometrie, S. 70) Somit ist das Urteil „die Katze hat einziehbare Krallen, [...]" (Nelson, Kant und die nicht-euklidische Geometrie, S. 70) analytisch.	„Nicht A" führt nicht auf einen logischen Widerspruch. Bsp.: „Die Katze ist schwarz."
„Nicht A" impliziert einen logischen Widerspruch, da im Begriff der *Katze* eben die Einziehbarkeit der Krallen enthalten ist.	„Nicht A" impliziert keinen logischen Widerspruch, da die Farbe nicht zur Definition der Katze gehört. Es sind ohne Widerspruch Katzen denkbar, die weiß, grau, zimtfarben, schwarzweiß gefleckt usw. sind.

Nelsons an Kant orientiertes Analytizitätskonzept ist durchaus an aktuell übliche Definitionen für *analytisch* anschlussfähig. Zumeist werden heute unter analytischen Sätzen solche verstanden, die logisch oder definitorisch wahr sind (vgl. Schurz 2011, S. 86).

Unter Berufung auf das *Prinzip der Widerspruchslosigkeit der Verneinung* versuchte Nelson den synthetischen Charakter mathematischer Axiomensysteme nachzuweisen. Nelson selbst diskutiert dies im Detail am Beispiel der nicht-euklidischen Geometrien. Nur erwähnt wird von ihm die Möglichkeit nicht-kommutativer Algebren. Hier soll nun am Beispiel der nicht-kommutativen Algebren, aber zugleich übertragbar auf nicht-assoziative Algebren und nicht-euklidische Geometrien, Nelsons Schlusskette rekonstruiert werden.

Es sei R eine Algebra. Dann ist der Satz $A :=$ "R ist kommutativ" nach Nelsons Verständnis synthetisch, da es Algebren (z. B. Quaternionen-Algebra) gibt, in denen "nicht A" wahr ist. Hierzu ist jedoch anzumerken, dass vom *synthetischen Charakter der Aussage* A nicht auf die *Synthetizität der Axiome von* R geschlossen werden kann. Die Aussage A bezieht sich auf das komplette Axiomensystem, womit über den Charakter der einzelnen Axiome noch nichts gesagt ist. Da Nelson jedoch vom *synthetischen Charakter* der mathematischen Axiome spricht, scheint er diesen Schluss vollzogen zu haben.

Steht um die Jahre 1905/06 für Nelson der synthetische Charakter der mathematischen Erkenntnis fest (vgl. Nelson, Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit, S. 40), so scheint, wie aus einer Nachschrift von Bernays hervorgeht, Nelson später von seiner Auffassung vom synthetischen Charakter der mathematischen Erkenntnis abgerückt zu sein. In seinen im Wintersemester 1910/11 abgehaltenen *Übungen über Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften* wird vermutet, dass die Zahlgesetze nicht der reinen Anschauung entspringen, da sie nicht nur auf anschauliche oder wirkliche Gegenstände, sondern auch auf beliebige Gegenstände des Denkens anwendbar sind (vgl. Nelson, Kritische Naturphilosophie, S. 55). Es wird der analytische Charakter der arithmetischen Urteile in Betracht gezogen. Den Begriff *analytisch* verwendet Nelson hier im Sinne einer *definitorischen Wahrheit*, weshalb er die Unterscheidung zwischen *formal* und *analytisch* einführt, wobei dem Begriff des *Formalen* die *logischen Wahrheiten* entsprechen:

> „Formal sind solche Sätze, die aus Sätzen der formalen Logik durch Einsetzen spezieller Begriffe entstehen, analytisch sind alle Sätze, bei welchen dasjenige, was in ihnen ausgesagt wird in dem Begriff der Dinge, von denen es ausgesagt wird, enthalten ist. In diesem Sinn sind die Gesetze der Arithmetik analytisch, aber nicht formal.“ (Übungen über Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, WS 1910 – 1911) (Nelson, Kritische Naturphilosophie, S. 59)

Noch deutlicher scheint sich Nelson von seiner Ursprungsposition im *Kolloquium über Naturphilosophie* vom Sommersemester 1923 entfernt zu haben. So heißt es in einer Nachschrift, dass „Hilbert möglichst viele Eigenschaften in die Definitionen aufnimmt, nämlich alle voneinander unabhängigen, um ein vollständiges System von analytischen Urteilen zu erhalten.“ (Nelson, Kritische Naturphilosophie, S. 163) Wenige Zeilen später wird eingeräumt: „Die synthetische Erkenntnis der *Geometrie als solcher* ist zwar bei Hilbert verloren gegangen, die Sätze aber, die bei Euklid als geometrische Sätze a priori erscheinen, sind darum doch nicht verloren gegangen.“ (Nelson, Kritische Naturphilosophie, S. 163) Nelson sucht die synthetischen Zusammenhänge nun in der Art, wie sich die Sätze der Geometrie auf die Formen der physikalischen Körper beziehen. Sein früher Tod hat die systematische Ausarbeitung dieser Gedanken verhindert, weshalb seine Philosophie der Mathematik fragmentarisch geblieben ist.

Literatur

Siglen – Literatur.

Siglen

AFSNF Abhandlungen der Fries'schen Schule. Neue Folge. 1906–1937.

KrV Kritik der reinen Vernunft (2. Aufl. 1787)

GS Leonard Nelson. Gesammelte Schriften. Hg. von Paul Bernays u. a. (Hamburg 1970–1977), Bde. I– IX.

WW = Jakob Friedrich Fries: Sämtliche Schriften. Nach den Ausgaben letzter Hand zusammengestellt von Gert König et al., I–XXIX; XXXI (Personenglossar und Kommentar zu den in WW 27-29 abgedruckten Briefen) im Druck, XXX (Briefe IV), XXXII (Ergänzungsband) und XXXIII (Index) in Vorbereitung (Aalen seit 1967).

Literatur

Ackermann, W.: Anmerkungen zur Neuausgabe der vorstehenden Abhandlung. In: Leonard Nelson: Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik. Mit einführenden und ergänzenden Bemerkungen von Wilhelm Ackermann, Paul Bernays, Bernays , Frankfurt a. M. 1959, S. 125.

Ackermann, W.: GS III, 188.

Bernays, P.: Die Grundgedanken der Fries'schen Philosophie in ihrem Verhältnis zum heutigen Stand der Wissenschaft, in: AFSNF, Bd. 5, Heft 2 (1933), 97–113.

Fries, J. F.: Die mathematische Naturphilosophie nach philosophischer Methode bearbeitet [1822], in: WW XIII.

Hilbert, D.: Über das Unendliche, Math. Annalen 95, Heft 1 (1925), S. 161–90.

Hilbert, D. / Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik. Bd. 1. Berlin 1934.

Nelson, Leonard: Über das sogenannte Erkenntnisproblem, in: GS II, 59–393.

Nelson, Leonard: Die Unmöglichkeit der Erkenntnistheorie, in: GS II, 459–483.

Nelson, L.: Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit, in: GS III, 3–52.

Nelson, L.: Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik, in: GS III, 187–220.

Nelson, L.: Über die Grundlagen der Geometrie, in: GS III, 157–185.

Nelson, L.: Kant und die nicht-euklidische Geometrie, GS III, 53–94.

Nelson, L.: Kritische Naturphilosophie. Mitschriften aus dem Nachlass, hg. von K. Herrmann und J. Schroth, Heidelberg 2004.

Neßelmann, D.: Manuskript zur Vorlesung Axiomatische Geometrie, gehalten an der Universität Rostock, Rostock, April 2009 (Fassung vom 22. Februar 2010).

Herrmann, K.: Mathematische Naturphilosophie in der Grundlagendiskussion. Jakob Friedrich Fries und die Wissenschaften, Göttingen 2000.

Kant, I.: Kritik der reinen Vernunft (2. Aufl. 1787). In: Kants Werke, Akademie Textausgabe, Bd. 3, Berlin 1968.

Peckhaus, V.: Hilbertprogramm und Kritische Philosophie. Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie, Göttingen 1990.

Schurz, G.: Einführung in die Wissenschaftstheorie. 3. Aufl. Darmstadt 2011.

Ernst Cassirer und der mathematische Raum – vom Erkenntnisproblem zum Symbolproblem

Daniel Koenig

Ernst Cassirer galt lange als Meisterschüler[1] des Gründers der Marburger Schule Hermann Cohen. Mit Blick auf die Entwicklung einer eigenständigen Position wurde bereits zu seinen Lebzeiten darüber diskutiert, inwiefern Cassirer von den grundlegenden Positionen seiner Lehrer Cohen und Paul Natorp abweicht oder nicht. Um sich einer Klärung des Verhältnisses von Cassirer zum (Marburger) Neukantianismus zumindest anzunähern, scheint es vielversprechend, Cassirers Rezeption des Raumproblems in den Blick zu nehmen. Denn einer der Ausgangspunkte des Marburger Neukantianismus war die Frage nach den Auswirkungen der Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrien für die Kantische Philosophie der Mathematik und des Raumes.

Wesentlich für Cassirers Werk ist ebenso seine vielfach beschriebene philosophische Entwicklung vom Erkenntnistheoretiker zum Kulturphilosophen[2], und auch hier lautet eine häufig gestellte Frage, wie sich diese beiden Positionen zueinander verhalten: handelt es sich um eine Problemerweiterung oder um eine Problemverschiebung?[3] Das Raumproblem spielt auch in diesem Zusammenhang für Cassirer selbst eine entscheidende Rolle. Entsprechend stellt er im dritten Band seiner *Philosophie der symbolischen Formen* fest:

[1] Vgl. Paetzold (1995), S. 14.
[2] Vgl. beispielsweise Paetzold (1993), S. 11.
[3] Vgl. hierzu Heis (2015) und auch den Beitrag in diesem Band von Matthias Neuber *Cassirer, der Grundlagenstreit und die „idealen Elemente" der Mathematik.*

> [Es gibt] kein Gebiet der Philosophie [...] in das das Raumproblem nicht in irgendeiner Weise eingreift und mit dem es sich nicht auf die eine oder andere Weise verwebt. [...] In welcher Beziehung – so lautet unsere Frage – steht das Raumproblem zum allgemeinen Symbolproblem? [...] Mit dieser Problemstellung werden wir freilich aus den gebahnten Wegen der psychologischen und erkenntnistheoretischen Betrachtung herausgedrängt und von vornherein auf einen neuen Boden gestellt. Denn jetzt wird [...] der Schwerpunkt des Problems von der Seite der *Naturphilosophie* nach der der *Kulturphilosophie* verschoben. (Cassirer 1929, S. 160)

Ziel dieses Beitrags soll es sein, diese von Cassirer angesprochene Verschiebung nachzuzeichnen. Dazu werden in einem ersten Schritt einige Grundgedanken Cassirers zur Mathematik anhand seiner Deutung der Entwicklung Nicht-Euklidischer Geometrien vorgestellt. Dabei wird sich zeigen, dass die von Cassirer in diesem Zusammenhang aufgestellten Thesen unmittelbar auf seine Kulturphilosophie verweisen, so dass es wichtig scheint, einige Grundaspekte seiner Philosophie der symbolischen Formen herauszuarbeiten und aufzuzeigen, welche Bedeutung diese für seine Auffassung vom Raum haben. Diesen Fragen wird sich der zweite Teil dieses Beitrags widmen, um abschließend in einem letzten Teil noch einmal den Blick auf Cassirers Betrachtungen der Mathematik zu richten. Hierbei soll nicht nur versucht werden, deren Bedeutung für seine Kulturphilosophie hervorzuheben, sondern es soll auch umgekehrt gefragt werden: Was leistet die Erweiterung von der Erkenntnistheorie zur Kulturphilosophie für Cassirers Verständnis von Mathematik?

1 Das Raumproblem und die Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrien[4]

Die Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrien thematisiert Cassirer in mehreren seiner Schriften. Aus mathematik-philosophischer Perspektive sind hier besonders die Werke *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* aus dem Jahr 1910 zu nennen sowie der vierte Band vom *Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit*, der postum im Jahr 1950 zunächst auf Englisch und 1957 erstmals auf Deutsch erschien[5]. Seine Auseinandersetzung in diesem letzten Band des *Erkenntnisproblems*, beginnt Cassirer nach der Einleitung mit der Feststellung:

[4]Teile dieses Abschnitts finden sich bereits in Koenig (2017).

[5]Die Arbeiten am vierten Band des *Erkenntnisproblems* hatte Cassirer bereits 1940 in Göteborg weitestgehend abgeschlossen, jedoch konnte er den Verleger Gottfried Bermann-Fischer nicht von einer Veröffentlichung überzeugen (vgl. das Vorwort der Herausgeber von Cassirer (1999)).

> In der gesamten Geschichte der Mathematik gibt es wenig Ereignisse, die für die Gestaltung des Erkenntnisproblems und für seine Weiterentwicklung von so unmittelbarer und tief einschneidender Bedeutung gewesen sind, wie die Entdeckung der verschiedenen Formen der Nicht-Euklidischen Geometrie. (Cassirer 1957, S. 29)

Im Folgenden soll nachgezeichnet werden, was genau Cassirer unter dieser einschneidenden Bedeutung für das Erkenntnisproblem versteht und welche Auswirkung er für das Raumproblem ausmacht. Wesentlich hierfür ist eine Unterscheidung, die Cassirer von Kant übernimmt und die verständlich macht, in welchem Sinne sich Cassirer zeitlebens als Neu-Kantianer verstanden hat. So bestärkt er noch 1939 in seinem Vortrag *Was ist ‚Subjektivismus'?*:

> Ich selbst bin oft als „Neu-Kantianer" bezeichnet worden und ich nehme diese Bezeichnung in dem Sinne an, dass meine gesamte Arbeit im Gebiet der theoretischen Philosophie die methodische Grundlegung voraussetzt, die Kant in der „Kritik der reinen Vernunft" gegeben hat. (Cassirer 1939, S. 201f.)

In dieser hat Kant bekanntermaßen gefordert, dass die Philosophie auf den „stolze[n] Name[n] einer Ontologie" (KrV, A247/B303) verzichten und sich zunächst mit der Frage beschäftigen müsse, wie Erkenntnisse *überhaupt* möglich seien.[6] Der Raum wird hier im Rahmen der transzendentalen Ästhetik als „reine Form sinnlicher Anschauung" (KrV, A22/B36) und damit als „notwendige Vorstellung a priori" (KrV, A24/B38) bestimmt. Als „Anschauungsraum" ist er ein einheitlicher Raum: Man „kann sich nur einen einzigen Raum vorstellen, und wenn man von vielen Räumen redet, so versteht man darunter nur Teile eines und desselben Raums." (KrV, A25/B39) Die euklidische Geometrie wird bei Kant dezidiert als die Wissenschaft vom Raum als Form unserer äußeren Anschauung ausgewiesen, insofern sie die „Wissenschaft [ist], welche die Eigenschaften des Raums synthetisch und doch a priori bestimmt" (KrV, B 40); d. h. geometrische Eigenschaften sind Eigenschaften des Raumes als Form unserer Anschauung.

Mit der Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrien im 19. Jahrhundert wird nun diese kantische Raumauffassung problematisch, insofern unklar ist, von welchem Räumen diese neuen Geometrien die Wissenschaften sind, wenn es nur einen Raum als *Form unserer Anschauung* gibt, auf den die euklidische Geometrie sich bezieht. Cassirer hält aber weiterhin die kantische Unterscheidung zwischen erkenntniskritischen und ontologischen Fragen für das Raumproblem für entscheidend. In der Diskussion um die neuen Geometrien hätten im Gegensatz zu Ma-

[6] Vgl. hierzu auch Paetzold (1993), S. 39.

thematikern vor allem Philosophen noch eine metaphysische bzw. ontologische Auffassung vom Raum vertreten, deren Ursprung Cassirer wiederum in Descartes Bestimmung des Raumes ausmacht. Dieser hat laut Cassirer mit seiner analytischen Geometrie den Raum als eine „bestimmte Ordnungsform“ ausgezeichnet und hätte damit auf der erkenntniskritischen, logischen Ebene bleiben können. Jedoch sei er in seiner Metaphysik sogleich zu einer substantiellen Bestimmung des Raumes übergangen, als „in der Art eines absoluten Dinges, in der Art der ‚ausgedehnten *Substanz*‘.“ (Cassirer 1957, S. 35) Dieser „metaphysischen Hypostasierung“ des Raumes sei Newton, im Gegensatz zu Leibniz, mit seiner Bestimmung des absoluten Raumes gefolgt und habe damit, so Cassirer, die Physiker und Philosophen im 17. und 18. Jahrhundert beeinflußt.

So habe beispielsweise auch Hermann Lotze an einer solchen Auffassung des Raumes festgehalten, wenn er die neuen Geometrien in seiner „Metaphysik“ und nicht in seiner „Logik“ untersucht. Auf Basis der Lotze'schen Fragestellung, was für Eigenschaften ein „absolutes Ding“ namens Raum habe, musste es laut Lotze selbstverständlich als „äußerste[r] Widersinn“ erscheinen, diesem Objekt durch die neu entdeckten Geometrien einander widersprechende Eigenschaften zuzuordnen; die Nicht-Euklidischen Geometrien wurden von Lotze daher als Irrtum abgetan. Laut Cassirer stellt Lotze jedoch seine Frage „nicht im immanenten Sinne der Mathematik, sondern im ‚transienten‘ Sinne“ (Cassirer 1957, S. 36), d. h. nicht im erkenntniskritischen, sondern im ontologischen. Die Frage nach dem Gegenstand der Mathematik werde hier somit nicht von ontologischen Fragen getrennt:

> Nichts scheint den ersten Philosophen, die in die Diskussion über die Möglichkeit der neuen Geometrie eingriffen, schwerer gefallen zu sein, als einen scharfen Trennungsstrich zwischen der logisch-erkenntniskritischen und der ontologischen Fragestellung zu ziehen. Gab es verschiedene Axiomensysteme der Geometrie, so mußte es verschiedene „Räume“ geben, und diese mußten ihrerseits wieder verschiedene „Welten“ beherbergen. (Cassirer 1957, S. 35)

Cassirer betont, dass die mathematische Forschung im Gegensatz zur Philosophie zu dieser Zeit bereits zwischen diesen beiden Fragen unterschied: So sei Felix Kleins *Erlanger Programm* von 1872 „nicht nur in mathematischer, sondern auch in erkenntniskritischer Hinsicht ein höchst bedeutsamer Schritt“, insofern er die Frage nach den Nicht-Euklidischen Geometrien völlig losgelöst von jeder „ontologischen Betrachtung über die ‚Wirklichkeit‘ des Raumes“ (Cassirer 1957, S. 36) behandle. Hierzu rücke Klein den Gruppenbegriff ins Zentrum der geometrischen Untersuchung und deute den geometrischen Eigenschaftsbegriff um: Geometrische Eigenschaften sind nun Invarianten einer Mannigfaltigkeit bzgl. bestimmter Transformationsgruppen und nicht mehr Beschaffenheiten des *einen* wirklichen Raumes, wie noch bei Newton. Die Aufgabe der Geometrie bestehe nun darin, *diese* neuen Eigenschaften zu untersuchen, womit aber die ontologische Frage nach der Beschaffenheit des einen Raumes nicht mehr Gegenstand der Geometrie ist:

> Die Frage, welche von [den Geometrien] die ‚wahrere' ist, hat jetzt offenbar jeden Sinn verloren. Alle diese Geometrien sind theoretisch gleich streng und daher theoretisch gleichberechtigt. (Cassirer 1957, S. 39)

Denn sie sind nichts anderes als Invariantentheorien bestimmter Transformationsgruppen, die gleichberechtigt nebeneinander stehen. Zudem sei der Begriff der Gruppe, so Cassirer, völlig von jeder (geometrischen) Anschauung losgelöst; ihm werde nichts durch „die Natur der Gegenstände vorgeschrieben" (Cassirer 1957, S. 40). Durch diese Umdeutung des geometrischen Eigenschaftsbegriffs lasse sich nun auch der oben angedeutete Konflikt zwischen den Philosophen und Mathematikern lösen: So wird laut Cassirer einerseits der „Philosophie als Wirklichkeitswissenschaft" durch die Mathematik „als reine Formwissenschaft" nichts mehr vorgeschrieben. Andererseits könne die Philosophie nun aber auch nicht mehr Ergebnisse der Mathematik anzweifeln, die diese „über die reine Form, über die logische Struktur des Raumes lehrt" (Cassirer 1957, S. 40).

Laut Cassirer ist durch Kleins Darstellung der Geometrie als Invariantentheorie eine neue „*systematische* Einheit des Raumes" (Cassirer 1957, S. 43) geliefert – allerdings eine *funktionale* und keine *substantielle*. Diese Unterscheidung liegt in Cassirers Begriffstheorie begründet[7]: die Deutung von Begriffen als Substanzbegriffe beruht darauf, dass sie ihren Sinn durch einen Bezug auf Seiendes, Beharrendes bzw. Substanzen erhalten. Ein solches Verständnis hatten wir bei Newton und Lotze gesehen: der Begriff *Raum* entspricht einem Seienden, dem gewisse Eigenschaften zukommen, und der Anspruch der Wissenschaft besteht dann darin, dieses vollständig und exakt in Begriffen abzubilden. Genau diese Auffassung führte aber mit dem Aufkommen der Nicht-Euklidischen Geometrien zu den oben angesprochenen Widersprüchen, sodass beispielsweise für Lotze die Einheit des Raumes in Gefahr schien. Die zentrale These von Cassirers Begriffstheorie lautet, dass die „Einheit des Begriffsinhalts [. . .] aus den besonderen Elementen des Umfangs nur in der Weise *abstrahiert* werden [kann], dass wir uns *an* ihnen der spezifischen Regel, durch die sie in Beziehung stehen, bewußt werden" (Cassirer 1910, S. 16). Damit besteht die Einheit eines Begriffes nicht in einem Bezug auf ein einheitliches Seiendes, sondern in einer Regel, die nur im Ganzen eines Begriffssystems formulierbar ist. So wie mathematische Funktionen als Regeln bestimmen, welche

[7] Für eine ausführlichere Diskussion vgl. beispielsweise Heis (2014).

Elemente aufeinander bezogen werden, so bestimmen auch Begriffe als Regeln was deren Umfang ist und nicht umgekehrt.[8] Dies gilt auch für die *Geometrie* und den *Raum*:

> Die Geometrie ist eine reine ‚Beziehungslehre'; in ihr handelt es sich nicht um Feststellung von Dingen und Dingmerkmalen, von Substanzen und deren Eigenschaften, sondern um reine Ordnungsbestimmungen. Auch die Frage nach der Einheit des Raumes kann daher in ihr stets nur in diesem Sinne gestellt werden: sie betrifft nicht die substantielle, sondern die formale oder ‚ideelle' Einheit. (Cassirer 1957, S. 42)

Damit sind wir an dem Punkt angelangt, an dem Cassirer selbst Position bezieht. Diese ideelle bzw. formale Einheit des Raumes besteht laut Cassirer in der allgemeinen „Form des ‚möglichen Beisammenseins'" (Cassirer 1957, S. 43) – eine Auffassung, die laut Cassirer nicht erst bei Kant, sondern schon bei Leibniz vorbereitet, und bei Klein „keineswegs aufgegeben, sondern [. . .] vielmehr fester als je zuvor begründet" (Cassirer 1957, S. 43) erscheint. Der so bestimmte formale Raum liege jeder möglichen Geometrie zu Grunde, was bedeutet, dass eine jede Geometrie diese *allgemeine* Form auf eine jeweils besondere Weise ausgestaltet. Die einzelnen Axiome haben dann nicht mehr bestimmte Eigenschaften des *einen* Raumes zum Inhalt; vielmehr drücken sie als Systeme eine bestimmte Art der Ausdifferenzierung der allgemeinen Raumform aus:

> Je nachdem der Blick auf das eine oder andere Ziel gespannt ist, je nachdem das eine oder andere Moment als »invariant« [ge]setzt [wird], entsteht [. . .] die eine oder andere »Raumart«, konstituiert sich der Begriff des »metrischen«, des »projektivischen« Raumes u. s. f. (Cassirer 1929., S. 182)

Oder mit Klein formuliert: Den verschiedenen Geometrien entsprechen verschiedene Invariantentheorien, in denen gewisse Eigenschaften untersucht werden, die gegenüber bestimmten Transformationen unverändert bleiben.

In diesem Sinne stehen die Nicht-Euklidischen Geometrien in Hinsicht ihrer logischen Strenge auf der gleichen Stufe mit der Euklidischen. Dass der letzteren aber dennoch ein besonderer Status zukommt, ist laut Cassirer eine weit verbreitete Grundüberzeugung des 19. (und wohl auch des 20.) Jahrhunderts.[9] Man versuchte daher diese Ausnahmestellung durch einen Appell „an eine andere Instanz" bzw. durch einen nicht-geistigen Ursprung für die Geltung der Axiome zu retten. So

[8]Vgl. zu Cassirers Begriffstheorie das erste Kapitel in Cassirer (1910), im Besonderen S. 13ff.
[9]So vertrat beispielsweise Leonard Nelson eine solche Position, vgl. hierzu auch die Beiträge von Shafie Shokrani und Kai Herrmann in diesem Band.

geht laut Cassirer auch Hermann von Helmholtz von der Auffassung des Raumes als „allgemeinste Form, als ‚Möglichkeit des Beisammen' [als] unableitbare[m] Grundbegriff" (Cassirer 1957, S. 49) aus, versucht aber der euklidischen Geometrie mit Blick auf die Erfahrung ihre Ausnahmestellung zu sichern. Oder noch einmal anders formuliert: Helmholtz bewahrte die kantische „Apriorität des Raumes", indem er sie mit „seinen sinnesphysiologischen Grundanschauungen" (Cassirer 1957, S. 49) zu verbinden sucht. Er weist das euklidische Axiomensystem als „Ausdruck bestimmter Grunderfahrungen" aus, die so „allgemein" seien, dass bei der gewöhnlichen Wahrnehmung ihr „empirische[r] Charakter" (Cassirer 1957, S. 50) in den Hintergrund tritt. So gehe beispielsweise beim Vorgang einer jeden Messung die Voraussetzung ein, „dass es ‚starre Körper' gibt, die ohne Formveränderung frei im Raume beweglich sind." (Cassirer 1957, S. 50) Dass diese Voraussetzung nicht eine Eigenschaft des Raumes an sich sei, sondern ein der Erfahrung entnommener Satz, sei bei Helmholtz eine Lehre aus der Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrien.

Ebenso, wie später für Klein, ist laut Cassirer bereits für Helmholtz der *Gruppenbegriff* von großer Bedeutung, wenn auch noch nicht in seiner begrifflich scharfen Form. Damit tritt aber neben den Raumbegriff die Untersuchung eines Begriffs, dessen „logischer Charakter [...] kaum zweifelhaft sein [kann]" (Cassirer 1957, S. 50). Denn im Gruppenbegriff werde von der Betrachtung jedes Inhalts abgesehen und wir kommen zu einer „Theorie der *Operationen*." (Cassirer 1957, S. 51) Henri Poincaré habe aus dieser Tatsache als erster „erkenntniskritische Folgerungen" gezogen und jeden Wert von empirischen Betrachtungen für die Geometrie und damit auch die oben angedeuteten Grunderfahrungen von Helmholtz abgelehnt. Sein Argument ist laut Cassirer das folgende: Wie bereits erwähnt, kann jede Geometrie als Invariantentheorie einer bestimmten Gruppe aufgefasst werden; diese Gruppen werden aber gänzlich ohne Erfahrung bestimmt, womit in die „Begriffsbestimmung der Geometrie ein rein apriorisches Element" eingehe. Indem sich der Gruppenbegriff uns „nicht als Form unserer Sinnlichkeit, sondern als Form unseres Verstandes" (Cassirer 1957, S. 51) aufdränge, verliere die Frage nach der „wahren" Geometrie auch im Hinblick auf den Ursprung[10] in unserer Erfahrung ihren Sinn. Und nicht allein aus dem Grund, dass in die Bestimmung der Geometrie ein rein gedankliches Element einfließe, ergebe es nach Poincaré „keinen *Sinn*, die Erfahrung darüber zu befragen, welche Geometrie die ‚wahrere' ist" (Cassirer 1957, S. 51). Das Problem bestehe darüber hinaus darin, dass sich die „idealen"

[10] Wichtig ist hier zu erwähnen, dass, wenn Cassirer nach dem ‚Ursprung der Axiome' fragt, er im Rahmen seiner Erkenntnistheorie auf deren vermeintlichen Geltungsgrund in der Erfahrung und nicht deren Genese abzielt. Die genetische Perspektive spielt erst mit seiner Erweiterung des Standpunktes zu einem kulturphilosophischen eine zentrale Rolle. Vgl. dazu die folgenden beiden Abschnitte dieses Beitrags.

Objekte der Mathematik schlicht jedem Experiment entzögen. Punkte, Geraden und Ebenen sind nicht Teil unserer Erfahrungen, so dass wir Aussagen über sie nicht mittels sinnlicher Erfahrung überprüfen können. Cassirer fasst zusammen:

> Mit jener Form des Empirismus, der die Axiome der Erfahrung entnehmen und der sie als einfache Abbildungen gegebener beobachtbarer Tatbestände verstehen will, läßt sich, wie Poincaré erklärt, kein vernünftiger Sinn verbinden. Axiome sind in jedem Fall freie Setzungen des mathematischen Denkens, die Aussagen enthalten, die über jede Wahrnehmung hinausgehen. (Cassirer 1957, S. 52)

Nichtsdestotrotz könnten wir aber, im Sinne Poincarés, Geometrien anwenden und fragen, welche besonders gut zu unserer Erfahrung passen. Hierbei ist aber laut Cassirer entscheidend, dass zum einen keine *einzelnen* Axiome verifiziert oder falsifiziert, sondern lediglich „bestimmte geometrische Gesamtsysteme mit dem Gesamtsystem der Erfahrung" (Cassirer 1957, S. 52) verglichen werden könnten. Zum anderen könne auch keine *logische* oder *immanent mathematische* Notwendigkeit für die Anwendung einer bestimmten Geometrie bestehen. Oder wie es Cassirer in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* formuliert:

> Das Experiment dient somit zwar niemals als Beweis oder auch nur als Stütze des mathematischen Begründungszusammenhangs, der vielmehr rein aus sich selbst feststehen muß: Aber es weist den Weg von der Wahrheit der Begriffe zu ihrer Wirklichkeit. Die Beobachtung schließt die Lücke, die die rein logische Bestimmung zurückgelassen hatte: Sie führt von den vieldeutigen Raumformen der Geometrie zu dem eindeutigen Raum der physikalischen Gegenstände. (Cassirer 1910, S. 114)

Dass die späteren Entdeckungen von Albert Einstein uns sogar dazu zwingen würden, das euklidische System in der Physik abzuwandeln, hat Poincaré jedoch nicht erwartet: er geht davon aus, dass die Ganzheit der physikalischen Erfahrung nicht zu einer solchen Veränderung führen könne. Interessanterweise teilt Cassirer diese Ansicht in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* noch insofern, als dass er vermutet, dass eher die Annahme der geradlinigen Ausbreitung des Lichts abgeändert werden würde, als dass durch Messungen von der euklidischen zur nicht-euklidischen Geometrie überzugehen sei.[11]

[11] Vgl. Cassirer (1910), S. 115f.: „Ehe wir darangehen würden, auf Grund der Ergebnisse astronomischer Messungen von der *Geometrie* Euklids zur Geometrie Lobatschefskis überzugehen, hätten wir zunächst zu versuchen, dem neuen Resultat durch eine veränderte Auffassung der physikalischen Gesetzeszusammenhänge Rechnung zu tragen, indem wir etwa die Annahme der streng geradlinigen Fortpflanzung des Lichts einer Revision unterziehen."

Blicken wir abschließend noch einmal auf die Bestimmung des Raumes als Form des „Möglichen Beisammenseins“ zurück, so scheint sich gerade in dieser Leibniz-Referenz ein charakteristischer Zug für Cassirers Betrachtungen der Mathematik überhaupt anzudeuten, insofern er versucht die Position Kants mit der Leibniz‘ zu verbinden. So übernimmt Cassirer einerseits die leibnizsche rein formale, dem Verstand und nicht der Sinnlichkeit zugeordnete Bestimmung des Raumes und bleibt damit ganz der Ansicht der Marburger Schule in der Hinsicht treu, als dass diese den „Schwerpunkt der gesamten *Kritik der reinen Vernunft* nicht in der Ästhetik, sondern vielmehr in der transzendentalen Analytik“ (Ferrari 1992, S. 172) sieht.[12] In dieser stellt Kant für den Raum fest: „Raum und Zeit sind nicht bloß als *Formen* der sinnlichen Anschauung, sondern als *Anschauungen* selbst [. . .] vorgestellt.“ (KrV, B160) Denn der Raum ist neben der Bestimmung als *Form der Anschauung* auch selbst als „formale Anschauung“ bestimmt, insofern er hier die für die Geometrie notwendige „Einheit der Vorstellung gibt“ (ebd.).[13] Damit scheint der Raum für Cassirer in Anlehnung an Leibniz nur noch eine formale Anschauung und nicht mehr *die* Form der äußeren Anschauung zu sein. Die so in der Mathematik vollzogene Lösung vom Raum unserer äußeren Anschauung stellt eine notwendige Bedingung für die Pluralisierung der mathematischen Räume als Ausdifferenzierungen der allgemeinen Raumform dar. Diese rein begriffliche Bestimmung des Raumes bleibt andererseits aber insofern kantisch, als dass sie nicht wie bei Leibniz metaphysisch als „ordre des coexistences possible“ (Cassirer 1910, S. 97) gedeutet wird, sondern dass die mathematischen Räume mit Poincaré „Entwürfe und Vollzugspläne sind“ (Cassirer 1957, S. 53), die uns die „Welt ihrer Struktur nach aufbaut und sie damit ihrer Gesetzlichkeit nach verstehen lernt“ (Cassirer 1929 , S. 443). Insofern bleibt der Raum weiterhin Bedingung der Möglichkeit von wissenschaftlicher Erkenntnis.

Mit Poincarés Ansatz ist darüber hinaus laut Cassirer letztlich auch die Frage nach der „Anwendbarkeit“ der Mathematik zu lösen; ohne dabei – wie der Rationalismus – auf eine „prästabilisierte Harmonie“ zu verweisen, oder – wie der Empirismus – die Begriffe der Mathematik der Erfahrung zu entnehmen, oder – wie Kants transzendentaler Idealismus – an eine problematisch gewordene reine Anschauung zu appelieren. Da die Axiome „freie Setzungen des mathematischen Denkens“ (Cassirer 1957, S. 52) sind und „nicht mehr inhaltliche Behauptungen von absoluter [– intuitiver, rationaler –] Gewißheit“ (Cassirer 1957, S. 53), stehe

[12] Ganz ähnlich betont auch Cassirer selbst diesen Punkt, dass der Schwerpunkt der Kantischen Lehre in der Analytik zu finden sein, in seinem Beitrag zur Diskussion um die Grundlagen der Mathematik mit Bertrand Russell und vorallem Louis Couturat. Vgl. hierzu Cassirer (1907), S. 32-38.

[13] Vgl. zu der Unterscheidung vom Raum als *Form der Anschauung* und *formaler Anschauung* die sehr gute Darstellung von Ihmig (1997), S.189-193.

es dem Denken frei sie anzuwenden. Wie wir bereits gesehen haben und hier noch einmal deutlich wird, sagen sie weder etwas über die Beschaffenheit eines „transzendenten“ noch eines „phänomenalen“ Raumes aus, da sie keine „ontologische Frage“ (Cassirer 1957, S. 53) beantworten wollen. Die Systeme von Axiomen sind vielmehr „Modelle“ oder „Ansätze des Denkens“ (Cassirer 1957, S. 53), die die allgemeine Raumform als *Form des möglichen Beisammenseins* ausdifferenzieren.[14]

Tatsächlich bleibt die Verwendung dieser Formel bei Cassirer aber nicht allein auf die Mathematik beschränkt, sondern spielt auch in anderen Sinngebungszusammenhängen eine zentrale Rolle: Nicht nur im Rahmen theoretischer Erkenntnis, sondern auch in der Sprache, in der Kunst, in Mythos und Religion bzw. in allen Formen der Kultur finden wir laut Cassirer Konkretisierungen der *Möglichkeit des Beisammen.* Der *Raum* in dieser Form spielt daher weiterhin neben *Zeit*, *Kausalität* und *Ding-Eigenschafts-Beziehung* als eine *Grundrelation* oder *Relationsart* eine zentrale Rolle in Cassirer Kulturphilosophie.[15] Wir erinnern uns an das zentrale Eingangszitat: „[Es gibt] kein Gebiet der Philosophie [...] in das das Raumproblem nicht in irgendeiner Weise eingreift und mit dem es sich nicht auf die eine oder andere Weise verwebt. [...] In welcher Beziehung – so lautet hier unsere Frage – steht das Raumproblem zum allgemeinen Symbolproblem?“ (Cassirer 1929, S. 160) Diesem Weg von der Naturphilosophie bzw. Erkenntnistheorie zur Kulturphilosophie soll nun gefolgt werden, um die spezifische Konkretisierung des mathematischen Raumes gerade in Abgrenzung zu anderen Raumformen präziser fassen zu können. Dazu wird im folgenden Teil die Perspektive erweitert und Cassirer Schriften zum allgemeinen Symbolproblem hinzugezogen.[16]

2 Raumproblem und Symbolproblem

In seinem 1931 auf dem *vierten Kongress für Ästhetik und allgemeine Kunstwissenschaft* gehaltenen und im Anschluss veröffentlichten Vortrag *Mythischer, ästhetischer und theoretischer Raum* skizziert Cassirer auf prägnante Weise seine

[14] Mit dieser Bemerkung soll jedoch nicht der Anschein erweckt werden, dass hiermit für Cassirer das Anwendungsproblem der Mathematik bereits vollständig gelöst sei. Die Lage stellt sich bei näherer Betrachtung deutlich komplizierter dar, vgl. z. B. das letzte Kapitel in Ihmig (2001).

[15] Vgl. hierzu: *Einleitung, III. Das Problem der »Repräsentation« und Aufbau des Bewusstseins* in Cassirer (1922) vor allem S. 25f. und S. 29.

[16] Karl-Norbert Ihmig hat in seiner Arbeit *Casirers Invariantentheorie der Erfahrung und seine Rezeption des ‚Erlanger Programms‘* die paradigmatische Bedeutung von Felix Kleins Arbeit für Cassirers ‚System der Erfahrung‘ herausgearbeitet. Die Rolle von Cassirers Ausweitung des Erfahrungsbegriffs durch die Hinwendung zur Kulturphilosophie ist jedoch nicht Gegenstand seiner Arbeit. Vgl. Ihmig (1997) vor allem S. 38f.

allgemeine Raumtheorie vor dem Hintergrund des Programms seiner *Philosophie der symbolischen Formen*. Die entscheidende These lautet, dass eine inhaltliche Bestimmung des Raumes auf direktem Wege nicht möglich ist. Er lasse sich inhaltlich lediglich in seinen einzelnen *Ausformungen* bestimmen; das in logischer Hinsicht erste sei immer die *Sinnordnung*, so Cassirer.[17] Diese These entspricht dem Faktum, das er seiner gesamten Kulturphilosophie zugrunde legt: die *Urfunktion der Repräsentation* als Charakteristikum unseres Bewusstseins.[18]

Cassirer geht es dabei um das Folgende: Das zentrale Anliegen seiner Kulturphilosophie ist es, nicht allein die Bedingungen der Möglichkeit von wissenschaftlicher Erkenntnis offen zu legen, sondern die Bedingungen *jeder* Form symbolischer Sinngebung, wie Mythos, Religion, Sprache, Kunst, Technik, Geschichte und eben auch Wissenschaft. Passend und viel zitiert formuliert Cassirer:

> Die Kritik der Vernunft wird damit zur Kritik der Kultur. (Cassirer 1922, S.9)

Die *Urfunktion der Repräsentation* bedeutet, dass „das Ganze bereits im Element, wie das Element im Ganzen zu erfassen [ist]“ (Cassirer 1922, S. 32). Oder anders gewendet:

> Es gehört zum Wesen des Bewusstseins selbst, dass in ihm kein Inhalt gesetzt werden kann, ohne daß schon, eben durch diesen einfachen Akt der Setzung, ein Gesamtkomplex anderer Inhalte mitgesetzt wird. (Cassirer 1922, S. 29)

D. h. jede Form der Sinngebung oder Sinnordnung bestimmt die jeweiligen Inhalte als Momente, die alle aufeinander bezogen sind; die Inhalte bestehen nicht vorher als für sich stehende Elemente.[19] Diese *Urfunktion der Repräsentation* besitzt nun „verschiedene Relationsarten“, welche *Raum*, *Zeit*, *Ding-Eigenschafts-Beziehung* und *Kausalität* sind, die immer nur im Kontext einer symbolischen Form auftreten können.[20] Bezogen auf den Raum deutet Cassirer dies im dritten Teil der *Philosophie der symbolischen Formen* wie folgt aus: Wir können nicht hinter den Punkt zurück, an dem unsere Empfindung räumlich wird, vielmehr bildet der Raum „das allgemeine Medium, in dem die geistige Produktivität sich erst »feststellen«, in dem sie es zu ihren ersten Gebilden und Gestalten bringen kann.“

[17] Vgl. hierzu auch Bohr (2008) und Koenig/Koenig (2019).
[18] Vgl. Cassirer (1922), S. 32 und darüber hinaus auch den Begriff der *Fundamentalrelation*, den Rainer A. Bast in seiner Einleitung zu Cassirer (1993) stark macht und vor allem auf die empirische Erkenntnis bezieht. Vgl. hierzu auch Cassirer (1939), S. 35.
[19] Vgl. hierzu noch einmal die Einleitung von Rainer A. Bast in Cassirer (1993), besonders S. XV.
[20] Vgl. Cassirer (1922) S. 29.

(Cassirer 1929, S. 169) In besagtem Vortrag fasst Cassirer diesen Aspekt wie folgt prägnant zusammen:

> [Hier zeigt sich], dass es nicht eine allgemeine, schlechthin feststehende Raum-Anschauung gibt, sondern dass der Raum seinen bestimmten Gehalt und seine eigentümliche Fügung erst von der *Sinnordnung* erhält, innerhalb deren er sich jeweilig gestaltet. Je nachdem er als mythische, als ästhetische oder als theoretische Ordnung gedacht wird, wandelt sich auch die ‚Form' des Raumes – und diese Wandlung bezieht sich auf ihn als Gesamtheit, auf seine prinzipielle Struktur. [...] Die Sinnfunktion ist das primäre und bestimmende, die Raumstruktur das sekundäre und abhängige Moment. (Cassirer 1931, S. 102)

Insofern der *Raum* für Cassirer „das allgemeine Medium [bildet], in dem die geistige Produktivität sich erst »feststellen« [...] kann" (Cassirer 1929, S. 169), handelt es sich zunächst, wie im vorherigen Abschnitt bereits angeführt, um eine Anknüpfung an Kants Theorie des *Raums*, die sich aber im selben Atemzug in gleichsam typisch Cassirer'scher Manier als „Erweiterung" derselben enthüllt und somit ein Pluralisierungsmoment offenbart. Von der Frage nach den *Bedingungen der Möglichkeit von Erkenntnis* geht Cassirer über zur Frage nach den *Bedingungen der Möglichkeit von Kultur.* Darüber hinaus kann auch in dieser Erweiterung die Leibnizsche „Definition des Raumes als [die] *Möglichkeit des Beisammen* und als [die] Ordnung im möglichen Beisammen (ordre des coëxistences possibles)" zugrunde gelegt werden, die laut Cassirer eine „rein formelle Bestimmung" (Cassirer 1931, S. 102) ist.[21]

In der Philosophie der symbolischen Formen hält Cassirer entsprechend fest, dass „der Strom der Erlebnisse" unterbrochen und umgebildet werden muss, um überhaupt eine Raumanschauung auszubilden; und „[d]iese Umbildung geschieht, indem den Momenten des dahingleitenden Geschehens eine verschiedene *Bedeutung* beigelegt" (Cassirer 1929, S. 173f.) wird. Diese Bedeutung steht jeweils im Kontext einer Sinnordnung, Sinnsphäre bzw. symbolischen Form.

> Denn jeder dieser Bedeutungszusammenhänge, die Sprache wie die wissenschaftliche Erkenntnis, die Kunst wie der Mythos, besitzt sein eigenes konstitutives Prinzip, das allen besonderen Gestaltungen in ihm gleichsam sein Siegel aufdrückt. (Cassirer 1922, S. 29)

Damit sind wir unmittelbar auf die verschiedenen symbolischen Formen verwiesen und es fragt sich, wie sich die allgemeine Raumstruktur wandelt, wenn sie in unterschiedlichen Sinnzusammenhängen verschiedentlich ausgestaltet wird.

[21] Die Leibnizsche Bestimmung des Raumes findet sich u. a. bei Leibniz (1904), S. 134f.

Stellen wir hierzu zunächst exemplarisch die beiden symbolischen Formen der *Kunst* und *Wissenschaft* einander gegenüber. Cassirer vergleicht deren grundlegende Weisen der Formgebung wie folgt:

> Nicht nur der theoretische *Begriff* besitzt die Kraft, das Unbestimmte zur Bestimmung zu bringen [...]. Auch die Funktion der künstlerischen Anschauung und Darstellung ist von dieser Grundkraft beherrscht und primär mit ihr erfüllt. Auch in ihr lebt eine eigene Weise der Sonderung, die zugleich Verknüpfung – der Verknüpfung, die zugleich Sonderung ist. Aber beides vollzieht sich hier nicht im Medium des Denkens und im Medium des theoretischen Begriffs, sondern in dem der reinen *Gestalt*. (Cassirer 1931, S 100f.)

Die Formgebung in der Kunst vollzieht sich somit auf eine andere Weise als in der Wissenschaft. Ihre „Gestaltung" verweist nicht auf ein „Netzwerk von Begriffen", innerhalb dessen eine Rangfolge „nach dem Grade der Allgemeinheit" möglich ist. Die Kunst versucht nicht von den konkreten Gegebenheiten zu abstrahieren und allgemeine Begriffe zu bilden, sondern zielt auf konkrete Einzelgestalten ab; „sie lässt individuelle Gebilde entstehen, denen die schaffende Phantasie, aus der sie entstammen, den Atem des Lebens einhaucht" (Cassirer 1931, S. 101). Diese Gebilde entstehen jedoch nicht völlig willkürlich, sondern in der Geschichte der Kunst bilden sich verschiedene *Gestalten* oder *Formen* heraus, die wiederholt, aufgegriffen und variiert werden.

Diese bestimmte Art der Formgebung spiegelt sich auch in der Ausformung des Raumes der Kunst, d. h. im *ästhetischen Raum*.[22] Für diesen gilt, dass er nicht wie der theoretische Raum „aus der Kraft des reinen Denkens [aufgebaut ist], sondern aus den Kräften des reinen Gefühls und der Phantasie" (Cassirer 1931., S. 106). Cassirer verdeutlicht diesen Unterschied in seinem Werk *Versuch über den Menschen* anhand der Wahrnehmung einer Landschaft durch einen Maler und durch einen Geologen. Hier unterscheiden „sich sowohl die Art und Weise der Darstellung wie auch ihre Absicht" (Cassirer 1944, S. 258). So ist der theoretische Raum des Geologen nach Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen strukturiert. Er fragt, aus welchen Gründen wir in der Landschaft einen Hügel, einen Fluss oder ähnliches sehen; auch Maßbestimmungen sind dem Geologen möglich. Im ästhetischen Raum des Künstlers hingegen ist die sinnliche Wahrnehmung der Landschaft eine ganz andere. Auch die Landschaft des Künstlers ist eine „echte Vorstellung [und damit] immer zugleich Gegenüber-Stellung" (Cassirer 1931, S 106), aber der „geistige Blick" und damit die ästhetische Raumstruktur ist hier wesentlich von Empfindungen und Qualitäten, von subjektiven Gefühlen geprägt. Ähnlich verhält es sich in

[22] Vgl. Cassirer 1931, S. 105.

der *mythischen* Raumanschauung: „Jeder Ort und jede Richtung ist [...] mit einer bestimmten mythischen Qualität behaftet und mit ihr gewissermaßen geladen" (Cassirer 1931, S. 103) Der Raum erhält hier seine Bestimmung als „ein Gegeneinander und Auseinander *kosmischer* Kräfte" (Cassirer 1929, S. 489).

Von solchen emotionalen und qualitativen Färbungen wird im *theoretischen Raum*, insbesondere im *Raum der Geometrie* jedoch völlig abgesehen; so schreibt Cassirer schon in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, dass der euklidische Raum homogen ist und die Orte nicht mehr mit konkreten Inhalt verknüpft sind, „sondern alle Bedeutung erwächst ihm lediglich aus der relativen *Stellung*, die [das Element] im Gesamtsystem einnimmt." (Cassirer 1910, S. 112) Vom Raum unserer Sinneswahrnehmung wird hier also vollständig abstrahiert, sodass die allgemeine *Form des Beisammen* hier allein durch die „Relationsstruktur als solche [bestimmt wird, die damit] den eigentlichen Gegenstand der mathematischen Betrachtungs- und Untersuchungsweise aus[macht]." (Cassirer 1910, S. 98) Mit *Stetigkeit* und *Unendlichkeit* nennt Cassirer weitere wesentliche Momente des euklidischen Raumes, durch die er sich vom Raum unserer Sinneswahrnehmung unterscheidet, bzw. als eine Abstraktion unseres sinnlichen, anschaulichen Raumes darstellt. Cassirer vergleicht dies mit der Entwicklung der reellen aus den rationalen Zahlen:

> Wie das Gebiet der rationalen Zahlen sich durch eine Folge von *Denkschritten* allmählich zum kontinuierlichen Inbegriff der reellen Zahlen erweiterte, so geht auch der Raum der Sinnlichkeit erst durch eine Reihe gedanklicher Umprägungen in den unendlichen, homogenen und stetigen Begriffsraum der Geometrie über. (Cassirer 1910, S. 113)

Während beim euklidischen bzw. allgemeiner bei metrischen Räumen noch Maßbestimmungen eine entscheidende Rolle spielen, hat die Entwicklung der Mathematik gezeigt, dass wir zu noch allgemeineren Raumbestimmungen kommen können, wenn wir beispielsweise die projektive Geometrie oder die Topologie betrachten, da sie keiner Bestimmung einer Metrik bedürfen bzw. diese teils sogar ausschließen. Bei der Topologie spielen, so Cassirer, nur „Verhältnisse der »Nachbarschaft« von Punkten, des »Auseinanderliegens«, des Sichscheidens oder -kreuzens von Linien, der »Inzidenz« von Flächen" (Cassirer 1929, S. 488) eine Rolle.[23]

Fragen wir hier nun noch einmal nach dem allgemeinen Zusammenhang vom Raum- und Symbolproblem, so fasst Cassirer im dritten Band der *Philosophie der sym-*

[23] Von dieser Bestimmung ausgehend, wäre es sicherlich interessant weiter zu untersuchen, wie sich neuere Entwicklungen der Mathematik in dieses Bild vom *Raum* integrieren lassen, beispielsweise die von Alexander Grothendieck eingeführte Verallgemeinerung der Toplogie, die *étale Topologie*, oder den hiermit verbundenden Begriff des *Schemas*; Cassirers Bestimmung des mathematischen Raumes scheinen hier vielversprechend zu sein.

bolischen Formen die Gesamtentwicklung, die das Raummotiv erfahren hat, wie folgt zusammen:

> Empfindung und Anschauung, Gefühl und Phantasie, produktive Einbildungskraft und konstruktiv begriffliches Denken sind hier gleich sehr beteiligt – und die Art, in der sie ineinandergreifen und in der sie sich wechselweise bedingen, schafft jedesmal eine neue Gestalt des Raumes. Zugleich aber zeigt sich, wie dieser gesamte Prozess bei all seiner inneren Vielgestaltigkeit zugleich eine bestimmte gleichbleibende Richtung innehält – wie die »Auseinandersetzung« zwischen Ich und Welt in ihm allmählich immer deutlicher und in immer stärkerer Bewußtheit hervortritt. (Cassirer 1929, S. 489)

Diese Distanzierungsbewegung verdeutlicht Cassirer an der Entwicklung vom *Mythos* über die *Sprache* bis zur *Wissenschaft*. Im ersten ist der Raum, wie bereits erwähnt, noch völlig vom *Ausdruck* „subjektiver Gefühle" bestimmt und wird noch nicht als etwas selbstständig Gegenüberstehendes betrachtet. In der *Sprache* und in ihrer Raumform findet eine stärkere Distanzierung statt, wenn der *Ausdruck* der subjektiven Gefühle wie folgt umgebildet wird:

> Zwischen dem Ich und der Welt spannt sich jetzt ein Band, das beide, indem es sie miteinander verbindet, zugleich voneinander sondert und getrennt erhält. Die Anschauung des Raumes, [...d]ie einzelnen »Orte« erscheinen nicht mehr lediglich durch gewisse qualitative und fühlbare Charaktere voneinander geschieden; sondern es treten an ihnen bestimmte Relationen des »Zwischen«, der räumlichen *Ordnung* auf. (Cassirer 1929, S. 171)

Insofern findet Cassirer in der Sprache die wesentlichen Bedingungen für den Aufbau einer wirklichen Gegenstandswelt. Der Raum der Sprache wird zum *Darstellungsraum*, da sich in ihm dem *Ich* etwas als *Gegenüberstehendes* darstellt; es gibt nun ein »Zwischen« und nicht mehr reinen Ausdruck, im Sinne einer stärkeren Distanzierung von Ich und Welt. Ihren Höhepunkt findet diese Distanzierungbewegung im theoretischen Raum. Erst das „begriffliche, das geometrische und das physikalische Denken" entledigt sich jeglicher emotionaler Färbung und „»anthropomorpher« Bestandteile", indem sie ersetzt werden durch eine „allgemeine Methodik des Zählens und Messens" (Cassirer 1929, S. 489). Cassirer resümiert:

> Vom »Ausdrucksraum« und vom »Darstellungsraum« wird zu einem reinen »Bedeutungsraum« übergegangen. (Cassirer 1929, S. 490)

Hiermit wird die eingangs angesprochene Verschiebung des Raumproblems deutlich: Die Erweiterung vom Erkenntnisproblem zum allgemeinen Symbolproblem offenbart die Wissenschaft als allgemeinste Form der Objektivation bzw. als höchste Form des Abstraktionsprozesses, der Distanzierungsbewegung von Ich und Welt, die im Kontext des Erkenntnisproblems noch nicht zutage treten konnte, da hier eben noch nicht von verschiedenen Sinnordnungen gesprochen werden konnte. Entsprechend stellt damit der reine Bedeutungsraum die allgemeinste Ausformung der allgemeinen Raumform, als Möglichkeit des Beisammen, dar.

3 Schlussbemerkungen: Mathematik und Kulturphilosophie

Abschließend soll in diesem Beitrag noch einmal der Blick auf das Wechselverhältnis von Cassirers Überlegungen zur Mathematik und ihrer Geschichte einerseits und seiner Kulturphilosophie andererseits gerichtet werden.

So kann auf der einen Seite festgehalten werden, dass sich die Pluralisierung der mathematischen Räume als eine Fortsetzung der Pluralisierung auf der Ebene der symbolischen Formen lesen lässt,[24] und zwar insofern die Bestimmung des Raumes als allgemeine Raumform bei Cassirer nicht nur im Kontext des Erkenntnisproblems bzw. der wissenschaftlichen Erkenntnis eine zentrale Rolle spielt, sondern in jeder Form kultureller Sinngebung. Diese letztere Ebene ist die grundlegendere gegenüber der Erkenntnistheoretische, auch wenn sie in Cassirers Werk erst später zu Tage tritt.

Auf der anderen Seite zeigt Cassirer darüber hinaus im dritten Band seiner *Philosophie der symbolischen Formen*, „daß die Symbolfunktion in eine weit tiefere Schicht des Bewußtseins zurückreicht, als man gewöhnlich annimmt und zugesteht. [...] sie drückt schon den primären Gestalten der Wahrnehmung ihr Siegel auf.“ (Cassirer 1929, S. 177) So ist sogar der „Raum unserer *Sinneserfahrung*“, der empirische Raum als Teil der symbolischen Form der Erkenntnis eine Ausformung der allgemeinen Raumform und auch dieser Raum wird durch Invarianten- bzw. Zentrensetzungen erst aufgebaut.

> Die wechselnden Einzelerscheinungen bilden fortan für uns nur die Peripherie; und von jedem Punkte derselben gehen gewissermaßen Spitzen aus, die unsere Betrachtung in eine bestimmte Richtung lenken –

[24] Vgl. Cassirer (1929), S. 178.

> die sie immer wieder auf die gleiche Dingeinheit, als Zentrum, zurückführen. Und auch hier besteht – wenngleich nicht in demselben Umfang und Ausmaß wie im Aufbau des rein geometrischen Symbolraumes – die Möglichkeit, diese Mittelpunkte verschieden anzusetzen. (Cassirer 1929, S. 178)

In diesem Sinne hat Ihmig (1997) die paradigmatische Rolle der Kleinschen Invariantentheorie für Cassirers allgemeinen und nicht nur auf den Raum beschränkten Erfahrungsbegriff verstanden. Diese Rolle scheint allerdings nicht auf die theoretische Erfahrung bzw. Erkenntnis beschränkt zu bleiben, sondern zeigt sich in jeder symbolischen Form: diese sind gerade als verschiedene Richtungen bestimmt, die verschiedene Welten durch verschiedene Ziele oder Invarianten konstituieren. In dieser Erweiterung von der Erfahrung innerhalb der Erkenntnis bis hin zu jeder Art der Sinngebung bzw. Objektivierung offenbart sich somit auch eine erweiterte paradigmatische Rolle für die *Invariantentheorie*: Nicht nur die mathematischen Räume, sondern alle Formen der Sinngebung sind bestimmt durch eine spezifische ‚Richtung' der Objektivierung.[25]

Neben einer solchen Gleichstellung bzw. -berechtigung aller symbolischer Formen und deren Raumformen, hat sich andererseits aber auch gezeigt, dass die von Cassirer beschriebenen verschiedenen Ausformungen der Leibnizschen Form des ‚möglichen Beisammenseins' nicht unverbunden nebeneinander liegen. Vielmehr war es möglich, sie nach dem Grad der Distanzierungsbewegung von Ich und Welt zu ordnen, d. h. nach der Art wie sich in „jedem dieser Gebiete [der symbolischen Formen] auch eine eigentümliche Weise der »Räumlichkeit« [ausbildet. Dabei] aber jedesmal [. . .] der Prozess der Gestaltung andere Wege" (Cassirer 1929, S. 487) geht. Dies trifft auch auf die Ebene der symbolischen Formen zu, die sich als verschiedenen Gestaltung *zur* Welt charakterisieren lassen[26] und sich auch hier eine Ordnung durch die Distanzierung von *Ich* und *Welt* ergibt. Diese Ordnung ist dabei ganz analog zu der Ordnung der mathematischen Räume zu verstehen. Insofern hat nicht nur der mathematische bzw. theoretische Raum als *reiner Symbolraum* oder *reiner Bedeutungsraum*[27] eine besondere Stellung, sondern auch die Mathematik als Ganzes. Da die „Welt der mathematischen Formen [. . .] eine Welt von Ordnungsformen, nicht von Dingformen" (Cassirer 1929, S. 441f.) ist; da die Mathematik „im Grunde stets eine ‚reine Beziehungslehre'" (Cassirer 1957, S. 33) bleibt, kann sie eine Sprache für strukturelle Zusammenhänge bereitstellen. Als

[25] Vgl. Cassirer (1922), S. 9.

[26] Vgl. für diesen allgemeineren Zusammenhang Cassirer (1922), S.9: „. . . wie in ihnen allen eine ganz bestimmte Gestaltung nicht sowohl *der* Welt als vielmehr eine Gestaltung *zur* Welt, zu einem objektiven Sinnzusammenhang und einem objektiven Anschauungsganzen sich vollzieht."

[27] Vgl. Cassirer 1929, S. 178 und S. 490

Symbolsprache kann sie die Gesetze, Strukturen, Prinzipien oder Ordnungen des symbolisierens sichtbar machen und damit der Philosophie der symbolischen Formen Ausdrucksmöglichkeiten zur Verfügung stellen. Dies gelingt ihr, insofern sie eine erhöhte Stufe der Reflexion auf Strukturen bzw. Beziehungen darstellt, ohne dass dadurch die Philosophie der symbolischen Formen zu einer streng mathematischen Philosophie wird. Exemplarisch seien hierfür Cassirers Erläuterungen zu seinem Theorem der *symbolischen Prägnanz* angeführt, das von zentraler Bedeutung für seine Philosophie der symbolischen Formen ist:

> Es gibt keine bewußte Wahrnehmung, die bloßes »Datum«, die ein lediglich Gegebenes und in dieser Gegebenheit Abzuspiegelndes wäre; sondern jede Wahrnehmung schließt einen bestimmten »Richtungscharakter« in sich, mittels dessen sie über ihr Hier und Jetzt hinausweist. Als bloßes Wahrnehmungs*differential* faßt sie nichtsdestoweniger das *Integral* der Erfahrung in sich.“ (Cassirer 1929, S. 232)

Damit ist die Mathematik nicht nur eine Form der einen symbolischen Form der Erkenntnis, sondern spielt eine entscheidende Rolle für Cassirers gesamte Philosophie der symbolischen Formen, wenn diese „jede geistige Tätigkeit, in der wir uns eine »Welt« in ihrer charakteristischen Gestaltung, in ihrer Ordnung und in ihrem »Sosein«, aufbauen“ (Cassirer 1936, S. 208), beschreiben und ihrer Struktur nach verstehen will.

Literatur

Bohr, Jörn (2008): *Raum als Sinnordnung bei Ernst Cassirer.* Erlangen: filos.

Cassirer, Ernst (1907): „Kant und die moderne Mathematik. Mit Bezug auf *Bertrand Russells* und *Louis Couturats* Werke über die Prinzipien der Mathematik.“ In: *Kant-Studien* 12, Berlin/New York, S. 1-49.

Cassirer, Ernst (1910): *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik.* Hamburg: Meiner 2000.

Cassirer, Ernst (1922): *Philosophie der symbolischen Formen. Erster Teil. Die Sprache.* Hamburg: Meiner 2010.

Cassirer, Ernst (1927): „Das Symbolproblem und seine Stellung im System der Philosophie.“ In: Cassirer, Ernst: *Symbol, Technik, Sprache.* Hrsg. von Ernst Wolfgang Orth und John Michael Krois. Hamburg: Meiner 1985.

Cassirer, Ernst (1929): *Philosophie der symbolischen Formen. Dritter Teil. Phänomenologie der Erkenntnis.* Hamburg: Meiner 2010.

Cassirer, Ernst (1931): „Mythischer, ästhetischer und theoretischer Raum." In: Cassirer, Ernst: *Symbol, Technik, Sprache.* Hrsg. von Ernst Wolfgang Orth und John Michael Krois. Hamburg: Meiner 1985.

Cassirer, Ernst (1936): „Zur Logik des Symbolbegriffs." In: Cassirer, Ernst: *Wesen und Wirkung des Symbolbegriffs.* Darmstadt: WBG 1969.

Cassirer, Ernst (1939): „Was ist ‚Subjektivismus'?" In: Cassirer, Ernst: *Symbol, Technik, Sprache.* Hrsg. von Ernst Wolfgang Orth und John Michael Krois. Hamburg: Meiner 1985.

Cassirer, Ernst (1939): „Axel Hägerström. Eine Studie zur schwedischen Philosophie der Gegenwart". In: Ernst Cassirer*Gesammelte Werke, 21: Axel Hägerström.* Darmstadt: WBG 2005.

Cassirer, Ernst (1944): *Versuch über den Menschen. Einführung in eine Philosophie der Kultur.* Zweite Auflage. Aus dem Englischen übersetzt von Reinhard Kaiser. Hamburg: Meiner 2007.

Cassirer, Ernst (1957): *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit. Band 4. Von Hegels Tod bis zur Gegenwart (1832–1932).* Darmstadt: WBG 1994.

Cassirer, Ernst (1993): *Erkenntnis, Begriff, Kultur.* Hrsg. von Rainer A. Bast. Hamburg: Meiner.

Cassirer, Ernst (1999): *Ziele und Wege der Wirklichkeitserkenntnis.* In: Cassirer, Ernst: *Nachgelassene Manuskripte und Texte. Band 2.* Hrsg. von Klaus Christian Köhnke und John Michael Krois. Hamburg: Meiner.

Ferrari, Massimo (1992): „Cassirer und der Raum. Sechs Variationen über ein Thema". In: *Internationale Zeitschrift für Philosophie.* 1(1992): 167-188.

Heis, Jeremy (2014): „Ernst Cassirer's *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*". In: *HOPOS: The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science*, 4(2), Herbst 2014, S. 241-270.

Heis, Jeremy (2015): „Arithmetic and Number in the Philosophy of Symbolic Forms". In: *The Philosophy of Ernst Cassirer.* Hrsg. von J Tyler Friedman und Sebastian Luft. Berlin/Boston: Walter de Gruyter, S. 123-140.

Ihmig, Karl-Norbert (1997): *Cassirers Invariantentheorie der Erfahrung und seine Rezeption des ‚Erlanger Programm'.* Hamburg: Meiner.

Ihmig, Karl-Norbert (2001): *Grundzüge einer Philosophie der Wissenschaften bei Ernst Cassirer*. Darmstadt: WBG.

Koenig, Daniel (2017): „Raumproblem und Erkenntnisproblem – Ernst Cassirers Rezeption der Entdeckung Nicht-Euklidischer Geometrien". In: *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 8 (2017)*. Hrsg. von Ralf Krömer und Gregor Nickel. Siegen: Universi.

Koenig, Heike und Daniel Koenig (2019): „Mensch und Raum in der Mathematik. Der Mensch als Schöpfer mathematischer Räume?" In: *Körper und Räume.* Studien zur Interdisziplinären Anthropologie. Hrsg. von Julia Gruevska. Wiesbaden: Springer Nature.

Leibniz, G. W. (1904): *Hauptschriften zur Philosophie*. Hrsg. von Ernst Cassirer, übersetzt von Artur Buchenau. Leipzig: Meiner.

Paetzold, Heinz (1993): *Ernst Cassirer zur Einführung*. Hamburg: Junius.

Paetzold, Heinz (1995): *Ernst Cassirer – Von Marburg nach New York. Eine philosophische Biographie*. Darmstadt: WBG.

Mathematische Wissenschaftsphilosophie im Marburger Neukantianismus

Thomas Mormann

1 Mathematische versus logische Wissenschaftsphilosophie.

Die Wissenschaftsphilosophie als eigenständige philosophische Disziplin ist relativ jung. Ihre Anfänge lassen sich auf das letzte Drittel des 19. Jahrhunderts datieren. In dieser kurzen Zeit hat die Wissenschaftsphilosophie gleichwohl erhebliche Wandlungen durchgemacht, die genauer zu verstehen und aufzuarbeiten sich eine eigene Disziplin, die Geschichte der Wissenschaftsphilosophie zur Aufgabe gemacht hat.

Einen in der zeitgenössischen Diskussion recht vernachlässigten Ansatz der frühen Wissenschaftsphilosophie bilden die verschiedenen Strömungen des Neukantianismus, der bis in die ersten Jahrzehnte des 20. Jahrhunderts in Deutschland eine dominierende Rolle spielte. Angesichts der monopolartigen Stellung der analytischen Wissenschaftsphilosophie angelsächsischer Provenienz scheint die neukantianische Wissenschaftsphilosophie heute bestenfalls noch ein philosophiehistorisches Interesse beanspruchen zu können. Ich möchte zeigen, daß dies zumindest für die neukantianische Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule (Cohen, Natorp, Cassirer) zu kurz greift. Die Marburger Schule vertrat einen sehr originellen wissenschaftsphilosophischen Ansatz, den ich als "mathematische Wissenschaftsphilosophie" bezeichnen möchte, der dadurch gekennzeichnet war, daß er die Mathematik – in noch genauer zu beschreibender Weise – ins Zentrum ihrer Aufmerksamkeit stellte.

Für die Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule war die Mathematik die konstituierende Methode der Naturwissenschaften überhaupt. Sie war Garant und Ausdruck für die Einheit und Wissenschaftlichkeit der Naturwissenschaften. Zugleich sei die Einsicht in diese Tatsache der Garant für die Wissenschaftlichkeit der (Wissenschafts-)Philosophie. Für diesen Ansatz argumentierte Hermann Cohen, der Gründer und das Haupt der Marburger Schule, seit Beginn seiner philosophischen Laufbahn unermüdlich, zuletzt 1912 in seiner *Einleitung von Friedrich Albert Langes Geschichte des Materialismus*:

> [K]ritische Philosophie, (d.h. wissenschaftliche Philosophie in der Nachfolge Kants, TM) ist diejenige, welche nicht nur schlechthin mit der Wissenschaft Zusammenhang hat, und auch nicht schlechthin mit der Naturwissenschaft, sondern in erster Linie mit der Mathematik, und erst durch sie, und an ihrer Hand mit der Naturwissenschaft.
>
> Die Mathematik gilt demzufolge als eine Methode der Naturwissenschaft, und zwar als diejenige, mit welcher die Naturwissenschaft in eigentlicher Bedeutung erst Wissenschaft wird: ohne welche jeder andere Anfang der Naturwissenschaft somit als ein unmethodischer erkennbar wird, wenngleich Jahrhunderte mit einem solchen sich begnügen mögen und begnügen müssen mögen. In diesem Kontext der Philosophie mit der Mathematik, als der Grundmethode der Naturwissenschaft, sind Platon, Descartes und Leibniz die Führer der Philosophie; ihnen hat Kant sich angeschlossen und ist er anzuschließen. (Cohen 1914, 59).

Dieses Verständnis des Zusammenhanges von Philosophie, Naturwissenschaft und Mathematik war die gemeinsame Grundüberzeugung *aller* Mitglieder der Marburger Schulgemeinschaft. Es scheint deshalb passend, die Marburger Wissenschaftsphilosophie als eine *mathematische Wissenschaftsphilosophie* zu charakterisieren. *Mathematische Wissenschaftsphilosophie* ist also keineswegs dasselbe wie *Philosophie der Mathematik*im heutigen Sinne. Den Marburger Philosophen war es um die Rolle der Mathematik in der wissenschaftlichen Begriffsbildung insgesamt zu tun.

Die Gründungsurkunde der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie ist zweifellos Hermann Cohens *Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte* (1883). In auf den ersten Blick durchaus exzentrisch anmutender Weise beschreibt Cohen die zentrale Aufgabe der Wissenschaftsphilosophie so:

> Die Begründung des *Infinitesimalbegriffs* ist in zwiefacher Hinsicht ein Anliegen der Philosophie. Erstlich ist das Gewissen der traditionellen

> Logik nicht beruhigt, bevor sie diesen Grundbegriff der mathematischen Naturwissenschaften, soweit ihre Mittel reichen, beschrieben und nach ihren Normen erklärt hat. Ferner aber bleibt in dem Verzeichnis der Grundlagen und Grundsätze der Erkenntnis eine unersetzliche Lücke, solange dieses fundamentale Werkzeug als eine Voraussetzung des mathematischen und demzufolge des Natur-Erkennens nicht anerkannt und abgegrenzt ist.
>
> ...
>
> Der Begriff der infinitesimalen Größe kann daher als ein eindringliches Beispiel gelten für die Notwendigkeit der Ergänzung der Logik durch ein anderes, verwandtes, aber zu unterscheidendes Untersuchungsgebiet. (Cohen 1883, §1)

Dieses mit der Logik verwandte, aber gleichwohl von ihr "zu unterscheidende Untersuchungsgebiet" bezeichnet Cohen als "Erkenntniskritik". Aus einer kantianischen Perspektive, so führt er dann aus, sei "Erkenntniskritik" gleichbedeutend mit der transzendentalen Logik; denn ihre Aufgabe sei die Entdeckung der synthetischen Grundsätze oder derjenigen Grundlagen des Erkennens, auf welchen die Wissenschaft sich aufbaut und von deren Geltung sie abhängt. Mit dieser These der Notwendigkeit einer transzendentalen Logik für ein philosophisches Verständnis der modernen Naturwissenschaften und der Mathematik vertrat der Marburger Neukantianismus eine der Wissenschaftsphilosophie analytischer Prägung entgegengesetzte Position.

Die zentrale Stellung des Infinitesimalbegriffs blieb eine Invariante von Cohens Wissenschaftsphilosophie, die sich von *Das Prinzip der Infinitesimal-Methode* (1883), über *Die Logik der reinen Erkenntnis* bis hin zur *Einleitung* in Friedrich Albert Langes *Geschichte des Materialismus* (1912) durchhielt. Andere Autoren der Marburger Schule, insbesondere Natorp und Cassirer, sind Cohen in seiner Fixierung auf den Infinitesimalbegriff als den zentralen Begriff der Wissenschaftsphilosophie nur halbherzig gefolgt, gleichwohl haben alle Cohens infinitesimalzentrierten Ansatz als Ausgangspunkt ihrer eigenen Überlegungen genommen. Zugleich waren sie bemüht, diskret, aber unmißverständlich deutlich zu machen, daß sie nicht bereit waren, allen von Cohens oft verwegenen metaphysischen Thesen bedingungslos zuzustimmen.[1]

[1] Eine sehr detaillierte Darstellung der zahlreichen Kritiken, die Cohens *Das Princip* von seiten der verschiedensten Autoren erfahren hat, findet sich in Giovanellis Artikel „Hermann Cohen's *Das Princip der Infinitesimal-Methode: The history of an unsuccessful book* (Giovanelli 2016).

In *The Principles of Mathematics* (1903) unterzog Bertrand Russell Cohens "Infinitesimalphilosophie" einer vernichtenden Kritik. Ihm zufolge waren Infinitesimale für die Erklärung von Stetigkeit[2] "überflüssig", und überdies "fehlerhaft und selbstwidersprüchlich". Insbesondere, so Russell, gäbe es nicht so etwas wie "infinitesimale, d.h., unendlich kleine Strecken". Russell berief sich für diese Thesen auf die Mathematiker Weierstrass, Dedekind, und insbesondere auf Cantor. Dieser scheute sich bekanntlich nicht, Infinitesimale als "Cholerabazillen der Mathematik" zu bezeichnen und sich entsprechend vehement für die Ausrottung dieser "Krankheitserreger" einzusetzen.

Russells These, der Begriff des Infinitesimals hätte sich durch die Arbeiten Cantors, Dedekinds und Weierstraß' als grundsätzlich widersprüchlich und inkohärent erwiesen und sei deshalb endgültig und mit Recht aus der Mathematik zu verbannen, ist bei näherem Besehen, falsch:

(1) Russells These ist falsch in mathematischer Hinsicht: Infinitesimale sind keine widersprüchlichen Scheinbegriffe.

(2) Russells These ist falsch in wissenschaftshistorischer Hinsicht: Infinitesimale wurden nicht aufgrund der Arbeiten von Cantor, Dedekind, und Weierstraß aus dem mathematischen Diskurs verbannt. Richtig ist, daß Infinitesimale im Bereich der Analysis von vielen Mathematikern, aber nicht von allen, mit einem gewissen Argwohn betrachtet wurden.

Der Infinitesimalbegriff, den insbesondere logische Empiristen von Carnap bis hin zu Quine gern als Paradebeispiel eines überwundenen logischen Scheinbegriffes präsentierten (cf. Carnap 2004 (1928), 5), erweist sich bei näherem Besehen keineswegs als solcher. Schaut man genauer hin, war auch die Einstellung der logischen Empiristen zum Problem des Infinitesimalbegriffs keineswegs eindeutig. Der Mathematiker und logische Empirist Hans Hahn, eines der führenden Mitglieder des Wiener Kreises, veröffentlichte 1907 die umfangreiche Arbeit *Über die nichtarchimedischen Größensysteme* (Hahn 1907) die bis heute als eine der grundlegenden Arbeiten über diese Klasse von Größensystemen gilt.[3] *Nichtarchimedische Größensysteme* aber sind, wie gleich genauer erklärt werden soll, Größensysteme, die infinitesimale, also unendlich kleine, gleichwohl von 0 verschiedene Größen enthalten, die miteinander verglichen werden können.

[2] In moderner Terminologie meint Russells „Stetigkeit" wohl „Differenzierbarkeit". Russell ist sich offenbar nicht darüber im Klaren, daß es überall stetige, nirgends differenzierbare Funktionen gibt.

[3] Bei den anderen Mitgliedern des Wiener Kreises, also Hahns engsten philosophischen Weggefährten, sind seine mathematischen und philosophischen Arbeiten zur Relevanz der nichtarchimedischen Mathematik jedoch kaum auf Interesse gestoßen. Eine Ausnahme bildet höchstens sein Student Friedrich Waismann.

Cohens Wissenschaftsphilosophie, die dem Begriff des Infinitesimals eine zentrale Stellung einräumte, läßt sich charakterisieren als ein *nichtarchimedischer* Ansatz. Aus der Tatsache, daß solche Größen heute durchaus als mathematisch "vernünftige" Entitäten angesehen werden, läßt sich natürlich keineswegs ableiten, daß auch Cohens "nichtarchimedische" Wissenschaftsphilosophie dieses Prädikat verdient. Immerhin aber läßt sich behaupten, daß sein Ansatz nicht von vornherein eine Totgeburt war, wie dies in der Nachfolge von Russell von analytischen Philosophen wie Carnap, Quine und vielen anderen behauptet worden ist. Ich glaube, man kann sogar zeigen, daß eine mathematische Wissenschaftsphilosophie, die in gewisser Weise an den Marburger Ansatz anschließt, einen Beitrag auch zur aktuellen wissenschaftsphilosophischen Diskussion leisten könnte.

Für diese These möchte ich im Folgenden so argumentieren: Im zweiten Teil dieser Arbeit möchte ich zunächst den Begriff der nichtarchimedischen Größensysteme und seine Geschichte etwas genauer betrachten.[4] Das bezweckt, den Begriff der "infinitesimalen" Größe vom Verdacht, er wäre notwendigerweise "absurd", "inkonsistent" oder sonstwie defizient, zu befreien. Danach soll etwas genauer die Entwicklung der Marburger Schule ins Auge gefaßt werden. Die von Cohen inaugurierte "Infinitesimalmetaphysik" der Marburger Schule hat im Verlauf der Zeit durchaus bedeutsame Wandlungen durchgemacht. Das gilt für Cohens Auffassungen selbst, aber natürlich erst recht, wenn man auch die Arbeiten der anderen Mitglieder betrachtet. Die mathematische Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule geht keineswegs in Cohens infinitesimal-zentriertem Ansatz auf. Natorp, in *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften* (Natorp 1910), und Cassirer in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (Cassirer 1910) haben Cohens Ansatz in verschiedene Richtungen fortgeschrieben, die in mancher Hinsicht nur schwer oder gar nicht mit Cohens ursprünglichen Intentionen vereinbar sind. Diese Diskrepanzen sind in den internen Diskussionen der Marburger nur implizit zur Sprache gekommen. Dieses Thema der inneren Entwicklung der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie soll in Grundzügen im dritten Teil behandelt werden. Anschließend möchte ich im vierten Teil auf Abraham Robinsons "Non-Standardanalysis" eingehen, die als endgültige Rehabilitation eines Leibnizianischen, auf dem Infinitesimalbegriff aufbauenden Kalküls angesehen werden kann.

[4] Für eine ausführliche Darstellung der Entstehung einer nichtarchimedischen Mathematik konsultiere der Leser Philip Ehrlich voluminösen Artikel *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception* (Ehrlich 2006).

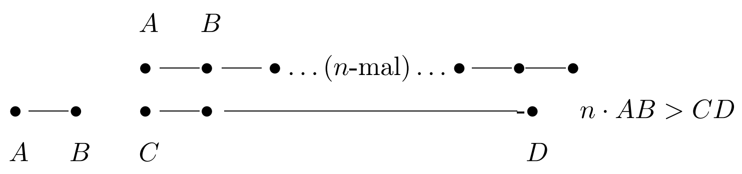
2 Archimedische und nichtarchimedische Größensysteme.

In der Mathematik werden Größensysteme mit unendlich kleinen Größen als *nichtarchimedische* Größensysteme bezeichnet, Größensysteme mit ausschließlich endlichen Größen nennt man *archimedische* Größensysteme. Ein paradigmatisches Beispiel für ein archimedisches System ist das System der natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, <)$ mit dem üblichen $<$-Begriff. Ein nichtarchimedisches System hingegen wäre ein solches, das

> Größen [enthält], die unendlich nahe bei Null liegen und dennoch – "absurderweise" (Quine 1980, 428) – von einander und von 0 verschieden sind.

Die offizielle Charakterisierung *archimedischer* geometrischer Größen ("Strecken") findet sich in David Hilberts *Grundlagen der Geometrie*:

(2.1) Archimedisches Axiom der Geometrie (Hilbert 1899, §8, V1). Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß das n-malige Hintereinander-Abtragen der Strecke AB auf dem durch CD gehenden Halbstrahl über den Punkt D hinausführt:



Dieses *archimedische* Axiom scheint uns, wohl weil wir an eine euklidisch strukturierte Welt gewöhnt sind, ziemlich selbstverständlich. Infinitesimale, also nichtarchimedische Größen sind "absurde" Größen, die dieses Axiom *nicht* erfüllen. Wäre AB eine Größe, die bezüglich CD das archimedische Axiom *nicht* erfüllte, wäre AB relativ CD unendlich klein, oder – aus der umgekehrten Perspektive – CD wäre unendlich groß in Bezug auf AB, da kein Vielfaches von AB jemals größer als CDu sein könnte.

Die Nichterfüllung des archimedischen Axioms besagt gerade, daß es "*unendlich kleine*" und "*unendlich große*" Strecken gibt. In unserer euklidischen Beschränktheit, können wir uns nichtarchimedische Größen nicht "vorstellen". Sie widersprechen der gewöhnlichen Anschauung. Seit den 80er Jahren des 19. Jahrhunderts war jedoch wohlbekannt, daß es solche nichtarchimedischen Systeme gab. In den *Grundlagen der Geometrie* § 12 zeigte Hilbert insbesondere, daß es Systeme gibt, die alle anderen Axiome der euklidischen Geometrie erfüllen, aber nicht das archimedische Axiom.

Tatsächlich stand Hilbert nicht nur als Mathematiker nichtarchimedischen Systemen sehr aufgeschlossen gegenüber. Er wies explizit darauf hin, daß sie nicht nur mathematisch, sondern auch wissenschaftsphilosophisch interessant sein könnten. Die Unabhängigkeit des archimedischen Axioms von den anderen geometrischen Axiomen sei, so Hilbert, auch für die Physik von prinzipiellem Interesse:

> ... denn sie (i.e., die Unabhängigkeit, TM) führt zu folgendem Ergebnis: die Tatsache, daß wir durch Aneinanderfügen irdischer Entfernungen die Dimensionen und Entfernungen der Körper im Weltenraume erreichen, d.h. durch irdisches Maß die himmlischen Längen messen können, ebenso die Tatsache, daß sich die Distanzen im Atominnern durch das Metermaß ausdrücken lassen, sind keineswegs bloß eine logische Folge der Sätze über Dreieckskongruenzen und der geometrischen Konfiguration, sondern erst ein Forschungsresultat der Empirie. Die Gültigkeit des Archimedischen Axioms in der Natur bedarf eben im bezeichneten Sinne gerade so der Bestätigung durch das Experiment wie etwa der Satz von der Winkelsumme im Dreieck im bekannten Sinne. (Hilbert 1917, 408-409)

Um die mathematische Sinnhaftigkeit nichtarchimedischer Strukturen nachzuweisen, genügt es, allgemeine "Größensysteme" zu betrachten, wie sie ausführlich schon Hans Hahn untersucht hatte. Hahn definierte "Größensysteme" als linear geordnete kommutative Gruppen $G = (G, +, \leq, 0)$, also als Strukturen, für die eine assoziative und kommutative Addition "+" und eine lineare Ordnung "<" definiert waren, die den üblichen Axiomen genügten, wie sie etwa für das System der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \leq, 0)$ gelten. Bezeichnet man das neutrale Element von G mit 0, so heißen Elemente, für die gilt $0 < a$, positiv, und Elemente b, die $b < 0$ erfüllen, negativ. Ein Größensystem G erfüllt das archimedische Axiom genau dann, wenn gilt:

(2.2) Archimedisches Axiom für Algebraische Grössensysteme (Hahn 1907, 606). Ein Größensystems $(G, <)$ heißt archimedisch genau dann, wenn es für alle positiven Größen a und b mit $a < b$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $na > b$ ($na := (a + a + ... + a)$ (n-mal)) gilt. Andernfalls ist es nichtarchimedisch.$\diamondsuit$

Offenbar ist das System der ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$, $+$, $\leq$, 0) ein archimedisches System. Für die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der Paare ganzer Zahlen erhält man durch die folgende Definition eine nichtarchimedische Ordnung (vgl. Hahn 1908, 609):

$$\begin{aligned} (a,b) &< (a',b'),\ \text{wenn } a < a' \\ (a,b) &< (a,b'),\ \text{wenn } b < b' \end{aligned}$$

In dieser nichtarchimedischen Ordnung sind die Paare $(0,b)$ in Bezug auf die Paare (a,b) mit $0 < a$ infinitesimal, d.h. unendlich klein in Bezug auf alle Zahlenpaare (a,b), $a > 0$. Das Größensystem $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <)$ ist also nichtarchimedisch. $\diamondsuit$

Größensysteme wie $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <)$ mögen "künstlich" erscheinen und sicherlich leisten sie nichts für das Verständnis der im traditionellen Infinitesimalkalkül verwendeten unendlich kleinen Größen $dx, dy, \ldots$. Immerhin aber zeigen sie, daß der Begriff der unendlich kleiner Größen keineswegs grundsätzlich "absurd" wäre. Sie verdanken ihre "Absurdität" wohl eher einem unbewußten Festhalten an der Forderung der "Anschaulichkeit", die wesentlich durch Gewohnheit bestimmt werden dürfte.

Gleichwohl gibt es ein grundsätzliches Problem mit dieser Art von nichtarchimedischen Größensystemen, wie seit Ende des 19. Jahrhunderts in der Mathematik diskutiert wurden. Dies hatte Felix Klein, der Inaugurator des *Erlanger Programms*, bereits 1908 so formuliert:

> Es liegt nun natürlich die Frage nahe, *ob man auf solche Zahlensysteme gestützt der traditionellen Begründung der Infinitesimalrechnung mit unendlich kleinen Größen eine durchaus exakte, modernen Ansprüchen genügende Gestaltung geben,* d.h. gewissermaßen auch eine *nichtarchimedische Analysis* aufbauen könnte. Die erste und hauptsächlichste Aufgabe dieser Analysis wäre, den Mittelwertsatz:
>
> $$f(x+h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$
>
> aus den hier vorauszusetzenden Axiomen zu beweisen. Ich will einen Fortschritt in dieser Richtung nicht geradezu als unmöglich bezeichnen; bisher ist aber jedenfalls von keinem der vielen Forscher, die sich mit aktual unendlich kleinen Größen beschäftigt haben, dazu etwas Positives geleistet worden. Klein (1908, 236)

Kleins Pessimismus hinsichtlich der Aussichten, einen „brauchbaren“ Infinitesimalbegriff zu formulieren, war zu seiner Zeit und noch lange darüber hinaus unter Mathematikern weit verbreitet. Auch Hermann Weyl, zehn Jahre später in *Philosophie der Mathematik und der Naturwissenschaft* (Weyl 1918), kam zu der resignierten Feststellung, es sei zwar keineswegs unmöglich, eine folgerichtige “nichtarchimedische” Größenlehre aufzubauen, “in welcher das (meistens nach Archimedes benannte) Axiom des Eudoxos nicht gilt; aber man sieht sofort, daß sie für die Analysis gar nichts leistet.” Ähnlich äußerte sich Abraham Fraenkel, einer der Pioniere der modernen Mengentheorie.[5]

All diesen pessimistischen Einschätzungen zum Trotz gelang es Fraenkels Schüler Abraham Robinson schließlich doch, nichtarchimedische Systeme zu konstruieren, die das Kleinsche Kriterium erfüllten, in denen eine strenge Ableitung des Mittelwertsatzes und damit eine Infinitesimalrechnung im klassischen Sinne möglich war. Damit waren die letzten Zweifel an der Vernünftigkeit und Leistungsfähigkeit nicht-archimedischer Systeme ausgeräumt.

Nur in einem sehr eingeschränkten Sinne kann man diese Entwicklung so beschreiben, daß die Marburger Wissenschaftsphilosophie, die in Opposition zur dominierenden mathematischen Orthodoxie an der Sinnhaftigkeit des Infinitesimalbegriffs festgehalten hatte, gegenüber dieser “Recht behalten hätte”. Immerhin aber läßt sich sagen, dass die Geschichte des Infinitesimalbegriffs belegt, dass die erfolgreiche Mathematisierung eines Begriffs durchaus nicht immer im ersten Anlauf erfolgreich sein muss, sondern einen sehr langen Zeitraum in Anspruch nehmen kann.

3 Von Cohen zu Natorp und Cassirer.

Dass die Marburger mathematische Wissenschaftsphilosophie dem Infinitesimalbegriff eine zentrale Stellung einräumte, heisst nicht, alle Mitglieder der Schule hätten diesen Begriff in der selben Weise verstanden oder ihr Verständnis des Infinitesimalbegriffs hätte im Lauf der Zeit keine Entwicklung durchlaufen. Insbesondere kann man nicht davon ausgehen, Cohens Begriff des Infinitesimals, so wie er ihn in *Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte* (Cohen 1883) präsentiert, wäre schlicht derselbe, den er mehr als dreißig Jahre später in der *Einleitung* zu Langes *Geschichte des Materialismus* (Cohen 1914) formulierte. Erst recht ist die Annahme unbegründet, andere Mitglieder der Schule wie Natorp und Cassirer

[5] Für eine ausführlichere Darstellung dieses Skeptizismus, einen für den klassischen Differential- und Integralkalkül brauchbaren Infinitesimalbegriff zu formulieren, siehe Kanovei et al. (2018) und die dort angegebene Literatur.

hätten hinsichtlich der Interpretation des Infinitesimalbegriffs vollständig mit Cohen überein gestimmt. Das gilt ungeachtet der Tatsache, daß sie, sogar noch über Cohens Tod hinaus, bemüht waren, Differenzen mit dem Gründer der Schule nicht in der philosophischen Öffentlichkeit zu verhandeln.

Cohens Verständnis des Infinitesimalbegriffs hat im Verlauf seiner philosophischen Karriere keineswegs unbedeutende Veränderungen durchlaufen, die als Ausdruck grundsätzlicher Veränderungen der philosophischen Landschaft vom 19. zum 20. Jahrhundert gelesen werden können, nämlich als Auswirkung dessen, was des öfteren als "Krise der Anschauung" bezeichnet worden ist (cf. Hahn 1988 (1933)).[6]

In *Das Princip* legte Cohen seiner infinitesimalen Wissenschaftsphilosophie noch eine "kantianisierende" Definition der doppelten Bestimmung des Infinitesimalbegriffs durch Anschauung und Denken zugrunde. Diese Definition wird in *Die Logik der reinen Erkenntnis* (1902) explizit und unmißverständlich aufgegeben. Der Infinitesimalbegriff wird von nun an dezidiert als Produkt des "reinen Denkens" deklariert:

> [D]as *Infinitesimale geht der Ausdehnung vorauf, und liegt ihr zu Grunde: Imo extensione prius*, so bezeichnet Leibniz das Unendlichkleine. *Also im reinen Denken allein ist es gegründet, und kraft desselben vermag es den Grund des Endlichen zu bilden. Der Ursprung ist also der Grund* [des Infinitesimalen, TM]; das [zum reinen Denken gehörende, TM] Urtheil, und keine Empfindung und keine Anschauung (Hervorhebung im Original). Cohen (1902, 106 - 107)

Diese These Cohens über den "Ort des Infinitesimals im reinen Denken" übernehmen Natorp und Cassirer in ihren Versionen der Infinitesimalphilosophie. "Reines Denken" war ein für den Marburger Neukantianismus zentrales Konzept, dem in der modernen Wissenschaftsphilosophie kaum ein Pendant zugeordnet werden kann. Es kann als ein programmatischer Begriff angesehen weren, mit dessen Hilfe sich die Marburger Wissenschaftsphilosophie von anderen, ebenfalls von der modernen Logik und Mathematik inspirierten wissenschaftsphilosophischen Schulen absetzen wollte. Für die Marburger Schule ging Wissenschaftsphilosophie nicht in der relationalen Logik von Frege, Russell und Whitehead auf. Sie betonte vielmehr die Eigenständigkeit des "reinen Denkens", das sich ihrer Überzeugung nach nicht in der relationalen Logik erschöpfte, sondern als wesentlichen Bestandteil noch eine Logik des Infinitesimalen umfasse. Was jedoch diese "Logik des Infinitesimalen" genauer sein sollte, haben die Marburger Philosophen niemals endgültig klären können. Während für Cohen im Mittelpunkt dieser Logik tatsächlich der Begriff

[6] Vgl. auch Volkert (1986).

des Infinitesimals stand, kam Cassirer zu der Überzeugung, dass der Zentralbegriff des reinen Denkens im Funktionsbegriff zu erblicken sei.

Cohens in *Das Princip* formulierter Infinitesimalbegriff war also nur der *Ausgangspunkt* der mathematischen Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule, er deckte keineswegs ihre ganze Spannbreite ab. Die anderen Mitglieder der Schule betrachteten *Das Prinzip* nicht als sakrosankten Text, auch wenn sie es kaum je offen oder gar öffentlich, kritisierten, sie betrachteten es als Grundlage und Ausgangspunkt ihrer eigener Überlegungen, deren Ergebnisse keineswegs immer mit Cohens Vorgaben kompatibel waren.

Das gilt selbst für Cohens treuesten Anhänger Natorp, dessen wissenschaftsphilosophisches Hauptwerk *Die Logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften* (Natorp 1910) als Versuch gelesen werden kann, Cohens ziemlich dunkle Ausführungen zur Mathematik und zu den mathematischen Naturwissenschaften, die er in *Die Logik der reinen Erkenntnis* (1902) vorgetragen hatte, verständlicher zu machen. Das hinderte ihn aber keineswegs daran, in *Die Logische Grundlagen* (1910) seine eigene Darstellung des Infinitesimalproblems zu präsentieren, ohne genauer zu explizieren, wo er von Cohens Thesen abwich und wo nicht.

Im Vergleich zu Cassirers im selben Jahr erschienenen Werk *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (Cassirer 1910) sind Natorps *Die Logischen Grundlagen* in der Wissenschaftsphilosophie außerhalb der Marburger Schule kaum, und wenn, dann nur ablehnend, zur Kenntnis genommen worden. Und das, obwohl sie in gewisser Hinsicht moderner und mathematisch detaillierter waren als *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*.[7]

Natorp ist der einzige Wissenschaftsphilosoph, der jemals auf die Problematik nicht-archimedischer Größensysteme eingegangen ist. Er versuchte sogar, eine Art Synthese aller zu seiner Zeit in der Mathematik existierenden Theorien des Unendlichen, insbesondere des Unendlichkleinen zu liefern. Dabei stützte er sich, und auch das unterscheidet ihn von allen anderen Wissenschaftsphilosophen seiner Zeit, auf das monumentale Werk des italienischen Mathematikers Guiseppe Veronese

[7]Ein Beleg dafür ist zum Beispiel, daß Natorp als einer der ersten Wissenschaftsphilosophen überhaupt Einsteins spezielle Relativitätstheorie von 1905 philosophisch zu begreifen versuchte. Wenig überraschend, allerdings auch wenig überzeugend, kam er zu dem Urteil, die idealistische Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule sei durch Einsteins Theorie überzeugend bestätigt worden (cf. Natorp 1910, Siebentes Kapitel, §11 und §12). Cassirer hingegen beschränkte sich in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (Cassirer 1910) bewußt auf die „klassische" Physik und behandelte die Problematik der Relativitätstheorie erst viel später in *Zur Einsteinschen Relativitätstheorie* (Cassirer 1921), einem Werk, das im Gegensatz zu Natorps Ausführungen von Einstein selbst und anderen nichtidealistischen Wissenschaftsphilosophen ernst genommen wurde.

Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt (Veronese 1894). Er behauptete, Veroneses Infinitesimale könnten als Quotienten der Form $1/\omega$ von Cantors unendlich großen Ordinalzahlen aufgefaßt werden, was ihn zu der Behauptung verführte, Veronese wäre als Vollender der Cantorschen Revolution in der Mathematik anzusehen. Überdies könnte Veroneses Theorie des Kontinuums als eine überzeugende Bestätigung des Marburger Ansatzes gelesen werden, insofern sie Cohens auf dem Begriff des reinen Denkens beruhende infinitesimale Wissenschaftsphilosophie glänzend bestätige:

> Veronese hat die Mathematik des Unendlichen von jedem Zwang der Berufung auf Anschauung mit vollem Recht freigesprochen. Die unendlich großen und unendlich kleinen Segmente werden nicht mittels der Anschauung bestimmt, sondern durch einen möglichen geistigen (d.h. reinen Denk-)Akt; ... . Natorp (1910, 187)
>
> ...
>
> Die einzige Erweiterung und damit zugleich Berichtigung, deren die Aufstellungen Cantors in prinzipieller Hinsicht noch bedurften, war die Ergänzung nach unten [d.h. durch Infinitesimale, TM]. (ibid., 200)

Diese Behauptungen sind mathematisch unhaltbar: Cantors unendliche Zahlen, seien es nun Ordinalzahlen oder Kardinalzahlen, sind von Veroneses unendlichen Zahlen fundamental verschieden. Auch Robinsons System der hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$ ist von Cantors System der Ordinalzahlen ganz verschieden, insbesondere können Robinsons Infinitesimale durchaus nicht als "Quotienten" $1/\omega$ oder $1/\aleph$ von Cantors unendlichen Ordinal- oder Kardinalzahlen definiert werden.

Natorps *Die Logischen Grundlagen* haben von seiten der Mathematiker fast ausschließlich negative Beachtung gefunden. So schrieb der Mathematiker Abraham Fraenkel, im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts einer der Protagonisten der Mengentheorie, in seinen Lebenserinnerungen:

> [Ich] war aufs tiefste betroffen durch die Behandlung des Unendlichkleinen in der Marburger Schule, angefangen mit Cohens *Prinzip der Infinitesimalmethode*" (1883) bis hin zu Natorps *Logischen Grundlagen* (1910), in welchem Werk das Infinitesimale in direkte Korrespondenz zu Cantors transfiniten Zahlen gebracht wird. Eine ganz andere, legitime und überraschende Ehrenrettung des aktual Unendlichkleinen ist neuerdings – von 1960 an – meinem Schüler Abraham Robinson ... gelungen. Fraenkel (1967, 107-108).

Natorp verfolgte in *Die Logischen Grundlagen* das Projekt, eine tragfähige Verbindung herzustellen zwischen einer ziemlich orthodoxen infinitesimaler Metaphysik Cohenscher Prägung und seiner eigenen (verfehlten) Synthese von Cantors Theorie des Unendlichen und Veroneses nichtarchimedischer Mathematik. Dieses Projekt war zum Scheitern verurteilt, da die von Natorp skizzierte Synthese zwischen Cantors und Veroneses Theorien des Unendlichen an einem nicht korrigierbaren mathematischen Konstruktionsfehler krankte, nämlich der These, daß Infinitesimale schlicht als Kehrwerte $1/a$ von Cantors unendlich großen Zahlen aufgefaßt werden konnten.

Das heißt nicht, daß es keine Möglichkeit gäbe, die mit "Cohen", "Cantor" und "Veronese" abkürzend bezeichneten Ideenkomplexe in einen sinnvollen Zusammenhang zu bringen. Diese Möglichkeit aber lag ganz und gar außerhalb des mathematischen und philosophischen Vorstellungshorizontes von Natorp. Den wesentlichen mathematischen Schritt zu ihrer Realisierung hat Abraham Robinson mit der Entwicklung der *Non-Standardanalysis*getan.

Eine Andeutung einer möglichen Versöhnung der *Non-Standardanalysis* und der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie aber findet man schon bei Cassirer, genauer gesagt, in der mathematischen Philosophie, die Cassirer in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* entwickelt hat. Darauf möchte ich nun eingehen. Das läuft darauf hinaus, der mathematischen Wissenschaftsphilosophie des Marburger logischen Idealismus eine gewisse programmatische Zukunftsfähigkeit zuzugestehen.

Während Natorps *Logische Grundlagen* sich bewußt und sehr deutlich in die Tradition von Cohen infinitesimaler Erkenntnislogik stellten, ist Cassirers *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* nur noch locker mit Cohens Ansatz verbunden, auch wenn Cassirer bemüht war, diesen Eindruck zu vermeiden. Wie aus dem Briefwechsel der beiden hervorgeht, hatte Cohen selbst durchaus ein Gespür für die Tatsache, dass Cassirer mit *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* einen Weg einschlug, der ihn von Cohens ursprünglichen Ansatz immer weiter entfernte (cf. Cassirer 2009).

Im Gegensatz zu Cohen sah Cassirer den Infinitesimalkalkül nur als einen Kalkül unter anderen. Die "Logik der Mathematik" sei, so Cassirer, im Sinne von Grassmanns *Ausdehnungslehre* (Grassmann 1844) eine Logik der Kalküle, von denen der Infinitesimalkalkül eben nur einer sei.

Der wissenschaftlichen Erkenntnis, sei sie nun Erkenntnis der Mathematik oder der empirischen Wissenschaften, gehe es immer um begriffliche Analyse und Synthese. Diese Forderung des Zusammendenkens von empirischer Wissenschaft und Mathematik war für Cassirer ein unverzichtbares Erbe der Cohenschen idealistischen

Wissenschaftsphilosophie. Logik und Mathematik auf der einen und empirische Erkenntnis auf der anderen Seite ließen sich nicht trennen:

> Was die kritische Philosophie sucht und was sie fordern muß, ist eine *Logik der gegenständlichen Erkenntnis* [alias transzendentale Logik, TM]. Cassirer (1907, 42)
>
> ...
>
> Erst wenn wir begriffen haben, daß dieselben Grundsynthesen, auf denen Logik und Mathematik beruhen, auch den wissenschaftlichen Aufbau der Erfahrungserkenntnis beherrschen, daß erst sie es uns ermöglichen, von einer festen gesetzlichen Ordnung unter Erscheinungen und somit von ihrer gegenständlichen Bedeutung zu sprechen: erst dann ist die wahre Rechtfertigung der Prinzipien erreicht. (ibid., 45)
>
> ...
>
> Der Blick der Philosophie darf – wenn man dieses Verhältnis einmal schroff und paradox ausdrücken will – weder auf die Mathematik noch auf die Physik gerichtet sein; er richtet sich einzig auf den Zusammenhang beider Gebiete. (ibid., 48)

Die Explizierung dieser, der Mathematik und den mathematischen Naturwissenschaften gemeinsamen, konstituierenden Synthesen kann als Cassirers Fortsetzung und Erweiterung von Cohens Infinitesimalmetaphysik angesehen werden. Diese "gemeinsamen Synthesen" lassen sich allgemein beschreiben als die Einführung idealer Elemente, durch die eine idealisierende begriffliche Vervollständigung und Vereinheitlichung erreicht wird.

Das paradigmatische Beispiel einer solchen *Vervollständigung* in der Mathematik war für Cassirer die Vervollständigung des Systems der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zum System der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Damit schließt sich der Kreis: Der Übergang von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu Robinsons nichtarchimedischem, infinitesimal vervolllständigten System $\mathbb{R}^*$ kann ebenfalls als Vervollständigung beschrieben, analog zu der besser bekannten, "klassischen" Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$. Man kann also Robinsons Non-Standardanalysis als eine Bestätigung von Cassirers allgemeinem Schema der mathematischen Begriffsentwicklung ansehen, eben als *Vervollständigung* (cf. Mormann 2008).

Cassirer bettete also Cohens infinitesimal-zentrierten Ansatz in einen allgemeineren Zusammenhang ein, wodurch seiner Auffassung nach das Wesen von Cohens Ansatz jedoch nicht tangiert werde. Eine solche infinitesimale Vervollständigung *in extenso* konstruiert zu haben, ist das Verdienst Abraham Robinsons. Cassirer konnte sie also nicht kennen. Gleichwohl paßt Robinsons Vervollständigung sehr gut in den von Cassirer skizzierten Rahmen einer Mathematik und mathematische Naturwissenschaften umfassenden Wissenschaftsphilosophie. Dafür auch auf Robinsons Nicht-Standardanalyse einzugehen, empfiehlt sich, gerade für ein besseres Verständnis der Marburger Wissenschaftsphilosophie, auch wenn dies zunächst anachronistisch anmuten mag.

4 Hyperreelle Zahlen und andere Vervollständigungen.

Eine philosophische (und nicht rein philosophiehistorische) Einschätzung der Marburger mathematischen Wissen-schaftsphilosophie kommt nicht darum herum, kurz auf die von Abraham Robinson inauguierte Non-standardanalysis einzugehen, auch wenn es keine direkten Beziehungen zwischen beiden gegeben hat: die Marburger Wissenschaftsphilosophie war längst vor Robinson von der historischen Bühne abgetreten, und Robinson ist auf die Marburger Schule, wenn überhaupt, nur sehr *en passant* eingegangen (cf. Robinson 1966, 278). Warum das mathematische Faktum der Non-Standardanalysis trotzdem für eine philosophische Einschätzung der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie relevant sein könnte, soll in diesem letzten Teil dieses Textes etwas genauer begründet werden.

Aus einer mathematikhistorischen Perspektive betrachtet kann man die auf einem System hyperreeller Zahlen basierende Nichtstandardanalyse als Versuch charakterisieren, eine im modernen Sinne hinreichend strenge Begründung für das Rechnen mit infinitesimalen, also unendlich kleinen Zahlen zu finden, wie sie der Leibnizsche Infinitesimalkalkül verwendete. In den Händen von Leibniz und anderen „genialen“ Mathematikern des 17. und 18. Jahrhunderts führte dieser Kalkül zwar zu richtigen und interessanten Ergebnissen, gleichwohl mußten ihre Methoden Mathematikern späterer Generationen nicht selten als logisch dubios erscheinen.

Leibniz’ Intention war es, das System der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu einem System $^*\mathbb{R}$ zu erweitern derart, daß das erweiterte System $^*R$ neben den „gewöhnlichen“ reellen Zahlen auch infinitesimale Zahlen enthielt, die jedoch „dieselben“ Regeln wie die endlichen Zahlen erfüllten.

Während die Philosophen und Mathematiker des 17. Und 18. Jahrhunderts noch hoffen konnten, dieses Projekt sei realisierbar oder gar schon realisiert, war spätestens seit Ende des 19. Jahrhunderts klar, daß ein solches Projekt undurchführbar ist: Das System der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Das heißt, es gibt keine Erweiterung $\mathbb{R}^*$ von $\mathbb{R}$, die Infinitesimale enthält und die alle „Regeln" von $\mathbb{R}$ erfüllt. Diese Tatsache, oder gar ihr Beweis, lag zu Leibniz' Zeiten außerhalb des Horizontes auch der besten Mathematiker, da es ja noch nicht einmal eine exakte Definition der reellen Zahlen gab. Seit mehr als hundert Jahren ist die wesentliche Eindeutigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ „mathematische Folklore". Damit scheint jedoch ein Leibnizsches Erweiterungsprogramm, das die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu einem System „hyperreeller" Zahlen $^*\mathbb{R}$ mit Infinitesimalen vervollständigen will, endgültig gescheitert.

Bei genauerem Hinsehen erwies sich diese Verabschiedung von Leibniz' Programm jedoch als voreilig. Zwar kann es keine infinitesimale Erweiterung $^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ geben, die zu $\mathbb{R}$ isomorph ist, für die also dieselben Theoreme wie für $\mathbb{R}$ gelten, alle Sätze des Leibnizschen Infinitesimalkalküls sind aber – etwas vereinfacht gesagt – in einer Logik erster Stufe formulierbar, die als Übersetzungen von Sätzen über Sachverhalte in $\mathbb{R}$ erscheinen. Man kann nun zeigen – und das tat Robinson – daß es infinitesimale Erweiterungen $^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ gibt derart, daß die strukturellen Beziehungen zwischen $\mathbb{R}$ und $^*\mathbb{R}$ so sind, daß diese Sätze genau dann wahr sind, wenn ihre Übersetzungen in Sätze über $\mathbb{R}$ wahr sind. Im Jargon der modernen Modelltheorie wird das so ausgedrückt, daß ein „Transfer-Theorem" zwischen $\mathbb{R}$ und $^*\mathbb{R}$ gilt. Insgesamt gelang es so, eine dem Leibnizschen Infinitesimalkalkül sehr ähnliche „Nichtstandardanalyse" zu formulieren, die den Exaktheitsansprüchen der modernen Mathematik genügt und es damit erlaubt, die eleganten Regeln des Leibnizschen Kalküls „ohne schlechtes logisches Gewissen" zu verwenden.

Eine für das Verständnis der Non-Standardanalysis fundamentale Tatsache ist, daß die Konstruktion von $^*\mathbb{R}$ viele Merkmale gemein hat mit der Dedekind- oder Cantor-Vervollständigung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Das heißt, der Schritt von $\mathbb{R}$ zu $^*\mathbb{R}$ ähnelt in vielem dem Schritt von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$. Beide sind Vervollständigungen algebraischer Systeme, die nach sehr ähnlichen Mustern konstruiert werden. Der philosophiehistorisch interessante Punkt ist, daß die Vervollständigungen von Dedekind und Cantor und ihre philosophische Bedeutung von Natorp und Cassirer ausführlich in *Die Logischen Grundlagen* (Natorp 1910) bzw. in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (Cassirer 1910) diskutiert werden. Insbesondere für Cassirer war der Begriff der Vervollständigung ein Schlüsselbegriff für das philosophische Verständnis der wissenschaftlichen Begriffsbildung überhaupt.

Für Cassirers Philosophie der Mathematik (und damit auch für seine Wissenschaftsphilosophie insgesamt) war es von entscheidender Bedeutung, diesen Prozeß der Vervollständigung in seinem Wesen zu begreifen. Eine solche Vervollständigung sei nicht einfach als eine bloß extensionale Erweiterung eines mathematischen Gegenstandsbereichs zu verstehen. Eine Vervollständigung im eigentlichen Sinne liege nur dann vor,

> ... wenn sich zeigt, daß die neuen Elemente nicht einfach ... den alten "adjungiert" werden, sondern daß sie eine systematisch-notwendige *Entfaltung* der letzteren sind. Und der Beweis *dieses* Zusammenhangs läßt sich wiederum nicht anders führen als durch den Nachweis, daß zwischen den neuen und den alten Elementen gewissermaßen eine logische Urverwandtschaft besteht: in der Art, daß die neuen Elemente zu den früheren nichts hinzubringen als das, was schon in deren ursprünglichen Sinn enthalten ist und in diesem implizit beschlossen liegt.
>
> ...
>
> In der Tat wird man den Schlüssel für das eigentliche Verständnis der sog. "idealen" Gebilde eben darin zu suchen haben, daß die Idealität keineswegs erst bei ihnen *beginnt*, sondern daß sie in ihnen nur in prägnanter Schärfe und mit besonderem Nachdruck hervortritt. Cassirer (1929, 461)

Bemerkenswert ist nun, daß der Übergang vom archimedischen System $\mathbb{R}$ zu Robinsons nichtarchimedischem $\mathbb{R}^*$ strukturell ganz ähnlich beschrieben werden kann. Der Übergang von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}^*$ ist eine idealisierende Vervollständigung im Sinne Cassirers, durch die das System der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch "Adjunktion" idealer Elemente zum System $\mathbb{R}^*$ erweitert wird. Diese Erweiterung ist nicht nur eine Erweiterung im extensionalen Sinne, sondern läuft auf eine echte "Tieferlegung der Fundamente" im Sinne Hilberts hinaus.

In strikter Analogie zur Konstruktion der reellen Zahlen als Vervollständigung rationaler Zahlen konstruiert man eine infinitesimale, d.h. nichtarchimedische Vervollständigung $\mathbb{R}^*$ von $\mathbb{R}$. Die Definition von $\mathbb{R}^*$ ist komplizierter als im Fall der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ mithilfe von Cauchyfolgen, sie setzt insbesondere das Auswahlaxiom voraus, um die Existenz geeigneter Ultrafilter zu gewährleisten.

Der für eine neue Einschätzung der Marburger Wissenschaftsphilosophie zentrale Punkt ist nun, daß für Cassirer *Vervollständigungen* im eben erörterten Sinne, also insbesondere die *Vervollständigung* des Systems rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zum System der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die fundamentale Methode der mathematischen und empirischen Begriffsbildung überhaupt darstellten. Da nun die Einführung von Infinitesimalen (und anderen hyperreellen Zahlen), also der Übergang von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^*$, als Vervollständigung beschrieben werden kann, ergibt sich, daß Robinsons

Nichtstandard-Analyse sehr gut in den allgemeinen Rahmen der Cassirerschen Wissenschaftsphilosophie paßt.

Im Nachhinein, aus einer Perspektive, in der Robinsons infinitesimale Vervollständigung $^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ bereits bekannt ist, erscheint damit Cassirers auf einem allgemeinen Vervollständigungskonzept beruhende Konzeption als eine weitreichende Verallgemeinerung von Cohens mathematisch krudem, auf den Begriff des Infinitesimals fixierten Ansatz.

Folgt man Cassirers These, daß die fundamentalen Begriffsbildungen in der Mathematik und in den mathematischen Naturwissenschaften als *idealisierende Vervollständigungen* zu charakterisieren seien, wird damit eine bemerkenswerte begriffliche Kontinuität zwischen archimedischen und nichtarchimedischen Größensystemen sichtbar. Darüber hinaus hat sich das Problem der Rolle von Idealisierungen in den (Natur)wissenschaften als ein sehr fruchtbares Feld für die zeitgenössische wissenschaftsphilosophische Arbeit erwiesen.

Insgesamt erweist sich damit Cohens auf den Infinitesimalbegriff fokussierte Transzendentalphilosophie keineswegs mehr als so obsolet wie es auf den ersten Blick scheinen möchte.

Literatur

Biagioli, F. 2017, Space, Number, and Geometry from Helmholtz to Cassirer, Springer.

Carnap, R., 2004, Scheinprobleme in der Philosophie und andere metaphysikkritische Schriften, herausgegeben, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Thomas Mormann, Hamburg, Meiner Verlag.

Cassirer, E., 1902, Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen, Hamburg, Meiner.

Cassirer, E., 1907, Kant und die moderne Mathematik, Kant-Studien 12, 1 – 44.

Cassirer, E., 1912, Hermann Cohen und die Erneuerung der kantischen Philosophie, Kant-Studien 17, 252 – 273.

Cassirer, E., 1979 (1945), Reflections on the Concept of Group and the Theory of Perception, in E. Cassirer, Symbol, Myth, and Culture, edited by D.P. Verene, New Haven and London, Yale University Press, 271 – 291.

Cassirer, E., 1929 (1982), Philosophie der symbolischen Formen, Dritter Teil. Phänomenologie der Erkenntnis, Darmstand, Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Cassirer, E., 2009, Briefe, Ausgewählter wissenschaftlicher Briefwechsel. Unter Mitarbeit von Marion Lauschke, Claus Rosenkranz und Marcel Simon-Gadof herausgegeben von John M. Krois, Nachgelassene Manuskripte und Texte. Band 18, XLVIII, 380 Seiten sowie 1 DVD-ROM mit sämlichen etwa 1400 bislang aufgefundenen Briefen von und an Ernst Cassirer, Hamburg, Meiner.

Cohen, H., 1883, Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte: Ein Kapitel Zur Grundlegung der Erkenntniskritik, Berlin, Dümmler.

Cohen, H., 1902, Logik der reinen Erkenntnis, Berlin, Bruno Cassirer.

Cohen, H., 1914/1984, Einleitung mit kritischem Nachtrag zur „Geschichte des Materialismus“ von F.A. Lange, edited by H. Holzhey, Hildesheim, Olms.

Ehrlich, P., 2006, The Rise of non-Archimedian Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedian Systems of Magnitudes, Archive of the History of Exact Sciences 60, 1 – 121.

Fraenkel, A.A., 1967, Lebenskreise. Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers, Stuttgart, Deutsche Verlagsanstalt.

Giovanelli, M., 2016, Hermann Cohen's *Das Princip der Infinitesimal-Methode*: The history of an unsuccessful Book, Studies in History and Philosophy of Science 58, 9 – 23.

Grassmann, H., 1844, Die lineale Ausdehnungslehre, Wiegand. Leipzig.

Hahn, H., 1907, Über die nicht-archimedischen Größensysteme, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse 116, 601 – 655. Wieder abgedruckt in Hans Hahn, Gesammelte Abhandlungen Band 1, herausgegeben von L. Schmetterer und K. Sigmund, Springer, Wien/NewYork.

Hahn, H., 1933(1988), Die Krise der Anschauung, in Hahn 1988, 86 – 114.

Hahn, H. 1934 (1988), Gibt es Unendliches?, in Hahn 1988, 115 – 140.

Hahn, H., 1988, Empirismus, Logik, Mathematik, Frankfurt/Main, Suhrkamp Verlag.

Hilbert, D., 1899, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, Teubner.

Hilbert, D., 1917, Axiomatisches Denken, Mathematische Annalen 78, 405 – 415.

Holzhey, H., 1986, Cohen und Natorp. Der Marburger Neukantianismus in Quellen. Band 2, Basel, Schwabe.

Kanovei, V., Katz, K., Katz, M., Mormann, T., 2018, What makes a theory of infinitesimals useful?, A View by Klein and Fraenkel, Journal of Humanistic Mathematics 8(1), 108 – 119.

Katz, M., Sherry, D. 2013, Leibniz' Infinitesimals: Their Fictionality, their Modern Implementations, and their Foes from Berkeley to Russell and Beyond, Erkenntnis 78(3), 571 – 625.

Klein, F., 1924, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Band 1 (Arithmetik, Algebra, Analysis), Berlin, Springer.

Laugwitz, D., 1973, Ein Weg zur Nonstandard-Analyse, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 75, 66 – 93.

Mormann,T., 2008, Idealization in Cassirer's Philosophy of Mathematics, Philosophia Mathematica 16(2), 151 – 181.

Mormann,T., Katz, M., 2013, Infinitesimals as an Issue of Neo-Kantian Philosophy of Science, HOPOS 3(2), 236 – 280.

Moynahan, G.B., 2003, Hermann Cohen's „Das Prinzip der Infinitesimalmethode", Ernst Cassirer, and the Politics of Science in Wilhelmine Germany, Perspectives on Science 11, 35 – 75.

Natorp, P., 1910, Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, Leipzig, Teubner.

Prestel, A., 1983, Non-Standard Analysis, in H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, R. Remmert (Hrg.) Zahlen, Berlin usw., Springer, 213 – 234.

Quine, W.V.O., 1980(1976), Wort und Gegenstand (Word and Object), Stuttgart, Re- clam.

Robinson, A., 1966, Non-Standard Analysis, Amsterdam, London, North-Holland.

Russell, B, 1903, The Principles of Mathematics, London, Routledge and Kegan Paul.

Schmieden, C., Laugwitz, D., 1958, Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung, Mathematische Zeitschrift 69, 1 – 39.

Sherry, D., Katz, M., 2014, Infinitesimals, Imaginaries, Ideals, and Fictions, Studia Leibnitiana 44 (2012), no. 2, 166 – 192.

Veronese, G., 1894, Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarerer Form entwickelt, aus dem Italienischen übersetzt von Adolf Schepp, Leipzig, Teubner.

Volkert, Kl., 1986, Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

Cassirer, der Grundlagenstreit und die „idealen Elemente“ der Mathematik

Matthias Neuber

Abstract. *Cassirers Philosophie der Mathematik erfährt gegen Ende der 1920er Jahre eine in der bisherigen Forschung nur wenig beachtete Wandlung, welche unmittelbar mit dem zu jener Zeit in der Mathematik als solcher in vollem Ausmaß zum Ausbruch gelangenden Grundlagenstreit zusammenhängt. Ziel dieses Beitrags ist es, Cassirers Deutung des Grundlagenstreits auf systematischem Wege zu rekonstruieren und vor dem Hintergrund der verhandelten rivalisierenden Positionen ideengeschichtlich einzuordnen. Dabei wird sich zeigen, dass insbesondere Cassirers im Anschluss an David Hilbert vorgenommene Fokussierung auf das Konzept der „idealen Elemente“ Anlass zu nicht unbeträchtlichen Interpretationsproblemen gibt.*

1 Einige werkhistorische Vorbemerkungen

Ernst Cassirers Überlegungen zu Fragen der Philosophie der Mathematik kommen erstmals in dem 1907 publizierten Aufsatz „Kant und die moderne Mathematik“ zu klarem Ausdruck. Wie man weiß, handelt es sich bei dem Beitrag um eine kritische Auseinandersetzung mit den mathematikphilosophischen Ansichten Louis Couturats und Bertrand Russells. Cassirer macht keinen Hehl daraus, dass sein eigener Standpunkt sich dem philosophischen Kritizismus Immanuel Kants verpflichtet sieht. So heißt es gleich zu Beginn des Aufsatzes:

> Das Schicksal und die Zukunft der kritischen Philosophie wird durch ihr Verhältnis zur exakten Wissenschaft bedingt. Wenn es gelänge, das Band zwischen ihr und der Mathematik und mathematischen Physik zu zerschneiden, so wäre sie damit ihres Wertes und Inhalts beraubt. Wie hier die geschichtlichen Wurzeln ihrer Entstehung liegen, so kann auch ihre Fortdauer nur durch diesen lebendigen Zusammenhang gesichert werden. (Cassirer 1907, 1)

Cassirer ist sich vollkommenen darüber im Klaren, dass der solcherart zur Geltung gebrachte Anspruch einer Anbindung der kantischen Philosophie an die moderne Wissenschaftsentwicklung nicht ohne Revision vonstattengehen kann. Oder anders gesagt: Wie die meisten anderen Neukantianer auch, geht Cassirer von der Annahme aus, dass (um mit Wilhelm Windelband zu sprechen) ‚über Kant hinausgegangen' werden muss.[1]

Was nun speziell die Mathematik betrifft, so sieht Cassirer in erster Linie Handlungsbedarf im Zusammenhang mit ihrer Stellung zur formalen Logik. War Kant in seinen Schriften noch an die klassische, aristotelische, Logik gebunden, so orientiert sich Cassirer selbst ganz explizit an der modernen, symbolischen, Logik. Den unmittelbaren Bezugspunkt bildet dabei das – von Couturat so genannte – Programm der „Logistik", also das, was man heute im Wesentlichen im Kontext des logischen Prädikatenkalküls behandelt. Cassirer schreibt:

> Die Logistik kann [...] die „transcendentale" Logik niemals verdrängen oder ersetzen; aber es ist nicht zu bezweifeln, dass sie in ihrer modernen Gestalt für die eigentlichen erkenntnistheoretischen Probleme reichere Anregungen bietet und einen sicheren „Leitfaden" enthält, als Kant ihn in der traditionellen Logik seiner Zeit sah. (Cassirer 1907, 8)

Wie Cassirer weiterhin ausführt, ist es insbesondere der Begriff der *Relation*, welcher im Zentrum der modernen – vor allem auch durch Russell auf den Weg gebrachten – Logik (bzw. „Logistik") steht (vgl. Cassirer 1907, 8-10). Eng damit verknüpft ist die sich sowohl auf die Arithmetik als auch auf die Geometrie erstreckende *Abwertung der sinnlichen Anschauung*, welch Letztere bei Kant ja noch den Status eines unentbehrlichen Mediums mathematischer Konstruktionsarbeit einnahm.[2] Doch Cassirer ist der festen Überzeugung, dass die zeitgenössische ‚Weiterführung' der ursprüngliche Lehre Kants dem vorliegenden Revisionsbedarf in

[1] Siehe in diesem Zusammenhang auch die entsprechenden Ausführungen in Neuber 2011 sowie in Neuber 2012.

[2] Vgl. dazu insbesondere Kant 1783, § 7.

hinreichendem Ausmaß Rechnung getragen hat. So dokumentiere sich insbesondere in Hermann Cohens im Jahre 1902 veröffentlichter Studie *Logik der reinen Erkenntnis* die aufseiten des Neukantianismus erfolgte Einsicht in die Priorität ‚des Logischen' vor ‚dem Sinnlichen'. Dazu wiederum Cassirer wörtlich:

> Wie die „Logistik", so ist die moderne kritische Logik über Kants Lehre von der „reinen Sinnlichkeit" hinweggeschritten. Auch ihr bedeutet die Sinnlichkeit zwar ein erkenntnistheoretisches *Problem*, nicht aber einen selbständigen *Quell der Gewissheit* mehr. So stimmt sie in ihrem Grundgedanken mit der *Tendenz*, von der die Werke Russells und Couturats erfüllt sind, überein: in der Forderung einer rein logischen Ableitung der mathematischen Grundprinzipien, durch die wir die „Anschauung" selbst, durch die wir Raum und Zeit erst völlig *verstehen* und begrifflich beherrschen lernen. (Cassirer 1907, 31f.)

Was hier in aller Deutlichkeit zum Ausdruck kommt, ist die Festlegung auf eine bestimmte Form des mathematischen *Logizismus*. Ausgehend vom Russell-Couturatschen Programm einer „allgemeinen Logik der Relationen" (Cassirer 1907, 7) soll die gesamte Mathematik *zurückgeführt* werden auf rein logisch-relationale Zusammenhänge. Die Annahme ontologisch eigenständiger, durch die sinnliche Anschauung allererst zu determinierender mathematischer ‚Dinge' wird somit hinfällig.[3]

In der 1910 erschienenen Monographie *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* findet dieser Gedankengang seine Fortführung. Unter Berufung auf Richard Dedekinds „Was sind und was sollen die Zahlen?" (1888) wird die Logik der Relationen in Anspruch genommen, um einen ganz speziellen (und zugleich zentralen) mathematischen Begriff, nämlich den der Zahl, „seinem vollständigen Gehalt nach aus rein logischen Prämissen abzuleiten" (Cassirer 1910, 46). Zahlen werden dabei aufgefasst als „Relationsterme" (Cassirer 1910, 47) oder, wie es auch heißt, als „Stelle[n] im System" (Cassirer 1910, 49). Cassirer führt aus:

> Die „Essenz" der Zahlen geht in ihrem Stellenwert auf. [...] Die Drei „folgt" auf die Zwei nicht, wie etwa auf den Blitz der Donner, da beide keine zeitliche Wirklichkeit, sondern lediglich logischen Bestand besitzen. Der Sinn des Folgens beschränkt sich darauf, daß die Zwei als *Prämisse* in die Begriffsbestimmung der Drei eingeht; daß die Bedeutung des einen Begriffs erst erhellt, wenn die des andern feststeht. Die

[3] Was nicht heißen soll, dass Cassirer die sinnliche Anschauung als solche für mathematisch belanglos hält. Wie er gegen Ende des Aufsatzes darlegt, kommt der sinnlichen Anschauung nach wie vor die Aufgabe zu, „zwischen den verschiedenen möglichen Prinzipien, die wir mit gleichem logischen Recht an die Spitze unserer Deduktionen stellen könnten, eine *Auswahl* zu treffen" (Cassirer 1907, 46f.).

> niedere Zahl ist der höheren „vorausgesetzt“; aber dies bezeichnet nicht das physische oder psychologische Früher und Später, sondern ein reines Verhältnis der begrifflich systematischen Abhängigkeit. Was die „spätere“ Stelle kennzeichnet, ist der Umstand, daß sie auf komplexe Weise durch Anwendung der erzeugenden Relation aus der Grundeinheit hervorgeht und somit die Elemente, die ihr vorangehen, als logische Bestandteile und Phasen in sich aufnimmt. (Cassirer 1910, 51f.)

Auf den Punkt gebracht heißt das, dass das logische Prinzip der begrifflichen *Reihenbildung* der Zahlentheorie den Takt vorgibt. Die einzelnen Elemente des Zahlensystems werden relational ‚erzeugt‘, indem man sie einer begrifflichen „Progression“ (Cassirer 1910, 49) unterwirft. Dazu bedarf es weder der sinnlichen Anschauung noch irgendwelcher anderer außerlogischer Instanzen. Cassirer legt daher kategorisch fest: „Die Voraussetzungen für die Ableitung des Zahlbegriffs sind in der allgemeinen *Logik der Relationen* gegeben.“ (Cassirer 1910, 48)

Es kann hier nicht darum gehen, den mathematikphilosophischen Standpunkt des frühen Cassirer im Einzelnen nachzuzeichnen. Vielmehr kommt es in unserem Zusammenhang darauf an, die *Wandlung* zu erfassen, welche Cassirers Überlegungen zu Fragen der Philosophie der Mathematik im Laufe der 1920er Jahre durchlaufen. Es kann in dieser Hinsicht nur wenig Zweifel daran bestehen, dass der innerhalb der zeitgenössischen Mathematik geführte, um die Positionen des Logizismus, des Intuitionismus und des Formalismus sich rankende *Grundlagenstreit* eine ganz entscheidende Rolle spielte. Umso erstaunlicher ist es, dass zur mathematikphilosophischen Position des späteren Cassirer so gut wie gar nichts an einschlägiger Forschungsliteratur existiert. Dies mag damit zusammenhängen, dass der spätere Cassirer – insbesondere aufgrund seiner dreibändigen *Philosophie der symbolischen Formen* (vgl. Cassirer 1923, 1925, 1929) – primär als Kulturphilosoph und nicht als Philosoph der Mathematik gesehen und gedeutet wird.[4] Wie dem auch sei, Beides – Kulturphilosophie und Philosophie der Mathematik – hängen für den späteren Cassirer durchaus miteinander zusammen. Oder konkreter gesprochen: Die Mathematik hat einen festen Platz im System der *Philosophie der symbolischen Formen*, was sich denn auch in dem mit „Der Gegenstand der Mathematik“ überschriebenen Kapitel IV des dritten Teils des 1929 erschienenen Bandes 3 dieses Werkes sichtbar niederschlägt.

Es ist vor diesem Hintergrund erfreulich, feststellen zu können, dass in jüngerer Zeit zumindest ein Beitrag erschienen ist, der sich mit der Mathematikauffassung des späteren Cassirer auseinandersetzt. Es handelt sich hierbei um den 2015 publizierten Aufsatz „Arithmetic and Number in the Philosophy of Symbolic Forms“

[4]Siehe in diesem Zusammenhang den Überblick in Neuber 2016a und Neuber 2016b.

von Jeremy Heis. Nach Heis gibt es zwei Möglichkeiten, das Verhältnis der Mathematikauffassung des frühen zu der des späteren Cassirer zu bestimmen: „relocation and revision" (Heis 2015, 134). Dem „relocation"-Modell zufolge lassen sich die einschlägigen Darlegungen des frühen Cassirer mehr oder weniger umstandslos in den Rahmen der *Philosophie der symbolischen Formen* integrieren, ohne dass sich etwas an den Grundaussagen ändern würde. Dem „revision"-Modell zufolge ist dies nicht der Fall, da es im Kontext der *Philosophie der symbolischen Formen* zu signifikanten Abweichungen gegenüber den in „Kant und die moderne Mathematik" und in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* anzutreffenden Überlegungen kommt. Heis, der selber das „revision"-Modell favorisiert, macht diese Abweichungen an drei Punkten fest (vgl. Heis 2015, 129): Erstens kommt es zu einer ‚Wiederaufwertung' der sinnlichen Anschauung im Kontext der Arithmetik. Zweitens wird, damit zusammenhängend, die empirische Psychologie seitens Cassirers nun sehr ernst genommen. Drittens wird auf die Grundlegungsfunktion außerwissenschaftlicher symbolischer Formen, wie Sprache und Mythos, reflektiert. All dies, so Heis weiter, geht mit einer Annäherung Cassirers an den mathematischen *Intuitionismus* einher, was wiederum nur dann verständlich werden kann, wenn man berücksichtigt, dass zwischen der Veröffentlichung von *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* und der Veröffentlichung von Band 3 der *Philosophie der symbolischen Formen* „mathematics faced the so-called foundational crisis" (ebd.).

Ehe nun daran gegangen werden kann, die Mathematikauffassung des späteren Cassirer einer deutenden Analyse zu unterziehen, bedarf es noch einer weiteren, allerdings knapper zu haltenden, Vorbetrachtung. Wenn man so will, handelt es sich für Cassirer bei der Philosophie der Gegenwart, wie er sie vorfindet, um (zugespitzt formuliert) eine ‚Reihe von Fußnoten' zu Kant, vor allem aber auch zu Leibniz. Dass dies auch auf seine Sicht der zeitgenössischen Philosophie der Mathematik zutrifft, soll im folgenden Abschnitt kurz verdeutlicht werden.

2 Cassirer, Leibniz und Kant

Das bereits erwähnte Kapitel IV des dritten Teils von Band 3 der *Philosophie der symbolischen Formen* beginnt mit einem Abschnitt, welcher überschrieben ist mit „Formalistische und intuitionistische Begründung der Mathematik." Nun könnte man vermuten, dass es hier von Beginn an um den zeitgenössischen mathematischen Grundlagenstreit geht. Dem ist aber nicht so. Denn:

> Es scheint, als hätte manches Mißverständnis zwischen den streitenden Richtungen vermieden werden, als hätte der Kern des Gegensatzes

> deutlicher herausgeschält werden können, wenn man sich in beiden Lagern bewußt gewesen wäre, daß das Problem, um das es sich hier handelt, in der Logik und in der Philosophie eine lange Vorgeschichte hat. (Cassirer 1929, 415)

Wie Cassirers unmittelbar anschließende Darlegungen zeigen, sieht er in Gottfried Wilhelm Leibniz den wichtigsten Vorläufer des zeitgenössischen mathematischen „Formalismus", während Kant für ihn den Weg zum „Intuitionismus" geebnet hat. Wie ist das genau zu verstehen?

Zunächst zu Leibniz. Hier gilt es als Erstes zu sehen, dass Cassirer im Rahmen seiner ideengeschichtlichen Rekonstruktion nicht unterscheidet zwischen a) Formalismus und b) Logizismus. Dies dürfte hauptsächlich damit zusammenhängen, dass der Logizismus als spezifische Position der Philosophie der Mathematik sich erst mit der Entwicklung der *modernen* Logik im späten 19. Jahrhundert etablierte, während Leibniz selbst sich noch auf dem Boden der vor-modernen Logik bewegte.[5] Doch darauf kommt es im Augenblick nicht an. Wichtig ist, dass Cassirer die Eigentümlichkeit der Leibnizschen Mathematikauffassung darin sieht, dass mathematische Erkenntnis als *reine Verstandeserkenntnis* ausgewiesen wird (vgl. Cassirer 1929, 418f.). Den systematischen Hintergrund bildet dabei Leibniz' Differenzierung zwischen ‚konfuser' (sinnlicher) und ‚distinkter' (begrifflicher) Erkenntnis. „Aus dieser Trennung", so Cassirer, „ergibt sich unmittelbar, daß für Leibniz kein einziger, wahrhaft mathematischer Gegenstand sich in der Sinnlichkeit *gründet*" (Cassirer 1929, 419). Dies gelte nicht nur für die Zahl, sondern ebenso für das Konzept der geometrischen Ausdehnung. Eine zentrale Konsequenz dieser Sicht besteht Cassirer zufolge darin, dass die Mathematik ein von der Erfahrungswelt strikt abgetrenntes Eigenleben führt:

> Mathematisches und logisches Denken rücken [...] auf *dieselbe* Seite: Sie gehören der Welt des reinen Verstandes, des intellectus ipse, an. Beiden steht die Welt der Wahrnehmung, der bloßen „Tatsachenwahrheiten" gegenüber; aber dieser Unterschied kann an keinem Punkte zum Gegensatz, zu einem wahrhaften Widerstreit zwischen ihnen werden. Denn das metaphysische Grundprinzip der Leibnizischen Philosophie, das Prinzip der „prästabilierten Harmonie", gilt auch für das Verhältnis von Vernunft und Erfahrung. (Cassirer 1929, 421)

[5] Man sollte nicht unerwähnt lassen, dass sich bei Leibniz durchaus schon Ansätze zu Logiksystemen finden, welche über die traditionelle aristotelische Syllogistik *hinausgehen*. Siehe in diesem Zusammenhang z. B. Lenzen 1990. Dennoch bleiben auch diese Ansätze noch im Vorfeld dessen, was man heute unter ‚moderner' Logik versteht.

Kurz, die Mathematik bildet einen Bereich von eigener logischer Dignität. Sie ist, wenn man der hier angebotenen Leibniz-Deutung Cassirers folgt, durch nichts Empirisches tangierbar.

Eben an diesem Punkt, so Cassirer weiter, setzt die Mathematikauffassung Kants den Hebel an. Cassirer schreibt:

> Das Problem der *Anwendbarkeit* der Mathematik hat im Aufbau von Leibniz' System keine Stelle. Ebendieses Problem aber ist es, das Kant, schärfer als je zuvor, stellt und aus welchem ihm die endgültige Gestalt seiner „kritischen" Lehre erwächst. Er verwirft die dogmatische Entscheidung der „prästabilierten Harmonie"; er fragt nach dem Grund der Möglichkeit der Übereinstimmung zwischen apriorischen Begriffen und empirischen Tatsachen. (ebd.)

Der Bezug zum neueren mathematischen Intuitionismus ergibt sich nach Cassirer auf fast wunschgemäße Weise, wenn man die zentrale Rolle beachtet, welche die *Anschauung* im Rahmen der Mathematikauffassung Kants einnimmt. Dazu zunächst das folgende, unmittelbar auf Kant bezogene Zitat:

> „Die Anschauung ist aus einem bloßen Darstellungsmittel, was sie bei Leibniz war, zu einem selbständigen Erkenntnis*grund* geworden: Die Anschauung hat fundierenden und legitimierenden Wert erhalten." (Cassirer 1929, 422)

Wie bereits dargelegt, ist es eben dieser „fundierende und legitimierende Wert" der Anschauung, welchen Cassirer in seinen frühen Schriften grundlegend in Frage stellt. Es wird sich im folgenden Abschnitt zeigen, dass die *Philosophie der symbolischen Formen* genau hier am stärksten von den frühen Schriften abweicht.

Doch zurück zur Gegenüberstellung Formalismus/Leibniz– Intuitionismus/Kant: Vom Standpunkt der modernen Mathematik aus betrachtet, geht die Entwicklung laut Cassirer zunächst in den durch Leibniz vorgegebenen Bahnen weiter. Dies, so Cassirer, dokumentiere sich insbesondere im Aufkommen der nichteuklidischen Geometrien zur Mitte des 19. Jahrhunderts (vgl. Cassirer 1929, 422f.). Im Übergang vom 19. zum 20. Jahrhundert werde die Lage allerdings wieder unübersichtlicher, was Cassirer zu der folgenden, ausführlicheren Diagnose veranlasst:

> Heute steht der Kampf wieder auf des Messers Schneide: Und mit ihm scheint das Verhältnis von Mathematik und Logik aufs neue vieldeutig und fragwürdig geworden zu sein. Auf der einen Seite steht die

> Auffassung derer, die die reine Mathematik nicht nur in der Logik begründen, sondern sie ganz in sie *zurücknehmen* wollen – die die Möglichkeit, zwischen beiden irgendeinen Trennungsstrich zu ziehen, prinzipiell bestreiten. Dieser Ansicht aber steht eine andere gegenüber, die das Eigenrecht und den eigenen Sinn des Mathematischen so nachdrücklich und energisch behauptet, daß damit nicht nur der „Gegenstand" der Mathematik von dem der Logik unabhängig wird, sondern daß selbst gegen die fundamentalen Prinzipien der „klassischen" Logik, wie gegen den „Satz vom ausgeschlossenen Dritten", ein Angriff von seiten der Mathematik gewagt werden kann. Die Logik in ihrer gewöhnlichen Gestalt erscheint von diesem Standpunkt aus so wenig als das Fundament *allen* Denkens, daß es völlig autonome Denkhandlungen gibt, die aus ihr nicht ableitbar sind. Nicht sie ist es, die den eigentlichen Grund zur Wahrheit legt – sie trägt vielmehr letzten Endes alles, was ihr an Bedeutung und Wahrheit innewohnt, von einer anderen Instanz, von der Gewißheit einer mathematischen Urintuition zu Lehen. (Cassirer 1929, 423f.)

Wie aus den von Cassirer an dieser Stelle angeführten Literaturangaben ersichtlich wird, betrachtet er Russell als den zeitgenössischen Hauptvertreter des durch Leibniz auf den Weg gebrachten, primär an der Logik sich ausrichtenden „Formalismus" (wobei, wie sich gleich zeigen wird, in diesem Kontext die Bezeichnung ‚Logizismus' die nun zutreffendere wäre) und, auf der anderen Seite, Luitzen Egbertus Brouwer als den zeitgenössischen Hauptrepräsentanten des auf die Mathematikauffassung Kants sich rückbeziehen lassenden, primär an der Anschauung sich ausrichtenden „Intuitionismus".

3 Cassirers Deutung des Grundlagenstreits

Nach all diesen Vorüberlegungen sind wir nun in der Lage, uns dem eigentlichen Kern der Sache, Cassirers tatsächlicher *Deutung* des zeitgenössischen mathematischen Grundlagenstreits, zu widmen. Was bisher klar geworden sein sollte, ist, dass der durch Leibniz und Kant historisch ‚vorbereitete' Hauptstreitpunkt der Kontroverse nach Cassirer zu verorten ist in der Gegenüberstellung von logisch-begrifflicher Erkenntnis auf der einen Seite und sinnlich-anschaulicher Erkenntnis auf der anderen. Die Termini ‚Formalismus' und ‚Intuitionismus' sollen eben dies zum Ausdruck bringen. Doch *de facto* gab es im mathematischen Grundlagenstreit noch eine dritte Position, und zwar den Logizismus. Um unnötige Verwirrungen zu vermeiden, bietet es sich daher an, zunächst die innermathematische Ausgangslage in Augenschein zu nehmen und auf diesem Wege terminologische Klarheit herzustellen.

Wie hinlänglich bekannt ist, liegen die Wurzeln des mathematischen Grundlagenstreits in den im späten 19. und frühen 20. Jahrhundert aufgetauchten Antinomien der naiven Mengenlehre.[6] Die Grundlagen der klassischen Mathematik schienen erschüttert, so dass die Rede von einer ‚Grundlagenkrise‘ die Runde machte. Als Reaktion auf diese Krise entwickelten sich im Kontext der Philosophie der Mathematik die drei miteinander rivalisierenden Positionen des Logizismus, des Intuitionismus und des Formalismus.[7]

Als die Hauptrepräsentanten des *logizistischen* Programms gelten Russell und Gottlob Frege. Wenngleich Beide in bestimmten fundamentalen Punkten voneinander abwichen, stimmten sie in der Grundidee doch überein. Demnach besteht das übergeordnete programmatische Ziel darin, die Konzepte und Objekte der Mathematik auf der Basis rein logischer Terminologie zu definieren und mittels der solcherart resultierenden Definitionen die Theoreme der Mathematik aus logischen Prinzipien abzuleiten. Auf diesem Wege sollte es, wie Frege und Russell annahmen, gelingen, der klassischen Mathematik eine rein logische Grundlage zu verschaffen, und zwar eine solche, die keinerlei mathematische Symbolik mehr enthält.[8] Eben dies versteht man unter ‚Logizismus‘ in der Philosophie der Mathematik.[9]

Das *intuitionistische* Programm vertrat neben dem bereits erwähnten Brouwer vor allem auch Hermann Weyl.[10] Die Grundidee des mathematischen Intuitionismus hat der Brouwer-Schüler Arend Heyting besonders konzise wie folgt zusammengefasst: „In the study of mental mathematical constructions ‚to exist‘ must be

[6] Siehe dazu ausführlich Thiel 1972.
[7] Für einen diesbezüglich kompakten Überblick siehe neuerdings Bolinger 2018.
[8] Im Falle Freges bezieht sich dieses Vorhaben auf die Arithmetik, die Cantorsche Mengenlehre und – zumindest ansatzweise – die Analysis, nicht aber auf die Geometrie, welche nach Frege einen eigenen, nicht universalisierbaren (und zugleich Kantianisch zu deutenden) Gegenstandsbereich darstellt. Zu den weiteren Einzelheiten vgl. etwa Shapiro 2000, 114 und auch den Beitrag von Gabriel/Schlotter in diesem Band.
[9] Siehe dazu auch die Darstellung in Carnap 1931, 92f.. Wie Carnap ausführt, erfolgt die Ableitung mathematischer Begriffe im Rahmen der sog. Funktionenlogik, gemäß welcher Begriffe die Form von Funktionen haben, so dass ‚$f(a)$‘ bedeutet, dass die Eigenschaft f dem Gegenstand a zukommt. Dementsprechend bedeutet ‚$2_m(f)$‘, dass unter den Begriff f mindestens zwei Gegenstände fallen, was sich in rein logischer Terminologie wiederum wie folgt definieren lässt: $2_m =_{Df} (\exists x)(\exists y)[\neg(x = y) \wedge f(x) \wedge f(y)]$. Die Anzahl Zwei *selbst* lässt sich dann so definieren: $2(f) =_{Df} 2_m(f) \wedge \neg 3_m(f)$, was zu lesen ist als: ‚unter f fallen mindestens zwei, aber nicht mindestens drei Gegenstände‘. Den Hintergrund bildet für Carnap hier die Definition des Anzahlbegriffs in Frege 1884, Kap. IV.
[10] Vgl. in diesem Zusammenhang v. a. Brouwer 1912 sowie Weyl 1921.

synonymous with ‚to be constructed'." (Heyting 1956, 2) Die Objekte der Mathematik werden also aufgefasst als Konstruktionen, und als solche stehen sie in unmittelbarer Abhängigkeit von den praktizierenden Mathematikern, welche die mentale Konstruktionsarbeit *de facto* verrichten. Bezüglich des Stellenwerts der vonseiten des Logizismus als zentral und geradezu sakrosankt erachteten *Logik* kommen die Repräsentanten des intuitionistischen Programms zu einem schlechterdings verheerenden Resultat: Logisch fundamentale Prinzipien wie der Satz vom ausgeschlossenen Dritten werden aufgrund ihrer mangelnden ‚inhaltlichen Evidenz' als nicht mehr uneingeschränkt gültig, sondern als in bestimmten Situationen außer Kraft zu setzend erachtet. Die ausschlaggebende Rolle spielt dabei das Konzept der Intuition. Denn diese ist es, welche uns nach Ansicht der Intuitonisten häufig dazu zwingt, von der klassischen Logik und – infolgedessen – auch von der klassischen Mathematik abzuweichen.[11] Kurz, wenn man den Intuitionismus akzeptiert, sieht man sich zu einer grundlegenden Änderung der mathematischen Praxis veranlasst.

Hauptrepräsentant des *formalistischen* Programms ist David Hilbert. Wie man in einer ersten Annäherung sagen kann, besteht das Wesen der Mathematik dem Formalismus zufolge in der Operation mit mathematischen Symbolen, ohne dass eine wie auch immer geartete ontologische Verpflichtung eingegangen wird. Worum es in der Mathematik im Allgemeinen geht, ist nicht, den Anforderungen unserer (sei es Kantianisch, sei es intuitionistisch gedeuteten) Anschauung Rechnung zu tragen, sondern es ist einzig und allein die logisch-deduktive Analyse der zwischen den jeweils etablierten Begriffen bestehenden Relationen, die im Zentrum der Betrachtung steht. Die Logik spielt im Formalismus demnach eine ganz entscheidende Rolle. Doch anders als im Logizismus wird im Formalismus *nicht* der Anspruch erhoben, die Mathematik auf die Logik *zurückzuführen*. Andererseits findet eine klare Abgrenzung vom Intuitionismus statt, was sich vor allem im Rahmen des von Hilbert während der 1920er Jahren unternommenen Versuchs dokumentiert, auf Grundlage der *Beweistheorie* (bzw. Metamathematik) die klassische Mathematik trotz der intuitionistischen Kritik zu ‚retten'. Die klassische Logik – und die entsprechenden Beweismethoden – sollten dabei aufrechterhalten bleiben.[12]

[11] So heißt es an einer Stelle bei Brouwer: „[T]heorems holding in intuitionism, but not in classical mathematics, often originate from the circumstance that for mathematical entities [...] the possession of a certain property imposes a special character on their way of development from the basic intuition, and that from the basic intuition, properties ensue which for classical mathematics are false." (Brouwer 1983: 91)

[12] Dies betraf auch – und insbesondere – den vonseiten des Intuitionismus in Frage gestellten Satz vom ausgeschlossenen Dritten. So heißt es an einer Stelle von Hilberts 1928 erschienenen *Grundlagen der Mathematik*: „Dieses Tertium non datur dem Mathematiker zu nehmen, wäre etwa, wie wenn man dem Astronomen das Fernrohr oder dem Boxer den Gebrauch der Fäuste untersagen wollte." (Hilbert 1928, 80)

Wie steht Cassirer nun zu den drei in den mathematischen Grundlagenstreit verwickelten Positionen? Orientiert man sich an Cassirers eigener Vorgehensweise, so ist es zunächst der *Intuitionismus*, dem es Aufmerksamkeit zu widmen gilt. Wie Cassirer zutreffend darlegt, ist die vonseiten des Intuitionismus angestrebte Zurückführung der Mathematik auf die „‚Urintuition' der Zahl" (Cassirer 1929, 430) gleichbedeutend mit der „Anschauung eines reinen *Verfahrens*" (ebd.). Wie oben dargelegt, werden mathematische Objekte im Intuitionismus aufgefasst als durch das mathematisch operierende Subjekt hervorzubringende ‚Konstrukte'. Im Hintergrund steht dabei das im Kontext der naiven Mengenlehre virulent gewordene Problem unendlicher Gesamtheiten, worauf hier aber nicht weiter eingegangen werden kann.[13] Wichtig für unseren Zusammenhang ist, dass zwischen der intuitionistischen Mathematikauffassung und derjenigen Kants eine offensichtlich enge Verwandtschaft besteht. Dies zum einen insofern, als sowohl bei Kant als auch im Intuitionismus die Anschauung als Medium der mathematischen Konstruktionsarbeit fungiert; und zum anderen insofern, als es der konstruktive Aspekt als solcher ist, auf welchem beide Male der Fokus der Betrachtung liegt.[14] Wie man weiß, ist Kant der Ansicht, dass die Mathematik ihre Begriffe (bzw. Gegenstände) ‚konstruiert'.[15] Cassirer wiederum geht nun soweit, die Fokussierung des konstruktiven Aspekts zum Anlass zu nehmen, um weitreichende systematische philosophische Konsequenzen einzufordern. Er schreibt:

> Aus dem Operationsbereich der Zahl entfaltet sich erst der Dingbereich des Zählbaren und Gezählten. Nur wenn er sich mit diesem *idealistischen* Gedanken durchdringt, und sich als Ausdruck desselben versteht, wird der moderne „Intuitionismus" seine Kraft für die Kritik der Grundlagen der Mathematik voll entfalten und bewähren können. Der Idealismus selbst muß hierbei freilich als streng „objektiver" Idealismus verstanden werden: Der Gegenstandsbereich der Mathematik darf

[13] Siehe allerdings Shapiro 2000, 181f.

[14] So auch Shapiro 2000, 75f.: „Brouwer [...] echoes the major Kantian theme that a human being is not a passive observer of nature, but rather plays an *active* role in organizing experience. [...] Mathematics concerns this active role."

[15] Vgl. etwa Kant 1787, 745, wo es heißt: „Die Mathematik aber konstruiert nicht bloß Größen (*quanta*), wie in der Geometrie, sondern auch die bloße Größe (*quantitatem*), wie in der Buchstabenrechnung, wobei sie von der Beschaffenheit des Gegenstandes, der nach einem solchen Größenbegriff gedacht werden soll, gänzlich abstrahiert. Sie wählt sich alsdann eine gewisse Bezeichnung aller Konstruktionen von Größen überhaupt [...] und, nachdem sie den allgemeinen Begriff der Größen nach den verschiedenen Verhältnissen derselben auch bezeichnet hat, so stellt sie alle Behandlung, die durch die Größe erzeugt und verändert wird, nach gewissen allgemeinen Regeln in der Anschauung dar [...] und gelangt also vermittelst einer symbolischen Konstruktion ebensogut, wie die Geometrie nach einer ostensiven oder geometrischen (der Gegenstände selbst) dahin, wohin die diskursive Erkenntnis vermittelst bloßer Begriffe niemals gelangen könnte."

> nicht auf den psychologischen *Akt des Zählens*, sondern er muß auf die reine *Idee der Zahl* gegründet werden. (Cassirer 1929, 430)

Die Rede vom „objektiven" Idealismus legt es nahe, Cassirer hier stärker in der Tradition Hegels als in derjenigen Kants zu wähnen.[16] Doch dies ist nur von beiläufigem Interesse. Entscheidend ist, dass Cassirer den Intuitionismus als eine auf den Bereich der Mathematik sich erstreckende Spielart idealistischen Denkens (welcher Art auch immer) verstanden wissen will.

Was uns umgehend zu seiner Interpretation des *Logizismus* führt. Zu Beginn dieses Beitrags hatte sich ja gezeigt, dass der frühe Cassirer mehr oder weniger offensiv das logizistische Projekt *begrüßt*. In der *Philosophie der symbolischen Formen* stellt sich die Situation nun anders dar. Vorbehalte werden sichtbar, und diese beziehen sich primär auf die „realistische Voraussetzung" (Cassirer 1929, 435), auf welcher der Logizismus Cassirer zufolge beruht. Was genau ist gemeint? Stark vereinfachend gesprochen, ist es die von Frege wie auch von Russell vorgenommene Gleichsetzung von Zahlen mit *Klassen*, an welcher Cassirer Anstoß nimmt. Bereits in „Kant und die moderne Mathematik" hatte er dahingehend argumentiert, dass der Begriff der Klasse den der Relation *voraussetzt* und nicht umgekehrt (vgl. Cassirer 1907, 6). In der *Philosophie der symbolischen Formen* richtet er diesen Punkt nun unmittelbar als Einwand gegen Frege und Russell. So heißt es zunächst mit Bezug auf Frege:

> Die Aussagen über Zahlen erhalten ihren objektiven Sinn und ihre objektive Gültigkeit erst dadurch, dass sie als Aussagen über *Klassen* erkannt werden. Die Existenz solcher *Klassen* [...] bildet die Grundlage für alle Sätze der reinen Zahlenlehre. Wie Mill von der Schicht der empirischen Dinge, so geht demnach Frege von bestimmten Begriffsdingen aus, die er als unumgänglich notwendiges *Substrat* des reinen Zahlenreichs betrachtet. Ohne ein solches Substrat würde nach ihm die Zahl gewissermaßen ihren Halt im Sein verlieren und völlig im Leeren schweben. (Cassirer 1929, 436)[17]

Und mit Bezug auf Russell schreibt Cassirer:

> Auch für Russells Ableitung des Zahlbegriffs aus dem Klassenbegriff ist dieser Realismus kennzeichnend. Das erste ist ihm nicht der Begriff

[16] Zu in diese Richtung gehende Deutungen in der Sekundärliteratur vgl. etwa Levy 1927 und insbesondere Kreis 2010.

[17] In expliziter Durchführung findet sich die Ableitung des Zahl- aus dem Klassenbegriff in Freges 1893 erschienenen *Grundgesetzen der Arithmetik*. Siehe dazu im Einzelnen von Kutschera 1989, 97ff.

> der Zahl, sondern der Begriff der Gleichzahligkeit – und dieser läßt sich nicht anders denn als eine Eigenschaft bestimmter Klassen, nämlich als die Eigenschaft ihrer Elemente, sich einander gegenseitig eindeutig zuordnen zu lassen, definieren. (Cassirer 1929, 436f.)[18]

Wenn man Cassirer hier beim Wort nimmt, dann steht und fällt das logizistische Programm mit der expliziten ontologischen Verpflichtung auf die Existenz von Klassen. Genau das ist jedenfalls gemeint, wenn er von der „realistischen Voraussetzung“ spricht, auf welcher der Logizismus seiner Meinung nach beruht.

Es kann nun nicht weiter überraschen, dass Cassirer, als Freund des Idealismus, die „realistische Voraussetzung“ des logizistischen Programms *zurückweist*. Den mathematischen Intuitionismus sieht er dabei als ‚Verbündeten‘. Denn:

> Gegenüber all diesen Versuchen [den Zahl- aus dem Klassenbegriff abzuleiten; M. N.] ist es ein Verdienst des „Intuitionismus“, daß er den *Primat der Beziehung* wiederherstellt und ihn zur grundsätzlichen Anerkennung bringt. Auf jeden Versuch, die Fundamente der reinen Zahlenlehre dadurch tiefer zu legen, daß man diese Lehre als bloßen Spezialfall einer allgemeinen Mengenlehre denkt und die Reihe der natürlichen Zahlen aus dem Klassen- und Mengenbegriff logisch „deduziert“, wird jetzt bewußt Verzicht geleistet. (Cassirer 1929, 437)

Stattdessen, so Cassirer weiter, ist es das konstruktiv-relationale Moment, welches – nicht zuletzt aufgrund entsprechender Einsichten aufseiten des Intuitionismus – in den Fokus der Betrachtung rückt. Um den Klassenbegriff als solchen mit Gehalt zu füllen, bedürfe es immer schon der „Denkfunktionen der Setzung, der Identität, der Verschiedenheit“ (Cassirer 1929, 439). Da diese Funktionen auch für die Konstitution des Zahlbegriffs erforderlich seien, *erübrige* sich der Umweg über den Klassenbegriff. Kurz, aus der Sicht Cassirers überfrachtet der Logizismus die Mathematik mit ontologisch überflüssigem Ballast.[19]

[18] Cassirer dürfte sich hier auf folgende Passage aus Russells 1919 erschienener *Introduction to Mathematical Philosophy* beziehen: „*One class is said to be ‚similar‘ to another when there is a one-one relation of which the one class is the domain, while the other is the converse domain.*“ (Russell 1919, 16). Allerdings ist in diesem Zusammenhang, speziell im Hinblick auf die Realismus-Frage, Vorsicht geboten. Denn in Kapitel XVII seiner *Introduction* sagt Russell ganz ausdrücklich: „we cannot accept ‚class‘ as a primitive idea“ (Russell 1919, 181); und fügt hinzu: „We shall then be able to say that the symbols for classes are mere conveniences, not representing objects called ‚classes‘, and that classes are in fact, like descriptions, logical fictions, or (as we say) ‚incomplete symbols‘. [...] [C]lasses cannot be regarded as part of the ultimate furniture of the world.“ (Russell 1919, 182) Cassirers Kennzeichnung Russells als eines ‚Klassen-Realisten‘ ist demnach mehr als fragwürdig.

[19] Zu einer ganz ähnlich motivierten Kritik am Logizismus vgl. Brunschvicg 1922, 394ff. u. 412ff.

Was, schließlich und endlich, Cassirers Stellung zum *Formalismus* anbelangt, so fällt zunächst auf, dass er diesen nun explizit vom Logizismus abgrenzt und Letzteren auch entsprechend benennt (vgl. Cassirer 1929, 439). Unter Bezugnahme auf die Arbeiten Hilberts kennzeichnet er den Formalismus – auf der übergeordneten systematisch-philosophischen Ebene des Gegensatzes zwischen „Idealismus" und „Realismus" – als „eine selbständige Macht" (Cassirer 1929, 439f.). Entscheidend sei, dass der Formalismus nicht auf Gegenstände, sondern auf *Zeichen* reflektiere. Dabei handele sich beim formalistischen Programm nicht um einen bloßen „Mittelweg zwischen zwei gedanklichen Extremen" (Cassirer 1929, 440), sondern um eine „neue intellektuelle Gesamt*orientierung*" (ebd.). Die durch Hilbert programmatisch auf den Weg gebrachte *Beweistheorie* fungiere als „kritische Instanz" (ebd.) und nehme als solche den „Grundgedanke[n] von Leibniz' ‚allgemeiner Charakteristik'" (ebd.) wieder auf.[20] So wie schon Leibniz eine allgemeine formale Sprache zum Ausdruck mathematischer und naturwissenschaftlicher (aber auch metaphysischer) Sätze ersonnen hatte,[21] sind auch die einschlägigen Arbeiten Hilberts von dem Gedanken der Schaffung eines *universellen Zeichensystems* getragen.[22] Dabei liegt der Akzent ausschließlich auf dem Wort ‚Zeichen', was im unmittelbar mathematischen Kontext die folgende Behauptung nach sich zieht: „Diese Zahlzeichen, die Zahlen sind und die Zahlen vollständig ausmachen, sind selbst Gegenstand unserer Betrachtung, haben aber sonst keinerlei *Bedeutung*." (Hilbert 1922, 163)

Cassirer sieht in Anbetracht dieser Gleichsetzung mathematischer Gegenstände mit mathematischen Zeichen die offensichtliche Gefahr, dass die gesamte reine Mathematik „nunmehr in ein bloßes Spiel [aufgeht]" (Cassirer 1929, 441). Verschärft werde diese Situation durch den Umstand, dass die *Anschauung* bei Hilbert keine nennenswerte Rolle spiele. Und wiederum ist es der Intuitionismus, der, wie auch schon im Falle der Diskussion des Logizismus, als Kontrastfolie herangezogen wird. Cassirer stellt fest:

[20] Gemeint ist hier die im Rahmen des sog. Hilbertprogramms zur Umsetzung gelangte ‚finite' Beweistheorie, auf deren Grundlage Hilbert (inspiriert durch seinen Schüler Wilhelm Ackermann) den Versuch unternahm, die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik zu beweisen. Wie hinlänglich bekannt ist, stellte dieser Ansatz den Hauptangriffspunkt für Kurt Gödels zu Beginn der 1930er Jahre vorgelegte Arbeiten zur Unvollständigkeit axiomatisierter Systeme dar. Zu den weiteren Details vgl. Shapiro 2000, 158ff.

[21] Vgl. dazu im Einzelnen Cohen 1954.

[22] Wie Hilbert in seiner 1922 publizierten „Neubegründung der Mathematik" – und zwar in ausdrücklicher Abgrenzung von Frege – darlegt, sind „die Gegenstände der Zahlentheorie die Zeichen selbst, deren Gestalt unabhängig von Ort und Zeit und von den besonderen Bedingungen der Herstellung des Zeichens sowie von geringfügigen Unterschieden in der Ausführung sich von uns allgemein wiedererkennen läßt. Hierin liegt die feste philosophische Einstellung, die ich zur Begründung der reinen Mathematik – wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen – für erforderlich halte: *am Anfang* – so heißt es hier – *ist das Zeichen*." (Hilbert 1922, 163)

> Für den Intuitionisten bedeutet die „Urintuition" der ganzen Zahl ein konstruktives *Prinzip*, aus dessen fortgesetzter Anwendung eine unendliche Mannigfaltigkeit von Zahlindividuen sich erzeugt – für Hilbert erschöpft sich die Aufgabe der Anschauung darin, daß sie uns mit gewissen außerlogischen *Objekten* versieht, die wir, so wie sie als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind, einfach hinzunehmen haben. (Cassirer 1929, 442).

Und in der Tat: Gemäß Hilbert handelt es sich bei den axiomatisierten Begriffssystemen der Mathematik um *uninterpretierte Kalküle*, die auf der Grundlage sogenannter impliziter Definitionen zustande kommen und immer erst ‚im Nachhinein' auf empirische Sachverhalte zu applizieren sind.[23]

Es ist nun interessant zu sehen, was Cassirer aus all dem macht. Worauf er zuallererst hinauswill, ist, die Positionen des Logizismus und des Formalismus *miteinander ins Verhältnis zu setzen*. Genauer gesagt, geht es ihm darum, den Nachweis zu erbringen, dass es unter Vorgabe einer angemessenen Interpretation des *Symbolbegriffs* möglich ist, den vermeintlichen metaphysischen Gegensatz zwischen einerseits ‚Immanenz' – als der prägenden Denkausrichtung des Formalismus – und andererseits ‚Transzendenz' – als der prägenden Denkausrichtung des Logizismus – auf mehr oder weniger elegante Weise zu *umgehen*. Er legt dar:

> Das Symbolische gehört niemals dem „Diesseits", dem Gebiet der „Immanenz" *oder* „Transzendenz" an: Sondern sein Wert besteht eben darin, daß es diese Gegensätze, die einer metaphysischen Zweiweltentheorie entstammen, überwindet. Es ist nicht das eine *oder* das andere, sondern es stellt das „eine *im* anderen" und das „andere *im* einen" dar. (Cassirer 1929, 444f.)

[23] Der Begriff der impliziten Definition geht wohl zurück auf Moritz Schlick (Hilbert selbst spricht von der ‚Definition durch Axiome'), der im Rahmen seiner 1918 erstmals erschienenen *Allgemeinen Erkenntnislehre* sich zu der von Hilbert in seinen *Grundlagen der Geometrie* von 1899 entwickelten axiomatischen Methode wie folgt äußert: „[D]er streng deduktive Aufbau einer wissenschaftlichen Theorie, wie er etwa in der Mathematik uns vorliegt, hat mit dem anschaulichen Bilde, das wir uns von den Grundbegriffen machen, gar nichts zu tun. Für ihn kommt allein dasjenige in Betracht, was durch die impliziten Definitionen festgelegt wird, nämlich die in den Axiomen ausgesprochenen Beziehungen der Grundbegriffe zueinander. Für die Mathematik als festes Gefüge zusammenhängender Sätze haben die anschaulichen Vorstellungen, die wir mit den Worten Ebene, Punkt usw. verknüpfen, nur die Bedeutung von illustrierenden Beispielen, die durch ganz andere Beispiele ersetzt werden können [...]." (Schlick 1918, 34). Wie man weiß, äußert sich Hilbert selbst an einer Stelle ja dahingehend, dass es im Rahmen einer angemessenen Axiomatisierung der Geometrie stets möglich sein müsse, statt von ‚Punkten, geraden Linien und Flächen' von ‚Tischen, Sesseln und Bierseideln' zu sprechen. Siehe dazu Hilbert 1935, 403 sowie die Ausführungen in Shapiro 2000, 151.

Um dem (nicht ganz abwegigen) Eindruck vorzubeugen, es werde hier ein bestimmter metaphysischer ‚Jargon' durch einen anderen ersetzt, ist es ratsam, das in Kapitel V des zweiten Teils von Band 3 der *Philosophie der symbolischen Formen* etablierte Konzept der *symbolischen Prägnanz* heranzuziehen (vgl. Cassirer 1929, 221ff.). Unter ‚symbolischer Prägnanz' versteht Cassirer „die Art [...], in der ein Wahrnehmungserlebnis, als ‚sinnliches' Erlebnis, zugleich einen bestimmten nicht-anschaulichen ‚Sinn' in sich faßt und ihn zur unmittelbaren konkreten Darstellung bringt" (Cassirer 1929, 234). Anschauliches ist demnach als immer schon durch den Symbolbegriff in seiner nicht-anschaulichen Sinndimension *erfasstes* Anschauliches zu denken. Umgekehrt speist sich diese Sinndimension aus dem Anschaulichen selbst. Es ist eben dieser gegenseitige Verweisungszusammenhang, auf welchen Cassirer abzielt, wenn er das Konzept symbolischer Prägnanz im Kontext seiner Diskussion des mathematischen Grundlagenstreits wie folgt zur Geltung bringt:

> [E]s gibt für uns keine losgelösten, an sich bestehenden anschaulichen „Erlebnisse", die nicht schon mit irgendwelchen theoretischen Bedeutungsfunktionen erfüllt und ihnen gemäß gestaltet wären – wie es andererseits nichts *bloß* Bedeutungsgemäßes gibt, das nicht seine Erfüllung im Anschaulichen suchen und finden müßte. Wir können „Bedeutung" nicht anders als durch Rückbeziehung auf die „Anschauung" erfassen – wie uns Anschauliches nie anders als im „Hinblick" auf Bedeutung „gegeben" sein kann. (Cassirer 1929, 447)

Die von Cassirer postulierten verschiedenen symbolischen *Formen*, wie Sprache, Mythos und Wissenschaft, konstituieren dabei jeweils „eine eigentümliche und selbständige, in sich geschlossene Welt des Sinnes" (Cassirer 1929, 445).[24]

Beschränkt man sich nun auf die symbolische ‚Welt' der Wissenschaft, so ergibt sich das Bild einer hierarchischen Anordnung von zunehmender symbolischer Prägnanz. So heißt es zunächst in klarer Abgrenzung von Formalismus und Logizismus:

> Die Welt der mathematischen Formen ist eine Welt von Ordnungsformen, nicht von Dingformen. Ihre „Wahrheit" kann daher nicht dadurch bestimmt werden, daß wir den Zeichen, in welchen sie sich darstellt, ihre signifikative Bedeutung nehmen und gewissermaßen nur ihren sachlich-physischen Gehalt übriglassen – noch auch dadurch, daß wir irgendwelche existierenden Einzelgegenstände aufweisen, denen diese Zeichen unmittelbar entsprechen. (ebd.)

[24] Es versteht sich von selbst, dass Cassirers *allgemeiner* symboltheoretischer Ansatz hier nur sehr holzschnittartig wiedergegeben werden kann. Umfassende Darstellungen finden sich in Krois 1987 sowie neuerdings in Luft 2015, Teil II und in Schubbach 2016.

Vielmehr lasse sich der „spezifische Wert des Mathematischen" (ebd.) nur dadurch bestimmen, dass man ihm „seine Stelle im Ganzen des *Objektivationsprozesses der Erkenntnis*" (ebd.) zuweise. Worauf es dabei ankomme, sei, dass das Logische in seinem Verhältnis zum Mathematischen und dieses wiederum in seinem Verhältnis zum Empirisch-Physikalischen erfasst und ausgedeutet werde. Das Mathematische als solches nimmt dabei eine, wie man sagen kann, entscheidende Vermittlungsrolle ein:

> [V]om Logischen zum Empirischen führt ein bestimmter Stufengang, in dem das Mathematische als ein unentbehrlicher Durchgangspunkt erscheint. Dem logischen Gegenstand gegenüber weist der mathematische bereits eine Fülle neuer, „konkreter" Bestimmungen auf; denn der Form der Setzung, der Unterscheidung, der Beziehung *überhaupt* fügt er eine bestimmte Setzungs*art*, fügt er jenen spezifischen Modus des Setzens und Ordnens hinzu, der sich im System der Zahlen und in der „natürlichen Zahlenreihe" darstellt. Nach der anderen Seite hin aber erweist sich dieser neue Modus als die unerläßliche Vorbereitung und Vorbedingung, um zu einer Ordnung der Wahrnehmungswelt und damit zu jenem Gegenstand, den wir den Gegenstand der „Natur" nennen, zu gelangen. [...] In diesem Sinne weist der logische Gegenstand auf den mathematischen, der mathematische auf den empirisch-physikalischen Gegenstand *hin* [...]. (Cassirer 1929, 446)

Ungeachtet der Frage, in welchem Sinne Cassirer hier noch in kohärenter Weise vom mathematischen ‚Gegenstand' sprechen kann, bleibt festzuhalten, dass die Mathematik nach seiner Ansicht sich der Logik gegenüber durch ein höheres Maß an symbolischer Prägnanz auszeichnet. Wenn er diesbezüglich von einer „Fülle neuer, ‚konkreter' Bestimmungen" spricht, dann haben diese mit dem in dem mathematischen Symbolapparat sich manifestierenden *Anschauungsgehalt* zu tun. Die „natürliche Zahlenreihe" kann hier als paradigmatisches Beispiel betrachtet werden (worauf im folgenden Abschnitt noch genauer einzugehen sein wird).

Vor dem Hintergrund des so umrissenen Konzepts symbolischer Prägnanz wird nun auch unmittelbar ersichtlich, wo Cassirer das hauptsächliche Defizit der – nach seiner Meinung einseitigen – Positionen des Formalismus und des Logizismus sieht. Beide Male, so seine Diagnose, wird das unhintergehbare ‚Faktum' symbolischer Prägnanz unterlaufen, indem die Rolle der Anschauung nicht hinreichend ernst genommen wird. Im Falle des Formalismus führe dies zu folgendem Begründungsdefizit:

> Der Formalismus ist ein unvergleichliches Mittel zur „Disziplin" der mathematischen Vernunft – aber er vermag für sich allein ihren Be-

> stand nicht zu erklären noch ihn im „transzendentalen“ Sinne zu rechtfertigen. (Cassirer 1929, 450)

Was auf der anderen Seite den Logizismus anbelangt, sei die folgende Passage aus dem postum erschienenen Band 4 von Cassirers Monographie *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit* angeführt:

> [D]ie logistischen Begründungen der Zahl hatten in ihrem Streben, die Zahl aus rein „logischen Konstanten“ aufzubauen, zwar eine große formale Strenge erreicht; aber sie hatten damit das erkenntnistheoretische Problem fast ganz aus den Augen verloren. Die Zahl war so sehr über die Welt der Anschauung erhoben, daß es schwer verständlich wurde, wie sie sich, unbeschadet ihrer „Reinheit“, nichtsdestoweniger auf die empirische Welt beziehen, ja zum eigentümlichen Erkenntnisprinzip derselben werden könne. (Cassirer 1957, 86)

Wie auch schon bei Leibniz werden Logik und Mathematik im Logizismus von der Anschauung also in solcherart starkem Maße ‚emanzipiert‘, dass die notorische Frage nach der *Anwendung* der Mathematik auf den empirisch-physikalischen Bereich als offenes Problem zurückbleibt.

Womit wir wieder beim mathematischen Intuitionismus wären. Denn dieser, so Cassirers nicht ganz ungewagte These, vermag den beiden seitens des Formalismus und des Logizismus vernachlässigten Herausforderungen in angemessener Weise Rechnung zu tragen. Genauer gesagt, liefert der Intuitionismus nach Cassirer eine befriedigende Antwort auf das mathematische *Anwendungsproblem*, indem er sich von der Einsicht leiten lässt, dass die „Logik der Mathematik“ (Cassirer 1957, 87) sich zu einer „Logik der exakten Naturwissenschaft“ (ebd.) erweitern müsse. Die von Weyl im Jahre 1927 vorgelegte *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* wird von ihm dabei als beispielhaft angesehen (vgl. Cassirer 1957, 86). Was auf der anderen Seite das *Problem einer transzendentalen Rechtfertigung* betrifft, so ist es das in den Schriften der Intuitionisten im Zusammenhang mit der Diskussion des sog. Prinzips der vollständigen (mathematischen) Induktion auftauchende (genuin kantianische) Konzept einer „echten Synthesis a priori“ (Cassirer 1929, 438), welches nach Cassirer den Weg zu einer Lösung ebnet. Als wichtigen ‚Gewährsmann‘ erwähnt er, neben Weyl, hier auch (den ‚Proto-Intuitionisten‘) Henri Poincaré.[25]

[25] Im *Erkenntnisproblem* bezieht sich Cassirer dabei wörtlich zitierend auf die folgende Stelle in Poincarés *La science et l'hypothèse* von 1903: „Aber wenn es sich darum handelt, eine unendliche Zahl von Folgerungen in eine einzige Formel zusammenzufassen, wenn wir dem Unendlichen gegenüberstehen, so scheitert hier der Satz des Widerspruchs ebenso, wie sich die Erfahrung als unzulänglich erweist. Diese Regel [das Prinzip der vollständigen Induktion; M. N.], die sowohl der Erfahrung wie dem analytischen Beweis unzugänglich ist, ist der

Der Punkt, auf welchen es im Folgenden ankommt, ist, herauszufinden, was genau gemeint ist, wenn Cassirer im Kontext der Mathematik von ‚transzendentaler Rechtfertigung‘ und ‚Synthesis a priori‘ spricht. Als *Fallstudie* soll dabei das von Hilbert (und somit vonseiten des Formalismus) übernommene Konzept *idealer Elemente* herangezogen werden, was wiederum bedeutet, dass die Frage nach dem Anwendungsproblem im Rahmen unserer weiteren Ausführungen *keine* Rolle spielen wird.[26]

4 Was sind und was sollen die „idealen Elemente“?

Abschnitt IV des bisher hauptsächlich zugrunde gelegten Kapitels IV des dritten Teils von Band 3 der *Philosophie der symbolischen Formen* ist überschrieben mit „Die ‚idealen Elemente‘ und ihre Bedeutung für den Aufbau der Mathematik“. Dazu zunächst ein paar das kontextuelle Verständnis erleichternde *Hintergrundinformationen*.[27]

Hilbert stellt in seinem 1926 publizierten Vortrag „Über das Unendliche“ eine mathematische Verfahrensweise vor, welche er als die „Methode *der idealen Elemente*“ (Hilbert 1925, 165) bezeichnet. Grundlegend für die Einführung dieser Methode ist die Differenzierung zwischen „realen, wirklich existierenden Gegenständen“ (Hilbert 1925, 166), wie beispielsweise den Punkten und Geraden der Ebene in der elementaren Geometrie, und solchen mathematischen Objekten, welche nur als *rein* formale Entitäten ohne theorie-externen Bezug gedeutet werden können. Letztere bezeichnet Hilbert als ‚ideale Elemente‘, und als Paradebeispiel führt er die *imaginären Zahlen* an (vgl. Hilbert 1925, 166). Also diejenige Form komplexer Zahlen, deren Quadrat eine nichtpositive reelle Zahl ist und mit deren Hilfe sich Gleichungen lösen lassen, deren Lösungen keine reellen Zahlen sein können, wie

wahre Typus eines synthetischen Urteils a priori. Warum drängt sich uns dieses Urteil mit einer unwiderstehlichen Evidenz auf? Deshalb, weil in ihm nichts über die Natur der Dinge, sondern über ein Grundvermögen unseres Geistes behauptet wird. Dieser erkennt in sich die Fähigkeit, einen gewissen Akt immer aufs neue zu wiederholen, sobald er sich einmal von der Möglichkeit desselben überzeugt hat. Von dieser Möglichkeit besitzt der Geist eine unmittelbare Anschauung, die Erfahrung kann für ihn nur die Gelegenheit bieten, sich ihrer zu bedienen und sich hierdurch ihrer bewußt zu werden.“ (Zitiert nach der deutschsprachigen Übersetzung in Cassirer 1957, 86)

[26] Methodisch gesehen, lässt sich dies mit Gründen mangelnden Darstellungsraums rechtfertigen: Cassirers Deutung des Anwendungsproblems (sowie die entsprechenden hergestellten Bezüge zu der Auffassung Weyls) betrifft einen sehr weitgesteckten Fragenkomplex und bildet insofern ein Thema für sich.

[27] Siehe in diesem Zusammenhang auch die Darstellung in Tapp 2013, 155ff.

beispielsweise $x^2 + 1 = 0$. Wie die Bezeichnung ‚imaginär' schon anzeigt, wurden solche Zahlen ursprünglich als ‚nur eingebildet', ‚der Phantasie entsprungen' oder gar ‚unmöglich' aufgefasst.[28] Es stellt sich daher die Frage, *welche Gründe* für die Operation mit derlei „idealen Elementen" sprechen.

Hilberts Antwort auf diese Frage umfasst zwei Schritte. Der erste Schritt besteht in der Auskunft, dass das Operieren mit idealen Elementen wie den imaginären Zahlen schon, aber auch *nur dann* als zulässig zu erachten ist, wenn es nicht zu Widersprüchen führt. Hilbert schreibt:

> Es gibt [...] eine Bedingung, eine einzige, aber auch absolut notwendige, an die die Anwendung der Methode der idealen Elemente geknüpft ist, und diese ist der *Nachweis der Widerspruchsfreiheit*: die Erweiterung durch Zufügung von Idealen ist nämlich nur dann statthaft, wenn dadurch im alten engeren Bereiche keine Widersprüche entstehen, wenn also die Beziehungen, die sich bei Elimination der idealen Gebilde für die alten Gebilde herausstellen, stets im alten Bereiche gültig sind. (Hilbert 1925, 179)

Der zweite, gewissermaßen konstruktive Schritt besteht in dem Hinweis, dass die Anwendung der Methode der idealen Elemente zur konservativen Erweiterung oder, besser, *Abrundung* gegebener Axiomensysteme führt. Im Falle der imaginären Zahlen ermöglicht sie den *Beweis* der Widerspruchsfreiheit der Axiome der Arithmetik. Dazu wiederum Hilbert wörtlich:

> Indem unsere Beweistheorie auf Grund der Methode der idealen Elemente diesen letzten wichtigen Schritt ermöglicht, bildet sie den notwendigen Schlußstein in dem Lehrgebäude der Arithmetik. (ebd.)

Wie Hilbert unmittelbar hinzufügt, können Probleme wie das Auftreten der Antinomien der naiven Mengenlehre durch den ‚Beweisaspekt' der Anwendung der Methode der idealen Elemente effizient vermieden werden.

Aus der Perspektive Cassirers nun handelt es sich bei der Methode der idealen Elemente, wie sie von Hilbert speziell im Zusammenhang mit den imaginären Zahlen veranschaulicht wird, um eine der ausschlaggebenden Instanzen für die tran-

[28] Dementsprechend heißt es an einer Stelle bei Carl Friedrich Gauß: „[A]llein die den reellen Zahlen gegenübergestellten imaginären – ehemals, und hin und wieder noch jetzt, obwohl unschicklich, *unmögliche* genannt – sind immer noch weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich leeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht [...]." (Gauß 1876, 175)

szendentale Rechtfertigung der Konstitution (und Progression) des Zahlbegriffs.[29] Eben dieser Punkt wird von Heis in seiner bereits angesprochenen Diskussion der Mathematikauffassung des späteren Cassirer nicht berücksichtigt, und wir werden noch sehen, dass dies zu ganz erheblichen Interpretationsproblemen führt.

Doch zunächst zu Cassirers Kommentierung der Hilbertschen Methode. Wie er von Anfang an klarstellt, handelt es sich bei der Anwendung dieser Methode um mehr als eine bloße „Adjungierung“ (Cassirer 1929, 455). Denn:

> Jeder Schritt, der das Gebiet der Mathematik, der den Kreis ihrer *Gegenstände* erweitert hat, ist immer zugleich ein Schritt auf dem Wege zu ihrer tieferen prinzipiellen *Begründung*, zur Tieferlegung ihrer Fundamente gewesen. [...] [J]ede Extensivierung kommt hier zugleich einer logischen Intensivierung gleich. (Cassirer 1929, 456)

Nichts anders behauptet Hilbert selbst. Und auch der folgenden Diagnose hätte Hilbert mit Sicherheit zugestimmt:

> In diesem Sinne läßt sich sagen, daß der logische Weg der Mathematik nicht dahin geht, den idealen Elementen ein eigenes Recht und eigenen Raum *neben* den anderen zu erkämpfen – sondern daß in ihnen erst das eigentliche Ziel ihrer Begriffsbildung erreicht, daß sie zu einem kritischen Verständnis dessen gelangt, was diese Begriffsbildung ist und was sie vermag. Selbst wenn man annimmt, daß die „Ratio essendi“ der idealen Gebilde im Bereich der alten Gebilde gesucht werden muß, so liegt doch die „Ratio cognoscendi“ der letzteren in den idealen Elementen. (ebd.)

Wenn man so will, hat man es hier mit einer Explikation der von Cassirer im Rahmen seiner idealistischen Lesart des Intuitionismus in Anschlag gebrachten „reinen Idee der Zahl“ (s. o.) zu tun. Doch abgesehen davon stellt sich die Frage, wie seine hochgradig wohlwollende Aufnahme der Methode der idealen Elemente sich zu seiner im vorigen Abschnitt geschilderten *Kritik des formalistischen Programms* verhält.

An exakt dieser Stelle nun kommt der Gesichtspunkt der transzendentalen Rechtfertigung ins Spiel. Vorausgesetzt nämlich, der Fortgang von der ganzen zur Rational-, zur Irrational-, zur reellen, zur komplexen und schließlich zur imaginären

[29] Thomas Mormann (persönliche Kommunikation) verdanke ich den Hinweis, dass sich ein Vorläufermodell des vom späteren Cassirer im Zusammenhang mit der Methode der idealen Elemente beschriebenen Verfahrens bereits in den in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* anzutreffenden Überlegungen zum Thema ‚Idealisierung‘ findet. Zu den näheren Details vgl. Mormann 2008.

Zahl sowie, ausgehend davon, zur Ausdehnung der imaginären Zahlen auf die Bereiche der Analysis (Cauchy) und der projektiven Geometrie (Poncelet) ist auf widerspruchsfreiem Wege durchführbar, bleibt, wenn man Cassirer folgt, noch immer eine Art Rechtfertigungsdesiderat. Denn *allein* der widerspruchsfreie Aufbau der Mathematik mittels idealer Elemente ist ihm zufolge nicht genug, um den *Ansprüchen der Erkenntniskritik* gerecht zu werden. So schreibt Cassirer im *Erkenntnisproblem*:

> Die Berufung auf den bloßen Widerspruchssatz reicht [...] nicht aus; denn nicht alles, was keinen inneren Widerspruch enthält, hat damit schon sein Heimatrecht in der Mathematik erwiesen. Hier muß demnach ein anderes Kriterium und eine andere Form der Ableitung einsetzen, die bei allen „Existenzbeweisen" der Mathematik hervortritt. (Cassirer 1957, 81)

In der *Philosophie der symbolischen Formen* wird dieser Gedanke – ausgehend vom konstatierten „Faktum" eines bisher auf widerspruchsfreien Wege erfolgten Aufbaus der Mathematik – wie folgt ausbuchstabiert:

> So erweist sich die Einführung der idealen Elemente, wenn man auf die Geschichte der Mathematik hinblickt, überall als „durch das Faktum bewährt". Aber die Erkenntniskritik kann freilich bei diesem bloßen Faktum nicht stehenbleiben, sondern sie muß ihre Frage auf die *Möglichkeit dieses Faktums* richten. Denn es ist ein keineswegs einfaches, auf den ersten Blick durchschaubares Verhältnis, das sich hier in der Beziehung der verschiedenen mathematischen Gegenstandsbereiche offenbart. Daß innerhalb der Mathematik die neuen Gegenstände nicht einfach *neben* die alten treten, sondern daß sie deren Aspekt innerlich verändern und umgestalten, daß sie ihnen eine andere Erkenntnisform aufprägen – dies ist und bleibt ein eigenartiges intellektuelles Phänomen, das seine Deutung und Erklärung nur finden kann, wenn man auf das ursprüngliche Motiv der mathematischen Gegenstandsbildung überhaupt zurückgeht. (Cassirer 1929, 458)

Was demnach geklärt werden muss, ist, worum es sich bei diesem „ursprünglichen Motiv der mathematischen Gegenstandsbildung" handelt und wie sich dieses zu dem in Frage stehenden Desiderat einer transzendentalen Rechtfertigung ins Verhältnis setzen lässt.

Wie Cassirer unmissverständlich zum Ausdruck bringt, ist es der Begriff der *Synthesis*, welchem hier die Schlüsselrolle zukommt (vgl. Cassirer 1929, 458). Im *Erkenntnisproblem* stellt er die These auf, dass „der Anspruch der modernen Logistik, die Synthesis endgültig aus dem Gebiet der Mathematik verdrängt und den rein analytischen Charakter der mathematischen Urteile erwiesen zu haben, unhaltbar ist“ (Cassirer 1957, 82). Und er fügt hinzu:

> Die Entwicklung der modernen Mathematik hat vielmehr an diesem Punkte, nachdem sie eine Zeitlang eine völlig entgegengesetzte Richtung einzuschlagen schien, in sehr merkwürdiger Weise wieder zu bestimmten Grundpositionen Kants zurückgeführt. (Cassirer 1957, 82f.)

Dementsprechend habe sich bei zeitgenössischen Autoren, wie beispielweise Otto Hölder und vor allem auch Weyl, die Einsicht durchgesetzt, dass es sich beim Aufbau des Zahlensystems im Wesentlichen um eine „*Verkettung von Relationen*“ (Cassirer 1957, 83) und *insofern* um einen synthetischen, über die bloß analytische Subsumption von Gattungsbegriffen untereinander hinausgehenden Vorgang handele. In der *Philosophie der symbolischen Formen* erwähnt Cassirer in diesem Zusammenhang die die mathematische Gegenstandsbildung erweiternde Funktion der komplexen Zahlen, durch welche eine „Fülle bisher unbekannter Beziehungen zwischen ‚reellen‘ Größen“ (Cassirer 1929, 457f.) aufgedeckt worden sei. Das in Frage stehende „Motiv“ der mathematischen Gegenstandsbildung ist sonach in der Schaffung bereichserweiternder *Relationssynthesen* zu sehen. Da diese wiederum, wie Cassirer unter Berufung auf Hölder (vgl. Hölder 1924, § 6) schreibt, „in keiner Weise auf den bloßen Satz der Identität und des Widerspruchs zurückführbar ist“ (Cassirer 1957, 83), bedarf es eines eigenen, *transzendentalen*, Verfahrens der Rechtfertigung. Eben dazu äußert Cassirer sich in der *Philosophie der symbolischen Formen* (recht ausführlich) wie folgt:

> Das Verfahren, auf dem die Zahl*bildung* letztlich beruht, erschöpft sich nicht in dem einfachen *Gebilde* der ganzen Zahlen – wenngleich dieses selbst bereits ein unendliches und unendlich vielfältiges Gefüge darstellt. Vielmehr kann jedes neue *System von Beziehungen*, das innerhalb dieses Gefüges vorgefunden, d. h. aus der erzeugenden Urrelation abgeleitet wird, selbst wieder zum Ausgangspunkt für eine neue Setzung und für ganze Gruppen solcher Setzungen werden. Der Gegenstand untersteht hier keinen anderen Bedingungen als denen der mathematischen Synthesis selbst: Er *ist* und *besteht*, sofern die mathematische Synthesis *gilt*. Und über diese Geltung entscheidet keine außenstehende, keine transzendente „Wirklichkeit“ der Dinge, sondern einzig die immanente Logik der mathematischen Relationen selbst. Damit haben wir das einfache Prinzip erfaßt, auf das sich zuletzt die Geltung und die Wahrheit aller idealen Elemente zurückführen läßt. (Cassirer 1929, 459f.)

Im Klartext heißt das, dass die Methode der idealen Elemente auf die Logik der Relationen gegründet werden muss, um als in ihrer Anwendung gerechtfertigt zu erscheinen. Sie, die Logik der Relationen, ist es, welche – ganz „im transzendentalen Sinne“ – die Bedingungen der Möglichkeit der mathematischen Gegenstände in sich fasst.[30]

Nun hatten wir anfangs ja gesehen, dass die Logik der Relationen beim *frühen* Cassirer letztlich *an die Stelle* der reinen Anschauung tritt. Der spätere Cassirer sieht dies grundlegend anders. Denn für diesen geht es nun in erster Linie darum, die Logik der Relationen in die reine Anschauung, als dem Medium der mathematischen Synthesis, *einzubetten* und somit auch ihre transzendentale Rechtfertigungsfunktion zu untermauern. Die in dieser Hinsicht meines Erachtens klarste Äußerung Cassirers ist wiederum im *Erkenntnisproblem* zu finden. Dort heißt es an einer Stelle:

> Daß bei jeder Ableitung des Zahlbegriffs der Appell an die *empirische* Anschauung, an die Anschauung konkreter Dinge unzulässig sei: darüber sind sich fast alle Richtungen der modernen Mathematik einig. Aber die reine „Intuition“ der Zahl mußte umso mehr wieder in den Mittelpunkt treten, als man sich davon überzeugte, daß der Mengenbegriff die Ansprüche nicht zu erfüllen vermochte, die man an ihn gestellt hatte. (Cassirer 1957, 84)

Es sind, was nun nicht mehr weiter verwundern dürfte, Intuitionisten wie Brouwer und Weyl, welche seitens Cassirers hier als ‚Wiederentdecker‘ der reinen Anschauung gelobpreist werden.

Doch kommen wir nun, zum Abschluss, noch einmal zu dem Interpretationsansatz von Heis. Wie schon gesagt, wird Cassirers transzendentale Deutung der Methode der idealen Elemente in Heis‘ Aufsatz nicht berücksichtigt. Auch wird auf Cassirers einschlägige Darlegungen im *Erkenntnisproblem* nicht eingegangen. Beides trägt in meinen Augen dazu bei, dass die Interpretation von Heis an entscheidender Stelle unvollständig bleibt.

Wie Heis sehr überzeugend ausführt, war Cassirer selbst sich vollkommen darüber im Klaren, dass seine eigene Mathematikauffassung seit 1910 eine nicht zu übersehende Wandlung durchlaufen hatte. Heis führt dazu die folgende Passage aus der Vorrede zum dritten Band der *Philosophie der symbolischen Formen* an:

[30] Anmerkungsweise sei daran erinnert, dass Kant diejenige Erkenntnis als transzendental auffasst, „die sich nicht sowohl mit Gegenständen, *sondern mit unserer Erkenntnisart von Gegenständen, insofern diese a prioi möglich sein soll*, überhaupt beschäftigt“ (Kant 1787, 25).

> Der dritte Band der „Philosophie der symbolischen Formen" kehrt zu den Untersuchungen zurück, mit denen ich vor zwei Jahrzehnten meine systematische philosophische Arbeit begonnen habe. [...] Aber die Frage nach der Grundform der Erkenntnis wird jetzt in einem weiteren und allgemeineren Sinne gestellt. Die Untersuchungen meiner Schrift „Substanzbegriff und Funktionsbegriff" (1910) gingen davon aus, daß die Grundverfassung der Erkenntnis sich am klarsten und schärfsten dort aufweisen lassen, wo sie die höchste Stufe ihrer „Notwendigkeit" und „Allgemeinheit" erreicht haben. [...] Die Form der Erkenntnis, wie sie hier bestimmt wurde, fiel demgemäß im wesentlichen mit der Form der exakten *Wissenschaft* zusammen. Die „Philosophie der symbolischen Formen" ist über diese anfängliche Problemstellung im inhaltlichen wie im methodischen Sinne hinausgeschritten. Sie hat den Grundbegriff der „*Theorie*" selber erweitert, indem sie zu erweisen versuchte, daß es echte theoretische Formmomente und Formmotive sind, die nicht nur in der Gestaltung des wissenschaftlichen, sondern schon in der Gestaltung des „natürlichen Weltbildes", des Weltbildes der Wahrnehmung und der Anschauung, obwalten. [...] Der Schicht der begrifflichen, der „diskursiven" Erkenntnis werden jetzt jene anderen geistigen Schichten, die die Analyse der Sprache und des Mythos aufgedeckt hat, unterbreitet und unterbaut: Und im ständigen Hinblick und Rückblick auf diesen Unterbau wird die Eigenart, die Gliederung und Architektonik des „Oberbaus" der Wissenschaft zu bestimmen gesucht. (Cassirer 1929, v-vi)

Heis nimmt diese programmatische Ankündigung zum Anlass, um die Mathematikauffassung des späteren Cassirer so eng wie möglich an die ‚unterbauenden' symbolischen Formen der Sprache und des Mythos zu binden. Und dies – zunächst – mit gutem Recht. Denn in Kapitel IV des zweiten Teils von Band 3 der *Philosophie der symbolischen Formen* befasst Cassirer sich, was die symbolische Form der Sprache anbelangt, sehr eingehend mit empirischen Forschungen zur Aphasie im Kontext des Gebrauchs von Zahlwörtern (vgl. Cassirer 1929, 288ff.). Und bereits im Rahmen des 1925 erschienenen zweiten Bandes der *Philosophie der symbolischen Formen* geht Cassirer sehr ausführlich auf die Bedeutung der Zahl im Mythos ein (vgl. Cassirer 1925, 174ff.).

Die Pointe der von Heis in Anschlag gebrachten Interpretation ist nun darin zu sehen, dass Cassirers im Zusammenhang mit Aphasie und Mythos angestellte Überlegungen zur außer- bzw. vorwissenschaftlichen Eigentümlichkeit und Rolle der Zahl als Grundlage einer *alternativen Begründungsform* zu der aufseiten des Intuitionismus als fundamentale Herleitungsbasis ausgewiesenen reinen Anschauung (oder ‚Urintuition') verstanden werden sollen. Nehmen wir zur Verdeutlichung dessen, was gemeint ist, den von Heis diskutierten Fall des Zahlenverständnisses im Mythos (vgl. Heis 2015, 135). Ein elementares Beispiel wäre hier die Auffassung der 7 als Zeichen der „Fülle und Vollendung" (Cassirer 1925, 181) im christlichen Mittelalter. Als ein weiteres, die sinngebende ‚Tönung' der Zahl im Mythos veranschaulichendes Beispiel erwähnt Heis die Assoziation einzelner Zahlen mit qualitativen, körperbezogenen Eigenschaften bei den Ureinwohnern British New Guineas. Deren „sequence in counting" (Heis 2015, 135) verlaufe nach dem Schema: Finger der linken Hand – linkes Handgelenk – linker Ellbogen – linke Schulter – linke Nackenseite – linke Brust – Brustkasten – rechte Brust – rechte Nackenseite usw.[31] Was sich hier schon angelegt finde, sei die bei Dedekind im wissenschaftlichen Kontext des späten 19. Jahrhunderts zur vollen Entfaltung gebrachte Auffassung von Zahlen als Stellen in einem System. So entspreche der Zahl 8 die linke Schulter als Durchgangspunkt eines „canonical way to order the parts of the body" (Heis 2015, 137).

Folgt man Heis noch einen Schritt weiter, so handelt es sich bei der sukzessiven Herausbildung des mathematisch-wissenschaftlichen aus dem zunächst mythischen, vorwissenschaftlichen, Zahlverständnis um einen Vorgang zunehmender ‚Entgegenständlichung' der Zahlen unter Beibehaltung der grundlegenden Beziehungsformen. Imaginäre Zahlen – und andere ideale Elemente – wären sonach als Kulminationspunkt dieser Entwicklung zu sehen. „[T]he concept of number as a position in a simply infinite system", so Heis, „makes explicit what was implicit in number in language and myth" (Heis 2015, 138). *Und eben deshalb* bestehe für Cassirer „no need to appeal to some sui generis kind of non-conceptual ‚pure intuition', as in intuitionists like Brouwer or even Poincaré" (Heis 2015, 138f.).

Die Konsequenz, die Heis aus all dem zieht, ist ebenso weitreichend wie fragwürdig. Es ist mehr als offensichtlich, dass Cassirers Sympathien im mathematischen Grundlagenstreit auf der Seite der Intuitionisten liegen. Heis indes meint: „Cassirer's enthusiasm for intuitionism is quite limited: it does not extend to positing a faculty of pure intuition that can ground arithmetic." (Heis 2015, 139, Fn. 33) Dem muss in zweifacher Hinsicht widersprochen werden. Erstens basiert, wie dargelegt worden ist, Cassirers gesamte Kritik am Logizismus und am Formalismus auf deren in seinen Augen unzureichender oder, besser, nicht vorhandener Würdigung des die Anschauung in Anspruch nehmenden Konzepts symbolischer Prägnanz. Den Intuitionismus kann er diesem Vorwurf nicht ausliefern. Zweitens, und dies ist der eigentlich wichtige Punkt, bedarf die – von Heis nicht berücksichtigte

[31] Siehe dazu bereits die entsprechenden Ausführungen in dem 1923 erschienenen Band 1 der *Philosophie der symbolischen Formen* (Cassirer 1923, 185).

– Methode der idealen Elemente nach Cassirer einer transzendentalen Rechtfertigung. Und diese wiederum kann nach Cassirer nur unter Voraussetzung der auf der *reinen* Anschauung gründenden, seitens der Intuitionisten akzentuierten Synthesisleistung des mathematisch operierenden Subjekts erfolgen. Würde man sich dem Interpretationsansatz von Heis anschließen, käme man über das Verfahren einer rein empirischen Rechtfertigung nicht hinaus. Dann aber stellt sich die Frage: Was bleibt, wenn man die reine Anschauung durch empirische Begründungsformen substituiert, noch übrig von dem – auch vom späteren Cassirer noch verfochtenen – „logischen Idealismus“?[32]

5 Zusammenfassung

Ziel dieses Beitrags war es, Cassirers Deutung des mathematischen Grundlagenstreits auf systematischem Wege zu rekonstruieren und vor dem Hintergrund der verhandelten rivalisierenden Positionen ideengeschichtlich einzuordnen. Es hat sich gezeigt, dass insbesondere die von Cassirer fokussierte Hilbertsche Methode der idealen Elemente einer, wenn man Cassirer zu folgen bereit ist, transzendentalen Rechtfertigung bedarf, deren entscheidende Voraussetzungen er im zeitgenössischen mathematischen Intuitionismus verankert sieht. Der von Jeremy Heis unterbreitete, sich ausschließlich an der *quid facti*-Frage ausrichtende Interpretationsansatz greift daher zu kurz.

Abschließend sei noch angemerkt, dass meine eigenen Neigungen in puncto logischer Idealismus und mathematischer Intuitionismus sich in Grenzen halten. Die Abkunft der Methode der idealen Elemente aus dem formalistischen Programm kommt nicht von ungefähr. Sie lässt sich meiner Meinung nach auch unabhängig vom Intuitionismus, aber zugleich auch auf anderem Wege als dem von Heis uns suggerierten, in angemessener Form rechtfertigen. Dazu allerdings bedarf es einer ‚Anreicherung‘ des formalistischen Programms durch bestimmte Einsichten aus dem Umfeld des neueren mathematischen ‚Strukturalismus‘ (Resnik, Shapiro u. a.). Wie solch eine strukturalistische Lesart des formalistischen Programms im Einzelnen aussehen könnte, habe ich (unter maßgeblicher Bezugnahme auf die entsprechenden Ansichten Haskell Currys) an anderer Stelle zu verdeutlichen versucht.[33]

[32] Siehe dazu insbesondere auch Cassirers Verteidigung des „logischen Idealismus“ gegenüber der von Oskar Becker 1929 vorgelegten Kritik desselben in der das Kapitel IV des dritten Teils von Band 3 der *Philosophie der symbolischen Formen* abschließenden langen Fußnote 158 in Cassirer 1929, 470f.

[33] Vgl. Neuber 2017.

Literatur

Becker, Oskar 1929. „Über den sogenannten ‚Anthropologismus' in der Philosophie der Mathematik (Eine Erwiderung in Sachen der ‚Mathematischen Existenz')". *Philosophischer Anzeiger* 3, 369-387.

Bolinger, Raphael 2018. *Die Grundlagenkrise der Mathematik um 1900. Logizismus, Intuitionismus und Formalismus.* Aachen: Shaker Verlag.

Brouwer, Luitzen Egbertus 1912. *Intuitionisme et formalisme.* Groningen: Noordhoof.

Brouwer, Luitzen Egbertus 1983. „Intuitionism and Formalism", in: P. Benacerraf & H. Putnam (Hg.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press.

Brunschvicg, Léon 1922. *Les étapes de la philosophie mathématique.* Paris: Alcan.

Carnap, Rudolf 1931. „Die logizistische Grundlegung der Mathematik". *Erkenntnis* 2, 91-105.

Cassirer, Ernst 1907. „Kant und die moderne Mathematik". *Kant Studien* 12, 1-49.

Cassirer, Ernst 1910. *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik.* Berlin: Bruno Cassirer.

Cassirer, Ernst 1923. *Philosophie der symbolischen Formen. Erster Teil: Die Sprache.* Berlin: Bruno Cassirer.

Cassirer, Ernst 1925. *Philosophie der symbolischen Formen. Zweiter Teil: Das mythische Denken.* Berlin: Bruno Cassirer.

Cassirer, Ernst 1929. *Philosophie der symbolischen Formen. Dritter Teil: Phänomenologie der Erkenntnis.* Berlin: Bruno Cassirer.

Cassirer, Ernst 1957. *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit. 4. Bd.: Von Hegels Tod bis zur Gegenwart (1832-1932).* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Cohen, C. Jonathan, 1954. „On the Project of a Universal Character". *Mind* 63, 49-63.

Cohen, Hermann 1902. *Logik der reinen Erkenntnis.* Berlin: Bruno Cassirer.

Dedekind, Richard 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg.

Frege, Gottlob 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau: Wilhelm Koebner.

Frege, Gottlob 1893. *Grundgesetze der Arithmetik.* Jena: Hermann Pohle.

Gauß, Carl Friedrich 1876. *Werke. Bd. 3.* Göttingen: Dietrich.

Heis, Jeremy 2015. „Arithmetic and Number in the Philosophy of Symbolic Forms“, in: J Tyler Friedman & Sebastian Luft (Hg.), *The Philosophy of Ernst Cassirer: A Novel Assessment.* Berlin & Boston: de Gruyter, 123-140.

Heyting, Arend 1956. *Intuitionism, an Introduction.* Amsterdam: North Holland.

Hilbert, David 1899. *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig: Teubner.

Hilbert, David 1922. „Neubegründung der Mathematik.“ *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 1, 155-157.

Hilbert, David 1925. „Über das Unendliche“. *Mathematische Annalen* 95, 161-190.

Hilbert, David 1928. *Die Grundlagen der Mathematik.* Leipzig: Vieweg & Teubner.

Hilbert, David 1935. *Gesammelte Abhandlungen. Dritter Band.* Berlin: Springer.

Hölder, Otto 1924. *Die mathematische Methode. Logisch erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik.* Berlin: Springer.

Kant, Immanuel 1783. *Prolegomena zu einer jeden Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können.* Riga: Hartknoch.

Kant, Immanuel 1787. *Kritik der reinen Vernunft.* 2. Aufl. Riga: Hartknoch.

Kreis, Guido 2010. *Cassirer und die Formen des Geistes.* Berlin: Suhrkamp.

Krois, John Michael 1987. *Cassirer: Symbolic Forms and History.* New Haven: Yale University Press.

Lenzen, Wolfgang 1990. *Das System der Leibnizschen Logik.* Berlin: de Gruyter.

Levy, Heinrich 1927. *Die Hegel-Renaissance in der Deutschen Philosophie mit besonderer Berücksichtigung des Neukantianismus.* Charlottenburg: Pan-Verlag Rolf Heise.

Luft, Sebastian 2015. *The Space of Culture: Towards a Neo-Kantian Philosophy of Culture (Cohen, Natorp & Cassirer).* Oxford: Oxford University Press.

Mormann, Thomas 2008. „Idealization in Cassirer's Philosophy of Mathematics". *Philosophia Mathematica* 16, 151-181.

Neuber, Matthias 2011. „Zwei Formen des transzendentalen Revisionismus: ‚Wissenschaftliche Philosophie' beim frühen Ernst Cassirer und beim frühen Moritz Schlick". *Kant Studien* 102, 455-476.

Neuber, Matthias 2012. *Die Grenzen des Revisionismus. Schlick, Cassirer und das ‚Raumproblem'.* Wien & New York: Springer.

Neuber, Matthias 2016a. „Die Kulturphilosophie Ernst Cassirers. Neuere Forschungstrends und -perspektiven (Teil 1)". *Philosophische Rundschau* 63 (2), 123-142.

Neuber, Matthias 2016b. „Die Kulturphilosophie Ernst Cassirers. Neuere Forschungstrends und -perspektiven (Teil 2)". *Philosophische Rundschau* 63 (3), 263-277.

Neuber, Matthias 2017. „Mathematik und Ontologie – Der lange Weg zum strukturellen Formalismus". *Zeitschrift für philosophische Forschung* 71, 358-379.

Poincaré, Henri 1903. *La science et l'hypothèse.* Paris: Flammarion.

Russell, Bertrand 1919. *Introduction to Mathematical Philosophy.* London: Routlegde.

Schlick, Moritz 1918. *Allgemeine Erkenntnislehre.* Berlin: Springer.

Schubbach, Arno 2016. *Die Genese des Symbolischen. Zu den Anfängen von Ernst Cassirers Kulturphilosophie.* Hamburg: Meiner.

Shapiro, Stewart 2000. *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

Tapp, Christian 2013. *An den Grenzen des Endlichen. Das Hilbertprogramm im Kontext von Formalismus und Finitismus.* Berlin & Heidelberg: Springer.

Thiel, Christian 1972. *Grundlagenkrise und Grundlagenstreit. Studie über das normative Fundament der Wissenschaften am Beispiel von Mathematik und Sozialwissenschaft*, Meisenheim a. G.: Hain.

von Kutschera, Franz 1989. *Gottlob Frege. Eine Einführung in sein Werk.* Berlin: de Gruyter.

Weyl, Hermann 1921. „Über die Grundlagenkrise der Mathematik“. *Mathematische Zeitschrift* 10, 39-79.

Weyl, Hermann 1927. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.* München: Leibniz Verlag.

Die Philosophie der Mathematik und die Sokratische Methode Leonard Nelsons – Ein Überblick

Shafie Shokrani

1 Die Ausgangsfrage

> „Menon: Und auf welche Weise willst du denn dasjenige suchen, Sokrates, von dem du überhaupt nicht weißt, was es ist. Denn als welches besondere von allem, was du nicht weißt, willst du es dir denn vorlegen und so suchen? Oder wenn du es auch noch so gut träfest, wie willst du denn erkennen, dass es dieses ist, was du nicht wusstest?“ (*Menon* 80e.)

Die im obigen Zitat zum Ausdruck gebrachte Problemstellung, auch bekannt als das *Menon-Paradoxon*, fragt danach, wie neue Erkenntnisse entstehen können, wenn diese immer auf anderen Erkenntnissen beruhen. Diese Problematik stellt eine der wichtigsten, wenn nicht sogar die zentrale Frage der Pädagogik und damit insbesondere der Didaktik der Mathematik dar. So verweist auch noch Anna Sfard 2008 auf ihre Aktualität:

> „Although the idea that new knowledge is germinated in old knowledge has been promoted by all theoreticians of human development, from Piaget to Vygotsky to contemporary cognitive scientists, the question of how the old is transformed into the new has remained a vexing puzzle. The quandary was first signaled by Plato in his dialogue Meno and came to be known later as the learning paradox. Although seen in many different guises throughout history, the question has always been

> the same: How can we want to acquire a knowledge of something that is not yet known to us?“[1]

Das Paradoxon weist auf zwei Aspekte hin: Zunächst stellt sich die Frage, was Erkenntnis ist, sei es die Erkenntnis dessen, was wir glauben zu besitzen, sei es die, die wir nicht besitzen, aber nach der wir mit Hilfe derer, die wir besitzen, suchen. Andererseits wird nach der Qualität der Beziehung zwischen den beiden gefragt. So wird die Art und Weise des Zustandekommens von Erkenntnis, ihre *Genese*, sowie auch derer *Geltung* hinterfragt. Platon stellt nicht nur die Frage, wie Erkenntnis möglich ist, sondern er gibt selbst eine Antwort mit seiner *Anamnesis-Lehre*, die von den „Göttlichen und Weisen“ übernommen wurde[2]. Dieser Verweis ist jedoch nicht das Kriterium für die Geltung dieser Lehre, sondern Sokrates versucht, diese Theorie mit der Praxis zu begründen.

Als Neukantianer antwortet Leonard Nelson auf das Paradoxon mit eigenen epistemologischen Überlegungen, die zugleich „die Möglichkeit und Notwendigkeit der sokratischen Methode“ als pädagogische Methode sicher stellen sollen. Dies möchte ich im Folgenden darstellen und darüber hinaus andeuten, wie das Verhältnis der Mathematik zu dieser Methode sowie Platons Spuren in diesem Kontext eine entscheidende Rolle spielen. Nelson betrachtet die Anamnesis-Lehre als einen Satz, der auf einer „unmittelbaren Erkenntnis“ beruht, was dem friesschen Prinzip des Selbstvertrauen der Vernunft entspricht. Wie wir später sehen werden, ist laut Nelson eine solche Erkenntnis ein Satz, der nicht beweisbar, sondern lediglich durch Aufweisung begründbar ist. Hier können wir platonische Motive erkennen, da auch im Menon-Dialog Sokrates Menon und seinen Sklaven auf Erkenntnisse hinweist. Entscheidend ist hier allerdings die durchgeführte Methode, *die sokratische Methode*. Daher möchte ich meine Untersuchung mit einem kurzen Überblick auf die Geschichte dieser Methode zu beginnen.

2 Ein kurzer Abriss der Geschichte der Sokratischen Methode

Die sokratische Didaktik, wie Platon sie in seinen Schriften dargestellt hat, wurde von verschiedenen Personen in der Geschichte nach Platon als Ausgangspunkt und Vorbild in der Pädagogik, insbesondere in der Mathematikpädagogik, angewendet. Die Tiefe der jeweiligen Begründungen dieser Konzeption unterscheiden sich stark. Einerseits gab es Didaktiker, die basierend auf ihren Erfahrungen und

[1] Sfard 2008, S. 40.
[2] Vgl. *Menon*, 81a.

dem was sie in PLATONs Schriften in diesem Zusammenhang gefunden hatten, einige Elemente aus der sokratischen Methode übernommen und diese in ihrer Pädagogik besonders herausgestellt haben. Manche von ihnen haben ihre Methode nach SOKRATES benannt. Andererseits gab es Didaktiker, die zunächst eine tiefere Untersuchung dieses Lehrkonzeptes durchgeführt haben, um eine klarere Vorstellung hiervon zu gewinnen. Einige von ihnen haben dieses Konzept für den Mathematikunterricht sogar als ungeeignet befunden. Im Buch „Lehren ohne Belehrung“[3] führt RAINER LOSKA eine Liste der Didaktiker aus dem gesamten o.g. Spektrum auf. Darunter stehen beispielsweise:

- ERHARD WEIGEL (1625-1699), Mathematiker, Astronom, Pädagoge und Philosoph aus Jena,
- JOHANN ANDREAS CHRISTIAN MICHELSEN (1749-1797), Professor für Mathematik und Physik am Gymnasium zum Grauen Kloster in Berlin,
- KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815-1897), der bekannte Mathematiker, und
- LEONARD NELSON (1882-1927), Göttinger Philosoph und Pädagoge, der durch Konzipierung einer pädagogischen Methode, die er nach SOKRATES benannt hat, eine Tradition begründet hat.

Im Folgenden betrachte ich die Einsichten NELSONs und die Tradition, die durch Weiterentwicklung seiner Methode entstanden ist. Eine genauere philosophische Untersuchung der Konzeption NELSON s im mathematischen Kontext präsentiere ich in den daran anschließenden Abschnitten.

2.1 Die Tradition Nelson-Heckmann

LEONARD NELSON hat in seinem Vortrag „Die sokratische Methode“ am 11. September 1922 in Göttingen nicht nur eine pädagogische Methode, sondern ein philosophisch-gedankliches System vorgestellt, das die sokratische Methode als einen Teil beinhaltet. Weil diese Methode epistemologische Grundlagen besitzt und ihre Existenz und Merkmale durch den Zusammenhang mit anderen Teilen des philosophischen Systems von NELSON bestimmt und gehaltvoll werden, sah er sich veranlasst, sein philosophisch-gedankliches System mit einzubeziehen, um die Methode vorstellen zu können. Weil das System selbst sehr umfangreich ist, konnte er dieses nur in Teilen in seinem Vortrag berücksichtigen. Das System beinhaltet Betrachtungen PLATONs, IMMANUEL KANTS (1724-1804) und JAKOB FRIEDRICH

[3]Loska 1995.

Fries' (1773-1843). Nelson hat diese Thesen koordiniert miteinander dargelegt, auf wenige s.E. verfehlte Ausnahmen hingewiesen und dazu seine Überlegungen hinzugefügt.

Einer der Zuhörer von Nelsons Vortrag war der junge Gustav Heckmann (1898-1996). Nachdem dieser seine Doktorarbeit zu einem Thema der Physik bei Max Born (1882 - 1970) geschrieben hatte, entschied er sich, in der Walkemühle-Schule, einer von Nelson gegründeten und von Minna Specht (1879-1961) geleiteten Reformschule, als Lehrer zu arbeiten[4]. Nach dem Zweiten Weltkrieg führten Errungenschaften Heckmanns und anderer, die Nelson nahestanden, wie z.B. Minna Specht und Grete Henry-Hermann (1901-1984), zu einer Professionalisierung und 1994 zur Gründung der „*Gesellschaft für Sokratisches Philosophieren*“. Diese hat sich zum Ziel gesetzt, sokratische Gespräche zu veranstalten, Gesprächsleiter auszubilden und die zugrundeliegende Theorie weiterzuentwickeln[5].

Gisela Raupach-Strey ist einer dieser Gruppen zugehörig und unter Heckmann ausgebildet. Sie hat die den sokratischen Gesprächen zugrundeliegende Theorie geprüft, analysiert und weiterentwickelt hat. Ihr Buch „*Die sokratische Didaktik*“ (Raupach-Strey 2012) ist das umfassendste Werk, das diese Tradition aus philosophischer und didaktischer Sicht untersucht hat. Grundlagen dieses Werkes sind erstens die theoretische Betrachtung von Nelsons und Heckmanns Schriften und zweitens die praktischen Erfahrungen, die sie sowohl als Teilnehmerin als auch als Gesprächsleiterin bei den sokratischen Gesprächen gesammelt hat[6]. Deutlich erkennbar in ihrem Buch ist, dass sie stets die beiden genannten Aspekte im Blick behält und dass sie diese bei der Untersuchung der verschiedenen Elemente des sokratischen Gesprächs durchgehend mitberücksichtigt. Ein weiteres Charakteristikum ihrer Schriften ist der Vergleich, den sie zwischen der Tradition und neueren, zeitgenössischen Philosophien, insbesondere Diskurstheorie, durchführt, wobei sie erstere gegebenenfalls in die Theorien einbettet.

Um die Unstimmigkeit zwischen der Nelson-Heckmannschen Theorie und der von ihr erlebten Gesprächspraxis auszuräumen, hat sie aus diesen beiden Ansätzen eine gemeinsame Leitvorstellung erarbeitet, die „*regulative Idee*“, die sie in Form einiger charakteristischen Elemente dargestellt hat. Später verwendete sie dafür den Begriff des „*Sokratischen Paradigmas*“. Dabei übernimmt sie den Begriff des „Paradigmas“ von Thomas Kuhn (1922-1996) – er „indiziert ein handlungsleitendes Ensemble von regulativer und konstitutiver Idee, Verfahren, Gegenstands- und Gemeinschaftskonstitution“[7]. Die Begründung für diese Umbenennung ist, dass die

[4]Vgl. Heckmann 1993 S. 7.
[5]Vgl. Heckmann 1993 S. 7ff u. Raupach-Strey 2012 S. 21ff.
[6]Vgl. Heckmann 1993 S. 39ff.
[7]Raupach-Strey 2012 S.40f.

Elemente der „*regulativen Idee*" eher theoretischer Natur sind, darüber hinaus setzt die Diskurstheorie voraus, dass sich die sokratische Methode mit letzterer nur dann verknüpfen lässt, wenn die o.g. Methode in der Theorie als Konstrukt dargestellt werden kann, da Theorie und Praxis nicht unmittelbar zusammenhängen[8].

Die o.g. charakteristischen Elemente tragen dazu bei, das sokratische Paradigma möglichst eindeutig zu erläutern und von anderen Paradigmen der Pädagogik mit Hilfe von bestimmten Kriterien zu unterscheiden. Diese sind nach sokratischer Methode erarbeitet. Obwohl sie im Wesentlichen aus NELSONs pädagogischen und philosophischen Schriften sowie aus von PLATON dokumentierten sokratischen Gesprächen abgeleitet sind, erkennt man ebenso klar Einflüsse von HECKMANN und Diskurstheoretikern. Folgende Elemente, zu denen eine kurze Erklärung angeführt wird, sind laut RAUPACH-STREY konstitutiv[9]:

1) *Der Marktplatz als Ort des Philosophierens*: Gemäß RAUPACH-STREY enthält die Idee des sokratischen Philosophierens auf dem Marktplatz die konstitutiven Elemente des sokratischen Paradigmas, nämlich:

- dass Philosophieren nicht nur Gebildeten, sozial Hochstehenden, bestimmten Ethnien und Geschlechtern offensteht und jedermann die Fähigkeit hat, mithilfe seiner Vernunft zur Erkenntnis der Wahrheit zu gelangen (das Postulat der Universalität der Subjekte),

- dass das Postulat der Universalität des Objektbereichs auch in ihm inhärent ist,

- dass die Gültigkeit der Erkenntnisse nur durch das Kriterium der Überprüfung durch die Öffentlichkeit festgestellt wird,

- dass der Ausgangspunkt der jeweiligen Diskussion ein Thema aus dem alltäglichen Leben ist und daher mit Erfahrungen der Gesprächsteilnehmer zusammenhängt,

- dass ein sokratischer Dialog nicht unter Handlungsdruck ist und „im klassischen Sinn zwecklos ist".[10]

2) *Die Verankerung in der Erfahrung*: Der Ausgangspunkt jedes sokratischen Gesprächs liegt in alltäglichen Erfahrungen. In dem Gespräch wird der Zusammenhang zwischen dem Konkreten und den allgemeinen Sätzen nie zerrissen. Ebenso

[8] Vgl. Raupach-Strey 2012 S.41.
[9] Eine ausführliche Darstellung dieser Elemente findet man in Raupach-Strey 2002 und Raupach-Strey 2012
[10] Raupach-Strey 2002, S. 109

werden Spekulation, Verselbständigung sowie Hypostasierung der philosophischen Gedanken vermieden.

3) *Der Anti-Dogmatismus*: In der Erklärung dieses Elements weist RAUPACH-STREY darauf hin, dass SOKRATES weder ein Buch geschrieben hat, noch dass er ein Lehrer im allgemeinen Verständnis war. Er wollte niemals „seinen Schülern »etwas« im Sinne inhaltlich bestimmter Wahrheiten beibringen".[11] Für ihn war kein Satz ohne Rechtfertigung gültig. Was ein sokratisches Gespräch auszeichnet , ist nicht „das Was, sondern das Wie", nämlich „der Weg".[12] Auch NELSON hält laut RAUPACH-STREY „die »Ausschaltung des Dogmatismus« und den »Verzicht auf jedes belehrende Urteil überhaupt« (Nelson 2002, S. 291)" während des sokratischen Gesprächs für notwendig, wodurch er dem sokratischen Weg gefolgt sei[13].

4) *Das Selbstvertrauen der Vernunft*: Dass der Weg zur „Erkenntniseinsicht" durch „Selbstdenken" verfolgt wird, ist ein Prinzip, an das laut RAUPACH-STREY, SOKRATES sowie NELSON glaubten, wobei sie darauf ihre jeweiligen Gesprächspartner aufmerksam machten. RAUPACH-STREY erläutert dazu:

> „Die Vernunft muß sich selbst im Einzelsubjekt, aber auch im wechselseitigen Zutrauen von Vernunft als Klärungs- und Rechtfertigungsinstanz begreifen und anerkennen."[14]

5) *Die Maieutik*: Mit Hinweis auf die historische Tatsache, dass SOKRATES seine Tätigkeit im Buch *Theätet* mit der seiner Mutter, die den Beruf der Hebamme ausübte, verglich, sagt Ruapach-Strey, dass SOKRATES in seinen Gesprächen die „geistigen Kinder" prüfte und bei deren Geburt seine Gesprächspartner unterstützte. Er begleitete sie bei der Entwicklung ihrer Gedanken.[15] Den Leiter, aber auch den Gesprächsteilnehmern des sokratischen Gesprächs weist RAUPACH-STREY im Allgemeinen diese Rolle zu. Sie unterscheidet in der *Maieutik* zwei Stufen: erstens Hilfe beim Ausdrücken der „sich »anmeldenden« Aussagen"[16], zweitens die gedankliche und sprachliche Überprüfung der Aussagen, indem ihre Voraussetzungen hinterfragt, kritisch überprüft und begründet werden.[17]

6) *Das Begründungskonzept*: Hier stellt RAUPACH-STREY die *regressive Methode der Abstraktion* vor, die sie auch als den Kernvorgang der sokratischen Methode

[11] Ebd. S. 112
[12] Ebd. S. 113
[13] Ebd. S. 113
[14] Ebd. S. 115
[15] Vgl. ebd., S. 118
[16] Raupach-Strey 2002, S. 119
[17] Vgl. ebd. S. 119

bezeichnet. Der Vorgang wird so verstanden, dass er mit Erfahrungsurteilen anfängt und sie Schritt für Schritt rückwärts von ihren „empirischen Zufälligkeiten“ befreit, bis er zu den allgemeinen philosophischen abstrakten Sätzen kommt, die die Prinzipien der anfänglichen Urteile bilden.[18] Dieses Element wird später in 4 ausführlich behandelt.

7) *Das Gesprächsziel eines Wahrheitskonsens*: Zur Erklärung dieses Elementes weist Raupach-Strey darauf hin, dass das sokratische Gespräch zur Wahrheitserkenntnis strebt. Ihres Erachtens ist die Wahrheit „kein Besitz und kein Element in einem schon fixierten System“. Diese Wahrheit kann nicht monologisch erlangt werden, „sondern an den Prozeß des Gesprächs“. Somit ist das Ziel des sokratischen Paradigmas das Erwerben der Wahrheit, deren Kriterium Konsens der Gesprächsteilnehmern ist.[19] Dass man als Gesprächsziel einen *Konsens* anstrebt, ist eine der von Heckmann vorgenommenen Änderungen sowohl in der Theorie als auch in der Praxis der sokratischen Methode. An keiner Stelle hat Nelson das Erreichen eines *Konsenses* als Voraussetzung oder Ziel der sokratischen Methode herausgestellt.

8) *Die Gesprächsgemeinschaft*: Laut Raupach-Strey bildet nur „die Kommunikations-Gemeinschaft [...], die sich ernsthaft argumentativ um Wahrheit“[20] bemüht, das Erkenntnissubjekt in einem sokratischen Gespräch. In der Erklärung dieses Elementes bezieht sie sich stark auf Diskurstheoretiker und führt aus, dass „das einzelne, isolierte und sprachlose – oder nur in einsamem Monolog mit sich selber sprechende – Subjekt“[21] keine Stellung in dem Paradigma des sokratischen Gesprächs hat, sondern dass Erkenntnis nur gemeinsam und „durch die kontrafaktische Unterstellung der idealen Sprechsituation (Habermas 1971, S. 137), der freilich die faktische, verzerrende Realitätsbedingungen unterliegende Sprechsituation immer erst anzunähern ist“,[22] stattfindet. Raupach-Strey folgert daraus, dass somit ein Erkenntnissubjekt unter Einbeziehung von (Kuhlmann 1987) mit folgenden Eigenschaften aufgefasst wird: autonom, frei, wahrheitsfähig, sozial, geschichtlich, bedingt und endlich.[23] Sie weist darauf hin, dass Nelson in seiner Konzipierung der Methode dieses Element nicht im Blick hatte und Heckmanndieses nicht begrifflich, sondern n ur implizit durch Annahme des siebten Elements berücksichtigte.

9) *Das Menschenbild*: „Innere Vorgänge und das Binnenverhältnis des Subjekts zu seinen Äußerungen“ sind laut Raupach-Strey eine wichtige Grundlage für das

[18]Vgl. ebd. S. 121ff
[19]Vgl. ebd. S. 124ff
[20]Ebd. S. 129
[21]Ebd.
[22]Ebd.
[23]Vgl. ebd. S. 129

sokratische Paradigma. Sie nennt Zweifel als ein Beispiel für innere Vorgänge und Wahrhaftigkeit, innere Zustimmung sowie Freude an der Erkenntnis als Beispiele für das innere Verhältnis des Subjekts zu seinen Äußerungen. Darum geht ein sokratisches Gespräch „in mehrfacher Hinsicht über einen Diskurs hinaus“[24] und in diesem „wird der Mensch als ein geschichtlich gewordenes Subjekt mit einem letztlich unverfügbaren und zu achtenden Persönlichkeitskern betrachtet“[25].

Drei der eben genannten *konstitutive Elemente*, sind erstens von Nelson explizit in seinem Vortrag genannt worden und bilden zweitens den epistemologischen Grund für nelsonische sokratische Methode:

1. Der Grundsatz des Selbstvertrauen der Vernunft
2. Der Anti-Dogmatismus
3. Das Begründungskonzept

Im Folgendem werden ich sie detailliert darstellen.

3 Der Anti-Dogmatismus

Um den *Anti-Dogmatismus* als einen Hauptaspekt der nelsonschen Pädagogik zu untersuchen, beziehe ich zunächst erneut auf seinen Vortrag „die sokratische Methode“. Die Punkte, die für diesen Aspekt der sokratischen Methode relevant sind, werden herausgearbeitet und dann mittels bereits thematisierten erkenntnistheoretischer Erklärungen im Detail analysiert.

Wie bereits erwähnt, benutzt Nelson den Begriff *Anti-Dogmatismus* in seinem Vortrag nicht. Ich übernehme ihn von Gisela Raupach-Streys Darlegung der sokratischen Didaktik, in der sie ihn verwendet, um das zu bezeichnen, was Nelson „das erste Geheimnis der sokratischen Methode“ nennt[26]. Um diesen Aspekt der pädagogischen Methode Nelsons vorzustellen, möchte ich zunächst einen weiteren Blick auf die Beschreibung des philosophischen Unterrichts werfen, die er in dem Vortrag gegeben hat:

> „Wer im Ernst philosophische Einsicht vermitteln will, kann nur die Kunst des Philosophierens lehren wollen. [...] Soll es also überhaupt so etwas wie philosophischen Unterricht geben, so kann es nur Unterricht

[24] Ebd. S. 131
[25] Ebd.
[26] Vgl. Nelson 2002, S. 40.

> im Selbstdenken sein, genauer: in der selbstständigen Handhabung der Kunst des Abstrahierens.“[27]

Daher ist das, was der Philosophie-Lehrer seine Schüler lehren muss oder, wie NELSON sagt, was er von ihnen erzwingen muss, „selbst zu denken“. Dieser „Zwang zum Selbstdenken“ oder die Abschaffung des *Dogmatismus* beinhaltet zwei Aspekte. Der erste ist, dass die Schüler ihre unbegründete Dogmen aufgeben müssen. Gerade dies sei der Anlass seine Methode nach SOKRATES zu benennen:

> „Ein [SOKRATES] allgemein zugestandener Erfolg besteht zunächst darin, daß er durch seine Fragen die Schüler zum Eingeständnis ihrer Unwissenheit bringt und damit dem Dogmatismus bei ihnen die Wurzel durchschneidet.“[28]

Da NELSON selbst an keiner Stelle eine Erklärung des Dogmatismus gibt, werde ich mich auf KANTs Beschreibung beziehen, die NELSON mit großer Sicherheit kannte. Laut WOLFGANG NIEKE hat KANT „die erste Theorie der Erklärung des Ursprungs und Überwindung des Dogmatismus“ geliefert[29]. Nach KANT sei der Dogmatismus ein Verfahren, „das ohne Kritik des Verstandesvermögens auszukommen sucht“. Im Anschluss daran legt NIEKE dar, dass der „Dogmatismus der Metaphysik [...] das Vorurteil [sei], in ihr ohne Kritik der reinen Vernunft fortzukommen“[30]. Weiter, angelehnt an KANT, sagt er:

> „Dogmatismus ist eine Philosophie ohne vorhergehende Erkenntnistheorie.“[31]

Basierend auf dieser Beschreibung vermeidet derjenige den Dogmatismus, der seine Vorurteile überwindet und der beim Fällen eines Urteils auch gleichzeitig dessen Grundlagen kritisiert.

NELSON glaubt zwar, dass auch ein Vortrag zum „Selbstdenken“ führen kann,jedoch sei dies nicht garantiert:

> „Anregung zum Selbstdenken kann, zumal bei reiferen Schülern, auch vom Vortrag ausgehen. Aber zu welcher Anlockung auch solche Anregung sich steigern mag, unwiderstehlich ist sie nicht.“[32]

[27] Nelson 2002, S. 34f.
[28] Nelson 2002, S. 39.
[29] Vgl. Nieke 1972, Sp. 277
[30] *KrV*, B XXX.
[31] Nieke 1972, Sp. 277.
[32] Nelson 2002, S. 39.

Den einzigen Weg, die Schüler zum „Selbstdenken“ zu animieren sieht NELSON, in einer direkten und praktischen Aufforderung hierzu. Er zählt vier Faktoren auf, die er als notwendig erachtet (vgl. Nelson 2002, S. 39): *erstens*, dass der Unterricht in Form eines Gesprächs erfolgt, *zweitens*, dass die Schüler „sich aussprechen“ können, *drittens*, „sich auf jede Querfrage einlassen“ und *viertens*, dass sie „über die Gründe jeder Behauptung Rechenschaft abzulegen“ haben.

Der andere Aspekt, den er zur Überwindung des Dogmatismus darstellt, ist, dass der Lehrer sich zu dem besprochenen Thema nicht in belehrender Weise äußert:

> „Die Entwicklung unseres Problems hat uns die tiefere Beziehung enthüllt, die besteht zwischen der kritischen Philosophie und der sokratischen Methode, so dass wir daraufhin das Wesen der sokratischen Methode geradezu bestimmt haben als die Ausschaltung des Dogmatismus im Unterricht, und das heißt hier: als den Verzicht auf jedes belehrende Urteil überhaupt.“[33]

Um diese Behauptung zu begründen, gibt NELSON eine Beschreibung des Philosophieunterrichts, die auf seinem erkenntnistheoretischen Prinzip basiert:

> „Der philosophische Unterricht löst seine Aufgabe, wenn er im Schüler die Einflüsse, die der Aufhellung der philosophischen Erkenntnis im Wege stehen, planmäßig schwächt, die ihr förderlichen planmäßig stärkt. Ohne hier die Frage zu beantworten, welche Einflüsse sonst hier in Betracht kommen, wollen wir jedenfalls das Eine festhalten: dass ein unbedingt auszuschaltender Einfluss derjenige ist, der von den Urteilen des Lehrers ausginge.“[34]

Im ersten Teil des obigen Zitats weist NELSON implizit auf das Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft hin. Insofern die unmittelbaren Erkenntnisse als dunkle Vernunftserkenntnisse in uns allen, die Schüler eingeschlossen, angelegt sind, kann der Unterricht die Bedingungen herstellen, so dass diese dunklen Erkenntnisse aufgerufen werden und in das Bewusstsein gelangen können (siehe hierzu den folgenden Abschnitt 4). Im Folgenden versuche ich, die o.g. Punkte aus dem Vortrag NELSONs detailliert zu überprüfen. Dafür werde ich, NELSON folgend, mit der Untersuchung des Dogmatismus bei SOKRATES beginnen.

[33]Nelson 2002, S. 44f.
[34]Nelson 2002, S. 45.

3.1 Der Platonische Sokratesals Initiator des Anti-Dogmatismus

Die beiden oben angeführten Aspekte des Anti-Dogmatismus hat SOKRATES laut NELSON in seinen Gesprächen mit seinen Schülern berücksichtigt: er hat sowohl versucht, die Dogmen bei seinen Schülern auszuräumen, als auch auf die Vermittlung jeglicher Dogmen zu verzichten. Dies war jedoch kein Ergebnis einer konsequenten Durchführung einer pädagogischen Methode, zu deren Einhaltung er sich verpflichtet fühlte, sondern SOKRATES war – wenn wir seine diesbezüglichen Aussagen ernst nehmen – zutiefst von seinem Nicht-Wissen überzeugt. Dies bedeutet, dass er bei sich nichts finden konnte, dessen er sich sicher war. Darüber hinaus prüfte SOKRATES diesen Fakt fortlaufend mittels Reflexion und Diskussion mit anderen. Somit konnte er sich selbst auf keine Dogmen berufen, die er seinen Schülern hätte vermitteln können. NELSON weist auf diesen Punkt in seinem Vortrag ebenfalls hin:

> „SOKRATES hat, wie jederman weiß, kein System aufgestellt. Er hat wieder und wieder sein Nicht-Wissen zugestanden. Er ist jeder Behauptung entgegengetreten mit der Aufforderung, den Grund ihrer Wahrheit zu suchen.“[35]

Unter diesen Bedingungen konnte SOKRATES die Athener mit keinem Erkenntnisinhalt in Form einer Wahrheit belehren, allerdings nicht deshalb, weil er ihre Existenz leugnete. Vielmehr war er von der Existenz der Wahrheit überzeugt[36] und forderte die Athener auf, diese zu suchen. Dies war nicht nur ein rhetorischer Aufruf, sondern SOKRATES zeigt in diesem Zusammenhang, laut NELSON, auch einen Weg, auf dem sie zur Wahrheit gelangen könnten:

> „[SOKRATES] hat, wie es in der »Apologie« heißt, seine Mitbürger »ausgefragt, geprüft und ins Gebet genommen«, nicht um ihnen lehrend eine neue Wahrheit zu vermitteln, sondern nur, um ihnen den Weg zu zeigen, auf dem sie sich finden läßt.“[37]

Für diesen Punkt liefert PLATONs Dialog *Menon* m. E. gute Belege. Hier fordert SOKRATES MENON auf, eine Definition für *Tugend* zu geben. Der Definitionsversuch erfolgt ohne weitere vorhergehende Prüfung durch MENON. Wegen dieser und nicht, weil er sich unbedingt dazu verpflichtet sah, den Dogmatismus bei MENON

[35]Nelson 2002, S. 26.
[36]Später werde ich diesen Punkt näher betrachten
[37]Ebd.

auszuräumen, hinterfragt er dessen Versuch einer Definition. Dieser Prozess wiederholt sich mehrmals, bis Menon verzweifelt das bekannte Paradoxon aufstellt. Obwohl sich Sokrates nun mit seiner Antwort auf Dichter und göttliche Männer und Frauen bezieht, lässt er jedoch auch diese Lösung des Paradoxon nicht ungeprüft stehen. Die Szene, die die Diskussion zwischen Sokrates und Menons Sklaven schildert, hat die Funktion einer Begründung dieser erkenntnistheoretischen Aussage. Ob diese Begründung – in Nelsons Terminologie eine Deduktion – ausreichend und akzeptabel ist, ist eine weitere Frage, die an anderer Stelle untersucht werden soll. Der Hauptpunkt hier ist, dass sogar die Antwort von göttlichen Männern und Frauen nach Sokrates, der sich auch als gläubig bezeichnet, einer weiteren Prüfung bedarf. Dies kann für uns auch anzeigen, dass die Philosophie des Sokrates' nicht ein System philosophischer Ansichten als Hauptkern hat, sondern dass eher eine Methode im Mittelpunkt steht, die dazu beiträgt, die philosophischen Erkenntnisse zu klären. Daher wird das, was als geistiges Vermächtnis geblieben ist, ebenso durch diese Methode untersucht und kann bestenfalls die Funktion eines Impulses – aus der Erfahrungswelt stammend – haben und als ein Faktor zur Klärung der dunklen Erkenntnisse dienen.

4 Der Grundsatz des Selbstvertrauen der Vernunft

Hier soll gezeigt werden, dass *der Grundsatz* oder *das Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft*[38] in der Konzipierung der sokratischen Methode durch Nelson als der tiefste Grund für die Möglichkeit und Notwendigkeit seiner pädagogischen Methode dargelegt wurde. Obwohl das Prinzip eine Übernahme von Fries ist, verweist Nelson auf seine Bedeutung in der kritischen Methode –, die, wie in 5 dargestellt wird, eine andere Bezeichnung für die sokratische Methode durch Nelson ist – mittels eines Zitats von Kant, indem auf das Prinzip *implizit* hingewiesen wird:

> „Die Vernunft muß sich in allen ihren Unternehmungen der Kritik unterwerfen und kann der Freiheit derselben durch kein Verbot Abbruch tun, ohne sich selbst zu schaden und einen ihr nachteiligen Verdacht auf sich zu ziehen. Da ist nun nichts so wichtig in Ansehung des Nutzens, nichts so heilig, das sich dieser prüfenden und musternden Durchsuchung, die kein Ansehen der Person kennt, entziehen dürfte. Auf dieser

[38] Der Terminus *das Selbstvertrauen der Vernunft* wurde zuerst von J. F. Fries verwendet (vgl. König 1998, Sp. 1397. und Fries 1828, S. 54-59).

> Freiheit beruht sogar die Existenz der Vernunft, die kein diktatorisches Ansehen hat, sondern deren Ausspruch jederzeit nichts als die Einstimmung freier Bürger ist, deren jeglicher seine Bedenklichkeiten, ja sogar sein veto, ohne Zurückhalten muß äußern können.“[39]

Explizit jedoch führt Nelson in dem Vortrag „die sokratische Methode“ aus, dass das Prinzip auch von Sokrates geglaubt und in der Praxis der philosophischen Arbeit angewandt wurde:

> „Sokrates ist der erste, der, getragen von dem Vertrauen in die Kraft des menschlichen Geistes, die philosophische Wahrheit zu erkennen, mit diesem Vertrauen die Überzeugung verbindet, daß nicht Einfälle oder äußere Lehre uns diese Wahrheit erschließen, sondern daß nur planmäßiges unablässiges Nachdenken in der gleichen Richtung uns aus dem Dunkel zu ihrem Licht führt.“[40]

Erläuterung dieses Prinzips und seine Wichtigkeit für die sokratische Methode bilden einen bedeutenden Teil des o.g. Vortrags. Hier stellt er zunächst dar, dass im Gegensatz zu den mathematischen Axiomen, die Grundsätze in der Philosophie „das Dunkelste, Unsicherste und Umstrittenste“[41] sind. Daher braucht derjenige, der nach diesen Grundsätzen sucht, „das künstliche Licht der Methode“, um den Weg dahin „im metaphysischen Dunkel“ nicht zu verlieren[42]. Er fügt hinzu:

> „Unter diesen Umständen möchte man erwarten, daß das Problem der Methode bei niemanden so in dem Vordergrund des Interesses zu finden sei wie bei dem Philosophen. Doch ist zu bedenken, daß die eben angestellte Erwägung ihrerseits ja schon durch einen methodischen Gesichtspunkt bedingt ist, indem sie vor aller eigentlichen philosophischen Spekulation die Frage aufwirft nach dem Wesen der philosophischen Erkenntnis, und durch diese Vorfrage erst Licht fällt auf die den eigentlichen Inhalt der Philosophie angehenden Probleme.“[43]

Wenn man also eine (philosophische) Methode, die den Weg zur Erlangung der grundlegenden (philosophischen) Erkenntnisse zeigt, darstellen will, muss man zunächst festlegen, was unter „Erkenntnis“ verstanden werden kann.

[39] *KrV*, S. B 766f wie es in (Nelson 1973, S. 79) zitiert wurde.
[40] Nelson 2002, S. 42.
[41] Vgl. Nelson 2002, S. 30.
[42] Vgl. ebd.
[43] Nelson 2002, S. 30f.

4.1 Begründung, mittelbare und unmittelbare Erkenntnis

Um zu zeigen wie NELSON das Thema „Erkenntnis" behandelt, beginne ich mit einer grundlegende Unterscheidung, die er in diesem Zusammenhang macht. Dafür muss ich zunächst einführen, wie er „Begründung" definiert. Die Begründung einer Erkenntnis laut NELSON bedeutet

> „diese Erkenntnis hinsichtlich ihrer Gültigkeit auf eine andere zurückzuführen. Eine Erkenntnis begründen, heißt eine andere Erkenntnis angeben, die ihren Grund bildet, d.h. von der sie ihrer Gültigkeit nach abhängt."[44]

Mit Fortsetzung dieses Verfahrens, wird eine immer längere Kette von Erkenntnissen entstehen, die hinsichtlich ihrer Gültigkeit (mindestens in einer Richtung) von einander abhängig sind. Es wird aber nicht klar, wodurch sie letztendlich ihre Gültigkeit gewinnen. NELSON findet die oben angegebene Definition für Begründung nicht vollständig:

> „Wir fordern eine Begründung, wenn wir über die Gültigkeit einer Behauptung im Zweifel sind. Eine an und für sich zweifelhafte Behauptung kann nur dadurch gewiß werden, daß sich ein Grund für sie findet, in einer Erkenntnis nämlich, die an und für sich gewiß ist."[45]

Folglich ist das Begründen nur dann sinnvoll, wenn die Kette der Begründungen terminiert, wenn also Erkenntnisse existieren, die an und für sich gewiss sind. In diesem Fall ist das ultimative Ziel der Begründung einer Behauptung, die nicht an und für sich gewiss ist, sie auf die Gewissheit der Erkenntnisse, die an und für sich gewiss sind, zurückzuführen. So wird die potentiell unendliche Abhängigkeitskette abbrechen und die Definition der Begründung, nach NELSON, sinnvoll[46] werden. Die Durchführung einer Begründung ergibt somit ein Resultat, nämlich die Gewissheit der Behauptung, die zunächst nicht gewiss war. Die Behauptung, die am Ende dieses Prozesses gewiss ist, ist jetzt eine Erkenntnis. Die Grenze des Begründungsprozesses, die die an und für sich gewissen Erkenntnisse sind, bezeichnet NELSON als „unmittelbare Erkenntnisse" und die Erkenntnisse, deren Gewissheit von anderen Erkenntnissen abhängig sind, nennt er „mittelbar". Daher erfordern nur die mittelbare Erkenntnisse die Vorbedingung der Begründung.

[44]Nelson 1972 S. 48.
[45]Ebd.
[46]Ein besserer Ausdruck für diesen Sachverhalt wäre vielleicht: Begründung wird dadurch wohldefiniert.

4.2 Urteil

Nun stellt sich die Frage wie die unmittelbaren Erkenntnisse aussehen. Dafür muss der Begriff „Urteil“ erklärt werden, um den zweiten grundlegenden Unterschied NELSONs in seiner Epistemologie auch darlegen zu können:

> „Ein Urteil ist nämlich niemals an und für sich gewiß, sondern kann nur gewiß werden dadurch, daß es sich auf eine Erkenntnis gründet, die ihrerseits kein Urteil ist. Das Urteil beruht auf einer an sich willkürlichen Verbindung von Begriffen, von Vorstellungen also, die ihrerseits problematisch sind und nichts behaupten. Ein Urteil ist die Behauptung, daß einer solchen an sich willkürlichen Verbindung von Begriffen etwas wirkliches entspricht.“[47]

Der obigen Definition folgend, brachte NELSON dieses Beispiel: „Dieser Tisch ist rund“, ist ein Urteil, das auf einer willkürlichen Verbindung zwischen den Begriffen „Tisch“ und „rund“, die an und für sich nichts behaupten, basiert. Das Urteil behauptet, dass diese Begriffsverbindung einer Wirklichkeit entspricht. Für die objektive Gültigkeit dieser Verbindung benötigen wir ein „Kriterium“. Aber dies kann selbst kein Urteil sein, ansonsten muss es selbst vorausgesetzt werden oder man muss ein anderes Kriterium dafür finden. Die zuletzt genannte Bedingung führt zu einer unendlich langen Kette von Kriterien. Daher muss das Kriterium an und für sich gewiss sein und keine Begründung erfordern. In anderen Worten, das Kriterium kann nur eine unmittelbare Erkenntnis sein. Wenn wir uns eine Anschauung von dem Tisch machen können, haben wir so eine Erkenntnis erlangt. Fußend auf dieser Anschauung können wir die Gültigkeit der Behauptung beurteilen. Unsere Anschauung ist eine Erkenntnis, die an und für sich sicher ist. Es gibt keine Behauptung über eine willkürliche Begriffsverbindung in ihr und sie „ist unmittelbar assertorisch“[48]. Folglich hat dann erstens diese Erkenntnis nicht die Form eines Urteils und zweitens ist das Urteil „Der Tisch ist rund“, das auf Basis der unmittelbaren Erkenntnis begründet worden ist, daher assertorisch und eine Erkenntnis. Deshalb ist die Gültigkeit letzterer von einer unmittelbaren nicht urteilsförmigen Erkenntnis abhängig. In anderen Worten kann daraus gefolgert werden:

> „Das Urteil ist ein mittelbare Erkenntnis, setzt also eine andere Erkenntnis als seinen Grund voraus: das liegt im Begriff des Urteils. Identifiziert man jedoch Erkenntnis und Urteil, so bleibt nur übrig, den letzten Grund aller Urteile im *Gegenstande* zu suchen, und man erhält

[47] Nelson 1972 S. 49.
[48] Vgl. Nelson 1972 S. 49f.

> an Stelle der Aufgabe der Zurückführung der Urteile auf die unmittelbare Erkenntnis das Problem des Verhältnisses der Erkenntnis zum Gegenstande.“[49]

Der Fehler in der unendlichen Abhängigkeit-Kette der Begründung liegt also in der Identifizierung von „Erkenntnis und Urteil“. Daher kann jedes Urteil erst dann begründet werden, wenn diesen Fehler vermieden wird:

> „Berichtigen wir diese Mißdeutung [...], so gewinnen wir die Möglichkeit eines Verfahrens, das uns gestattet, kein Urteil ohne Begründung anzunehmen, ohne uns doch in den unmöglichen unendlichen Regreß der Begründung zu verwickeln.“[50]

Daher sind die unmittelbaren Erkenntnisse Kriterien, mittels derer Urteile begründet werden können. Sie haben als solche einige Eigenschaften:

> „*Über die Wahrheit der unmittelbaren Erkenntnis kann kein Streit sein, sondern nur darüber, welches die unmittelbare Erkenntnis sei.* Wollten wir die Wahrheit der unmittelbaren Erkenntnis bezweifeln, so müßen wir sie, sofern sie unmittelbare Erkenntnis ist, zu diesem Zweifel selbst voraussetzen. Der Zweifel an der unmittelbaren Erkenntnis führt zum Widerspruch.“[51]

Nach Nelson ist es nicht möglich die “unmittelbare Erkenntnis des Irrtums zu verdächtigen“:

> „[D]enn Irrtum ist nur Abweichung von der unmittelbaren Erkenntnis, falsche Wiederholung der unmittelbaren Erkenntnis. [...] Aller Irrtum und Zweifel gehört der Reflexion und kann die unmittelbare Erkenntnis nicht antasten. “[52]

4.3 Vernunft und Verstand

Basierend auf diesen Unterscheidungen stelle ich eine ebenso in der Epistemologie Nelsons grundsätzliche vor. Laut ihm müssen zwei Erkenntnisvermögen, nämlich die Vernunft und der Verstand, voneinander unterscheidet werden. Barbara Neisser sagt in der Beschreibung der Vernunftkritik Nelsons:

[49] Nelson 1973 S. 155.
[50] Nelson 1973 S. 155.
[51] Nelson 1970b S. 24.
[52] Nelson 1970b S. 23.

> „Er entwickelt seine Theorie der Vernunft als Fortführung der Vernunftkritik von Fries und in kritischer Auseinandersetzung mit Kants transzendentallogischer Vernunftanalyse. Nelson wirft Kant vor, den Verstand in seiner Analyse mit der Vernunft verwechselt zu haben und den vergeblichen Versuch unternommen zu haben, die Normen der Wissenschaften, der Religion, der Ethik und der Ästhetik auf die bloße Reflexion zu gründen. Von diesen Fehler hat Fries nach Nelson die Kantische Philosophie befreit."[53]

Im Anschluss daran beschreibt sie mit einem Zitat von NELSON weiter, wie er diese Erkenntnisvermögen und ihren Unterschied darstellt:

> „Er trennt den Verstand, der bloß der logischen Kombination fähig ist, scharf von der Vernunft als der Quelle der allgemeinen und notwendigen Wahrheiten. In der menschlichen Vernunft liegen die höchsten Wahrheiten auf religiösem, sittlichem und naturphilosophischem Gebiet an und für sich dunkel und dem einzelnen unbewußt. Nur in der Anwendung treten sie hervor, und nur durch Nachdenken können sie von ihrer ursprünglichen Dunkelheit befreit und zur Klarheit des Bewußtseins erhoben werden.
> Durch den Nachweis, daß der Mensch tatsächlich eine solche Vernunft besitzt, hat Fries die philosophischen Wahrheiten gegen alle dialektischen Zweifel sichergestellt."[54]

Die grundlegenden Unterscheidungen der Epistemologie NELSONs sind also einerseits zwischen *Vernunft* und *Verstand*, andererseits zwischen *Erkenntnis* und *Urteil*. Den Zusammenhang zwischen den beiden Unterscheidungen wird sichtbar, wenn man die folgende Äußerung NELSONs betrachtet:

> „Bezeichnen wir die unmittelbare Erkenntnis kurz als Vernunfterkenntnis, die mittelbare Erkenntnis durch Urteile als Reflexions- oder Verstandeserkenntnis, und entsprechen die Übereinstimmung der unmittelbaren Erkenntnis mit dem Gegenstande als *Vernunftwahrheit*, die Übereinstimmung der mittelbaren Erkenntnis mit der unmittelbaren Erkenntnis als *Verstandeswahrheit*, so können wir den gemeinschaftlichen Fehler der erkenntnistheoretischen und der dogmatischen Methode auch so bezeichnen: er beruht auf der Verwechslung der Verstandeswahrheit mit der Vernunftwahrheit."[55]

[53]Neißer 1994, S. 38f.
[54]Nelson 1975, S. 122 wie es in (Neißer 1994, S. 39) zitiert wurde.
[55]Nelson 1973 S. 156f.

Zusammenfassend kann man sagen, dass das Prinzip des Selbstvertrauen der Vernunft sich auf diese beiden Unterscheidungen bezieht. Basierend auf ihnen, beschreibt es einen Sachverhalt über das Verfahren der Begründung der Erkenntnisse. Nelson stellt diesen Sachverhalt wie folgt dar:

> „Eine Begründung der unmittelbaren Erkenntnis selbst ist nicht nur nicht möglich, sondern auch nicht erforderlich; denn der Umstand, der überhaupt erst die Frage nach einer Begründung entstehen läßt, findet bei ihr nicht statt: die unmittelbare Erkenntnis ist eine solche, die an und für sich gewiß ist, die also ihre Gewißheit nicht erst von etwas außer ihr entlehnt. Wir können diesen Sachverhalt aussprechen als den *Grundsatz des Selbstvertrauens der Vernunft* auf die Wahrheit ihrer unmittelbaren Erkenntnis. Es gilt nur, diesen Sachverhalt ins Auge zu fassen, um sich der Forderung einer Begründung der unmittelbaren Erkenntnis zu entledigen."[56]

4.4 Der Bezug Nelsons auf Platon

Eine Ähnlichkeit mit der *Anamnesis-Lehre* ist in dem o.g. Prinzip deutlich zu erkennen. In der Tat sagt Nelson sogar explizit, dass das Prinzip eine Neuformulierung der Anamnesis-Lehre ist. In dem Vortrag „Die sokratische Methode" verweist er auf die praktische Anwendung des Prinzips durch Sokrates und fügt hinzu:

> „Freilich mußte die Lehre von der Wiedererinnerung, deren Wahrheit den eigentlichen und tiefsten Grund für die Möglichkeit und Notwendigkeit der sokratischen Methode bildet, erst im Fortgang der philosophischen Erkenntnis von der Umschlingung durch die platonische Mystik befreit werden. Diese Befreiung ist nach zwei Jahrtausenden gelungen durch die Errungenschaften der kritischen Philosophen Kant und Fries, die der regressiven Methode der Abstraktion die Vollendung gaben, darüber hinaus aber die Ergebnisse der Abstraktion, die zwar als Prinzipien keines Beweises fähig sind, aber doch als Urteile noch begründungsbedürftig bleiben, durch die Methode der sogenannten *Deduktion* sicherstellen."[57]

Das Prinzip ist im Kern der Anamnesis-Lehre also identisch ist und die Pädagogik, die Sokrates übernommen hat, basierte auf einer These, die dem o.g. Prinzip

[56]Nelson 1972, S. 51.
[57]Nelson 2002, S. 42.

übereinstimmte. Das wird von NELSON explizierter mit einem Hinweis auf die Anamnesis-Lehre wie folgt dargelegt:

> „Wir wissen alle, daß hier die platonische Ideenlehre anklingt, die der geschichtliche SOKRATES selbst nicht gelehrt hat. Und doch ist in diesem Worte sokratischer Geist, der starke Geist des Selbstvertrauens der Vernunft, die Ehrfurcht vor ihrer sich selbst genügenden Kraft. Sie gibt SOKRATES die Ruhe, die nach Wahrheit Suchenden in die Irre gehen und straucheln zu lassen. Ja sie gibt ihm den Mut, sie in die Irre zu schicken, um die Überzeugungen zu erproben, um das nur übernommene Wissen von der Wahrheit zu sondern, die nur im eigenen Nachdenken langsam in uns zur Klarheit reift.“[58]

Wenn das Philosophieuniversum als etwas betrachtet wird, das zwei Welten in sich vereint, nämlich die Welt der Lehrsätze und die der Praxis, wobei in der ersten die Anamnesis-Lehre oder das Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft und in der zweiten die sokratische Methode liegen, kann für den Anti-Dogmatismus eine Stellung zwischen diesen beiden Welten angenommen werden. Einerseits besteht zwischen dem Konzept und dem Prinzip eine starke Bindung, da die Überzeugung von der Existenz unmittelbarer Erkenntnisse, die nicht in Form von Urteilen vorliegen, die Entstehung von Dogmen verhindert, die ihrerseits die Form eines Urteils haben. Dieser Punkt kann in anderen Worten wie folgt lauten: Gemäß dem Prinzip sind nur diejenigen Erkenntnisse unmittelbar, die keiner Begründung bedürfen. Nur dann kann ein Urteil eine Erkenntnis sein, wenn eine Begründung dafür gegeben und seine Gültigkeit letztendlich auf eine unmittelbare Erkenntnis zurückgeführt werden kann. Unter Berücksichtigung der oben gegebenen Beschreibungen von Dogma und Dogmatismus ist ein Dogma vor allem ein Satz. Daher kann ein Dogma keine unmittelbare Erkenntnis sein. Da die mittelbaren Erkenntnisse begründet worden sind, können sie auch keine Dogmen darstellen. Daher hat ein Dogma in einer Erkenntnistheorie, die das Prinzip berücksichtigt und es darüber hinaus als eine Erkenntnis anerkennt, keinen Platz.

In den zuletzt gemachten Ausführungen, die zur Klärung der starken Bindung zwischen dem Anti-Dogmatismus und dem Prinzip der Selbstvertrauens der Vernunft dienen sollen, hatte das Konzept Begründung auch eine zentrale Bedeutung. Das zeigt, dass der Anti-Dogmatismus andererseits mit der Methode in engem Zusammenhang steht. Diese wird in dem folgenden Abschnitt detailliert und mit Bezug zum Konzept der Begründung ausgeführt. Im Grunde beinhalten diese Ausführungen, dass die Methode den Anti-Dogmatismus voraussetzt, und deswegen bringt die Ausführung der Methode den Anti-Dogmatismus in die Praxis.

[58] Nelson 2002, S. 51.

Der Anti-Dogmatismus kann also als den grundlegenden Aspekt der sokratischen Methode bezeichnet werden, der das Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft, das den erkenntnistheoretischen Aspekt der Methode darstellt, an die Praxis heranführt.

5 Die Methodologie Nelsons

Der Terminus *Methode*[59] wurde in philosophischem Kontext zuerst von PLATON verwendet und bedeutet das Nachgehen und Verfolgen eines Ziels in einem regelgerechten Verfahren[60]. Aber die Bedeutung, so wie PLATON sie sieht, ist eine, die von Frühphilosophen wie PARMENIDES oder vorsokratischen Dichtern wie HESIOD geteilt wurde.[61] ARISTOTELES jedoch hat das Konzept als solches genauer untersucht und u.a. mit Bezug auf die philosophische Arbeit des SOKRATES, insbesondere dessen beide Methoden, nämlich erstens die Definition (Begriffsbestimmung) und zweitens die die Induktion, beschrieben[62]. In der Geschichte der Philosophie haben viele sich mit der Konzeption der Methode auseinandergesetzt. Besonders RENÉ DESCARTES (1596-1650) hat seinen Schwerpunkt wie ARISTOTELES auf die Methodenlehre gesetzt und diesen Bereich der Erkenntnistheorie facettenreich auseinandergelegt. Das Verfahren des Findens, Untersuchens und Beschreibens der Methode spielt bis heute eine grundsätzliche Rolle in der Philosophie. Am Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts hat NELSON die Konzeptualisierung und kritische Reflexion einer Methode und die Einbettung dieser in eine pädagogische Methode zum Kern seiner Untersuchungen gemacht.

NELSON betrachtet jede Wissenschaft als ein logisches System, dessen Grundsätze sein Fundament bilden[63]. Folglich ist das Ziel jeder Wissenschaft, jede ihrer Aussagen auf ihre Grundsätze zurückzuführen und sie somit zu begründen. Ihr Beweis erfolgt so, dass man, ausgehend von den Grundsätzen, mit Hilfe logischer Regeln zu den Aussagen kommt. Der schwierige Teil der wissenschaftlichen Arbeit ist der, in dem man nach Grundsätzen der Wissenschaft sucht, d.h., von speziellen Fällen zu allgemeinen Regeln gelangt und sich der Gültigkeit der allgemeinen Regeln vergewissert[64]. In der Mathematik sind allerdings die Grundsätze laut NELSON „anschaulich klar und dadurch völlig einleuchtend“, in der Philosophie dagegen „das Dunkelste, Unsicherste und Umstrittenste“. Damit begründet er, dass erstens „das

[59] μέθοδος, zusammengesetzt aus μετά (hinter, nach) und ὁδός (Weg).
[60] Vgl. Ritter 1980, Sp. 1304f.
[61] Ebd.
[62] Vgl. Hager 1980, Sp. 1305f.
[63] Vgl. Nelson 2002, S. 29.
[64] Vgl. ebd.

Problem der Methode“ als das wichtigste Anliegen der Philosophen gesehen werden muss, das zweitens eine andere Frage voraussetzt, nämlich „die Frage [...] nach dem Wesen der philosophischen Erkenntnis“[65]. In dem vorigen Abschnitt wurde schon erwähnt, dass NELSON die Erkenntnisse in die *mittelbaren* und *unmittelbaren* aufteilt. Laut ihm gibt es nun zwei Arten von unmittelbaren Erkenntnissen:

- „die Anschauung (die empirische Anschauung als Grund für empirische Urteile, die mathematische (reine) Anschauung als Grund für mathematische Urteile)“,
- „die nicht-anschauliche, unmittelbare Erkenntnis der reinen Vernunft als Grund für metaphysische Urteile.“[66]

Die Grundsätze können durch *Aufweisung* unmittelbarer Erkenntnisse begründet werden. Dies kann in zweierlei Weise erfolgen:

- Demonstrationen, die in den empirischen und mathematischen Wissenschaften benutzt werden und in denen (empirische oder mathematische) Anschauungen aufgezeigt werden, die als Grund für die Grundsätze gelten.
- Deduktion, die die Grundsätze der Metaphysik begründet[67].

Dazu führt NELSON aus:

> „Die nur deducierbaren Urteile aber haben ihren Grund nicht, wie die demonstrierbaren, in der Anschauung; d.h. die ihnen zugrunde liegende unmittelbare Erkenntnis kommt uns nicht unmittelbar, sondern *nur* durch Vermittelung der Reflexion, *nur* durch das Urteil zum Bewußtsein.“[68]

Die meisten Beispiele, die NELSON zur Beschreibung seiner Methodologie verwendet, sind aus der Mathematik. Wie jedoch PECKHAUS darlegt, ist er zudem der Meinung, dass „das Geschäft der Deduktion und damit der Anwendungsbereich des Kritizismus [...] sich nicht nur auf die Metaphysik“[69] beschränkt und dass in der Mathematik auch synthetische Urteile a priori vorkommen. Diese Meinung NELSONs sowie die Eigenschaften, die er der Mathematik zuschreibt (siehe 6), sind die Gründe dafür, dass für die Mathematik ein größeres Spektrum der Methoden

[65] Vgl. Nelson 2002, S. 29ff.
[66] Peckhaus 1990 S. 157.
[67] Vgl. Peckhaus 1990 S. 157.
[68] Nelson 1970b S. 22f, wie es in (Peckhaus 1990) S. 158 zitiert wurde.
[69] Peckhaus 1990, S. 158.

anwendbar sind. *Demonstration* wird beispielsweise zur Begründung der geometrischen Grundsätze verwendet, während sie keinen Grundsatz der Metaphysik begründen kann. NELSON fordert,

> „daß, das Gebiet des Deducierbaren in unserer Erkenntnis auch mit der Philosophie nicht abgeschlossen ist. Es muß – außer der die Evidenz schon mit sich führenden und darum dem Interesse des Mathematikers allein genügenden Begründung durch Demonstration – auch eine *kritische Deduktion der Axiome der Mathematik*, ihrem ganzen Umfange nach, möglich sein. Diese Übertragung der Kritik auf Axiomsysteme der Mathematik konstituiert eine eigen wissenschaftliche Disciplin: die Philosophie der Mathematik oder, nach besserer Bezeichnung, die *Kritische Mathematik*.“.[70]

Die Axiome müssen jedoch zunächst herausgefunden werden. Dies ist Laut NELSON auf zwei Wegen möglich[71]:

1. durch *Abstraktion* aus der Erfahrung. In seinem Vortrag „Des fondements de la géométrie“ gibt er ein Beispiel dafür, wie Axiome der Geometrie durch die *Abstraktion* aus der Erfahrung gefunden werden:

> Um zu den Prinzipien der Kongruenz zu gelangen, idealisiert der Mathematiker die beobachteten Körper. Indem er von den Formveränderung abstrahiert, die sie bei der Veränderung ihrer Lage unter dem Einfluß äußerer Umstände erleiden, gelangt er zu der Vorstellung, daß die Form unabhängig von der Lage ist.[72]

2. mittels *axiomatischer Methode*. Hier bezieht er sich direkt auf HILBERTS Überlegungen in den „Grundlagen der Geometrie“[73]. Ausgangspunkt bei der Anwendung dieser Methode ist, im Gegensatz zu dem ersten Punkt, ein mathematischer Satz. Durch Zergliederung des Satzes sucht man nach den in ihm ‚versteckten‘Axiomen. Die Axiome müssen voneinander unabhängig und möglichst wenige sein.

Beide stellen Formen der *regressiven Methode der Abstraktion* dar. Sie setzt allerdings den *Grundsatz des Selbstvertrauens der Vernunft* voraus. NELSON sieht die Existenz der unmittelbaren Erkenntnisse als notwendige Grundlage für die Möglichkeit einer *Abstraktion*, oder wie er selbst sagt, einer *Idealisierung* an:

---

[70] Nelson 1970b, S. 37, wie es in (Peckhaus 1990) S. 158 zitiert wurde.
[71] Vgl. Nelson 1959b.
[72] Nelson 1970a, S. 174.
[73] Vgl. Peckhaus 1990, S. 160f u. Nelson 1959b, S. 96ff.

> „In der Tat setzt jede Idealisierung ein Ideal voraus, das die Art des Vorgehens regelt. Ohne das Ideal würde der Idealisierung die Norm fehlen, und sie wäre willkürlich. Wäre sie aber willkürlich, so könnte sie keinen Anspruch auf strenge Genauigkeit und Allgemeingültigkeit erheben. Denn wir hätten keine Gewähr, daß, wenn wir uns einmal auf die Idealisierung eingelassen haben, diese unbegrenzt im Einklang mit unseren immer genauer werdenden Beobachtungen bleiben würde. Sie wäre vielmehr ihrerseits einer ständigen Berichtigung unterworfen. Die Idealisierung setzt also eine Erkenntnis voraus, die sowohl von unseren Beobachtungen als auch von unserem Willen unabhängig ist. In Wahrheit geht man bei der Idealisierung der Beobachtung durch die Axiome nur von der sinnlichen zur reinen Anschauung über, das heißt, man abstrahiert von den zufälligen Gegebenheiten und der Ungenauigkeit der Sinne.“[74]

In dem folgenden Abschnitt betrachte ich die im obigen Zitat angedeuteten Punkte näher.

6 Nelsons Blick auf die Mathematik

Nelsons Philosophie der Mathematik ist von zwei Faktoren beeinflusst: einerseits von der Philosophie der Mathematik Platons, Kants und Fries’ und andererseits von der mathematischen Praxis David Hilberts und seines Kreises. Nelson hat mittels der friesschen Lehre seine Theorien bezüglich der Mathematik dargestellt, jedoch ist er an manchen Stellen von der neukantischen Linie abgewichen und hat sich explizit von Fries’ Theorien, speziell in Bezug auf die Arithmetik, distanziert. Diese Einsichten Nelsons beruhen auf der engen Kooperation mit Hilbert und seinem Kreis und folglich seiner Kenntnis der damals aktuellen Mathematik. Einen Beleg dafür findet man in seiner Autologie-Heterologie-Antinomie, die er mit Kurt Grelling (1886-1942) vorgestellt hat. Diese Antinomie, die ein semantisches selbstbezügliches Paradoxon ist, ist eng an das Russellschen Paradoxon in der Mengenlehre angelehnt. Ein weiterer Beleg ist darin zu sehen, dass er im Wintersemester 1920/11 „Übungen über Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften“ durchgeführt hat, in denen er ausführlich die Grundlegung der Arithmetik von Richard Dedekind (1831–1916) und Ernst Zermelo (1871-1953) philosophisch untersucht hat. Diese Tatsache zeigt auch die Bedeutung seiner Philosophie der Mathematik im Kontext der Geschichte der Mathematik.

[74] Nelson 1970a, S. 173f.

Die Philosophie der Mathematik wurde von NELSON *Kritische Mathematik* genannt (s.o. vgl. auch Peckhaus 1990 S. 158ff und Herrmann 2004 S. 195ff). NELSON hat im Jahre 1904 die „Neue FRIES'sche Schule“ gegründet, in der die friessche anthropologische Vernunftkritik untersucht und auf ihrer Basis die Grundlagen der Mathematik bearbeitet wurden. Einer, der NELSON bei der Gründung der Schule begleitet hat, war GERHARD HESSENBERG. Letzterer war vor NELSONs Abiturprüfung dessen Privatlehrer im Fach Mathematik in Berlin. Die philosophischen Ideen NELSONs, die er von FRIES entnommen und mit HESSENBERG im Kontext der Mathematik diskutiert hatte, führten dazu, dass HESSENBERG ihm HILBERTs Arbeit zu den Grundlagen der Geometrie vorstellte[75]. Später haben diese beiden mit Bezug auf die neue friessche Schule philosophische Forschungen zu den Grundlagen der Mathematik durchgeführt[76].

Die grundlegende These in der Mathematikphilosophie NELSONs ist, dass er die Aufteilung der Erkenntnisse in empirische und logische unvollständig und die mathematischen (insbesondere die geometrischen) Erkenntnisse synthetisch nennt. Diese Ansicht NELSONs ergibt sich aus der Unterscheidung, die KANT zwischen *analytischen* und *synthetischen* Urteilen vorgenommen hat. Diese Unterscheidung hat laut NELSON eine Folge in KANTs Mathematikphilosophie:

> „KANTs Philosophie der Mathematik läßt sich in den einen Satz zusammenfassen: Die mathematischen Axiomen sind synthetische Urteile a priori. Darin liegen die beiden Behauptungen: 1) die Axiome sind nicht logische Usprungs, 2) sie gelten unabhängig von aller Erfahrung. Aus der ersten Behauptung folgert KANT ihren Ursprung aus der Anschauung, aus der zweiten schließt er auf den nicht-empirischen Charakter dieser Anschauung.“[77]

Diese Theorie KANTs, die die mathematischen Axiome auf reiner Anschauung beruhen lässt, wird von NELSON übernommen und in den beiden zuletzt referierten Aussagen reflektiert. Dort hat NELSON aber auch den Prozess beschrieben, wie die reine Anschauung erlangt werden kann. Er hat in diesen Zitaten klar zwischen Axiomen (als Urteile) und reinen Anschauungen (als unmittelbare Erkenntnisse) unterschieden. Dieser Prozess, den er „Idealisierung“ oder „Abstraktion“ nennt, hat als Ergebnis eine unmittelbare Erkenntnis, die nicht mehr dunkel ist. Die Abstraktion reiner Anschauungen aus empirischen Anschauungen ist jedoch laut NELSON nur ein Teil des Aufklärungsprozesses der unmittelbaren Erkenntnisse. Sie müssen nämlich noch reflektiert werden, damit sie jeweils in Form eines Axioms,

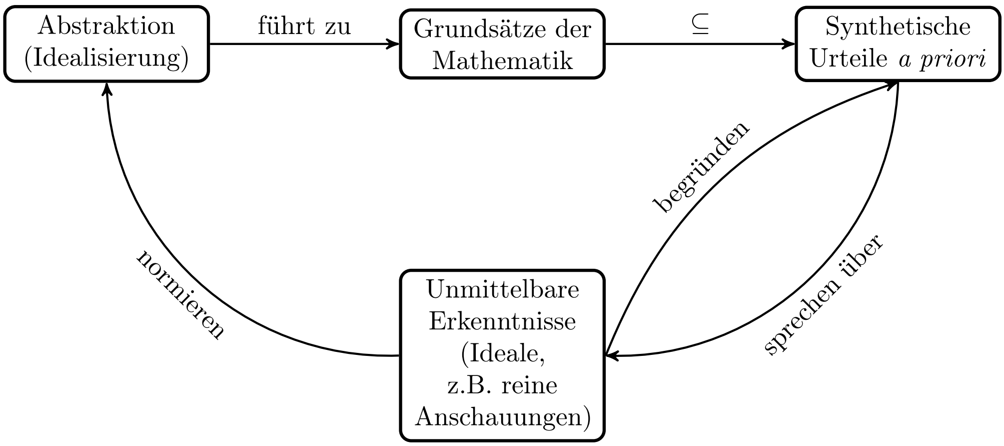
[75] Vgl. Peckhaus 1990, S. 124f u. S.131ff.
[76] Vgl. Peckhaus 1990 S. 158ff u. Herrmann 2004, S. 195.
[77] Nelson 1959a, S. 19.

also eines speziellen Urteils, in unser Bewusstsein gelangen. Daher umfasst der Prozess der Aufklärung von mathematischen unmittelbaren Erkenntnissen – oder der der reinen Anschauungen – sowohl das Verfahren der *Idealisierung* als auch der *Reflexion*. Bisher wurde die Existenz dieser Erkenntnisse noch nicht angesprochen. NELSON setzt aber ihre Existenz voraus. Er unterstreicht die Notwendigkeit ihrer Existenz, d.h. die der Ideale, für den Prozess der Idealisierung. Somit ist eine Norm gegeben, mit deren Hilfe laut NELSON der Idealisierungsprozess bewertet werden kann. Diese Forderung setzt aber voraus, dass dieser Idealisierungsprozess einer Kontrolle wie auch einer Bewertung unterzogen werden kann, um sein Ergebnis mit dem angestrebten Ideal in irgendeiner Art zu vergleichen.

Diese Tatsache ist nach NELSONs Meinung der grundlegende Unterschied zwischen *Idealisierung* und *Induktion*. Zwar werden für beide Prozesse Prüfung und Kontrolle gefordert. Für einen davon ist jedoch das Ideal, die unmittelbare Erkenntnis, das Kriterium; für den anderen ist das Kriterium weitere Beobachtungen, deren Ergebnisse willkürlich und nicht notwendig sind. Er fordert von dem ersten Prozess „strenge Genauigkeit", und es scheint, dass diese hohe Erwartung nur durch ein solch starkes Kriterium erfüllbar ist. Durch die bloße wiederholte Beobachtung der Phänomene kann man wegen ihrer Willkürlichkeit keineswegs zu einem solchen Ziel gelangen. Wie Nelson selbst sagt, setzt daher „die Idealisierung [...] eine Erkenntnis voraus, die sowohl von unseren Beobachtungen als auch von unserem Willen unabhängig ist"[78]. Diese Erkenntnis ist „eine nicht-empirische Vorstellung von etwas [...], dem als Grenze die Idealisierung zustrebt"[79]. Dass ARISTOTELES SOKRATES als den Erfinder der induktiven Methode dargestellt hat, ist nach NELSON ein Fehler. Er betrachtet die Methode, die SOKRATES in den meisten Dialogen PLATONs angewendet hat, als die eben erwähnte Idealisierung. Er rechtfertigt dies in der Weise, dass SOKRATES keinen besonderen Wert auf Naturwissenschaften legte[80].

Die o.g. Idealisierung erfolgt nicht mittels Begriffen. NELSON schließt das daraus, dass das, von dem wir eine Vorstellung erlangen, anschaulich, nicht aber begrifflich, aufgefasst wird. Nach NELSON heißt das, dass der Idealisierungsprozess nichts anderes als ein „Übergang" von der sinnlichen zur reinen Anschauung darstellt. Somit wird bei der Idealisierung von willkürlichen Aspekten der Beobachtungen und Ungenauigkeiten der Sinne abstrahiert, um eine Annäherung an eine anschauliche Erkenntnis, die „strenge Genauigkeit und Allgemeingültigkeit" besitzt, zu realisieren. Wegen dieser Eigenschaften nennt man die zuletzt genannten anschaulichen

[78]Nelson 1970a, S. 173f.
[79]Nelson 2004, S. 50.
[80]Vgl. Nelson 1972, S. 28f.



Erkenntnisse reine Anschauungen. Dabei bedeutet „rein" in diesem Zusammenhang, dass die Anschauungen nicht empirisch sind. Das heißt jedoch nicht, dass diese nicht-empirischen anschaulichen Erkenntnisse logisch sind. Anhand eines Beispiels erklärt Nelson diese Behauptung und damit beschreibt er auch den Prozess der *Idealisierung*:

> „Wenn nun die reine Anschauung räumlicher Gebilde verschieden ist von einer empirischen Anschauung, so darf sie andererseits nicht mit einem Denkakt gleichgesetzt werden. Wenn wir etwa finden, dass eine gespannte Schnur einem Stück einer geraden Linie sehr ähnlich ist, so gelangen wir zu dieser Erkenntnis nicht dadurch, dass wir in Gedanken die verschiedenen geometrischen Axiome durchgehen und prüfen, ob sie mit größerer Annäherung für die Schnur gelten, sondern wir fassen die Ähnlichkeit mit einem Mal auf. Indem wir die Schnur empirisch wahrnehmen, stellt sie sich uns unmittelbar als etwas dar, dessen Idealisierung eine Gerade ergibt. Dies ist aber nur dadurch möglich, dass wir eine anschauliche Vorstellung von der Gestalt einer gradlinigen Strecke besitzen."[81].

Das oben erwähnte Verfahren der Idealisierung soll den Kern der sokratischen Methode im Kontext der Mathematik bilden. Der nächste Abschnitt wird diese These darlegen.

[81] Nelson 2004, S. 51.

7 Die Sokratische Methode als pädagogisches Konzept – Ein Ausblick

In dem Vortrag „Die sokratische Methode“ hat NELSON den

> „[...] Zustand, in dem der Mensch sich nicht durch äußere Einwirkungen bestimmen läßt, vielmehr aus eigener Einsicht urteilt und handelt“.[82]

als Ziel der Erziehung, und somit als Ziel der Anwendung der sokratischen Methode dargestellt. Daher ist die Frage, die hier zu betrachten ist, die, wovon Einsicht zu gewinnen ist – d.h. auf der Basis welchen *Gegenstandes* im übertragenen Sinne – und wie diese erfolgt. Um die Arbeitsweise in einem Philosophieunterricht zu bestimmen, stellt NELSON folgende Erklärungen dar, in denen die Antwort auf die obige Frage enthalten ist:

> „Wir haben gefunden, daß die Philosophie der Inbegriff jener allgemeinen Vernunftwahrheiten ist, die nur durch Denken klar werden. Philosophieren ist demnach nichts anderes, als mit Hilfe des Verstandes jene abstrakten Vernunftwahrheiten zu isolieren und in allgemeinen Urteilen auszusprechen.
> Was folgt daraus für den philosophischen Unterricht?
> Jene allgemeinen Wahrheiten lassen sich, sofern sie in Worten ausgesprochen werden, zu Gehör bringen. Aber sie werden darum keineswegs eingesehen. Einsehen kann sie nur derjenige, der von ihrer Anwendung ausgeht in Urteilen, die er selbst fällt, und der dann, indem er selbst den Rückgang zu den Voraussetzungen dieser Erfahrungsurteile vollzieht, in ihnen seine eigenen Voraussetzungen wiedererkennt.“[83]

„Die allgemeinen philosophischen Wahrheiten“ sind allerdings laut NELSON nicht die Einzigen, die *eingesehen* werden können. Im Folgenden gibt er andere Beispiele von Einsehbarem und Nicht-Einsehbarem:

> „Man kann daher nicht Philosophie, den Inbegriff dieser philosophischen Prinzipien, unterrichtend vermitteln, wie man etwa geschichtliche Tatsachen vermitteln kann, ja wie sich selbst geometrische Grundsätze vermitteln lassen. Tatsachen der Geschichte können als solche überhaupt nicht eingesehen werden. Sie können nur zur Kenntnis genommen werden.
> Und die Grundsätze der *Mathematik* lassen sich freilich einsehen, aber

[82] Nelson 2002, S. 44.
[83] Nelson 2002, S. 33f.

> ihre Einsicht bedarf nicht des Umweges über den eigenen erfinderischen Gedankengang. Sie sind unmittelbar klar, sobald nur überhaupt die Aufmerksamkeit auf ihren Inhalt gerichtet wird.“[84]

An einer anderen Stelle des Vortrages verweist jedoch Nelson auf die Tatsache, dass die mathematischen Grundsätze nicht für alle gleichermaßen einsehbar sind. Das zeigt er mittels einiger Beispielen aus dem pädagogischen und geschichtlichen Kontext.[85] Damit rechtfertigt er die Notwendigkeit der sokratischen Methode auch im mathematischen Unterricht. Wenn man also mit Sicherheit zur Einsicht der mathematischen Erkenntnisse gelangen möchte, müsste man, laut Nelson, die bereits beschriebenen wissenschaftlichen Methoden (s. 5) in der Mathematik anwenden. Diese regressiven Methoden, die unter die sokratische Methode subsumiert werden, lassen sich in diesem Kontext, wie folgt, konkretisieren:

1. *die regressive Methode der Abstraktion*, mittels derer man zu den Axiomen, die in dem anfänglichen Urteil oder mathematischen Satz enthalten sind, gelangt.
2. *die Deduktion* der mathematischen Prinzipien, um diese abzusichern. Zu diesem Punkt kann eine Bedingung hinzugefügt werden, nämlich die, dass die Deduktion dann notwendig ist, wenn die mathematischen Prinzipien nicht einsehbar oder anschaulich wären[86].

Ich beende diesen Beitrag mit einem Zitat von Nelson, indem er die Bedeutung der Mathematik für die sokratische Methode erläutert:

> Bei der hilflosen Lage, in der sich die Sache der sokratischen Methode befindet, kann die Hilfe nur kommen von einer Wissenschaft her, die jene Vorzüge vereinigt, von denen ich gesprochen habe, und die in der Tat nur der Mathematik zukommen, Vorzüge, die ihr einen Vorsprung sichern, den die Philosophie aus eigener Kraft nie einholen wird.[87]

[84] Nelson 2002, S. 34.
[85] Vgl. Nelson 2002, S. 67ff.
[86] Vgl. Nelson 2002, S. 42.
[87] Nelson 2002, S. 71.

Literatur

Fries, Jakob Friedrich. 1828. *Neue oder anthropologische Kritik der Vernunft.* Bd. 1. Heidelberg: Christian Friedrich Winter.

Habermas, Jürgen. 1971. Vorbereitende Bemerkungen zu einer Theorie der kommunikativen Kompetenz. In *Therie der Gesellschaft oder Sozialtechnologie - Was leistet die Systemforschung?*, hrsg. von Jürgen Habermas, 101–141. Frankfurt a. M.

Hager, Fritz-Peter. 1980. Methode. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, hrsg. von Joachim Ritter, Bd. 5, Sp. 1305–1307. Basel: Schwabe Verlag.

Heckmann, Gustav. 1993. *Das sokratische Gespräch. Erfahrungen in philosophischen Hochschulseminaren.* Frankfurt ma Main.

Herrmann, Kay. 2004. Nachbetrachtungen zu Nelsons Naturphilosophie (1923). In *Leonard Nelson Kritische Naturphilosophie, Mitschriften aus dem Nachlass*, hrsg. von Jörg Schroth, 179–210. Heidelberg: Winter.

König, Gert. 1998. Transzendental; das Transzendentale; Transzendentalien; Transzendentalphilosophie. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, hrsg. von Joachim Ritter, Bd. 10, Sp. 1358–1433. Basel: Schwabe Verlag.

Kuhlmann, Wolfgang. 1987. Tod des Subjekts? In *Tod des Subjekts?*, hrsg. von Herta Nagel-Docekal, 120–163. Wien/München.

Loska, Rainer. 1995. *Lehren ohne Belehrung. Leonard Nelsons neosokratische Methode der Gesprächsführung.* Bad Heilbrunn.

Neißer, Barbara. 1994. Leonard Nelsons Theorie der Vernunft und Kritik der Vernunft. In *Leonard Nelson in der Diskussion*, hrsg. von Reinhard Kleinknecht, 38–54.

Nelson, Leonard. 1959a. Bemerkungen über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit (1905/06). In *Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik*, 7–56. Mannheim: Felix Meiner Verlag.

– . 1970a. Des fondements de la géométrie - Übersetzung des Vortrages (1914). In *Die Kritische Methode*, 3:157–186. Gesammelte Schriften. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

– . 1970b. Die kritische Methode und das Verhältnis der Psychologie zur Philosophie. Ein Kapitel aus der Methodenlehre (1904). In *Die Schule der Kritischen Philosophie und ihre Methode*, 1:9–78. Gesammelte Schriften. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

– . 2002. Die Sokratische Methode (Vortrag 1922). In *Das sokratische Gespräch*, hrsg. von Dieter Krohn Dieter Birnbacher, 21–72. Stuttgart: Philipp Reclam jun.

– . 1973. *Geschichte und Kritik der Erkenntnistheorie.* Bd. 2. Gesammelte Schriften. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

– . 1972. *Kritik der praktischen Vernunft.* Bd. 4. Gesammelte Schriften. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

– . 1959b. Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik (1927). In *Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik*, 91–125. Mannheim: Felix Meiner Verlag.

– . 2004. Übungen über Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, ausgearbeitet von Paul Bernays Wintersemester 1910/11. In *Leonard Nelson Kritische Naturphilosophie, Mitschriften aus dem Nachlass*, hrsg. von Jörg Schroth, 35–82. Heidelberg: Winter.

– . 1975. Vom Beruf der Philosophie für die Erneuerung des öffentlichen Lebens. In *Vom Selbstvertrauen der Vernunft*, hrsg. von Grtete Henry-Hermann. Hamburg.

Nieke, Wolfgang. 1972. Dogmatismus. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, hrsg. von Joachim Ritter, Bd. 2, Sp. 277–279. Basel: Schwabe Verlag.

Peckhaus, Volker. 1990. *Hilbertprogramm und kritische Philosophie: das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie.* Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Platon. 2011. Menon. In *Werke : in acht Bänden ; Griechisch und Deutsch*, hrsg. von Gunther Eigler, übers. von Friedrich Schleiermacher, Bd. 2. Darmstadt.

Raupach-Strey, Gisela. 2002. Das Sokratische Paradigma und seine Bezüge zur Diskurstheorie. In *Das sokratische Gespräch.* Hrsg. von Dieter Krohn, 106–139. Stuttgart: Reclam.

– . 2012. *Sokratische Didaktik: Die didaktische Bedeutung der Sokratischen Methode in der Tradition von Leonard Nelson und Gustav Heckmann.* Bd. 10. Berlin: LIT Verlag Münster.

Ritter, Joachim. 1980. Methode. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, hrsg. von Joachim Ritter, Bd. 5, Sp. 1304–1305. Basel: Schwabe Verlag.

Sfard, Anna. 2008. *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizinng (Learning in Doing: Social, Cognitive and Computational Perspectives)*. NewYork: Cambridge University Press.

Teil II

Siegener Beiträge zur Philosophie und Geschichte der Mathematik

Einige Bemerkungen Kurt Gödels zur Mengenlehre*

Merlin Carl & Eva-Maria Engelen

Zusammenfassung

Im Folgenden werden einige Bemerkungen zum Mengenbegriff aus Gödels Notizbüchern *Philosophie I Maximen 0* und *Maximen VI* diskutiert. Dabei wird gezeigt, dass Gödel mit einem philosophischen und einem logischen Mengenbegriff arbeitet, welche sich jedoch aufeinander beziehen. Gödels iterativer Mengenbegriff wird schließlich ausführlich erörtert.

1 Übersicht

Für jeden Philosophen der Mathematik und jede Mengentheoretikerin sind Kurt Gödels Überlegungen zum Mengenbegriff eine unverzichtbare erhellende Lektüre. In diesem Aufsatz werden nun einige bisher unbekannte Bemerkungen Gödels dazu vorgestellt und interpretiert. Das geschieht vor dem Hintergrund der Annahme, dass es sich bei Gödels *Maximen Philosophie* im Wesentlichen um eine *Scientia generalis* handelt wie sie auch Gottfried Wilhelm Leibniz vertreten hat. Die Bemerkungen, welche im Folgenden diskutiert werden, stammen aus Gödels Notizbüchern *Philosophie I Maximen 0* sowie *Maximen VI*.

Zunächst wird ein philosophischer Mengenbegriff Gödels vorgestellt, mit dem er nach unserer Auffassung an Kants transzendentale Kategorie eines Gegenstandes

* Die Wiedergabe der Zitate aus den Maximen Philosophie von Kurt Gödel erfolgt mit Erlaubnis der Lizenznehmer, die Rechte daran liegen beim Institute for Advanced Study, Princeton. Besonderer Dank für das Zurverfügungstellen von Materialien gilt Cheryl und John W. Dawson, Jr.

überhaupt anknüpft. Sodann wird die These vertreten, dass der Mengenbegriff als transzendentale Kategorie von Gödel in systematischer Absicht der Beschäftigung mit dem mathematischen Mengenbegriff vorangestellt wird. Schließlich wird Gödels Diskussion einer Sichtweise auf den iterativen Mengenbegriff dargelegt.

Die Beziehung zwischen einer Menge und ihren Elementen lässt sich sowohl als asymmetrische Abhängigkeitsrelation fassen wie auch außerdem ihr Zustandekommen als zeitlicher Prozess. An diesen letzten Gesichtspunkt knüpft der zweite Teil dieses Aufsatzes an. Dort werden einige Bemerkungen Gödels erörtert, in denen ein idealisierter bzw. transfiniter Konstruktivismus als Grundlage der mengentheoretischen Axiomatik thematisiert wird.

2 Gödels philosophische Bemerkungen

Die hier diskutierten Bemerkungen sind zwei Notizbüchern Gödels entnommen, die zu dem Konvolut seiner *Maximen Philosophie* gehören. Dieses Konvolut ist zwischen 1934 und 1955 entstanden und umfasste ursprünglich 16 Hefte. Ein Heft (*Max XIII*) hat Gödel verloren, sodass 15 Hefte erhalten sind. Diese Hefte waren von Gödel nicht zur Veröffentlichung vorgesehen, er hat sie jedoch selbst in eine von ihm überdachte Reihenfolge gebracht und nachweislich immer wieder damit gearbeitet.[1] Ein gewisser spielerischer, tentativer und experimentierender Charakter ist der Gattung Notizbuch und damit den in einem Notizbuch aufgeschrieben Bemerkungen allerdings stets zu eigen. Bei Notizbüchern handelt es sich nicht um systematisch argumentierende Werke, sondern um eine Sammlung archivierter Gedankensplitter. Daraus ergibt sich u. a., dass nicht alles, was in einem Notizbuch aufgeschrieben ist, umstandslos dem Schreiber als Autor des Gedankens zuzurechnen ist, oft handelt es sich um Exzerpte aus Schriften anderer, die unter Umständen sogar das Gegenteil dessen beinhalten, was der Schreibende sonst vertritt. Bei der Lektüre und Interpretation von Bemerkungen aus Gödels Notizbüchern sollte das stets präsent sein.

3 Gödels Philosophie als *Scientia generalis*

In den *Maximen Philosophie* entfaltet Gödel, so die Annahme, seine Philosophie im Wesentlichen vor dem Hintergrund einer *Scientia generalis* und dafür hat er

[1] Die Hefte werden an der Kurt-Gödel-Forschungsstelle der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften ediert und im Verlauf der kommenden Jahre in einer zweisprachigen Ausgabe (deutsch–englisch) erscheinen.

Leibniz' Entwurf einer *Scientia generalis* in wesentlichen Aspekten übernommen. Sie hat wie bei Leibniz die Funktion, der Vielheit der Einzelwissenschaften (*Specimina*) ein gemeinsames Fundament und eine gemeinsame Struktur zu bieten, indem die gemeinsamen Grundlagen der Wissenschaften (*Initia*) herausgearbeitet werden und somit die Zusammenarbeit zwischen den Disziplinen ermöglicht wird. Die *Initia* bilden die methodische Grundlage der Wissenschaften.[2] Unter die *Specimina* fallen alle Naturwissenschaften, die Mathematik sowie die wertorientierten Wissenschaften wie beispielsweise Jurisprudenz und Theologie. Zu den *Initia* gehören hingegen die *Grammatica rationalis* oder die Logik. Um die gemeinsamen Grundlagen der *Specimina* herauszustellen, wäre es eine Aufgabe innerhalb der *Scientia generalis*, einfache Begriffe, die Grundbegriffe des Denkens herauszuarbeiten. Gödel hat sich unter anderem mit diesem Aspekt der Leibnizschen Philosophie intensiv auseinandergesetzt.

Die Beschäftigung mit dem mathematischen Mengenbegriff fällt unter die Arbeit an den *Specimina*. Fällt aber die Beschäftigung mit 'Menge' als 'Gegenstand überhaupt' unter die Arbeit an den *Initia*? Die Kategorien gehen den *Initia* in gewisser Weise noch voraus, sie sind transzendental.

4 'Menge' als Idee

In der im folgenden zitierten Bemerkung aus *Philosophie I Maximen 0* wird 'Menge' von Gödel als eine primitive Idee verstanden. Die naheliegende Frage, die sich daraus ergibt, ist, ob eine primitive Idee mit einem einfachen, primitiven Begriff gleichzusetzen ist, wie wir ihn insbesondere von Gottfried Wilhelm Leibniz kennen.

> "*Bemerkung↓:*
>
> [...]
>
> 1. Beweis, dass wir die Ideen nicht sehen: [...] Es gibt unabzählbar viele einfache (undefinierbare) Ideen (wobei aber eine starke Relation besteht, so dass jede schwache aus jeder starken definierbar ist), daher müssten wir analog wie über eine gerade Linie das geistige Auge längs dieser Ideen hinführen und irgendwo fixieren können. Stattdessen wird jede Idee durch eine *Definition* festgelegt (analog wie ein Punkt auf einer Gerade durch eine Konstruktion, während es doch auch denkbar

[2] Vgl. zur *Scientia generalis* bei Leibniz insbesondere: Hans Poser, Leibniz und die theoretische, methodische und sprachliche Einheit der Wissenschaften, S. 19ff., [Po2].

> wäre, dass wir einzelne Punkte mit gewissen rationalen Verhältnissen auch durch bloßes 'Hinschauen' isolieren und ihre Verhältnisse erkennen könnten). Daher, ähnlich wie wir bei den [27] Strecken nur die Endpunkte sehen und das übrige 'konstruieren' müssen, so sehen wir unter den Ideen nur die wenigen *primitiven* ($\neg$, $\vee$, $\exists$, ε, Menge) und erreichen die übrigen durch 'Konstruktion' [nicht *Definition*, denn es werden ja beliebig 'starke' Ideen erreicht]." (*Max 0 Phil I*, Manuskriptseite 26ff, [GI])

Aus dieser Bemerkung geht hervor, dass wir die einfachen undefinierbaren Ideen nicht sehen, wohl aber die wenigen primitiven, zu denen auch die 'Menge' gehört. Was sind primitive Ideen bei Gödel? Gödel trifft eine Unterscheidung zwischen einfachen und primitiven Ideen. Auch Gottfried Wilhelm Leibniz, Gödels großes Vorbild, unterscheidet an manchen Stellen zwischen Ideen und Begriffen, oft aber auch nicht. Sind bei Gödel einfache Begriffe also im Sinne von Leibniz gemeint?

Einfache Begriffe bei Leibniz sind beispielsweise 'Existenz', 'Individuum' oder 'Ego'. Es handelt sich um undefinierbare Begriffe, die nur durch sich selbst erkannt werden. (Leibniz, "Generales inquisitiones de analysi notionum et veritatum", in: Couturat, S. 360, [Cou].) Ideen sind für Leibniz hingegen "innere Objekte" der Seele, die in dieser enthalten sind (Leibniz, NE II.1, §1, [Le]). Als Beispiele dafür findet man bei ihm die den eingeborenen Wahrheiten zugrunde liegenden Ideen der Einheit, der Gleichheit, der Ursache etc. (Leibniz, NE II.1, §2). Der Gebrauch von 'Idee' bei Leibniz ist aber nicht einheitlich, oft setzt er 'notio' und 'idea' oder sogar 'idea' und 'definitio' gleich. (Poser, "Der Begriff der Idee bei Leibniz", S. 108, [Po]) Da der Gebrauch der Begriffe von 'Idee' und 'Begriff' bei Leibniz uneinheitlich ist, ist es schwierig zu rekonstruieren, ob und wie Gödel die Differenz der beiden Begriffe bei Leibniz rezipiert hat. Ein Hinweis von Hao Wang auf Gödels Unterscheidung zwischen 'Idee' und 'Begriff' ist in dieser Sache hingegen sehr viel hilfreicher. Bei ihm heißt es:

> "Sometimes Gödel hinted at a distinction between *concepts* and *ideas* along Kantian lines. On different occasions he spoke of the concepts of *concept*, *absolute proof*, and *absolute definability* as ideas rather than concepts.
>
> 8.4.20 The general concept of *concept* is an *Idea* [in the Kantian sense]. The intensional paradoxes are related to questions about Ideas. Ideas are more fundamental than concepts. The theory of types is only natural between the first and the second level; it is not natural at higher levels. Laying foundations deep cannot be extensive.

> Once I asked Gödel about his Princeton lecture of 1946, in which he had discussed the task extending the success of defining the concept of *computability* independently of any given language to "other cases (such as *demonstrability* and *definability*". He replied:
>
> 8.4.21 Absolute demonstrability and definability are not concepts but inexhaustible [Kantian] Ideas. We can never describe an Idea in words exhaustively or completely clearly. But we also perceive it, more and more clearly. This process may be uniquely determined–ruling out branchings. The Idea of proof may be nonconstructively equivalent to the concept of set: axioms of infinity and absolute proofs are more or less the same thing.
>
> 8.4.22 Ideas cannot be used in precise inferences: they lead to the theory of types. It is a kind of defeatism to think that we have this vague idea which is the very basis of our precise idea. We understand the special concept only because we previously had the general idea. We restrict the general idea to individuals to get the concept of the first type. The general idea of concept is just generality.
>
> 8.4.23 Kant's distinction between ideas and concepts is not clear. But it is helpful in trying to define precise concepts." (Wang, *A Logical Journey*, S. 268f, [W].)

Gehen wir also dem Hinweis nach, Ideen als transzendentale Kategorien im Sinne von Immanuel Kant zu verstehen. Diese Kategorien kann man genauso wenig sehen oder anschauen wie einfache Begriffe. Ein Beispiel für eine transzendentale Kategorie bei Kant ist die des Gegenstandes überhaupt.

In unserem Zusammenhang ist dieses Beispiel maßgeblich, weil die Idee der Menge, wie sie in der zitierten Bemerkung verwendet wird, dem entsprechen könnte, was Kant 'Gegenstand überhaupt' nennt. Da Gödel, wenn es um mathematische Mengen geht, eine Menge als etwas Gegenständliches ansieht, läge bei Gödel in diesem Fall eine Analogie zwischen philosophischem Mengenbegriff und mathematischem Mengenbegriff vor.

Was ist das, ein 'Gegenstand überhaupt', und was könnte es für Gödels Philosophie bedeuten, dass er dieses Konzept verwendet? Sehen wir uns Kants Auffassung des Gegenstandes überhaupt genauer an. Ein Gegenstand muss nach Kant im Gegensatz zur unbestimmten Erscheinung erst als Gegenstand erfasst werden. Da Erscheinungen zunächst als erscheinende Gegenstände konstituiert werden müssen, bedarf es dafür "reine[r] Begriffe, die [...] den Gegenstand der Erfahrung als

Gegenstand möglich [machen], das heißt, sie konstituieren die Objektivität überhaupt und machen es somit allererst [...] möglich, daß Gegenstände" als solche wahrgenommen werden können (Salis, Die Krisis der Vernunft, S. 39f., [Sa]). Nach Kant ist "der transzendentale Gegenstand, "d. i. der gänzlich unbestimmte Gedanke von Etwas überhaupt"' [d]as Objekt, worauf ich die Erscheinung überhaupt beziehe." (Kant, *KrdrV* A 253, [Ka]).

Es gibt also Sinneseindrücke, diese müssen aber nach Kant als Sinneseindrücke von etwas, auf ein Etwas bezogen werden, um einen Gegenstand als einen solchen sehen zu können, weil wir es ansonsten nur mit mannigfaltigen Sinneseindrücken zu tun hätten, aber nichts als ein Etwas sehen könnten.

Was bedeutet das für den Mengenbegriff bei Gödel mit Bezug auf die zitierte Bemerkung? Es bedeutet u. a., dass der Begriff der Menge nicht in der Anschauung gegeben sein kann und dass er als transzendentale Kategorie eine Voraussetzung für die Wahrnehmung und das Denken ist. Mit Hilfe von Kants Begriff können wir also genauer fassen, inwiefern 'Menge' eine primitive Idee für Gödel ist. Diese Interpretation wird zudem durch eine analoge Verwendungsweise von 'gegenständlich' mit Bezug auf den mathematischen Mengenbegriff gestützt.

Wenn Gödel 'Menge' als Begriff der Logik und Mathematik verwendet, bezeichnet er etwas Gegenständliches. Mengen haben in der Mathematik für Gödel einen Objektstatus. In der Philosophie hingegen entspricht 'Menge' der kantischen Kategorie eines Gegenstandes überhaupt und hat dementsprechend keinen Objektstatus, sondern ermöglicht es erst, dass etwas einen Objektstatus haben kann. Während Gödel aber davon ausgeht, dass Mengen im mathematischen Sinn prinzipiell der Anschauung unterliegen, ist es bei der Menge im Sinne eines Gegenstandes überhaupt so, dass er der Anschauung gerade nicht unterliegt, sondern letztere erst ermöglicht, indem die Erscheinungen sich als auf einen Gegenstand bezogen auffassen lassen.

Nun führt Gödel in der oben zitierten Bemerkung aber aus, dass wir die primitiven Ideen sehen. Was kann das heißen, wenn es nicht ‚anschauen' heißen kann? Auch hier hilft ein Zitat von Kant weiter:

> "Nun enthält aber alle Erfahrung außer der Anschauung der Sinne, wodurch etwas gegeben wird, noch einen Begriff von einem Gegenstande, der in der Anschauung gegeben wird oder erscheint." (Kant, *KrdrV* A93/B125f., [Ka])

Indem wir etwas anschauen, erscheint uns zugleich der Begriff des Gegenstandes überhaupt, weil er dafür verantwortlich ist, dass wir etwas als etwas sehen und nicht nur mannigfaltige Sinneseindrücke haben. Indem wir etwas als etwas Bestimmtes wahrnehmen, wird uns der Begriff des Gegenstandes überhaupt "mitgeliefert", ohne dass wir uns auf ihn direkt wahrnehmend beziehen können.

5 Objektstatus von Mengen

Für die Mathematik oder Logik verweist Gödel immer wieder auf den ontologischen Objektstatus von Mengen. Das tut er, weil Denken etwas von außen Gegebenes benötigt, das es selbst nicht zu liefern im Stande ist. Zudem wird 'Menge' im Zusammenhang mit Mathematik und Logik nicht mit 'Sehen', aber mit 'Anschauen' in Verbindung gebracht. Dem ist so, weil das durch die mathematische Anschauung Gegebene nicht subjektiv kontingent sein darf, wenn die Mathematik objektiv gültige Theorien hervorbringen können soll. (Der iterative Mengenbegriff stellt wohl das bekannteste Beispiel bei Gödel dar, wenn es um den Versuch geht zu illustrieren, was mathematische Anschauung ist.)

Mengen (aber nicht Klassen[3]) sind für Gödel also Objekte. Dieser Objektstatus wird für ihn zusätzlich dadurch unterstrichen, dass Mengen nicht selbst-referentiell sind.[4] Mengen sind für Gödel extensionale Gebilde, die zur Mathematik gehören. Begriffe sind hingegen intensional, sie gehören zur Logik:

> "It is not in the ideas (of *set* and *concept*) themselves that every set is the extension of a concept. Sets might exist which correspond to no concepts. The proposition "for every set, there is a [defining] concept" requires a proof. But I conjecture that it is true. If so, everything (in logic and mathematics) is a concept: a set, if extensional; and a concept (only) otherwise)." (Wang, *A Logical Journey*, S. 274, [W])

Gödel geht aber nicht davon aus, dass wir Mengen auf dieselbe Weise wahrnehmen wie wir Tische, Stühle oder Bäume wahrnehmen. Was gemeint sein könnte, lässt sich am Beispiel des iterativen Mengenkonzeptes erläutern. Nach Georg Cantor ist unter einer Menge eine "Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen" zu verstehen. (Cantor, "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", S. 481, [Ca]) Diese Objekte sind die

[3] Wang, *A Logical Journey*, S. 273-274: "Sets are objects. [. . .] Classes are neither concepts nor objects. They are an analogue and a generalization of sets. The range of every concept is, by definition, a class."

[4] "Sets are quasi-physical. That is why there is no self-reference." Vgl. Wang, *A Logical Journey*, S. 270 Nr. 8.5.6, [W].

Elemente der Menge. Die Elemente einer Menge müssen allerdings, damit sie zusammengesammelt werden können, zuvor schon da sein. Das führt dazu, dass eine Menge nicht Element ihrer selbst sein kann, weil es sie nicht gibt, ehe ihre Elemente zusammengefasst worden sind. (Damit werden die mengentheoretischen, extensionalen Russellschen Paradoxien verhindert, welche entstehen, wenn eine Menge Element ihrer selbst sein kann.)

Nun kann es sich beim Sammeln der Elemente einer Menge entweder um eine asymmetrische Abhängigkeitsrelation handeln, bei der die Mengen einer späteren Stufe von denen einer früheren Stufe in ihrer Existenz abhängen, aber nicht umgekehrt;[5] oder aber es handelt sich um einen Prozess, der als ein zeitlicher zu verstehen ist, weil der Vorgang des Zusammenfassens ein zeitlicher Prozess ist. In letzterem Fall taucht die Frage auf, inwiefern dieser Prozess, auch wenn man die "Prozess-Variante" des iterativen Mengenbegriffs ins Auge fasst, objektiv zu nennen ist. Anders ausgedrückt: Inwiefern kann Gödel zugleich am iterativen Mengenbegriff festhalten und Mengen als etwas Objektives auffassen, das wahrgenommen wird? Der Vergleich zwischen der Wahrnehmung eines Objektes und der Wahrnehmung einer Menge mag helfen, die Frage zu beantworten.

Wenn wir beispielsweise einen Baum sehen, nehmen wir ihn als ein Objekt wahr, obwohl er sich zugleich als eine Zusammensetzung von Blättern, Ästen und einem Stamm auffassen lässt. In unserer Wahrnehmung bilden sie gewöhnlich einen Gegenstand, den wir als solchen sehen, noch ehe wir die einzelnen Teile, aus welchen er zusammengesetzt ist, wahrnehmen. Ähnlich verhält es sich bei Mengen. Wenn wir Mengen wahrnehmen, haben wir zumeist die Wahrnehmung von Elementen, die zu einer Einheit zusammengefasst sind. Wir nehmen die Elemente als eine Menge wahr und zwar gemäß objektiver Kriterien, die im Vorhinein festlegen, ob es eine solche Menge gibt oder nicht.

6 Die Menge als Gegenstand der Mathematik und der idealisierte Konstruktivismus

Wie wir gerade gesehen haben, verwendet Gödel den Mengenbegriff auf zwei Weisen: Einmal als eine kantische Idee oder Denkkategorie, durch die Erfahrungsgegenstände erst als solche konstitutiert werden können, andererseits als Gegenstand einer (mathematischen) Anschauung, der in der Mengenlehre untersucht wird. Das

[5] Beispielsweise betont Shoenfield, dass eine Menge z nur diejenigen Mengen als Elemente enthalten kann, die zuvor bereits gebildet wurden. Dieses 'bevor' sei allerdings logisch und nicht zeitlich zu verstehen. Vgl. Shoenfield, "Axioms of Set Theory", S. 323 und 323, Fn. 1, [S].

zweite Verständnis führt naturgemäß auf die Frage, wie diese Anschauung funktioniert, d. h. wie Mengen als Erkenntnisgegenstände zugänglich werden.

Hierfür wird eine Rekonstruktion von einigen von Gödels Bemerkungen zu diesem Thema als Überlegungen zu einer möglichen Antwort auf diese Frage vorgestellt. Sie weist grob folgende Struktur auf: Zunächst wird eine gewisse Sichtweise auf Mengen, die 'idealisierte oder extrapolierte psychische Interpretation' vorgestellt, die helfen könnte, ihre Zugänglichkeit als Erkenntnisgegenstände zu erklären und es wird beispielhaft vorgeführt, wie diese Sichtweise zur Rechtfertigung einiger Axiome der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre verwendet werden kann. Im zweiten Schritt werden die Möglichkeitsbedingungen dieser Sicht expliziert, nämlich die phänomenologische Haltbarkeit einer transfiniten Zeitachse. Zum Schluß werden diese Möglichkeitsbedingungen dann einer kritischen Prüfung unterzogen. Wir werden die fraglichen Stellen erläutern und zugleich zeigen, wie sie sich mit Positionen in den Grundlagen und der Philosophie der Mathematik verbinden.

7 Die idealisierte psychische Sicht

In [GVI] findet sich auf S. 429 folgender Passus:

> "Bemerkung Grundlagen: Das Aussonderungs- und Auswahlaxiom kann aus einem gemeinsamen Grundprinzip zur Konstruktion von Mengen abgeleitet werden, nämlich: Eine Menge ist etwas, was durch Zusammenfassen ihrer Elemente Stück für Stück (gewissermaßen durch Werfen von Elementen in einen Sack, wobei dieses Werfen eine Ende haben muss) entsteht. (Das ist die idealisierte und extrapolierte psychische Interpretation.)" (Gödel, *Max Phil VI*, S. 429 f. (1942))

Die Sicht auf Mengen, die hier vorgeschlagen wird, ist also folgende: Eine Menge ist das abgeschlossene Ergebnis eines mentalen Konstruktionsprozesses durch einen idealisierten Agenten.

Diese Sichtweise auf Mengen ist heuristisch sehr fruchtbar. Sie kann z. B. als Mittel dienen, den naiven Mengenbegriff unter dem Druck der Russellschen Antinomie in den iterativen Mengenbegriff zu überführen. In dieser Funktion ist sie denn auch häufig verwendet worden; wir geben zwei Beispiele einer solchen Verwendungsweise, die beide Standardlehrbüchern der Mengenlehre entstammen.

Wir erinnern zunächst an die Russellsche Antinomie: Postuliert man das Prinzip, dass zu jeder Eigenschaft eine Menge aller Objekte existiert, die diese Eigenschaft besitzen, so kommt man zu folgendem Problem: Die Eigenschaft $x \notin x$ einer Menge, nicht in sich selbst enthalten zu sein, führt zur Russellschen Menge $R := \{x : x \notin x\}$, für die nun offenbar $R \in R \leftrightarrow R \notin R$ gilt. Das Prinzip führt also zu einem Widerspruch.

Versucht man aber, die Bildung der Menge R innerhalb der oben beschriebenen Sicht auf Mengen zu interpretieren, entsteht folgende Schwierigkeit: Bei der Bildung einer Menge M kann der Agent nur Objekte 'in den Sack werfen', die zum 'Zeitpunkt' der Bildung von M 'bereits' vorliegen. Insbesondere kann der Agent nicht in die Verlegenheit kommen, sich zu fragen, ob R in sich selbst vorkommen soll, denn bei der Bildung von R steht R ja als mögliches Element noch gar nicht zur Verfügung. Diese Diagnose findet sich an verschiedenen Stellen der mengentheoretischen Literatur.[6] Joseph Shoenfield etwa schreibt in "Axioms of Set Theory" ([S]) mit Bezug zur Russellschen Antinomie folgenden Passus, in dem sowohl der konstruktive als auch der zeitliche Aspekt der Mengenbildung deutlich hervortreten:

> "The explanation is not really difficult. When **we are forming a set** z by **choosing its members**, **we do not yet have** the object z, and hence **cannot use it as a member** of z. The same reasoning shows that certain other sets cannot be members of z. For example, suppose that $z \in y$. Then **we cannot form** y **until we have formed** z. Hence y **is not available** as an object when z is formed, and therefore cannot be a member of z." (Hervorhebungen M.C.)

Eine ähnliche Analyse wird in Azriel Levys *Basic Set Theory* ([L]) als ein Weg erwähnt, mit der Russellschen Antinomie umzugehen und dort Russell zugeschrieben:[7]

> "One way is to think again of what led us to the axiom of comprehension, and to decide that (...) we should not have come up with anything like the axiom of comprehension anyway. According to this view, the axiom of comprehension is basically false, since it represents a mental act of 'collecting' all sets which satisfy $\phi(x)$, and this cannot be done since we can 'collect' only those sets which have been 'obtained' at an 'earlier' stage of the game."

[6] Für eine kritische Diskussion verschiedener solcher quasi-konstruktivistischer Ansätze zur Begründung des hierarchischen Mengenbegriffes und der darauf basierenden mengentheoretischen Axiomatik, darunter auch des unten zitierten Passus von Shoenfield, siehe Hallett [Ha], Kapitel 6.1, besonders S. 215 ff.

[7] Der andere ist die 'limitations of size'-Idee, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

Folgt man nun der Vorstellung, dass Mengen in einem zeitlichen Prozess konstruiert werden, so gelangt man zum iterativen Mengenbegriff, der in der von Neumannschen Hierarchie seine formale Entsprechung findet – und damit zum modernen Mengenverständnis.

7.1 Die idealisierte psychische Sicht als Grundlage der mengentheoretischen Axiomatik

Die 'idealisierte und extrapolierte psychische Interpretation' ist für Gödel aber nicht lediglich ein Anstoß, vom 'naiven' zum iterativen Mengenbegriff überzugehen; es soll darüber hinaus auch die Rechtfertigung der Axiome ermöglichen, die diesen Mengenbegriff mathematisch-formal präzisieren:

> "Fortsetzung: Dass diese idealisierte und extrapolierte psychische Interpretation die Vorstellung ist, welche der Evidenz der Axiome (inklusive Auswahlaxiom) zu Grunde liegt, stimmt gut überein mit meiner Erinnerung, dass ich bei Aussagenfunktionen immer an Verfahren dachte, aber doch nicht an die Extension, sondern die 'Idee' oder die 'Regel', aber das geht nicht." (Gödel, *Max Phil VI*, S. 433)

Die Vorstellung ist also die, dass eine Aussagenfunktion – also eine Aussage $A(x)$ mit wenigstens einer freien Variablen – als ein 'Sortierverfahren' betrachtet werden kann, mit dessen Hilfe Objekte a, für die $A(a)$ gilt, von den anderen unterschieden und dadurch eine Menge dieser Objekte gebildet werden kann. Welche Schwierigkeit Gödel an dieser Stelle sieht, ist nicht klar ersichtlich. Wir werden aber weiter unten eine mögliche Erklärung anbieten.

Die 'idealisierte und extrapolierte psychische Interpretation' als Grundlage der mengentheoretischen Axiomatik ist keine Gödel eigene Vorstellung, sondern findet sich in zahlreichen Ansätzen zu den Grundlagen und der Philosophie der Mathematik. Wir stellen der obigen Stelle zwei weitere zur Seite, eine aus Gaisi Takeutis Standardwerk zur Beweistheorie (*Proof Theory*), die andere aus Philipp Kitchers *The Nature of Mathematical Knowledge*.[8] In der Einleitung zum Abschnitt über zweitstufige Logik schreibt Takeuti:

[8]Ein Ansatz aus einer dritten, nämlich neben der philosophischen und logischen einer semiotischen, Perspektive, ist der von Brian Rotman in *Mathematics as Language - An Essay in Semiotics*, [Ro]. Rotman zufolge beschreiben mathematische Texte mentale Akte, die faktisch unvollziehbar sind. Dass sie dennoch verstanden werden, ist dem Umstand geschuldet, dass der Leser als ein idealisierter Agent vorgestellt wird, der sie vollziehen kann. So lesen wir in [Ro], S. 37: "To return to the sentences of the hypothetical text that we are deciphering: mathematical imperatives in their inclusive form ask that certain worlds be created (...); in their exclusive form they demand that certain actions be carried out. Since these actions might be, and usually are, in principle unrealisable, the addressee of mathematical messages – the idealised but mortal reader of a finite text – cannot be imagining himself to perform

> "Let us, to begin with, adopt the standpoint of an 'infinite mind', which we suppose can examine infinitely many objects one by one. (...) This approach is in its essence the way in which many working mathematicians conceive of sets. It is fair to say that in modern mathematics many of the arguments concerning sets are carried out along these lines, and the higher (finite) order predicate calculus is a formulation of such an approach to sets." (Takeuti, *Proof Theory*, S. 161, [T])

Hier wird die 'idealisierte psychische Interpretation' also nicht nur als eine mögliche Haltung zu den Grundlagen der Mathematik erwähnt, sondern darüber hinaus sogar als (implizite) heuristische Grundlage für den Umgang mit Mengen in der mathematischen Praxis. Allerdings nimmt Takeuti diese Sicht gerade zum Anlaß, das Komprehensionsaxiom, zu dessen Rechtfertigung Gödel es heranziehen will, aufgrund seiner imprädikativen Instanzen zu kritisieren und die zweitstufige Prädikatenlogik als getreuere Formalisierung dieser Interpretation zu motivieren. Wir werden diesen Kritikpunkt weiter unten erläutern.

Eine sehr prominente Rolle spielen idealisierte Agenten in Kitchers *The Nature of Mathematical Knowledge*, wo sie als Basis für eine empiristische Sicht der Mathematik dienen sollen: Mathematische Objekte sind in dieser Sicht Ergebnisse von Konstruktionsprozessen, und 'höhere' Objekte werden dadurch zugänglich, dass von faktischen Beschränkungen der menschlichen Fähigkeit zur Konstruktion von Objekten im Rahmen einer Idealisierung abgesehen wird.[9] Man könnte erwarten, dass dieser Ansatz bei aktual unendlichen oder jedenfalls überabzählbaren Objekten seine natürliche Grenze findet; doch ist Kitcher bereit, die Idealisierung sehr weit zu treiben:

> "I see no bar in the supposition that the sequence of stages at which sets are formed is highly superdenumerable, that each of the stages

them. Instead he imagines them being performed by an agent: a theoretical and ideal version of himself able to execute infinitely many acts, read an infinite diagram, occur within a nonexistent world and so on." Der Ansatz von Rotman scheint sich unabhängig von denen von Gödel, Kitcher und Takeuti entwickelt zu haben. Wir danken Gregor Nickel für den Hinweis auf Rotmans Arbeit.

[9] Ob diese Inanspruchnahme idealisierter Agenten mit dem Anspruch zusammenpasst, eine 'empiristische' oder 'naturalistische' Position zu vertreten, ist sicher etwas zweifelhaft. Kitchers Ansatz dazu ist, etwas vereinfacht, folgender: Mathematik sei, so Kitcher, eine Wissenschaft von menschlichen Operationen. Wie jede empirische Wissenschaft mache die Mathematik dabei idealisierende Annahmen, die ihren Gegenstand zugänglicher und einfacher machen; so werde etwa eine Theorie von Sammlungsoperationen dadurch deutlich einfacher, dass man von einer Obergrenze für die Größe einer Sammlung absehe, woraus sich das Nachfolgeraxiom der Arithmetik ergebe (siehe [K], Kapitel 6, besonders S. 116 ff.). Als konkrete Analogie in der Naturwissenschaft erwähnt Kitcher die gängige Praxis, in der Mechanik von der Reibung abzusehen.

> corresponds to an instant int he life of the constructive subject, and that the subject's activity is carried out in a medium `analogous` to time, but far richer than time. (...) The view of the ideal subject as an idealization of ourselves does not lapse when we release the subject from the constraints of our time." (Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, S. 146, [K])

Obwohl sich Bemerkungen Gödels zur 'idealisierten psychischen Sicht' bereits in Hao Wangs *A Logical Journey* finden, hat sich Kitchers Sicht davon unabhängig entwickelt: In [K] findet sich eine Fußnote (S. 133, Fußnote 36), nach der Kitcher von Wangs Darstellung erst nach Fertigstellung seines Buches erfahren hat. Allerdings schreibt er die Sicht dort nicht Gödel, sondern Wang zu, während er Gödels Sicht mit einem problematischen mathematischen Realismus identifiziert, den er kritisiert, vgl., [K], S. 58-60. So können wir etwa bei Kitcher lesen ([K], S. 59): "Platonists tell us very little about the character of intuitions. Gödel's remarks are typical: intuition is introduced by analogy with sense perception, and that is the end of the matter." Diese Gödel-Interpretation Kitchers konterkarikierend finden wir in den obigen Bemerkungen Gödels eine Sichtweise auf mathematische Objekte, die nicht nur deutlich weiter ins Detail geht als von Kitcher unterstellt, sondern auch klare Parallelen zu der von ihm vorgeschlagenen 'idealized agent view' aufweist.[10] Zur Verteidigung Kitchers muss allerdings angeführt werden, dass er die hier besprochenen Stellen aus Gödels noch unveröffentlichten Notizbüchern nicht gekannt haben kann.

8 Die Voraussetzungen der 'idealisierten psychischen Sicht'

Gödel wendet sich der Frage zu, welche Eigenschaften die 'idealisierte Psyche' haben muss, um als Grundlage der Rechtfertigung der üblichen mengentheoretischen Axiomatik ZFC dienen zu können, und was die Möglichkeitsbedingungen einer solchen 'Psyche' sind.

[10] In [vA] diskutiert van Atten die Möglichkeit, die Erkennbarkeit und Zugänglichkeit transfiniter mathematischer Objekte durch den Bezug auf 'higher minds' phänomenologisch zu begründen, wie es Gödel nach seiner Husserl-Rezeption wiederholt vorgeschlagen hat (siehe dazu auch Tieszen [Ti]). Dabei stellt van Atten eine Verbindung zu zwei Bemerkungen her, die Gödel auf einer Liste seiner philosophischen Überzeugungen als vierten und elften von 14 Punkten festgehalten hat: 'There are other worlds and rational beings of a different and higher kind.' sowie 'The higher beings are connected to the others by analogy, not by composition.' Das kann als ein weiterer Hinweis gelten, dass Gödel idealisierte Agenten als eine Weise der Bezugnahme auf mathematische Objekte im Sinn hatte.

> "Man muss dabei annehmen, dass man beliebig weit 'zählen' kann oder dass die Zeit eine geordnete Menge von der Struktur des wohlgeordneten Absoluten ist und dass man beliebig späte Zeitpunkte erlebt." (Gödel, *Max Phil VI*, S. 430)

Hierbei bezeichnet 'Das wohlgeordnete Absolute' in Übereinstimmung etwa mit Cantors Terminologie die Klasse der Ordinalzahlen. Diese soll also als 'Zeitachse' für die 'idealisierte oder extrapolierte Psyche' fungieren, wobei die 'zeitliche Dauer' einer mentalen Konstruktion eine beliebige Ordinalzahl sein kann.

(Wir möchten an dieser Stelle betonen, dass Gödels Bemerkung als eine (kritische) Untersuchung der Voraussetzungen der 'idealisierten psychischen Sicht' gelesen werden kann. Das 'Man–muss–dabei–annehmen' ist in dieser Lesart also nicht Gödels Überzeugung, sondern eine Voraussetzung, die Anhänger der 'idealisierten psychischen Sicht' notwendigerweise in Anspruch nehmen müssen.)

Von dieser Vorstellung ausgehend lassen sich bereits einige Eigenschaften des iterativen Mengenbegriffs interpretieren, so etwa die Nichtexistenz einer Allmenge:

> "Das ergibt auch den Grund der Nichtexistenz der Allmenge und ähnlicher Mengen, nämlich wäre man mit ihrer Konstruktion niemals fertig {oder es gibt kein Wesen, das fertig würde}. [Das Ganze ist auch formalisierbar.]" (Gödel, *Max Phil VI*, S. 430)

Die Konstruktionsmetapher funktioniert hier sehr anschaulich: Die Allmenge ließe sich erst bilden, nachdem alle Mengen gebildet wurden; da die idealisierte Psyche aber entlang der ordinalen Zeitachse immer neue Mengen konstruiert, gibt es schlicht keinen Zeitpunkt, zu dem eine solche Konstruktion vorgenommen werden könnte. Es müsste sich um einen 'Zeitpunkt nach allen Zeitpunkten' handeln, was offenbar unsinnig ist. Zugleich wird hier offenbar der Vorschlag gemacht, von der idealisierten psychischen Sicht zu einer formalen Theorie überzugehen.

Gerade dieser Kritikpunkt liefert aber zugleich einen Grund, an der Tauglichkeit eines 'verallgemeinerten Konstruktivismus' als Grundlage einer Rechtfertigung des Komprehensionsaxioms zu zweifeln, der zugleich der oben erwähnte Grund ist, aus welchem Takeuti in [T] die ZFC Mengenlehre zugunsten der zweitstufigen Prädikatenlogik als Formalisierung der idealisierten konstruktiven Sicht zurückweist: Will man nämlich – wie es in ZFC durch das Komprehensionsaxiom gestattet ist – die Menge aller Elemente einer bereits vorliegenden Menge M bilden, die eine gewisse Formel ϕ der Mengenlehre erfüllen, wobei ϕ unbeschränkte Quantifikation über alle Mengen enthält, so wäre es doch erforderlich, dass zum Zeitpunkt der Bildung von M das Mengenuniversum bereits vollständig zur Verfüng steht, damit der idealisierte Agent es nach Zeugen oder Gegenbeispielen 'durchsuchen' kann; zumindest ist es nötig, damit ϕ zum Zeitpunkt der Bildung von M überhaupt eine Bedeutung gegeben werden kann. Hierauf könnte sich auch Gödels eingangs zitiertes 'aber das geht nicht' beziehen.

Eine mögliche Reaktion auf diesen Einwand ist die folgende: Das Vorliegen der Elemente von M genügt als quasi 'physische' Bedingung für die Bildung von $Y := \{x \in M : \phi(x)\}$: Das gesamte 'Baumaterial' für Y liegt vor. Der Agent kann zwar die Menge Y tatsächlich nicht auf die beschriebene Weise bilden, indem er sich an ϕ als einem 'Kriterium' orientiert. Das schließt aber nicht aus, dass er die Menge Y auf andere Weise bilden kann. Diese Entgegnung findet sich z. B. bei Kitcher in [K].

Mit Bezug auf die Rechtfertigung des Komprehensionsaxioms durch die idealisierte psychische Sicht ist dann aber jedenfalls Folgendes zu bemerken: Die sehr anschauliche konstruktive Begründung des Komprehensionsaxiom als Ausdruck der Fähigkeit des Agenten, nach einer gewissen Eigenschaft zu 'sortieren', auf die sich auch Gödel in der ersten zitierten Stelle bezieht, entfällt. In der Folge wird dann fraglich, warum der Agent zu gegebenen ϕ und M stets, gewissermaßen 'zufälligerweise', auch ein passendes Y konstruieren sollte. Die naheliegende Antwort, dass solch eine Menge ja existiert und der Agent eben jede 'mögliche' Teilmenge von M bildet, ist jedenfalls offensichtlich zirkulär und macht eher die ZFC-Axiome zur Grundlage einer Beschreibung des idealisierten Agenten als umgekehrt.

Diese Zirkularität, die darin liegt, die mengentheoretische Axiomatik durch Rekurs auf einen idealisierten Agenten begründen zu wollen, der dann wiederum zu Beginn mittels der mengentheoretischen Axiomatik so vorgestellt wird, dass die Begründung gelingt, könnte man als 'mengentheoretischen Kreationismus' bezeichnen. Es scheint sich um eine Schwierigkeit zu handeln, die viele 'quasi-konstruktivistische' Zugänge zur Mengenlehre gemeinsam haben. Die Probleme entstehen insbesondere bei der Begründung derjenigen Axiome, die einen deutlich 'imprädikativen' Charakter haben; dazu zählt neben dem Auswahlaxiom vor allem das Potenzmengenaxiom. (Für eine Diskussion der Schwierigkeiten, das Potenzmengenaxiom 'konstruktiv' zu begründen, siehe z.B. auch Hallett [Ha], Kapitel 5.1.) Beide werden von Gödel separat behandelt.

8.1 Das Potenzmengenaxiom

Diese Schwierigkeit wird zumindest in den hier besprochenen Stellen aus Gödels Notizbüchern nicht weiter thematisiert, wohl aber eine ähnliche, die ebenfalls die Vorstellung 'aller möglichen Teilmengen' einer Menge M betrifft: Eines der ZFC-Axiome, die aufgrund der 'idealisierten psychischen Sicht' am Schwierigsten zu rechtfertigen sind, ist das Potenzmengenaxiom: Zu jeder Menge x existiert eine Menge, die genau die Teilmengen von x enthält. In [W] wird Gödel hierzu mit folgender Erläuterung erwähnt:

> "Each selection gives a subset as an object. Taking all possible ways of leaving elements out (...) may be thought of as a *method* for producing these objects." (Wang, *A Logical Journey*, S. 220)

Wenn wir also verstehen, was es z. B. heißt von den natürlichen Zahlen einige wegzulassen, dann können wir uns auch denken, wir hätten das auf jede mögliche Art getan. Aber dieses 'jede möglich Art' ist kaum einfacher als der Begriff 'beliebige Teilmenge' und dieser erweist sich in der ZFC-Mengenlehre als hoch ambig: Es gibt eine Vielzahl von Modellen von ZFC, in denen es jeweils andere Teilmengen der natürlichen Zahlen gibt.[11] Genau dieser Umstand liegt der Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese auf der Grundlage von ZFC zugrunde.

Hier ist eine Übertragung der Konstruierbarkeit der Potenzmengen endlicher Mengen ins Unendliche problematisch: Für eine endliche Menge $\{x_1, ..., x_n\}$ lassen sich die möglichen Teilmengen einfach gemäß der lexikographischen Ordnung der Menge $\{0,1\}^n$ der Reihe nach Aufzählen: Für die Menge $\{1,2\}$ erhalten wir die Folge $00 - 01 - -10 - -11$ und entsprechend die Aufzählung $\{\emptyset, \{2\}, \{1\}, \{1,2\}\}$. Dass dieses Verfahren entlang einer ordinalen 'Zeitachse' funktioniert, liegt daran, dass die lexikalische Ordnung auf $\{0,1\}^n$ für endliche n eine Wohlordnung ist. Dies ist im Unendlichen aber nicht mehr der Fall, und es ist kaum zu sehen, welches 'Verfahren' auch entlang einer unendlichen Zeitachse an seine Stelle treten könnte. (Dass zum Beweis der Existenz einer Wohlordnung von $\{0,1\}^\omega$ bereits das Auswahlaxiom erforderlich ist, ist ein starker Hinweis darauf, dass ein solches Verfahren in keinem befriedigenden Sinn von 'Verfahren' existieren kann.) Die Bildung unendliche Potenzmengen scheint kein Zeit-, sondern ein Strukturproblem zu sein.

Man kann immerhin versuchen, sich dem Potenzmengenaxiom mit folgender Überlegung anzunähern: Wenn alle Mengen Konstruktionen eines idealisierten Agenten

[11] Solche Modelle lassen sich z.B. mit der Forcing-Technik gewinnen, siehe etwa Kunen [Ku], Kapitel VII oder Devlin [De], Kapitel 6.

entlang einer ordinalen Zeitachse sind, so gilt das Gleiche auch für sämtliche Teilmengen einer gegebenen Menge M. Nun können wir uns einen Zeitpunkt denken, zu dem der Agent sämtliche Teilmengen von M konstruiert hat, die er je konstruieren wird. Wenn der Agent nun zu diesem Zeitpunkt – oder einem späteren – alle bisher konstruierten Teilmengen von M 'einsammelt' hat er die Potenzmenge von M gebildet.

Auch mit diesem Ansatz gibt es aber mindestens zwei Probleme: Das erste ist die Existenz eines solchen Zeitpunktes, zu dem alle Teilmengen von M, die je gebildet werden, bereits gebildet sind. Es wäre ja auch denkbar, dass durch das ganze 'Leben' des konstruktiven Agenten hindurch immer weitere solche Mengen erzeugt werden und ihre Gesamtheit also so wenig je vorliegt wie die Allmenge. Dieser Punkt würde es erfordern, das Zeitkonzept aus der Agentenperspektive weiter zu zu analysieren. Damit bliebe aber das zweite Problem, nämlich dass der Agent nicht unbedingt wissen kann, wann der fragliche Zeitpunkt erreicht ist. Damit könnte er die Potenzmenge von M zwar der Extension nach bilden, aber nicht wissen, dass das Objekt, das er soeben konstruiert hat, diese Potenzmenge ist, ähnlich wie jemand, der sich eine Liste aller 6-stelligen Zahlenkombinationen durchliest, darunter zwar die Lottozahlen der kommenden Woche finden wird, ohne aber zu wissen, dass sie es sind. Damit wird zumindest die naheliegende konstruktive Interpretation des Potenzmengenaxioms unterlaufen.

In den Notizbüchern bietet Gödel indes noch einen anderen Ansatz:

> "Das Potenzmengenaxiom würde daraus folgen, dass alles, was ein Wesen (bestimmte Potenz, z.B. ein abzählbares Wesen) tun 'kann' (im Sinne aller in einem bestimmten Moment von ihm wählbaren {oder planbaren} Handlungen), von einem anderen Wesen überblickbar ist."
> (Gödel, *Max Phil VI*, S. 430)

In dieser Bemerkung enthält das Mengenuniversum die Konstruktionen nicht eines einzelnen, sondern einer ganzen Hierarchie idealisierter Agenten. Dazu gehören neben 'abzählbaren Wesen', also Wesen, die entlang abzählbarer Zeitachsen arbeiten und dadurch abzählbare Mengen bilden und überblicken können, auch Wesen höherer 'Potenz' mit entsprechend erweiterten Zeitachsen und operativen Fähigkeiten. Damit könnte z. B. ein 'überabzählbares Wesen' sämtliche Konstruktionen eines 'abzählbaren Wesens' 'überblicken' und dadurch etwa die Potenzmenge der natürlichen Zahlen 'bilden'. Voraussetzung ist dann aber, dass das abzählbare Wesen auch tatsächlich alle Mengen natürlicher Zahlen konstruiert und nicht etwa von den überabzählbaren Wesen weitere solche Mengen gebildet werden. Diese gewissermaßen 'günstigen' Umstände sind in Gödels konstruktiblem Universum L, das als eine Formalisierung des 'Bereichs der in einem idealisierten Sinn konstruierbaren Mengen' angesehen werden kann, tatsächlich gegeben: Sämtliche Mengen natürlicher Zahlen, die überhaupt vorkommen, 'entstehen' in L vor dem 'Zeitpunkt' ω_1.

Als Bedingung für das Potenzmengenaxiom halten wir jedenfalls den Gedanken einer Hierarchie von Wesen fest.

8.2 Das Auswahlaxiom

Ein weiteres Axiom, das üblicherweise als in konstruktivistischer Hinsicht problematisch angesehen wird, ist das Auswahlaxiom: Zu jeder Familie F von paarweise disjunkten, nichtleeren Mengen existiert eine Menge A, die mit jedem Element von F genau ein Element gemeinsam hat.

Anschaulich scheint eine solche Auswahlmenge zunächst leicht zu bilden zu sein: Man stelle sich etwa vor, dass man die Mengen in F der Reihe nach 'abschreitet' und aus jeder Menge, der man dabei begegnet, ein Element 'herausgreift'. Das ist unproblematisch, solange es eine Regel gibt, nach der man die Wahl treffen kann. Ist das aber – wie etwa bei Mengen reeller Zahlen – nicht der Fall, muss man 'willkürlich' wählen. Für die Gültigkeit des Auswahlaxioms scheint es also erforderlich zu sein, dem Agenten 'willkürliche' Entscheidungen zu gestatten:

> "Man erhält die Mathematik mit oder ohne Auswahlaxiom je nachdem, ob das Wesen Entschlüsse ohne Begründung fassen kann, oder nicht. Der Zermelosche Beweis erscheint bei dieser Auffassung 'verkehrt', ähnlich wie Frege's Endlichkeitsbegriff." (Gödel, *Max Phil VI*, S. 430)

Wir können nur raten, was hier die 'Verkehrtheit' ausmacht. Gemeint ist vermutlich Zermelos Beweis des Wohlordnungsprinzips aus dem Auswahlaxiom in [Z]. Wenn nun die Mengen der konstruktiven Aktivität eines entlang einer ordinalen Zeitachse arbeitenden idealen Agenten entspringen, dann sind sie anhand ihrer 'Entstehungszeit' a priori wohlgeordnet. Das Auswahlaxiom folgt dann einfach daraus, dass man aus jeder Menge dasjenige Element herausgreifen kann, das 'als erstes entstanden' ist. In dieser Sicht ist also das Auswahlaxiom eine Folge des Wohlordnungsprinzips und damit gegenüber dem Wohlordnungsprinzip nicht 'fundamentaler'. Entsprechend 'verkehrt' ist es, das Wohlordnungsprinzip mithilfe des ihm gegenüber sekundären Auswahlaxioms zu beweisen. Gegen diese Interpretation spricht allerdings, dass dann von seiten des Agenten, der sich an der 'Entstehungszeit' orientiert, keine 'willkürliche' Wahl mehr erforderlich wäre. Eine weitere Möglichkeit, diese Bemerkung zu interpretieren, wäre die, dass die idealisierte psychische Sicht mit einem 'willkürlich entscheidenden' Agenten das Auswahlaxiom auch in Bezug auf Mengen begründet, die nicht selbst konstruiert sind, sondern dem Agenten ohne Weiteres vorliegen. Dann müsste der Agent sie allerdings weiterhin entlang einer ordinalen Zeitachse 'abschreiten', um seine Wahlen treffen zu können, und nun wäre das Wohlordnungsprinzip wiederum gegenüber dem Auswahlaxiom fundamentaler.

Was Freges Endlichkeitsbegriff angeht, können wir gleichfalls lediglich einen Interpretationsvorschlag anbieten: In Freges *Grundlagen der Arithmetik*, [Fr] §83, findet sich die Definition:

> "der Satz 'n gehört der mit 0 anfangenden natürlichen Zahlenreihe an' sei gleichbedeutend mit 'n ist eine endliche Anzahl'." (Frege, [Fr], §83)

Die von Gödel angesprochene 'Verkehrtheit' ist hier wohl die Definition der Endlichkeit mithilfe der natürlichen Zahlen statt umgekehrt.

9 Die Prüfung der Bedingungen einer idealisierten Psyche

Fassen wir die im letzten Abschnitt von Gödel entwickelten Bedingungen einer idealisierten psychischen Sicht auf die Mengenlehre noch einmal zusammen: Die idealisierten Agenten müssen entlang einer ordinalen Zeitachse arbeiten; es muss eine Hierarchie solcher Agenten mit zunehmender 'Potenz' geben, wenn im sich ergebenden Bereich der konstruierbaren Mengen das Potenzmengenaxiom erfüllt sein soll; und schließlich muss der Agent 'willkürliche' Wahlen treffen können, um die Gültigkeit des Auswahlaxioms zu ermöglichen. Die erste dieser Voraussetzungen unterzieht Gödel einer kritischen Prüfung: Sind Limespunkte in der Zeit möglich bzw. plausibel? Oder, genauer: Funktioniert die Bewußtseins- bzw. Konstruktionsmetapher mit einer solchen (ordinalen) Zeitvorstellung?

> "Bemerkung (Philosophie): Ist es eigentlich möglich [widerspruchsfrei], dass man etwas erlebt, was nach unendlich vielen eigenen Taten liegt? Eine Situation, in der wir uns erinnern, unendlich viel getan zu haben, ist denkbar. Zum Beispiel indem wir begrifflich das Bild dieses Lebens vor uns haben und bei jeder einzelnen Situation der Reihe nach die Erinnerung wachrufen können. Es wäre sogar möglich, dass morgen diese Situation eintrifft [*Fussnote: Aber noch besser als früheres unendlich langes Leben aufgefasst] [indem wir immer schneller gelebt hätten]." (Gödel, *Max Phil VI*, S. 431)

Hinsichtlich der Möglichkeit einer ‘ordinalen Zeit’ wird hier mithin eine (vorsichtig) positive Antwort gegeben: Eine Erinnerung an ‘unendlich viele eigene Taten’ ist vorstellbar und steht also anscheinend nicht im Konflikt mit der Bewußtseinsmetapher. In der ‘objektiven’ Zeit können diese Taten sogar in einem begrenzten Intervall stattfinden: Wenn die i-te Handlung H_i etwa 2^{-i} Minuten dauert, ist man mit den unendlich vielen Handlungen $H_0, H_1, H_2, ...$ in 2 Minuten fertig.

Als zukünftige Möglichkeit erweist sich, was hier als mögliche Erinnerung erscheint, allerdings als problematisch:

> “Trotzdem scheinen die beiden Aussagen
>
> $\{A_1:\}$ ‘Ich werde noch unendlich oft ins Danaiden-Fass schöpfen’ und
>
> $\{A_2:\}$ ‘Ich werde irgendwann nicht mehr schöpfen’
>
> einander zu widersprechen, während wir schöpfen; aber nicht die entsprechenden Aussagen zur Zeit ω.” (Gödel, *Max Phil VI*, S. 431)

Die *Erwartung* eines zukünftigen Zeitpunktes, der nach unendlich vielen zukünftigen Taten liegt, ist Gödel zufolge also widersprüchlich und damit wohl kein möglicher Bewußtseinszustand.

Die ‘entsprechenden Aussagen zur Zeit ω’, die einander nicht widersprechen, wären:

- A'_1: ‘Zum Zeitpunkt 0 war es so, dass ich noch unendlich oft ins Danaiden-Fass schöpfe.’
- A'_2: ‘Zum Zeitpunkt 0 war es richtig, dass ich irgendwann nicht mehr schöpfen werde.’

Im Hinblick auf eine Formalisierung wird nun folgende Möglichkeit angedeutet:

> “Das heißt, wir können eine Theorie bauen mit einer nicht Archimedischen Zeit [d. h. einer nicht Archimedisch geordneten Menge, welche ‘genau’ die Rolle unserer Zeit spielt] und dann ein Wesen konstruieren, welches die Aussagen A_1, A_2 zur Zeit 0 erkennt und welches die entsprechenden Aussagen (über Vergangenheit) A'_1, A'_2 zur Zeit ω erkennt.” (Gödel, *Max Phil VI*, S. 431f)

Eine ‘archimedische Ordnung’ auf einer Menge oder Klasse X, auf der zugleich ein Begriff von ‘Vielfachem’ definiert ist, ist eine solche, in der für je zwei Elemente $x, y \in X$ das jeweils eine von einem gewissen endlichen Vielfachen jedes anderen übertroffen wird. Diese Eigenschaft haben etwa die Ordnungen der natürlichen oder der nichtnegativen (standard) reellen Zahlen, die klassisch als Zeitachsen für konstruktive Verfahren (Algorithmen) oder physikalische Prozesse verwendet werden. In der Ordnung der Ordinalzahlen ist diese Eigenschaft verletzt, wie man sieht, wenn man die Elemente 1 und ω betrachtet. Nichtarchimedische Zeitachsen sind allerdings kein ganz neues Phänomen: Nimmt man etwa Leibniz' Definition der Geschwindigkeit beim Wort, nimmt sie auf infinitesimal kleine Zeitintervalle Bezug, was ebenfalls zu einer nichtarchimedisch geordneten Zeit führt (die allerdings deutlich andere Eigenschaften hat als die von Gödel in wesentlich anderer Absicht eingeführte.)

Der Vorschlag ist hier offenbar, die oben formulierten Vorstellungen transfiniter Wesen soweit zu präzisieren und ggf. zu formalisieren, dass sich hieraus eine Axiomatik für die durch solche Wesen konstruierbaren Mengen ergibt.

Etwas unklar ist, warum das so konstruierte Wesen die Aussagen A_1 und A_2 zur Zeit 0 erkennen können soll, die doch weiter oben für unvereinbar erklärt wurden. Eine mögliche Erklärung ist, dass wir einen deutlicheren Unterschied machen müssen zwischen 'uns' und dem zu konstruierenden 'Wesen'; 'uns' würde sich dann auf den real existierenden und allenfalls vorsichtig idealisierten Mathematiker beziehen, für den Limespunkte in der Zeit nur als vergangene möglich sind, während für das oben erläuterte 'Wesen' die ordinale Zeitachse eben 'genau die Rolle unserer Zeit' spielt, so dass für die Anschauung eines solchen Wesens kein Widerspruch zwischen A_1 und A_2 zum Zeitpunkt 0 besteht.

Schließlich zieht Gödel ein kritisches Fazit aus den vorstehenden Ergebnissen:

> "Das heißt, wir haben ein *synthetisches* Urteil *a priori*, dass wir von jetzt ab sicher niemals unendlich viele gleiche arithmetische Handlungen vollendet haben werden. Aber möglicherweise haben wir [sogar nach einem Zeitpunkt] bis jetzt schon unendlich viele Handlungen vollendet." (Gödel, *Max Phil VI*, S. 432)

Die 'ordinale Zeit' der idealisierten psychischen Sicht ist phänomenologisch also möglich, aber nur als eine Vergangenheit, die niemals eine Zukunft war. Der problematische Charakter dieses Resultates wird sofort thematisiert:

> "Das heißt, wir haben die Evidenz, dass wir 'in der letzten Zeit' leben (beinahe ein Widerspruch gegen andere Evidenzen: Homogenität der Zeit und zeitliche Symmetrie des 'Möglichen' oder 'Unzeitlichkeit' des Möglichen)." (Gödel, *Max Phil VI*, S. 432)

Gödel führt hier also eine Folgerung und drei Kritikpunkte an: Wenn – entsprechend dem Widerspruch zwischen A_1 und A_2 zur Zeit 0 – von jetzt aus gesehen in der Zukunft keine zeitlichen Limespunkte mehr liegen, es aber in der Vergangenheit welche gab, liegt die Gegenwart in einem finalen ‘Zipfel’ der ordinalen Zeit. Daraus ergäbe sich die merkwürdige Konsequenz, dass der gegenwärtige Zeitpunkt innerhalb der Zeitordnung rein ordnungstheoretisch definierbar wäre, nämlich etwa als ‘n-ter Nachfolger des letzten Limespunktes’ für eine gewisse natürliche Zahl n. Ferner folgt die Existenz von Situationen, die nur als vergangene, aber nicht als zukünftige möglich sind (wie etwa die schon erwähnte Erinnerung an ‘unendlich viele eigene Taten’). Dagegen stehen die zumindest intuitiv einleuchtenden Vorstellungen, dass jedes mögliche vergangene Ereignis auch von einem noch früheren Zeitpunkt aus betrachtet werden kann und dann als mögliche Zukunft erscheint (“zeitliche Symmetrie des ‘Möglichen’ ”) sowie die, dass, was einmal möglich ist, nicht allein aufgrund der Zeitordnung zu einem anderen Zeitpunkt unmöglich sein kann (“‘Unzeitlichkeit’ des Möglichen”). [12]

Aufgrund von Gödels Diskussion läßt sich bezüglich der ‘idealisierten psychischen Interpretation’ also folgendes Fazit ziehen: Richtig verstanden erlaubt sie es, die mengentheoretischen Axiome zu motivieren und zu begründen, wobei diese Begründung nicht ohne Schwierigkeiten ist. Eine nähere Analyse ihrer Voraussetzungen bringt einige Eigenarten des dabei zugrunde gelegten Zeitkonzeptes zum Vorschein, die wesentlichen Elementen unseres üblichen Zeitverständisses zumindest ‘beinahe’ widersprechen. Die Interpretationsweise ist damit noch nicht widerlegt, hat sich aber zumindest als problematisch erwiesen.

10 Die konstruktible Hierarchie als Formalisierung der idealisierten psychischen Sicht

Wir möchten zum Abschluss noch auf eine Verbindung zwischen Gödels Überlegungen zu einer Interpretation und Rechtfertigung der mengentheoretischen Axiome im Licht einer ‘idealisierten psychischen Sicht’ und seiner mathematischen Arbeit hinweisen.

In seinem berühmten Aufsatz “The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis” von 1938 konstruiert Gödel ein mengentheoretisches Universum, L, das als formale Realisierung der ‘idealisierten psychischen

[12] Die “zeitliche Symmetrie des ‘Möglichen’ ” ist in der Temporallogik durch zweite Interaktionsaxiom $A \to HFA$ ausgedrückt, wobei H für ‘Es war immer der Fall, dass...’ und F für ‘Es wird der Fall sein, dass...’ steht.) Siehe z. B.[SEPTL].

Interpretation' betrachtet werden kann. Das Universum L erhält man als Vereinigung einer echten Klasse von L-Stufen L_α, deren Definition einem stufenweisen Aufbau entlang der Ordinalzahlen folgt:

- $L_0 = \emptyset$
- $L_{\alpha+1}$ =Def(L_α), die Menge aller mithilfe von Formeln, deren Quantoren über L_α rangieren, definierbaren Teilmengen von L_α
- $L_\delta = \bigcup_{\iota<\delta} L_\iota$, für δ eine Limesordinalzahl

Im Unterschied zur von Neumannschen V-Hierarchie wird hier also beim Übergang von einer Stufe zur nächsten nicht die – auf Basis der 'idealisierten psychischen Sicht' problematische – Menge 'aller' Teilmengen der letzten Stufe gebildet, sondern lediglich die Menge aller Teilmengen, die sich mithilfe einer Formel explizit definieren lassen, deren Quantoren sich auf die vorliegende Stufe beziehen. Die Konstruktion von L erfordert also keine problematische Quantifikation über das ganze mengentheoretische Universum. Sie umgeht mithin Takeutis Kritikpunkt aus Abschnitt 2.1. Die Hierarchie der L-Stufen kann somit als sukzessive Folge der Konstruktionen eines idealisierten Agenten angesehen werden. Andererseits läßt sich zeigen, dass in L tatsächlich sämtliche ZFC-Axiome erfüllt sind: Zu jeder Menge x aus L liegt auch die Menge aller in L enthaltenen Teilmengen von x in L, so dass L das Potenzmengenaxiom erfüllt; und zu jeder Menge x in L und jeder Formel ϕ liegt auch die Menge aller Elemente von x in L, auf die ϕ zutrifft – auch wenn ϕ durch unbeschränkte Quantoren auf das gesamte L Bezug nimmt. Der zweite oben erwähnte Vorschlag Kitchers zur Rechtfertigung des allgemeinen Komprehensionsaxioms, nämlich dass die durch Formeln mit unbeschränkten Quantoren definierten Mengen vom Agenten zwar nicht durch einen Akt des Aussonderns, aber im Fortgang seiner konstruktiven Aktivität auf andere Weise hergestellt werden könnten, ist also in der L-Hierarchie realisiert. In diesem Sinn kann die idealisierte psychische Sicht also gewissermaßen auf 'Umwegen' als Rechtfertigung von ZFC angesehen werden.[13]

[13] Hierbei ist allerdings zumindest Vorsicht geboten: Denn sowohl für die Konstruktion der L-Hierarchie als auch für den Nachweis der Gültigkeit der ZFC-Axiome in L werden die ZFC-Axiome vorausgesetzt, so dass eine allzu naive Version dieses Ansatzes zirkulär wäre. Es scheint andererseits plausibel, dass sich die Definition der L-Hierarchie auf Basis der 'idealisierten psychischen Sicht' rechtfertigen läßt, so dass zumindest dieser Teil des Argumentes aufrecht erhalten werden kann. Es bliebe dann aber die Frage, ob sich – unabhängig von ZFC, sondern rein aufgrund einer Analyse des idealisierten Zeitbegriffes – die Existenz von ausreichend vielen Ordinalzahlen – 'Zeitpunkten' – zumindest plausibilisieren läßt, so dass die sukzessive Bildung der L-Stufen entlang 'aller' Zeitpunkte tatsächlich zu einem ZFC-Modell führt (bricht man die Konstruktion 'zu früh' ab, ist das i.A. nicht der Fall). Außerdem stellt sich die Frage, ob der idealisierte Agent – und damit wir, deren Idealisierung er ja darstellen soll – von der Gültigkeit dieser Axiome aufgrund seiner konstruktiven Aktivität etwas wissen

So kann L also als eine mathematische Präzisierung des Bereiches der durch einen idealisierten Agenten konstruierbaren Mengen angesehen werden. Die 'idealisierte psychische Sicht', die Vorstellung also, dass alle Mengen durch einen idealisierten Agenten konstruierbar sind, läßt sich damit formal ausdrücken als $\forall x(x \in L)$, also 'alle Mengen liegen in L', eine Aussage, die unter dem Namen 'Konstruktibilitätsaxiom' bekannt ist. (Da das mengentheoretische Universum gewöhnlich mit V bezeichnet wird, wird das Konstruktibilitätsaxiom in der Literatur häufig als V=L ausgedrückt.) Es ist bekannt, dass das Konstruktibilitätsaxiom auf der Grundlage von ZFC weder beweisbar noch widerlegbar ist. Es kann damit als Beispiel für ein Axiom gelten, das mithilfe der 'idealisierten psychischen Sicht' 'gesehen' wurde – die 'idealisierte psychische Sicht' scheint also als 'Sehhilfe' für den Mengenbegriff in Gödels Sinn jedenfalls eine sinnvolle heuristische Funktion zu erfüllen. (Um einer voreiligen historischen Auslegung dieser heuristischen Rekonstruktion der L-Hierarchie anhand von Gödels philosophischen Bemerkungen vorzubeugen, weisen wir jedoch darauf hin, dass die hier diskutierten Bemerkungen Gödels aus dem Jahr 1942 stammen, das Konstruktibilitätsaxiom aber in der o. g. Arbeit eingeführt wurde, die im Jahr 1938 erschienen ist. Inwieweit die hier diskutierte Sichtweise eine konzeptionelle Grundlage von Gödels Arbeit zur Kontinuumshypothese ist, ob umgekehrt die Sichtweise eine Auslegung der mathematischen Arbeit ist oder ob beide voneinander unabhängig sind, läßt sich derzeit nicht sagen.)

Auch mathematisch erweist sich das Konstruktibilitätsaxiom als sehr fruchtbar; so konnte Gödel in seinem o. g. Aufsatz beweisen, dass ZFC+V=L die verallgemeinerte Kontinuumshypothese (GCH) impliziert.[14]

Die 'idealisierte psychische Sicht' ergibt sich aus der Kombination zweier Aspekte: Einerseits der grundsätzlichen Orientierung an Konstruierbarkeit, andererseits der Bereitschaft, den Konstruktionsbegriff weit über die gängigen Ansprüche an Endlichkeit oder gar faktische Durchführbarkeit hinaus zu interpretieren. Diese Verbindung bemerkt Gödel in einem Brief an Hao Wang:

> "However, as far as, in particular, the continuum hypothesis is concerned, there was a special obstacle which *really* made it *practically impossible* for constructivists to discover my consistency proof. It is the fact the ramified hierarchy, which had been invented *expressly for constructive purposes*, has to be used in an *entirely non-constructive*

kann oder ob hierzu nicht eine der Konstruktionsmetapher fremde 'Rückschau' auf den Gesamtbereich der konstruierbaren Objekte erforderlich ist. Dieser Frage werden wir an anderer Stelle nachgehen.

[14] Da sich außerdem zeigen läßt, dass ZFC+V=L widerspruchsfrei ist, falls ZFC selbst widerspruchsfrei ist, folgt hieraus, dass die Kontinuumshypothese auf Basis der Axiome von ZFC nicht widerlegbar ist.

> *way.*" (Gödel, Brief an H. Wang, 1968, in: *Collected Works V*, S. 404, [CWV])

'Nichtkonstruktiv' ist hierbei also die Iteration der L-Konstruktion entlang der vollen Klasse der Ordinalzahlen, wie sie in ZFC zur Verfügung steht, und zu der insbesondere auch nichtkonstruktive Ordinalzahlen (also solche oberhalb der ersten nichtrekursiven Ordinalzahl, dem Church-Kleeneschen ω_1) sowie überabzählbare Ordinalzahlen (wie ω_1) gehören. Diese ordinale 'Zeit' ist auf der Basis der idealisierten Agentensicht nicht mehr zu rechtfertigen, sondern muss vielmehr als deren Möglichkeitsbedingung vorausgesetzt werden (vgl. Abschnitt 3). In den üblichen konstruktivistischen Sichtweisen, etwa der Brouwers, hat die Zeit zwar eine ähnliche Rolle, es werden aber nur endliche Zeitfolgen als 'gegeben' betrachtet. In liberaleren Auslegungen des Konstruktivismus, etwa der von Oskar Becker ([B]) wird die Zeit zwar ins Transfinite ausgedehnt, jedoch nur soweit, wie für die dann entstehenden Zeitordnungen wiederum konkrete Konstruktionen angegeben werden können (siehe z. B. auch [vA]).

Literatur

[B] O. Becker. Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene. In: Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, Band VIII, 1927, S. 440–809.

[Ca] G. Cantor. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. In: Mathematische Annalen, 46 (1895), S. 481-512.

[Cou] L. Couturat. Opuscules er fragments inédits de Leibniz. Extraits des manuscript de la Bibliotèque royale de Hanovre, Paris (Alcan) 1903. (Das ist die Ausgabe, die zu Gödels Zeit zur Verfügung gestanden hat.)

[CWV] K. Gödel. Collected Works, Band V, hrsg. v. S. Feferman, J. W. Dawson, Jr., W. Goldfarb, Ch. Parsons, W. Sieg, Oxford (Oxford University Press) 2003.

[De] K. Devlin. The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory, New York (Springer) 1993.

[Fr] G. Frege, Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, hrsg. v. J. Schulte, Stuttgart (Reclam) 2009.

[GI] K. Gödel.Philosophische Notizbücher, Band 1: Philosophie I Maximen 0, hrsg. v. E.-M. Engelen, Berlin (De Gruyter) 2019.

[GVI] K. Gödel. Maximen VI, Kurt Gödel Nachlass (CO282), Behältnis 6b, Reihe III, Mappe 68, ursprüngliche Dokumentennummer 030092. Unveröffentlichtes Manuskript aus dem Gödel-Nachlass, vorliegende Transkriptionen von E.-M. Engelen.

[Ha] M. Hallett. Cantorian Set Theory and Limitations of Size, Oxford Logic Guides, vol. 10, Oxford (Oxford University Press) 1986.

[Ka] I. Kant. Kritik der reinen Vernunft, Leipzig (Philipp Reclam junior) 1878. (Diese Ausgabe befindet sich in Gödels Privatbibliothek.)

[K] P. Kitcher. The Nature of Mathematical Knowledge, Oxford (Oxford University Press) 1985.

[Ku] K. Kunen. Set Theory. An Introduction to Independence Proofs, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, Amsterdam u. a. (Elsevier) 1980.

[L] A. Levy. Basic Set Theory. Berlin/Heidelberg (Springer)) 2003.

[Le] G.W. Leibniz. Nouveaux Essais sur l'entendement humain, hrsg. v. R. E. Raspe, Amsterdam/Leipzig (Schreuder) 1765.

[Po] H. Poser. Der Begriff der Idee bei Leibniz. In: ders., Leibniz' Philosophie: Über die Einheit von Metaphysik und Wissenschaft, hrsg. von W. Li, Hamburg (Meiner) 2016, S. 103-114.

[Po2] H. Poser. Leibniz und die theoretische, methodische und sprachliche Einheit der Wissenschaften. In: ders., Leibniz' Philosophie: Über die Einheit von Metaphysik und Wissenschaft, hrsg. von W. Li, Hamburg (Meiner) 2016, S. 17-31.

[Ro] B. Rotman. Mathematics as Language – An Essay in Semiotics. Typoskript, verfügbar unter https://www.academia.edu/3876832/Mathematics_as_Language_an_essay_in_semiotics, Bristol 1982.

[Sa] J. Salis. Die Krisis der Vernunft. Metaphysik und das Spiel der Einbildungskraft, Hamburg (Meiner) 1983.

[S] J. R. Shoenfield. Axioms of Set Theory. In: J. Barwise und H. J. Keisler (eds.), Handbook of Mathematical Logic, Amsterdam/New York (North-Holland Pub. Co.) 1977, S. 321-344.

[SEPTL] Modal Logic. Stanford Encyclopedia of Philosophy. https://plato.stanford.edu/entries/logic-modal.

[T] G. Takeuti. Proof Theory, Mineola/New York (Dover Publications) 2013.

[Ti] R. Tieszen. After Gödel: Platonism and Rationalism in Mathematics and Logic, Oxford (Oxford University Press) 2011.

[vA] M. van Atten. Construction and Constitution in Mathematics. In: Essays on Gödel's Reception of Leibniz, Husserl, and Brouwer. Logic, Epistemology, and the Unity of Science, vol. 35, Heidelberg/New York/Dordrecht (Springer, Cham) 2015.

[W] H. Wang. A Logical Journey. From Gödel to Philosophy, Cambridge, Mass. (MIT Press) 1996.

[Z] E. Zermelo. Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. In: Mathematische Annalen, 59 (1904), S. 514-516.

Nec finitum – nec infinitum. Überlegungen zur Rolle der Mathematik in der Kosmologie des Nikolaus Cusanus

Gregor Nickel

Für P. Elmar Salmann OSB

Zusammenfassung.

In der Kosmologie des Nikolaus von Kues verbinden sich ontologische, epistemologische und naturphilosophische, aber auch genuin theologische und spekulativ-mystische Perspektiven. Weder die Unendlichkeit des Kosmos noch dessen Endlichkeit werden dabei in schlichter Weise behauptet. Der vorliegende Aufsatz will versuchen – vor allem basierend auf *de docta ignorantia II*, aber auch auf Passagen in *de coniecturis, de ludo globi, de mente, de theologicis complementis* – einige dieser unterschiedlichen Motive herauszuarbeiten.

SieB 11 (2019), 171-189

> „Die Philosophie steht in jenem riesigen Buch geschrieben, das uns ununterbrochen offen vor Augen liegt, ich meine das Universum. Aber man kann es nicht verstehen, wenn man nicht zuerst die Sprache und die Buchstaben kennen lernt, in denen es geschrieben ist. Geschrieben aber ist es in mathematischer Sprache, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren, und ohne diese Mittel ist es für Menschen unmöglich, auch nur ein einziges Wort zu verstehen; ohne sie irrt man sinnlos in einem dunklen Labyrinth umher."

Die wohlbekannte und oft zitierte Passage aus Galileo Galileis *Saggiatore*[1] formuliert paradigmatisch eine Grundüberzeugung Moderner Naturwissenschaft und insbesondere Moderner Kosmologie, die *mutatis mutandis* bis heute geteilt wird[2]: Die sonnenklare Sprache Mathematik verwandelt das „dunkle Labyrinth" der Welt in ein Buch, das dem Eingeweihten, nämlich dem mathematisch Versierten, „offen vor Augen" liegt. Die mathematische Sprache tritt mit diesem *credo* in ein Konkurrenzverhältnis zu den klassischen Bildungssprachen Latein, Griechisch und Hebräisch[3], und es ist sicherlich kein Zufall, dass Galilei auf die Gelehrtensprache seiner Zeit verzichtet und in der Volkssprache schreibt. Seine Anspielung auf das zweite „riesige Buch", die Bibel nämlich, bzw. die philosophischen Bücher in den Bibliotheken tritt heutzutage allerdings in den Hintergrund – für Fragen der Weltdeutung spielen diese nicht einmal mehr eine Rolle als konkurrierende Alternative. Die mathematisch kodifizierte Theorie des Universums vertritt nämlich einen dem Gegenstand entsprechend *universalen* Anspruch: sie beschreibt vorgeblich objektiv und letztgültig, was der Fall ist, vom 'kleinsten Atom' bis zum 'Weltganzen'. Und wenn es derzeit in der Beschreibung noch kleinere Unstimmigkeiten geben mag, so würden diese morgen durch eine verbesserte Theorie behoben[4]. Gerade für die

[1] Galilei: Il saggiatore. p. 25: „La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci stà aperto innanzi à gli occhi (io dico l'universo) ma non si può intendere se prima non s'impara à intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, & altre figure Geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un' aggirarsi vanamente per un'oscuro laberinto."

[2] Vgl. beispielsweise den bezeichnenden Titel J. D. Barrow: „Warum die Welt mathematisch ist".

[3] Noch 1877 thematisiert der angesehene und einflussreiche Berliner Physiologe, Wissenschaftsphilosoph und -politiker Emil du Bois-Reymond im letzten, der preussischen Gymnasialbildung gewidmeten Abschnitt seines viel diskutierten Vortrages „Culturgeschichte und Naturwissenschaft" genau dieses Konkurrenzverhältnis. Ironischer Weise führt er zunächst gerade den „Hellenismus" als Erziehungs-Mittel gegen eine abzulehnende „Amerikanisierung" und „Neobarbarei" ins Feld, konstatiert dann jedoch, dass der extrem avancierte altphilologische Unterricht der zeitgenössischen Gymnasien das erwünschte Bildungsziel geradezu konterkariere und dass „der Geist des Gymnasiums nicht gehörig Schritt hielt mit der Entwickelung des modernen Geistes der Menschheit", woraus der Bedarf eines vertieften mathematischen Unterrichts zu Lasten der Altphilologie resultiere. Er beendet seinen Vortrag mit der Forderung: „Kegelschnitte! Kein griechisches Skriptum mehr!" (du Bois-Reymond: Reden, pp. 282).

[4] Mit dem Begriff des „mathematischen Modells" kann in dieser Hinsicht ein doppeltes Ziel

Kosmologie spielt die Mathematik nun allerdings eine Schlüsselrolle, insofern ein experimenteller Zugang wegen der intrinsischen Einmaligkeit des Universums und der prinzipiellen Unkontrollierbarkeit des Phänomenbereiches (räumlich wie zeitlich) problematisch ist. So kann die empirische Seite allenfalls durch zeitlich und räumlich stark eingeschränkte *Beobachtungen* repräsentiert werden, und nur dann durch *Experimente*, wenn eine starke Analogie von irdischen und kosmischen Phänomenen vorausgesetzt wird, die wiederum nicht naturwissenschaftlich beweisbar ist. Die für die Naturwissenschaft übliche gemeinsame Argumentation von mathematisch kodifizierter Theorie und experimenteller Praxis muss in der Kosmologie also weitgehend durch die Mathematik allein übernommen werden[5].

Allerdings ist eine jede physikalische Kosmologie niemals *nur* physikalisch; das gilt für die Antike, das gilt für Galileis Zeit, und in gleichem Maße gilt es für heute. Als 'Weltbild' reklamiert sie immer auch eine über das rein Physikalische hinausgehende Bedeutung, sie ver-ortet Autor und Leserschaft und integriert sie in eine zeitliche Welt-Geschichte. Und natürlich kann sie damit die entsprechenden weltanschaulichen Streitigkeiten auslösen. Unter anderem an dieser Stelle setzt auch der Streit im 'Fall Galilei' an, wenn es darum geht, ob das Kopernikanische System als mögliches – mehr oder minder geeignetes – Rechenmodell, oder aber als getreue Beschreibung der Wirklichkeit aufgefasst werden darf. Und so ist es kein Wunder, dass sich Galilei einer *philosophischen* Schützenhilfe versieht, wenn er gegen die Aristotelische Grundüberzeugung polemisiert, nach der die *Physis* als Bereich der sich in ihren Eigenschaften stets verändernden Substanzen gerade nicht mit den unveränderlichen, lediglich in Bezug auf die Quantität abstrahierten Formen der Mathematik beschrieben werden kann[6]. Galilei weitet dabei die Zuständigkeit der Mathematik als Theoriesprache der Physik über den engeren Bereich der Astronomie – der ja auch nach Aristoteles mathematisch erfasst werden kann und genau deswegen nicht zur eigentlichen (sublunaren) Physik gehört – hinaus 'universell' aus. Dabei

erreicht werden. Auf der einen Seite werden lästige Fragen nach dem ontologischen und epistemischen Status der Theorie abgewiesen: Wer *nur* ein (mathematisches) Modell aufstellt, behauptet ja gar nicht, es ginge um *die* Wirklichkeit. Auf der anderen Seite wird jedoch eine unbegrenzte Perfektionierbarkeit versprochen, in der Sequenz der verbesserten Modelle kommt man vorgeblich der wahren Beschreibung immer näher. Auf diese Weise kann man zugleich einen alternativlosen Zugang zur objektiven Beschreibung des Phänomens behaupten und sich gegen Kritik mit wirksamen Argumenten immunisieren; vgl. (Nickel: Mathematik und Mathematisierung der Wissenschaften).

[5]Kurioser Weise und unter ganz anderen Vorzeichen ist das Verhältnis von Mathematik und Astronomie bereits in den antiken Wissenschaften ein spezielles. Dies beruht zunächst auf der schlichten Tatsache, dass sich Regelmäßigkeiten in der Bewegung der Gestirne sehr viel leichter erkennen und mathematisch beschreiben lassen, als dies bei irdischen Prozessen möglich wäre. So gibt es zum Zeitpunkt der Überlegungen Platons oder Aristoteles' eine erfolgreich mathematisierte Astronomie und folgerichtig findet sich die Astronomie seitdem als Teil des später so bezeichneten Quadriviums im Kanon der mathematischen Disziplinen.

[6]Vgl. (Picht: Der Begriff der Natur) bzw. (Koyré: Galilei).

dreht sich die Argumentation gegenüber dem Aristotelischen Paradigma geradezu um: war es für den Aristoteliker klar, dass die Himmelssphären, gerade weil sie erfolgreich mathematisch beschrieben werden können, einen nicht-physikalischen Bereich ausmachen, dass also die Bereiche des Sublunaren und des Supralunaren ontologisch wie epistemologisch klar zu trennen sind, so ist seit Galilei klar, dass auch der Bereich der irdischen Physis mathematisch beschreibbar sein muss, weil dies ja bereits im Bereich des – dem irdischen grundsätzlich gleichzustellenden und gleich zu behandelnden – Planeten- und Sternsystems möglich ist[7]. Galileis philosophische Stütze besteht dabei in einer rein naturphilosophischen Interpretation von Platons über die Zeiten meistgelesenem Werk, die ironischer Weise gerade von Aristoteles forciert wurde: sein Dialog Timaios[8]. Damit orientiert sich Galilei aber wie auch seine Kollegen im 21. Jahrhundert letztlich an einem pythagoräischen *credo,* zumindest wenn man wiederum der philosophiehistorischen Auskunft des Aristoteles folgt[9]:

> „Sie [die Pythagoräer, G.N.] waren die ersten, welche diesen Studien [der Mathematik, G.N.] einen bedeutenden Platz einräumten; und als sie darin erzogen worden waren, waren sie davon überzeugt, daß die konstitutiven Prinzipien des Mathematischen auch die konstitutiven Prinzipien der seienden Dinge seien."

Einen anderen, sorgfältigen Leser des Timaios beachtet Galileo Galilei hingegen gar nicht. In der Kosmologie des Nikolaus Cusanus steht die Rolle der Mathematik nun allerdings in deutlicher Differenz zu seiner Inspirationsquelle Platon einerseits, aber auch zur Position des späteren Galileo Galilei andererseits. Ich meine, dass ein Blick auf die vielfältig in das Cusanische Werke verflochtenen Überlegungen zur Kosmologie nicht nur aus historischen Gründen lohnt, sondern gerade auch, insofern sie einen deutlichen und bedenkenswerten Kontrast zu den zwar auf mathematisch-technischer Ebene avancierten, philosophisch jedoch arg unbedarften kosmologischen Entwürfen unserer Zeit darstellt. Ich möchte im Folgenden einige Motive der Cusanischen Kosmologie aufsuchen, und dabei vor allem die darin der Mathematik zugewiesene Rolle beleuchten.

Besonders im zweiten Buch der *docta ignorantia* ist Nikolaus' Orientierung an Platons Timaios deutlich erkennbar[10]; er liest diesen allerdings gerade nicht ausschließlich als naturphilosophischen oder gar naturwissenschaftlichen Traktat, sondern in

[7]Bereits an dieser Stelle ist ein Verweis auf Cusanus angezeigt, der eine solche Kontinuität in cap. 12 des zweiten Buches der *docta ignorantia* mit vielen Argumenten unterstützt.
[8]Zur Wirkungsgeschichte des Timaios vgl. (Schäfer: Das Paradigma am Himmel).
[9]Aristoteles: Metaphysik A5.
[10]Für eine philologisch genaue Analyse seines Timaios-Bezuges ist hier nicht der Ort; gleichwohl stellt eine solche Analyse ein wichtiges Forschungs-Desiderat dar.

einem viel umfassenderen Sinne; kurz gesagt als Fortsetzung der Politeia und ihrer Frage nach der Gerechtigkeit und der Idee des Guten auf einer vergrößerten Skala – nach dem Mikrokosmos Seele und dem Mesokosmos Staat also auf der Ebene des Universums als Makrokosmos[11]. Diese Interpretation wird von Platon selbst in vielfacher Weise nahegelegt; bereits in der Politeia ist die Analogie von Seele und Staat ein Leitmotiv, und nicht nur der dramaturgische Hinweis – der Vortrag des Timaios erfolgt am Abend nach dem Gespräch über die Gerechtigkeit in Seele und Staat –, sondern etwa auch die explizite und auf das nachfolgende Gespräch verweisende Bemerkung des Sokrates, „am Himmel [sei] doch vielleicht ein Muster aufgestellt für den, der sehen will" (592b), womit er die Frage des Glaukon nach einer Realisierung des Idealstaates beantwortet, sollte einem aufmerksamen Leser wie Nikolaus nicht entgangen sein. Zugleich setzt er sich jedoch in teilweise sehr deutlicher Kritik von Platon ab, nicht nur insofern er immer wieder eine Art 'Interpolation' zwischen Platon und Aristoteles formuliert oder sich sogar explizit dem Aristoteles anschließt. So sind etwa nur die Individuen wirklich, *actu*, die Universalien nur in eingeschränkter Weise, *contractu,* womit Nikolaus ausdrücklich den Peripatetikern zustimmt[12].

Eine entscheidende Differenz zu allen Vorbildern der Antike ist jedoch seine Radikalisierung des Schöpfungsgedankens: Anders als bei Platon werden sowohl die Materie – oder die Möglichkeit der Gegenstände – als auch die Formen – die innere Notwendigkeit der Gegenstände – überhaupt erst aus der (trinitarisch differenzierten) Einheit Gottes entfaltet bzw. geschaffen[13]. Dies folgt aus seiner Grundvoraussetzung bzw. seiner grundlegenden Unterscheidung[14]: Gegenüber Gott, dem *Maximum absolutum,* wird alles andere relativ und bleibt damit zugleich auf das Absolute bezogen. Somit kann auch keine Materie als eine von Gott verschiedene, *absolute* Möglichkeit dem Schöpfungsakt voraus-gesetzt sein. Und gleiches gilt für die erst durch den göttlichen Logos geschaffenen realen Formen. Anders als der Demiurg Platons, der eine chaotische, ungeordnete Materie vorfindet und diese einer Ordnung unterwirft, die er wiederum vorgegebenen mathematischen und begrifflichen Formen entnimmt, zeichnet Nikolaus das Bild eines – in diesem Sinne – absolut freien und souveränen Schöpfers. Ebenso wie die absolute Einheit und die ihr zugeordnete absolute Möglichkeit bleibt die genaue, also *absolute* Gleichheit als

[11]Vgl. die überzeugende Interpretation von Lothar Schäfer, (Schäfer: Das Paradigma am Himmel).

[12]Vgl. *de docta ignorantia* II, n. 125. Vgl. auch *de mente,* n. 96, wo es heißt, dass die Zahlen der Dinge die Dinge selbst seien: „Es quo habes inter mentem divinam et res non mediare numerum, qui habeat actuel esse, sed numerus rerum res sunt." (Übers. Wilpert, Senger)

[13]Vgl. *de docta ignorantia* II, cap. 7 und folgende.

[14]Vgl. (Bocken: Die Zahl als Grundlage der Bedeutung). Dass diese Unterscheidung auch wieder aufgehoben werden kann, so in *de docta ignorantia* III, versteht sich bei Cusanus von selbst, ist aber zumindest nicht unmittelbarer Gegenstand der Kosmologie.

Name für eine der trinitarischen Personen, nämlich den Logos, reserviert und wird als Phänomen aus dem Bereich der Gegenstände der Schöpfung ausgeschlossen[15]. *Innerhalb* des Universums – im Bereich des Mehr oder weniger, *magis aut minor* – folgt also die graduelle Verschiedenheit aller Gegenstände untereinander und zudem die Verschiedenheit *aller* Bewegungen und Formen: Maß und Gemessenes bleiben stets voneinander verschieden[16].

Die notwendigerweise jeweils unterschiedlichen Perspektiven der (menschlichen) Weltbetrachter werden in einer gleichsam 'kopernikanischen Wende' als prinzipiell gleichberechtigt anerkannt[17]: „Wo auch immer einer sich befindet, er glaubt sich im Mittelpunkt." Es versteht sich von selbst, dass auch die Verschiedenheit der Gegenstände des Universums wie auch diejenige der Beobachtungsperspektiven keinesfalls absolut ist, sie ist als graduell abgestuftes, harmonisch geordnetes Gefüge von Ähnlichkeiten zu denken, in dem jedes Einzelne sogar auf bestmögliche Weise existiert.

Die Mathematik der Dreiecke und Kreise, der Zahlen und Figuren kann bei Cusanus also schon deswegen nicht einfachhin die Sprache des Universums sein, weil bei den wirklichen Gegenständen der Welt keinerlei absolute Gleichheit realisiert ist, und damit auch keine absolute Genauigkeit beim Messen. Es zeichnet die mathematischen Gegenstände aus, dass überhaupt nur bei ihnen eine absolute Gleichheit möglich ist – so bei der Kongruenz von geometrischen Gegenständen und bei der Gleichheit in einer arithmetischen Rechnung. Dies führt Nikolaus explizit darauf zurück, dass ihre Gegenstände innerhalb der unterscheidenden *ratio* des Menschen entfaltet sind und damit innerhalb und gemäß der *ratio* genau (und genau bekannt) sein können[18]. Diese Genauigkeit geht jedoch immer dann verloren, wenn die Mathematik zur 'Vermessung der Welt' verwendet werden soll. Hier gilt, dass kein

[15] Vgl. *de docta ignorantia* II, cap. 1, n. 91.

[16] In seinen Bemühungen um eine Korrektur des nach Jahrhunderten erkennbar 'aus dem Tritt' geratenen Julianischen Kalenders (vgl. *de correctione calendarii*) hatte Nikolaus sicherlich auch ganz handfest erfahren dürfen bzw. müssen, dass keine der planetarischen Bewegungen die anderen genau zu messen erlaubt; vgl. auch *de docta ignorantia* II, cap. 1, n. 91: „Haec quidem, etsi ad infinita tibi deserviant, tamen si ad astronomiam transfers, apprehendis calculatoriam artem praecisione carere, quoniam per solis motum omnium aliorum planetarum motum mensurari posse praesupponit. Caeli etiam dispositio, quoad qualem cumque locum sive quoad ortus et occasus signorum sive poli elevationem ac quae circa hoc sunt, praecise scibilis non est. Et cum nulla duo loca in tempore et situ praecise concordent, manifestum est iudicia astrorum longe in sua particularitate a praecisione esse."

[17] *De docta ignorantia* n. 161: „et ubicumque quis fuerit, se in centro esse credit."

[18] In leicht veränderter Gestalt drückt Nikolaus diesen Gedanken in *de mente* aus. Der genaue Name eines jeden regelmäßigen Polygons – exemplarisch am Dreieck, *triangulus,* vorgeführt – ist bekannt und damit „alles, was man darüber wissen kann" (*de mente*, n. 70). Dies gilt für alle mathematischen Gegenstände, die „wir aus der Kraft des Geistes (...) hervorbringen (ebd.). Im Kontrast dazu bleiben die genauen Namen der „Werke Gottes" unbekannt.

einzelner Gegenstand den anderen genau messen kann, die begriffliche und insbesondere die mathematische Beschreibung der Welt bleibt daher stets nur eine mehr oder minder zutreffende Mutmaßung[19]. Wie eine solche mutmaßende Naturwissenschaft aussehen könnte, illustriert Nikolaus im dritten Teil der Idiota-Trilogie am Beispiel der Waage.

Für die Kosmologie in *de docta ignorantia II* dient die Mathematik jedoch in erster Linie gar nicht als Sprache der Naturbeschreibung, weder für den astronomischen noch für den irdischen Bereich. Dies wird schon daran deutlich, dass Nikolaus in auffälligem Kontrast zu Platon an keiner Stelle avanciertere Mathematik verwendet, wie etwa die fünf regulären Polyeder, die sogenannten platonischen Körper, im zweiten Teils des Timaios oder die komplizierten Zahlenverhältnisse und Mittelwerte im ersten. Und das gilt sicherlich nicht deswegen, weil es für ihn mathematisch zu schwierig gewesen wäre. Der Hauptzweck der Mathematik in *de docta ignorantia* ist gerade nicht eine direkte ‘Anwendung’, sie dient vielmehr als Analogon, als Übungsfeld und Spielmaterial für die Überlegungen des (philosophischen) Intellekts[20]. Im Kontext der Kosmologie dient sie dabei primär zur Illustration des Grundphänomens bzw. des Grundproblems aller klassischen Schöpfungs-Theologie bzw. -Metaphysik: Die Entfaltung einer Vielheit (von einzelnen Gegenständen) aus der (trinitarischen) Einheit (Gottes) und umgekehrt die Partizipation der geschaffenen Vielheit an Gottes Einheit. Immer wieder findet man hierzu in seinen Schriften das *Engima* der Entfaltung eines Punktes zu Linie, Polygon, Fläche und Körper durch sukzessive Bewegung. Dabei partizipieren Linie, Fläche und Körper – in abnehmendem Maße – an der Unteilbarkeit des Punktes, insofern die Linie nur in einer Dimension, die Fläche in zwei Dimensionen und der Körper in drei Dimensionen teilbar ist. In *de beryllo* weist er zudem darauf hin, dass Linie Fläche und Körper *ihrem Begriffe nach* unteilbar sind: In Konkordanz mit Aristoteles ’ Auffassung des Kontinuums gilt: Teile einer Linie sind stets Linie, Teile einer Fläche Fläche, Teile eines Körpers Körper. Dass Euklid wiederum den Punkt genau durch dessen Unteilbarkeit definiert – und damit in gewissem Sinne als unerklärten[21] Grundbegriff *par excellence* – könnte seine Funktion als Darsteller eines ungeteilten Ursprunges noch unterstreichen. In ganz entsprechender Bedeutung wird die Wechsel-Beziehung von arithmetischer Einheit und entfalteter Zahl als Paradigma verwendet. Im theologischen Komplement des Cusanischen

[19] Auch hier möchte man eine Platon-Referenz vermuten, wenn ausgerechnet die unterste Erkenntnisstufe des Liniengleichnisses, die Eikasia, lat. *coniectura*, bei Nikolaus zur epistemischen Leitfigur wird.

[20] Auch dies wäre wiederum eine Parallele zu Platons expliziten Aussagen zum Nutzen der Mathematik – vor allem in der Politeia; vgl. (Nickel: Mathematik und Bildung) sowie (Nickel: ‘Schlüsseltechnologie’).

[21] Vgl. hierzu den Versuch des jungen Theaitet, ‘Erklärung’ bzw. logos als ‘Angabe der Teile’ zu deuten (Theaitet 202a ff) .

theologisch-mathematischen Doppelwerks werden diese beiden Konzepte sogar zusammengespannt. Dort heißt es[22]:

> „Der Schöpfer scheint also zwei [Dinge] geschaffen zu haben, nämlich (*scilicet*) nahe beim Nichts den Punkt. Zwischen einem Punkt und Nichts gibt es nämlich nichts Mittleres. [...] Und das zweite (*aliud*) nahe bei sich nämlich (*scilicet*) das Eine (*unum*, die Eins). Und beide hat er vereint, so dass es *ein* Punkt sei. In diesem einen Punkt ist die Einfaltung des Universums gewesen. Das Universum also wird begriffen (*concepitur*) derart (*sic*) als herausgeführt (*eductum*) aus jenem einen Punkt, so wie wenn aus einem Punkt eine Linie herausgeführt würde, damit aus jener ein Dreieck oder ein Viereck werde und als letztes (*ultimum*) und einfachstes und vollkommenstes und dem Schöpfer ähnlichstes ein Kreis. [...] Daraus kannst du entnehmen, daß und wie der Schöpfer des einzigen (*unius*) Universums aus einem Punkt, den er geschaffen hat, hervorgehen ließ (*fecit*) ein Universum in Ähnlichkeit; so wie unser Geist, der figurieren will (*figurare volens*), anfängt von einem Punkt und diesen ausdehnt zur Linie, dann jene abbiegt zu Winkeln, um eine Fläche einzuschließen und ein Polygon zu machen. [...] Es gibt nichts Vornehmeres als den Geist. Der menschliche Geist aber erscheint dem Ursprung des Universums ähnlich, gleichsam ein Punkt, der in eine Linie herausgeführt erweitert, um irgend etwas zu umgreifen, und z.B. ein Dreieck wird."

Hier ist bereits ein Motiv angedeutet, das die Cusanischen Schriften durchzieht – insbesondere *de coniecturis*. Auch wenn Nikolaus dies terminologisch eher selten explizit verdeutlicht, möchte ich vorschlagen, die bei Cusanus auftretende Mathematik und die mathematischen Termini in zwei grundlegend verschiedenen Bedeutungen zu unterscheiden: Sofern mathematische Begriffe unmittelbar auf die realen Gegenstände, *actu*, bezogen werden, sind sie ausschließlich als metaphorische Ausdrücke einer 'göttlichen Mathematik' zu verstehen. Besonders deutlich

[22] *De theologicis complementis* n. 9, 36ff: "Creator igitur duo fecisse videtur, scilicet prope nihil punctum – inter enim punctum et nihil non est medium; adeo enim prope nihil est punctus, (...) – et aliud prope se, scilicet unum. Et illa univit, ut sit unus punctus; in illo uno puncto fuit complicatio universi. Universum igitur sic eductum concipitur de illo uno puncto, sicut si de uno puncto educeretur una linea, ut de illa fiat unus trigonus vel unus tetragonus et ultimum atque simplicissimum atque perfectissimum et creatori simillimum circulus. (...) Ex quo elicias, quomodo creator unius universi ex uno puncto, quem creavit, fecit prodire unum universum in similitudine, uti mens nostra volens figurare incipit ab uno puncto et illum extendit in lineam, deinde illam flectit in angulos, ut claudat superficiem, et facit polygoniam. (...) nihil enim mente nobilius. Mens autem humana videtur similis principio universi quasi unus punctus, qui eductus in vivam lineam extenditur, ut fiat alicuius capacitatis et fiat ut trigonus. " (Übers. G.N. nach Dupré).

wird dies vielleicht im Sinne des mehrfach zitierten Psalmwortes, Gott habe „alles nach Maß, Zahl und Gewicht“ geschaffen[23]. Mit dieser Zahl – auch wenn sie der Arithmetik zugeordnet wird – kann nicht gerechnet werden, sie ist lediglich eine Chiffre für eine zusammengehaltene Vielheit; Maß und Gewicht sind Chiffren für bestimmte Form und Harmonie. Strikte davon zu unterscheiden ist die Mathematik des menschlichen Geistes, nämlich die klassische (in Cusanus' Interpretation allerdings radikal erweiterbare) Mathematik der arithmetischen Zahlen und geometrischen Figuren. Die *mens humana* entfaltet die Mathematik aus der Einheit des menschlichen *intellectus* in die Formen und Urteile der r*atio* und imitiert dabei den ursprünglichen Schöpfungsakt. Im Gegensatz zur epistemischen Situation bei allen *wirklichen* Dingen sind die mathematischen Gegenstände – als Gegenstände der menschlichen *ratio* – genau und entsprechend mit absoluter Genauigkeit erkennbar. Anschließend kann durchaus versucht werden, mittels der geschaffenen mathematischen Begriffe und Strukturen reale Gegenstände zu beschreiben, allerdings wird dieser Gebrauch immer nur conjetcural bleiben. Nikolaus selbst hatte die beeindruckende Potenz einer mathematischen Beschreibung astronomischer Gegebenheiten, aber eben auch die Grenzen ihrer Genauigkeit im Rahmen seiner Bemühungen um eine Korrektur des julianischen Kalenders gut genug kennen gelernt.

Es gibt nun allerdings durchaus Passagen, etwa in *de docta ignorantia*, die eine Identifikation beider Konzepte nahelegen. So werden im Abschlusskapitel des zweiten Buches die Disziplinen des Quadriviums geradezu als Schöpfungs-Werkzeuge Gottes aufgezählt, und unmittelbar danach wird ein Gebrauch *derselben* Disziplinen durch den Menschen erwähnt[24]:

> „Gott hat bei der Erschaffung der Welt sich der Arithmetik, der Geometrie, der Musik und der Astronomie bedient, Künste die auch wir anwenden, wenn wir nach proportionalen Verhältnissen der Dinge, der Elemente und der Bewegung forschen. Mit Hilfe der Arithmetik hat er die Dinge zur Einheit verbunden, durch die Geometrie sie gestaltet, auf daß sie dadurch Festigkeit, Beständigkeit und Beweglichkeit ihren Bedingungen gemäß erhielten, mit Hilfe der Musik hat er sie so in ein

[23] Vgl. etwa *de docta ignorantia* II n. 176: „Admirabili itaque ordine elementa constituta sunt per Deum, qui omnia in numero, pondere et mensura creavit. Numerus pertinet ad arithmeticam, pondus ad musicam, mensura ad geometriam.“

[24] *De docta ignorantia* II n. 175: „Est autem Deus arithmetica, geometria atque musica simul et astronomia usus in mundi creatione, quibus artibus etiam et nos utimur, dum proportiones rerum et elementorum atque motuum investigamus. Per arithmeticam enim ipsa coadunavit; per geometriam figuravit, ut ex hoc consequerentur firmitatem et stabilitatem atque mobilitatem secundum conditiones suas; per musicam proportionavit taliter, ut non plus terrae sit in terra quam aquae in aqua et aeris in aere et ignis in igne, ut nullum elementorum in aliud sit penitus resolubile. Ex quo evenit mundi machinam perire non posse.“

> gegenseitiges Verhältnis gebracht (. . .) daß der Weltbau nicht zugrunde gehen kann.“

Diese Passage lässt sich sicherlich auch im Sinne eines naiven, ‘christlich getauften’ Pythagoräismus lesen; Gott hätte demnach die Welt nach genau *den* mathematischen Gesetzen eingerichtet, die auch wir (mühsam, Stück für Stück und vielleicht niemals vollständig) erkunden können. Mit ihrer Hilfe könnten wir – im Erfolgsfalle – die (mathematische und das heißt zugleich die ontologische) Struktur der Welt genau kennen, der Unterschied zwischen der menschlichen und der göttlichen Welt-Erkenntnis wäre nur graduell. Immerhin finden wir schon in *de docta ignorantia* u.a. den Hinweis, die Elemente stünden in einer[25] „unaussprechlichen Proportion“, und mit Verweis auf Kohelet wird konstatiert, dass wir bei keinem der Werke Gottes ein wirkliches Wissen erreichen könnten[26]. Auch schließt das hymnische Lob des Schöpfers mit der Feststellung, dass jede Frage an die Gegenstände der Welt stets mit deren Hinweis auf ihren Schöpfer beantwortet wird[27]:

> „Wünscht Du etwas über uns zu wissen, so erfrage das in unserem Grund und in unserer Ursache, nicht in uns. (. . .) Ja auch Dich selbst kannst du nur in ihm finden.“

Die Frage nach dem Verhältnis der menschlichen Mathematik – der Geometrie und Zahlentheorie, wie sie etwa bei Euklid zu finden sind – zur wirklichen (Struktur der) Welt ist hier allerdings noch nicht restlos geklärt. Deutlicher wird die zweifache Bedeutung und die entsprechend zweifache Verwendung der mathematischen Termini allerdings in *de mente* (Kapitel 6 und folgende) angesprochen[28]. Auf die Frage nach seinem Bezug zu Pythagoras und zu den Pythagoräern bemerkt der Laie, dass diese „mit Hilfe der Zahl über alles philosophieren“. Er weist jedoch gleich im Anschluss darauf hin, dass sie nicht

> „von der Zahl reden [wollten], wie sie in die Mathematik gehört und aus unserem Geist hervorgeht – denn daß die nicht Ursprung irgend-

[25] *De docta ignorantia* II n. 176: „Et dum haec aeterna sapientia ordinaret, proportione inexpressibili (...)“

[26] Vgl. *De docta ignorantia* II n. 179: „(...) per doctam ignorantiam experimur, iuxta praemissa nos ‘omnium operum dei nullam’ scire posse ‘rationem’, sed tantum admirari, quoniam ‘magnus dominus’, cuius ‘magnitudinis non est finis’.“

[27] *De docta ignorantia* II n. 180: „Si quid scire de nobis optas, hoc quidem in ratione et causa nostra, non in nobis quaerere. (...) Et neque teipsum nisi in eo reperire potes.“

[28] *De mente* n. 88: „Arbitror autem viros Pythagoricos, qui ut ais per numerum de omnibus philosophantur, graves et acutos. Non quod credam eos voluisse de numero loqui, prout est mathematicus et ex nostra mente procedit – nam illum non esse alicuius rei principium de se constat –, sed symbolice ac rationabiliter locuti sunt de numero, qui ex divina mente procedit, cuius mathematicus est imago. Sicut enim mens nostra se habet ad infinitam aeternam mentem, ita numerus nostrae mentis ad numerum illum.“ (Übers. Steiger)

> eines Dinges ist, steht von selbst fest –, sondern sie haben symbolisch und verstandesmäßig von der Zahl geredet, die aus dem göttlichen Geist hervorgeht, von der die mathematische ein Abbild ist. Denn wie sich unser Geist zum unendlichen ewigen Geist verhält, so verhält sich die Zahl, die aus unserem Geist hervorgeht, zu jener Zahl."

Die Zahl wird im weiteren – wie bereits oben beschrieben – als Symbol für den Ursprung aller Dinge aus der unendlichen Einheit des Schöpfers verwendet. Neu ist hier aber die Begründung: Die Zahlen sind nämlich die einzig für uns verfügbare Vorstellung, die nur aus sich selbst zusammengesetzt ist. Das aber muss auch für das erste aus Gott Entsprungene gelten, denn dessen (von ihm verschiedene) Bestandteile können ja nicht schon vorher vorhanden gewesen sein. Leider lässt sich der Laie nach einer kurzen Erwähnung des Verhältnisses von Quadratseite zu Diagonale, das als „Zahl, die einfacher ist, als daß die Berechnung unseres Geistes sie erreichen könnte" bezeichnet wird[29], von den Fragen des Philosophen eilig weiter leiten. Er fasst zusammen[30]:

> „Wir wissen also, daß das erste Entsprungene dasjenige ist, dessen Bild die Zahl trägt. Und wir können an seine Washeit nicht anders und näher herankommen, da die Genauigkeit der Washeit eines jeden Dinges durch uns nicht anders berührbar ist als im Rätsel oder Bild. Wir nennen nämlich das erste Entsprungene symbolisch 'Zahl', weil die Zahl Träger der Proportion ist (. . .) und die Proportion ist der Ort der Form."

Die Benennung als Zahl erfolgt hier also *nur* in symbolischer Weise, das Wesen der Dinge, *quiditas,* ist allenfalls im Rätselbild berührbar. Dennoch wird der *mens* eine höchste Gestaltungskraft und Flexibilität zugesprochen[31], als „lebendiges Maß" und sogar als „uneingeschränktes Bild der unendlichen Gleichheit". Ihr eigentliches Ziel ist jedoch, sich selbst auszumessen – und dieses eigene Maß wiederum findet sie

---

[29] *De mente* n. 91: „costae quadrati ad diametrum, numerum simpliciorem intueor qauam nostrae mentis ratio attingere queat (. . .)"

[30] *De mente* n. 92: „Habemus igitur, quomodo primum principiatum est, cuius typum gerit numerus. Neque ad quiditatem eius aliter ac propius accedere possumus, cum praecisio quiditatis cuiuscumque rei sit per nos inattingibilis aliter quam in aenigmate vel figura. Primum enim principiatum vocamus symbolice numerum, quia numerus est subiectum proportionis; non enim potest esse proportio sine numero. Et proportio est locus formae; sine enim proportione apta et congrua formae forma resplendere nequit, uti dixi proportione apta cocleari rupta non posse formam manere, quia non habet locum." Auffällig ist hier auch der eher seltene Begriff „typus", den Nikolaus ansonsten nur für Personen verwendet, die einer Rolle in besonderer Weise entsprechen.

[31] *De mente* n. 125: „Mensurat etiam symbolice comparationis modo, ut quando utitur numero et figuris geometricis et ad similitudinem talium se transfert. Unde subtiliter intuenti mens est viva et incontracta infinitae aequalitatis similitudo."

„nur dort, wo alles eins ist.“[32] Im zehnten Kapitel greift der Philosoph die Thematik nochmals auf, wenn er mit Bezug auf Boethius fragt, inwiefern die Wahrheit aller Dinge nur mittels Vielheit und Größe erfassbar sei. Der Laie führt das Konzept der Vielheit in der Arithmetik auf die Unterscheidung, das der Größe in der Geometrie auf die Vollständigkeit zurück[33]; zur Erkenntnis eines jeden einzelnen Dings muss dieses von allen anderen unterschieden und in seiner Vollständigkeit genau erfasst werden. In der Konsequenz bedeutet dies allerdings, dass jedes einzelne wiederum nur vom Ganzen her gewusst werden kann[34], „man kennt den Teil nicht, wenn man nicht das Ganze kennt; das Ganze nämlich mißt den Teil.“ Und auf den Kosmos übertragen gilt[35]:

> „Wenn man Gott, der Urbild des Alls ist, nicht kennt, kann man nichts vom All und wenn man das All nicht kennt, nichts von seinen Teilen wissen. So geht dem Wissen von jedem Einzelnen das Wissen von Gott und allen Dingen voran.“

Das epistemische Vorgehen in der Mathematik verläuft nun aber geradezu umgekehrt, vom einzelnen Element zum komplizierteren Gefüge, so wie auch das geometrische Messen bzw. das Zählen vom Teil zum Ganzen hin verläuft. Explizit gegen das Ansinnen, pythagoräisch zu philosophieren, antwortet der Laie auf die Frage[36], ob „alles, was ist, Größe oder Vielheit ist“, dass dies keineswegs so sei, vielmehr gelte, dass „alles, was ist, unter Größe und Vielheit fällt, da ja das Darlegen aller Dinge gemäß der Kraft der einen oder der anderen geschieht. Größe begrenzt, Vielheit unterscheidet.“

Eine schlichte Identifikation dieser beiden grundlegend verschiedenen ‘Typen’ von Mathematik scheint also bei Cusanus immer wieder explizit abgewiesen zu werden.

[32] *De mente* n. 123: „Nam mens est viva mensura, quae mensurando alia sui capacitatem attingit. Omnia enim agit, ut se cognoscat. Sed sui mensuram in omnibus quaerens non invenit, nisi ubi sunt omnia unum. Ibi est veritas praecisionis eius, quia ibi exemplar suum adaequatum.“

[33] Vgl. *de mente* n. 126: „Opinor, quod multitudinem ad discretionem rettulit, magnitudinem ad integritatem. Nam rei veritatem recte comprehendit, qui eam ab omnibus aliis rebus discernit et ipsius etiam rei integritatem attingit, ultra quam vel infra integrum esse rei non progreditur.“

[34] *De mente* n. 127: „[N]on scitur pars nisi toto scito; totum enim mensurat partem.“

[35] *De mente* n. 127: „Unde necesse erit, ut ad scientiam unius praecedat scientia totius et partium eius. Quare deus, qui est exemplar universitatis, si ignoratur, nihil de universitate, et si universitas ignoratur, nihil de eius partibus sciri posse manifestum. Ita scientiam cuiuslibet praecedit scientia dei et omnium.“

[36] *De mente* n. 128: „Philosophus: Miror, si voluit omne id, quod est, esse magnitudinem vel multitudinem. Idiota: Nequaquam puto, sed quod omne, quod est, cadit sub magnitudine vel multitudine, quoniam demonstratio omnium rerum fit vel secundum vim unius vel alterius. Magnitudo terminat, multitudo discernit.“ Vielleicht ist es kein Zufall, dass Nikolaus die Frage nach dem Bezug zur Pythagoräischen Philosophie ausgerechnet in Kapitel 10 verhandelt.

Und nicht zuletzt wird dies unterstrichen durch die für Nikolaus fundamentale Differenz zwischen Endlichem und Unendlichem, denn „alles mathematische [d.i. mathematische der *mens humana*, G.N.] ist endlich und lässt sich anders gar nicht vorstellen“[37]. Anders als Galilei , für den der mathematisierende Blick in die Welt einen unmittelbaren und schlichten Durchblick auf die Gegenstände erlaubt, ist also das Verhältnis von Mathematik und (Gegenständen im) Universum bei Cusanus deutlich komplizierter zu bestimmen. Dennoch darf und sollte nach einem wie auch immer gearteten Bezug zwischen der ‘göttlichen Mathematik’, wie sie bei Nikolaus metaphorisch oder sogar analog benannt wird, und der Mathematik der (endlichen) Zahlen und Figuren des menschlichen Geistes gefragt werden. Über die bereits mit der Kalenderrechnung angedeutete handfeste „Anwendung“ der Mathematik hinaus möchte ich an Hand von drei Themen, *Unendlichkeit, Kontinuität* und *Außenblick*, einen solchen Bezug auf einer eher strukturellen Ebene andeuten.

In der Mathematik kann auf einem geistigen Experimentierfeld erkundet werden, wie in etwa zu denken ist, dass das Universum weder endlich noch unendlich ist. Bereits im ersten Buch der *docta ignorantia* (cap. 5, n. 13) betrachtet Nikolaus eine tatsächlich größte, gleichwohl endliche Zahl[38]:

> „Wenn man also bei den Zahlen im Aufstieg tatsächlich zu einer größten Zahl kommt, da ja die Zahl endlich ist, so gelangt man doch nicht zur größten schlechthin, gegenüber der es eine noch größere nicht geben kann, denn diese Zahl wäre unendlich.“

Im kosmologischen Buch der *docta ignorantia* wird dies beispielsweise aufgegriffen, wenn Nikolaus über die Vielzahl der Planetensysteme im Universum schreibt[39],

> „dass es gleichsam so viele einzelne Teilwelten des einen Universums gibt, wie es Sterne gibt, deren Zahl unendlich ist, so daß die eine universale Welt (...) in soviel einzelne Welten eingeschränkt ist, daß es für

[37] *De docta ignorantia*, n. 33: „[O]mnia mathematicalia sint finita et aliter etiam imaginari nequeant“, vgl. auch *de docta ignorantia*, n. 13: „Quod si numerus ipse esset infinitus – quoniam tunc maximus actu, cum quo coincideret minimum –, pariter cessarent omnia praemissa. In idem enim redit numerum infinitum esse et minime esse.“

[38] *De docta ignorantia*, n. 33: „Si igitur ascendendo in numeris devenitur actu ad maximum, quoniam finitus est numerus: non devenitur tamen ad maximum, quo maior esse non possit, quoniam hic foret infinitus.“

[39] *De docta ignorantia*, n. 172: „Hoc quidem opinamur ex influentia ignili solis et aquatica simul et aerea lunae et gravedine materiali terrae, consimiliter de aliis stellarum regionibus suspicantes nullam inhabitatoribus carere, quasi tot sint partes particulares mundiales unius universi, quot sunt stellae, quarum non est numerus; ut unus mundus universalis sit contractus triniter progressione sua quaternaria descensiva in tot particularibus, quod eorum nullus est numerus nisi apud eum, qui omnia in numero creavit.“

> sie keine Zahl gibt, es sei denn bei dem, der alles in der Zahl erschaffen hat.“

Dabei geht die Übersetzung m.E. zu weit, die Zahl der Sterne als „unendlich“ zu bezeichnen; hier hätte man den lateinischen Wortlaut „quarum non est numerus“ wohl eher mit „zahllos“ oder „unzählbar“ wiedergeben sollen. Die Zahl der Sterne ist nach Nikolaus sicherlich nicht schlechthin unendlich, aber eben auch nicht mit einer angebbaren, fixierten, endlichen Zahl zu bestimmen.

Ebenso wie bei der Zahl kann jede Linie *potentiell* größer gedacht werden. Im Rahmen der Klassischen Geometrie und Arithmetik tauchen in der Tat weder unendliche Geraden noch unendliche Zahlen auf. Endliche Strecken können jedoch beliebig verlängert, eine jede gegebene Zahl kann immer wieder um eine Einheit vergrößert werden. Bereits die antike, euklidische Geometrie steht insofern in einer nicht einfach auflösbaren Spannung zur Vorstellung eines endlichen Kosmos. Nach Cusanus kann das Universum aber keinesfalls als tatsächlich unendlich aufgefasst werden, denn das würde wegen der Einzigkeit des Unendlichen in einen Pantheismus münden, den Cusanus immer wieder ausdrücklich vermeidet[40]. Er kann sich jedoch auch nicht der antiken Sicht anschließen, das Universum also als endliche, vollkommene Kugel auffassen, wie es Platon und Aristoteles als Erben des Parmenides postulieren, denn dies widerspräche einerseits der geschöpflichen Ungenauigkeit und passte andererseits nicht zu dem unendlichen und vollkommenen Schöpfer. Ein endliches, unvollkommenes, gleichsam ‘schiefes’ und ungenaues Universum wäre also auch keine stimmige Option. So kommt es zu einem – im Rahmen des Möglichen, also durch das Mögliche begrenzten – unendlichen oder grenzenlosen Universum[41]:

> „Das Universum dagegen kann, obgleich es alles umfaßt, was nicht Gott ist, nicht negativ unendlich sein, obschon es ohne Grenze ist und somit privativ unendlich. In dieser Sicht ist es weder endlich noch unendlich. Es kann ja nicht größer sein, als es ist. Das ist eine Folge des Mangels, denn die Möglichkeit, d.h. die Materie erstreckt sich nicht weiter.“

[40] Vgl. etwa auch die scharfe Zurückweisung eines solchen Vorwurfes in der *apologia doctae ignorantiae*.

[41] *De docta ignorantia* II, n. 97: „Universum vero cum omnia complectatur, quae Deus non sunt, non potest esse negative infinitum, licet sit sine termino et ita privative infinitum; et hac consideratione nec finitum nec infinitum est.“ Vgl. auch *de docta ignorantia*, n. 156: „Et cum non sit mundus infinitus, tamen non potest concipi finitus, cum terminis careat, intra quos claudatur.“

Nochmals anders gewendet erhalten wir die Beschreibung eines potentiell unendlichen und zugleich faktisch nicht mehr vergrößerbaren Universums[42]:

> „Obgleich demnach mit Rücksicht auf die unendliche göttliche Macht, die ohne Grenze ist, das All größer sein könnte, so kann es doch nicht größer sein, da sich die Möglichkeit des Seins oder die Materie dem widersetzt, denn diese läßt sich in Wirklichkeit nicht ins Unendliche erweitern. Somit ist das Universum ohne Grenze, da sich ein tatsächlich Größeres nicht geben läßt, gegen das es abgegrenzt würde."

In der Tat kommt es nun vor allem darauf an, den Begriff der Einschränkung möglichst genau zu verstehen[43]:

> „Damit ist alles klar, vorausgesetzt, daß man den Sinn der Einschränkung richtig beachtet."

Und jedenfalls bleibt dabei offen, ob der zunächst leere Begriff eines nicht endlichen Raumes überhaupt mit einer adäquaten Anschauung versehen werden kann – aber das gilt ja bekanntlich bis zu Kant und darüber hinaus. In seiner Charakterisierung des Universums als Umfangs- und Mittelpunkts-los bzw. der Formulierung, dass Mittelpunkt, Durchmesser und Umfang des Universums Gott sind[44], wird nochmals deutlich, dass es Nikolaus hierbei nicht nur um eine mathematisch-räumliche bzw. physikalische Beschreibung gehen kann.

Die mathematische Disziplin lebt seit der griechischen Antike von einer Spannung zwischen den diskreten und den kontinuierlichen Größen. Dass sich die kontinuierlichen Größen der Geometrie nicht auf (diskrete) Zahlenverhältnisse reduzieren lassen, wird in der später so genannten 'antiken Grundlagenkrise' deutlich und im Rahmen der Euklidischen Mathematik – mit einer Prävalenz für das Geometrische – virtuos bearbeitet. Für die von Cusanus behauptete, fehlende Gleichheit und Kommensurabilität (Maß und Gemessenes gehen nicht ineinander auf) der realen Gegenstände stellt diese Bearbeitung von Inkommensurabilitäten auf rein

[42] *De docta ignorantia* II, n. 97: „Quare, licet in respectu infinitae Dei potentiae, quae est interminabilis, universum posset esse maius: tamen resistente possibilitate essendi aut materia, quae in infinitum non est actu extendibilis, universum maius esse nequit; et ita interminatum, cum actu maius eo dabile non sit, ad quod terminetur; et sic privative infinitum."

[43] *De docta ignorantia* II, n. 114: „Unde, quando recte consideratur de contractione, omnia sunt clara."

[44] *De docta ignorantia* II, n. 157: „Sicut igitur terra non est centrum mundi, ita nec sphaera fixarum stellarum eius circumferentia, quamvis etiam, comparando terram ad caelum, ipsa terra videatur centro propinquior et caelum circumferentiae. (...) Aequedistantia praecisa ad diversa extra Deum reperibilis non est, quia ipse solus est infinita aequalitas. Qui igitur est centrum mundi, scilicet Deus benedictus, ille est centrum terrae et omnium sphaerarum atque omnium, quae in mundo sunt; qui est simul omnium circumferentia infinita."

mathematischem Gebiet sicherlich ein exzellentes Muster dar; und nicht zufällig ist es ein Thema der Inkommensurabilität, nämlich diejenige von Kreisumfang bzw. -fläche und Durchmesser, die ihn zeit seines fachmathematischen Lebens begleitet[45]. Darüber hinaus ist das Cusanische Universum ein räumliches, aber auch ein logisches und metaphysisches *Kontinuum*[46], das allenfalls conjectural in *diskrete* Elemente zerlegt werden kann, sei es durch Abgrenzen von Körpern oder durch die rationalen Gattungs- und Art-Begriffe[47]:

> „Die Verbindung des Universums geschieht durch ihn [Gott], so daß alles, wiewohl getrennt, auch verbunden ist. Daher ist die Verbindung zwischen den das eine Universum bildenden, verschränkten Gattungen nach oben und unten eine derartige, daß diese in der Mitte koinzidieren; ebenso besteht zwischen den verschiedenen Spezies die Ordnung einer so gestalteten Kombination, daß die oberste Spezies der einen Gattung mit der untersten der unmittelbar höheren koinzidiert und so ein zusammenhängendes, vollkommenes Universum entsteht.“

Und dementsprechend besteht die *Figura Universi* in *de coniecturis* zwar auf den ersten Blick aus diskret zählbaren und unterscheidbaren Kreisen. Deren wechselseitige Berührung und vor allem die erneute Anweisung, die „tiefste Stelle der oberen Welt mit der höchsten der tieferen“ zu identifizieren[48], verweist jedoch auf eine kontinuierliche Ordnung des Alls. Auch ist die *Figura U* auf jeder Ebene des Universums anwendbar, sie ist also nicht als schlechthin und unveränderlich vorliegendes Bild diskreter Stufen zu verstehen.

Im Globusspiel unternehmen Nikolaus und sein Gesprächspartner Johannes das bemerkenswerte Gedankenexperiment, das Universum nicht nur ‘von innen’, sondern gleichsam auch ‘von außen’ zu beobachten. Sie verschaffen dabei dem problematischen *Begriff* des Alls eine entsprechend problematische *Anschauung*. Zunächst geht es nur um die halbkugelig mehr oder minder runde Gestalt der Spielkugeln. Eine perfekte Rundung würde jedoch – nach den Worten des Kardinals – nicht mehr sichtbar sein[49]:

---

[45] Vgl. hierzu (Nickel: Belehrtes Nicht-Können).

[46] Dabei ist allerdings zu beachten, dass das Universum wiederum als ein – ganz im Sinne des Aristoteles – potentiell unendliches Kontinuum aufzufassen ist, also nicht mit aktual unendlich vielen graduellen Abstufungen; vgl. *de docta ignorantia* n. 82.

[47] *De docta ignorantia* n. 185: „Quapropter inter genera unum universum contrahentia talis est inferioris et superioris connexio, ut in medio coincidant, ac inter species diversas talis combinationis ordo existit, ut suprema species generis unius coincidat cum infima immediate superioris, ut sit unum continuum perfectum universum.“

[48] *De coniecturis* n. 67: „Nam infimum superioris cum supremo inferioris in omnibus coincidere conspicis.“

[49] *De ludo globi* n. 8: „Cum enim superficies a centro sphaerae undique aeque distet, extremitas rotundi in indivisibili puncto terminata manet penitus nostris oculis invisibilis. Nihil enim nisi divisibile et quantum a nobis videtur.“

> „Da die Oberfläche an jeder Stelle vom Mittelpunkt der Kugel gleich weit absteht, bleibt die im unsichtbaren Punkt zielbestimmte äußerste Grenze des Runden unseren Augen völlig unsichtbar. Denn wir sehen nur das Teilbare und Ausgedehnte.“

Diese These provoziert die – in puncto Vollkommenheit der Rundung des Universums durchaus in Frage zu stellende – Schlussfolgerung des Johannes[50]:

> „Johannes: Also ist die äußere Rundheit der Welt, die ich für ganz vollkommen halte, keinesfalls sichtbar.
>
> Kardinal: Keinesfalls. So ist auch die Rundheit der Welt (mundi) nicht teilbar, da sie im unteilbaren und nicht zu vervielfältigenden Punkt besteht. Denn die Rundheit kann nicht aus Punkten zusammengesetzt werden. Der Punkt ist nämlich, weil er unteilbar ist und weder Quantität oder Teile oder ein Vorne und Hinten und andere Verschiedenheiten hat, mit keinem andern Punkt zusammensetzbar. Aus Punkten ist also nichts zusammengesetzt. Einen Punkt zu einem Punkte hinzuzufügen hat ein Ergebnis wie wenn du ‘nichts mit nichts’ verbindest. Das Äußerste der Welt ist nicht aus Punkten zusammengesetzt. Sondern ihr Äußerstes ist Rundheit, die im Punkte besteht. Denn weil die eine Höhe der Rundheit überall in gleicher Distanz vom Zentrum ist, und nicht viele Linien genau gleich sein können, wird es nur eine

[50] *De ludo globi* n. 8, 1ff: „Ioannes: Aiebas globum semisphaericam habere superficiem. Possetne habere minorem aut maiorem; sive integrae sphaerae rotunditatem? Cardinalis: Globum posse habere superficiem maiorem aut minorem aut integrae sphaerae non nego, si de visibili figura seu rotunditate loquimur, quae nequaquam est vera aut perfecta. Nam rotunditas, quae rotundior esse non posset, nequaquam est visibilis. Cum enim superficies a centro sphaerae undique aeque distet, extremitas rotundi in indivisibili puncto terminata manet penitus nostris oculis invisibilis. Nihil enim nisi divisibile et quantum a nobis videtur. Ioannes: Ultima igitur mundi sphaerica rotunditas, quam puto perfectissimam, nequaquam est visibilis. Cardinalis: Nequaquam. Immo nec divisibilis mundi rotunditas, cum in puncto consistat indivisibili et immultiplicabili. Non enim rotunditas ex punctis potest esse composita. Punctus enim, cum sit indivisibilis et non habeat aut quantitatem aut partes sive ante et retro et alias differentias, cum nullo alio puncto est componibilis. Ex punctis igitur nihil componitur. Punctum enim puncto addere perinde resultat ac ‘si nihil nihilo iungas’. Non est igitur extremitas mundi ex punctis composita. Sed eius extremitas est rotunditas, quae in puncto consistit. Nam cum una sit altitudo rotunditatis, quae undique est aeque distans a centro, et non possint esse plures lineae praecise aequales, erit una tantum aeque distans rotunditatis altitudo, quae in puncto terminatur. Ioannes: Mira dicis. Nam intelligo has omnes varias visibiles formas in mundo inclusas esse; et tamen, si possibile foret quem extra mundum constitui, mundus foret illi invisibilis ad instar indivisibilis puncti. Cardinalis: Optime cepisti. Et sic concipis mundum, quo nulla quantitas maior, in puncto, quo nihil minus, contineri et centrum atque circumferentiam eius non posse videri nec esse plura diversa puncta, cum punctus non sit plurificabilis. In pluribus enim atomis non est nisi ‘unus et idem punctus’, sicut in pluribus albis una albedo. Unde linea est puncti evolutio. Evolvere vero est punctum ipsum explicare, quod nihil aliud est ‘quam punctum in atomis pluribus ita quod in singulis coniunctis et continuatis esse’.

> Höhe der Rundheit in gleicher Distanz geben, die im Punkte terminiert wird (terminatur).
>
> Johannes: Wunderbares sagst du. Denn ich verstehe: Alle dies verschiedenen sichtbaren Formen (formas) sind eingeschlossen (inclusas esse) in der Welt; und dennoch würde, wenn es möglich wäre, daß jemand außerhalb der Welt hingestellt werde, die Welt unsichtbar für ihn sein, ganz so wie der unteilbare Punkt."

Folgen wir Johannes und Nikolaus, so zeigt der kosmologische Gesamtblick, der von Galilei bis heute ge- und versucht wird, am Ende herzlich wenig. Wer die heutigen Weltbilder physikalischer Kosmologie betrachtet, die angeblich wie ein Foto aus einem objektiven Nirgendwo das All darstellen, mag auf den ersten Blick beeindruckt sein. Wer sich aber nicht mit diesen schlichten Phantasmen begnügt, wird danach fragen, wer hier aus welcher Perspektive mittels welcher Beschreibungsmittel diesen Blick verbürgt. Wer tiefer sieht, der muss sich schließlich mit einem Punkt, einem Unteil- und Unerklärbaren nahe bei nichts begnügen. Die aktuelle weltanschauliche Debatte um eine zeitgemäße Kosmologie könnte – so meine ich – von der philosophischen Sorgfalt eines Cusanus allemal noch etwas lernen.

Literatur

John D. Barrow: Warum die Welt mathematisch ist. Übersetzung und Nachwort von Herbert Mehrtens. Campus Verlag, Frankfurt a. Main 1993.

Inigo Bocken: *Die Zahl als Grundlage der Bedeutung bei Nikolaus von Kues.* In: Friedrich Pukelsheim, Harald Schwaetzer (Hgg.): Das Mathematikverständnis des Nikolaus von Kues. MFCG **29.** Paulinus, Trier 2005.

Emil du Bois-Reymond: Reden. Erste Folge. Verlag von Veit & Comp., Leipzig 1886.

Galileo Galilei: Il saggiatore: Nel quale con bilancia esquisita e giusta si ponderano le cose contenute nella Libra astronomica e filosofica di Lotario Sarsi Sigensano / Scritto in forma di lettera." Roma, Appresso Giocomo Mascardi MDCXXIII.

Alexandre Koyré: Galilei. Die Anfänge der neuzeitlichen Wissenschaft. Wagenbach, Berlin 1988.

Gregor Nickel: *Widersprüche und Unendlichkeit - Beobachtungen bei Nikolaus von Kues und Georg Cantor.* In: Walter Hutter (Hrsg.): Mathematik, Physik und

Geisteswissenschaft. Perspektiven und pädagogische Relevanz. Stuttgart 2013, 55-70.

Gregor Nickel: *Mathematik und Mathematisierung der Wissenschaften – Ethische Erwägungen.* In: Jochen Berendes (Hrsg.): Autonomie durch Verantwortung. mentis Verlag, Paderborn 2007, 319-346.

Gregor Nickel: *Mathematik und Bildung – Randnotizen zu einem klassischen Thema.* Coincidentia Beiheft 5, Bildung gestalten. Akademische Aufgaben der Gegenwart. Aschendorff Verlag, Münster 2015, 139-162.

Gregor Nickel: *Belehrtes Nicht-Können als virtuoses Können in der Mathematik.* In: Tilman Borsche / Harald Schwaetzer (Hgg.): Können - Spielen - Loben. Cusanus 2014. Texte und Studien zur Europäischen Geistesgeschichte B **14**, Aschendorff Verlag, Münster 2016, 153-176.

Gregor Nickel: *'Schlüsseltechnologie' oder Medium zur freien Entfaltung des Geistes – Bildende Beiträge der Mathematik.* Informationes Theologiae **20** (2016), 141-162.

Georg Picht: Der Begriff der Natur und seine Geschichte. Klett-Cotta, Stuttgart ^{2}1990.

Lothar Schäfer: Das Paradigma am Himmel. Platon über Natur und Staat. Alber, Freiburg 2005.

Heinrich Behmanns Beitrag zur Grundlagendebatte

Christian Thiel

Ein Vortrag über Heinrich Behmann (1891–1970) im Programm einer Tagung über „Grundlagen“ und die Rolle der Logik zwischen Mathematik und Philosophie ist zwar nicht selbstverständlich, aber auch nicht überraschend[1]. Nach der Promotion bei Hilbert 1918 in Göttingen und der ebenfalls dort erfolgten Habilitation 1921 beteiligt sich Behmann auf Einladung Carnaps an der 1923 in Erlangen durchgeführten Tagung über mathematische Logik und wissenschaftliche Philosophie als Vortragender. Auf sein 1927 erschienenes Bändchen *Mathematik und Logik* verweist Carnap in *Der logische Aufbau der Welt* 1928 und im *Abriß der Logistik* 1929, und die *Grundzüge der theoretischen Logik* von Hilbert und Ackermann 1928 sowie die *Grundlagen der Mathematik* von Hilbert und Bernays (1930/1934) stellen das in Behmanns Habilschrift entwickelte Entscheidungsverfahren für die erweiterte einstellige Quantorenlogik ausführlich dar. Fraglos zählt Behmann zu dem im Göttingen der 1920er Jahre um Hilbert versammelten Kreis ausgezeichneter Grundlagenforscher wie Ackermann, Bernays, Gentzen, Schönfinkel, Weyl, Zermelo u.a., zumal er sich mit einem profilierten Beitrag auch zu den logischen und mengentheoretischen Antinomien äußert, die kurz nach der Wende zum 20. Jahrhundert die sog. Grundlagenkrise der Mathematik hatten akut werden lassen.

[1]Der hier abgedruckte Text ist die leicht gekürzte Fassung eines Vortrags bei der Tagung „Logik zwischen Mathematik und Philosophie. Zur Geschichte des Grundlagenbegriffs und seiner Erforscher“ in Göttingen vom 28. bis 30. April 2017, organisiert und durchgeführt von Svenja Brand, Karsten Engel und Robert Plaßmann mit Unterstützung der Studienstiftung des deutschen Volkes. Der Inhalt der meisten beim Vortrag gezeigten Folien wurde in den Text integriert, das Porträt Heinrich Behmanns befindet sich als Teil der Sammlung Voit in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen und ist mit freundlicher Erlaubnis dieser Institution wiedergegeben.


Peter Matzen-Göttingen

Es ist klar, dass ich für diese Skizze nicht nur die rein logischen und die eher philosophischen Arbeiten Behmanns ausklammern muss, sondern auch seine zahlreichen Vorschläge für eine neue logische Terminologie und eine neue Symbolik (die sich zum Glück nicht hat durchsetzen können, sondern dem eben genannten Bändchen *Mathematik und Logik* neben einer Bemerkung über dessen didaktische Mängel einen bösen, aber berechtigten Verriss von Adolf Fraenkel im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beschert hat). Schließlich übergehe ich alle Untersuchungen über Einzelfragen der angewandten Mathematik (wie z.B. numerische und graphische Methoden) und bringe auch aus dem Inhalt der dann von den 40 Veröffentlichungen Behmanns verbleibenden acht Arbeiten über Grundlagenfragen nur das Grundsätzliche zur Sprache, schon wegen des ansonsten erheblichen technischen Aufwandes.

Dass neben den grundlagentheoretischen Arbeiten auch solche zur angewandten Mathematik stehen, Grundlegungsfragen aber zunehmend in den Hintergrund treten, hat biographische Gründe. Heinrich Behmann, 1891 in Bremen-Aumund geboren, studierte nach Schulzeit und Abitur 1909 zunächst Mathematik und Physik in Tübingen, Leipzig und Göttingen, meldete sich aber 1914 als Kriegsfreiwilliger. 1915 erlitt er an der Ostfront in Polen eine schwere Kopfverletzung, die ihn nach längerem Lazarettaufenthalt dauerhaft kriegsunfähig machte. Trotzdem nahm er sein Studium wieder auf und erwarb 1918 den Doktortitel mit einer von Hilbert betreuten Dissertation *Die Antinomie der transfiniten Zahl und ihre Auflösung durch die Theorie von Russell und Whitehead.* Die über 350 Seiten umfassende Arbeit blieb damals der Zeitumstände wegen ungedruckt, eine Zusammenfassung durch Behmann selbst erschien erst 1923 im Jahrbuch der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen. Im April 1919 wurde Behmann Assistent am Göttinger Institut für angewandte Mathematik, was seine nun verstärkte Orientierung an diesem Gebiet erklärt.

Nach Abschluss des Staatsexamens und kurzem Wechsel in den Schuldienst habilitierte sich Behmann 1921 in Göttingen mit einer Arbeit *Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem*, die 1922 in den *Mathematischen Annalen* erscheint. Im Oktober 1923 heiratet er Emmy Macrander (1895–1984). Am Institut für angewandte Mathematik scheint Behmann Lehrveranstaltungen Carl Runges (der 1924 emeritiert wurde) mit Übungen unterstützt und z.T. auch gemeinsam mit ihm durchgeführt zu haben. Auf Empfehlung Runges erhielt er einen Lehrauftrag für angewandte Mathematik an der Universität Halle, wohin er sich deshalb 1925 umhabilitierte. Nach der Geburt des Sohnes Volker geht die Familie 1926/27 mit einem Rockefeller-Stipendium nach Rom, 1929 trägt Behmann auf der DMV-Tagung in Prag „Zu den Widersprüchen der Logik und der Mengenlehre“ vor, woran sich vor Ort, im Briefwechsel und in der Literatur eine verzweigte

Diskussion anschließt. 1930 finden wir Behmann auf der „Gästetagung der Mathematischen Gesellschaft“ in Jena, 1935 und 1937 auf internationalen Kongressen in Paris.

Das Kriegsende bringt einen scharfen Einschnitt in Behmanns Lebensverhältnisse. 1937 war er als Mitglied in die NSDAP eingetreten; 1938 wurde er an der Universität Halle „nichtbeamteter außerordentlicher Professor“. Im September 1945 (also bereits nach Kriegsende) wurde Behmann in Halle zunächst zum außerplanmäßigen Professor ernannt, im Oktober jedoch ohne Pensionsberechtigung entlassen. Grund dafür war zweifellos die Zugehörigkeit Behmanns zur NSDAP und anderen nationalsozialistischen Organisationen. Obwohl ihn eine heute im Universitätsarchiv Halle aufbewahrte Aufnahme mit Parteiabzeichen und einem weiteren Ehrenzeichen am Revers des Jacketts zeigt, ist das Ausmaß seines Engagements für den Nationalsozialismus schwer einzuschätzen. Vielleicht lockte die Aussicht auf eine akademische Karriere (ähnlich wie man Gerhard Gentzen für seine angestrebte Universitätslaufbahn den Eintritt in die Hochschul-SA und die NSDAP nahegelegt hatte). Von besonderen politischen Interessen Behmanns ist nichts bekannt; andererseits stand er offenbar den sog. Deutschen Christen nahe, die einen entschiedenen Antisemitismus pflegten. Dass Behmann diese Einstellung teilte, darf man angesichts seiner guten Zusammenarbeit mit jüdischen Mitgliedern der Göttinger Gruppe wie Bernays oder Schönfinkel allerdings bezweifeln; auch sein Bemühen erst um eine Veröffentlichung über Georg Cantor, dann um einen Vortrag zur Würdigung von dessen 100. Geburtstag, die ihm 1944/45 aus „rassepolitischen Gründen“ mit Bezug auf Cantor untersagt wurden, dürfte kaum auf bloße politische Naivität zurückzuführen sein.

Wie dem auch sei: Seit 1945 war Behmann aus dem akademischen Betrieb entfernt und sein wissenschaftlicher Austausch auf Korrespondenz und Publikationen beschränkt. 1946 flieht er aus Sorge vor Deportation als Wissenschaftler durch die russische Besatzungsmacht aus Halle in seine Heimatstadt Bremen. 1949 wird er dauerhaft gehunfähig, so dass seine Frau Emmy, die in Halle noch auf eine Rückkehr des vermissten Sohnes aus der vermuteten sowjetischen Kriegsgefangenschaft gewartet hatte, 1950 ebenfalls nach Bremen flieht. Dort ist Heinrich Behmann im Februar 1970 verstorben.

Die Vita zeigt, dass nicht nur der erzwungene Abbruch der akademischen Karriere, sondern schon davor die Folgen der schweren Kriegsverletzung aus dem Ersten Weltkrieg sowie die Umorientierung des Lehr- und Forschungsschwerpunktes erkennbare äußere Gründe haben. Mit Rücksicht auf erstere nennt Runge in einem Gutachten von 1926 Behmann zwar einen „tiefen und klaren Denker“ und einen der besten Kenner der mathematischen Logik, bescheinigt ihm aber auch Schwerfälligkeit im Unterricht und das Fehlen eines die Hörer mitreißenden lebhaften Temperaments. Freilich wird man dieser Skepsis die Erinnerung Carl Gustav Hempels gegenüberstellen dürfen, der mir in einem Brief vom 24. April 1984 schrieb: „Vielleicht darf ich noch sagen, daß ich mein erstes Studienjahr (1923–24) in Göttingen zubrachte und daß dort Behmanns Vorlesung über mathematische Logik und das Entscheidungsproblem (mit etwa 4 Zuhörern!) einen nachhaltigen Eindruck auf mich machte.“

Von Behmanns Beiträgen zur Grundlagendebatte ist als erster wohl die schon genannte Dissertation *Die Antinomie der transfiniten Zahl und ihre Auflösung durch die Theorie von Russell und Whitehead* zu nennen. Wegen Papiermangels konnte sie damals nicht gedruckt werden – das Rigorosum fand im Juli 1918 statt, ein knappes Jahr vor dem Versailler Vertrag, nach dem die wirtschaftliche Lage Deutschlands noch auf Jahre katastrophal blieb. Allerdings hatte Behmann schon lange vor und unabhängig von seiner 1923 erschienenen Zusammenfassung die Ergebnisse seiner Dissertation in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vorgetragen. Dabei hätte im Titel der Abhandlung statt von „der transfiniten Zahl“ besser von „den transfiniten Zahlen“ die Rede sein sollen, denn es geht um die damals bekannten Antinomien der transfiniten Ordinalzahlen und Kardinalzahlen (also der Cantorschen Alefs). Behmann analysiert und beseitigt sie durch den Aufbau eines Systems, das sich als eine stark revidierte Variante des Systems der *Principia Mathematica* von Whitehead und Russell (I–III 1910 – 1913) darstellt. Zahlreiche Ungenauigkeiten und Unklarheiten dieses Monumentalwerkes werden dabei behoben, andere zumindest als klärungsbedürftig aufgewiesen, vor allem tendiert Behmann aber zu einer typenfreien Logik im Unterschied zur einfachen und zur verzweigten Typentheorie der *Principia*. Nach Meinung einiger Mathematikhistoriker haben Hilbert und sein Kreis erst durch die Analysen in Behmanns Dissertation über Absichten und Inhalt der *Principia Mathematica* Genaueres erfahren und die Bedeutung der formalen Logik für die Grundlegung der Mathematik erkannt.

Der zweite wichtige grundlagentheoretische Beitrag Behmanns (den heutige Logikhistoriker für seinen bedeutendsten halten) betrifft das sog. Entscheidungsproblem. Bei diesem geht es darum (so formulieren es Hilbert und Ackermann 1928), wie man „bei einem beliebig vorgelegten logischen Ausdruck, der keine individuellen Zeichen enthält, feststellen kann, ob der Ausdruck bei beliebigen Einsetzungen für die vorkommenden Variablen eine richtige Behauptung darstellt oder nicht“ (a.a.O., S. 73), oder gleichwertig (weil Allgemeingültigkeit einer Formel A klassisch die Nichterfüllbarkeit von $\neg A$ bedeutet), „ob es überhaupt eine Einsetzung für die Variablen gibt, so daß durch den betreffenden Ausdruck eine richtige Behauptung dargestellt wird“. Das Entscheidungsproblem ist gelöst, „wenn man ein

Verfahren kennt, das bei einem vorgelegten logischen Ausdruck durch endlich viele Operationen die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit erlaubt“ (a.a.O.; in der Beweistheorie tritt an die Stelle der Allgemeingültigkeit die Ableitbarkeit und an die Stelle der Erfüllbarkeit die Unwiderlegbarkeit). Für die klassische Junktorenlogik ist das Entscheidungsproblem durch die bekannte Methode der Wahrheitstafeln gelöst, für die Quantorenlogik als Ganze ist es unlösbar außer in Spezialfällen. Zu diesen gehört die monadische (d.h. nur einstellige Aussageformen enthaltende) Quantorenlogik, für die bereits Löwenheim 1915 und Skolem 1920 Entscheidungsverfahren angegeben hatten, denen aber Behmann 1922 ein weiteres zur Seite stellt, dem sich seiner Transparenz wegen z.B. Hilbert und Bernays in ihren *Grundlagen der Mathematik* anschließen und das in Lehrbüchern bis heute vorgeführt wird.

In der vorliegenden Skizze kann das Behmannsche Verfahren nicht im Detail beschrieben werden, da es eine gewisse Vertrautheit mit Begriffen und Verfahren der Quantorenlogik voraussetzt und auch mehr Raum erfordern würde, als uns zur Verfügung steht. Ist eine aus Junktoren, Quantoren, einstelligen Aussageformen und evtl. Aussagenvariablen logisch zusammengesetzte Formel zur Entscheidung über Allgemeingültigkeit (oder Erfüllbarkeit) vorgelegt, so ersetzen wir als erstes die Bestandteile der Gestalt „$A \leftrightarrow B$“ durch „$(A \to B) \wedge (B \to A)$“ und solche der Gestalt „$A \to B$“ durch „$\neg A \vee B$“. Anwendung von Negationsregeln der Quantorenlogik und Regeln der Quantorenverteilung (wie etwa $\forall x \neg Ax \leftrightarrow \neg\exists x \neg Ax$ und $\exists x\ (Ax \vee Bx) \leftrightarrow (\exists x\ Ax \vee \exists x\ Bx)$ erlaubt dann die Herstellung gewisser (übrigens nicht eindeutig bestimmter) „Normalformen“. Bei der einen Art des Vorgehens werden alle Quantoren aus den Teilausdrücken „herausgezogen“ und stehen dann beim Abschluss des Verfahrens links am Anfang des erreichten Ausdrucks (man spricht daher von einer „pränexen“ Normalform). Behmann geht anders vor und verwendet die Regeln gerade umgekehrt zum „Hineintreiben“ der Quantoren; er gelangt so zu einer Normalform, die heute gelegentlich als „antipränex“ bezeichnet wird. Der erreichte Endausdruck ist dann nur noch aus „Primärformeln“ junktorenlogisch zusammengesetzt, die entweder einfache Aussagenvariablen sind oder aber eine der Gestalten

$$\forall x\ (P_1(x) \vee \ldots \vee P_m(x)) \text{ oder } \exists x\ (P_1(x) \wedge \ldots \wedge P_n(x))$$

haben, wo die $P_1(a)$, ... , $P_m(a)$, $P_n(a)$ für Argumente a entweder Primformeln oder aber Negate von solchen sind. Über die Allgemeingültigkeit oder Erfüllbarkeit von Formeln dieser antipränexen Form kann nun aber in jeweils endlich vielen Schritten entschieden werden. Wer sich für das Behmannsche Verfahren im Detail interessiert, findet ein gut nachvollziehbares Beispiel in Hilbert/Bernays, *Grund-*

lagen der Mathematik I (S. 147ff. der 2. Auflage von 1968).

Der dritte Beitrag Behmanns zur Grundlagendebatte ist sein Vorschlag zur Lösung der mengentheoretischen Antinomien. Behmann sieht in seinem Prager Vortrag von 1929 durch Russells berühmten Brief an Frege vom 16. Juni 1902 „das von den modernen Paradoxien beherrschte Zeitalter der mathematischen Grundlagenforschung eröffnet“ (Behmann 1931, S. 40). Die zu den damals bekannten Antinomien gemachten Lösungsvorschläge vermeiden die Widersprüche, lösen sie aber nicht auf. Für seinen eigenen Vorschlag, der dies seiner Meinung nach tut, geht Behmann von der in Russells Brief 1902 gewählten „begriffslogischen“ Fassung aus:

> Symbolisiert man die Eigenschaft „φ kommt sich selbst nicht zu“ als
>
> $$\neg\varphi(\varphi)$$
>
> und schreibt dafür „zur Abkürzung“ $F(\varphi)$, definiert also
>
> $$F(\varphi) \leftrightharpoons \neg\varphi(\varphi),$$
>
> so gilt
>
> $$\forall\varphi(F(\varphi) \leftrightarrow \neg\varphi(\varphi)).$$
>
> Setzen wir nun für die Eigenschaftsvariable φ insbesondere F ein, so ergibt sich der Widerspruch
>
> $$F(F) \leftrightarrow \neg F(F).$$

Zur Analyse besinnt sich Behmann auf den Sinn des „Abkürzens“ in der Lehre von der expliziten Definition, wie sie sich schon bei Blaise Pascal und in der *Logik von Port-Royal* 1662 findet. Danach liegt es „im Wesen der Abkürzung, daß sie grundsätzlich entbehrlich ist“ (S. 40). Dann sollte auch in unserem Fall das F aus der Argumentation dadurch eliminiert werden können, dass man es überall durch sein Definiens ersetzt. Der Versuch dieser Elimination scheitert jedoch bei $F(F)$, denn ersetzt man das F der Definition durch sein Definiens, so erhält man $\neg F(F)$ und steht vor einem unendlichen Regress. Es gibt also, resumiert Behmann, „keinen von Kurzzeichen freien Ausdruck, von welchem $F(F)$ Abkürzung sein würde“ (S. 41). Er legt Wert auf die Feststellung, dass damit nicht etwa „die Eigenschaft, sich selbst nicht zukommen‘ oder [...] die ‚Menge aller sich selbst nicht als Element enthaltenden Mengen‘ selber als sinnlos erklärt wird“ (S. 41f.).

Aufgrund dieser Analyse formuliert Behmann die Regel: „Kurzzeichen enthaltende Ausdrücke sind nur insoweit zulässig, als die vollständige Ersetzung der Kurzzeichen durch ihre Bedeutungen symbolisch vollziehbar ist" (S. 42f.) . Und da dies auch für sämtliche aus Allaussagen $\forall x\ f(x)$ durch Einsetzung hervorgehenden Instanzen gilt, kann die Allaussage nur bedeuten, dass allen Dingen, *deren Namen legitim in die Leerstelle von $f(x)$ einsetzbar sind*, die Eigenschaft f zukommt. Behmann lässt seiner ersten Regel daher eine zweite folgen: „Eine Variable darf nicht ohne weiteres als den gesamten dem unmittelbar vorliegenden Symbolzusammenhang nach in Frage kommenden Bereich – d. h. im Fall der logischen Variablen je nachdem alle Dinge, alle Aussagen oder alle Eigenschaften usw. –, vielmehr diesen nur insoweit durchlaufend betrachtet werden, als das Einsetzungsergebnis sich kurzzeichenfrei schreiben lässt" (S. 43f.). Mit seiner Skizze einer durch diese Regeln eingeschränkten Logik (die er mit einem von Hessenberg eingeführten Ausdruck zunächst als „ultrafinit", später einfach als „typenfrei" bezeichnet), meint Behmann gezeigt zu haben, dass „für das Zustandekommen der mengentheoretischen Widersprüche weder der naive Mengenbegriff noch der Unendlichkeitsbegriff, sondern wesentlich der gekennzeichnete Mißbrauch von Kurzzeichen oder Variablen verantwortlich zu machen ist" (S. 47). Nach dessen Ausschließung können wir nach Meinung Behmanns den von Cantor, Dedekind und Frege eingenommenen „naiven" Standpunkt beibehalten.

Der Vorschlag Behmanns hat, nicht zuletzt durch seine Behandlung in der 3. Auflage von W. Dubislavs *Die Definition* 1931 (§ 48: „Der Behmannsche Lösungsversuch und seine Widerlegung"), die Fachwelt für eine ganze Weile beschäftigt. In Briefen schon seit 1928 (da Behmann seine Analyse im Kollegenkreis schon vor der Prager DMV-Tagung bekannt gemacht hatte) haben Ackermann, Bernays, Gödel und Ramsey eingewendet, dass die Zermelo-Russellsche Antinomie ja auch ohne Rückgriff auf die Einführung von Kurzzeichen hergeleitet werden könne. Dies zeigt eine im wesentlichen von Bernays stammende Fassung, ausgehend von dem für beliebiges ψ gültigen Subjungat

$$\forall\varphi\ (\neg\varphi(\varphi) \leftrightarrow \psi(\varphi)) \to (\neg\psi(\psi) \leftrightarrow \psi(\psi)).$$

Aus diesem folgt $\exists\psi\ \forall\varphi\ (\neg\varphi(\varphi) \leftrightarrow \psi(\varphi)) \to \exists\psi\ (\neg\psi(\psi) \leftrightarrow \psi(\psi))$.

Da das Antezedens das (als gültig angenommene) unbeschränkte Komprehensionsprinzip ausdrückt, gilt nach der Abtrennungsregel auch das Sukzedens

$$\exists\psi\ (\neg\psi(\psi) \leftrightarrow \psi(\psi)),$$

im Widerspruch zum logisch gültigen $\forall\psi\ \neg(\neg\psi(\psi) \leftrightarrow \psi(\psi))$.

Da die Herleitung gar keinen Gebrauch von Kurzzeichen gemacht hat, scheint der Behmannsche Lösungsvorschlag also ins Leere zu laufen.

Behmann hat sich noch 1931 gegen diese Behauptung mit der Feststellung verteidigt, dass die vorgelegte Herleitung zwar nicht gegen seine erste Regel, sehr wohl aber gegen seine zweite Regel verstößt. Der durch das Subjungat

$$\exists x \, \forall y \; A(x,y) \to \exists x \; A(x,x)$$

ausgedrückte Übergang sei nämlich gar nicht allgemein zulässig, sondern nur dann, wenn „x" für „y" einsetzbar sei. Man müsse also schreiben

$$\exists x \, \forall y \; A(x,y) \to \exists x \; (\neg A(x,x)! \vee A(x,x)),$$

wobei „$A(x,x)$!" die Einsetzbarkeit von „x" mit dem Ergebnis „$A(x,x)$" bedeute. Statt der üblichen logischen Formel haben wir dann also eine „limitierte" Formel, und in diesem Sinne müssen nach Behmann alle logischen Formeln, wenn die Eliminierbarkeit von Kurzzeichen erhalten bleiben soll, neu so gefasst werden, dass ihre Variablen beim Durchlaufen des Variabilitätsbereichs (z.B. von Quantoren) formelabhängige Ausnahmefälle überspringen, sozusagen unter Androhung logischer Widersprüche bei Zuwiderhandlung, wie ich mich 1988 ausgedrückt habe (Thiel 1988, S. 329).

Den Aufbau einer so revidierten Quantorenlogik (mit „limitierten Variablen") hat Behmann in einer 1959 im *Journal of Symbolic Logic* veröffentlichten Arbeit begonnen. Als Operationen verwendet er neben der Allquantifikation und der Existenzquantifikation (bei ihm „$x \uparrow (...x...)$" bzw. „$x \downarrow (...x...)$" geschrieben) die Prädikation „$a \downharpoonleft f$" (statt des üblichen „$f(a)$") und die Abstraktion „$x \upharpoonright (...x...)$" (die Churchs „$\lambda x(...x...)$" entspricht). Das komplexe Symbol „$a \downharpoonleft x \upharpoonright (...x...)$" bedeutet dann einerseits „a hat die Eigenschaft $x \upharpoonright (...x...)$"; es kann aber andererseits aufgefasst werden als Imperativ „Setze a statt x in ‚$(...x...)$' ein!", so dass „$a \downharpoonleft x \upharpoonright$" ein „Substitutor" wird mit der Eigenschaft „$a \downharpoonleft x \upharpoonright (...x...) \leftrightarrow (...a...)$". Durch diese Notation wird das Ergebnis der Behmannschen Analyse kalkülmäßig erfassbar, dass die Zermelo-Russellsche Antinomie als die endlose und daher unerfüllbare Aufgabe immer weiterer Substitution zu sehen ist.

Dass dieser Vorschlag von der Fachwelt nicht aufgegriffen und weiterverfolgt worden ist, liegt nicht nur an seiner Publikation in deutscher Sprache und auch nicht an „der höheren Kompliziertheit der Symbolik und der Formeln, die niemand gegen die geläufigen einfacheren einzutauschen bereit war" (Thiel 1988, S. 330). Der Hauptgrund für das fehlende Echo scheint mir darin zu liegen, dass die erforderlichen Einschränkungen („Limitationen") immer erst *post factum* erkennbar werden, bei den Einschränkungen des Variabilitätsbereichs von Quantoren etwa erst durch die Einsicht in die Unzulässigkeit irgendwelcher Einsetzungs*ergebnisse*. Was fehlt, ist der Aufbau eines Logikkalküls, der von vornherein genau die berichtigten, nämlich entsprechend eingeschränkten Formeln aufzählt, und einen solchen Kalkül hat Behmann auch in der großen Arbeit von 1959 nicht geliefert. Umso attraktiver wirkt dann die Plausibilität mancher konkurrierender (z.B. konstruktivistischer) Ansätze, welche bei Behmann noch akzeptierte problematische Bildungen wie „$\varphi(\varphi)$“, „$P\varepsilon P$“ mit der Kopula (zwischen Subjekt und Prädikat) oder „$x{\in}x$“ mit dem Elementzeichen (zwischen Element und enthaltender Menge) ausschließen, wozu sich ein paar weitere Hinweise bei Thiel 1988 finden.

Wenn auch die hier zuletzt genannten Arbeiten Behmanns unvollendet geblieben sind und vielleicht sogar in eine wenig aussichtsreiche Richtung weisen, so rechtfertigen die für die vorliegende Skizze ausgewählten Forschungsbeiträge doch ganz zweifellos die Entscheidung, Behmann 1980 einen eigenen Artikel in der *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie* (^{2}2005) zu widmen, ihn 1990 in das *Lexikon bedeutender Mathematiker* aufzunehmen, und ihn 2002 im ersten Band einer Hallenser Reihe *Beförderer der Logik* zwischen Cantor und Husserl zu platzieren. Mancosu, Zach und Badesa behandeln ihn noch 2009 in dem von Leila Haaparanta herausgegebenen Monumentalwerk *The Development of Modern Logic* wie einen zeitgenössischen Kollegen. Dass er auch auf unserer Tagung gewürdigt wird, die ja der „Geschichte des Grundlagenbegriffs und seiner Erforscher“ gewidmet ist, wird man nun vielleicht doch eher selbstverständlich finden.

Quellen und Hinweise auf weitere Literatur

Der wichtigste Teil des erhalten gebliebenen wissenschaftlichen Nachlasses von Heinrich Behmann befindet sich (nach der Übergabe durch Emmy Behmann an den Verf. 1978 und der Bearbeitung in einem Editionsprojekt in Aachen und Erlangen) heute in der Staatsbibliothek Berlin – Preußischer Kulturbesitz.

Quellen der vorliegenden Skizze und weiterführende Literatur:

Behmann, Heinrich: Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem. *Mathematische Annalen* 86 (1922), S. 163–229 [Habilitationsschrift].

Behmann, Heinrich: Algebra der Logik und Entscheidungsproblem (Abstract des auf der DMV-Jahresversammlung 1923 in Marburg gehaltenen Vortrags). *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 32 (1923), 2. Abt., S. 66–67.

Behmann, Heinrich: Die Antinomie der transfiniten Zahl und ihre Auflösung durch die Theorie von Russell und Whitehead. *Jahrbuch der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen, 1922 (Juli–Dezember).* Auszüge aus den Dissertationen, 1922, Nr. 23, Göttingen 1923, S. 55–64.

Behmann, Heinrich: *Mathematik und Logik.* B.G. Teubner: Leipzig/Berlin 1927 (*Mathematisch-physikalische Bibliothek*, Band 71). 59 S. + 1 Corrigendazettel lose.

Behmann, Heinrich: Entscheidungsproblem und Logik der Beziehungen (Abstract des auf der DMV-Jahresversammlung 1926 in Düsseldorf gehaltenen Vortrags). *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 36 (1927), 2. Abt., S. 17–18.

Behmann, Heinrich: Zu den Widersprüchen der Logik und der Mengenlehre. (Leicht gekürzte Fassung des auf der DMV-Tagung 1929 in Prag am 15. 9. 1929 gehaltenen Vortrags). *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 40 (1931), 1. Abt., S. 37–48.

Behmann, Heinrich: Zur Richtigstellung einer Kritik meiner Auflösung der logisch-mengentheoretischen Widersprüche. *Erkenntnis* 2 (1931), S. 305–306.

Behmann, Heinrich: Das Russellsche Paradoxon und die formale Logik. *Atti del Congresso Internazionale di Filosofia*, Band V (1958), Venedig, S. 45–54.

Behmann, Heinrich: Der Prädikatenkalkül mit limitierten Variablen. Grundlegung einer natürlichen exakten Logik. *The Journal of Symbolic Logic* 24 (1959), S. 112–140.

Dubislav, Walter: *Die Definition.* Felix Meiner: Leipzig ^{3}1931 (*Beihefte der ‚Erkenntnis'*, 1), ND, hrsg. u. eingel. v. W. K. Essler, Felix Meiner: Hamburg $^{(4)}$1987.

Frank, Hartwig: Heinrich Behmanns Arbeit an der Symbolik einer natürlichen exakten Logik. In: Schenk et al. 2002, S. 128–137.

Haaparanta, Leila (ed.): *The Development of Modern Logic.* Oxford University Press: Oxford etc. 2009. [P. Mancosu / R. Zach / C. Badesa, „The Development of Mathematical Logic from Russell to Tarski, 1900–1935", S. 318–470.]

Mancosu, Paolo: Between Russell and Hilbert: Behmann on the Foundations of Mathematics. *The Bulletin of Symbolic Logic* 5 (1999), S. 303–330.

Mancosu, Paolo / Zach, Richard: Heinrich Behmann's 1921 Lecture on the Decision Problem and the Algebra of Logic. *The Bulletin of Symbolic Logic* 21.2 (June 2015), S. 164–187.

Schenk, Günter et al. : *Beförderer der Logik. Georg Cantor, Heinrich Behmann und Edmund Husserl.* Bearbeitet und zum Druck vorbereitet von Günter Schenk und Regina Meyer in Verbindung mit Hartwig Frank (Schenk Verlag: Halle/S. 2002; „Philosophisches Denken in Halle, Abt. 3, Bd. 2.1). [H. Behmann: S. 105–170].

Thiel, Christian: Pascals Regeln und die Definitionstheorie des 20. Jahrhunderts. In: Ulrike Hinke-Dörnemann (ed.), *Die Philosophie in der modernen Welt. Gedenkschrift für Prof. Dr.med. Dr.phil. Alwin Diemer* (Peter Lang: Frankfurt a.M./Bern/New York/Paris 1988), Teil I [von zwei Teilen], S. 319–336.

Thiel, Christian: Gödels Anteil am Streit über Behmanns Behandlung der Antinomien. In: Bernd Buldt et al. (eds.), *Kurt Gödel. Wahrheit und Beweisbarkeit. Band 2. Kompendium zum Werk* (öbv & hpt: Wien 2002), S. 387–394.

Wernhard, Christoph: Heinrich Behmann's Contributions to Second-Order Quantifier Elimination from the View of Computational Logic. KRR Report 15–05, Technische Universität Dresden, Dresden 2015; 106 S.

Namensregister

Adressen der Autoren

Merlin Carl
Institut für mathematische, naturwissenschaftliche und technische Bildung
Europa-Universität Flensburg
Auf dem Campus 1b
D-24943 Flensburg
merlin.carl@googlemail.com

Eva-Maria Engelen
Projekt- und Arbeitsstellenleiterin
Kurt-Gödel-Forschungsstelle
Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften
Jägerstraße 22/23
D-10117 Berlin

Gottfried Gabriel
Fischerstr. 15 B
D-78464 Konstanz
gottfried.gabriel@uni-jena.de

Kay Herrmann
Institut für Pädagogik
Philosophische Fakultät
Technische Universität Chemnitz
Reichenhainer Str. 41
D-09126 Chemnitz
kay.herrmann@phil.tu-chemnitz.de

Daniel Koenig
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
koenig@mathematik.uni-siegen.de

Thomas Mormann
Department of Logic & Philosophy of Science
University of the Basque Country, UPV/EHU
Av. Tolosa, 70
S-20018 Donostia
thomasarnold.mormann@ehu.eus

Matthias Neuber
Philosophisches Seminar
Universität Tübingen
Bursagasse 1
D-72070 Tübingen
matthias.neuber@uni-tuebingen.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Sven Schlotter

Schillers Gartenhaus
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Schillergäßchen 2
D-07745 Jena
sven.schlotter@uni-jena.de

Christian Thiel

Institut für Philosophie
Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg
Bismarckstr. 1
D-91054 Erlangen
thiel-erlangen@t-online.de

Shafie Shokrani

Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
shokrani@mathematik.uni-siegen.de

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.

2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.

3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,– Euro

Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., 22,– Euro

Susanne Spies:
Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., 22,– Euro

Henrike Allmendinger:
Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte“ aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Räz & Tilman Sauer, Gregor Nickel

Band 5 (2015), 232 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Alessa Binder, Martin Janßen, Elisabeth Pernkopf, Matthias Wille

Band 6 (2016), 311 S., kart., 22,– Euro

Martin Rathgeb:
George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Band 7 (2016), 199 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Karl Kuhlemann, Nikolay Milkov, Gregor Nickel, Martin Rathgeb, Laura Schulte, Harald Schwaetzer, Christian Thiel, Matthias Wille

Band 8 (2017), 202 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Gruber, Anna-Sophie Heinemann, Edward Kanterian, Daniel Koenig, Martin Rathgeb, Andreas Vohns, Matthias Wille

Band 9 (2018), 298 S., kart., 22,– Euro

Tanja Hamann:
Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland

Band 10 (2018), 220 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Edward Kanterian, Karl Kuhlemann, Andrea Reichenberger, Tilman Sauer & Gabriel Klaedtke, Shafie Shokrani & Susanne Spies, Klaus Volkert, Matthias Wille

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 13,– Euro (Doppelnummer 22,– Euro)

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Bd. 11 (2019)

Mathematik in der Tradition des Neukantianismus

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN