



A NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA EM TRELIÇAS PLANAS UTILIZANDO O FORMALISMO DE EULER – LAGRANGE

THE GEOMETRIC NONLINEARITY IN PLANE TRUSS USING THE OF EULER FORMALISM – LAGRANGE

JOSÉ DE SOUZA SALES

Docente e Pesquisador da Universidade Estadual de Goiás – CET, Anápolis (GO)
jose.sales@ueg.br

MARCEL WILLIAN REIS SALES

Docente e Pesquisador IFGoiano - Campus de Trindade (GO)
marcel.sales@ifgoiano.edu.br

GABRIEL LUCAS DOS SANTOS SOARES

Discente da Universidade Estadual de Goiás do Curso de Engenharia Civil - Campus Central,
Anápolis (GO)
gabriel.s@outlook.pt

EDUARDO RAMOS MUNIZ

Discente do IFGoiano - Campus de Trindade (GO)
eduardoramosmuniz@gmail.com

Resumo: Entender como sistemas estruturais reagem quando solicitado por cargas externas, sejam elas concentradas ou distribuídas, é de fundamental importância na Engenharia Civil. Por questões de praticidade adotou-se que os elementos estruturais permanecem no regime linear, ou seja, existe uma relação de proporcionalidade entre o deslocamento obtido e a força aplicada. Considerar a não linearidade na análise estrutural faz-se com que o sistema estrutural apresente um melhor desempenho, uma vez que a análise fornece um resultado mais próximo ao desempenho real. Mesmo sabendo de tudo isto, vários estudos, consideram que os elementos, como já foi dito, por razões de simplicidade, tenham somente comportamento linear do deslocamento em relação a força aplicada, obtendo um bom conhecimento do deslocamento da estrutura formada por estes elementos. Convencionalmente adota-se o formalismo Newtoniano na resolução de problemas relativos a sistema estruturais solicitados por forças externas. O presente trabalho, também considerando o regime linear dos elementos, tem o objetivo de apresentar resoluções de sistemas treliçados, com duas barra e com quatro barras, mostrando a não linearidade geométrica, que leva em consideração a deformação da estrutura no momento da análise, por meio do formalismo Euler-Lagrangeano, que trata de proposições energéticas e, em algumas situações, como neste trabalho, pode dar uma solução mais direta que, por meio do formalismo Newtoniano, demandariam uma quantidade maior de equações e manipulações matemáticas.

Palavras-chave: Lei de Hooke. Geometric nonlinearity. Euler-Lagrange.

Abstract: Understanding how structural systems react when requested by external loads, whether concentrated or distributed, is of fundamental importance in Civil Engineering. For reasons of practicality, it was adopted that the structural elements remain in the linear regime, that is, there is a relationship of proportionality between the displacement obtained and the applied force. Considering nonlinearity in structural analysis causes the structural

system to perform better, since the analysis provides a result closer to the actual performance. Even knowing all this, several studies consider that the elements, as has already been said, for reasons of simplicity, have only linear behavior of the displacement in relation to the applied force, obtaining a good knowledge of the displacement of the structure formed by these elements. Conventionally Newtonian formalism is adopted in the resolution of problems related to structural systems requested by external forces. The present work, also considering the linear regime of the elements, aims to present resolutions of lattice systems, with two bars and with four bars, showing the geometric nonlinearity, which takes into account the deformation of the structure at the time of analysis, through the Euler-Lagrangian formalism, which deals with energetic propositions and, in some situations, as in this work, can give a more direct solution that, through Newtonian formalism, would require a greater amount of mathematical equations and manipulations.

Keywords: Hooke's law. Modulus of elasticity. Euler-Lagrange.

Introdução

A engenharia civil trabalha com os conceitos da física aplicados em situações práticas. Prever o comportamento de sistemas estruturais, quando sujeitos à solicitações externas, é de fundamental importância. Para isto, aplicam-se conceitos advindos da mecânica, como o trabalho de uma força e energia potencial, aliados aos estudos mais aprofundados da resistência dos materiais e da lei de Hooke.

Elementos estruturais são peças, geralmente com uma ou duas dimensões preponderantes sobre as demais (vigas, lajes, pilares etc.), que compõem uma estrutura. O modo como são arranjados pode ser chamado de sistema estrutural (CARVALHO, 2002). Conhecer e entender o sistema estrutural faz-se necessário, bem como os elementos que compõem esta estrutura nas engenharias.

O processo convencional de dimensionamento de um elemento estrutural se dá por meio das seguintes etapas: em um primeiro momento, define-se o carregamento atuante no elemento, depois, com o elemento carregado, faz-se a análise do elemento determinando seus diagramas de esforços internos, que são respostas às solicitações externas. Após esta análise, aplicam-se as hipóteses relativas ao dimensionamento para a determinação das características do elemento.

Nestas hipóteses inclui o estudo da linearidade e da não linearidade física que considera a existência de uma relação de proporcionalidade entre o carregamento aplicado e o deslocamento obtido no elemento estrutural e também inclui o estudo da linearidade e da não linearidade geométrica, que se observa o comportamento da geometria formada pelos elementos que compõe a treliça. Porém, segundo Avelino (2012, p. 19) “assumir esta

hipótese da linearidade, em alguns casos, pode ser um tanto caro para o desenvolvimento dos projetos, e em outros, muito inconveniente para o bolso e para a segurança”.

A realidade é que os elementos estruturais não apresentam esta relação de proporcionalidade e ela pode apenas ser considerada para situações em que tanto as deformações quanto os deslocamentos são desprezíveis. Quando existem grandes deformações a deve-se considerar a não linearidade física e quando existem grandes deslocamentos deve-se considerar a não linearidade geométrica na análise do elemento estrutural em questão. No presente trabalho será considerada apenas a não linearidade geométrica para a resolução de problemas envolvendo sistemas estruturais treliçados planos.

Objetiva-se, então, encontrar o comportamento da força (\square) por unidade de comprimento (\square) e por unidade de rigidez (\square) com a deformação específica obtida em um nó numa treliça plana. Para isto, será utilizado o formalismo Lagrangeano, que se difere do formalismo Newtoniano, convencionalmente adotado, pois trata-se de proposições energéticas aplicado em vários campos da física, como por exemplo na eletrodinâmica (THORNE; MACDONALD, 1984), na gravitação (YORK, 1972).

Revisão bibliográfica

Treliça

Treliças são estruturas formadas por barras articuladas em suas extremidades e são, geralmente, utilizadas para vencer pequenos, médios e longos vãos. É comum, para efeitos de simplificação, trabalhar com o conceito de treliça ideal, que para Sussekind (1980, p. 187) é o “sistema reticulado cujas barras têm todas as extremidades rotuladas e cujas cargas estão aplicadas apenas em seus nós”. Desta forma, as barras funcionam principalmente à tração e compressão. As treliças cujos eixos de todos os seus elementos estão no mesmo plano, recebem o nome de treliças planas. O formato das treliças e a disposição de suas barras podem variar, dependendo da finalidade do uso. Na prática, as treliças planas são muito utilizadas na cobertura de galpões e depósitos, em pontes, passarelas e viadutos.

As treliças ainda podem ser classificadas como isostáticas, hiperestáticas e hipostáticas. Nas treliças isostáticas, costuma-se empregar o método dos nós para determinar os esforços

de tração e compressão nas barras. Nas treliças hiperestáticas são necessários estudos de compatibilidade de deformações para a determinação destes esforços. As treliças hipostáticas, por sua vez, não são aceitáveis em estruturas suportes de pontes e telhados, pois têm o seu formato modificado devido às forças, mas são utilizadas em equipamentos mecânicos.

Análise Linear x Análise Não Linear

Segundo Avelino (2012) as estruturas podem se comportar de forma linear e não linear. Adotar que uma estrutura apresenta comportamento linear pode implicar em grandes simplificações para os modelos de cálculo utilizados em sua análise, pois a linearidade significa, justamente, proporcionalidade. Ou seja, ao solicitar uma estrutura de comportamento linear com uma carga qualquer ela apresentará uma deformação ou um deslocamento diretamente proporcional a esta solicitação.

No entanto, Avelino (2012, p. 19) diz que “assumir esta hipótese da linearidade, em alguns casos, pode ser um tanto caro para o desenvolvimento dos projetos, e em outros, muito inconveniente para o bolso e para a segurança” Ainda é importante ressaltar que ao adotar a hipótese linear, assume-se que a rigidez da estrutura não se altera durante o carregamento, tal qual, se tem o comportamento de uma mola dado pela lei de Hooke:

$$F = -kx \quad (1)$$

onde k é a rigidez da mola e x sua deformação.

Para Hiebbeler (2004), de forma análoga às molas, a Lei de Hooke pode ser aplicada em barras. Considera-se uma barra prismática, de dimensões constantes e material qualquer, engastada em uma de suas extremidades e aplica-se, na extremidade livre, uma força no sentido de tracionar ou comprimir a barra.

Considerando a barra da Figura 5 que possui um comprimento (L) e área da seção transversal A , aplica-se uma força F em uma de suas extremidades no sentido de alongá-la e obtêm-se uma tensão σ , dada:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2)$$

A força aplicada gera uma deformação longitudinal (δ), pode-se definir a deformação específica (3)

$$\xi = \frac{\delta}{L} \quad (3)$$

Observa-se que, no regime elástico, a tensão σ é diretamente proporcional à deformação específica, ou seja,

$$\sigma = E\xi \quad (4)$$

que representa a Lei de Hooke para barras, onde E é o módulo de elasticidade ou módulo de Young, numa simples analogia com a lei de Hooke para mola a rigidez da barra

$$k = \frac{EA}{L} \quad (5)$$

Nota-se, como esperado, que a rigidez de uma barra depende do material da barra e da sua geometria, uma vez que variando a área da seção transversal da barra ou o seu comprimento, a rigidez também varia.

Teorema do Trabalho e Energia Cinética

Energia Cinética, segundo Halliday (2012, p.146), “é a energia associada ao estado de movimento de um objeto. Quanto mais depressa o objeto se move, maior é a energia cinética. Quando um objeto está em repouso, a energia cinética é nula”.

Considerando um objeto com massa (m) e velocidade (v), a equação utilizada no cálculo da Energia Cinética (K) é

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6)$$

O teorema do Trabalho e da Energia Cinética (Young, 2008) estabelece que o Trabalho total (W), em um sistema, é numericamente igual à variação da Energia Cinética (ΔK), ou seja,

$$W = \Delta K \quad (7)$$

mostrando que o trabalho realizado pela força resultante em um objeto faz a energia cinética do objeto variar. Se o objeto partir do estado de repouso o trabalho total em um determinado instante é totalmente convertido em energia cinética.

De acordo com Halliday (2012), a relação entre a variação da energia potencial ΔU e o trabalho total W , pode ser dada por:

$$W = -\Delta U \quad (8)$$

Considerando o sistema massa - mola, onde um bloco se move presa a uma mola com constante de rigidez (k) da posição inicial, onde a mola esteja no estado relaxado, associa-se a energia potencial na mola com o bloco na posição x :

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (9)$$

Verifica-se que a energia acumulada em uma mola é diretamente proporcional à deformação da mola.

Formalismo Lagrangeano da Mecânica

Para Neto (2004), dada uma curva com os pontos extremos conhecidos, deseja-se encontrar a função $y=y(x)$, que faça com que a integral S tenha o menor valor possível. O problema matemático a ser resolvido trata-se de uma integral cujo integrando é uma função de três variáveis: $y(x)$, $y'(x)$ e x , onde $y' = \frac{dy}{dx}$, então:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y', x)dx \quad (10)$$

Neste caso, objetiva-se encontrar $y(x)$ que faça a integral S ser estacionária. Considerando que $y=y(x)$ é a solução para o problema, pode-se ter: $\delta(\alpha) = \delta(\alpha) + \delta\delta(\alpha)$, onde α é uma constante e $\delta(\alpha)$ é uma função com extremidades iguais a de $y(x)$, (como ilustra a Figura 19). Portanto:

$$S(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(Y(x), Y', x) dx \quad (11)$$

Como $\frac{dS(\alpha)}{d\alpha(\alpha=0)} = 0$, aplicando a regra da cadeia na equação supracitada, temos a Equação de Euler-Lagrange (Butkov,1998):

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (12)$$

De modo geral, ainda é possível trabalhar com a Equação de Euler-Lagrange considerando as três dimensões do espaço (x,y,z) e com dependência temporal. Dado que: $\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = \delta$, $\delta_3 = \delta$ e que $\frac{\partial q_i}{\partial t} = \dot{q}$, tem-se a Equação de Euler-Lagrange generalizada. Dada por

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (13)$$

Nesta Equação de Euler-Lagrange, a função (δ) pode ser definida por:

$$L(q, \dot{q}, t) = K(q, \dot{q}, t) - U(q) \quad (14)$$

Esta definição recebe o nome de Lagrangeana, que é a diferença entre a Energia Cinética (K) e a Energia Potencial (U). Isto faz com que este formalismo tenha o mesmo papel da Dinâmica Newtoniana.

Metodologia

De acordo com a literatura, especificamente do autor Avelino (2012, p. 58), usando a condição de simetria, que a metade da estrutura treliçada sujeita a uma força $P(t)$ lentamente aplicada, visto na Figura 1.

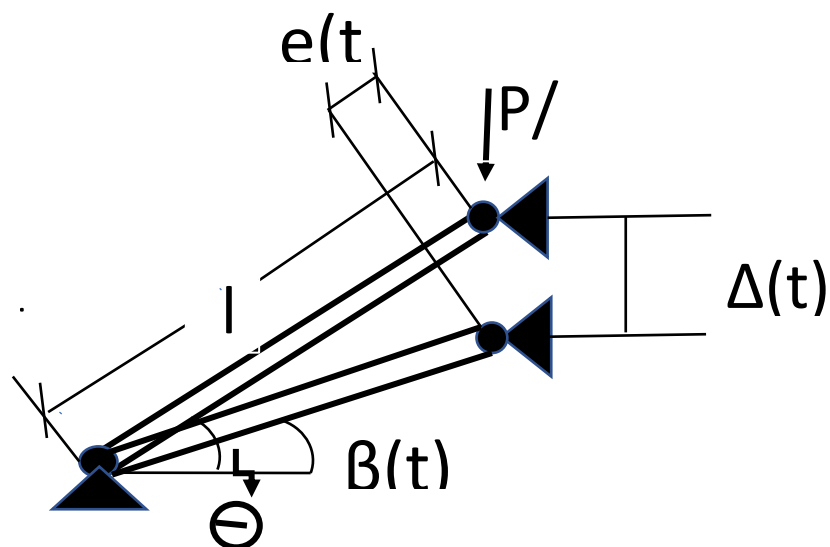


Fig. 1 Estrutura treliçada com condição deformada (Fonte: autores)

Neste caso, a situação deformada será levada em consideração a condição de equilíbrio. Como não há deslocamento horizontal, o interesse está na condição de equilíbrio das forças verticais. Partindo deste princípio, é importante lembrar que a componente vertical decorrente da compressão da barra, dada pela Lei de Hooke, é igual a força aplicada no nó:

$$P(t) = 2ke(t)\text{sen}(\beta(t)) \quad (14)$$

onde, da geometria, a deformação é

$$e(t) = l - \sqrt{l^2 + \Delta(t)^2 + 2l\Delta(t)\text{sen}(\theta)} \quad (15)$$

devido a contração da barra do seu valor inicial l . Por simplicidade $\Delta(t) = e$ e que $\frac{P}{2kl} = e$, a força por unidade da rigidez da barra, por comprimento da barra encontrada pelo autor é:

$$\frac{P}{2kl} = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{l^2} - 2\frac{\Delta}{l}\text{sen}(\theta)}} \right] \left[\text{sen}(\theta) - \frac{\Delta}{l} \right] \quad (16)$$

Seguindo, então, na Fig. (1), observa-se um sistema estrutural formado por cinco barras de diferentes comprimentos iniciais: l_1, l_2, l_3, l_4 e l_5 . Observa-se também que as barras de comprimento l_1 e l_2 formam, respectivamente, os ângulos θ e ϕ com a horizontal.

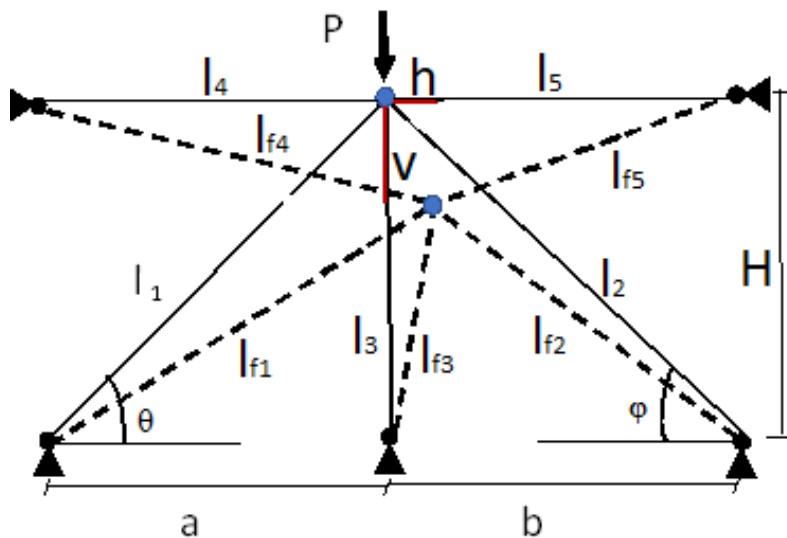


Fig.2. Estrutura treliçada formada por cinco elementos com uma Força P no nó. (Fonte: autores)

Da geometria da Fig. (2) foi possível escrever o comprimento inicial de cada barra em função do comprimento inicial da barra da esquerda de comprimento l_1 e dos ângulos θ e ϕ , ou seja, $l_2 = l_1 \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\phi}$, $H = l_3 = l_1 \text{sen}\theta$, $a = l_4 = l_1 \text{cos}\theta$ e $b = l_5 = l_1 \frac{\text{sen}\theta}{\text{tan}\phi}$.

Ao aplicada uma carga (P) no nó, o sistema estrutural se deforma e ocorrem variações nos comprimentos das barras. Neste caso, verifica-se um deslocamento vertical $\delta(\square) = \delta$ e um deslocamento horizontal $h(\square) = h$ no nó, mostrado na figura 2.

Pelo Teorema de Pitágoras pode-se obter os novos comprimentos das barras da seguinte forma $lf_1 = \sqrt{(H - v)^2 + (a + h)^2}$, $lf_2 = \sqrt{(H - v)^2 + (b - h)^2}$, $lf_3 = \sqrt{(h)^2 + (H - v)^2}$, $lf_4 = \sqrt{(a + h)^2 + (v)^2}$ e $lf_5 = \sqrt{(b - h)^2 + (v)^2}$.

As deformações específicas de cada barra podem ser definidas por: $\delta_i = lf_i - l_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. No presente trabalho foi considerado que a área da seção transversal das barras permanece constante e é igual para todas as barras. Considerando que as barras são de um mesmo material, pode-se considerar que o produto do módulo de elasticidade (E) pela área da seção transversal da barra (A) é constante. Levando em consideração a Eq. (5) ($\square\square = \square\square$), pode-se dizer que o produto da rigidez de cada barra pelo seu comprimento também permanece constante, desconsiderando a flambagem (Botelho, 2017), assim:

$$k_1 lf_1 = k_2 lf_2 = k_3 lf_3 = k_4 lf_4 = k_5 lf_5 \quad (17)$$

Com estas relações acima a constante de rigidez (\square) de cada barra pode escrito em função de \square_1 .

Considerando sistema formado pelas cinco barras a energia potencial é $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 k_i \delta_i^2$ e o trabalho realizado no sistema pela força é dado por $\square = \square\square$, onde \square é o deslocamento vertical do nó, a Lagrangeana do sistema de cinco barras pode ser escrita da seguinte forma:

$$L = Pv - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 k_i \delta_i^2 \quad (18)$$

Na Equação de Euler-Lagrange, dada pela Eq.(13) considerando como variável o deslocamento vertical (\square), tem-se a seguinte condição:

$$\frac{\partial L}{\partial v} = 0 \quad (19)$$

Aplicando a condição acima e isolando a força, têm -se:

$$\begin{aligned}
 P = & \frac{k_1(\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + (l_1 \operatorname{sen} \theta - h)^2} - l_1)(-l_1 \operatorname{sen} \theta + v)}{\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + (l_1 \operatorname{sen} \theta - h)^2}} \\
 & + \frac{k_2 \left(\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + \left(l_1 \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} - h \right)^2} - l_1 \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \varphi} \right) (-l_1 \operatorname{sen} \theta + v)}{\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + (l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2}} \\
 & + \frac{k_3 (\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + h^2} - l_1 \operatorname{sen} \theta) (-l_1 \operatorname{sen} \theta + v)}{\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + h^2}} \\
 & + \frac{k_4 (\sqrt{(l_1 \cos \theta + h)^2 + v^2} - l_1 \cos \theta) v}{\sqrt{(l_1 \cos \theta + h)^2 + v^2}} \\
 & + \frac{k_5 \left(\sqrt{\left(l_1 \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} - h \right)^2 + v^2} - l_1 \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} \right) v}{\sqrt{\left(l_1 \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} - h \right)^2 + v^2}} \quad (20)
 \end{aligned}$$

Observa-se que com os ângulos iniciais θ e φ constantes, a força depende do deslocamento vertical (\square) e do deslocamento horizontal (h) do nó. Aplicando a Equação de Euler Lagrange na Lagrangeana do sistema e tendo como variável o deslocamento horizontal (h), tem-se uma nova condição dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial h} = 0 \quad (21)$$

Aplicando a condição acima na lagrangeana do sistema têm-se:

$$\frac{k_1 (\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + (l_1 \cos \theta + v)^2} - l_1) (l_1 \cos \theta + h)}{\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + (l_1 \cos \theta + h)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{k_2 \left(\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + \left(l_1 \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} - h \right)^2} - l_1 \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \varphi} \right) \left(-l_1 \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} + h \right)}{\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + h^2}} \\
 & + \frac{k_3 \left(\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + h^2} - l_1 \operatorname{sen} \theta \right) h}{\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + h^2}} + \frac{k_4 \left(\sqrt{(l \cos \theta + h)^2 + v^2} - l_1 \cos \theta \right) (l_1 \cos \theta + h)}{\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + h^2}} \\
 & + \frac{k_5 \left(\sqrt{\left(l_1 \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} - h \right)^2 + v^2} - l_1 \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} \right) \left(-l_1 \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} + h \right)}{\sqrt{(l_1 \operatorname{sen} \theta - v)^2 + h^2}} = 0 \tag{22}
 \end{aligned}$$

Em seguida, para encontrar a força \square no nó do sistema de cinco barras, utiliza-se a Série de Taylor para expandir a Eq. (2) até o grau 2. Isola-se a variável \square e a substitui na Eq. (20). Depois, ao isolar a força \square , obtém-se uma a força \square em função do deslocamento vertical \square do nó.

No específico caso em que se considera apenas duas barras com comprimentos iguais, ou seja, $l_1 = l_2 = l$ e os respectivos ângulos com a horizontal $\theta = \varphi$, nitidamente as constantes de rigidez da barra central e das barras superiores são anuladas, ou seja, $\square_3 = \square_4 = \square_5 = 0$, também pode se notar, por simetria, que não haverá deslocamento horizontal do nó, $h = 0$, a força por unidade da rigidez da barra, por comprimento da barra resulta na mesma expressão encontrada pelo autor Avelino dada pela Eq. (16).

Outro caso simples, é considerar como único elemento estrutural central, com comprimento \square , solicitada em sua extremidade por uma força vertical (\square), temos que as constantes de rigidez das barras que não existem e que não há deslocamento horizontal do nó, ou seja, $\square_1 = \square_2 = \square_4 = \square_5 = h = 0$, a força dada pela Eq. (20), desprezando o efeito de flambagem, será:

$$P = -k_3 v$$

Observa-se que a equação acima é a Lei de Hooke, que relaciona uma força aplicada na extremidade de uma barra com a constante de rigidez (k_\square) com sua deformação (v).

Resultados e discussão

Os resultados foram apresentados de forma gradativa para sistemas formados por duas e quatro barras, respectivamente.

Duas Barras

Não considerando os elementos central e nem os elementos acima, vistas na Figura 2, temos uma treliça formada por uma barra de comprimentos l_1 e outra barra de comprimento l_2 .

Com a expressão da força dada pela Eq. (20) e da condição descrita abaixo da Eq. (22), tem-se o comportamento da força (F) por unidade de comprimento (l) por unidade de rigidez (k) em função do deslocamento (δ) por unidade de comprimento (l) com $k_3 = k_4 = k_5 = 0$ e com o comprimento da barra da esquerda $l_1 = l$ mostrada na figura (3) e figura (4).

Primeiramente na simetria, onde os ângulos formados pelas barras com a horizontal são iguais, onde as barras têm os mesmos comprimentos, e posteriormente com os ângulos diferentes.

Como exemplo, a figura (3), mostra três curvas sobrepostas que representam o comportamento da força (F) por unidade de comprimento (l) e por unidade de constante de rigidez (k) em função do deslocamento (δ) por unidade de comprimento (l), para $\alpha = \beta = 14^\circ$ (curva vermelha), $\alpha = \beta = 15^\circ$ (curva azul) e para $\alpha = \beta = 16^\circ$ (curva verde). Lembrando a condição dada pela Eq. (17), ou seja, $k_1 l f_1 = k_2 l f_2$, e que as barras têm o mesmo comprimento inicial e o mesmo comprimento final, pode-se fazer $k_1 = k_2 = k$.

Nota-se, como esperado, que, aumentando os ângulos das barras em relação à horizontal, a força de resistência aumenta com o aumento do deslocamento. Isto ocorre porque à medida que as barras se aproximam da vertical aumenta-se a rigidez do sistema. Estas curvas mostram o fenômeno chamado de *snap through* (Avelino, 2012), onde ocorre deslocamento vertical do nó sem aumento da aplicação da força, mesmo com a diminuição e inversão da força há ainda o deslocamento vertical do nó.

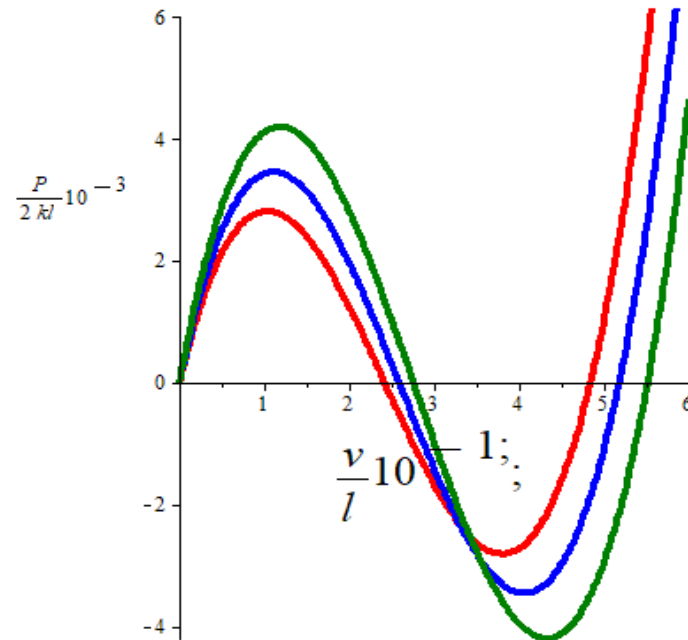


Fig. (3): Comportamento $\frac{P}{2kl}$ em função $\frac{v}{l}$, para $\alpha = \beta = 14^\circ$ (vermelha), $\alpha = \beta = 15^\circ$ (azul) e para $\alpha = \beta = 16^\circ$ (verde).

De forma análoga, aplicou-se o método exposto anteriormente para a determinação o comportamento da força (P) por unidade de comprimento (kl) e por unidade de constante de rigidez (k) em função do deslocamento (v) por unidade de comprimento (l), para as seguintes situações: $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ e $\alpha < \beta$. Verifica-se, por meio da equação $l_2 = l_1 \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}$, que, na condição em que $\alpha = \beta$, o comprimento das barras é o mesmo. E, que quando $\alpha > \beta$ o comprimento da barra da direita é maior que o comprimento da barra da esquerda e vice-versa.

Para exemplificar, fixa-se o ângulo que a barra da direita forma com a horizontal (β) e varia-se o ângulo que a barra da esquerda forma com a horizontal (α). A Fig. (4), apresenta três curvas que representam o comportamento da força (P) por unidade de comprimento (kl) e por unidade de rigidez (k) em função do deslocamento (v) por unidade de comprimento

(□) dada pela Eq. (20), nas mesmas condições anterior, para $\alpha = \beta = 15^\circ$ (curva azul), $\alpha = 18^\circ$ $\beta = 15^\circ$ (curva verde) e $\alpha = 13^\circ$ $\beta = 15^\circ$ (curva vermelha).

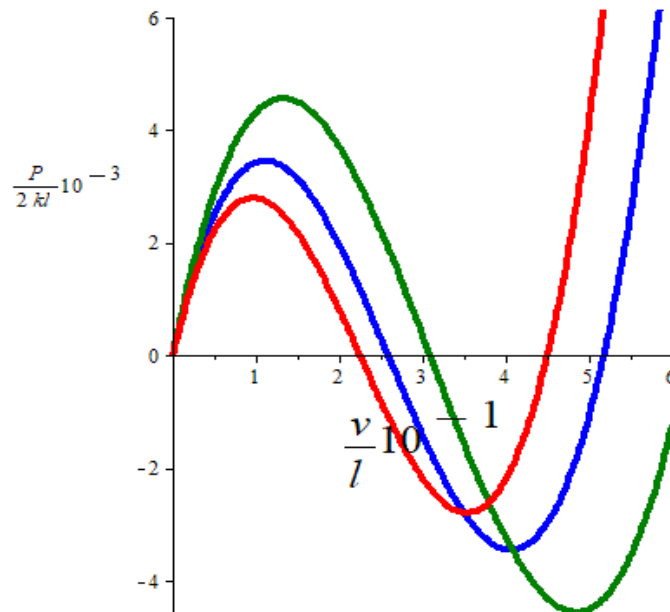


Fig. (4). Comportamento em função $\frac{P}{2kl}$ em função $\frac{v}{l}$ para $\alpha = \beta = 15^\circ$ (azul), $\alpha = 18^\circ$ $\beta = 15^\circ$ (verde) e $\alpha = 13^\circ$ $\beta = 15^\circ$ (vermelha).

Considerando que a altura do sistema estrutural inicialmente constante, pois fixou-se o ângulo com a horizontal da barra da direita, ângulo $\alpha = 15^\circ$, observa-se que, quando o ângulo da barra da direita é maior ($\alpha = 18^\circ$) do que o ângulo da barra da esquerda em relação à horizontal, a força de resistência é maior para um mesmo deslocamento, como o esperado. Isto acontece porque quando a barra da esquerda está mais inclinada, ela apresenta um menor comprimento, portanto ela apresenta uma maior rigidez o que reflete numa maior rigidez para a estrutura e vice-versa.

Quatro Barras

Para um sistema estrutural treliçado formado por quatro barras, onde l_1 é o comprimento da barra da esquerda, l_2 é o comprimento da barra 2, l_4 é o comprimento da barra em cima a esquerda e l_5 é o comprimento da barra em cima a direita, solicitado em seu nó por uma força vertical (P), como mostrado na figura (2):

De forma análoga ao caso com duas barras, para a obtenção do comportamento da força (P) por unidade de comprimento ($\frac{P}{l}$) e por unidade de rigidez ($\frac{P}{k}$) em função do deslocamento (v) por unidade de comprimento ($\frac{v}{l}$) para as seguintes situações: $\alpha = \alpha$, $\alpha > \alpha$, $\alpha < \alpha$ e de acordo com a condição dada Eq. (17), onde foi utilizada a rigidez de cada barra em função da rigidez da barra da esquerda visto na figura (2). Lembrando que sendo desconsiderada a barra central a rigidez $k_3 = 0$.

Exemplificando, a figura (5) apresenta três curvas que representam o comportamento da força (P) por unidade de comprimento ($\frac{P}{l}$) e por unidade de rigidez ($\frac{P}{k}$) em função do deslocamento vertical (v) por unidade de comprimento ($\frac{v}{l}$), para $\alpha = \alpha = 15^\circ$ (curva azul), $\alpha = 18^\circ$ $\alpha = 15^\circ$ (curva verde) e $\alpha = 13^\circ$ $\alpha = 15^\circ$ (curva vermelha).

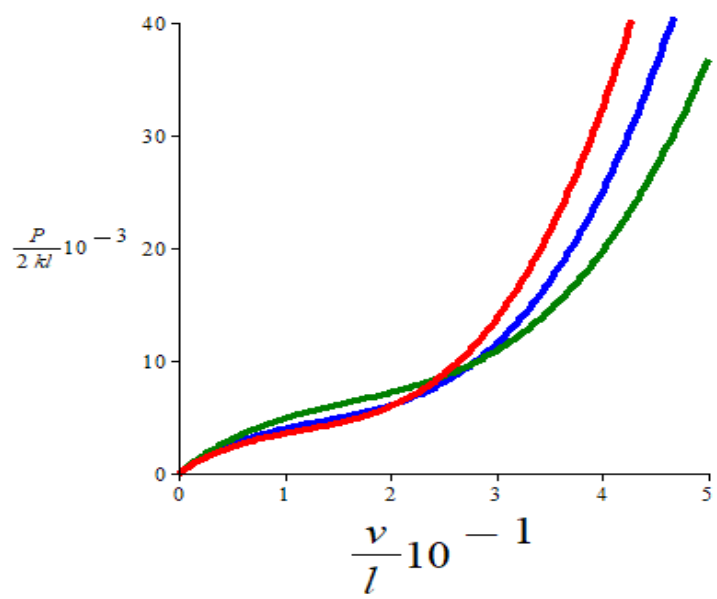


Fig. (5). Comportamento em função $\frac{P}{2kl}$ em função $\frac{v}{l}$ para $\alpha = \beta = 15^\circ$ (azul), $\alpha = 18^\circ$ $\beta = 15^\circ$ (verde) e $\alpha = 13^\circ$ $\beta = 15^\circ$ (vermelha).

Observa-se que, até o ponto de interseção entre as curvas vermelha e verde, o comportamento da força é o esperado porque a treliça cuja barra da esquerda é mais inclinada apresenta uma maior força de resistência. A partir do ponto de interseção há uma inversão do comportamento da força em relação ao deslocamento. Isto acontece porque neste instante, a relação entre os ângulos se inverte e a barra da direita torna-se mais inclinada que a barra da esquerda.

Para entender melhor este comportamento a figura (5), a seguir, mostra o comportamento do deslocamento horizontal em função do deslocamento vertical do nó para $\alpha = \beta = 15^\circ$ (Azul), $\alpha = 18^\circ$ $\beta = 15^\circ$ (verde), $\alpha = 13^\circ$ $\beta = 15^\circ$ (vermelho).

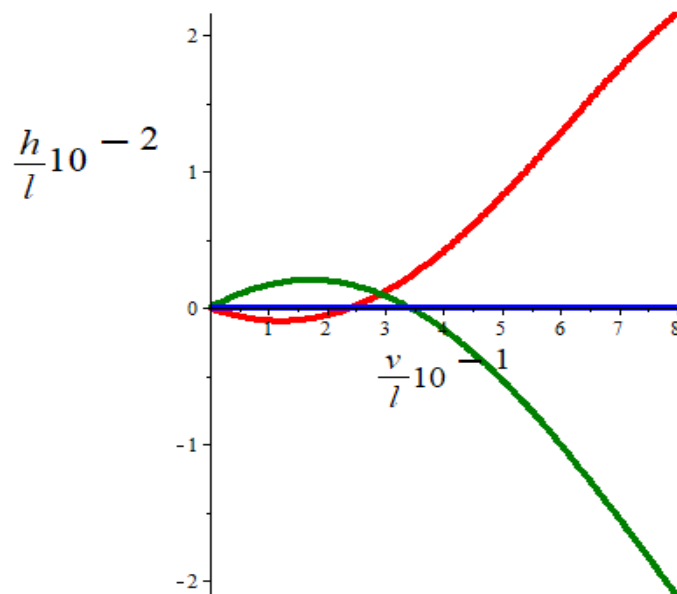


Fig. (6). Comportamento do deslocamento horizontal em função do deslocamento vertical do nó para $\alpha = \beta = 15^\circ$ (Azul), $\alpha = 18^\circ$ $\beta = 15^\circ$ (verde), $\alpha = 13^\circ$ $\beta = 15^\circ$ (vermelho).

Verifica-se na figura (6) que, quando os comprimentos da barra da esquerda e o comprimento da barra da direita são iguais, como esperado, o nó não se desloca na horizontal. Também é possível ver que, quando a barra da esquerda é mais inclinada que a barra da direita, o nó se desloca horizontalmente primeiro para a direita e depois para a esquerda e quando a barra da direita é mais inclinada que a barra da esquerda, o nó se desloca horizontalmente primeiro para a esquerda e depois para a direita.

Com duas barras de aço para o ângulo de inclinações iguais a 15° , com a seção reta $A = 7,78 \text{ cm}^2$, com o módulo de elasticidade $E = 190 \text{ GPa}$, para o deslocamento vertical por unidade de comprimento $\frac{v}{l} = 0,1$, a Força no nó será aproximadamente de 187,5 kN. Substituindo as barras de aço por barras de borracha, nas mesmas condições, com o módulo de elasticidade da borracha $E = 0,1 \text{ GPa}$, a força no nó passa a ser de aproximadamente 0,098 kN.

Considerais finais

O conceito de não linearidade, que está relacionado com a variação a rigidez elemento refletindo na rigidez do sistema estrutural. Mesmo desconsiderando a não linearidade física e nitidamente verifica-se a não linearidade geométrica, considerando que o sistema estrutural se mantém o tempo todo em equilíbrio.

O problema proposto por Avelino (2012), de um sistema estrutural treliçado formado por duas barras simétricas na condição deformada do sistema aplicadas as condições de equilíbrio, resultando em uma expressão que relaciona a força de resistência no sistema com o deslocamento vertical no nó do sistema mostrando que o comportamento desta força para determinado deslocamento aparece o fenômeno snap through.

O mesmo problema, porém, com a treliça com cinco elementos, foi resolvido utilizando Equação de Euler-Lagrange no Funcional de Energia, que é dado pela diferença entre a energia cinética e a energia potencial de deformação. Os casos particulares apresentados mostram que resultado generalizado é confiável.

O comportamento da curva da força em função do deslocamento vertical do nó, para treliça de duas barras tanto para a simetria quanto para elementos com comprimentos

diferentes foram os mesmos, mostrando com esperado, se uma das barras ou as duas estiverem mais inclinadas a resistência da estrutura aumenta, mostrado nas Figuras 3 e 4.

E, com quatro barras não aparece o fenômeno snap through, mas aparece o balanço do nó quando uma das barras tiver o comprimento maior em relação a outra, o que mostra que a resistência é maior até um certo deslocamento do nó da estrutura, com uma das barras mais inclinada, mostrado na Figura 5. Este balanço do nó claramente visto na Figura 6.

Referências

Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2014 / Roberto Chust Carvalho, Jasson Rodrigues de Figueiredo Filho. -- 4. ed. – São Carlos: EdUFSCar, 2020.

Curso de análise estrutural/ José Carlos Sussekind. – 6. Ed. – Porto Alegre – Rio de Janeiro: Globo, 1981.

Elementos finitos: a base da tecnologia CAE: análise não linear / Avelino Alves Filho – 1. Ed. – São Paulo: Érica, 2012.

Física I/ Young e Freedman; tradução Sonia Midori Yamamoto; revisão técnica Adir Moysés Luiz. – 12. Ed. – São Paulo: Addison Wesley, 2008.

Física Matemática / Butkov, Eugene –. LTC editora, 1988, Rio de Janeiro.

Fundamentos de física, volume 1: mecânica/ David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi – Rio de Janeiro: LTC, 2012.

J. W. York, “Role of Conformal Three-Geometry in the Dynamics of Gravitation”, Phys. Rev. Lett. 28 1082 (1972)

Mecânica Newtoniana, Lagrangeana, Hamiltoniana/NETO, João Barcelos, 1ªEd. São Paulo 2004, 431p.

Neto, J. B. Mecânica Newtoniana, Lagrangeana e Hamiltoniana. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004

Resistência dos materiais/R.C, Hiebeler; tradução Joaquim Pinheiro Nunes; revisão técnica Wilson Carlos da Silva – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

Resistência dos Materiais: para entender e gostar / Manoel Henrique Campos Botelho. – 4. Ed. – São Paulo: Blucher, 2017

K. S. Thorne and D. Macdonald, “Electrodynamics in Curved Spacetime - 3+1 Formulation”, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 198, 339 (1982).