『緝古算経』訳注[†]稿（5）

張　替　俊　夫[††]

中国古算書研究会

大川　俊隆、小寺　裕、田村　誠

馬場　理惠子、張替　俊夫

Translation and Annotation of “Continuation of Ancient Mathematics （緝古算経）” Vol. 5

HARIKAE Toshio

Abstract

“Continuation of Ancient Mathematics（緝古算経）” was written by early Tang dynasty calendarist and mathematician Wang Xiaotong some time after the year 626, and was listed as one of the Ten Computational Canons（算経十書）compiled during Tang dynasty. The aim of our studies is to provide a complete translation and annotation of the book based on a series of our researches on ancient Chinese mathematical books.

This is the fifth article, in which we treat with the problems 13 to 20.

『緝古算経』は初唐の暦学者であり数学者である王孝通によって626年の少し後に書かれたもので、唐代に編纂された算経十書中の一書である。我々の研究が目的とするのは、我々

[†] This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 18K00269.

[††] 大阪産業大学 全学教育機構 教授

草稿提出日　2月28日

最終原稿提出日　3月10日

の一連の中国古算書研究を踏まえ、同書に完全な訳と注を与えることにある。

本論文はその第５号であり、算題［一三］～［二〇］について扱う。

［一三］假令有粟五千一百四十五石。欲作方窖・圓窖各一、令口小底大、方面與圓徑等、兩深亦同。其深少於下方七尺、多於上方一丈四尺、盛各滿中而粟適盡[19]。問、方・徑・深各多少。

荅曰、上方・徑各七尺、下方・徑各二丈八尺、深各二丈一尺。

術曰、以四十二乘斛法、以乘粟、七十五而一、爲方亭積。令方差自乘、三而一、爲隅陽冪。以截多乘之、減積、餘爲實。以多乘差、加冪、爲方法。多加差爲廉法、從。開立方除之、即上方。加差即合所問[20]。

訓読：仮令に粟五千一百四十五石有り。方窖・円窖各おの一を作らんと欲し、口をして小にし、底をして大にし、方の面と円径をして等しくし、両深をして亦た同じからしむ。其の深は下方より少なきこと七尺、上方より多きこと一丈四尺、盛りて各おの中に満ちて粟適尽す(286)。問う、方・径・深は各おの多少ぞ。

答に曰う、上方･径は各おの七尺、下方･径は各おの二丈八尺、深は各おの二丈一尺。

術に曰う(287)、四十二を以て斛法に乗じ、以て粟に乗じ、七十五にして一とし、方亭の積と為す(288)。方の差をして自乗せしめ、三にして一とし、隅陽冪と為す(289)。截多を以て之に乗じ、積より減じ、余を実と為す(290)。多を以て差に乗じ、冪に加え、方法と為す(291)。多は差に加え廉法と為し(292)、従える。開立方して之を除けば、即ち上方(293)。差を加うれば即ち問う所に合す(294)。

注：(286) 方窖の体積を V_1、円窖の体積を V_2 とすると全体の体積 V は

$$V = V_1 + V_2 = 5145\text{石}$$

がなりたっている。また方窖の下方の一辺と円窖の下円の径を a 尺、方窖の上方

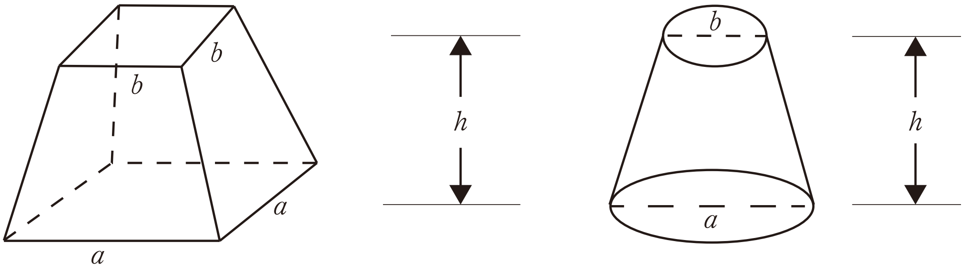

図13

の一辺と円窖の上円の径を b 尺、方窖と円窖の深さを h 尺とすると、

$$a-h=7,\ \ h-b=14$$

がなりたっている。図13を参照。本題は $V,\ a-h,\ h-b$ が与えられている時、a, b, h を求める算題である。

(287) 方窖の体積を求める公式より

$$V_1=\frac{(a^2+b^2+ab)\,h}{3}$$

である。ここで後注 (295) にしたがって V_1 の分子を W とおく。また円窖の体積は

$$V_2=\frac{\pi}{4}V_1$$

なので、$\pi=\dfrac{22}{7}$ を用いると、

$$V_2=\frac{1}{4}\times\frac{22}{7}V_1=\frac{11}{14}\times\frac{1}{3}W=\frac{11}{42}W$$

であり、

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{3}W+\frac{11}{42}W=\frac{25}{42}W$$

である。$W=3V_1$ なので

$$V=\frac{25}{42}\times 3\,V_1=\frac{75}{42}V_1$$

であり、

$$V_1=\frac{42}{75}V$$

を参考文献19) の注 (187) の式

$$b^3+[(a-b)+(h-b)]\,b^2+[(a-b)(h-b)+K]\,b=V_1-K(h-b)$$

に適用する。$a-b,\ h-b$ が分かっているので b についての 3 次方程式が得られる。ここで、K は後注 (289) の「隅陽冪」である。

(288) 斛法は 1 石 = $2\dfrac{5}{10}$ 立方尺なので、

$$V_1=\frac{42}{75}V=\frac{42}{75}\times\frac{25}{10}\times 5145\text{石}=\frac{14}{10}\times 5145\text{石}=7203\text{立方尺}$$

である。

(289) 隅陽冪を求める計算は

$$K=\frac{(a-b)^2}{3}=\frac{\{(a-h)+(h-b)\}^2}{3}=\frac{(14+7)^2}{3}=147$$

である。

(290)「截多」は $h-b$ のこと。実を求める計算は

$$V_1-K(h-b)=7203-147\times 14=5145$$

である。

(291) 方法を求める計算は

$$(a-b)(h-b)+K=21\times 14+147=441$$

である。

(292) 廉法を求める計算は

$$(a-b)+(h-b)=21+14=35$$

である。

(293) 注 (287) の３次方程式に以上の注で得られた実、方法、廉法を代入すると

$$b^3+35b^2+441b=5145$$

が得られる。これを解くと実数解 $b=7$ 尺を得る。

(294) 前注で得られた上方 $b=7$ 尺を用いて、下方 a と深 h を求めると、

$$a=(a-b)+b=21+7=28\text{尺}$$
$$h=(h-b)+b=14+7=21\text{尺}$$

が得られる。

訳：仮に粟が5145石あるとする。方窖・円窖それぞれ１つを作りたい、口は小さく底は大きく、方窖の一辺と円径は等しく、両方の深さもまた同じにする。その深さは下方より７尺少なく、上方より１丈４尺多く、それぞれの中に粟を盛っていって、合せて5145石でちょうど尽きるようにしたい。問う、方・径・深は各々どれほどか。

答にいう、上方と上径はそれぞれ７尺、下方と下径はそれぞれ２丈８尺、深さはそれぞれ２丈１尺。

術にいう、42を斛法に掛け、それを粟に掛け、75で割り、方亭の体積とする。方の差を自乗させ、３で割り、隅陽冪とする。截多をこれに掛け、方亭の体積から引き、残りを実とする。截多を元の差に掛け、隅陽冪を加え、方法とする。截多を元の差に加え廉法とし、従える。開立方して之を除けば、上方となる。差を加えれば題意を満たす。

[19]圓率・斛法竝與前同。

訓読：円率・斛法は並びに前と同じ。

訳：円周率 $\left(\frac{22}{7}\right)$ と斛法 $\left(2\frac{5}{10}\right)$ はいずれも前の算題と同じである。

[20]凡方亭、上･下方相乘、又(命)〈各〉[一]自乘、并以乘高、爲虚。命三而一、爲方亭積。若圓亭、上･下徑相乘、又各自乘、并以乘高、爲虚。又十一乘之、四十二而一、爲圓亭積。今方・圓二積并在一處、故以四十二復乘之、即得圓虚十一・方虚十四、凡二十五、而一、

得一虚之積。又三除虚積、爲方亭實。乃依方（高）〈亭〉[二] 覆問法、見上下方差及高差與積求上下方・高術入之。故三乘二十五、而一。

校訂：［一］李潢に従って「命」は「各」に改める。

［二］銭宝琮に従って「高」は「亭」に改める。

訓読：凡そ方亭は、上・下方は相乗じ、又た各おの自乗し、并せて以て高に乗じ、虚と為す (295)。命じて三にして一とし、方亭の積と為す (296)。円亭の若きは、上・下径は相乗じ、又た各おの自乗し、并せて以て高に乗じ、虚と為す。又た十一もて之に乗じ、四十二にして一とし、円亭の積と為す (297)。今方・円の二積は并せて一所に在り、故に四十二を以て復た之に乗ずれば、即ち円虚十一・方虚十四を得、凡そ二十五にして一とし、一虚の積を得 (298)。又た三もて虚の積を除し、方亭の実と為す (299)。乃ち方亭覆問の法、上下の方差及び高差と積を見て上下の方・高を求むるの術に依りて之を入る。故に三もて二十五に乗じ、而して一とす (300)。

注：(295)「虚」とは、方亭の体積の分子の部分、すなわち

$$W = (a^2 + b^2 + ab)h$$

をいう。方亭の実体積の 3 倍を指す。

(296) 方亭の体積 V_1 について

$$V_1 = \frac{1}{3}W$$

がなりたつ。注 (287) 参照。

(297) 円亭の体積 V_2 について

$$V_2 = \frac{11}{42}W$$

がなりたつ。注 (287) 参照。

(298) 全体の体積は

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}W + \frac{11}{42}W = \frac{25}{42}W$$

なので、両辺に42を掛けて

$$42V = 14W + 11W = 25W$$

となる。ここで $11W$ が「円虚十一」に当たり、$14W$ が「方虚十四」に当たる。一虚の体積は

$$W = \frac{42}{25}V$$

である。

(299)「方亭の実」は方亭の実際の体積。

$$V_1 = \frac{1}{3}W = \frac{1}{3} \times \frac{42}{25}V = \frac{42}{75}V$$

である。

(300)「方亭覆問の法」とは、方亭の体積 V_1 から計算する方法のこと。後文で証明するように上方の下方との差 $a-b$、高さとの差 $h-b$、及び体積 V_1 から a, b, h を求めている。注 (287) 参照。ゆえに、ここでの計算では、3 を25に掛けた75で割っている。注 (288) 参照。

訳：凡そ方亭は上･下方を相乗じ、またそれぞれ自乗し、これらを併せて、高さに掛け、「虚」とする。これを分子として 3 を分母とする分数を作ると、方亭の体積となる。円亭についても上・下径を相乗じると、またそれぞれ自乗し、併せて高さに掛けると、虚となる。また11をこれに掛け、42で割ると、円亭の体積となる。今方・円の二つの体積を併せて一つの物とし、ゆえに42をまたこれに掛け、即ち円の虚11、方の虚14を得て、合わせた25で割ると、一つの虚の体積を得る。また 3 で虚の体積を割ると、方亭の実際の体積となる。そこで方亭覆問の法、すなわち上方の下方との差と高との差と体積を見て上下の方と高を求める術によってこれを計算する。ゆえに、3 を25に掛けたもので割るのである。

[一四]假令有粟二萬六千三百四十二石四斗。欲作方窖六･圓窖四、令口小、底大、方面與圓徑等、其深亦同。令深少於下方七尺、多於上方一丈四尺。盛各滿中而粟適盡[21]。問、上下方・深數各多少。
荅曰、方窖上方七尺、下方二丈八尺、深二丈一尺、圓窖上下(方)〈徑〉[一]･〈深〉[二]與方窖同。
術曰、以四十二乘斛法、以乘粟、三百八十四而一、爲方亭積尺。令方差自乘、三而一、爲隅陽冪。以截多乘之、以減積、餘爲實。以多乘差、加冪爲方法。又以多加差爲廉法、從。開立方除之、即上方。加差即合所問[22]。

校訂：[一] 陳傑に従って「方」を「徑」に改める。
　　[二] 銭宝琮に従って「深」を補う。

訓読：仮令に粟二万六千三百四十二石四斗有り。方窖六・円窖四を作らんと欲し、口をして小にし、底をして大とし、方面と円径をして等しくし、其の深をして亦た同じからしむ。深をして下方より少なからしむること七尺、上方より多からしむること一丈四尺。盛りて各おの中に満ちて粟適尽す(301)。問う、上下の方・深の数は各おの多少ぞ。
　答に曰う、方窖の上方は七尺、下方は二丈八尺、深は二丈一尺、円窖の上下の径・

深と方窖は同じ。

術に曰う[302]、四十二を以て斛法に乗じ、以て粟に乗じ、三百八十四にして一とし、方亭の積尺と為す[303]。方の差をして自乗せしめ、三にして一とし、隅陽冪と為す[304]。截多を以て之に乗じ、以て積より減じ、余を実と為す[305]。多を以て差に乗じ、冪に加えて方法と為す[306]。又た多を以て差に加え廉法と為し[307]、従える。開立方して之を除けば、即ち上方[308]。差を加うれば即ち問う所に合す[309]。

注：(301) 方窖1つの体積を V_1、円窖1つの体積を V_2 とすると全体の体積 V は

$$V = 6V_1 + 4V_2 = 26342\text{石}\,4\text{斗}$$

がなりたっている。この方窖と円窖の形状は前題［一三］と同じである。方窖の下方の一辺と円窖の下円の径を a 尺、方窖の上方の一辺と円窖の上円の径を b 尺、方窖と円窖の深さを h 尺とすると、

$$a-h = 7,\ \ h-b = 14$$

がなりたっている。本題は $V,\ a-h,\ h-b$ が分かっているとき、a, b, h を求める算題である。

(302) 注 (297) より

$$V_2 = \frac{11}{42}W = \frac{33}{42}V_1$$

なので、

$$V = 6V_1 + 4V_2 = 6V_1 + \frac{132}{42}V_1 = \frac{384}{42}V_1$$

である。よって

$$V_1 = \frac{42}{384}V$$

を参考文献19) の注 (187) の式

$$b^3 + [(a-b) + (h-b)]b^2 + [(a-b)(h-b) + K]b = V_1 - K(h-b)$$

に適用すると、$a-b,\ h-b$ がすでに分かっているので b についての3次方程式が得られる。

(303) 斛法は1石$=2\frac{5}{10}$ 立方尺なので、方窖の体積 V_1 を求めると

$$V_1 = \frac{42}{384}V = \frac{42}{384} \times \frac{25}{10} \times 26342\text{石}\,4\text{斗} = \frac{105}{384} \times 26342\text{石}\,4\text{斗} = 7203\text{立方尺}$$

である。ここで得られた V_1 は注 (288) での値と同じであるので、本題の方窖と円窖は前題［一三］と同じ形状である。

(304) 注 (289) と同じく $K = 147$ である。

(305) 注 (290) と同じく実は5145である。

(306) 注 (291) と同じく方法は441である。

(307) 注 (292) と同じく廉法は35である。

(308) 注 (293) と同じ3次方程式 $b^3+35b^2+441b=5145$ を解くと実数解 $b=7$ 尺を得る。

(309) 前注で得られた上方 b を用いて、下方 a と深 h を求めると、注 (294) と同じく

$$a=28,\quad h=21$$

が得られる。

訳：仮に粟26342石4斗あるとする。方窖6基と円窖4基を作りたい、口は小さく・底は大きくし、方面と円径は等しくし、その深はまた同じとする。深は下方より7尺少なく、上方より1丈4尺多くする。各々の中の粟がちょうど満杯になるようにしたい。問う、上下の方・深の数はそれぞれどれほどか。

答にいう、方窖の上方は7尺、下方は2丈8尺、深さは2丈1尺、円窖の上下の径・深と方窖は同じ。

術にいう、42を斛法に掛け、粟に掛け、384で割り、方窖の積尺とする。方の差を自乗し、3で割り、隅陽冪とする。截多をこれに掛け、体積から引き、残りを実とする。多い方を差に掛け、隅陽冪を加えて方法とする。また多い方を差に加え廉法として、従える。開立方してこれを除けば、上方となる。差を加えれば題意を満たす。

[21]圓率・斛法竝與前同。

訓読：円率・斛法は並びに前と同じ。

訳：円周率 $\left(\dfrac{22}{7}\right)$ と斛法 $\left(2\dfrac{5}{10}\right)$ はいずれも前の算題と同じである。

[22] 今以四十二乘。圓虛十一者四、方虛十四者六、合一百二十八虛、除之、爲一虛之積。得者仍三而一、爲方亭實積。乃依方亭見差覆問求之。故三乘一百二十八、除之。

訓読：今四十二を以て乗ず。円虚十一は四、方虚十四は六、合すれば一百二十八虚にして、これを除せば、一虚の積と為す(310)。得る者は仍お三にして一とし、方亭の実積と為す(311)。乃ち方亭の見差覆問に依りてこれを求む。故に三もて一百二十八に乗じて、これを除す(312)。

注：(310) 注 (295) の虚

$$W=(a^2+b^2+ab)h$$

を用いると、注 (296) , (297) より

$$V_1 = \frac{1}{3}W,\quad V_2 = \frac{11}{42}W$$

である。全体の体積は

$$V = 6V_1 + 4V_2$$

なので、

$$V = \frac{6}{3}W + \frac{4\times 11}{42}W$$

であり、両辺に42を掛けると

$$42V = 6\times 14W + 4\times 11W = 128W$$

となる。これが「円虚十一は四、方虚十四は六、合せて一百二十八虚」である。この両辺を128で割ると１つの虚の体積を得る。

$$W = \frac{42}{128}V$$

これが「一虚の積」である。

(311)「方亭の実積」は方亭の実際の体積。計算は注 (296) より

$$V_1 = \frac{1}{3}W = \frac{14}{128}V$$

である。

(312)「方亭の見差覆問」とは、方亭の体積 V_1 から計算する方法のこと。ここでは、V_1 と上方の下方との差 $b-a$ 、高さとの差 $h-a$ から a, b, h を求めている。注(302)参照。ゆえにここでの計算では、3 を128に掛けた384で割っている。注 (303) 参照。

訳：今全体の体積に42を掛ける。円の虚11は４つ、方の虚14は６つ、合せて128の虚となる。全体の体積に42を掛けたもの（$42V$）を128で割ると、一つの虚の体積となる。得た値はさらに３で割れば、方亭の実際の体積となる。そこで方亭の見差覆問によってこれを求める。ゆえに３を128に掛けてこれを割る。

［一五］假令有句股相乘冪七百六、五十分之一、弦多於句三十六、十分之九。問、三事各多少。

荅曰、句十四、二十分之七、股四十九、五分之一、弦五十一、四分之一。

術曰、冪自乘、倍多數而一、爲實。半多〈數爲〉[一]廉法、從。開立方除之、即句。以弦多〈數加之、〉[二]即弦。以句除冪、即股[23]。

校訂：[一]「數爲」を脱す。孔刻本に従って補う。

[二]「數加之」を脱す。孔刻本に従って補う。

訓読：仮令に句股相乗ずるの冪七百六、五十分之一有り、弦は句より多きこと三十六、十分之九(313)。問う、三事(314)は各おの多少ぞ。

答に曰う、句十四、二十分之七、股四十九、五分之一、弦五十一、四分之一。

術に曰う(315)、冪は自乗し、多き数を倍して一とし、実と為す(316)。多き数を半にして廉法と為し、従える(317)。開立方して之を除けば、即ち句(318)。弦の多き数を以て之に加うれば、即ち弦(319)。句を以て冪を除せば、即ち股(320) [23]。

注：(313) 本題より以下［二〇］題までは与えられた数値には長さの単位が付いていない。

句 a 、股 b 、弦 c とすると、句股弦の定理より $a^2+b^2=c^2$ である。また本題は

$$ab = 706\frac{1}{50},\ \ c-a = 36\frac{9}{10}$$

であるとき、a, b, c の値を求める算題である。

(314)「三事」とは、句、股、弦のこと。おそらく唐代初期の用法であろう。

(315) 後の自注［23］に従うと

$$\frac{(ab)^2}{2(c-a)} = a^3 + \left(\frac{c-a}{2}\right) a^2$$

が得られる。ab と $c-a$ の値が与えられているので、上式は a についての 3 次方程式となる。また上式の右辺の値は図15- 1 の立体の体積を表す。

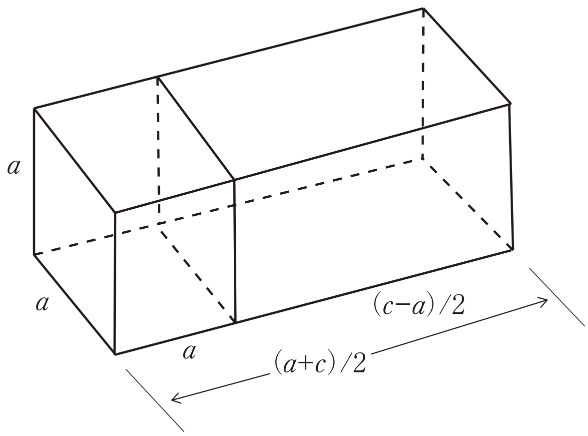

図15- 1

(316) 実を求める計算は、

$$\frac{(ab)^2}{2(c-a)} = \frac{\left(706\frac{1}{50}\right)^2}{2\left(36\frac{9}{10}\right)} = 6754\frac{258}{1000}$$

である。

(317) 廉法を求める計算は、

$$\frac{c-a}{2}=18\frac{9}{20}$$

である。

(318) 前注で得られた実、廉法による 3 次方程式

$$a^{3}+18\frac{9}{20}a^{2}=6754\frac{258}{1000}$$

を解くと、実数解 $a=14\frac{7}{20}$ が得られる。

(319) 弦を求める計算は、

$$c=(c-a)+a=36\frac{9}{10}+14\frac{7}{20}=51\frac{1}{4}$$

である。

(320) 股を求める計算は、

$$b=\frac{ab}{a}=\frac{706\frac{1}{50}}{14\frac{7}{20}}=49\frac{1}{5}$$

である。また本題における直角三角形の三辺の長さの比は

$$14\frac{7}{20}:49\frac{1}{5}:51\frac{1}{4}=7:24:25$$

である。

訳：仮に句と股を掛けた積 $706\frac{1}{50}$ があり、弦は句より $36\frac{9}{10}$ 長い。問う、句、股、弦はそれぞれどれほどか。

答にいう、句は $14\frac{7}{20}$、股は $49\frac{1}{5}$、弦は $51\frac{1}{4}$。

術にいう、積を自乗し、弦の句より多い数を倍してこれで割り、実とする。この多い数を半分にして廉法として、従える。開立方してこれを除けば、句が得られる。弦の多い数をこれに加えれば、弦が得られる。句で積を割れば、股が得られる。

[23]句股相乗冪自〈乗、即〉[一]句冪乗股冪〈之積。故〉[二]以倍句弦差而一、得一句與半差〈相連、乗〉[三]句冪爲方。故半差爲廉〈法〉[四]、従、開立方除之。

校訂：[一]「乗即」を脱す。孔刻本に従って補う。

[二]「之積故」を脱す。孔刻本に従って補う。

[三]「相連乗」を脱す。銭宝琮に従って補う。なお張敦仁は「再乗得」を補っている。

[四]「法」を脱す。孔刻本に従って補う。

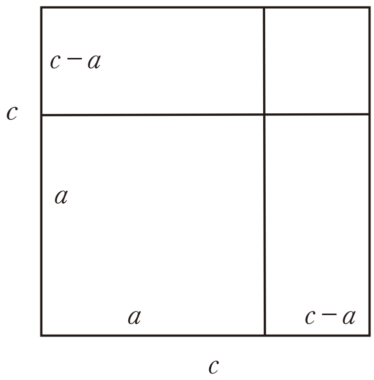

図15－2

訓読：句股相乗ずるの羃は自乗すれば、即ち句羃もて股羃に乗ずるの積なり(321)。故に句弦の差を倍するを以て一とすれば、一句と半の差相い連なり、句羃に乗じて方と為すを得(322)。故に差を半にして廉法と為し、従え、開立方して之を除く(323)。

注：(321) ここでは

$$(ab)^2 = a^2 \times b^2$$

がなりたつことをいう。

(322) 図15－2のように一辺の長さ c の正方形を分割すると、

$$c^2 = a^2 + 2a(c-a) + (c-a)^2$$

がなりたつ。$b^2 = c^2 - a^2$ なので

$$b^2 = 2a(c-a) + (c-a)^2$$

である。これは縦が $c-a$ で、横が $2a+(c-a)$ の長方形の面積である。この両辺を $2(c-a)$ で割ると

$$\frac{b^2}{2(c-a)} = a + \frac{c-a}{2}$$

なので、両辺に a^2 を掛けると

$$\frac{a^2b^2}{2(c-a)} = \left(a + \frac{c-a}{2}\right) a^2$$

がなりたつ。

(323) $\frac{c-a}{2}$ を廉法とする a の3次方程式を解けば、句 a が得られる。

訳：句と股を掛けた積を自乗すれば句の羃と股の羃を掛けた積となる。ゆえにこれを句と弦の差を倍したもので割ると、1つの句と差の半分を足したものに句の羃を掛けて立体とすることができる。ゆえに差を半分にしたものを廉法として、従え、開立方してこれを除く。

[一六]假令有句股相乘冪四千三十六、五分之〈一、股〉[一]少於弦六、五分之一。問、弦多少。

荅曰、弦一百一十四、十分之七。

術曰、冪自乘、倍少數而一、爲實。半少爲廉法、從。開立方除之、即股。加差、即弦。

校訂：[一]「一股」を脱す。孔刻本に従って補う。

訓読：仮令に句股相乗ずるの冪四千三十六、五分之一有り、股は弦より少なきこと六、五分之一(324)。問う、弦は多少ぞ。

答に曰う、弦は一百一十四、十分之七。

術に曰う(325)、冪は自乗し、少なき数を倍して一とし、実と為す(326)。少なきを半にして廉法と為し(327)、従える。開立方して之を除けば、即ち股(328)。差を加うれば、即ち弦(329)。

注：(324) 句 a 、股 b 、弦 c とすると、本題では

$$ab = 4036\frac{1}{5},\quad c-b = 6\frac{1}{5}$$

であり、これより c を求める算題である。

(325) 注 (322) と同様にすると

$$\frac{(ab)^2}{2(c-b)} = b^3 + \left(\frac{c-b}{2}\right)b^2$$

が得られる。

(326) 実を求める計算は、

$$\frac{(ab)^2}{2(c-b)} = \frac{\left(4036\frac{1}{5}\right)^2}{2\left(6\frac{1}{5}\right)} = 1313783\frac{1}{10}$$

である。

(327) 廉法を求める計算は、

$$\frac{c-b}{2} = 3\frac{1}{10}$$

である。

(328) 前注で得られた実、廉法による 3 次方程式

$$b^3 + 3\frac{1}{10}b^2 = 1313783\frac{1}{10}$$

を解くと、実数解 $b = 108\frac{1}{2}$ が得られる。

(329) 弦を求める計算は、

$$c = (c-b)+b = 6\frac{1}{5} + 108\frac{1}{2} = 114\frac{7}{10}$$

である。なお句を求めると、

$$a = \frac{ab}{b} = \frac{4036\frac{1}{5}}{108\frac{1}{2}} = 37\frac{1}{5}$$

となり、本題における直角三角形の三辺の長さの比は

$$37\frac{1}{5} : 108\frac{1}{2} : 114\frac{7}{10} = 12 : 35 : 37$$

である。

訳：仮に句と股を掛けた冪 $4036\frac{1}{5}$ があり、股は弦より $6\frac{1}{5}$ 短い。問う、弦はどれほどか。

答にいう、弦は $114\frac{7}{10}$ 。

術にいう、冪を自乗し、(股の弦より) 少ない数を倍してこれで割り、実とする。この少ない数を半分にして廉法として、従える。開立方してこれを除けば、股が得られる。この差を加えれば、弦が得られる。

[一七]假令有句弦相乘冪一千三百三十七、二十分之一、弦多於股一、十分之一。問、股多少。
荅曰、九十二、五分之二。
術曰、冪自乘、倍多而一、爲立冪。又多再〈自〉[一] 乘、半之、減立冪、餘爲實。又多數自乘、〈倍之〉[二]、爲方法。又置多數、五之、二而一、爲廉〈法、從〉。[三] 開立方除之、即股[24]。

校訂：[一]「自」を脱す。孔刻本に従って補う。

[二]「倍之」を脱す。孔刻本に従って補う。

[三]「法從」を脱す。孔刻本に従って補う。

訓読：仮令に句弦相乗ずるの冪一千三百三十七、二十分之一有り、弦は股より多きこと一、十分之一(330)。問う、股は多少ぞ。

答に曰う、九十二、五分之二。

術に曰う(331)、冪は自乗し、多きを倍して一とし、立冪と為す(332)。又た多きは再自乗し、之を半にし、立冪より減じ、余は実と為す(333)。又た多き数は自乗し、之を倍し、方法と為す(334)。又た多き数を置き、之を五し、二にして一とし、廉法と為し(335)、従える。開立方して之を除けば、即ち股(336)。

注：(330) 句 a 、股 b 、弦 c とすると、本題では

$$ac = 1337\frac{1}{20},\quad c-b = 1\frac{1}{10}$$

である。これより b の値を求める。

(331) 注 (322) と同様に立式すると

$$\frac{a^2c^2}{2(c-b)} = \left(b+\frac{c-b}{2}\right)c^2 = \frac{b+c}{2}c^2$$

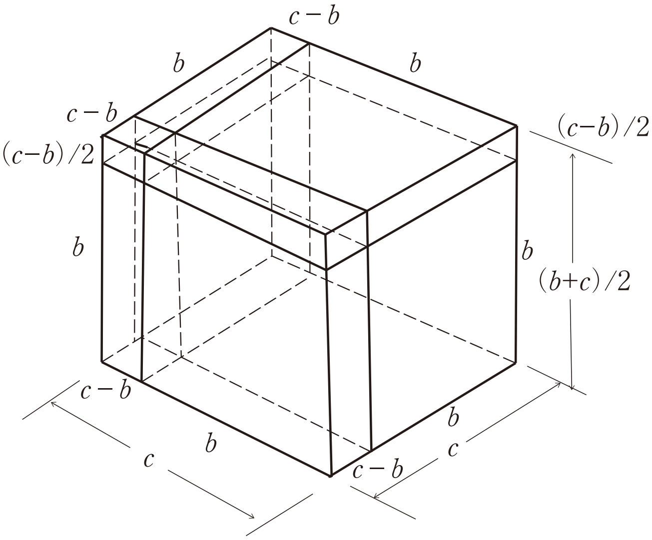

図17

がなりたつ。この右辺の値は、底面が一辺 c の正方形で、高さが$\frac{b+c}{2}$ である直方体（図17参照）の体積を表している。この直方体を図17で示された線に沿って分割すると、

一辺 b の立方体が１つ、辺の長さが $b, b, c-b$ の直方体が２つ、
辺の長さが $c-b, c-b, b$ の直方体が１つ、辺の長さが $b, b, \frac{c-b}{2}$ の直方体が１つ、
辺の長さが $b, c-b, \frac{c-b}{2}$ の直方体が２つ、辺の長さが $c-b, c-b, \frac{c-b}{2}$ の直方体が１つ

となる。

ゆえに、

$$\frac{a^2c^2}{2(c-b)}=b^3+2\times(c-b)b^2+(c-b)^2b+\frac{c-b}{2}b^2+2\times(c-b)\frac{c-b}{2}b+(c-b)^2\frac{c-b}{2}$$

がなりたつ。これより

$$b^3+\frac{5(c-b)}{2}b^2+2(c-b)^2b=\frac{(ac)^2}{2(c-b)}-\frac{(c-b)^3}{2}$$

が得られ、ac と $c-b$ の値が既知であることから、上式は b についての３次方程式となる。

(332) 図17の直方体の体積 $\frac{(ac)^2}{2(c-b)}$ をここでは「立冪」と呼んでいる。計算は

$$\frac{(ac)^2}{2(c-b)}=\frac{\left(1337\frac{1}{20}\right)^2}{2\times\left(1\frac{1}{10}\right)}=812592\frac{11}{80}$$

である。

(333)「再自乗」とは 3 乗のこと。実を求める計算は

$$\frac{(ac)^2}{2(c-b)}-\frac{(c-b)^3}{2}=812592\frac{11}{80}-\frac{\left(1\frac{1}{10}\right)^3}{2}=812591\frac{59}{125}$$

である。

(334) 方法を求める計算は

$$2(c-b)^2=2\left(1\frac{1}{10}\right)^2=2\frac{21}{50}$$

である。

(335) 廉法を求める計算は

$$\frac{5(c-b)}{2}=\frac{5\left(1\frac{1}{10}\right)}{2}=2\frac{3}{4}$$

である。

(336) 前注で得られた実、方法、廉法による 3 次方程式

$$b^3+2\frac{3}{4}b^2+2\frac{21}{50}b=812591\frac{59}{125}$$

を解くと、実数解 b（股）$=92\frac{2}{5}$ が得られる。なお句 a と弦 c を求めると、

$$c=(c-b)+b=1\frac{1}{10}+92\frac{2}{5}=93\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{ac}{c}=\frac{1337\frac{1}{20}}{93\frac{1}{2}}=14\frac{3}{10}$$

となり、本題における直角三角形の三辺の長さの比は

$$14\frac{3}{10}:92\frac{2}{5}:93\frac{1}{2}=13:84:85$$

である。

訳：仮に句と弦を掛けた積 $1337\frac{1}{20}$ があり、弦は股より $1\frac{1}{10}$ 長い。問う、股はどれほどか。

答にいう、$92\frac{2}{5}$ 。

術に曰う、積を自乗し、多い分を倍したもので割り、立冪とする。また多い分を 3 乗して、これを半分にし、立冪から引き、残りを実とする。また多い数を自乗し、これを倍し、方法とする。また多い分を置き、これに 5 を掛け、2 で割り、廉法として、従える。開立方してこれを除けば、股が得られる。

[24] 句弦相乘冪自〈乘、即句〉[一] 冪乘弦冪之〈積。故以倍〉[二] 股弦差而一、得一股與半差□□□□□ [三] 爲方。今多再自乘半之爲隅□□□□□ [四] 横虚二立廉□□□□□□□□□□□

□[五]倍之爲從隅□□□□□□□□□□□[六]多爲上廉即二多□□□□□□□□□[七]法故五之二而一□□□□□□□□□[八]

校訂：[一]「乘即句」を脱す。孔刻本に従って補う。

　[二]「積故以倍」を脱す。孔刻本に従って補う。

　[三] この５字を欠く。

　[四] この５字を欠く。

　[五] この11字を欠く。

　[六] この11字を欠く。

　[七] この９字を欠く。

　[八] この９字を欠く。

訓読：句弦相い乗ずるの冪は自乗すれば、即ち句冪もて弦冪に乗ずるの積。故に股弦の差を倍するを以て一とし､一股と半の差を得て□□□□□方と為す。今多きは再自乗し、之を半し、為隅□□□□□横虚二立廉□□□□□□□□□□□倍之為従隅□□□□□□□□□□□多為上廉即二多□□□□□□□□□法故五之二而一□□□□□□□□□

[24] の訳はつけない。

以下の［一八］～［二〇］については欠字が多く、張敦仁による補作５）と南秉吉による補作20）がある。張敦仁は設問、解答、術文の補作を行っているが、南秉吉は設問と解答の補作のみである。ここでは張敦仁の補作に従う。

下記の表において、句 a 、股 b 、弦 c に対する両者の補作を比較する。

			張敦仁	南秉吉
［一八］	既知の値	bc	$4739\frac{3}{5}$	$4428\frac{3}{5}$
		$c-a$	$54\frac{2}{5}$	55
	得られる値	b	66	68
		a	$15\frac{3}{10}$	$12\frac{1}{10}$
		c	$69\frac{7}{10}$	$67\frac{1}{10}$
［一九］	既知の値	bc	726	$\frac{3}{50}$
		a	$7\frac{7}{10}$	$\frac{7}{100}$
	得られる値	b	$26\frac{2}{5}$	$\frac{6}{25}$
		c	$27\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
［二〇］	既知の値	ac	$164\frac{14}{25}$	$164\frac{14}{25}$
		b	$16\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$
	得られる値	a	$8\frac{4}{5}$	$8\frac{4}{5}$
		c	$18\frac{7}{10}$	$18\frac{7}{10}$

［一八］假令有股弦相乘冪〈四千七百三十九、五分之〉[一]三、句少於弦五十〈四、五分之二。問、股多少〉[二]。

荅曰、六〈十八〉[三]。

術曰、冪自乘、〈倍少數而一、爲立冪。又少數〉[四]再自乘、半之、以〈減立冪、餘爲實。又少數自〉[五]乘、倍之、爲方法。〈又置少數、五之、二而一、爲〉[六]廉法、從。開立方〈除之、即句。加差、即弦。弦除〉[七]冪、即股。

校訂：［一］この10字は張敦仁の補作に従う。南秉吉は「四千四百二十八、五分之」と補作する。

［二］この９字は張敦仁の補作に従う。南秉吉は「五。問股多少」と補作する。

［三］この２字は張敦仁の補作に従う。南秉吉は「十六」と補作する。

［四］この11字は張敦仁の補作に従う。南秉吉の補作はない。

［五］この10字は張敦仁の補作に従う。南秉吉の補作はない。

［六］この10字は張敦仁の補作に従う。南秉吉の補作はない。

［七］この10字は張敦仁の補作に従う。南秉吉の補作はない。

訓読：仮令に股弦相乗ずるの冪四千七百三十九、五分之三有り、句は弦より少なきこと五十四、五分之二(337)。問う、股は多少ぞ。

答に曰う、六十八。

術に曰う(338)、冪は自乗し、（句の弦より）少なき数を倍して一とし、立冪と為す(339)。又た少なき数は再自乗し、之を半にし、以て立冪より減じ、余を実と為す(340)。又た少なき数は自乗し、之を倍し、方法と為す(341)。又た少なき数を置き、之を五し、二にして一とし、廉法と為し(342)、従える。開立方して之を除けば、即ち句(343)。差を加うれば、即ち弦。弦もて冪を除せば、即ち股(344)(345)。

注：(337) 句 a 、股 b 、弦 c とすると、本題では

$$bc = 4739\frac{3}{5},\ \ c-a = 54\frac{2}{5}$$

である。本題は［一七］題と股・句が入れ替っているだけで同様に a, b, c を求めることができる。

(338) 注 (331) と同様に、辺の長さが $c, c, \frac{c+a}{2}$ の直方体の分割を考えると

$$a^3+\frac{5(c-a)}{2}a^2+2(c-a)^2a=\frac{(bc)^2}{2(c-a)}-\frac{(c-a)^3}{2}$$

が得られる。

(339) ここでの計算は立冪 $\frac{(bc)^2}{2(c-a)}$ を求める。

$$\frac{(bc)^2}{2(c-a)}=\frac{\left(4739\frac{3}{5}\right)^2}{2\times\left(54\frac{2}{5}\right)}=206468\frac{825}{1000}$$

である。

(340) 実を求める計算は

$$V-\frac{(c-a)^3}{2}=125974\frac{233}{1000}$$

である。

(341) 方法を求める計算は

$$2(c-a)^2=2\left(54\frac{2}{5}\right)^2=5918\frac{18}{25}$$

である。

(342) 廉法を求める計算は

$$\frac{5(c-a)}{2}=\frac{5\left(54\frac{2}{5}\right)}{2}=136$$

である。

(343) 前注で得られた実、方法、廉法による 3 次方程式

$$a^3+136a^2+5918\frac{18}{25}a=125974\frac{233}{1000}$$

を解くと、実数解 $a=15\frac{3}{10}$ が得られる。

(344) 前注で得られた句から股と弦を求めると

$$c=a+(c-a)=15\frac{3}{10}+54\frac{2}{5}=69\frac{7}{10}$$

$$b=\frac{bc}{c}=\frac{4739\frac{3}{5}}{69\frac{7}{10}}=68$$

が得られる。本題における直角三角形の三辺の長さの比は

$$15\frac{3}{10}:68:69\frac{7}{10}=9:40:41$$

である。

(345) 南秉吉の補作に従うと、句、股、弦は

$$a=12\frac{1}{10},\ b=66,\ c=67\frac{1}{10}$$

となる。直角三角形の三辺の長さの比は

$$12\frac{1}{10}:66:67\frac{1}{10}=11:60:61$$

である。

訳：仮に股と弦を掛けた積 $4739\frac{3}{5}$ があり、句は弦より $54\frac{2}{5}$ 短い。問う、股はどれほどか。

答にいう、股は68。

術にいう、積を自乗し、少ない数を倍してこれで割り、立冪とする。また少ない数を 3 乗し、これを半分にし、立冪から引き、残りを実とする。また少ない数を自乗し、これを倍し、方法とする。また少ない数を置き、これに 5 を掛け、2 で割り、廉法として、従える。開立方してこれを除けば、句が得られる。差を加えれば、弦が得られる。弦で積を割れば、股が得られる。

[一九]假令有股弦相乗冪〈七百二十六、句七、十分之〉[一]七。問、股多少。

荅曰、股二十〈六、五分之二〉[二]。

術曰、冪自〈乗、爲實。句自乗、爲方法、從。開方〉[三]除之、所得、〈又開方、

即股[25]〉[四]。

校訂：［一］この10字は張敦仁の補作に従う。南秉吉は「五十分之三、句一百分之」と補作する。

［二］この５字は張敦仁の補作に従う。南秉吉は「五分之六」と補作する。

［三］この12字は張敦仁の補作に従う。南秉吉の補作はない。

［四］この５字は張敦仁の補作に従う。南秉吉の補作はない。

訓読：仮令に股弦相乗ずるの冪七百二十六有り、句は七、十分之七(346)。問う、股は多少ぞ。

答に曰う、股は二十六、五分之二。

術に曰う(347)、冪は自乗し、実と為す(348)。句は自乗し、方法と為し(349)、従える。開方して之を除けば(350)、得る所、又た開方すれば、即ち股(351)(352)。

注：(346) 句 a 、股 b 、弦 c とすると、本題では

$$a = 7\frac{7}{10},\quad bc = 726$$

である。これより b を求める算題である。

(347) $a^2 + b^2 = c^2$ の両辺に b^2 を掛けると

$$a^2b^2 + b^4 = b^2c^2 = (bc)^2$$

$x = b^2$ とおくと、x についての２次方程式

$$x^2 + a^2x = (bc)^2$$

が得られる。

(348) 実を求める計算は

$$(bc)^2 = (726)^2 = 527076$$

である。

(349) 方法を求める計算は

$$a^2 = \left(7\frac{7}{10}\right)^2 = 59\frac{29}{100}$$

である。

(350) 前注で得られた実、方法による２次方程式

$$x^2 + 59\frac{29}{100}x = 527076$$

を解くと、正の実数解 $x = 696\frac{24}{25}$ が得られる。

(351) $x = b^2$ より股を求めると、

$$b = \sqrt{696\frac{24}{25}} = 26\frac{2}{5}$$

が得られる。なお弦を求めると

$$c=\frac{bc}{b}=\frac{726}{26\frac{2}{5}}=27\frac{1}{2}$$

となり、本題における直角三角形の三辺の長さの比は

$$7\frac{7}{10}:26\frac{2}{5}:27\frac{1}{2}=7:24:25$$

である。

(352) 南秉吉の補作に従うと、句、股、弦は

$$a=\frac{7}{100},\ \ b=\frac{6}{25},\ \ c=\frac{1}{4}$$

となる。直角三角形の三辺の長さの比は

$$\frac{7}{100}:\frac{6}{25}:\frac{1}{4}=7:24:25$$

である。

訳：仮に股と弦を掛けた積726があり、句は $7\frac{7}{10}$ 。問う、股はどれほどか。

答にいう、股は $26\frac{2}{5}$ 。

術にいう、積を自乗して、実とする。句を自乗し、方法として、従える。開平方してこれを除き、得た数をまた開平方すれば、股が得られる。

[25]數亦是股$\boxed{}$爲長以股$\boxed{}$得股冪又開$\boxed{}$股北分母常$\boxed{}$

[25] の訓読、訳は付けない。

[二〇] 假令有股十六、二分〈之一、句弦相乘冪一百六〉[一] 十四、二十五分〈之十四。問、句多少〉[二]。

荅曰、〈句八、五分之四〉[三]。

術曰、冪自乘、〈爲實。股自乘、爲方法、從。開方〉[四]除之、所得、又開方、〈即句〉[五]。

校訂：[一] この10字は張敦仁の補作に従う。南秉吉の補作も同じ。

[二] この７字は張敦仁の補作に従う。南秉吉の補作も同じ。

[三] この６字は張敦仁の補作に従う。南秉吉の補作も同じ。

[四] この11字は張敦仁の補作に従う。南秉吉の補作はない。

［五］この２字は張敦仁の補作に従う。南秉吉の補作はない。

訓読：仮令に股十六、二分之一有り、句弦相乗ずるの冪一百六十四、二十五分之十四[353]。
問う、句は多少ぞ。
答に曰う、句は八、五分之四。
術に曰う[354]、冪は自乗し、実と為す[355]。股は自乗し、方法と為し[356]、従える。開方して之を除けば[357]、得る所、又た開方すれば、即ち句[358]。

注：(353) 句 a 、股 b 、弦 c とすると、本題では

$$b = 16\frac{1}{2},\ ac = 164\frac{14}{25}$$

である。

(354) $a^2+b^2=c^2$ の両辺に a^2 を掛けると

$$a^4+a^2b^2=a^2c^2=(ac)^2$$

$x=a^2$とおくと、x についての２次方程式

$$x^2+b^2x=(ac)^2$$

が得られる。

(355) 実を求める計算は

$$(ac)^2=\left(164\frac{14}{25}\right)^2=27079\frac{621}{625}$$

である。

(356) 方法を求める計算は

$$b^2=\left(16\frac{1}{2}\right)^2=272\frac{1}{4}$$

である。

(357) 前注で得られた実、方法による２次方程式

$$x^2+272\frac{1}{4}x=27079\frac{621}{625}$$

を解くと、正の実数解 $x=77\frac{11}{25}$ が得られる。

(358) $x=a^2$ より句を求めると、

$$a=\sqrt{77\frac{11}{25}}=8\frac{4}{5}$$

が得られる。なお弦を求めると

$$c=\frac{ac}{a}=\frac{164\frac{14}{25}}{8\frac{4}{5}}=18\frac{7}{10}$$

となり、本題における直角三角形の三辺の長さの比は

$$8\frac{4}{5}:16\frac{1}{2}:18\frac{7}{10}=8:15:17$$

である。

訳：仮に股 $16\frac{1}{2}$ があり、句と弦を掛けた積は $164\frac{14}{25}$ 。問う、句はどれほどか。

答にいう、句は $8\frac{4}{5}$ 。

術にいう、積を自乗し、実とする。股を自乗し、方法として、従える。開平方してこれを除き、得た数をまた開平方すれば、句が得られる。

参考文献

1）天禄琳瑯叢書『緝古算経』、郭書春主編『中国科学技術典籍通彙　数学巻１』（河南教育出版社、1993年）所収

2）王孝通『緝古算経』、孔継涵編『算経十書』所収、東北大学デジタルコレクション、藤原集書９、m01101、615-650
https://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398tuldc_4100009843

3）郭書春、劉鈍点校『算経十書』所収『緝古算経』（九章出版社、2001年）

4）李潢『緝古算経考注』、郭書春主編『中国科学技術典籍通彙　数学巻４』（河南教育出版社、1993年）所収

5）張敦仁『緝古算経細草』、知不足斎叢書（乾隆45年（1780年））所収、国立国会図書館蔵

6）陳傑『緝古算経図解』（成都竜万育変堂、道光３年（1823年）、東北大学デジタルコレクション、藤原集書3191、m01408、55まで
https://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398tuldc_4100009839

7）陳傑『緝古算経音義』（成都竜万育変堂、道光３年（1823年））、東北大学デジタルコレクション、藤原集書3191、m01408、56以降
https://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398tuldc_4100009839

8）Tina Su Lyn Lim, Donald B. Wagner “The Continuation of Ancient Mathematics: Wang Xiaotong’s Jigu Suanjing, Algebra and Geometry in Seventh-Century China”（Nordic Inst of Asian Studies, 2017年８月）

9）大川俊隆「『張丘建算経』訳注稿（1）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編39号、2020年６月）

10）小寺裕、武田時昌「『九章算術』訳注稿（13）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編14号、2012年２月）

11）田村誠、吉村昌之「『九章算術』訳注稿（11）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編

12号、2011年６月）

12）銭宝琮「王孝通『緝古算経』第二題・第三題術文疏証」（科学史集刊　第九期、1966年４月）、銭宝琮点校『算経十書』（中華書局、2021年１月）所収

13）小寺裕、武田時昌、張替俊夫「『九章算術』訳注稿（15）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編22号、2014年10月）

14）武田時昌、張替俊夫「『九章算術』訳注稿（16）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編23号、2015年２月）

15）張替俊夫「『九章算術』訳注稿（25）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編29号、2017年３月）

16）大川俊隆、田村誠「『緝古算経』訳注稿（1）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編44号、2022年３月）

17）田村誠「『緝古算経』訳注稿（2）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編45号、2022年７月）

18）武田時昌、田村誠「『九章算術』訳注稿（14）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編15号、2012年６月）

19）田村誠、張替俊夫「『緝古算経』訳注稿（3）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編46号、2022年11月）

20）南秉吉『緝古演段』、金容雲編『韓国科学技術史資料大系　数学篇５』（驪江出版社、1985年）所収

21）張替俊夫「『緝古算経』訳注稿（4）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編47号、2023年３月）