ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.177
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-62-70

Поступила в редакцию 30.09.2022
Received 30.09.2022

В. И. Бенедиктович

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ДИСТАНЦИОННЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС И ГАМИЛЬТОНОВОСТЬ ГРАФА

Аннотация. В последние годы собственные значения матрицы расстояний графа привлекают все большее внимание математиков, поскольку существует тесная связь ее спектра со структурными свойствами графа. Так, совсем недавно был получен интересный результат, связывающий гамильтоновость графа с дистанционным спектральным радиусом графа, на основе которого была сформулирована более общая гипотеза о гамильтоновости графа. Мы подтверждаем выдвинутую гипотезу для k-связного графа, когда $k \in \{2;3\}$, а также устанавливаем аналогичные достаточные условия трассируемости k-связного графа, когда $k \in \{1;2\}$.

Ключевые слова: k-связность, гамильтоновость, трассируемость графа, дистанционная матрица графа, спектр, дистанционный спектральный радиус графа

Для цитирования. Бенедиктович, В. И. Дистанционный спектральный радиус и гамильтоновость графа / В. И. Бенедиктович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 1. – С. 62–70. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-62-70

Vladimir I. Benediktovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

DISTANCE SPECTRAL RADIUS AND HAMILTONICITY OF A GRAPH

Abstract. In recent years, the eigenvalues of the distance matrix of a graph have attracted a lot of attention of mathematicians, since there is a close connection between its spectrum and the structural properties of the graph. Thus, quite recently an interesting result was obtained, relating the Hamiltonicity of a graph to the distance spectral radius of the graph, on the basis of which a more general conjecture about the Hamiltonicity of a graph was formulated. We confirm this conjecture put forward for a k-connected graph, when $k \in \{2;3\}$, and also establish similar sufficient conditions for the traceability of a k-connected graph, when $k \in \{1;2\}$.

Keywords: k-connectivity, Hamiltonicity, traceability of a graph, distance matrix of a graph, distance spectral radius of a graph

For citation. Benediktovich V. I. Distance spectral radius and Hamiltonicity of a graph. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 62–70 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-62-70

Мы рассматриваем неориентированный простой (n,m)-граф G с множеством вершин $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ и множеством ребер $E(G)$ $\left(|E(G)|=m\right)$. *Степень* вершины v_i в G, обозначаемая через d_i, равна мощности ее *окружения* $N(v_i)=\{u\in V(G)\,|\,uv_i\in E(G)\}$. *Расстояние* между двумя вершинами v_i и v_j, обозначаемое d_{ij}, – это длина кратчайшей цепи из вершины v_i в вершину v_j. *Матрица расстояний* графа G, обозначаемая $D(G) = (d_{ij})$, представляет собой симметрическую квадратную матрицу порядка n, элементами которой являются расстояния d_{ij}. Поэтому все собственные значения матрицы расстояний $D(G)$ графа G являются действительными числами, мультимножество которых представляет собой *дистанционный спектр* графа G, обозначаемый через $\mathrm{Spec}\left(D(G)\right)$. Элементы дистанционного спектра будем записывать в невозрастающем порядке: $\lambda_1\left(D(G)\right)\ge\lambda_2\left(D(G)\right)\ge\cdots\ge\lambda_n\left(D(G)\right)$. Наибольшее собственное значение $\lambda_1\left(D(G)\right)$ называется *дистанционным спектральным радиусом*. Поскольку граф G связен, матрица $D(G)$ неприводима, а значит, по теореме Перрона – Фробениуса дистанционный спектральный радиус $\lambda_1\left(D(G)\right)$ является простым корнем характеристического многочлена $\chi_{D(G)}(\lambda)$ матрицы $D(G)$

и существует единственный *вектор Перрона* (положительный и нормированный) $(a_1,\ldots,a_n)^T$, соответствующий дистанционному спектру со свойством $\lambda_1\big(D(G)\big)a_i=\sum\limits_{j\in V(G)} d_{ij}a_j$.

Пусть M – действительная симметрическая матрица порядка n, строки и столбцы которой индексированы множеством $X=\{1,...,n\}$. Предположим, что $\pi=\{X_1,...,X_t\}$ является разбиением множества X. Пусть в соответствии с этим разбиением матрица M имеет следующую блочную структуру:

$$M=\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{t1} & \cdots & M_{tt} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где матрица M_{ij} обозначает блок, образованный строками из подмножества X_i и столбцами из подмножества X_j, диагональные блоки M_{ii} являются квадратными матрицами порядков n_i для любого $i\in\{1,2,\ldots,t\}$ и $n=n_1+\ldots+n_t$. Для любых $i,j\in\{1,2,\ldots,t\}$ пусть b_{ij} обозначает среднюю сумму строк матрицы M_{ij}, т. е. $b_{ij}=\dfrac{\mathbf{1}^T M_{ij}\mathbf{1}}{|X_i|}$. Тогда квадратная матрица $M/\pi=\big(b_{ij}\big)_{t\times t}$ порядка t называется *матрицей частных* матрицы M.

Если дополнительно для каждой пары i, j блочная матрица M_{ij} имеет постоянную сумму компонент строк, то разбиение π и матрица M/π называются *равноправными*. Справедливо следующее утверждение [1].

Лемма 1. *Пусть M – неотрицательная матрица, а π – такое разбиение, что M/π – равноправная матрица частных матрицы M. Тогда спектральный радиус матрицы M/π равен спектральному радиусу матрицы M.*

Напомним, что граф является гамильтоновым (трассируемым), если он содержит гамильтонов цикл (гамильтонову цепь), т. е. цикл (цепь), содержащий все вершины графа G. Задачи распознавания, является ли заданный граф гамильтоновым (трассируемым), как известно, являются NP-полными.

Объединением двух простых графов G и H называется простой граф $G\cup H$ с множеством вершин $V(G)\cup V(H)$ и множеством ребер $E(G)\cup E(H)$. Если графы G и H не пересекаются ($V(G)\cap V(H)=\varnothing$), то их объединение называется *дизъюнктным* и обозначается через $G+H$. Дизъюнктное объединение k копий графа G обозначается через kG. *Соединением* непересекающихся графов G и H называется граф $G\vee H$, получаемый из дизъюнктного объединения $G+H$ добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа G с каждой вершиной графа H.

Совсем недавно [2] был получен следующий результат, связывающий гамильтоновость графа с дистанционным спектральным радиусом графа.

Теорема 1. *Пусть G – граф порядка $n\geq 11$. Если $\lambda_1\big(D(G)\big)\leq\lambda_1\big(D(N_n^1)\big)$, где $N_n^1=K_1\vee(K_{n-2}+K_1)$, то граф G содержит гамильтонов цикл, кроме случая, когда $G=N_n^1$.*

Там же была сформулирована более общая гипотеза [2].

Гипотеза. *Пусть G – граф порядка $n\geq 6k+5$ и минимальной степени $\delta(G)\geq k$. Если $\lambda_1\big(D(G)\big)\leq\lambda_1\big(D(N_n^k)\big)$, где $N_n^k=K_k\vee(K_{n-2k}+kK_1)$, то граф G содержит гамильтонов цикл, кроме случая, когда $G=N_n^k$.*

Наши основные результаты заключаются в подтверждении этой гипотезы для k-связного графа для случаев $k\in\{2;3\}$, а также установления аналогичных достаточных условий трассируемости графа, когда $k\in\{1;2\}$.

Теорема 2. *Для $k\in\{2;3\}$ пусть G – k-связный граф порядка $n\geq\dfrac{(3k+7)(k+2)}{4-k}$ и минимальной степени $\delta(G)\geq k$. Если $\lambda_1\big(D(G)\big)\leq\lambda_1\big(D(N_n^k)\big)$, где $N_n^k=K_k\vee(K_{n-2k}+kK_1)$, то граф G содержит гамильтонов цикл, кроме случая, когда $G=N_n^k$.*

Для произвольного связного графа G число $W(G)=\sum\limits_{i<j} d_{ij}$ называется его *индексом Винера*. В силу теоремы Рэлея – Ритца $\lambda_1\left(D(G)\right)=\max\limits_{x\in R^n}\dfrac{x^T D(G)x}{x^T x}$. Поэтому можно оценить дистанционный спектральный радиус снизу через индекс Винера:

$$\lambda_1\left(D(G)\right)=\max_{x\in R^n}\frac{x^T D(G)x}{x^T x}\ge\frac{\mathbf{1}^T D(G)\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\mathbf{1}}=\frac{2W(G)}{n},$$

где $\mathbf{1}=(1,1,\ldots,1)^T$.

Далее заметим, что для произвольного связного графа G его индекс Винера удовлетворяет неравенству $W(G)\ge m+2\left(\binom{n}{2}-m\right)$. Поэтому имеет место

$$\lambda_1\left(D(G)\right)\ge\frac{2W(G)}{n}\ge\frac{2\left(m+2\left(\binom{n}{2}-m\right)\right)}{n}=2n-2-\frac{2m}{n}. \qquad (2)$$

Для произвольного натурального числа k рассмотрим граф $N_n^k=K_k\vee(K_{n-2k}+kK_1)$ порядка $n\ge 2k+1$. Для дистанционного спектрального радиуса такого графа справедлива следующая верхняя оценка.

Лемма 2. $\lambda_1\left(D(N_n^k)\right)<n+3k-1$.

Действительно, рассмотрим разбиение π множества вершин графа N_n^k на три подмножества: $V(N_n^k)=V(kK_1)\bigcup V(K_k)\bigcup V(K_{n-2k})$. Нетрудно убедиться, что данное разбиение π равноправно и имеет матрицу частных

$$D(N_n^k)/\pi=\begin{pmatrix}2k-2 & k & 2(n-2k)\\ k & k-1 & n-2k\\ 2k & k & n-2k-1\end{pmatrix}.$$

Поэтому по лемме 1

$$\lambda_1\left(D(N_n^k)\right)=\lambda_1\left(D(N_n^k)/\pi\right).$$

Но характеристический многочлен матрицы частных равноправного разбиения равен

$$\chi_{D(N_n^k)/\pi}(\lambda)=\lambda^3-(k+n-4)\lambda^2-(2kn+k+3n-5k^2-5)\lambda-2kn-2n-2k^3+k^2n+5k^2+2,$$

а $\lambda_1\left(D(N_n^k)/\pi\right)$ является наибольшим корнем этого характеристического многочлена.

Нетрудно убедиться, что

$$\chi_{D(N_n^k)/\pi}(n+3k-1)=31k^3+12k^2n+12k^2+4kn>0$$

и

$$\chi'_{D(N_n^k)/\pi}(n+3k-1)=26k^2+8kn+n^2+7k+n>0,$$
$$\chi'_{D(N_n^k)/\pi}(n+3k-1)=4n+16k+2>0,$$
$$\chi'''_{D(N_n^k)/\pi}(n+3k-1)=6>0.$$

Поэтому по теореме Бюдана – Фурье [3] на интервале $[n+3k-1;+\infty)$ у характеристического многочлена $\chi_{D(N_n^k)/\pi}(\lambda)$ нет корней, а значит, по лемме 1

$$\lambda_1\left(D(N_n^k)\right)=\lambda_1\left(D(N_n^k)/\pi\right)<n+3k-1,$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы Перрона – Фробениуса вытекают следующие утверждения [4].

Л е м м а 3. *1. Для произвольного остовного подграфа H графа G справедливо неравенство* $\lambda_1\left(D(G)\right)\le\lambda_1\left(D(H)\right)$.

2. Если для некоторого ребра $e=(u,\ v)\in E(G)$ *граф G′ = G – e связен, то справедливо неравенство* $\lambda_1\left(D(G)\right)<\lambda_1\left(D(G')\right)$.

3. Для произвольного нового ребра $f=(s,\ t)\notin E(G)$ *справедливо неравенство* $\lambda_1\left(D(G+f)\right)<\lambda_1\left(D(G)\right)$.

Введем следующие классы графов [5]. Для натурального числа k и $n \ge 2k + 1$ положим $G_{n,k}^1=N_n^k$.

Для $n \ge 2k + 2$ положим $G_{n,k}^2=K_k\vee\left((k-1)K_1+K_2+K_{n-2k-1}\right)$ (рисунок *a*), где $X=V(kK_1)$, $Y=V(K_{n-k-1})$, $Y_2\subseteq Y$, $|Y_2|=k$ и $G_{n,k}^3=K_k\vee\left((k+1)K_1+K_{n-2k-1}\right)$. Заметим, что $G_{n,k}^2=G_{n,k}^3+uv$, $u,v\in(k+1)K_1$, поэтому по лемме 2 имеем

$$\lambda_1\left(D(G_{n,k}^2)\right)<\lambda_1\left(D(G_{n,k}^3)\right).$$

Для $n \ge 2k + 3$ положим $G_{n,k}^4=K_k\vee\left((k+1)K_1+K_{n-2k-1}\right)+st$, где $s\in(k+1)K_1, t\in K_{n-2k-1}$ (см. рисунок *b*), где $X=V\left((k+1)K_1\right)$, $X_1\bigcup X_2=X$, $|X_1|=k$, $|X_2|=1$, $Y=V(K_{n-k-1})$, $Y_1,Y_2\subseteq Y$, $|Y_1|=k$, $|Y_2|=1$. Поэтому по лемме 2

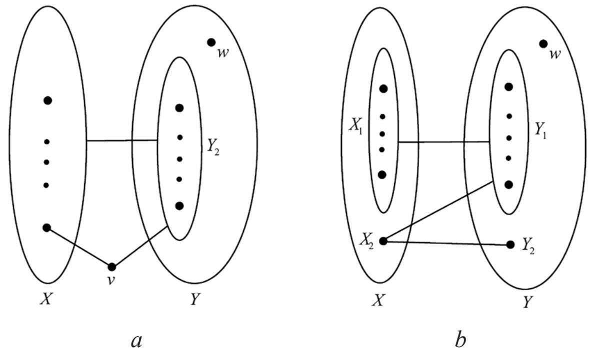
$$\lambda_1\left(D(G_{n,k}^4)\right)<\lambda_1\left(D(G_{n,k}^3)\right).$$

Кроме того, для $n\ge 2k+3$ положим $G_{n,k}^5=K_{k+1}\vee\left((k+1)K_1+K_{n-2k-2}\right)=G_{n,k+1}^1$.

Дополнительно введем следующие классы графов: $\underline{G}_{n,k}^1$, $\underline{G}_{n,k}^2$, $\underline{G}_{n,k}^3$, $\underline{G}_{n,k}^4$, $\underline{G}_{n,k}^5$, получаемые из графов $G_{n+1,k+1}^1$, $G_{n+1,k+1}^2$, $G_{n+1,k+1}^3$, $G_{n+1,k+1}^4$, $G_{n+1,k+1}^5$ удалением одной вершины степени n, т. е.

$$\underline{G}_{n,k}^1=K_k\vee\left(K_{n-2k-1}+(k+1)K_1\right),$$
$$\underline{G}_{n,k}^3=K_k\vee\left(K_{n-2k-2}+(k+2)K_1\right),$$
$$\underline{G}_{n,k}^5=K_{k+1}\vee\left(K_{n-2k-3}+(k+2)K_1\right),$$

а граф $\underline{G}_{n,k}^2$ совпадает с графом, изображенным на рисунке *a*, где $X=V\left((k+1)K_1\right)$, $Y=V(K_{n-k-2})$, $Y_2\subseteq Y$, $|Y_2|=k$. Аналогично граф $\underline{G}_{n,k}^4$ совпадает с графом, изображенным на



a *b*

рисунке b, где $X = V\left((k+2)K_1\right)$, $X_1 \bigcup X_2 = X$, $|X_1| = k+1$, $|X_2| = 1$, $Y = V(K_{n-k-2})$, $Y_1, Y_2 \subseteq Y$, $|Y_1| = k$, $|Y_2| = 1$. Также заметим, что справедливы неравенства

$$\lambda_1\left(D(\underline{G}^2_{n,k})\right) < \lambda_1\left(D(\underline{G}^3_{n,k})\right), \quad \lambda_1\left(D(\underline{G}^4_{n,k})\right) < \lambda_1\left(D(\underline{G}^3_{n,k})\right).$$

Напомним также понятие замыкания графа, введенное в [6]. *k-Замыканием* графа G, которое обозначается через $cl_k(G)$, называется единственный граф, получаемый из графа G последовательным добавлением ребер, соединяющих две несмежные вершины, сумма степеней которых не меньше k пока не останется таких пар вершин в исходном графе. Когда $k = n$, полагают $cl(G) = cl_n(G)$. Граф G называется *замкнутым*, если $G = cl(G)$.

Далее нам понадобиться следующее утверждение [5].

Т е о р е м а 3. *Пусть G – k-связный граф порядка $n \geq 6k + 11$, где $k \geq 2$. Если*

$$e(G) > \binom{n-k-2}{2} + (k+2)^2,$$

то граф G гамильтонов, кроме случаев, когда $cl(G) \in \left\{G^1_{n,k}, G^2_{n,k}, G^3_{n,k}, G^4_{n,k}, G^5_{n,k}\right\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Из условия теоремы, неравенства (2) и леммы 2 следует, что

$$2n - 2 - \frac{2m}{n} \leq \lambda_1\left(D(G)\right) \leq \lambda_1\left(D(N^k_n)\right) < n + 3k - 1,$$

откуда получаем $m > \frac{1}{2}n(n-3k-1)$.

Нетрудно проверить, что неравенство

$$\frac{1}{2}n(n-3k-1) \geq \binom{n-k-2}{2} + (k+2)^2$$

выполняется для $k \in \{2;3\}$ при условии $n \geq \frac{(3k+7)(k+2)}{4-k} > 6k + 11$. А значит, при этих условиях в силу теоремы 3 граф G гамильтонов, кроме случаев, когда $cl(G) \in \left\{G^1_{n,k}, G^2_{n,k}, G^3_{n,k}, G^4_{n,k}, G^5_{n,k}\right\}$.

Л е м м а 4. *Пусть G граф порядка n, где* $n \geq \frac{(3k+7)(k+2)}{4-k}$ и $k \in \{2;3\}$.

(i) Если G собственный подграф $G^1_{n,k}$, *то* $\lambda_1\left(D(G)\right) > \lambda_1\left(D(G^1_{n,k})\right)$,

(ii) Если $G \in \left\{G^2_{n,k}, G^3_{n,k}, G^4_{n,k}, G^5_{n,k}\right\}$, *то* $\lambda_1\left(D(G)\right) > \lambda_1\left(D(G^1_{n,k})\right)$.

Действительно, первое утверждение следует непосредственно из леммы 3.

Для доказательства второго утверждения в силу ранее полученных неравенств достаточно показать справедливость следующих неравенств:

$$\lambda_1\left(D(G^1_{n,k})\right) < \lambda_1\left(D(G^2_{n,k})\right), \quad \lambda_1\left(D(G^1_{n,k})\right) < \lambda_1\left(D(G^4_{n,k})\right), \quad \lambda_1\left(D(G^1_{n,k})\right) < \lambda_1\left(D(G^1_{n,k+1})\right).$$

Для этого в силу леммы 2 достаточно показать, что справедливо неравенство

$$n + 3k - 1 < \min\left\{\lambda_1\left(D(G^2_{n,k})\right), \lambda_1\left(D(G^4_{n,k})\right), \lambda_1\left(D(G^1_{n,k+1})\right)\right\}.$$

Докажем последнее неравенство. Нетрудно убедиться, что разбиение π $V_1 = V\left((k+1)K_1\right)$, $V_2 = V(K_{k+1})$, $V_3 = V(K_{n-2k-2})$ графа $G^1_{n,k+1}$ является равноправным с матрицей частных

$$A=\begin{pmatrix} 2k & k+1 & 2(n-2k-2) \\ k+1 & k & n-2k-2 \\ 2(k+1) & k+1 & n-2k-3 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы частных A этого равноправного разбиения равен

$$\chi_A(\lambda)=\lambda^3-(n+k-3)\lambda^2-(2kn+5n-5k^2-9k-9)\lambda+k^2n-3n-2k^3-k^2+4k+5.$$

Тогда

$$\chi_A(n+3k-1)=-3n^2+12k^2n+4kn+7n+31k^3+27k^2+12k-2,$$

и нетрудно убедиться, что при $n\geq\dfrac{(3k+7)(k+2)}{4-k}$ и $k\in\{2;3\}$ справедливо неравенство $\chi_A(n+3k-1)<0$. Тогда по лемме 2 для $k\in\{2;3\}$ вытекает неравенство

$$\lambda_1\left(D(G^1_{n,k})\right)<\lambda_1\left(D(G^1_{n,k+1})\right),$$

что и требовалось показать.

Для графа $G^2_{n,k}$ разбиение $V_1=V\left((k-1)K_1\right)$, $V_2=V(K_2)$, $V_3=V(K_k)$, $V_4=V(K_{n-2k-1})$ является равноправным с матрицей частных

$$B=\begin{pmatrix} 2(k-2) & 4 & k & 2(n-2k-1) \\ 2(k-1) & 1 & k & 2(n-2k-1) \\ k-1 & 2 & k-1 & n-2k-1 \\ 2(k-1) & 4 & k & n-2k-2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы частных B этого равноправного разбиения равен

$$\chi_B(\lambda)=\lambda^4+(6-n-k)\lambda^3+(5k^2+3k+19-2kn-8n)\lambda^2+(k^2n-7kn-15n-2k^3+17k^2+14k+26)\lambda-$$
$$-6k^3+3k^2n+10k^2-5kn+10k-8n+12.$$

Тогда

$$\chi_B(n+3k-1)=-3n^3+(12k^2-9k+5)n^2+(67k^3+45k^2+41k+2)n+93k^4+125k^3+76k^2+6k.$$

При k = 2 $f(n)=\chi_B(n+3k-1)=-3n^3+35n^2+800n+2804$. Нетрудно убедиться, что при $n=\dfrac{(3k+7)(k+2)}{4-k}=26$ выполняются неравенства

$$f(26)=-5464<0,\quad f'(26)=-3464<0,\quad f''(26)=-398<0,\quad f'''(26)=-18<0.$$

Поэтому по теореме Бюдана – Фурье на интервале [26;+∞) у многочлена $f(x)=\chi_B(x+5)$ нет корней, а значит, по лемме 2

$$\lambda_1\left(D(G^2_{n,2})\right)=\lambda_1(B)>n+5>\lambda_1\left(D(G^1_{n,2})\right).$$

При k = 3 $g(n)=\chi_B(n+3k-1)=-3n^3+86n^2+2339n+11610$. Нетрудно убедиться, что при $n=\dfrac{(3k+7)(k+2)}{4-k}=80$ выполняются неравенства

$$g(80)=-786870<0,\quad g'(80)=-41501<0,\quad g''(80)=-1268<0,\quad g'''(80)=-18<0.$$

Поэтому по теореме Бюдана – Фурье на интервале [80;+∞) у многочлена $g(x)=\chi_B(x+8)$ нет корней, а значит, по лемме 2

$$\lambda_1\left(D(G^2_{n,3})\right)=\lambda_1(B)>n+8>\lambda_1\left(D(G^1_{n,3})\right).$$

Для графа $G^4_{n,k}$ равноправным является разбиение $V_1=V\left((k-1)K_1\right)$, $V_2=V(K_k)$, $V_3=V(K_{n-2k-1})$, $V_4=K_1\subset kK_1$, $V_5=K_1\subset K_{n-2k}$ с матрицей частных

$$C=\begin{pmatrix} 2(k-1) & k & 2(n-2k-2) & 2 & 2 \\ k & k-1 & n-2k-2 & 1 & 1 \\ 2k & k & n-2k-3 & 2 & 1 \\ 2k & k & 2(n-2k-2) & 0 & 2 \\ 2k & k & n-2k-2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы частных C этого равноправного разбиения равен

$$\chi_C(\lambda)=\lambda^5-(n+k-6)\lambda^4-(8n+2kn-5k^2-3k-19)\lambda^3-(21n+7kn-k^2n+2k^3-17k^2-21k-36)\lambda^2-$$
$$-(22n+7kn-3k^2n+6k^3-16k^2-27k-34)\lambda+2k^2n-2kn-8n-4k^3+4k^2+10k+12.$$

Тогда

$$\chi_C(n+3k-1)=-3n^4+(12k^2-18k+2)n^3+(103k^3+6k^2+34k+5)n^2+$$
$$+(294k^4+193k^3+144k^2+28k)n+279k^5+282k^4+180k^3+39k^2.$$

При $k=2$ $h(n)=\chi_C(n+3k-1)=-3n^4+14n^3+921n^2+6880n+15036.$ Нетрудно убедиться, что при $n=\dfrac{(3k+7)(k+2)}{4-k}=26$ выполняются неравенства

$$h(26)=-308352<0,\quad h'(26)=-127748<0,\quad h''(26)=-20310<0,\quad h'''(26)=-1788<0,$$
$$h^{(4)}(26)=-72<0.$$

Поэтому по теореме Бюдана – Фурье на интервале [26;+∞) у многочлена $h(x)=\chi_C(x+5)$ нет корней, а значит, по лемме 2

$$\lambda_1\left(D(G^4_{n,2})\right)=\lambda_1(C)>n+5>\lambda_1\left(D(G^1_{n,2})\right).$$

При $k=3$ $s(n)=\chi_C(n+3k-1)=-3n^4+56n^3+2942n^2+30405n+95850.$ Нетрудно убедиться, что при $n=\dfrac{(3k+7)(k+2)}{4-k}=80$ выполняются неравенства

$$s(80)=-72850950<0,\quad s'(80)=-4567675<0,\quad s''(80)=-197636<0,\quad s'''(80)=-5424<0,$$
$$s^{(4)}(80)=-72<0.$$

Поэтому по теореме Бюдана – Фурье на интервале [80;+∞) у многочлена $s(x)=\chi_C(x+8)$ нет корней, а значит, по лемме 2

$$\lambda_1\left(D(G^4_{n,3})\right)=\lambda_1(C)>n+8>\lambda_1\left(D(G^1_{n,3})\right).$$

Лемма 4 доказана. Теперь из лемм 3 и 4 уже непосредственно следует утверждение теоремы 2.

Справедлива также следующая

Т е о р е м а 4. Пусть G – k-связный граф порядка $n > \frac{(3k+8)(k+3)}{3-k}$, где $k \in \{1;2\}$. Если $\lambda_1\left(D(G)\right) \le \lambda_1\left(D(\underline{G}^1_{n,k})\right)$, то граф G содержит гамильтонову цепь, кроме случая, когда $G = \underline{G}^1_{n,k}$.

Л е м м а 5. $\lambda_1\left(D(\underline{G}^1_{n,k})\right) < n + 3k + 2$.

Действительно, рассмотрим разбиение π множества вершин графа $\underline{G}^1_{n,k}$ на три подмножества: $V(\underline{G}^1_{n,k}) = V\left((k+1)K_1\right) \bigcup V(K_k) \bigcup V(K_{n-2k-1})$. Нетрудно убедиться, что данное разбиение π равноправно и имеет матрицу частных

$$D(\underline{G}^1_{n,k}) / \pi = \begin{pmatrix} 2k & k & 2(n-2k-1) \\ k+1 & k-1 & n-2k-1 \\ 2(k+1) & k & n-2k-2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому по лемме 1

$$\lambda_1\left(D(\underline{G}^1_{n,k})\right) = \lambda_1\left(D(\underline{G}^1_{n,k}) / \pi\right).$$

Но характеристический многочлен матрицы частных равноправного разбиения равен

$$\chi_{D(\underline{G}^1_{n,k})/\pi}(\lambda) = \lambda^3 - (k+n-3)\lambda^2 - (2kn - 6k + 5n - 5k^2 - 6)\lambda - kn - 2k^3 + k^2 n + 2k^2 + 6k - 4n + 4,$$

а $\lambda_1\left(D(\underline{G}^1_{n,k}) / \pi\right)$ является наибольшим корнем этого характеристического многочлена.

Нетрудно убедиться, что

$$\chi_{D(\underline{G}^1_{n,k})/\pi}(n+3k+2) = 31k^3 + 12k^2 n + 99k^2 + 24kn + 104k + 12n + 36 > 0$$

и

$$\chi'_{D(\underline{G}^1_{n,k})/\pi}(n+3k+2) = 26k^2 + 8kn + n^2 + 56k + 9n + 30 > 0,$$
$$\chi''_{D(\underline{G}^1_{n,k})/\pi}(n+3k+2) = 4n + 16k + 18 > 0,$$
$$\chi'''_{D(\underline{G}^1_{n,k})/\pi}(n+3k+2) = 6 > 0.$$

Поэтому по теореме Бюдана – Фурье на интервале $[n+3k+2; +\infty)$ у характеристического многочлена $\chi_{D(\underline{G}^1_{n,k})/\pi}(\lambda)$ нет корней, а значит, по лемме 1

$$\lambda_1\left(D(\underline{G}^1_{n,k})\right) = \lambda_1\left(D(\underline{G}^1_{n,k}) / \pi\right) < n + 3k + 2,$$

что и требовалось доказать.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Из условия теоремы, неравенства (1) и леммы 5 следует, что

$$2n - 2 - \frac{2m}{n} \le \lambda_1\left(D(G)\right) \le \lambda_1\left(D(\underline{G}^1_{n,k})\right) < n + 3k + 2,$$

откуда получаем $m > \frac{1}{2} n(n - 3k - 4)$.

Нам понадобится еще одно утверждение [5].

Т е о р е м а 5. *Пусть G – k-связный граф порядка $n \ge 6k + 16$, где $k \ge 1$. Если*

$$e(G) > \binom{n-k-3}{2} + (k+2)(k+3),$$

то граф G трассируем, кроме случаев, когда $cl_{n-1}(G) \in \left\{ \underline{G}^1_{n,k}, \underline{G}^2_{n,k}, \underline{G}^3_{n,k}, \underline{G}^4_{n,k}, \underline{G}^5_{n,k} \right\}$.

Нетрудно проверить, что неравенство

$$\frac{1}{2}n(n-3k-4) \geq \binom{n-k-3}{2} + (k+2)(k+3)$$

выполняется для $k \in \{1;2\}$ при условии $n \geq \dfrac{(3k+8)(k+3)}{3-k} \geq 6k+16$. А значит, при этих условиях в силу теоремы 5 граф G трассируем, кроме случаев, когда $cl_{n-1}(G) \in \left\{ \underline{G}^1_{n,k}, \underline{G}^2_{n,k}, \underline{G}^3_{n,k}, \underline{G}^4_{n,k}, \underline{G}^5_{n,k} \right\}$.

Лемма 6. *Пусть G граф порядка n, где* $n > \dfrac{(3k+8)(k+3)}{3-k}$ и $k \in \{1;2\}$.

(i) Если G собственный подграф $\underline{G}^1_{n,k}$, *то* $\lambda_1(D(G)) > \lambda_1(D(\underline{G}^1_{n,k}))$,

(ii) Если $G \in \left\{ \underline{G}^2_{n,k}, \underline{G}^3_{n,k}, \underline{G}^4_{n,k}, \underline{G}^5_{n,k} \right\}$, *то* $\lambda_1(D(G)) > \lambda_1(D(\underline{G}^1_{n,k}))$.

Доказательство леммы 6 проводится аналогично доказательству леммы 4.

Теперь из лемм 3 и 6 уже непосредственно следует утверждение теоремы 4.

Благодарности. Работа профинансирована Институтом математики Национальной академии наук Беларуси в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция 2025».

Acknowledgments. This work was funded by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of "Convergence 2025" State Program for Scientific Research.

Список использованных источников

1. Godsil, C. Algebraic Combinatorics / C. Godsil. – New York: Routledge, 2017. – 368 p. https://doi.org/10.1201/9781315137131

2. Huiqiu Lin. Extremal problems on distance spectra of graphs / Huiqiu Lin, Yuke Zhang // Discrete Appl. Math. – 2021. – Vol. 289. – P. 139–147. https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.09.023

3. Прасолов, В. В. Многочлены / В. В. Прасолов. – 2-е изд. – М.: МЦНМО, 2001. – 336 с.

4. Bose, S. S. On the maximal distance spectral radius of graphs without a pendent vertex / S. S. Bose, M. Nath, S. Paul // Linear Algebra and its Applications. – 2013. – Vol. 438, № 11. – P. 4260–4278. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.01.019

5. On sufficient spectral radius conditions for hamiltonicity of k-connected graphs / Q. Zhou [et al.] // Linear Algebra and its Applications. – 2020. – Vol. 604. – P. 129–145. https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.06.012

6. Bondy, J. A. A method in graph theory / J. A. Bondy, V. Chvátal // Discrete Math. – 1976. – Vol. 15, № 2. – P. 111–135. https://doi.org/10.1016/0012-365x(76)90078-9

References

1. Godsil C. *Algebraic Combinatorics*. New York, Routledge, 2017. 368 p. https://doi.org/10.1201/9781315137131

2. Huiqiu Lin, Yuke Zhang. Extremal problems on distance spectra of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 2021, vol. 289, pp. 139–147. https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.09.023

3. Prasolov V. V. *Polynomials*. 2nd ed. Moscow, MTsNMO Publ., 2001. 336 p. (in Russian).

4. Bose S. S., Nath M., Paul S. On the maximal distance spectral radius of graphs without a pendent vertex. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, vol. 438, no. 11, pp. 4260–4278. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.01.019

5. Zhou Q., Broersma H., Wang L., Lu Y. On sufficient spectral radius conditions for hamiltonicity of k-connected graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 2020, vol. 604, pp. 129–145. https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.06.012

6. Bondy J. A., Chvátal V. A method in graph theory. *Discrete Mathematics*, 1976, vol. 15, no. 2, pp. 111–135. https://doi.org/10.1016/0012-365x(76)90078-9

Информация об авторе

Бенедиктович Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vbened@im.bas-net.by

Information about the author

Vladimir I. Benediktovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Surganov Str., 11, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vbened@im.bas-net.by