



Research

Solving the Multi-Vehicle Inventory Routing and Management Integrated Problem Using Mixed-Integer Linear Programming

Resolución del problema integrado de enrutamiento y gestión de inventarios con múltiples vehículos mediante programación lineal entera mixta

Frank Alejandro Hincapié-Londoño¹  , Jhonatan Stiven García-Guevara¹  y Eliana Mirledy Toro-Ocampo¹

¹Grupo de Aplicaciones en Optimización y Procesos Estocásticos (GAOPE). Universidad Tecnológica de Pereira (Pereira, Risaralda, Colombia).

Abstract

Context: Inventory control and distribution are key processes in the loss of both efficiency and effectiveness in the field of logistics at the global level. According to the Colombian National Planning Department, for the year 2020, the items of transportation, storage, and inventory account for 73,9% of the total logistics costs. Solving the multi-vehicle Inventory Routing Problem (IRP) is an alternative to making cycle times shorter, more flexible, and less expensive.

Method: This article describes and compares mathematical models in the literature for the basic problem, adapting it to its multi-vehicle variant and solving it by means of mixed-integer programming models, via the solution of instances of low and medium mathematical complexity, proposing two ways to manage the inventory and three ways to eliminate the creation of sub-tours. To obtain the results, the AMPL software is used in a computer with an Intel Core i5-5200U CPU@ 2.2 GHz processor and 4 GB RAM, considering a maximum runtime of one hour.

Results: The flow model shows the best performance in terms of computational times and response quality regarding the maximum level (ML) policy, and the MTZ variant is the second-best model. Finally, the overall variation exhibits longer execution times and higher GAP values. The models perform well for small- and medium-sized instances.

Conclusions: This research presents a general methodology that can be adapted to different applications of the integrated problem of inventory and routing with multiple vehicles. It was verified that the responses generated are of good quality, highlighting the elimination of sub-tours through the flow model and inventory management under the ML policy. Future work should be directed towards finding new alternatives to exact optimization, such as heuristics and metaheuristics, which allow being as close as possible to the optimum in shorter computation times. In addition, stochastic demands could be considered, as well as the handling of perishable products, among others.

Keywords: inventory management, inventory routing problem, logistics, mathematical modeling, vehicle routing

Article history

Received:
25th/Dec/2021

Modified:
08th/Jul/2022

Accepted:
16nd/Mar/2023

Ing, vol. 28, no. 2,
2023. e18961

©The authors;
reproduction right
holder Universidad
Distrital Francisco
José de Caldas.

Open access



*  **Correspondence:** frank.hincapie@utp.edu.co

Resumen

Contexto: El control y distribución de inventarios son procesos claves en la pérdida tanto de eficiencia como de eficacia en el campo de la logística, a nivel global. Según el Departamento Nacional de Planeación de Colombia, en el año 2020, los rubros de transporte, almacenamiento e inventarios correspondieron al 73,9% del costo logístico total. La resolución del problema de enrutamiento inventario con múltiples vehículos (IRP) representa una alternativa para hacer que los tiempos de ciclo sean más cortos, más flexibles y menos costosos.

Método: En este artículo se describen y comparan modelos matemáticos de la literatura para el problema base, adaptándolo a su variante con múltiples vehículos y resolviéndolo a través modelos de programación lineal entera mixta, mediante la solución de instancias de baja y media complejidad matemática, planteando dos maneras de gestionar el inventario y tres formas de eliminar la creación de *sub-tours*. Para obtener los resultados se utiliza el software AMPL en un computador con procesador Intel Core i5-5200U CPU @ 2.2 GHz y 4 GB de RAM, considerando un tiempo máximo de ejecución de una hora.

Resultados: El modelo de flujos muestra el mejor desempeño en cuanto a tiempos computacionales y calidad de la respuesta con respecto a la política de máximo nivel (ML), y la variante MTZ es el segundo mejor modelo. Por último, la variación general reporta mayores tiempos de ejecución y valores GAP más altos. Los modelos presentan buen desempeño para instancias de pequeño y mediano tamaño.

Conclusiones: En esta investigación se presenta una metodología general que puede ser adaptada a diferentes aplicaciones del problema integrado de inventarios y enrutamiento con múltiples vehículos. Se comprobó que las respuestas generadas son de buena calidad, destacando la eliminación de *sub-tours* por medio del modelo de flujos y la gestión de inventarios bajo la política ML. Los trabajos futuros deben encaminarse en busca de nuevas alternativas a la optimización exacta, tales como las heurísticas o metaheurísticas, que permitan estar lo más cerca posible del óptimo en tiempos de computación más cortos. Además, se podrían considerar demandas estocásticas y el manejo de productos perecederos, entre otros.

Palabras clave: gestión de inventarios, problema de enrutamiento de inventario, logística, modelado matemático, enrutamiento de vehículos.

Tabla de contenidos

	Página		
1. Introducción	3		
2. Formulación matemática	5		
2.1. Gestión de inventarios	9	2.2.1. Eliminación de <i>sub-tours</i> por flujos	10
2.1.1. Ordenar hasta el nivel - Order up to level (OU)	9	2.2.2. Eliminación de <i>sub-tours</i> Miller-Tucker-Zemlin (MTZ)	10
2.2. Eliminación de <i>sub-tours</i>	9		
		3. Resultados computacionales	11
		3.1. Cantidad de variables y restriccio- nes	11
		3.2. Tiempos de ejecución y GAP	13
		3.2.1. <i>Multi-vehicle</i> IRP (ML) H=3, K=2	13

3.2.2. <i>Multi-vehicle</i> IRP (ML) H=3, K=3	14	3.3. Interpretación de resultados	15
3.2.3. <i>Multi-vehicle</i> IRP (OU) H=3, K=2	15	4. Conclusiones	17
3.2.4. <i>Multi-vehicle</i> IRP (OU) H=3, K=3	15	5. Agradecimientos	17
		6. Contribución de autores	17
		Referencias	17

1. Introducción

El *vendor-managed inventory* (VMI) es una iniciativa en la gestión de la cadena de suministros que se popularizó en 1980 gracias a Walmart y Procter & Gamble. Esta iniciativa considera un problema de distribución en el que un producto debe ser enviado desde un proveedor (fabricante o distribuidor) a varios minoristas en un horizonte de tiempo determinado (1). Cada minorista define un nivel máximo de inventario, que el proveedor debe gestionar a fin de que no haya desabastecimiento, por lo que debe programar sus visitas utilizando vehículos de capacidad limitada y considerando el manejo de inventarios bajo una de dos políticas: *maximum level* (ML), donde se repone el inventario de acuerdo con la demanda del minorista en cada periodo de tiempo; y *order up to level* (OU), que busca que las cantidades entregadas alcancen el nivel máximo de inventario. El manejo de la información de inventarios de todos los minoristas es el factor determinante para gestionar la satisfacción de la demanda, minimizando los costos de inventarios. Además, si dentro de los objetivos también está la planificación de las rutas, se configura el *inventory routing problem* (IRP).

Actualmente, las compañías están experimentando costos elevados de transporte, un incremento en la inversión de inventarios y tiempos de ciclos más largos e impredecibles (2). Al mismo tiempo, los clientes son más demandantes, exigiendo precios más bajos, alta calidad, cumplimiento de los tiempos prometidos de entrega y mayor capacidad de respuesta por parte del proveedor, por lo que la integración de sistemas logísticos en las empresas ha ido en aumento, evidenciando los beneficios obtenidos al incorporarlos, tanto para la compañía como para los clientes (3). Los avances tecnológicos y los sistemas de información han impactado significativamente el aumento de la competitividad empresarial a nivel global, donde la logística desarrolla un papel fundamental. Esta cubre desde la planificación, el control y el almacenamiento de los productos hasta la verificación de entregas en los puntos de consumo, con el fin de satisfacer los requerimientos del cliente (4).

La correcta gestión de la cadena de suministro ha tomado mayor relevancia, a consecuencia de impactos cada vez más importantes como la necesidad de sostenibilidad ambiental, la congestión urbana, la búsqueda de eficiencia logística y los costos asociados tanto al transporte como al inventario de mercancía (3). Explorar soluciones con el fin de reducir los costos logísticos es un área de interés tanto para la comunidad académica como para la empresarial, en particular el comercio electrónico, pues este ha revolucionado el comportamiento y las necesidades de los clientes y, en consecuencia, la forma en que las empresas hacen negocios. Esto, debido en gran medida al aumento de compras por canales digitales, lo cual ha significado incrementos históricos en ventas y compras por internet, como es el caso del mercado colombiano, con crecimientos hasta del 300 % en el año 2020 (5). De igual manera, el comercio electrónico prevé un promedio de crecimiento del 116 % en Latinoamérica entre

2019 y 2024, destacando países como Argentina con 153 % de aumento en estos últimos 5 años, Perú con 121 % y Colombia con 92 % (6). Por ello, es indispensable que las empresas se adapten y mejoren sus procesos y operaciones logísticas, en aras de ofrecer un mejor servicio, no solo en América Latina, sino a nivel mundial (7).

El control de inventarios y su distribución son procesos claves en la pérdida tanto de eficiencia como de eficacia en el campo de la logística. Además, de acuerdo con el Departamento Nacional de Planeación de Colombia, el componente de transporte representa el 30,7 % del costo logístico, seguido de inventarios con el 29,3 % y almacenamiento con el 13,9 %. Según datos de la Encuesta Nacional de Logística 2020, el transporte, almacenamiento e inventarios representan el 73,9 % del costo logístico total (8). En consecuencia, para las compañías hay una creciente dificultad para encarar los desafíos logísticos. Esto, en el marco de la búsqueda de alternativas para que sus procesos sean más rápidos, más flexibles y menos costosos (3).

La correcta implementación logística en las organizaciones implica enfocar las acciones en minimizar los costos más representativos, como lo son el transporte, el almacenaje y el manejo de inventarios (9). La implementación de un sistema de enrutamiento es un ejemplo de esto, ya que propende por el ahorro de costos logísticos, el ahorro en tiempo de trabajo y una mejor utilización de vehículos, entre otros (10). De igual manera, la gestión de inventarios permite tener control sobre la compra, reparto y almacenamiento del *stock* de la empresa, transmitiendo valor agregado al cliente, lo cual se ve reflejado en la puntualidad, la consistencia de entrega y la disponibilidad del producto (11).

En (12) y (13) se presenta la solución exacta de varias clases de problemas de enrutamiento e inventario mediante un algoritmo *branch-and-cut*. El trabajo desarrollado en (14) identifica y describe diferentes enfoques en cuanto a estructuras, modelos y métodos de solución para el IRP enfocado al manejo de productos perecederos. De manera similar, en (15) se presenta un modelo matemático multiobjetivo de ruteo e inventarios para la cadena de suministro de perecederos, donde se establece una propuesta de ruteo, distribución y gestión de inventarios de frutas. Tratar este problema con un enfoque de solución exacta es interesante, ya que estos métodos se utilizan menos que los aproximados, y la mayoría de los investigadores utilizan la capacidad predeterminada del software existente para resolver problemas pequeños o medianos, en lugar de codificar nuevos algoritmos exactos (16).

El estudio propuesto por (17) evidencia la alta adaptabilidad del problema según los criterios establecidos por el proveedor lo y minoristas. Se consideran diferentes políticas de abastecimiento. Además, un aspecto importante de este estudio es que considera variantes mejoradas de estos modelos para tratar de encontrar un método de resolución exacto mucho más eficiente.

En (18) se estudia el problema de enrutamiento de inventario de múltiples vehículos y múltiples compartimentos con demandas estocásticas (MCIRPSD) en el contexto de la entrega de combustible, y se desarrollan enfoques heurísticos de dos fases basados en el algoritmo de descomposición de corte único y su versión de corte múltiple para tratar el MCIRPSD en las instancias de mediana y gran escala, donde se demuestra su eficacia.

La variante del IRP clásica ha atraído una atención significativa. Sin embargo, debido a la complejidad del problema, la gran mayoría de artículos introducen métodos de solución heurísticos y metaheurísticos, como la heurística de generación de columnas (19), la metaheurística adaptativa de búsqueda por vecindad (ALNS) (20) y una heurística de dos fases basada en un modelo de programación lineal (18).

La literatura sobre algoritmos exactos para variantes del IRP es relativamente escasa. El primer método exacto para el caso de un vehículo que consideró las políticas de inventario ML y OU fue propuesto por (12). Esta metodología se ha ampliado para manejar múltiples productos y entornos de problemas más complejos, como el transbordo (22) y otras aplicaciones específicas.

La finalidad de este artículo es aplicar modelos de optimización matemática al problema de inventario y enrutamiento de vehículos (*multiple vehicle inventory routing problem*, o *multi-vehicle IRP*) que permitan el manejo óptimo de las redes de valor. Se consideran dos enfoques: la distribución óptima de las rutas y el manejo óptimo de los inventarios. Con la adopción de estos modelos, el proveedor determina un plan de distribución que responde interrogantes como ¿qué cantidad de producto se debe enviar a los clientes?, ¿cuándo se debe visitar a los clientes?, ¿cómo deben ser definidas las secuencias de las rutas de distribución? y ¿cuál vehículo debe ser asignado para las rutas de entrega? Se pretende encontrar beneficios para el proveedor, reflejados en la reducción de costos en producción, transporte y optimización de los tiempos de entrega, entre otros; así como para los clientes, minimizando los costos de almacenamiento y reposición de inventarios. Esta propuesta se enfoca en el desarrollo de herramientas para la toma de decisiones que permitan gestionar de forma eficiente la cadena de suministro de empresas de cualquier tamaño.

El propósito del trabajo es adaptar el modelo matemático IRP clásico a su variante con múltiples vehículos (*multi-vehicle IRP*) para resolverlo mediante modelos de programación lineal entera mixta, planteando dos maneras de gestionar el inventario: *maximum level* (ML) y *order up to level* (OU). Así mismo se formulan tres formas de eliminar la creación de *sub-tours*: una general, una de flujos adaptada de (23) y (17) respectivamente y la Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) propuesta por (24). En este artículo se desarrolla un modelo matemático exacto flexible, pues se identificó que este problema ha sido resuelto principalmente mediante técnicas aproximadas como heurísticas y metaheurísticas. Además, se describen y comparan los modelos matemáticos por medio de la solución de instancias de baja y media complejidad matemática, presentando la cantidad de variables y restricciones, así como la función objetivo, el tiempo de ejecución y la brecha inexplorada entre el límite superior e inferior del algoritmo Branch & Bound del CPLEX (*i.e.*, GAP). Esto, con el fin de identificar el modelo matemático más competitivo.

2. Formulación matemática

La definición del *multi-vehicle IRP* puede representarse mediante un conjunto de clientes indexados en $V_1 : \{1 \dots n\}$, donde n es el número total de clientes y $O : \{0\}$ representa al nodo del proveedor. El problema se define sobre un horizonte de planificación de longitud p , en el cual cada periodo

de tiempo es representado por el conjunto $t : \{1 \dots p\}$. La cantidad de producto disponible para el proveedor en cada periodo de tiempo se expresa con r_t , y el cliente es i . El proveedor incurre en un costo unitario de almacenamiento de inventario H_i en cada periodo y tiene una máxima capacidad de almacenamiento de inventario C_i . Además, al inicio del horizonte de planificación, se conocen los datos de los inventarios iniciales tanto del proveedor como de los clientes i , lo cual se denota como I_{t-1} cuando $t = 1$. El proveedor tiene conocimiento de d_{it} , la demanda de cada cliente i para cada periodo de tiempo t . También se tiene un conjunto de vehículos $K : \{1 \dots k\}$, donde k es el número total de vehículos disponibles para trabajar. La capacidad de cada vehículo se denota como Q . Cada vehículo puede realizar una ruta por período de tiempo desde el proveedor hasta un subconjunto de clientes. El costo de enrutamiento Costo_{ij} se expresa como la distancia euclidiana entre cada par de nodos.

El objetivo del *multi-vehicle* IRP es minimizar el costo total de enrutamiento y mantenimiento de inventario mientras se satisface la demanda de los clientes, contando con múltiples vehículos para realizar la distribución de productos en un determinado horizonte de tiempo. El plan de reposición está sujeto a las siguientes condiciones: (i) el proveedor debe tener suficiente inventario para satisfacer toda la demanda durante el horizonte de planificación; (ii) al final del período t , el inventario en la ubicación de un cliente no debe exceder su capacidad máxima, (iii) no se permite que los inventarios sean negativos, (iv) cada uno de los vehículos del proveedor puede realizar como máximo una ruta por período de tiempo, (v) cada ruta comienza y termina en el depósito y (vi) las capacidades del vehículo no se pueden exceder.

El *multi-vehicle* IRP, en contraste con su problema base, considera la inclusión de varios vehículos en la asignación de rutas de distribución. En la Fig. 1 se presenta un escenario de distribución, contando con dos periodos de tiempo, 16 clientes y 3 vehículos que deben regresar al depósito al finalizar el recorrido de las rutas. Además, la secuencia de distribución depende de cada periodo, de acuerdo con la demanda y posición geográfica de los clientes. En el primer periodo, se visita a todos los clientes por medio de los 3 vehículos con el fin de satisfacer la demanda. Sin embargo, en el segundo periodo se utilizan 3 vehículos, pero solo se visita a 13 clientes, debido que los clientes 3, 6 y 11 tienen inventario adecuado para su operación.

El modelo matemático es descrito por las Ecs. (1) y (14), y la Tabla I expone los conjuntos, los parámetros y las variables de decisión del modelo matemático.

$$\text{Min} \sum_{i \in V} \sum_{t \in M} H_i I_{it} + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} \text{Costo}_{ij} X_{ijkt} \quad (1)$$

Sujeto a,

$$I_{0t} = I_{0t-1} + r_{ot} - \sum_{i \in V1} \sum_{k \in K} q_{ikt}, \quad \forall t \in T \quad (2)$$

$$I_{it} = I_{it-1} + \sum_{k \in K} q_{ikt} - d_{it}, \quad \forall i \in V1, t \in T \quad (3)$$

$$I_{it} \leq C_i, \quad \forall i \in V1, t \in T \quad (4)$$

$$\sum_{k \in K} \leq C_i - I_{it-1}, \quad \forall i \in V1, t \in T \tag{5}$$

$$q_{ikt} \leq C_i Y_{ikt}, \quad \forall i \in V1, k \in K, t \in T \tag{6}$$

$$\sum_{i \in V1} q_{ikt} \leq Q Y_{0kt}, \quad \forall t \in T, k \in K \tag{7}$$

$$\sum_{j \in V} X_{ijkt} = Y_{ikt}, \quad \forall i \in V1, k \in K, t \in T \tag{8}$$

$$\sum_{i \in V} X_{ijkt} = Y_{jkt}, \quad \forall j \in V1, k \in K, t \in T \tag{9}$$

$$\sum_{j \in V} X_{ijkt} - \sum_{j \in V} X_{jikt} = 0, \quad \forall i \in V, k \in K, t \in T \tag{10}$$

$$\sum_{j \in V1} X_{0jkt} = Y_{0kt}, \quad \forall k \in K, t \in T \tag{11}$$

$$U_{jkt} \geq U_{ikt} + q_{jkt} + Q X_{ijkt} - Q, \quad \forall i \in V1, j \in V1, k \in K, t \in T \tag{12}$$

$$q_{ikt} \leq U_{ikt}, \quad \forall i \in V1, k \in K, t \in T \tag{13}$$

$$X_{ijkt}, Y_{ikt} \in [0, 1] \tag{14}$$

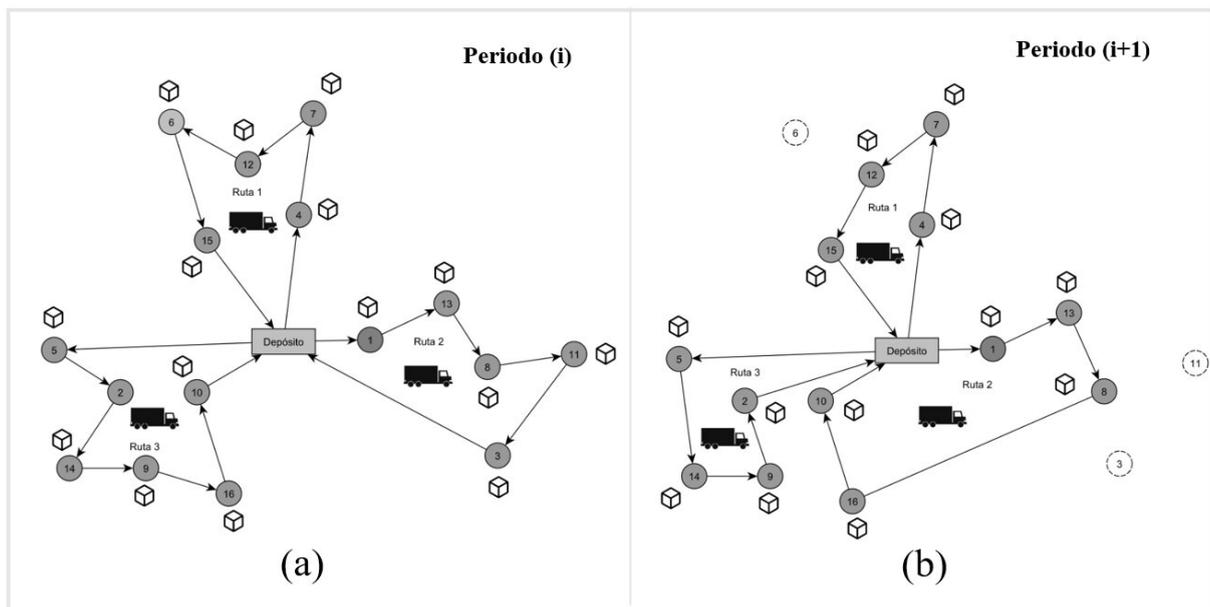


Figura 1. Ejemplo gestión de inventarios y enrutamiento de clientes usando múltiples vehículos en un horizonte de tiempo determinado. (a) Periodo de tiempo i , (b) periodo $i + 1$

Tabla I. Conjuntos, parámetros y variables de decisión del modelo matemático

Conjuntos	
Símbolo	Descripción
O	Conjunto de centros de distribución
V1	Conjunto de clientes
V	Conjunto de nodos $V = O \cup V1$
T	Conjunto de tiempo a partir del periodo 1
M	Conjunto de tiempo a partir del periodo 0
K	Conjunto de vehículos
Parámetros	
Símbolos	Descripción
Costo _{ij}	Costo de recorrer el arco <i>ij</i> en el periodo <i>t</i>
Coordenadas _{ij}	Ubicación del centro de distribución y de los clientes
<i>H_i</i>	Costo unitario de almacenamiento del centro de distribución y de los clientes
<i>r_{ot}</i>	Cantidad de mercancía disponible del centro de distribución en el periodo de tiempo <i>t</i>
<i>d_{it}</i>	Cantidad demandada por el cliente <i>i</i> en el periodo <i>t</i>
<i>C_j</i>	Capacidad del almacén del cliente <i>j</i>
<i>Q</i>	Capacidad del vehículo
Variables decisión	
Símbolos	Descripción
<i>X_{ijkt}</i>	1, si el arco <i>ij</i> es usado por el vehículo <i>k</i> en el periodo <i>t</i> ; 0 en el caso contrario
<i>I_{it}</i>	Nivel de inventario del centro de distribución y de clientes al final del periodo <i>t</i>
<i>q_{ikt}</i>	Cantidad de producto enviado al cliente <i>i</i> por el vehículo <i>k</i> en el periodo <i>t</i>
<i>Y_{ikt}</i>	1, si el cliente <i>i</i> es visitado por el vehículo <i>k</i> en el periodo <i>t</i> ; 0 en el caso contrario
<i>U_{jkt}</i>	Cantidad de producto acumulado enviado entre nodos por el vehículo <i>k</i> en el periodo de tiempo <i>t</i>

$$q_{ikt}, I_{it}, U_{jkt} \geq 0, y \text{ entero.} \quad (15)$$

La Ec. (1) busca minimizar el costo logístico asociado al almacenamiento de inventario tanto del proveedor como de los clientes, expresado en la primera expresión de suma doble. En la segunda parte de la función objetivo se busca minimizar el costo asociado a las rutas asignadas a cada vehículo en un determinado horizonte de planeación. La Ec. (2) calcula el nivel de inventario del proveedor en cada periodo de tiempo *t*. La Ec. (3) permite calcular el inventario inicial de cada cliente en cada periodo del horizonte de planeación. La Ec. (4) asegura que el inventario en cada periodo de tiempo sea menor o igual que la máxima capacidad de almacenamiento de cada cliente. La Ec. (5) asegura que la cantidad a enviar por el centro de distribución sea menor o igual a la disponibilidad del almacén del cliente, de acuerdo con su capacidad y su nivel de inventario en el periodo anterior. La Ec. (6) garantiza que la cantidad de productos que se envíe no supere la capacidad de almacén de los clientes introducidos en la ruta de distribución de cada vehículo *k*.

A su vez, las Ecs. (5) y (6) identifican la política de manejo de inventarios ML, donde se optimiza la cantidad de producto entregado en cada visita a los clientes, asegurando que se respete la capacidad de cada almacén. La Ec. (7) establece que la cantidad de producto a enviar a los clientes introducidos en la ruta debe ser menor o igual que la máxima capacidad de los vehículos. La Ec. (8) establece que, si al cliente i se le envía producto a través del vehículo k en el periodo t , entonces solo se puede activar uno de todos los posibles arcos de entrada. La Ec. (9) establece que, si al cliente j se le envía producto a través del vehículo k en el periodo t , solo se puede activar uno de todos los posibles arcos de salida. La Ec. (10) indica que, si se ingresa al nodo j por medio de un arco, también se debe de salir del nodo j por un arco. Las Ecs. (8, 9, 10) aseguran la conservación del flujo de las rutas, con una única entrada y salida de los nodos para el vehículo k en el periodo t . La Ec. (11) establece que se debe iniciar siempre desde el nodo del centro de distribución. Las Ecs. (12) y (13) garantizan la conexión de los circuitos sin la creación de *sub-tours* en la formulación general por el método MTZ, la cual fue propuesta por (23) y adaptada al modelo. Finalmente, las Ecs. (14) y (15) presentan la naturaleza de las variables.

2.1. Gestión de inventarios

La adaptabilidad del problema según los criterios establecidos por el proveedor y los minoristas para el manejo de inventarios se presenta como variantes en cuanto a las políticas de abastecimiento. Aquí, la política ML garantiza que siempre que se visite al cliente y que la cantidad de inventario a entregar no exceda el límite máximo del almacén. Por otro lado, la política OU garantiza que siempre que se visite al cliente y que la cantidad de inventario a entregar alcance el nivel máximo de almacenamiento del minorista.

2.1.1. Ordenar hasta el nivel - Order up to level (OU)

La política de reposición OU debe cumplir todas las condiciones de la política ML, es decir, no puede haber ruptura en el inventario del proveedor y en el inventario de los respectivos clientes. El inventario para llevar a cada cliente en el período t no puede exceder su nivel máximo de inventario, y la carga del vehículo en cada período t no debe exceder su capacidad. Esta política de inventario garantiza que, al visitar al cliente, se llene por completo su nivel de inventario en el periodo t . Esto, a diferencia de la política ML, donde se surte de acuerdo con la demanda. Para ello, se adaptan las restricciones propuestas por (17) en el modelo *vendor-managed inventory routing with order-up* (VMIR-OU).

$$q_{ikt} \geq C_i Y_{it} - I_{it-1}, \quad \forall i \in V1, k \in K, t \in T \quad (16)$$

La Ec. (16) asegura el manejo de la política OU, donde, cada vez que un cliente es visitado, recibe una cantidad de inventario que llena completamente su capacidad de almacenamiento.

2.2. Eliminación de *sub-tours*

El componente que representa mayor dificultad en la resolución de los modelos matemáticos es la parte de enrutamiento. Por ello, además de considerar la resolución de *sub-tours* por medio del modelo presentado por (23), se estudia dicha eliminación por medio del modelo de flujos y variante MTZ. Esto, con el fin de construir un modelo exacto más eficiente.

2.2.1. Eliminación de *sub-tours* por flujos

Otra alternativa para la eliminación de *sub-tours* es la propuesta de (17), la cual utiliza el modelo de flujos, donde se debe considerar una variable de decisión f_{ijt} que representa la cantidad de flujo que pasa por el arco ij en la ruta del período t , es decir, que representa al número de clientes que serán visitados después del cliente j .

Para obtener el modelo de eliminación de *sub-tours* por flujos, se deben eliminar las restricciones (12) y (13) del modelo general y agregar las siguientes:

$$\sum_{j \in V_1} f_{0jkt} = \sum_{j \in V_1} Y_{jkt}, \quad \forall k \in K, t \in T \quad (17)$$

$$\sum_{j \in V} f_{ijkt} = \sum_{j \in V} f_{jik} - Y_{ikt}, \quad \forall i \in V, k \in K, t \in T \quad (18)$$

$$f_{ijkt} \leq nX_{ijkt}, \quad \forall i \in V, k \in K, t \in T \quad (19)$$

$$f_{ijkt} \geq 0, \quad \forall i \in V, j \in V, k \in K, t \in T \quad (20)$$

Las nuevas restricciones están asociadas al flujo de cada ruta, asegurando un solo circuito conectado. El primer conjunto de restricciones (17) asegura que el flujo inicial de cada ruta es igual al número total de clientes a visitar (excluyendo el nodo del proveedor). El segundo conjunto de restricciones (18) garantiza una disminución de una unidad de flujo cada vez que se pasa por el cliente a visitar en la ruta (excluyendo el arco de retorno para el proveedor). El conjunto de restricciones (19) garantiza el flujo de un arco si pertenece a la ruta de solución. Finalmente, el conjunto de restricciones (20) define el dominio de las variables.

2.2.2. Eliminación de *sub-tours* Miller-Tucker-Zemlin (MTZ)

Otra alternativa para solucionar los *sub-tours* es mediante una variante del modelo MTZ propuesta por (24) para el problema base. Para ello, se deben eliminar las restricciones (12) y (13) del modelo general y agregar las siguientes:

$$W_{0kt} = 0, \quad \forall k \in K, t \in T \quad (21)$$

$$W_{jkt} \geq W_{ikt} + 1 - (n) \cdot (1 - X_{ijkt}), \quad \forall k \in K, t \in T \quad (22)$$

$$W_{ikt} \geq 0, \quad \forall i \in V, k \in K, t \in T \quad (23)$$

Las variables de decisión W_{ikt} indican el orden en que se visitan los clientes en la ruta de cada período, definiendo, para cada vértice j en el período t , el número total de clientes ya visitados por la ruta desde el período t después de visitar a un cliente. En este sentido, se deben reemplazar las restricciones (12) y (13) y añadir (21), (22) y (23). Las restricciones (21) garantizan, para cada instante t , que el flujo inicie en el vértice del proveedor. El conjunto de restricciones (22) se refiere al aumento

de una unidad de flujo cada vez que se pasa por el vértice del cliente a visitar, es decir, si el vértice j ocurre inmediatamente después del vértice i , se incrementa una unidad en la variable W_{ikt} para contar los clientes visitados en esa ruta, evitando la aparición de *sub-tours*, además de cancelar a los clientes que no pertenecen a la ruta. Finalmente, la naturaleza de la variable se define en la Ec. (23).

3. Resultados computacionales

La implementación del algoritmo se llevó a cabo en un computador con procesador Intel Core i5-5200U CPU @ 2.2 GHz con 4 GB de RAM y un tiempo de ejecución máximo de una hora.

Para replicar los modelos *multi-vehicle* IRP y sus distintas maneras de abordarlo, se utilizó el *software* de programación algebraica A Mathematical Programming Language (AMPL), con el fin de validar su funcionamiento con las instancias presentadas en la literatura (25).

Para probar los modelos propuestos, se utilizaron las instancias propuestas por (26), las cuales fueron generadas para el problema de gestión integrada de rutas e inventario para un producto. Como base, se consideraron los siguientes datos: horizonte temporal $H = 6$; número de clientes o minoristas de $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ y 50; una cantidad de inventario r_{st} utilizado por el cliente s en el periodo t , generada aleatoriamente como un número entero en un intervalo $[10, 100]$; el costo de almacenamiento H_i , generado aleatoriamente en un intervalo $[0,01, 0,05]$; el costo de transporte Costo_{ij} , calculado mediante la distancia euclidiana, donde (X_i, X_j) y (y_i, y_j) corresponden a las coordenadas del centro de distribución y los clientes, las cuales fueron generadas aleatoriamente en un intervalo de valores $[0, 500]$, obteniendo una matriz de costos simétrica, *i.e.*, $\text{Costo}_{ij} = \text{Costo}_{ji}$.

Se compararon los modelos *multi-vehicle* IRP con el fin de identificar la modelación que requiere el menor tiempo y ofrece una respuesta de buena calidad.

3.1. Cantidad de variables y restricciones

La Tabla II presenta la cantidad de variables y restricciones para los tres modelos (general, MTZ y flujos) para $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ y 50 clientes con la política de abastecimiento ML, y para $n = 5, 10, 15$ y 20 con la política OU, considerando un horizonte de tiempo $H = 3$ y dos vehículos $K = 2$.

Se observa que el *multi-vehicle* IRP es un problema NP-hard, debido a su crecimiento exponencial tanto en el número de variables como en el número de restricciones a medida que aumenta el número de clientes. Además, en el *multi-vehicle* IRP (ML) ($H = 3, K = 2$), el modelo por flujos presenta mayor cantidad de variables que los modelos general y MTZ, los cuales tienen cantidades de variables muy similares. Los tres modelos presentan cantidades similares de restricciones.

De manera similar para el *multi-vehicle* IRP (OU) ($H = 3, K = 2$), el modelo de flujos es el que más número de variables y restricciones presenta en comparación con los modelos MTZ y general. Tanto el número de variables como el de restricciones mantienen una tendencia creciente a medida que el

Tabla II. Conteo de variables y restricciones, *multi-vehicle* IRP ($H = 3, K = 2$)

<i>Multi-vehicle</i> IRP ($H=3, K=2$)						
n	General		MTZ		Flujos	
	Variables	Restricciones	Variables	Restricciones	Variables	Restricciones
Política de abastecimiento ML						
5	324	321	294	321	516	423
10	939	921	879	921	1.611	1.113
15	1.854	1.821	1.764	1.821	3.306	2.103
20	3.069	3.021	2.949	3.021	5.601	3.393
25	4.584	4.521	4.434	4.521	8.496	4.983
30	6.399	6.321	6.219	6.321	11.991	6.873
35	8.514	8.421	8.304	8.421	16.086	9.063
40	10.929	10.821	10.689	10.821	20.781	11.553
45	13.644	13.521	13.374	13.521	26.076	14.343
50	16.559	16.521	16.359	16.521	31.971	17.433
Política de abastecimiento OU						
5	324	351	294	351	504	447
10	939	981	879	981	1.611	1.173
15	1.854	1.911	1.764	1.911	3.294	2.187
20	3.069	3.141	2.949	3.141	5.601	3.513

número de clientes aumenta. El modelo *multi-vehicle* IRP bajo la política OU presenta mayor número de restricciones en todos sus modelos (MTZ, general y flujos) en comparación con el modelo *multi-vehicle* IRP bajo la política ML. El número de variables tiende a ser igual en ambas políticas de gestión de inventarios.

En la Tabla III se presentan los resultados para el modelo *multi-vehicle* IRP con horizonte temporal $H = 3$, pero ya no solo con 2 vehículos sino con tres vehículos para $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ y 50 con la política ML, y con $n = 5, 10, 15$ y 20 para la política OU. Esto, para los tres modelos (general, MTZ y flujos).

Se evidencia que, en el modelo *multi-vehicle* IRP ($H = 3, K = 3$), las variantes general y MTZ comparten la misma cantidad de variables. Sin embargo, en la variante de flujos se observa una mayor cantidad de variables, la cual se hace evidente a medida que la cantidad de clientes aumenta. En cuanto a la cantidad de restricciones, se observa que los tres modelos presentan un comportamiento similar. Sin embargo, el modelo de flujos presenta una cantidad de restricciones levemente mayor.

El modelo *multi-vehicle* IRP (OU) ($H = 3, K = 3$), comparado con su contraparte ML ($H = 3, K = 3$), presenta igual número de variables en los modelos MTZ y general, pero su variante de flujos muestra leves diferencias en el número de variables. A su vez, la cantidad de restricciones es mayor en OU que en ML.

Tabla III. Conteo de variables y restricciones, *multi-vehicle* IRP ($H = 3, K = 3$)

<i>Multi-vehicle</i> IRP (ML) ($H=3, K=3$)						
n	General		MTZ		Flujos	
	Variables	Restricciones	Variables	Restricciones	Variables	Restricciones
Política de abastecimiento ML						
5	477	465	432	465	765	618
10	1.392	1.350	1.302	1.350	2.400	1.638
15	2.757	2.685	2.622	2.685	4.935	3.108
20	4.572	4.470	4.392	4.470	8.370	5.028
25	6.837	6.705	6.612	6.705	12.705	7.398
30	9.552	9.390	9.282	9.390	17.940	10.218
35	12.717	12.525	12.402	12.525	24.075	13.488
40	16.332	16.110	15.972	16.110	31.110	17.208
45	20.397	20.145	19.992	20.145	39.045	21.378
50	24.912	24.630	24.462	24.630	47.880	25.998
Política de abastecimiento OU						
5	477	510	432	510	747	654
10	1.392	1.440	1.302	1.440	2.400	1.728
15	2.757	2.820	2.622	2.820	4.917	3.234
20	4.572	4.650	4.392	4.650	8.730	5.208

3.2. Tiempos de ejecución y GAP

3.2.1. *Multi-vehicle* IRP (ML) $H=3, K=2$

A continuación, se presentan los resultados de la función objetivo (\$), tiempos (s) y GAP (%) obtenidos para el modelo *multiple-vehicle* IRP bajo las políticas de inventario ML y OU, con un horizonte de planeación de tres periodos ($H = 3$) y considerando 2 vehículos ($K = 2$) bajo distintos modelos de eliminación de *sub-tours* (general, MTZ y flujos). Se presentan las mejores soluciones (*best known solutions*, BKS) reportadas por (27) para la política ML, con el fin de comparar la función objetivo de las instancias implementadas.

En la Tabla IV se puede evidenciar que la tendencia creciente de los tiempos computacionales se mantiene a medida que el número de clientes aumenta, dado que esto implica dar respuesta a un mayor número de variables y restricciones. Por ejemplo, para el modelo de flujos, mientras que, para una instancia de 5 clientes, la respuesta óptima (GAP = 0%) se logra en 2 segundos, para 50 clientes, una respuesta muy cercana al óptimo (GAP = 3,88%) se logra en 1.476 segundos. Para este modelo, debido a su alta complejidad computacional, se obtuvieron GAP entre el 0 y el 15% para el modelo general, entre el 0 y el 10% para el modelo MTZ y entre el 0 y el 7,5% para el modelo de flujos.

Tabla IV. Resultados del *multi-vehicle* IRP (ML) ($H = 3, K = 2$)

<i>Multi-vehicle</i> IRP (ML) ($H=3, K=2$)										
n	General				MTZ			Flujos		
	BKS	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)
5	2.265,21	2.265,21	4	0,00	2.265,21	2	0,00	2.265,21	2	0,00
10	5.032,05	5.043,57	77	6,06	5.032,05	188	0,00	5.032,05	13	0,00
15	5.755,54	5.755,54	121	0,00	5.755,54	58	0,00	5.755,54	189	0,00
20	7.508,76	7.989,86	96	12,32	7.540	318	6,01	7.443,36	674	0,26
25	8.521,52	9.141,52	1018	9,87	8.915,52	1.032	6,59	8.521,52	664	0,00
30	12.449,90	13.294,9	823	8,95	12.684,9	657	4,95	12.449,9	1.627	0,00
35	11.922,30	12.924,9	3994	10,12	13.051,8	618	9,58	12.146,9	1.065	2,31
40	13.660,40	15.540,8	3994	13,60	14.726,1	818	8,28	13.676,1	3.600	0,85
45	14.037,30	15.653,4	3852	12,23	15.656,1	2.752	10,21	15.576,1	2.345	7,55
50	15.097,10	17.613,6	923	15,18	16.417,6	1.430	9,95	15.247,6	1476	3,88

3.2.2. *Multi-vehicle* IRP (ML) $H=3, K=3$

En la Tabla V se presentan los resultados para tres periodos de tiempo ($H = 3$) y tres vehículos ($K = 3$). Aquí se observa cómo el problema aumenta su complejidad al comparar los tiempos de ejecución con respecto al modelo con $K = 2$. Por ejemplo, mientras que, para resolver una instancia de 20 clientes con $K = 2$, el modelo de flujos se demoraba 674 segundos y se obtenía un GAP del 0,26 %, ahora, con $K = 3$, para resolver la misma instancia de 20 clientes con el modelo de flujos, se obtiene un GAP del 3,08 % en 3.600 segundos.

Tabla V. Resultados del *multi-vehicle* IRP (ML) ($H = 3, K = 3$)

<i>Multi-vehicle</i> IRP (ML) ($H=3, K=3$)										
n	General				MTZ			Flujos		
	BKS	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)
5	2.298,73	2.298,73	5	0,00	2.298,73	1	0,00	2.298,73	3	0,00
10	5.506,09	5.646,02	322	14,94	5.540,09	321	9,42	5.506,09	369	0,00
15	6.242,90	6.242,9	213	0,00	6.242,9	162	0,00	6.242,9	95	0,00
20	8.165,42	8.439	3.600	15,42	8.239,42	870	11,69	8.074,02	3.600	3,08
25	8.893,82	9.025,3	2.143	13,60	9.142,2	313	9,69	9.100,4	1.544	4,87
30	12.908,90	13.592,1	3.600	11,16	13.497,5	1.324	9,37	13.379,9	3.600	6,85
35	12.396	13.864,3	3.652	14,2	13.807,3	1.507	13,90	12.560	1.895	3,87
40	14.224,10	15.579,7	1.823	14,78	15.718,6	1.313	13,16	14.932	635	9,63
45	14.771	16.230,3	3.604	15,6	15.943,1	3.685	9,84	15.858,2	2.386	7,64
50	16.115,80	18.319	4.113	19,53	17.716,5	3.947	15,24	16.943,3	919	12,78

3.2.3. Multi-vehicle IRP (OU) H=3, K=2

En la Tabla VI se muestra cómo, para las políticas OU y ML, la tendencia creciente de los tiempos computacionales se mantiene a medida que el número de clientes aumenta.

Tabla VI. Resultados del *multi-vehicle* IRP (OU) ($H = 3, K = 2$)

<i>Multi-vehicle</i> IRP (OU) (H=3, K=2)									
General				MTZ			Flujos		
n	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)
5	2.266,61	0	2,16	2.266,61	0	3,49	2.266,61	1	0,00
10	5.236,03	200	0,22	5.236,03	302	0,22	5.236,03	37	1,84
15	6.092,08	443	0,06	6.092,08	659	0,03	6.092,08	251	0,51
20	8.043,22	3.663	14,65	8.043,22	3.568	10,35	7.766,34	2.083	0,30

3.2.4. Multi-vehicle IRP (OU) H=3, K=3

En la Tabla VII se presentan los resultados del modelo *multi-vehicle* IRP ($H = 3, K = 3$) bajo la política de gestión de inventarios OU.

Tabla VII. Resultados del *multi-vehicle* IRP (OU) ($H = 3, K = 3$)

<i>Multi-vehicle</i> IRP (OU) (H=3, K=3)									
General				MTZ			Flujos		
n	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)
5	2.409,15	0	2,63	2.409,15	1	0	2.409,15	1	0,40
10	5.675,36	3.574	3,08	5.675,36	3.080	0,06	5.675,36	428	0,34
15	6.365,63	3.091	0,11	6.365,63	1.551	0,13	6.365,63	394	0,27
50	8.738,26	3.680	15,44	8.589,13	3.603	9,12	8.589,13	3.582	7,32

3.3. Interpretación de resultados

Para interpretar los resultados, se propone la siguiente instancia, donde se tienen tanto la latitud como la longitud del proveedor y los clientes, inventarios iniciales, costos unitarios de almacenamiento, demanda de los clientes y máximas capacidades de almacenamiento. Además, n representa el número de clientes (5 para este caso), p es el horizonte de planificación (3 meses), k es el número de vehículos disponibles (3 en este caso), r es la cantidad de producto disponible en el proveedor en cada instante de tiempo del horizonte de planificación (193) y Q es la capacidad de transporte constante de cada vehículo, que corresponde a 96.

En la Fig. 2 se presentan los resultados obtenidos mediante el programa Power BI, con la visualización de las rutas generadas a partir de los 3 vehículos en el plan de distribución para el mes 1. Además, se presentan las cantidades a entregar y el inventario al final del mes de cada uno de los

clientes. En este caso, se muestra que el cliente 5 es visitado con el vehículo 3, se le entregan 11 unidades de producto, y su inventario al final del mes será de 11 unidades.

Tabla VIII. Parámetros de la instancia propuesta

Parámetros						
Cliente	Latitud	Longitud	Inventario inicial	Costo almacenamiento	Demanda	Capacidad máxima
0	4,794	-75,72	510	0,30		
1	4,801	-75,74	130	0,23	65	195
2	4,892	-75,75	70	0,32	35	105
3	4,818	-75,71	58	0,33	58	116
4	4,807	-75,78	48	0,23	24	72
5	4,845	-75,79	11	0,18	11	22

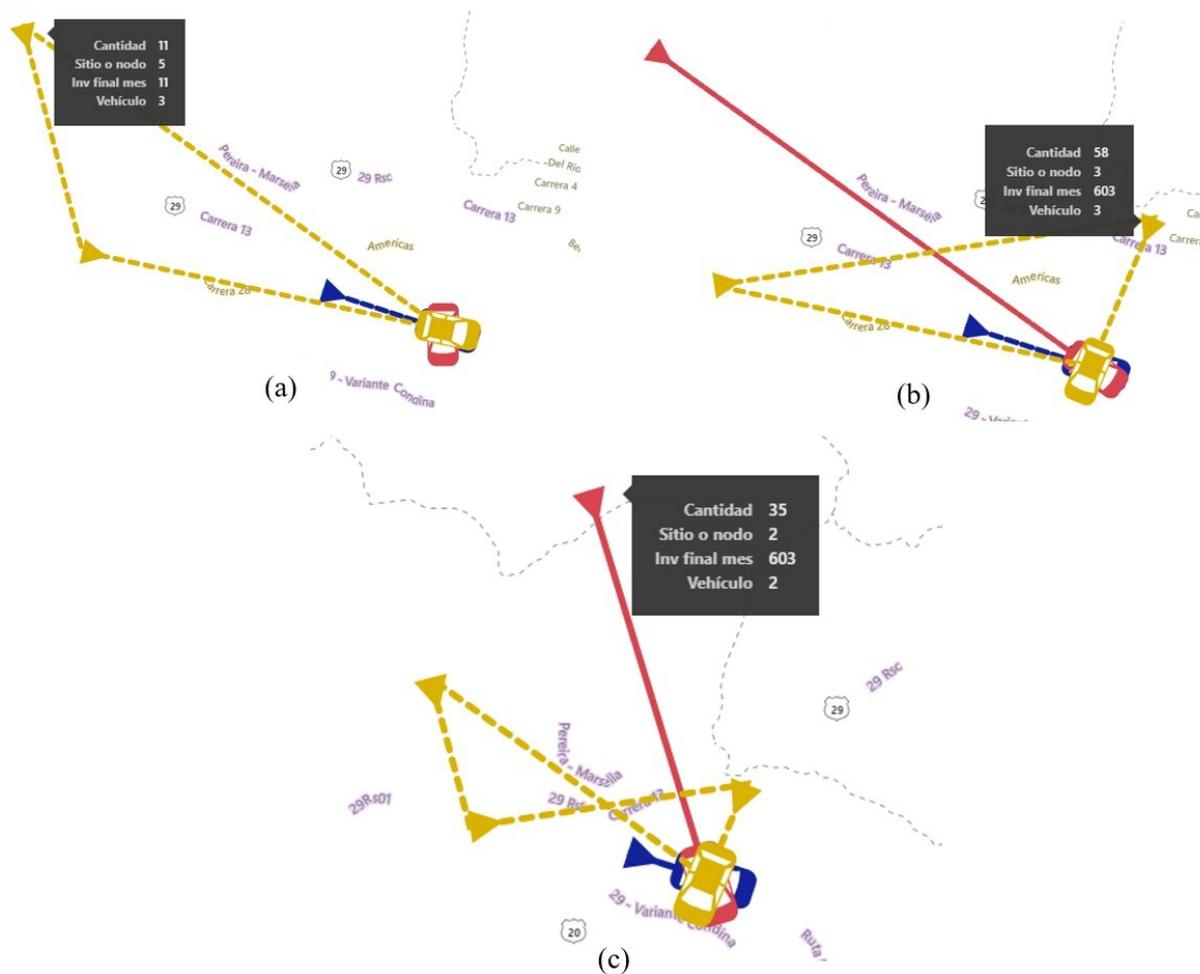


Figura 2. Plan de distribución. (a) Periodo 1, (b) periodo 2, (c) periodo 3

4. Conclusiones

En esta investigación se presenta una metodología general de solución mediante programación exacta que puede ser adaptada para diferentes campos de aplicación del problema integrado de inventarios y enrutamiento con múltiples vehículos. Esto, con el fin de identificar el más eficiente.

Los modelos matemáticos implementados en AMPL son capaces de resolver el IRP con múltiples vehículos bajo diferentes políticas de inventario, permitiendo obtener los planes de distribución y gestión de inventarios. El modelo más eficiente para eliminación de *sub-tours* es el de flujos para las dos políticas de abastecimiento estudiadas (ML como OU). Esto se hace evidente a medida que el número clientes o el número de periodos evaluados aumenta. Cabe añadir que la política ML muestra mejores valores de GAP en comparación con la política OU.

Debido a la alta complejidad computacional del problema, los trabajos futuros deben encaminarse en busca de nuevas alternativas diferentes a la optimización exacta, tales como heurísticas o metaheurísticas, que permitan estar lo más cerca posible del óptimo en tiempos de computación menores, validando la implementación por medio de instancias pequeñas y comparando estas técnicas aproximadas con las exactas. De igual manera, se recomienda el desarrollo de un modelo dinámico que pueda incluir variables estocásticas y análisis probabilístico. Esto permitiría una representación más completa del sistema, así como la consideración de demandas estocásticas. De igual manera, podrían incluirse funciones multiobjetivo en distintos frentes además de la reducción de costos, como las emisiones contaminantes, restricciones en los horarios de los vehículos, entre otros. También podría incursionarse en el problema con flotas propias y subcontratadas, así como con transbordo.

5. Agradecimientos

Los autores quieren expresar su agradecimiento a la Vicerrectoría de Investigaciones, Innovación y Extensión de la Universidad Tecnológica de Pereira por su apoyo al proyecto *Solución del problema de localización, ruteo e inventarios en ambientes multiobjetivo 7-21-1*.

6. Contribución de autores

Todos los autores contribuyeron por igual a la investigación

Referencias

- [1] R. M. Azuma, G. P. Coelho y F. J. Von Zuben, "Evolutionary multi-objective optimization for the vendor-managed inventory routing problem," in *2011 IEEE Cong. Evol. Comp.*, 2011, pp. 1457-1464. <https://doi.org/10.1109/CEC.2011.5949787> ↑3
- [2] M. de la Arada Juárez, *Optimización de la cadena logística*, Madrid, España: Paraninfo, 2019. ↑3

- [3] D. P. Ballesteros Riveros y P. P. Ballesteros Silva, "Importancia de la administración logística," *Scientia et Technica*, vol. 1, art. 3745, 2008. <https://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/3745> ↑3,4
- [4] T. O. Boyano-Fram, "Retos logísticos de puertos de cuarta generación diagnóstico y modernización en países emergentes," *Rev. Cient. Anfíbios*, vol. 2, no. 1, pp. 72-82., 2019. <https://doi.org/10.37979/afb.2019v2n1.41> ↑3
- [5] X. Casas, "Comercio electrónico en la cuarentena: la venta online creció un 84% pero los envíos demoran hasta 10 días," *Infobae*, 2020. [En línea]. Disponible en: <https://www.infobae.com/economia/2020/05/26/comercio-electronico-en-la-cuarentena-la-venta-online-crecio-un-84-pero-los-envios-demoran-hasta-10-dias/> ↑3
- [6] S. Chevalier, "El pedido de comida en línea en América Latina en 2021," *Statista*, 2021. [En línea]. Disponible en: <https://es.statista.com/grafico/19027/ingresos-generados-en-pedidos-en-linea-de-comida-a-domicilio/> ↑4
- [7] P. A. Vargas Rubio, "En la primera semana de aislamiento, la penetración del comercio digital registró un alza de 100%.", *La República*, 2020. [En línea]. Disponible en: <https://www.larepublica.co/globoeconomia/e-commerce-ha-crecido-mas-de-300-en-latinoamerica-en-medio-de-la-pandemia-3000424> ↑4
- [8] Departamento Nacional de Planeación, "Encuesta Nacional Logística 2020," 2020. [En línea]. Disponible en: <https://planeacionnacional.sharepoint.com/sites/PlataformaDIES2/Shared%20Documents/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2FPlataformaDIES2%2FShared%20Documents%2FEncuesta%20Nacional%20Log%C3%ADstica%2FENL%202020%2FENL%5F2020%5FDocumento%5FResultados%5F10%2D08%2D2021%283%29%2Epdf&parent=%2Fsites%2FPlataformaDIES2%2FShared%20Documents%2FEncuesta%20Nacional%20Log%C3%ADstica%2FENL%202020&p=true&ga=1> ↑4
- [9] M. M. Torres, *Logística y costos*, Bogotá, Colombia: Ediciones Díaz de Santos, 2012. ↑4
- [10] E. M. Toro Ocampo, J. F. Castañeda Londoño, and R. A. Gallego Rendón, *Introducción al problema de enrutamiento de vehículos en la logística de distribución*, Pereira, Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira, 2020. <https://doi.org/10.22517/9789587224818> ↑4
- [11] V. I. Vivanco Navarro, "Aplicación de heurísticas para el inventory routing problems," tesis de pregrado, Fac. Ing., Pon. Univ. Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile, 2013. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-4500/UCH4887_01.pdf ↑4
- [12] C. Archetti, L. Bertazzi, G. Laporte y M. G. Speranza, "A branch-and-cut algorithm for a vendor-managed inventory-routing problem," *Transp. Sci.*, vol. 41, no. 3, pp. 382-391, 2007. ↑4,5
- [13] L. C. Coelho y G. Laporte, "A branch-and-cut algorithm for the multi-product multi-vehicle inventory-routing problem," *Int. J. Prod. Res.*, vol. 51, no. 23-24, pp. 7156-7169, 2013. <https://doi.org/10.1080/00207543.2012.757668> ↑4

- [14] D. F. Batero Manso y J. A. Orjuela-Castro, "El problema de ruteo e inventarios en cadenas de suministro de perecederos: revisión de literatura," *Ingeniería*, vol. 23, no. 2, pp. 117-143, 2018. <https://doi.org/10.14483/23448393.12691> ↑4
- [15] D. F. Batero, "Modelo matemático multi-objetivo de ruteo e inventarios para la cadena de suministro de perecederos: caso sector frutícola," tesis de maestría, Fac. Ing., Univ. Dist. Francisco José de Caldas, 2017. <http://hdl.handle.net/11349/7419> ↑4
- [16] H. Shaabani, "A literature review of the perishable inventory routing problem," *Asian J. Ship. Log.*, vol. 38, no. 3, pp. 143-161, sep. 2022. <https://doi.org/10.1016/J.AJSL.2022.05.002> ↑4
- [17] M. A. S. Florindo, "Gestão integrada das rotas de entrega e inventário para um produto," tesis de maestría, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2019. <http://hdl.handle.net/10451/41635> ↑4, 5, 9, 10
- [18] P. Jiao y Z. Li, "Two-stage stochastic programming for the inventory routing problem with stochastic demands in fuel delivery," *Int. J. Ind. Eng. Comp.*, vol. 13, no. 4, pp. 507-522, Apr. 2022. <http://dx.doi.org/10.5267/j.ijiec.2022.7.004> ↑4, 5
- [19] B. Raa y E.-H. Aghezzaf, "A practical solution approach for the cyclic inventory routing problem," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 192, no. 2, pp. 429-441, 2009. ↑5
- [20] L. C. Coelho, J.-F. Cordeau y G. Laporte, "Heuristics for dynamic and stochastic inventory-routing," *Comp. Oper. Res.*, vol. 52, parte A, pp. 55-67, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2014.07.001> ↑5
- [21] S. Mirzaei y A. Seifi, "Considering lost sale in inventory routing problems for perishable goods," *Comp. Ind. Eng.*, vol. 87, pp. 213-227, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2015.05.010> ↑
- [22] L. C. Coelho, J. F. Cordeau y G. Laporte, "The inventory-routing problem with transshipment," *Comp. Oper. Res.*, vol. 39, no. 11, pp. 2537-2548, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.12.020> ↑5
- [23] D. Aksen, O. Kaya, F. S. Salman y Y. Akça, "Selective and periodic inventory routing problem for waste vegetable oil collection," *Optim. Lett.*, vol. 6, no. 6, pp. 1063-1080, 2012. <https://doi.org/10.1007/s11590-012-0444-1> ↑5, 9
- [24] C. E. Miller, R. A. Zemlin y A. W. Tucker, "Integer programming formulation of traveling salesman problems," *JACM*, vol. 7, no. 4, pp. 326-329, 1960. <https://doi.org/10.1145/321043.321046> ↑5, 10
- [25] R. Fourer, D. M. Gay y B. W. Kernighan, *AMPL. A modeling language for mathematical programming*, USA: Duxury Thomson 2003. [En línea]. Disponible en: <https://vanderbei.princeton.edu/307/textbook/AMPLbook.pdf> ↑11
- [26] C. Archetti, L. Bertazzi, G. Laporte y M. G. Speranza, "A branch-and-cut algorithm for a vendor-managed inventory-routing problem," *Transp. Sci.*, vol. 41, no. 3, pp. 382-391, 2007. <https://doi.org/10.1287/trsc.1060.0188> ↑11
- [27] L. C. Coelho, "leandro-coelho.". [En línea]. Disponible en: <https://www.leandro-coelho.com/instances/inventory-routing/> ↑13

Frank Alejandro Hincapié Londoño

Graduado en Ingeniería Industrial de la Universidad Tecnológica de Pereira en 2021. Actualmente es estudiante de la Maestría en Ingeniería Eléctrica de la misma Universidad. Es investigador del grupo GAOPE, y sus intereses de investigación incluyen la optimización exacta y aproximada, así como, la analítica de datos e inteligencia artificial.

Email: frank.hincapie@utp.edu.co

Jhonatan Stiven García Guevara

Graduado en Ingeniería Industrial de la Universidad Tecnológica de Pereira en 2022. Actualmente es estudiante de la Maestría en Ingeniería Eléctrica de la misma Universidad. Es investigador del grupo GAOPE, y sus intereses de investigación incluyen la optimización exacta, el enrutamiento de vehículos, la analítica de datos, los algoritmos de aprendizaje automático y el uso de metaheurísticas.

Email: jhonatan.garcia1@utp.edu.co

Eliana Mirledy Toro Ocampo

MSc en Ingeniería Eléctrica y en Investigación Operativa y Estadística (2005 y 2008 respectivamente) y PhD en Ingeniería (2016) de la misma Universidad. Actualmente es profesora en la Universidad Tecnológica de Pereira. Sus intereses de investigación incluyen la optimización exacta, el enrutamiento de vehículos y el uso de metaheurísticas. Es investigadora senior del Ministerio de Ciencia y Tecnológica de Colombia y directora del Grupo de Aplicaciones en Optimización y Procesos Estocásticos (GAOPE).

Email: elianam@utp.edu.co

