Pelabelan Tak Teratur Titik pada Graf Hasil Kali Corona antara Prisma dan Komplemen Graf Lengkap

Rismawati Ramdani[1], Esih Sukaesih[2], Inne Syafrian Putri[3], Salwa Nursyahida[4]

[1,2,3,4]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Gunung Djati Bandung,
e-mail : [1]rismawatiramdani@uinsgd.ac.id, [2]esih_s@uinsgd.ac.id, [3]innesyafrian@uinsgd.ac.id, [4]salwanursyahida@uinsgd.ac.id

Abstrak

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf dan k merupakan suatu bilangan bulat positif. Suatu pelabelan$-k$ total dari G adalah suatu fungsi $f : V(G) \cup E(G) \to \{1,2,\dots,k\}$. Bobot titik v berdasarkan pelabelan f dinotasikan dengan $w_f(v)$ dan didefinisikan dengan $w_f(v) = f(v) + \sum_{uv\in E(G)} f(uv)$. Suatu pelabelan$-k$ total dari G disebut sebagai pelabelan total tak teratur titik ketika tidak ada dua titik berbeda dengan bobot yang sama. Nilai total ketakteraturan titik dari G, dilambangkan dengan $tvs(G)$, adalah nilai k terkecil sehingga G memuat pelabelan$-k$ total tak teratur titik. Misalkan G dan H merupakan suatu graf berorde n dan m, berturut-turut. Hasil kali Corona $G \odot H$ adalah suatu graf yang dibentuk dengan mengambil satu salinan dari G dan n salinan dari H dengan menghubungkan setiap titik pada salinan ke$-i$ dari H ke titik ke$-i$ dari G untuk $1 \le i \le n$. Pada karya tulis ini, ditentukan nilai total ketakteraturan titik dari graf hasil kali Corona antara graf prisma dengan komplemen graf lengkap.

Kata kunci: hasil kali Corona; nilai total ketakteraturan titik; pelabelan graf

Abstract

For a graph $G = (V(G), E(G))$ and a positive integer k, a total k-labeling of G is a function from $V(G) \cup E(G)$ to $\{1,2,\dots,k\}$. The vertex weight v by the labeling f defined by $w_f(v) = f(v) + \sum_{uv\in E(G)} f(uv)$. A vertex irregular total k-labeling f is a total k-labeling such that there are no two vertices with the same weight. The total vertex irregularity strength of G is the minimum k such that G has a vertex irregular total k-labeling and denoted by tvs(G), Let G and H be a graph with order n and m, respectively. The corona product $G \odot H$ is a graph obtained by taking one copy of G and n copies of H and join each vertex of the i-th copy of H to the i-th vertex of G, for every $1 \le i \le n$. In this paper, we determine the exact value of total vertex irregularity strength of Corona product of prism and complement of complete graph.

***Keywords**: Corona product graph; graph labeling; the total vertex irregularity strength;*

1 Pendahuluan

Pelabelan graf adalah suatu cabang dari teori graf yang banyak dimanfaatkan dalam berbagai bidang keilmuan seperti Kimia, Teknik Sipil, Industri, Jaringan Komunikasi, Astronomi, Elektronika, Sistem Keamanan, Psikologi Sosial, Pemrograman dan lain sebagainya. Aplikasi pelabelan graf dalam kimia salah satunya adalah penentuan struktur kristal yang diolah dari data X-Ray Diffraction (XRD) (Hedge, 2007). Krishnaa (2016) dalam artikelnya menyatakan bahwa sistem pengamanan dalam sebuah gedung dapat diatur berdasarkan pelabelan graf agar semua area khususnya area-area yang rawan dapat diawasi dengan baik. Pelabelan graf juga dapat menentukan sistem mutualisme antara konsumen dan distributor terkait perbedaanya permintaan dan persediaan barang atau jasa yang ada (Krishnaa, 2016). Dalam artikelnya Prasana, Sravathi, dan Sudhakar (2014) menjelaskan bahwa pelabelan graf berkontribusi baik dalam jaringan komunikasi baik nirkabel/*wireless* maupun dangan kabel/*wired*, lebih jauh mereka membahas bahwa pelabelan graf juga dimanfaatkan untuk penentuan berbagai saluran/*channel* dalam jaringan komunikasi. Selain itu, pelabelan graf juga dapat digunakan untuk menganalisis masalah pada jaringan Ad hoc seluler, seperti konektivitas, skalabilitas, perutean, pemodelan jaringan dan simulasi (Verkey, 2015). Dengan berbagai terapan tersebut, pelabelan graf masih sangat bepotensi untuk berkembang baik dari segi teori maupun aplikasinya. Pada artikel ini, dikaji suatu jenis pelabelan yang berkembang sangat pesat, yaitu pelabelan tak teratur. Pertama kali pelabelan tak teratur ini diperkenalkan oleh Martin Bača dkk. (2007). Adapun definisi dari pelabelan total tak teratur titik adalah sebagai berikut.

Misalkan didefinisikan suatu pelabelan total $f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2, \cdots, k\}$, dimana $V(G)$ adalah himpunan titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi dari suatu graf G. Pelabelan f dikatakan pelabelan$-k$ total tak teratur titik di G jika setiap dua titik berbeda x dan y di $V(G)$ memenuhi $w_f(x) \neq w_f(y)$ dimana $w_f(x) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$. Nilai total ketakteraturan titik dari graf G yang dilambangkan dengan $tvs(G)$, adalah k minimum sehingga graf G memiliki suatu pelabelan$-k$ total tak teratur titik (Bača dkk, 2007). Bača dkk. (2007) memberikan suatu batas atas maupun batas bawah $tvs(G)$ untuk sebarang graf G yang memiliki p titik, q sisi, derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ.

Beberapa hasil penelitian tentang penentuan nilai tvs telah dilakukan penulis dan telah dipublikasikan pada beberapa jurnal maupun prosiding internasional, diantaranya, pada makalah (Ramdani dkk, 2016), penulis memberikan sebuah batas atas dan nilai eksak dari nilai total ketakteraturan titik dari gabungan saling lepas beberapa graf. Pada makalah yang sama, penulis memberikan nilai eksak dari total ketakteraturan titik dari gabungan saling lepas beberapa graf teratur. Pada makalah yang lain (Ramdani dkk, 2015), penulis memberikan suatu batas atas dari nilai total ketakteraturan titik dari hasil kali Cartesian antara graf lintasan dengan sebarang graf. Pada makalah (Ramdani dkk, 2019), penulis menentukan nilai eksak $tvs(G)$ untuk G graf hasil operasi sisir antara lingkaran dengan lintasan berorde 3. Pada makalah (Ramdani dkk, 2019b) penulis memberikan nilai eksak dari $tvs(G)$ untuk G graf-graf yang dibentuk dari graf bintang, serta pada makalah (Ramdani dkk, 2018), penulis memperoleh nilai eksak dari total ketakteraturan titik dari hasil operasi sisir antara dua graf lingkaran C_n dan C_4.

Beberapa hasil penelitian lain terkait pelabelan total tak teratur titik diberikan berikut ini.

Przybylo, pada makalah (Przybylo, 2009), memberikan batas linier dari $tvs(G)$.
Pada makalah (Nurdin dkk, 2010), Nurdin membuktikan bahwa

$$tvs(G) \geq \max\left\{\left\lceil\frac{\delta + n_\delta}{\delta + 1}\right\rceil, \left\lceil\frac{\delta + n_\delta + n_{\delta+1}}{\delta + 2}\right\rceil, \cdots, \left\lceil\frac{\delta + \sum_{i=\delta}^{\Delta} n_i}{\Delta + 1}\right\rceil\right\} \qquad (2.1)$$

Untuk setiap graf terhubung G yang memiliki n_i titik berderajat i ($i = \delta,\ \delta+1,\ \delta+2,\ \cdots,\ \Delta$), dimana δ dan Δ berturut-turut merupakan derajat minimun dan maksimum dari G.

Penelitian lain mengenai penentukan nilai tvs dari suatu graf diberikan oleh Guo pada makalah (Guo dkk, 2015) yang memperoleh nilai tvs dari graf lengkap m-partit. Selain itu, Jeyanthi, dkk. pada makalah (Jeyanthi dkk, 2016), memberikan nilai total ketakteraturan titik dari hasil kali Corona dari beberapa graf tertentu. Majerski dkk. (Majerski dan Przybylo, 2014) menghasilkan nilai tvs dari graf dense. Rajasing, pada makalah (Rajasing dan Annamma, 2015), memperoleh nilai total ketakteraturan titik dari graf Hamilton 1-fault tolerant. Selain itu, Susilawati, dkk.

pada makalah (Susilawati dkk, 2018) memberikan nilai tvs dari beberapa graf pohon dengan derajat maskimum tertentu.

Dengan berkembangnya penelitian terkait pelabelan total tak teratur titik ini, maka penulis tertarik untuk mengkaji nilai tvs dari graf lain yang merupakan hasil operasi dari dua buah graf. Penulis memilih graf hasil kali Corona karena operasi ini mempertahankan struktur derajat dari garf-graf asalnya. Untuk itu, pada karya tulis ini, ditentukan nilai total ketakteraturan titik dari graf hasil kali Corona antara prisma dengan komplemen graf lengkap.

Graf prisma dengan $2n$ titik, dinotasikan dengan $C_n \square P_2$, adalah hasil kali Cartesian antara lingkaran C_n dengan lintasan P_2. Graf lingkaran yang memiliki n titik, dilambangkan dengan C_n, merupakan graf yang setiap titiknya berderajat 2. Graf lintasan berorde n, dinotasikan dengan P_n, merupakan sebuah graf dengan dua buah titik berderajat 1 dan $n-2$ buah titik berderajat 2. Graf lengkap yang memiliki n titik, dilambangkan dengan K_n, adalah suatu graf yang setiap sembarang pasangan dua buah titiknya adalah bertetangga. Komplemen dari graf lengkap K_n, dilambangkan dengan $\overline{K_n}$ merupakan graf dengan n titik yang tidak memuat sisi.

Secara umum, graf hasil kali Cartesian $G \square H$ dari graf G dan H, adalah sebuah graf dimana himpunan titiknya merupakan hasil kali Cartesian $V(G) \times V(H)$ dan dua titik (u, u_0) dan (v, v_0) bertetangga di $G \square H$ jika dan hanya jika $u = v$ dan u_0 bertetangga dengan v_0 di H, atau $u_0 = v_0$ dan u bertetangga dengan v di G. Misalkan G merupakan suatu graf berorde n, dan H merupakan graf berorde m. Hasil kali Corona $G \odot H$ adalah suatu graf yang dibentuk dengan mengambil satu salinan dari G dan n Salinan dari H, dengan menghubungkan setiap titik pada salinan ke$-i$ dari H ke titik ke$-i$ dari G untuk $1 \leq i \leq n$.

2 Metodologi

Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penentuan batas bawah nilai ketakteraturan. Metode ini dilakukan dengan mengkaji struktur dari suatu graf. Kajian ini diperlukan untuk menetapkan posisi titik-titik dan sisi-sisi yang akan dilabeli sedemikian rupa sehingga bobot yang dihasilkan berbeda.
2. Penentuan batas atas nilai ketakteraturan. Metode ini dilakukan dengan mengkonstruksi suatu pelabelan pada graf yang diteliti sedemikian rupa sehingga pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan total tak teratur titik. Konstruksi dilakukan dengan memperhatikan derajat titik di grafnya. Labeli titik dan sisi di graf dengan pelabelan-k total tak teratur titik sedemikian sehingga titik-titik dengan derajat yang lebih kecil memperoleh bobot yang lebih kecil, serta sisi-sisi yang menempel pada titik yang berderajat lebih kecil memiliki bobot sisi yang lebih kecil. Hal ini dilakukan untuk mempertahankan label terbesar. Seandainya dapat ditunjukkan bahwa tidak terdapat pelabelan$-k$ total tak teratur titik pada G, maka batas bawah harus dinaikkan menjadi $k^0 = k+1$. Selanjutnya diselidiki kembali adanya pelabelan$-k^0$ total tak teratur titik pada graf tersebut.

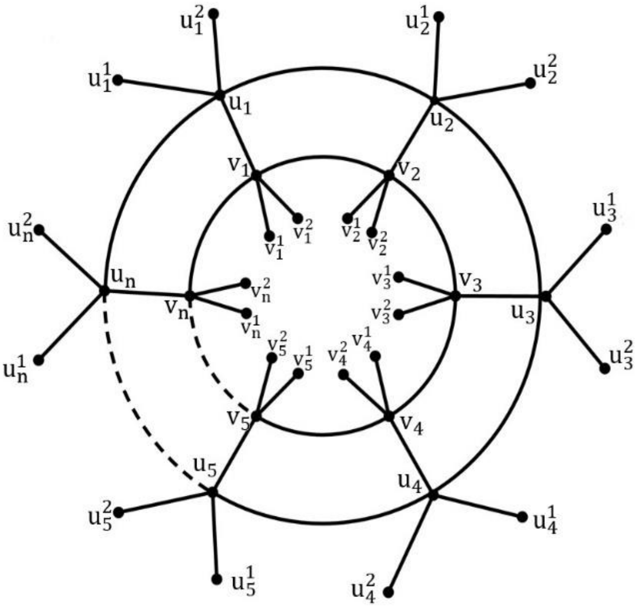
3 Hasil dan Pembahasan

Hasil penelitian penulis diberikan pada Teorema 3.1 berikut:

Teorema 3.1 Misalkan $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$ adalah graf hasil kali Corona antara prisma dengan komplemen graf lengkap berorde 2, maka

$$tvs\big((P_2 \square C_\mathrm{n}) \odot \overline{K_2}\big) = 2n + 1.$$

Bukti. Graf $(P_2 \square C_\mathrm{n}) \odot \overline{K_2}$ merupakan graf dengan himpunan titik $\{u_i | i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{v_i | i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{u_i^1 | i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{u_i^2 | i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{v_i^1 | i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{v_i^2 | i = 1,2,\cdots,n\}$ dan himpunan sisi $\{u_i u_i^1 | i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{u_i u_i^2 | i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{v_i v_i^1 | i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{v_i v_i^2 | i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{u_i v_i | i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{u_i u_{i+1} | i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{v_i v_{i+1} | i = 1,2,\cdots,n\}$, dengan $u_n u_{n+1} = u_n u_1$ .dan $v_n v_{n+1} = v_n v_1$.
Ilustrasi dari graf hasil kali Corona $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$ disajikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. Ilustrasi dari graf hasil kali Corona $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$

Graf hasil kali Corona $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$ memiliki $4n$ buah titik yang berderajat 1 dan $2n$ buah titik berderajat 4. Derajat terkecil dan terbesar dari $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$ berturut-turut adalah 1 dan 4. Maka berdasarkan Ketaksamaan (2.4), diperoleh

$$tvs\big((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\big) \geq \max\left\{\left\lceil\frac{1+4n}{1+1}\right\rceil, \left\lceil\frac{1+4n+2n}{5}\right\rceil\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad tvs\big((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\big) \geq \max\left\{\left\lceil\frac{4n+1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{6n+1}{5}\right\rceil\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad tvs\big((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\big) \geq \left\lceil\frac{4n+1}{2}\right\rceil$$

$$\Leftrightarrow \quad tvs\big((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\big) \geq 2n+1$$

Berdasarkan uraian ekivalensi di atas, diperoleh suatu ketaksamaan sebagai berikut.

$$tvs\big((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\big) \geq 2n+1 \qquad (3.1)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $tvs\big((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\big) \leq 2n+1$. Didefinisikan suatu pelabelan total f pada $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$ sebagai berikut.

$$f(u_i) = f(v_i) = f(u_i u_{i+1}) = f(v_i v_{i+1}) = f(u_i v_i) = 2n+1;$$
$$f(u_i^1) = f(u_i^2) = f(u_i u_i^1) = i;$$
$$f(v_i^1) = f(v_i^2) = f(v_i v_i^1) = n+i;$$
$$f(u_i^1 u_i^2) = i+1;$$
$$f(v_i^1 v_i^2) = n+i+1.$$

Berdasarkan pelabelan f di atas dapat diperoleh bobot pada titik-titik di $(C_n \square P_2) \odot \overline{K_2}$ sebagai berikut:

$$w_f(u_i^1) = f(u_i^1) + f(u_i u_i^1) = i + i = 2i;$$
$$w_f(u_i^2) = f(u_i^2) + f(u_i u_i^2) = i + (i+1) = 2i + 1;$$
$$w_f(v_i^1) = f(v_i^1) + f(v_i v_i^1) = (n+i) + (n+i) = 2(n+i);$$
$$w_f(v_i^2) = f(v_i^2) + f(v_i v_i^2) = (n+i) + (n+i+1) = 2n + 2i + 1 = 2(n+i) + 1;$$
$$\begin{aligned} w_f(u_i) &= f(u_i) + f(u_i u_i^1) + f(u_i u_2^1) + f(u_i u_{i+1}) + f(u_{i-1} u_i) + f(u_i v_i) \\ &= (2n+1) + (i) + (i+1) + (2n+1) + (2n+1) + (2n+1) = 4(2n+1) + 2i + 1 \\ &= 8n + 2i + 5; \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} w_f(v_i) &= f(v_i) + f(v_i v_i^1) + f(v_i v_2^1) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i-1} v_i) + f(u_i v_i) \\ &= (2n+1) + (n+i) + (n+i+1) + (2n+1) + (2n+1) + (2n+1) \\ &= 10n + 2i + 5. \end{aligned}$$

Dari uraian bobot-bobot titik di atas akan dibuktikan bahwa tidak ada dua titik yang memiliki bobot yang sama berdasarkan pelabelan f di $(C_n \square P_2) \odot \overline{K_2}$. Perhatikan bahwa dengan sifat-sifat bilangan bulat untuk setiap $i \neq j$ berimplikasi pada

(i). $2i \neq 2j$ yang mengakibatkan bobot $w_f(u_i^1) \neq w_f\left(u_j^1\right)$;
(ii). $2i + 1 \neq 2j + 1$ yang mengakibatkan bobot $w_f(u_i^2) \neq w_f\left(u_j^2\right)$;
(iii). $2n + 2i \neq 2n + 2j$ yang mengakibatkan bobot $w_f(v_i^1) \neq w_f\left(v_j^1\right)$;
(iv). $2n + 2i + 1 \neq 2n + 2j + 1$ yang mengakibatkan bobot $w_f(v_i^2) \neq w_f\left(v_j^2\right)$;
(v). $8n + 2i + 5 \neq 8n + 2j + 5$ yang mengakibatkan bobot $w_f(u_i) \neq w_f\left(u_j\right)$; dan
(vi). $10n + 2i + 5 \neq 10n + 2j + 5$ yang mengakibatkan bobot $w_f(v_i) \neq w_f\left(v_j\right)$,

sedangkan untuk setiap $i \in \{1,2,\dots,n\}$ dapat dilihat dengan jelas bahwa bobot $w_f(u_i^1) \in \{2,4,\dots,2n\}$, bobot $w_f(u_i^2) \in \{1,3,5,\dots,2n+1\}$, bobot $w_f(v_i^1) \in \{2n+2, 2n+4, \dots, 4n-2, 4n\}$, bobot $w_f(v_i^2) \in \{2n+1, 2n+3, \dots, 4n-1, 4n+1\}$, bobot $w_f(u_i) \in \{8n+7, 8n+9, \dots, 10n+5\}$, dan bobot $w_f(v_i) \in \{10n+7, 10n+9, \dots, 12n+5\}$. Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa untuk sembarang $i, j, k, l \in \{1,2,\dots,n\}$ terpenuhi $w_f(u_i^1) \neq w_f(u_j^2)$, $w_f(v_i^1) \neq w_f(v_j^2)$, dan $w_f(u_i^a) < w_f\left(v_j^b\right) < w_f(u_k) < w_f(v_l)$ untuk $a, b \in \{1,2\}$, dengan kata lain telah terbukti untuk setiap $x, y \in (C_n \square P_2) \odot \overline{K_2}$ terbukti bahwa $w_f(x) \neq w_f(y)$.

Penjelasan di atas memberikan gambaran bahwa pelabelan f yang telah didefinisikan tersebut menghasilkan bobot berbeda untuk setiap titik di $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$. Berdasarkan definisi maka pelabelan f merupakan pelabelan total tak teratur titik di $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$. Label terbesar yang memenuhi adalah $2n + 1$, yang digunakan pada titik u_i dan v_i juga pada sisi $u_i u_{i+1}$, $v_i v_{i+1}$, $u_i v_i$, dan $v_n^1 v_n^2$. Dengan demikian diperoleh ketaksamaan

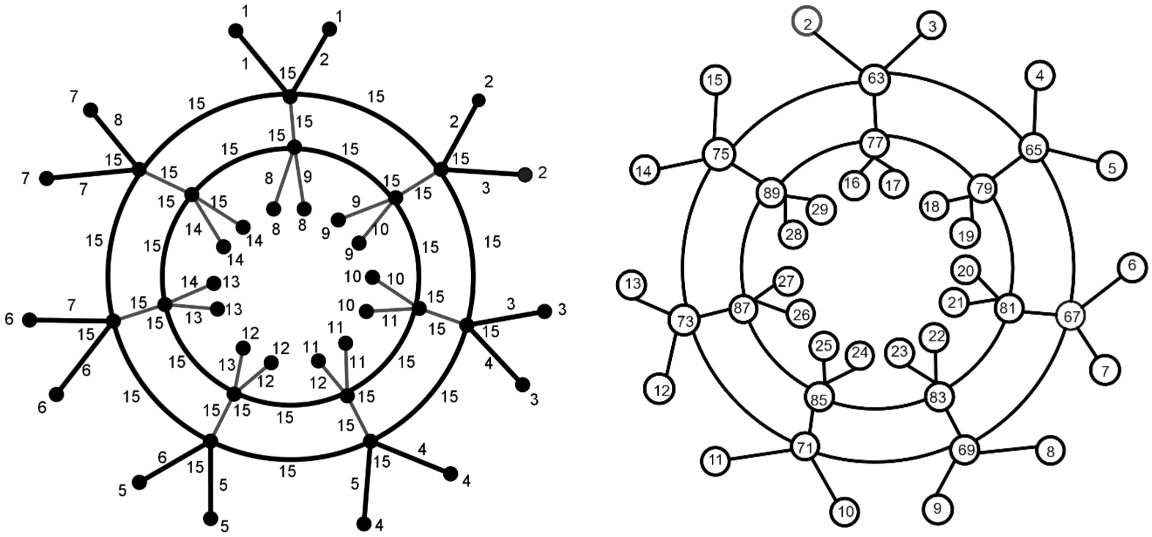
$$tvs\left((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\right) \leq 2n + 1. \qquad (3.2)$$

Berdasarkan Ketaksamaan (3.1) dan (3.2) dengan menggunakan teorema apit pada bilangan real dapat disimpulkan bahwa kesamaan berlaku yaitu:

$$tvs\left((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\right) = 2n + 1.$$

■

Ilustrasi dari pelabelan total tak teratur f pada graf $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$ diberikan pada Gambar 3.2 (a), sedangkan bobot pada setiap titik pada $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$ berdasarkan pelabelan pada bagian (a) diberikan pada bagian Gambar 3.2 (b).



(a) (b)

Gambar 3.2 (a) Ilustrasi pelabelan total tak teratur titik f pada graf $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$ untuk $n = 7$; (b) Bobot pada setiap titik pada $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$ berdasarkan pelabelan f

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bagian 3, diperoleh suatu batas bawah $tvs\big((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\big)$ dengan memperhatikan struktur grafnya, meliputi derajat titik-titiknya serta banyaknya titik pada graf tersebut. Juga telah dilakukan konstruksi suatu pelabelan total tak teratur titik pada $(P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}$ dengan mempertahankan label-labelnya sehingga label terbesar tidak melebihi batas bawah yang telah diperoleh sebelumnya. Dengan demikian, diperoleh suatu batas atas $tvs\big((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\big)$ dan batas bawah $tvs\big((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\big)$ dengan nilai sama, sehingga diperoleh suatu nilai eksak dari $tvs\big((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\big)$, yaitu $2n + 1$. Maka dapat disimpulkan bahwa $tvs\big((P_2 \square C_n) \odot \overline{K_2}\big) = 2n + 1$.

Referensi

Administrator, T.(2019). Workshop Big Data Menjawab Kebutuhan Penelitian di Era Revolusi Industri 4.0. Diakses April 22, 2020, website https://psikologi.ugm.ac.id/workshop-big-data-menjawab-kebutuhan-penelitian-di-era-revolusi-industri-4-0-2/

Bača, M., JendroĬ, S., Miller, M., dan Ryan, J., (2007). On irregular total labellings. *Discrete Math*. 307, 1378–1388.

Guo, J., Chen, X., Wang, Z., dan Yao, B. (2015). Total vertex irregularity strength of certain equitable complete m-partite graphs. *Ars Comb.*, *123*, 407-418.

Hedge, S. M. (2007). Labelled Graph and Its Application. *The International Conference on Graph Theory and Information Security*.

Jeyanthi, P., dan Sudha, A. (2016). Total vertex irregularity strength of corona product of some graphs. *J. Algorithms Comput.*, *48*(1), 127-140.

Krishnaa, A. (2016). Some Applications of Labelled Graphs. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, *37*, 209-2013.

Majerski,P. dan Przybylo, J. (2014). Total vertex irregularity strength of dense graphs. *J. Graph Th.*, *76*(1) 34-41.
Nurdin, Baskoro, E.T., Salman, A.N.M., dan Goas, N.N. (2010). On the total vertex irregularity strength of trees. *Discrete Math.*, *310*, 3043–3048.
Prasanna, N. L., Sravanthi, K., dan Sudhakar, N. (2014). Applications of Graph Labeling in Communication Networks. *Computer Science Journal*.
Przybylo, J. (2009). Liniear bound on the irregularity strength and the total vertex irregularity strength of graphs. *SIAM J. Discrete Math. 23*, 511–516.
Rajasingh., I. dan Annamma, V. (2015). Total vertex irregularity strength of 1-fault tolerant hamiltonian graphs. *Math. Comput. Sci.*, *9*(2) 151-160.
Ramdani, R., Salman, A.N.M., Assiyatun, H., dan Semaničová-Feňovcičová, Bača, M. (2016). On the total irregularity strength of disjoint union of arbitrary graphs. *Mathematical Reports*, *18*(68), 4, 469–482.
Ramdani, R. dan Ramdhani, M.A. (2018). Total vertex irregularity strength of comb product of two cycles. *MATEC Web of Conference*.
Ramdani, R., Salman, A.N.M., dan Assiyatun, H. (2015). An upper bound on the total vertex irregularity strength of the Cartesian product of P2 and an arbitrary regular graph. *Procedia Computer Science*, *74*, 105-111.
Ramdani, R., Ramdhani, M.A., dan Delilah, G.G.A. (2019). On the total vertex irregularity strength of comb product of cycle and path with order 3.*Journal of Physics: Conference Series*.
Ramdani, R., Salman, A.N.M., dan Assiyatun, H. (2019). On the total edge and vertex irregularitystrength of some graphs obtained from star. *J. Indones. Math. Soc, 25*(3), 314-324.
Susilawati, S., Baskoro, E.T., dan Simanjuntak, R. (2018). Total vertex irregularity strength of trees with maximum degree five. *Elect. J. Graph Th. Appl.*, *6*(2), 250-257.
Varkey, M.T.K dan Kumar, R.T.J. (2015). Even Graceful Labelling of a Class of Trees. *International Journal on Applications of Graph Theory in Wireless Ad hoc Networks and Sensor Networks(GRAPH-HOC)*, *7*(4).

Biografi Penulis

	Nama: Rismawati Ramdani NIP : 198605182009122004 Tempat, Tanggal lahir : Majalengka, 18 Mei 1986 Riwayat Pendidikan : S1 Matematika ITB tahun 2004-2008 S2 Matematika ITB tahun 2008-2009 S3 Matematika ITB tahun 2012-2016 SINTA ID : 6197858; Scopus ID: 55851423500 Google Scholar : https://scholar.google.co.id/citations?user=P9p1BXMAAAAJ&hl=id&oi=ao
	Nama: Esih Sukaesih NIP : 197903132009012007 Tempat, Tanggal lahir : Ciamis, 13 Maret 1979 Riwayat Pendidikan : S1 Matematika UNPAD 1997-2003 S2 Matematika ITB 2004-2007 S3 Matematika ITB 2011-2017 SINTA ID : 6170615

	Google Scholar : https://scholar.google.co.id/citations?hl=id&user=dIXU1AQAAAAJ
	Nama : Inne Syafrian Putri NIP : 199101122019032016 Tempat Tanggal lahir: Kapuh, 12 Januari 1991 Riwayat Pendidikan : S1 Pendidikan Matematika UNP 2009-2013 S2 Matematika ITB 2014-2016 SINTA ID : 6111197 Google Scholar : https://scholar.google.com/citations?user=FpREcoEAAAAJ&hl=id&oi=ao
	Nama : Salwa Nursyahida NIP : 199208162019032014 Tempat Tanggal lahir: Kuningan 16 Agustus 1992 Riwayat Pendidikan : S1 Pendidikan Matematika UPI 2009-2013 S2 Matematika ITB 2014-2016 SINTA ID : 6724709 Google Scholar : https://scholar.google.co.id/citations?hl=id&user=YqH7-qMAAAAJ