UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

“APLICACIONES DE LOS SISTEMAS MATRICIALES A LA DINÁMICA DE POBLACIONES”

Presentado por:

Rafael Salado Natera

E-8-100049

Profesor asesor:

Mgtr. Octavio Matos

Trabajo de grado presentado para optar por el título de Licenciatura en Matemática

Panamá, República de Panamá
2021

DEDICATORIA

A mi padre y al amor de mi vida

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Octavio Matos, mi asesor, por ser mi guía en este trabajo, por su ejemplo y por sus enseñanzas.

A los profesores que me han dictado clases a lo largo de la licenciatura, y en especial al profesor Vallarino y al profesor Daniel Vásquez, miembros del jurado calificador, habiendo sido para mí un privilegio, un honor y un placer haber sido su alumno.

A la Srta. Ana Sofía Salado, por su constante motivación y ánimos para que este trabajo se acabara.

A mis compañeros Jordan Martinez y Antonio Carrillo, que me acompañaron durante toda la licenciatura.

INDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se basa en el estudio y diseño de los modelos matriciales aplicados a procesos biológicos de poblaciones que dependen de varios factores y que poseen una dinámica poblacional continua, medida en el tiempo.

La dinámica de poblaciones es la especialidad de la ecología que se ocupa del estudio de las poblaciones, caracterizadas por parámetros como el número de individuos que la componen, estructura de la edad y sexo, natalidad y mortalidad, entre otros.

Los cambios que se producen en una población pueden ser modelados matemáticamente y así poder predecir el comportamiento de la población a lo largo del tiempo y determinar su importancia ecológica.

La modelización de la dinámica de poblaciones utilizando el álgebra ha demostrado su utilidad en diversas aplicaciones, como la gestión de recursos biológicos (por ejemplo, pesquerías), en la evaluación de las consecuencias ambientales de las acciones humanas y también en campos de la investigación médica relacionados con las infecciones y la dinámica de las poblaciones celulares.

Existen muchos modelos en dinámica de poblaciones. Los modelos discretos reciben este nombre porque sólo consideran el estado de la población objeto de estudio en un conjunto discreto de instantes de tiempo, es decir, en un conjunto de instantes espaciados en el tiempo, a diferencia de los modelos continuos, en los que el estado de la población se puede considerar en cualquier instante de tiempo.

En este trabajo vamos a considerar modelos en los que la población no queda representada por un sólo valor numérico, sino que está dividida en varios grupos (intervalos de edad) en función de distintos parámetros, como pueden ser edades, capacidad reproductiva o índice de supervivencia. Por lo tanto, se utiliza una variable diferente para cada grupo, que representa el número de individuos que hay en dicho grupo en cada instante de tiempo.

En nuestro caso estudiaremos la dinámica poblacional estableciendo grupos clasificados en intervalos de edad. La evolución de cada grupo vendrá descrita mediante una ecuación recursiva que proporciona el número de individuos de dicho grupo en el instante **t** a partir del número de individuos de cada uno de los grupos en el instante anterior **t-1**. Tendremos así una ecuación recursiva para cada grupo, es decir, un sistema de ecuaciones recursivas.

Matemáticamente hablando, el modelo objeto de estudio en este trabajo tendrá más de una dimensión. Utilizaremos el modelo de la dinámica de poblaciones más famoso y ampliamente utilizado, denominado modelo de Leslie en honor de su autor, el fisiólogo Patrick Holt Leslie (1900-1974).

Iniciamos este trabajo estudiando los conceptos básicos de matrices y determinantes. Dentro de las matrices describiremos los distintos tipos de matrices, así como las operaciones suma y multiplicación de matrices.

En cuanto a los determinantes definiremos el término de cofactor, que lo utilizaremos para el cálculo de la matriz de adjuntos, que a su vez será empleada para el cálculo de la inversa de una matriz.

La teoría sobre matrices y determinantes la utilizaremos para el proceso de diagonalización de una matriz, donde definiremos conceptos como autovalor (o valor propio) y autovector (o vector propio).

En el capítulo 2 iniciaremos con el desarrollo de la matriz de Leslie, matriz objeto de estudio en este trabajo. Se describirá el proceso de creación de dicha matriz, así como el cálculo de sus valores y vectores propios, que nos darán información sobre la dinámica poblacional de las hembras de una determinada especie, obteniendo información biológica relevante.

Estudiaremos el comportamiento en el límite para dar un cuadro general de la dinámica del proceso de crecimiento y se presentan algunos ejemplos que ilustran la aplicación del modelo objeto de estudio.

CAPITULO 1

Matrices: conceptos básicos

En el álgebra, el estudio de las matrices nos ayuda a ordenar datos, así como a manejarlos y utilizarlos de manera fácil. En el tema que nos ocupa en este estudio las matrices serán utilizadas como herramienta fundamental, siendo utilizadas para describir sistemas de ecuaciones y registrar datos que van a depender de varios parámetros.

Por otro lado, utilizaremos los determinantes para la resolución de sistemas de ecuaciones, para identificar si una matriz tiene inversa y para determinar si un conjunto de n vectores es linealmente dependiente.

1.1. Teoría de matrices.

Definición 1.1. Una matriz es un arreglo rectangular de números reales (a_{ij}) dispuestos en "m" filas y en "n" columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Decimos que una matriz es de orden m×n si consta de m filas y n columnas. El conjunto de todas las matrices de orden m × n se denota $M_{m\times n}$.

El elemento a_{ij} pertenece a la i–ésima fila y a la j–ésima columna. Podemos denotar una matriz de forma abreviada como $A = (a_{ij})$.

Una matriz es rectangular si m ≠ n, y cuadrada si m = n (ver definición 1.5).

La **dimensión** de una matriz es el producto m × n

Ejemplo 1.1. La matriz $A=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ es una matriz de orden 3x2, donde sus filas son $\begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 9 & 8 \end{pmatrix}$ y sus columnas $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, siendo sus elementos a_{11}= 7, a_{12}= 5, a_{21}= -3, a_{22}= 4, a_{31}= 9 y a_{32}= 8

1.2. TIPOS DE MATRICES:

a) **Matriz fila**. Es aquella que sólo tiene una fila. Ejemplo: $\begin{pmatrix} 12 & 2 & 13 & 9 \end{pmatrix}$

b) **Matriz columna**. Es una matriz que sólo tiene una columna. Ejemplo: $\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) **Matriz triangular**. Es aquella en la que todos los elementos que están por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos. Los elementos de la diagonal principal son aquellos a_{ij} donde i = j.

Matriz triangular superior: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Matriz triangular inferior: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) **Matriz traspuesta.** Es aquella que se obtiene cambiando filas por columnas. Ver definición 1.4.

e) **Matriz simétrica**. Es aquella matriz cuadrada que tiene los mismos elementos por encima y por debajo de la diagonal principal.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) **Matriz antisimétrica**. Es aquella matriz cuadrada que tiene los mismos elementos por encima y por debajo de la diagonal principal, pero de signo opuestos.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

g) **Matriz diagonal**. Es una matriz cuadrada donde todos los elementos, no pertenecientes a la diagonal principal, son nulos.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

h) **Matriz identidad**: Es aquella matriz cuadrada con todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1 y el resto de los elementos de la matriz 0 (ver definición 1.6.).

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) **Matriz nula o cero:** Es aquella matriz que tiene todos sus elementos nulos.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 1.2. (Suma de matrices). Sean $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$ dos matrices de orden m x n. La suma de las matrices A y B es otra matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ de orden m x n en donde cada elemento de la matriz C es la suma de los elementos correspondientes de A y B; es decir:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall\ i, j$$

$$A + B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = C$$

Ejemplo 1.2. Sean dos matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 3+3 & 7+4 \\ 2+0 & 1+1 & 4+4 \\ 3+1 & 4+4 & 8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 11 \\ 2 & 2 & 8 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Definición 1.3. (Producto de matrices). Sean las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ de orden m x n y la matriz $B = (b_{ij})_{n\times p}$ de orden n x p, definimos el producto de A por B como el producto escalar de la i-ésima fila por la j-ésima columna, y se obtiene otra matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$ de orden m x p. Es decir:

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}\, C_{hj} \qquad i = 1; \dots ; m; \quad j = 1; \dots ; r$$

Ejemplo 1.3. Sean dos matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}_{2\times3}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{3x2}$, entonces el producto de *A* por *B* viene dado por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot3+1\cdot1+4\cdot4 & 2\cdot4+1\cdot4+4\cdot3 \\ 3\cdot3+4\cdot1+8\cdot4 & 3\cdot4+4\cdot4+8\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 24 \\ 45 & 54 \end{pmatrix}$$

Definición 1.4. (Matriz traspuesta). Llamamos matriz traspuesta de *A*, denotada como A^t a la matriz que se obtiene intercambiando las filas por las columnas de la matriz *A*.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ siendo la matriz traspuesta de *A*, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

1.3. Propiedades de las operaciones con matrices:

1. $(A^t)^t = A$

2. $(A + B)^t = A^t + B^t$

3. $A + B = B + A$ (ley conmutativa)

4. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ley asociativa)

5. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ donde α es un número real

6. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ siendo α es un número real

7. La multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir no siempre se tiene que A·B = B·A

8. A· (B · C) = (A · B)· C (ley asociativa).

9. A · (B + C) = A · B + A · C (ley distributiva).

Definición 1.5. Decimos que una matriz *A* es cuadrada si tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir m = n, siendo una matriz de orden m (también de orden n).

Ejemplo 1.5. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 7 & 4 \\ -8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 3 y la matriz

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2.

Definición 1.6. Una matriz identidad de orden n, denotada I_n, es una matriz de la forma

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.6. La matriz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz identidad de orden 3.

1.4. Propiedades de la matriz identidad

Sean A e I_n dos matrices cuadradas del mismo orden. Se cumple que $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Definición 1.7. Una matriz cuadrada A es regular o inversible si existe una matriz B tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

La matriz B con esta propiedad se llama la inversa de A y se denota por A^{-1}.

Ejemplo 1.7. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y su matriz inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

donde $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema 1.1. La inversa de una matriz, si existe, es única.

Demostración:

Si B es una matriz inversa de A se cumple que $B \cdot A = I_n$, entonces,

$$B = B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot A^{-1}) = (B \cdot A \cdot)A^{-1} = I_n \cdot A^{-1} = A^{-1},$$

demostrando que $B = A^{-1}$.

1.5. Propiedades de la inversa de una matriz:

Sean A y B dos matrices inversibles, entonces se cumple:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Definición 1.8. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se denomina menor M_{ij} a la submatriz de (n–1)×(n–1) que se obtiene a partir de A eliminando la fila i y la columna j.

Ejemplo 1.8. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, su menor $M_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

1.6. Determinantes

Definición 1.9. Se denomina cofactor C_{ij} del elemento a_{ij} al producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante de la matriz menor M_{ij}:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$$

Definición 1.10. Sea $f : M_n \rightarrow \mathbb{R}$, definimos el determinante de una matriz A, que denotamos como det(A) o |A|, como una función que le asigna a una matriz de orden n un número real llamado determinante de la matriz de la siguiente forma:

- Sea la matriz de orden 1, $A = (a)$. Entonces $|A| = a$

- Sea la matriz de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

- Sea la matriz de orden 3 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Entonces

  $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

- Sea *A* una matriz de orden n. El determinante de A puede calcularse utilizando los cofactores de cualquier fila o columna.

-

a) **Desarrollo por fila i**:

$$\det(A) = a_{\mathrm{i}1}C_{i1} + a_{\mathrm{i}2}C_{i2} + \cdots + a_{\mathrm{in}}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}$$

b) **Desarrollo por columna** j:

$$\det(A) = a_{1\mathrm{j}}C_{1j} + a_{2\mathrm{j}}C_{2j} + \cdots + a_{\mathrm{nj}}C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}$$

Ejemplo 1.10.

a) Cálculo del determinante de una matriz de orden 2:

$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$ = 1·4 - 3·2 = 4 – 6 = -2

b) Cálculo del determinante de una matriz de orden 3:

$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$ = 1·4·3 + 3·5·2 + 1·0·2 – 2·4·2 – 1·3·3 – 0·5·1 = 12 + 30 + 0 – 16 – 9 – 0 = 17

c) Cálculo del determinante de una matriz de orden 4:

Para resolver el siguiente determinante de orden 4, elegiremos la primera fila ya que contiene dos elementos nulos que nos simplificarán los cálculos.

$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$ = 1·C_{11} + 0· C_{12} + 2· C_{13} + 0· C_{14}

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = -51$$

Definición 1.11. (Matriz adjunta) Dada una matriz cuadrada A, su matriz de adjuntos adj(A) (o matriz de cofactores) es la resultante de sustituir cada término a_{ij} de A por su cofactor C_{ij}.

Ejemplo 1.11.

a) Calcular la matriz adjunta de $A= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Calcularemos en los cofactores de la siguiente manera:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det (M_{ij})$$

$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det (M_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot \det (3) = 3$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det (M_{12}) = (-1)^{1+2} \cdot \det (-2) = 2$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det (M_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot \det (2) = -2$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det (M_{22}) = (-1)^{2+2} \cdot \det (1) = 1$

La matriz adjunta de A, adj(A) viene dada por:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcular la matriz adjunta de A= $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Calculando los cofactores tenemos:

$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det (M_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = -4$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det (M_{12}) = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 2$

$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det (M_{13}) = (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 0$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det (M_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 0$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det (M_{22}) = (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 16$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det (M_{23}) = (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 8$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det (M_{31}) = (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$

$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det (M_{32}) = (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 8$

$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det (M_{33}) = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

La matriz de adjunta de A es:

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7. Propiedades de los determinantes:

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n y k ϵ $\mathbb{R}$. Sea λ un escalar.

1. $|A| = |A^t|$

2. $|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$

3. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

4. Una matriz A es inversible si y sólo si su determinante es distinto de cero, $|A| \neq 0$; en este caso $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

5. Si se permutan dos filas o dos columnas en un determinante, el éste cambia de signo.

6. Si una matriz A tiene dos filas o dos columnas iguales, entonces el valor de su determinante es cero.

7. Si B es la matriz que se obtiene multiplicando una columna de A por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces det $(B) = \lambda \cdot$ det (A)

8. Si en un determinante se le suma a una fila (columna) otra fila (columna) multiplicada por una constante, entonces el valor del determinante no varía.

1.8. Cálculo de la inversa de una matriz por el método de los determinantes (o por la matriz adjunta)

La inversa de una matriz viene dada por la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(\mathrm{adj}(A)\right)^{t}$$

Donde $|A| = \det(A)$ es el determinante de la matriz A

$\mathrm{adj}(A)$ es la matriz adjunta de A

$\left(\mathrm{adj}(A)\right)^{t}$ es la traspuesta de la matriz adjunta de A

Ejemplo 1.12. Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Paso 1. Calculamos el determinante de la matriz A.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 6 - 2 + 16 + 9 - 2 = 3$$

Como el $\det(A) \neq 0$ existe inversa

Paso 2. Hallamos la matriz adjunta de A.

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det(M_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -13$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det(M_{12}) = (-1)^{1+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 5$$

$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det(M_{13}) = (-1)^{1+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -7$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det(M_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 7$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det(M_{22}) = (-1)^{2+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -2$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det(M_{23}) = (-1)^{2+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 4$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det(M_{31}) = (-1)^{3+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 11$

$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det(M_{32}) = (-1)^{3+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4$

$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det(M_{33}) = (-1)^{3+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 5$

La matriz de adjunta de *A* es:

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -13 & 5 & -7 \\ 7 & -2 & 4 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Paso 3. Calculamos la matriz traspuesta de la matriz adjunta de *A*.

$$\left(\mathrm{adj}(A)\right)^t = \begin{pmatrix} -13 & 7 & 11 \\ 5 & -2 & -4 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Paso 4. La matriz inversa de *A* es:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -13 & 7 & 11 \\ 5 & -2 & -4 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-13}{3} & \frac{7}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

1.9. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Definición 2.1. Sean *A* y *B* dos matrices de orden n. Decimos que las matrices *A* y *B* son semejantes si existe una matriz inversible *P* tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Algunas propiedades de las matrices semejantes son:

1. Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico (y, por lo tanto, los mismos autovalores). Ver definición 2.4 y definición 2.8.

2. Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante.

3. Si dos matrices *A* y *B* son semejantes, entonces también lo son sus potencias A^n y B^n.

Definición 2.2. Una matriz *A* es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal *D*, es decir, si existen una matriz diagonal *D* y una matriz *P* inversible tales que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Donde la matriz D viene dada por:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Definición 2.3. Una matriz cuadrada A, n × n, se dice diagonalizable si existe una base de C^n (es decir n vectores linealmente independientes) formada exclusivamente con vectores propios de A (ver definición 2.7).

Teorema 2.1. Si A es diagonalizable, entonces para todo m ≥ 1.

$$A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1},$$

donde

$$D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

Demostración:

Sea A una matriz diagonalizable donde $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, con D diagonal, por tanto, si multiplicamos $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ m veces tenemos

$$A^m = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \ldots (P \cdot D \cdot P^{-1})$$

$$A^m = P \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot P^{-1} \ldots\ P \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$A^m = P \cdot D \cdot I_n \cdot D \cdot P^{-1} \ldots\ P \cdot D \cdot I_n \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1}$$

Definición 2.4. Sea A una matriz de orden n. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor (o valor propio) de A y que $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, es un autovector (o vector propio) de A asociado, si

$$A \cdot u = \lambda \cdot u$$

Llamaremos subespacio propio asociado a λ al conjunto de los autovectores de A asociados al mismo autovalor λ, incluyendo el vector nulo y que denotamos como $S(\lambda)$.

La condición $u \neq 0$ es necesaria para evitar el caso trivial: cualquier número real verifica la condición $A \cdot 0 = \lambda \cdot 0$. Por tanto, $u = 0$ no es ningún vector propio. Sin embargo, los valores propios si pueden tomar el valor 0.

1.10. Propiedades de los autovalores:

a. Autovalores distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, no tienen autovectores comunes: $A_{\lambda 1} \cap A_{\lambda 2} = \{0\}$. Es decir, un autovector u admite sólo un autovalor. (El reciproco, en general, no es cierto).
b. Un valor propio tiene asociado infinitos vectores propios.
c. A y A^t tienen los mismos autovalores.
d. Si λ es autovalor de A, $k \cdot \lambda$ es un autovalor de $k \cdot A$
e. Si λ es un autovalor de A, $\lambda - k$ es un autovalor de $A - k \cdot I$.
f. Si λ es un autovalor de A, y A es regular, $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}.
g. Si λ es autovalor de A, entonces λ^k es autovalor de A^k.

Teorema 2.2. El número real λ es un autovalor de A si y sólo si

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

Definición 2.6. (Subespacio propio) El conjunto de todos los autovectores asociados a un autovalor λ junto con el vector 0, denotado A_λ, se le llama subespacio propio asociado al autovalor λ.

$$A_\lambda = \{u \,/\, A \cdot u = \lambda \cdot u\} \cup \{0\}$$

Por otro lado, el subespacio $S(\lambda)$ es el conjunto de soluciones, incluyendo el vector nulo, del sistema lineal homogéneo

$$(A - \lambda I_n)u = 0$$

La dimensión del subespacio $S(\lambda)$ viene dada por

$$\dim S(\lambda) = n - \text{rango}\,(A - \lambda I_n)$$

Definición 2.7. Supongamos que $\lambda \in \mathbf{K}$ es un autovalor o valor propio de A, es decir, existe $u \in V$, $u \neq 0 \,/\, A \cdot u = \lambda \cdot u$. Podemos escribir $A \cdot u - \lambda \cdot u = 0$. Sacando factor común tenemos

$$(A - \lambda I)\, u = 0.$$

Al vector u se le llama autovector o vector propio asociado al autovalor λ.

Definición 2.8. Se llama **polinomio característico** de la matriz A al polinomio de orden n dado por

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

donde las raíces del polinomio p_A son los valores propios de A.

Ejemplo 2.1. Calcular los autovalores y los autovectores de la siguiente matriz de orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

a) En primer lugar, tenemos que hallar el polinomio característico de la matriz. Para ello, se debe resolver el siguiente determinante:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot (2 - \lambda)$$

b) Para calcular los valores propios debemos resolver la ecuación:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

$$(1 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ y } \lambda_2 = 2$$

Por lo tanto, la matriz A tiene dos autovalores o valores propios 1 y 2.

c) Calcularemos los vectores propios o autovectores. Para ello, debemos resolver el siguiente sistema homogéneo para cada autovalor:

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot u = 0$$

i) Para $\lambda = 1$

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot u_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 5 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5x + y = 0$$

$$y = -5x$$

Si $x = \alpha$ tenemos:

$$u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5\alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

luego el vector propio $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

ii) Para $\lambda = 2$

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot u_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 \\ 5 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ 5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde x = 0

Si y = α tenemos:

$$u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

luego el vector propio $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Los vectores propios de la matriz A son $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Ejemplo 2.2. Calcular los autovalores y los autovectores de la siguiente matriz de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Hallaremos el polinomio característico de la matriz. Resolvemos el determinante:

$$\det (A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\cdot[\,(1-\lambda)(4-\lambda)\;+2]$$

$$=(2-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 5\cdot\lambda + 6)$$

$$=(2-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 5\cdot\lambda + 6)$$

$$=(2-\lambda)\cdot(\lambda-3)\cdot(\lambda-2)$$

b) Para hallar los valores propios resolvemos la ecuación:

$$(2-\lambda)\cdot(\lambda-3)\cdot(\lambda-2) = 0$$

Las soluciones son $\lambda_1 = 3$ (raíz simple) y $\lambda_2 = 2$ (raíz doble).

Por lo tanto, la matriz *A* tiene dos autovalores o valores propios 3 y 2.

c) Para encontrar los vectores propios resolvemos el siguiente sistema homogéneo para cada autovalor:

$$(A-\lambda\cdot I)\cdot u = 0$$

i) Para $\lambda = 3$

$$(A-\lambda\cdot I)\cdot u_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3 & -1 \\ 0 & 2 & 4-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x+y \\ -2y-z \\ 2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $-x + y = 0 \Rightarrow x = y$

$2y + z = 0 \Rightarrow z = -2y$

Si $x = y = \alpha \Rightarrow z = -2\alpha$

$$u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

luego el vector propio $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

ii) Para $\lambda = 2$

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot u_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ -y - z \\ 2y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $y = 0 \Rightarrow z = 0$

Si $x = \alpha$ tenemos:

$$u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{luego el vector propio } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios de la matriz A son $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Definición 2.9. (Multiplicidad algebraica) Si λ es una raíz del polinomio característico de *A* de multiplicidad α, se dirá que λ es un autovalor de orden α de *A*.

A α se le llama multiplicidad algebraica de λ y se suele notar $m_a(\lambda)$.

El polinomio p_A es un polinomio de grado n donde por el Teorema Fundamental del Algebra va a tener n raíces, no necesariamente diferentes. El número de veces que una raíz se repita hace referencia a su multiplicidad.

Definición 2.10. (Multiplicidad geométrica) Se llama multiplicidad geométrica de λ, y se denota $m_g(\lambda)$, al número de autovectores linealmente independientes asociados a λ, o lo que es lo mismo, a $\dim(A_\lambda)$.

La multiplicidad geométrica del subespacio propio asociado a un autovalor no tiene por qué ser igual a la multiplicidad algebraica del autovalor.

Si λ es un valor propio de una matriz cuadrada A de orden n, entonces

$$1 \leq \text{multiplicidad geométrica de } \lambda \leq \text{multiplicidad algebraica de } \lambda.$$

Ejemplo 2.3. Calcularemos los valores propios, los autovalores y las multiplicidades algebraica y geométrica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcularemos el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot I) = (1-\lambda)^3$$

b) Calculamos los valores propios resolviendo la ecuación

$$\det(A - \lambda \cdot I) = (1-\lambda)^3 = 0$$

La matriz A tiene un único valor propio $\lambda_1 = 1$ cuya multiplicidad algebraica es 3.

c) Para calcular los vectores propios resolvemos el siguiente sistema homogéneo:

Para $\lambda = 1$

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot u_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y + 2z \\ -z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $z = 0 \Rightarrow y = 0$

Si $x = \alpha$ tenemos,

$$u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego el vector propio $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hemos obtenido un único vector propio por lo que la multiplicidad geométrica de $\lambda=1$ es 1.

Veamos de otra forma cómo podemos calcular la multiplicidad geométrica de λ:

$$\begin{aligned} \text{multiplicidad geométrica de } \lambda &= n - \text{rango } (A - \lambda I) \\ &= 3 - \text{rango } (A - 1 \cdot I) \\ &= 3 - \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 - 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Lema 1.2. Sea A una matriz cuadrada de orden n; las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Multiplicidad geométrica de (λ) = multiplicidad algebraica de (λ), para cada valor propio λ de A.

2. La suma de las multiplicidades geométricas de los valores propios de A es igual a n.

Teorema 2.3. Sea *A* una matriz cuadrada de orden n. A es diagonizable, si y sólo si,

$$\text{multiplicidad geométrica}(\lambda_i) = \text{multiplicidad algebraica}(\lambda_i)$$

para todo valor propio λ_i de A, con i = 1, 2, 3, … , m

1.11. Proceso de diagonalización

Para llevar a cabo la diagonalización de una matriz deberemos seguir los siguientes pasos de forma ordenada.

Paso 1. Calcularemos el polinomio característico haciendo det $(A - \lambda \cdot I)$

Paso 2. Una vez obtenido el polinomio característico, calculamos sus raíces, que serán los valores propios. De esta forma obtenemos también la multiplicidad algebraica.

Si alguna de las raíces del polinomio característico es compleja, la matriz no será diagonalizable en $\mathbb{R}$ aunque si puede serlo en $\mathbb{C}$**.**

Paso 3. Calculamos la multiplicidad geométrica**:**

multiplicidad geométrica de λ = n – rango $(A - \lambda I)$

Paso 4. Si la multiplicidad algebraica es igual a la multiplicidad geométrica, la matriz es diagonalizable. Construiremos una matriz diagonal D cuya diagonal está formada por los valores propios, repetidos cada uno según su multiplicidad.

Paso 5. Calculamos los vectores propios para cada valor propio resolviendo el sistema homogéneo,

$$(A - \lambda_i \cdot I) \cdot u_i = 0$$

Paso 6. Construiremos la matriz de paso P cuyas columnas están formadas por los vectores propios, cumpliéndose,

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

o bien

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$$

Ejemplo 2.4. Diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Paso 1. Calcularemos el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(4-\lambda) + 6 + 6 - 3\cdot(3-\lambda) - 6\cdot(2-\lambda) - 2\cdot(4-\lambda)$$

$$= 24 - 26\cdot\lambda + 9\cdot\lambda^2 - \lambda^3 + 12 - 9 + 3\cdot\lambda - 12 + 6\cdot\lambda - 8 + 2\cdot\lambda$$

$$= 7 - 15\cdot\lambda + 9\cdot\lambda^2 - \lambda^3$$

Paso 2. Calculamos los valores propios resolviendo la ecuación:

$$7 - 15\cdot\lambda + 9\cdot\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

$$(\lambda - 7)\cdot(\lambda - 1)^2 = 0$$

Siendo los valores propios λ_1=7 y λ_2=1 (doble) de donde deducimos que la multiplicidad algebraica de λ_1=7 es 1 y la multiplicidad algebraica de λ_2=1 es 2.

Paso 3. Calcularemos la multiplicidad geométrica:

La multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 3 -$ rango $(A - 7\cdot I)$, donde

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2-7 & 1 & 1 \\ 2 & 3-7 & 2 \\ 3 & 3 & 4-7 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

Por lo tanto, la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 3 - 2 = 1$

La multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 3 - \text{rango}\,(A - 1\cdot I)$, donde

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-1 & 2 \\ 3 & 3 & 4-1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

Por lo tanto, la multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 3 - 1 = 2$

Paso 4. Las multiplicidades algebraica y geométrica de los autovalores son:

Valores propios	Multiplicidad algebraica	Multiplicidad geométrica
$\lambda_1=7$	1	1
$\lambda_2=1$	2	2

Como la multiplicidad algebraica es igual a la geométrica, la matriz A es diagonalizable.

Crearemos la matriz diagonal D cuya diagonal está formada por los valores propios:

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 5. Calcularemos los vectores propios.

Para $\lambda_1 = 7$: Resolvemos el sistema homogéneo $(A - 7 \cdot I) \cdot u_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5x + y + z \\ 2x - 4y + 2z \\ 3x + 3y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5x + y + z \\ x - 2y + z \\ 3x + 3y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -5x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} -5x + y = -z \\ x - y = -z \end{array}\right\} -4x = -2z \qquad x = \frac{1}{2} z$$

Si $x = \alpha$ y $z = 2 \cdot \alpha$ $\qquad$ $y = x + z = \alpha + 2 \cdot \alpha = 3 \cdot \alpha$

$$u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

luego el vector propio $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = 1$: Resolvemos el sistema homogéneo $(A - 1 \cdot I) \cdot u = 0$

En este caso, como la multiplicidad geométrica es 2, vamos a obtener 2 vectores propios.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x + 2y + 2z \\ 3x + 3y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y + z = 0$$

Si y = α y z = β entonces x = −α −β

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego el subespacio vectorial estará formado por los vectores propios $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Paso 6. Construiremos la matriz de paso *P* con los tres vectores propios:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es la matriz inversa de *P*, se verifica que:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.12. Potencia enésima de una matriz

1.13.

Ejemplo 2.5. Calcular la potencia 10 de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Por el teorema 2.1. si una matriz A es diagonalizable, entonces para todo n ≥ 1.

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

En nuestro caso n=10, entonces:

$$A^{10} = P \cdot D^{10} \cdot P^{-1}$$

donde $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

siendo $D^{10} = \begin{pmatrix} 7^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{10} \end{pmatrix}$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{10}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7^{10} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A^{10}=\begin{pmatrix}7^{10} & -1 & -1\\ 2\cdot 7^{10} & 1 & 0\\ 3\cdot 7^{10} & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A^{10}=\begin{pmatrix}47079209 & 47079208 & 47079208\\ 94158416 & 94158417 & 94158416\\ 141237624 & 141237624 & 141237625\end{pmatrix}$$

1.13. DESARROLLO DEL MODELO LESLIE

Para desarrollar el modelo Leslie vamos a dividir a la población de estudio en grupos clasificados por edades y cada uno de ellos con características similares.

Debemos definir un modelo que describa el comportamiento de cada grupo de edad a lo largo del tiempo. Para simplificar el proceso utilizaremos hipótesis sencillas y generales entre las que destacamos las siguientes:

1. **Los periodos de grupos de cada edad son iguales**. Supongamos que tenemos una población agrupada en tres grupos de edad: crías (de 0 a 5 años), jóvenes (de 5 a 10 años) y adultos (de 10 a 15 años), donde la longitud de cada periodo es igual a 5 años.

   Debemos definir un vector en el que se recoja la población inicial de individuos que pertenece a cada grupo de edad.

   Supongamos que conocemos el vector inicial $P_0 = \begin{pmatrix} C_0 \\ J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$ donde

   C_0 = número de crías iniciales

   J_0 = número de jóvenes iniciales

   A_0 = número de adultos iniciales

2. **Todos los individuos de cada grupo son iguales** (especialmente lo que hace referencia a la natalidad y a la supervivencia). La tasa de mortalidad será mayor entre los individuos de mayor edad que entre los más jóvenes. La tasa de fecundidad (o fertilidad) indica el ritmo

promedio al que se reproducen crías, jóvenes y adultos, respectivamente y depende también de la edad (por ejemplo, las hembras demasiado jóvenes no podrán tener descendencia en los primeros estadios de su vida).

3. **Los recursos disponibles son ilimitados.** El sistema cuenta con recursos suficientes para sostener el crecimiento natural que pueda darse en la población.

4. **El número de hembras es igual al número de machos.** Trabajaremos con una población sólo de hembras. En la mayoría de las especies la cantidad de machos es prácticamente la misma que la de hembras. Y en lo que respecta a la reproducción, el papel determinante es jugado por las hembras y no por los machos.

5. **La población está aislada,** por lo que no se dan movimientos migratorios que afecten a la evolución de los distintos grupos de edad.

Por lo tanto, el modelo de Leslie va a describir el crecimiento de la parte femenina de una población clasificando a las hembras por edades en intervalos de igual número de años.

Desarrollaremos un modelo matricial que describa el comportamiento de la población de hembras:

Sea a_i la tasa de natalidad de las hembras del grupo de edad i

Sea b_i la tasa de supervivencia de las hembras del grupo de edad i

Teniendo en cuenta las tasas de natalidad y de supervivencia, el número de crías, jóvenes y de adultos que tendremos al cabo de un periodo de tiempo será:

$$C_1 = a_1 \cdot C_0 + a_2 \cdot J_0 + a_3 \cdot A_0$$

$$J_1 = b_1 \cdot C_0$$

$$A_1 = b_2 \cdot J_0$$

Por lo tanto:

- La población de crías C_1 transcurrido un periodo de tiempo está formada únicamente por las que han sido engendradas por crías, jóvenes o adultos del recuento anterior.

- La población de jóvenes J_1 estará formada por las antiguas crías que han promocionado a jóvenes transcurridos un periodo de tiempo.

- La población de adultos A_1 estará formada únicamente por los jóvenes que han promocionado a adultos transcurrido un periodo de tiempo. Todos los individuos pasan a la siguiente clase de edad excepto los adultos, que morirán.

En términos matriciales este modelo con tres clases de edad puede representarse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_n \\ J_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

Donde L = $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de Leslie.

En el caso general de que tengamos n grupos de edad, la matriz de Leslie viene definida de la siguiente manera:

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 2

2.1. GENERALIDADES DEL MODELO LESLIE

Describiremos algunas de las propiedades matemáticas más importantes de los modelos de Leslie, sobre todo en lo referente al valor propio dominante y su vector propio asociado.

Siguiendo con el ejemplo de una población estructurada en tres sectores de edad, cada uno de ellos de igual tamaño correspondiente a 5 años, estableceremos las siguientes tasas de fecundidad y de supervivencia de casa intervalo de edad de la siguiente manera:

a) Tasas de fecundidad $\{\frac{1}{12}, 8, 10\}$

b) Tasas de supervivencia $\{\frac{1}{48}, \frac{1}{10}\}$

Con los datos anteriores definiremos la matriz de Leslie. Pretendemos estudiar la evolución temporal de una población con estas características. En primer lugar, estableceremos las ecuaciones que describen como se ha modificado el tamaño de cada uno de los sectores de edad (P^1, P^2, P^3) en el momento de la primera observación (es decir, en nuestro ejemplo al cabo de 5 años):

$$P_1^{(1)} = \frac{1}{12} \cdot 144 + 8 \cdot 60 + 10 \cdot 20 = 692$$

$$P_2^{(1)} = \frac{1}{48} \cdot 144 = 3$$

$$P_3^{(1)} = \frac{1}{10} \cdot 60 = 6$$

Los superíndices que afectan a cada uno de los sectores de edad hacen referencia al momento en que se produce la observación, por lo que $P_1^{(1)}$ significa que estamos midiendo el tamaño del i-esimo sector al cabo de 1 unidad de tiempo (5 años). Escrito en términos

matriciales, el sistema de ecuaciones anterior es el siguiente: $P^{(1)} = L \cdot P^{(0)}$, donde

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 8 & 10 \\ \frac{1}{48} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

Supongamos que queremos conocer cómo ha evolucionado esta población transcurridos 50 años (es decir, transcurridos 10 periodos de tiempo de 5 años: es decir, queremos calcular el vector $P^{10)}$). En términos de la población inicial $P^{(0)}$, se tiene en general:

$$P^{(\mathrm{n})} = L^{(n)} \cdot P^{(0)}$$

En nuestro caso particular, bastará con calcular la décima potencia de la matriz L para obtener $P^{(10)}$.

Para ello nos serviremos del hecho de que la matriz de Leslie L es diagonizable, esto es, admite una descomposición de la forma $L = Q \cdot D \cdot Q^{-1}$, donde D es una matriz diagonal cuyos únicos elementos son los valores propios de L, Q es una matriz invertible cuyas columnas son vectores propios asociados (de forma ordenada) a los valores propios de L y donde Q^{-1} denota la matriz inversa de Q.

Sea la matriz $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 8 & 10 \\ \frac{1}{48} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$. Calcularemos los valores y los vectores propios de L.

Calcularemos el polinomio característico haciendo det$(L - \lambda \cdot I)$ = $\begin{vmatrix} \frac{1}{12} - \lambda & 8 & 10 \\ \frac{1}{48} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & -\lambda \end{vmatrix}$

$$= \lambda^{2} \cdot (\frac{1}{12} - \lambda) + \frac{1}{48} + \frac{\lambda}{6}$$

$$= 4 \lambda^2 - 48 \lambda^3 + 1 + 6 \lambda$$

$$= 48 \lambda^3 - 4 \lambda^2 - 6 \lambda - 1$$

$$= (2 \lambda - 1) (4 \lambda + 1) (48 \lambda + 8)$$

Para hallar nos valores propios de la matriz de Leslie igualamos el polinomio característico a cero:

$$(2 \lambda - 1) (4 \lambda + 1) (48 \lambda + 8) = 0$$

Los valores propios de esta matriz son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = -\frac{1}{4},\ \lambda_3 = -\frac{1}{6}$$

Cálculo de los vectores propios:

i) Para $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ resolvemos el sistema homogéneo $(A - \frac{1}{2} \cdot I) \cdot u_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{12} & 8 & 10 \\ \frac{1}{48} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{12}x + 8y + 10z \\ \frac{1}{48}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{10}y - \frac{1}{2}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{48}x - \frac{1}{2}y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 24y$$

$$\frac{1}{10}y - \frac{1}{2}z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 5z$$

Si $y = \alpha$ $\Rightarrow$ $x = 24\alpha$ y $z = \frac{\alpha}{5}$

$$u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24\alpha \\ \alpha \\ \frac{\alpha}{5} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

luego el vector propio $u_1 = \begin{pmatrix} 24 \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Con el fin de que nos aparezcan valores enteros en el vector propio podemos multiplicarlo por 5:

$$5 \cdot u_1 = w_1 = 5 \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) Para $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ resolvemos el sistema homogéneo $(A + \frac{1}{4} \cdot I) \cdot u_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 8 & 10 \\ \frac{1}{48} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + 8y + 10z \\ \frac{1}{48}x + \frac{1}{4}y \\ \frac{1}{10}y + \frac{1}{4}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{48}x + \frac{1}{4}y = 0 \Rightarrow x = -12y$$

$$\frac{1}{10}y + \frac{1}{4}z = 0 \Rightarrow z = -\frac{2}{5}y$$

Si $y = \alpha$ $\Rightarrow$ $x = -12\alpha$ y $z = -\frac{2\alpha}{5}$

$$U_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12\alpha \\ \alpha \\ -\frac{2\alpha}{5} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

luego $u_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Multiplicando por -5:

$$-5 \cdot u_2 = w_2 = -5 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

iii) Para $\lambda_3 = -\frac{1}{6}$ resolvemos el sistema homogéneo $(A + \frac{1}{6}\cdot I)\cdot u_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 8 & 10 \\ \frac{1}{48} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + 8y + 10z \\ \frac{1}{48}x + \frac{1}{6}y \\ \frac{1}{10}y + \frac{1}{6}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{48}x + \frac{1}{6}y = 0 \ \Rightarrow x = -8y$$

$$\frac{1}{10}y + \frac{1}{6}z = 0 \ \Rightarrow z = -\frac{3}{5}\, y$$

Si $y = \alpha$ $\Rightarrow$ $x = -8\alpha$ y $z = -\frac{5\alpha}{5}$

$$u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8\alpha \\ \alpha \\ -\frac{3\alpha}{5} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{luego } u_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Multiplicando por -5:

$$-5\cdot u_3 = w_3 = -5\cdot\begin{pmatrix}-8\\1\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40\\-5\\3\end{pmatrix}$$

Por lo tanto. las columnas de la matriz Q son las siguientes:

$$u_1 = \begin{pmatrix}120\\5\\1\end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix}60\\-5\\2\end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix}40\\-5\\3\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$Q = \begin{pmatrix}120 & 60 & 40\\5 & -5 & -5\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\0 & -\frac{1}{4} & 0\\0 & 0 & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

$$\text{donde } Q^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{200} & \frac{7}{100} & \frac{1}{20}\\\frac{1}{100} & -\frac{4}{25} & -\frac{2}{5}\\-\frac{1}{200} & \frac{3}{100} & \frac{9}{20}\end{pmatrix}$$

En nuestro ejemplo tenemos que calcular $P^{10)}$

$P^{(10)} = L^{(10)} \cdot P^{(0)} = Q \cdot D^{(10)} \cdot Q^{-1} \cdot P^{(0)}$

$$= \begin{pmatrix}120 & 60 & 40\\5 & -5 & -5\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{1024} & 0 & 0\\0 & \frac{1}{1048576} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{60466176}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{200} & \frac{7}{100} & \frac{1}{20}\\\frac{1}{100} & -\frac{4}{25} & -\frac{2}{5}\\-\frac{1}{200} & \frac{3}{100} & \frac{9}{20}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}120\\60\\20\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0{,}000489227 & 0{,}00975047 & 0{,}00972797\\0{,}0000202666 & 0{,}00040816 & 0{,}000410018\\0{,}00000410018 & 0{,}000080879 & 0{,}0000801459\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}120\\60\\20\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,850036 \\ 0,0356084 \\ 0,00704608 \end{pmatrix}$$

Estudiando el modelo anterior podemos establecer alguna de las siguientes propiedades del modelo Leslie.

Propiedades:

a) Una matriz de Leslie L tiene un único valor propio positivo λ_1.

En nuestro ejemplo: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{6}$

b) Si todos los coeficientes de una matriz son positivos podemos asegurar que existe un valor propio dominante.

Este no es el caso de las matrices de Leslie, pues todos los coeficientes que no se corresponden con alguna de las tasas de fecundidad o de supervivencia tienen valor 0.

Sin embargo, si existen dos tasas de fecundidad consecutivas que fueran positivas (en el ejemplo anterior las tres lo son), entonces la matriz de Leslie admite un valor propio dominante:

$$\left|\frac{1}{2}\right| > \left|-\frac{1}{4}\right| > \left|-\frac{1}{6}\right|$$

En este ejemplo, el valor propio dominante es $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, que va a determinar el comportamiento de la población a largo plazo.

c) Si una matriz de Leslie tiene un valor propio dominante, éste ha de ser su único valor propio positivo (como vimos en el apartado a).

Este valor propio es el único que admite un vector propio asociado con todas sus componentes positivas.

En nuestro ejemplo $w_1 = \begin{pmatrix} 120 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Si el valor propio dominante ($\lambda_1 = \frac{1}{2}$) es estrictamente menor que 1, la especie tenderá a extinguirse.

e) El valor propio dominante es una medida aproximada de la tasa o ritmo al que se estabiliza el crecimiento de cada sector de edad de la población, así como el de la población completa.

Si $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ llegará un momento en que tanto la población total como cada grupo de edad se reduce aproximadamente a la mitad de una observación a la siguiente.

f) Si $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 8 & 10 \\ \frac{1}{48} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$ su vector propio dominante viene dado por $w_1 = \begin{pmatrix} 120 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ y nos da la siguiente información acerca del comportamiento de la población a largo plazo:

- El primer sector de edad representa una fracción $\frac{120}{120+5+1}$ = 0,952381 del total. Es decir, un 95.2381 % del total.
- El segundo sector de edad representa una fracción $\frac{5}{120+5+1}$ = 0,0396825 del total. Es decir, un 3.96825 %.

- El tercer sector de edad representa una fracción $\frac{1}{120+5+1}$ = 0,00793651 del total. Es decir, un 0.793651 %

2.2. COMPORTAMIENTO EN EL LÍMITE

Estudiaremos el comportamiento de la matriz de Leslie cuando el número de periodos tienda a infinito.

La matriz de Leslie viene definida por:

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener sus valores y vectores propios debemos calcular el polinomio característico:

$$P(\lambda) = |\ L - \lambda \cdot I\ | = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda^n - a_1 \cdot \lambda^{n-1} - a_2 \cdot b_1 \cdot \lambda^{n-2} - a_3 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \lambda^{n-3} - \ldots - a_n \cdot b_1 \cdot b_2 \ldots b_{n-1} = 0$$

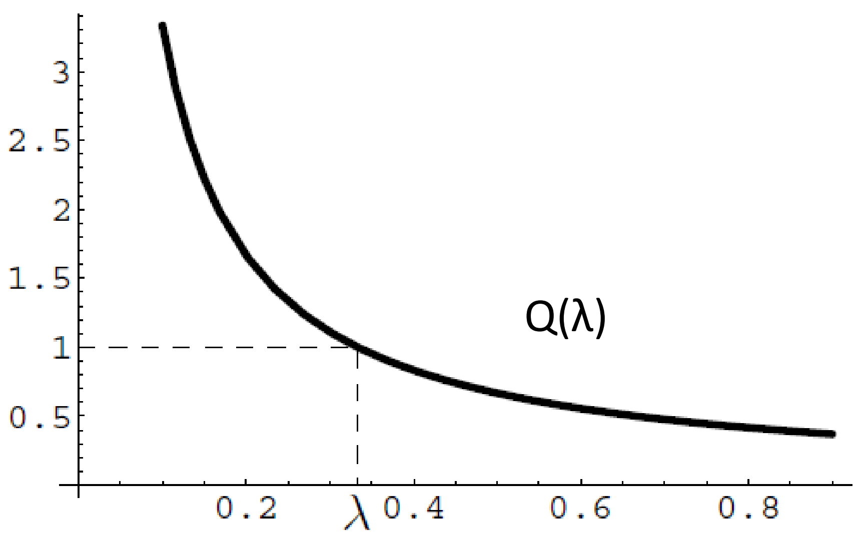
Si dividimos $P(\lambda)$ entre λ^n obtenemos la siguiente expresión:

$$Q(\lambda) = 1 - \frac{a_1}{\lambda} \; - \; \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} - \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} - \ldots - \frac{a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}{\lambda^3} = 0$$

$$\frac{a_1}{\lambda} \; + \; \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}{\lambda^n} = 1$$

En la representación gráfica de la función $Q(\lambda)$ podemos observar que $Q(\lambda)$ es una función monótona decreciente para valores $\lambda > 0$:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \qquad \rightarrow \qquad Q(\lambda_2) < Q(\lambda_1)$$



Por otro lado, tenemos:

i) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} Q(\lambda) = 0$

ii) $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} Q(\lambda) = +\infty$

En la gráfica también podemos observar que existe un único valor $\lambda_1 > 0$ tal que $Q(\lambda) = 1$.

La matriz de Leslie L tiene un único valor propio λ_1 positivo para el cual $Q(\lambda)=1$. Además, λ_1 es simple, es decir, su grado de multiplicidad es 1 (ya que $q'(\lambda_1)\neq 0$).

Sabemos que un valor propio λ_1 es aquel valor no nulo que cumple,

$$L\cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$$

donde v_1 es el vector propio asociado al valor propio λ_1.

El vector propio asociado, viene dado por:

$$v_1 = \left(1,\ \frac{b_1}{\lambda},\ \frac{b_1 b_2}{\lambda^2},\ \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda^3} - \ldots - \frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1}}{\lambda^{n-1}}\right)$$

Definición (valor propio dominante). El valor propio dominante es aquel cuyo valor absoluto es (estrictamente) mayor que el de los restantes valores propios.

De forma análoga, llamaremos **vector propio dominante** a cualquiera de los (infinitos) vectores propios asociados al valor propio dominante, pues todos son proporcionales entre sí y, por consiguiente, contienen la misma información biológica.

Ejemplo. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -6 & 7 & -4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ calcular el valor y el vector propio dominante:

a) Hallaremos el polinomio característico de la matriz.

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ -6 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

donde $p(\lambda) = (-1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$

b) Los valores propios son aquellos que anulan al polinomio característico:

$$p(\lambda) = (-1 - \lambda)\cdot(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 2$$

El valor propio dominante es claramente $\lambda_3 = 2$ ya que $2 = |2| > |1| = |-1| = 1$.

c) si $\lambda = 2$ resolveremos el siguiente sistema homogéneo para obtener el vector propio dominante:

$$(A - \lambda\cdot I)\cdot u = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 2 & -1 \\ -6 & 7-2 & -4 \\ -6 & 6 & -4-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -6 & 5 & -4 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3x + 2y - z \\ -6x + 5y - 4z \\ -x + y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Haciendo $x = \alpha \quad \Rightarrow \quad y = 2\alpha, \quad z = \alpha$

$$u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector propio dominante es $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Al valor propio dominante lo denotaremos como λ_1 y tiene el significado biológico de una tasa de crecimiento, informando sobre el comportamiento de la población una vez su crecimiento se ha estabilizado según el ritmo marcado por λ_1. Según los valores de λ_1 nos vamos a encontrar con tres situaciones posibles:

a) Si $\lambda_1 > 1$ se produce un aumento ilimitado de la población a lo largo del tiempo.

b) Si $\lambda_1 < 1$ la población tiende hacia la extinción a largo plazo.

c) Si $\lambda_1 = 1$ la población ha alcanzado un estado de equilibrio y tiende a mantenerse constante a largo plazo.

Cada una de las componentes del vector propio dominante w_1 representa la fracción de población que se agrupa, una vez que esta ha estabilizado su ritmo de crecimiento, en cada uno de los grupos en que se encuentra dividida.

En el ejemplo anterior tenemos al vector propio dominante $w_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ que interpretamos de la siguiente manera:

a) $\frac{1}{1+2+1}$ es la fracción de población que se concentra en la primera clase de edad, lo que representa un 25% de la población.

b) $\frac{2}{1+2+1}$ es la fracción de población que se concentra en la segunda clase de edad, lo que representa un 50% de la población.

c) $\frac{1}{1+2+1}$ es la fracción de población que se concentra en la tercera clase de edad, lo que representa un 25% de la población.

2.3. ESTUDIO DE CASOS. EJEMPLOS.

Caso 1.

En una cierta colonia de focas, cuyas hembras se han clasificado en 3 grupos de edad (crías, jóvenes y adultos), se han observado las siguientes tasas de supervivencia: un 60% de las hembras de edad 0 (crías) sobrevive hasta la edad 1 (jóvenes), mientras que un 85% de estas últimas lo hace hasta la edad 2 (adultos). Ninguna sobrevive más allá de la edad 2.

Por otra parte, se ha estimado que las hembras de edad 1 tienen una tasa de fecundidad del 80% (es decir, tienen de media 80 cachorros por cada 100 hembras), mientras que las jóvenes (de edad 2) tienen una tasa del 50 %.

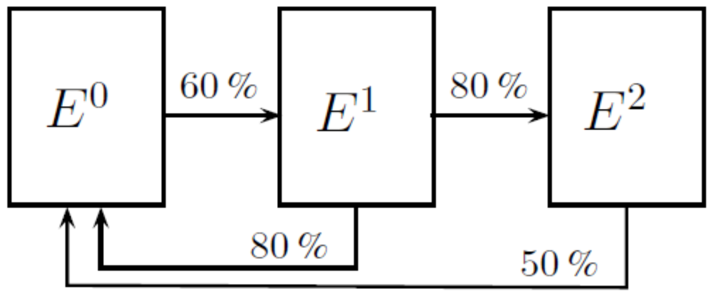
a) Escribir la matriz de Leslie asociada a estos datos.

b) Partiendo de una población inicial de 100 focas de edad 0, de 60 de edad 1 y de 50 de edad 2, calcular el número de focas de edad 2 que habrá tras 2 períodos de observación.

c) En una visita a la colonia se recuentan 85, 85 y 60 focas de edades respectivas 0, 1 y 2. ¿Qué distribución por edades se puede suponer que hubo en el período anterior?

Denotemos el vector inicial $P_0 = \begin{pmatrix} E^0 \\ E^1 \\ E^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$

Los datos los poden



a) En términos matriciales este modelo con tres clases de edad puede representarse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} E_{n+1}^0 \\ E_{n+1}^1 \\ E_{n+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_n^0 \\ E_n^1 \\ E_n^2 \end{pmatrix}$$

Donde $L = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de Leslie.

b) Calcularemos el número de focas tras dos periodos de observación:

Primer periodo:

$$\begin{pmatrix} E_1^0 \\ E_1^1 \\ E_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_0^0 \\ E_0^1 \\ E_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 60 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Segundo periodo:

$$\begin{pmatrix} E_2^0 \\ E_2^1 \\ E_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1^0 \\ E_1^1 \\ E_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 73 \\ 60 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73,5 \\ 43,8 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Tras dos periodos de observación habrá 51 focas de la edad 2.

c) En el periodo n tenemos el siguiente vector:

$$\begin{pmatrix} E_n^0 \\ E_n^1 \\ E_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 85 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{n-1}^0 \\ E_{n-1}^1 \\ E_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

Encontrándonos con las siguientes ecuaciones:

$0.8E_{n-1}^1 + 0.5E_{n-1}^2 = 85$

$0.6E_{n-1}^0 = 85$

$0.85E_{n-1}^1 = 60$

En el periodo anterior a la observación tenemos la siguiente distribución de la población:

$$\begin{pmatrix} E_{n-1}^0 \\ E_{n-1}^1 \\ E_{n-1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111.67 \\ 70.58 \\ 57.05 \end{pmatrix}$$

Sirva este ejemplo para poder obtener datos sobre una población en periodos de tiempo cortos.

En otros casos podemos utilizar la información que nos proporciona este método para estudiar el comportamiento en el futuro de especies de interés económico.

Utilidades biológicas las podemos encontrar en el manejo especies endémicas que viven en hábitats que están sufriendo degradación, ya sea por fragmentación o por destrucción, o en especies que tienen algún interés económico.

La sobreexplotación pesquera está disminuyendo considerablemente el tamaño poblacional de especies marinas de interés económico. Un estudio utilizando el modelo Leslie nos puede ayudar a establecer políticas que ayuden al crecimiento de la población de estas especies.

Utilizaremos el siguiente ejemplo para obtener información biológica de una población. Estos datos pueden ser de gran utilidad para el estudio de poblaciones endémicas o en peligro de extinción.

Caso 2.

Supongamos que tenemos una población de una especie de interés comercial y queremos estudiar su viabilidad a través del comportamiento en el futuro de la población, calculando las proporciones a largo plazo de las clases de edad.

Tenemos una población (de hembras) dividida en dos clases de edad, llamadas E_1 y E_2 respectivamente, y cuya matriz de Leslie es

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0.75 & 0 \end{pmatrix}$$

Interpretando esta matriz de Leslie podemos sacar la siguiente información biológica:

a) La primera fila de la matriz de Leslie da información sobre la reproducción de la población:

Los individuos de la clase E_1 se reproducen a una tasa de 2 = 200/100 = 200%, es decir, por cada 100 individuos de la clase E_1 nacen, en promedio, 200 nuevos individuos en cada periodo de tiempo.

Los individuos de la clase E_2 se reproducen a una tasa de 4 = 400/100 = 400%, es decir, en promedio, por cada 100 individuos de la clase E_2 nacen 400.

b) El valor 0,75 nos indica que el 75% de los individuos de la primera clase de edad sobrevive hasta la siguiente clase de edad.

c) El cero (0) nos indica que ningún individuo de la segunda clase de edad sobrevive.

Para poder evaluar el comportamiento de esta población a largo plazo calcularemos los valores propios. Para ello debemos resolver la ecuación:

$$\det(L - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 0.75 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (2-\lambda) - 4 \cdot 0.75 = 0$$

de donde $\lambda = 3$ y $\lambda = -1$.

En este caso el valor propio dominante es $\lambda = 3$, ya que $|3| > |-1|$.

El vector propio dominante nos dará información sobre la composición de las distintas clases de edad en el límite.

Si $\lambda = 3$ resolveremos el siguiente sistema homogéneo para obtener el vector propio dominante:

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot u = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 4 \\ 0,75 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0,75 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x + 4y \\ 0,75\,x - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Haciendo $y = \alpha \quad \Rightarrow \quad x = 4\alpha$

Por lo tanto, el vector propio dominante es $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cada una de las componentes del vector propio dominante representa la fracción de población que se agrupa, una vez que esta ha estabilizado su ritmo de crecimiento, en cada uno de los grupos en que se encuentra dividida.

En nuestro caso tenemos al vector propio dominante $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ que interpretamos de la siguiente manera:

a) $\frac{4}{1+4}$ es la fracción de población que se concentra en la primera clase de edad, lo que representa aproximadamente un 80 % de la población.

b) $\frac{1}{1+4}$ es la fracción de población que se concentra en la segunda clase de edad, lo que representa un 20% de la población.

Como conclusión tenemos que, a largo plazo, la clase de edad E_1 será el 80% de la población mientras que la clase de edad E_2 será el 20 %.

CONCLUSIONES

Factores como la probabilidad de supervivencia o de reproducción de los individuos de una población pueden ser afectados por los cambios en el ambiente, modificándose de esta forma su dinámica poblacional.

Un modelo matemático es una descripción de un modelo. En nuestro caso lo usaremos para describir el crecimiento de especies, ya sean animales como vegetales, o incluso bacterias. A nivel de poblaciones podemos establecer modelos para describir, analizar o predecir la evolución de estas poblaciones a lo largo del tiempo cuando están sometidas a condiciones naturales o incluso cuando son afectadas por la intervención del hombre.

Estos modelos pueden ser utilizados para planificar una investigación, seleccionar información necesaria, establecer estrategias de manejo, control o conservación de especies en ambientes naturales o modificados por el hombre.

En nuestro caso utilizaremos el **modelo** de **Leslie**, que describe el crecimiento de la parte femenina de una población clasificando a las hembras por edades en intervalos de igual número de años.

Podemos resumir las conclusiones obtenidas en el anterior trabajo en las siguientes:

1. La matriz de Leslie, determina la población futura de hembras de una especie determinada.

2. Para poder desarrollar el modelo matemático de Leslie se necesitan obtener los valores propios, así como los vectores propios asociados de la matriz de Leslie, que serán utilizados para establecer un cálculo numérico de las distintas clases de edad en un periodo determinado.

3. Los valores propios nos darán información biológica de gran utilidad.

4. Si el valor propio dominante es menor a 1, la población tiende a extinguirse.

5. Cada una de las componentes del vector propio dominante representa la fracción de población que se agrupa, una vez que esta ha estabilizado su ritmo de crecimiento, en cada uno de los grupos en que se encuentra dividida.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Castillo Valdivieso, A. (2014). Aplicaciones de los sistemas matriciales en dinámica de poblaciones. Universidad Nacional del Callao, Perú.

   Recuperado de:

   http://repositorio.unac.edu.pe/bitstream/handle/UNAC/904/119.pdf?sequence=1&isAllowed=y

2. Brenis Parraguez, J.A. y Moreno Barrera Daniel Fabian (2015). Modelo matricial de Leslie para describir el crecimiento poblacional por edad específica. UNIVERSIDAD NACIONAL \PEDRO RUIZ GALLO", Perú

3. D. C. Lay, "Algebra Lineal y sus Aplicaciones" (4 ed.), Pearson Educación, 2012.

4. Liz Marzán, Eduardo (2018). Apuntes de álgebra lineal. Universidad Autónoma de México.

   Recuperado de:

   http://galois.azc.uam.mx/mate/LIBROS/algebralineal6.pdf

5. Raimund Bürger (2009), Introducción al Modelamiento en Biomatemática. Apuntes del curso, Universidad de Concepción, Chile.

   Recuperado de:

   https://www.ci2ma.udec.cl/pdf/apuntes_docentes/apuntes-INTRODUCCION-AL-MODELAMIENTO-EN-BIOMATEMATICA.pdf

6. Varios autores (2015). Matemáticas aplicadas a la biología, apuntes de la asignatura. Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla.

   Recuperado de:

   https://personal.us.es/echevarria/documentos/ApuntesBIOMAB.pdf