

ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

LOGICAL DESIGN



УДК 519.714
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-39-64>

Оригинальная статья
Original Paper

Применение диаграмм решений не полностью определенных функций k -значной логики при синтезе логических схем

П. Н. Бибило

*Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси,
ул. Сурганова, 6, Минск, 220012, Беларусь
E-mail: bibilo@newman.bas-net.by*

Аннотация

Цели. Рассматривается проблема схемной реализации не полностью определенных функций k -значной логики, заданных табличными представлениями. Изучается этап технологически независимой оптимизации. Целью этого этапа является получение по табличным представлениям не полностью определенных функций k -значной логики минимизированных представлений систем полностью определенных булевых функций, по которым выполняется технологическое отображение (technology mapping) – второй этап синтеза логических схем.

Методы. При синтезе логических схем на этапе технологически независимой оптимизации предлагается использовать доопределения многозначных диаграмм решений (Reduced Ordered Multi-valued Decision Diagrams, ROMDD), которые далее называются MDD, и доопределения бинарных диаграмм решений (Binary Decision Diagram, BDD), задающих не полностью определенные системы булевых функций. Доопределение MDD ориентировано на уменьшение числа вершин графа MDD, соответствующих кофакторам разложения Шеннона многозначной функции.

Результаты. Задача минимизации MDD сведена к решению задач минимальной раскраски неориентированных графов несовместимости кофакторов. Кодирование многозначных значений аргументов и значений функций k -значной логики двоичными кодами приводит к системам не полностью определенных булевых функций, которые также доопределяются с целью минимизации их многоуровневых BDD-представлений.

Заключение. Предложенный подход позволяет в два этапа провести доопределение частичных многозначных функций до полностью определенных булевых функций. На втором этапе используются известные и эффективные методы доопределения BDD, задающих системы не полностью определенных булевых функций. В результате такого двухэтапного подхода получаются минимизированные BDD-представления систем полностью определенных функций. По полностью определенным булевым функциям выполняется технологическое отображение в заданную библиотеку логических элементов, т. е. покрытие оптимизированных описаний систем булевых функций описаниями логических элементов.

Ключевые слова: не полностью определенные функции, k -значная логика, Multi-valued Decision Diagram (MDD), булевы функции, Binary Decision Diagram (BDD), разложение Шеннона, синтез логической схемы, VHDL, СБИС

Для цитирования. Бибилло, П. Н. Применение диаграмм решений не полностью определенных функций k -значной логики при синтезе логических схем / П. Н. Бибилло // Информатика. – 2023. – Т. 20, № 2. – С. 39–64. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-39-64>

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 06.02.2023

Подписана в печать | Accepted 20.03.2023

Опубликована | Published 29.06.2023

Application of decision diagrams of incompletely specified of k -valued logic functions in the synthesis of logical circuits

Petr N. Bibilo

*The United Institute of Informatics Problems
of the National Academy of Sciences of Belarus,
st. Surganova, 6, Minsk, 220012, Belarus
✉E-mail: bibilo@newman.bas-net.by*

Abstract

Objectives. The problem of circuit implementation of incompletely specified (partial) k -valued logic functions given by tabular representations is considered. The stage of technologically independent optimization is studied to obtain minimized representations of systems of completely specified Boolean functions from tabular representations of partial functions of k -valued logic. According to these representations of Boolean functions, technological mapping is performed at the second stage of the synthesis of logic circuits.

Methods. Using additional definitions of Multi-valued Decision Diagrams (MDD) representing partial functions of k -valued logic, and Binary Decision Diagrams (BDD) representing partial systems of Boolean functions at the stage of technologically independent optimization is proposed. The task of additional definition of MDD is oriented to reducing the number of vertices of the MDD graph that correspond to the cofactors of the Shannon expansion of a multi-valued function.

Results. The MDD minimization problem is reduced to solving the problems of coloring undirected graphs of incompatibility of cofactors by minimum number of colors. Encoding of multi-valued values of arguments and values of functions of k -valued logic by binary codes leads to systems of partial Boolean functions, which are also further defined in order to minimize their multi-level BDD representations.

Conclusion. The proposed approach makes it possible to define partial multi-valued functions to fully defined Boolean functions in two stages. At the second stage, well-known and effective methods are used to redefine BDD representing systems of partial Boolean functions. As a result of this two-step approach, minimized BDD representations of systems of completely defined functions are obtained. According to completely defined Boolean functions, a technological mapping into a given library of logical elements is performed, i.e. the optimized descriptions of Boolean function systems are covered with descriptions of logical elements.

Keywords: partial functions, k -valued logic, Multi-valued Decision Diagram (MDD), Boolean functions, Binary Decision Diagram (BDD), Shannon expansion, digital logic synthesis, VHDL, VLSI

For citation. Bibilo P. N. *Application of decision diagrams of incompletely specified of k -valued logic functions in the synthesis of logical circuits.* Informatika [Informatics], 2023, vol. 20, no. 2, pp. 39–64 (In Russ.). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-39-64>

Conflict of interest. The author declares of no conflict of interest.

Введение. Наиболее распространенной формой задания исходных спецификаций блоков комбинационной логики сверхбольших интегральных схем (СБИС) при их схемной реализации (синтезе логических схем) являются полностью либо не полностью определенные (частичные) булевы функции. На практике исходные спецификации могут задаваться также в виде компактных табличных заданий k -значных, $k \geq 3$, частичных функций, аргументы и значения которых определяются из ограниченного диапазона неотрицательных целых чисел. Примерами служат модулярные устройства [1–3]. Выполняя кодирование значений аргументов и значений функций двоичными кодами, можно получать системы булевых функций и сводить задачи схемной реализации функций k -значной логики к задачам схемной реализации систем булевых функций. Однако при таком подходе размерности задач предварительной логической оптимизации возрастают, особенно в тех случаях, когда приходится реализовывать системы k -значных (многозначных) функций. Кроме того, усложняется процесс замены неопределенных значений функций определенными значениями, выполняемый с целью улучшения основных характеристик логических схем, таких как площадь (число транзисторов), энергопотребление и быстродействие.

В настоящей работе для предварительной технологически независимой оптимизации систем не полностью определенных многозначных функций предлагается использовать графовый аппарат сокращенных упорядоченных многозначных диаграмм решений (Reduced Ordered Multivalued Decision Diagrams, ROMDD) [4], которые далее будем называть MDD. Это позволит находить целесообразные доопределения исходных многозначных функций, после чего можно будет переходить к частичным булевым (двухзначным) функциям, получающимся в результате кодирования двоичными кодами аналитических представлений, соответствующих оптимизированным MDD. Такой подход приводит к многоуровневым представлениям систем булевых функций в виде логических уравнений, соответствующих BDD, как важного и хорошо изученного [5–11] частного случая MDD для $k = 2$. Методы доопределения BDD представлений систем частичных булевых функций известны в литературе [11], поэтому общий процесс доопределения исходных многозначных функций может быть разбит на два этапа: вначале выполняется доопределение частичных многозначных функций, а затем – доопределение частичных булевых функций, полученных кодированием многозначных значений булевыми кодами. Минимизация числа частичных подфункций на уровнях MDD сведена к комбинаторным задачам раскраски вершин неориентированных графов несовместимости кофакторов в минимальное число цветов. При таком двухэтапном подходе к технологически независимой оптимизации происходит постепенное доопределение частичных многозначных функций до полностью определенных булевых функций, для которых выполняется технологическое отображение (technology mapping) минимизированных описаний полностью определенных булевых функций в заданную библиотеку логических элементов.

Основные определения. Пусть $S = \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$ и $S^n = S \times S \times \dots \times S$. Полностью определенной k -значной функцией, зависящей от n k -значных аргументов x_1, \dots, x_n , называется отображение

$$f : S^n \rightarrow S.$$

Далее для краткости будем называть аргументы таких функций и сами функции *многозначными*, отличая их от булевых (двухзначных) аргументов и функций. Аргументы x_i булевых функций, как и сами булевы функции f , принимают значения 0, 1. Таким образом, рассматриваемые полностью определенные многозначные функции f и их аргументы принимают значения из множества S . Если многозначная функция на некоторых наборах значений аргументов принимает неопределенное значение «–», то будем называть ее частичной (не полностью определенной) многозначной функцией.

Рассмотрим две частичные многозначные функции f^i, f^j . Частичная функция f^j реализует частичную функцию f^i , либо частичная функция f^i реализуется частичной функцией f^j ($f^i < f^j$

либо $f^j \succ f^i$), если на одном и том же наборе значений аргументов для каждой пары значений функций f^i, f^j выполняется одно (любое) из следующих отношений:

$$-\prec 0, -\prec 1, -\prec 2, \dots, -\prec k-1, \quad (1)$$

$$0\prec 0, 1\prec 1, 2\prec 2, \dots, k-1\prec k-1. \quad (2)$$

Функцию f^j будем называть доопределением функции f^i . Видно, что при доопределении частичной функции любое ее неопределенное значение « \prec » может быть заменено любым значением $0, 1, 2, \dots, k-1$ из множества S . Если для каждой пары соответствующих значений функций f^i, f^j выполняется одно из отношений, входящее в соотношения (2), то функции f^i, f^j являются полностью определенными и равными.

Таким образом, отношение равенства частичных функций представляет собой частный случай отношения реализации. Если для каждой пары соответствующих значений частичных булевых функций f^i, f^j выполняется одно (любое) из пяти отношений

$$0\prec 0, 1\prec 1, -\prec -, -\prec 0, -\prec 1,$$

то выполняется отношение реализации $f^i \prec f^j$ булевых функций. Упорядоченную систему булевых функций будем называть также векторной булевой функцией.

Пример 1. В табл. 1 приведена система $F = \{f^1, f^2, f^3, f^4\}$ частичных трехзначных функций, для которых выполняются отношения реализации

$$\begin{aligned} f^1 \prec f_*^1, f^2 \prec f_*^2, f^3 \prec f_*^3, f^4 = f_*^4, \\ f^1 \prec f_{**}^1, f^2 \prec f_{**}^2, f^3 \prec f_{**}^3, f^4 \prec f_{**}^4, \\ f_*^1 \prec f_{**}^1, f_*^2 \prec f_{**}^2, f_*^3 \prec f_{**}^3, f_*^4 \prec f_{**}^4. \end{aligned}$$

Таблица 1
Полностью определенные и частичные многозначные функции

Table 1
Fully defined and partial multi-valued functions

		Пример 1 Example 1				Реализующие частичные многозначные функции Implementing partial multi-valued functions				Реализующие полностью определенные многозначные функции Implementing fully defined multi-valued functions			
Многозначные аргументы Multi-valued argument		Система F частичных многозначных функций System F of partial multi-valued functions											
x_1	x_2	f^1	f^2	f^3	f^4	f_*^1	f_*^2	f_*^3	f_*^4	f_{**}^1	f_{**}^2	f_{**}^3	f_{**}^4
0	0	-	-	1	2	1	-	1	2	1	2	1	2
0	1	1	-	-	1	1	1	-	1	1	1	2	1
0	2	2	-	1	2	2	0	1	2	2	0	1	2
1	0	1	2	0	2	1	2	0	2	1	2	0	2
1	1	-	0	-	1	-	0	1	1	1	0	1	1
1	2	1	1	0	2	1	1	0	2	1	1	0	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	0	0	-	0	0	0	2	0	0	0	2	0
2	2	1	1	-	1	1	1	-	1	1	1	2	1

Постановка задачи. На основе табличного задания системы F частичных многозначных функций требуется получить логическую схему, реализующую табличное задание системы F .

Предлагается выполнить следующие этапы проектирования требуемой логической схемы:

1. Построение и минимизация MDD, которая представляет функции системы F .

2. Кодирование значений многозначных аргументов и многозначных функций системы F булевыми кодами и переход от каждой многозначной функции системы F к своей системе частичных булевых функций.

3. Доопределение частичных булевых функций и получение функционального описания системы полностью определенных булевых функций в виде логических уравнений.

4. Синтез логической схемы в заданном технологическом базисе по полученным на этапе 3 логическим уравнениям.

Далее при решении задач, возникающих на этапах 1–4, будем придерживаться следующих соглашений (ограничений).

Соглашение 1. На этапе 1 будем строить MDD, доопределяя многозначные функции системы F в процессе построения MDD.

Заметим, что могут быть и другие подходы. Например, когда MDD построена, а затем осуществляется ее доопределение с целью сокращения сложности графа MDD.

Соглашение 2. В качестве кодов значений аргументов и значений функций будем использовать двоичные представления неотрицательных чисел из множества $S = \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$. При кодировании значений « \rightarrow » многозначной функции булевыми (двоичными) кодами неопределенное значение « \rightarrow » многозначной функции заменяется вектором неопределенных значений соответствующей системы *частичных* булевых функций. При кодировании могут быть использованы и другие коды (например, унарный код). Задача выбора эффективного способа кодирования представляет отдельный интерес и в данной работе не рассматривается.

Соглашение 3. Для системы частичных булевых функций будем оптимизировать BDD-представление и получать в результате выполнения этапа 3 логические уравнения, соответствующие BDD-представлению системы *полностью определенных* булевых функций.

Заметим, что от BDD-представления можно переходить к другим формам задания систем булевых функций. Например, можно дополнительно упрощать логические уравнения, соответствующие BDD-представлениям булевых функций, либо переходить к минимизированным дизъюнктивным нормальным формам (ДНФ) [12, 13], булевым сетям [14] и т. д. От формы задания реализуемой системы булевых функций зависят результаты синтеза в промышленных синтезаторах логических схем.

Соглашение 4. На этапе 4 будем использовать библиотеку логических элементов заказных КМОП СБИС, описанную в статье [15], и использовать в качестве системы синтеза логических схем синтезатор LeonardoSpectrum [16]. Синтез будет выполняться с целью получения однотактных (не конвейерных) реализаций схем. Синтезатор LeonardoSpectrum после синтеза схемы подсчитывает сложность (площадь) схем из библиотечных элементов как сумму площадей всех логических элементов схемы и выдает значение данного параметра под названием *Area* (площадь). Заметим, что задержка синтезированной схемы вычисляется в виде значения параметра *Delay*.

Построение и минимизация MDD, реализующей функции системы F (этап 1). Разложение Шеннона и MDD. Введем понятие литерала многозначной переменной x_i , $i = 1, \dots, n$. Если переменная x_i принимает значение $j \in S$, то пишем $x_i^{\{j\}}$. Выражение $x_i^{\{j\}}$ будем называть *одноэлементным литералом* переменной x_i . Пусть $T = \{j_1, \dots, j_t\}$, $T \subseteq S$. Под *многоэлементным литералом* (или просто литералом) будем понимать запись $x_i^{\{T\}}$ и интерпретировать литерал $x_i^{\{T\}}$ как булеву функцию: $x_i^{\{T\}} = 1$, если значение α переменной x_i принадлежит множеству T ; $x_i^{\{T\}} = 0$, если значение α переменной x_i не принадлежит множеству T . Если $T = S$, то литерал $x_i^{\{T\}} = 1$ (т. е. равен константе 1).

Результат подстановки значения $j \in S$ переменной x_i в частичную многозначную функцию $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ будем называть кофактором [4] многозначной функции $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ по литералу $x_i^{\{j\}}$ и запишем в виде

$$f_{x_i^{\{j\}}} = f(x_1, \dots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Разложением Шеннона частичной многозначной функции $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ по переменной x_i называется представление

$$f = (x_i^{(0)} \& f_{x_i^{(0)}}) \vee (x_i^{(1)} \& f_{x_i^{(1)}}) \vee \dots \vee (x_i^{(k-1)} \& f_{x_i^{(k-1)}}), \quad (3)$$

где $\&$ – логическая конъюнкция, \vee – логическая дизъюнкция.

Путем нахождения одинаковых частичных кофакторов $f(x_1, \dots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \dots, x_n)$ можно сократить число дизъюнктивных членов в выражении (3) и получить множество попарно различающихся кофакторов для последующего разложения всех их по одной и той же переменной x_j . Выполнив такие процедуры разложения кофакторов по одной и той же переменной и найдя одинаковые частичные кофакторы, получим многоуровневое представление частичной многозначной функции. На последнем шаге разложения (или ранее) кофакторы вырождаются до констант 0, 1, 2, ..., $k - 1$. Многоуровневое представление можно задать бесконтурным ориентированным графом (орграфом), т. е. MDD. Кофакторы соответствуют вершинам орграфа MDD; ориентированные дуги, всегда идущие сверху вниз, задают факт порождения кофакторов нижнего уровня из кофакторов верхнего уровня. Пометки дуг соответствуют литералам, по которым порождается кофактор. Листовые вершины MDD соответствуют значениям многозначной функции.

В рассматриваемом случае наблюдается аналогия с построением сокращенных упорядоченных BDD для булевых функций [10, 11]. Построение MDD для системы F многозначных функций аналогично: одинаковые кофакторы находятся среди кофакторов всех функций системы F , разложение Шеннона для каждой функции системы F (либо ее кофакторов) ведется по одной и той же последовательности переменных разложения (для одной и той же перестановки переменных). В работе [4] изучались MDD для полностью определенных многозначных функций.

Рассмотрим пример 1 (см. табл. 1) построения MDD для системы F многозначных частичных функций $F = \{f^1, f^2, f^3, f^4\}$ путем получения кофакторов сначала по переменной x_1 (табл. 2 и 3), затем по переменной x_2 , т. е. перестановка переменных, по которой строится MDD, имеет вид $\langle x_1, x_2 \rangle$.

Таблица 2

Кофакторы p_1, \dots, p_5 разложения Шеннона функций системы F по переменной x_1

Table 2

Cofactors p_1, \dots, p_5 of the Shannon expansion of the functions of the system F by the variable x_1

x_2	$p_1 = f_{x_1^{(0)}}^1$	$p_2 = f_{x_1^{(2)}}^1 = f_{x_1^{(0)}}^3$	$p_3 = f_{x_1^{(2)}}^1$	$p_4 = f_{x_1^{(0)}}^2$	$p_5 = f_{x_1^{(2)}}^2 = f_{x_1^{(1)}}^2 = f_{x_1^{(2)}}^4$
0	–	1	2	–	2
1	1	–	0	–	0
2	2	1	1	–	1

Таблица 3

Кофакторы p_6, p_7, p_8 разложения Шеннона функций системы F по переменной x_1

Table 3

Cofactors p_6, p_7, p_8 of the Shannon expansion of the functions of the system F by the variable x_1

x_2	$p_6 = f_{x_1^{(1)}}^3$	$p_7 = f_{x_1^{(2)}}^3$	$p_8 = f_{x_1^{(0)}}^4 = f_{x_1^{(1)}}^4$
0	0	2	2
1	–	–	1
2	0	–	2

Используя обозначения кофакторов из табл. 2 и 3, допишем выражения разложения Шеннона многозначных функций f^1, f^2, f^3, f^4 (см. табл. 1) по переменной x_1 :

$$\begin{aligned} f^1 &= x_1^{(0)} \& p^1 \vee x_1^{(1)} \& p^2 \vee x_1^{(2)} \& p^3 = x_1^{(0)} p^1 \vee x_1^{(1)} p^2 \vee x_1^{(2)} p^3, \\ f^2 &= x_1^{(0)} \& p^4 \vee x_1^{(1)} \& p^3 \vee x_1^{(2)} \& p^5 = x_1^{(0)} p^4 \vee x_1^{(1)} p^3 \vee x_1^{(2)} p^5, \\ f^3 &= x_1^{(0)} \& p^2 \vee x_1^{(1)} \& p^6 \vee x_1^{(2)} \& p^7 = x_1^{(0)} p^2 \vee x_1^{(1)} p^6 \vee x_1^{(2)} p^7, \\ f^4 &= x_1^{(0,1)} \& p^8 \vee x_1^{(2)} \& p^5 = x_1^{(0,1)} p^8 \vee x_1^{(2)} p^5. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем опускать знак $\&$ конъюнкции там, где это уместно. Разложение по переменной x_2 полученных кофакторов p_1, \dots, p_8 тривиально.

Граф MDD, построенный по перестановке $\langle x_1, x_2 \rangle$ переменных, изображен на рис. 1. Ориентация дуг не показана, так как все дуги ориентированы сверху вниз.

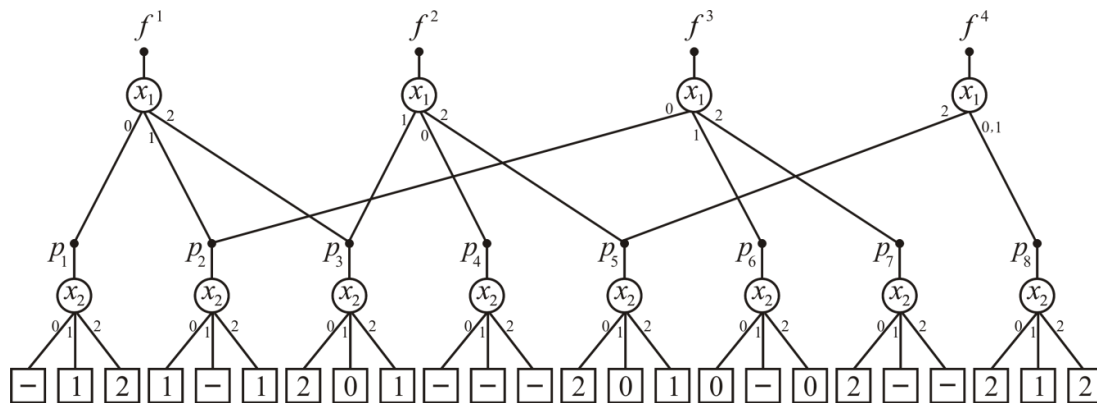


Рис. 1. MDD для системы функций F

Fig. 1. MDD for a system of functions F

Для упрощения изображения MDD листовые вершины для кофакторов, зависящих от переменной x_2 , продублированы. Неопределенные листовые вершины отличаются от определенных: при доопределении MDD каждая неопределенная листовая вершина рассматривается отдельно и доопределяется независимо от других неопределенных вершин. По MDD можно сформировать многозначные функции, рассматривая пути из корневых вершин, соответствующих функциям системы F , к листовым вершинам, задающим значения компонентной функции системы, и записывая конъюнкцию литералов, помечающих проходимые дуги, аналогично тому, как это делается для BDD [11]. Например, функция f^4 имеет представление

$$\begin{aligned} f^4 &= x_1^{(2)} x_2^{(0)} f^4(2,0) \vee x_1^{(2)} x_2^{(1)} f^4(2,1) \vee x_1^{(2)} x_2^{(2)} f^4(2,2) \vee \\ &\vee x_1^{(0,1)} x_2^{(0)} f^4(0,0) \vee x_1^{(0,1)} x_2^{(1)} f^4(0,1) \vee x_1^{(0,1)} x_2^{(2)} f^4(0,2). \end{aligned} \quad (4)$$

Так как $f^4(0,0) = f^4(1,0) = 2, f^4(0,1) = f^4(1,1) = 1, f^4(0,2) = f^4(1,2) = 2, f^4(2,1) = 0$, в выражении (4) вместо $f^4(0,0), f^4(0,1), f^4(0,2)$ могут быть записаны $f^4(1,0), f^4(1,1), f^4(1,2)$ соответственно.

Если понимать запись $f^{4(\alpha)}$ как «многозначная функция f^4 принимает значение $\alpha \in \{-\} \cup S$ », то формула (4) запишется в виде

$$f^4 = x_1^{(2)} x_2^{(0)} f^{4(2)} \vee x_1^{(2)} x_2^{(1)} f^{4(-)} \vee x_1^{(2)} x_2^{(2)} f^{4(1)} \vee x_1^{(0,1)} x_2^{(0)} f^{4(2)} \vee x_1^{(0,1)} x_2^{(1)} f^{4(1)} \vee x_1^{(0,1)} x_2^{(2)} f^{4(2)}. \quad (5)$$

В выражении (5) символы & (логическая конъюнкция) опущены, и (5) можно записать по табличному заданию f^4 (см. табл. 1). Аналогичным образом могут быть записаны представления других многозначных функций из табл. 1.

Доопределение кофакторов MDD. Введем понятие несовместимости многозначных функций либо их кофакторов. Кофакторы $f(x_1, \dots, x_r)$, $g(x_1, \dots, x_r)$ назовем *несовместимыми*, если найдется хотя бы один набор значений $(x_1^{(j_1)}, x_2^{(j_2)}, \dots, x_r^{(j_r)})$ переменных x_1, \dots, x_r , для которого оба значения $f(x_1^{(j_1)}, \dots, x_r^{(j_r)})$, $g(x_1^{(j_1)}, \dots, x_r^{(j_r)})$ определены и не равны. Если же такой набор $(x_1^{(j_1)}, x_2^{(j_2)}, \dots, x_r^{(j_r)})$ не найдется, то кофакторы $f(x_1, \dots, x_r)$, $g(x_1, \dots, x_r)$ назовем *совместимыми*.

Например, кофакторы p_1, p_2 (см. табл. 2), зависящие от многозначной переменной x_2 , несовместимы, поскольку найдется такое значение $x_2^{(2)}$, что $p_1(2) = 2, p_2(2) = 1$ (оба значения определены и не равны). Кофакторы p_4, p_5 являются совместимыми. Очевидно, что совместимые частичные кофакторы могут быть доопределены до одного и того же кофактора. Например, совместимые кофакторы p_4, p_5 могут быть доопределены до кофактора g , такого, что $g(0) = 2, g(1) = 1, g(2) = 1$, и для которого выполняются отношения реализации $p_4 \prec g, p_5 \prec g$. Кофакторы p_3, p_5 являются полностью определенными и равными.

Задача А. Для заданной системы F частичных многозначных функций требуется найти минимальную по мощности систему H многозначных функций, таких, что каждая из функций исходной системы F реализуется хотя бы одной из функций системы H .

Решение задачи А сводится к построению неориентированного графа G отношения несовместимости функций из системы F , раскраске графа G в минимальное число цветов (красок) и формированию по каждому множеству одноцветно раскрашенных вершин (функций) одной из функций системы H .

Минимальное число p_{\min} частичных функций в системе H определяется из соотношения

$$p_{\min} = \chi(G), \quad (6)$$

где $\chi(G)$ – хроматическое число графа G [17].

Рассмотрим решение задачи А на примере кофакторов p_1, \dots, p_8 из табл. 2 и 3. Граф G отношения несовместимости и раскраска его вершин показаны на рис. 2. Формирование функций h^1, h^2, h^3, h^4 , являющихся решением задачи А, представлено в табл. 4.

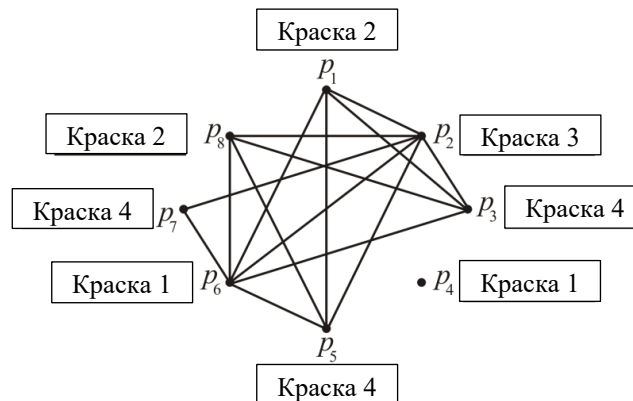


Рис. 2. Граф G отношения несовместимости кофакторов
Fig. 2. Graph G of the incompatibility relationship of cofactors

Таблица 4
Сокращение числа кофакторов на основе решения задачи о раскраске графа

Table 4
Reduction of the number of cofactors based on solving the graph coloring problem

Кофактор Cofactor $p_i(x_2)$	x_2			Краска Color	Доопределение Additional definition			Реализация Implementation	
	$x_2^{\{0\}}$	$x_2^{\{1\}}$	$x_2^{\{2\}}$		Кофактор Cofactor $h^i(x_2)$	$x_2^{\{0\}}$	$x_2^{\{1\}}$		$x_2^{\{2\}}$
p_4	-	1	-	1	h^1	0	1	0	$p_4 \prec h^1, p_6 \prec h^1$
p_6	0	-	0						
p_1	-	1	2	2	h^2	2	1	2	$p_1 \prec h^2, p_8 \prec h^2$
p_8	2	1	2						
p_2	1	-	1	3	h^3	1	-	1	$p_2 \prec h^3$
p_3	2	0	1	4	h^4	2	0	1	$p_3 \prec h^4, p_5 \prec h^4, p_7 \prec h^4$
p_5	2	0	1						
p_7	2	-	-						

Заменяя кофакторы в MDD (см. рис. 1) реализующими их кофакторами, можно уменьшить число функциональных вершин MDD за счет доопределения кофакторов (рис. 3). Примеры правил сокращения MDD показаны на рис. 4, они аналогичны известным правилам редуцирования BDD. В результате выполнения этапа 1 была построена MDD, у которой только две листовые вершины (рис. 3) имеют неопределенное значение.

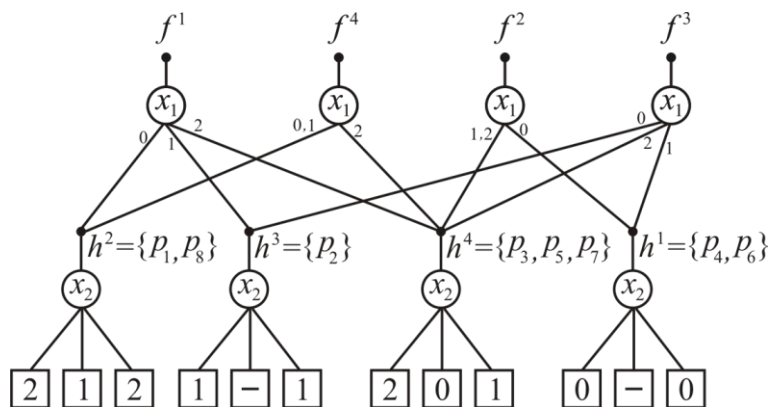


Рис. 3. Доопределение MDD
Fig. 3. MDD additional definition

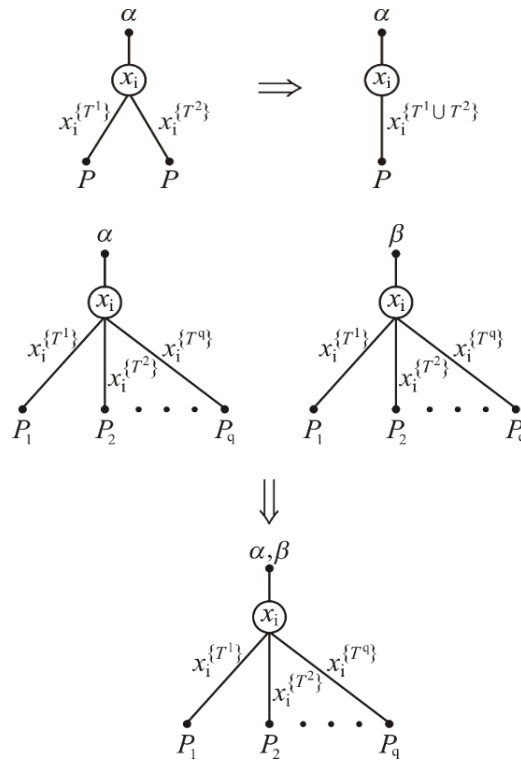


Рис. 4. Локальные правила редукции MDD

Fig. 4. Local MDD reduction rules

Если для некоторого кофактора все листовые значения являются неопределенными, то будем обозначать такой кофактор p_- . Он представляет собой частичную многозначную функцию, принимающую неопределенные значения для всех наборов значений многозначных аргументов. Кофактор p_- совместим с любым другим частичным кофактором.

Эвристический алгоритм поиска лучшей перестановки переменных разложения Шеннона для построения MDD состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Поочередно рассматриваются все входные переменные. Для каждой переменной строится начальный уровень MDD, затем для полученных частичных кофакторов решается задача А. Выбирается та переменная x_i , для которой в результате решения задачи А в системе H будет наименьшее число кофакторов (эвристика 1). Переменная x_i определяет первую переменную искомой перестановки переменных, по которой будет строиться MDD.

Шаг 2 (итеративный). К полученной переменной (перестановке) поочередно добавляется одна из оставшихся переменных и решается задача А. Выбирается та из переменных x_{i_2} , которая обеспечивает получение наилучшего по числу функций системы H решения задачи А (эвристика 2). Такой выбор переменных продолжается до тех пор, пока не будут определены все переменные в искомой перестановке $\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n} \rangle$.

Заметим, что аналогичный алгоритм оказался эффективным для минимизации числа вершин BDD, представляющей систему полностью определенных булевых функций [18].

Кодирование значений многозначных аргументов и многозначных функций (этап 2). Длина m булева кода для многозначной переменной x_i и многозначной функции f^j системы F определяется из соотношения $m = \lceil \log_2 k \rceil$, где k – мощность множества S , а $\lceil A \rceil$ – ближайшее целое, большее либо равное A .

Выполним кодирование многозначных переменных и литералов согласно табл. 5 и 6. В рассматриваемом примере $k = 3$, поэтому каждая многозначная переменная x_1, x_2 и каждая многозначная функция f^1, f^2, f^3, f^4 системы F кодируются своим булевым кодом длиной $m = 2$ (табл. 5).

Таблица 5
Кодирование многозначных переменных, функций и кофакторов булевыми переменными

Table 5
Encoding of multi-valued variables, functions and cofactors with Boolean variables

Многозначная переменная, функция, кофактор <i>Multi-valued variable, function, cofactor</i>	Булев код <i>Boolean code</i>
x_1	(v^1, v^2)
x_2	(w^1, w^2)
f^1	(f_1^1, f_2^1)
f^2	(f_1^2, f_2^2)
f^3	(f_1^3, f_2^3)
f^4	(f_1^4, f_2^4)
h^1	(h_1^1, h_2^1)
h^2	(h_1^2, h_2^2)
h^3	(h_1^3, h_2^3)
h^4	(h_1^4, h_2^4)
p_-	(c_-, c_-)

Таблица 6
Кодирование литералов

Table 6
Encoding literals

Многозначная переменная <i>Multi-valued variable</i>	Булев код <i>Boolean code</i>	Литерал многозначной переменной <i>Literal of a multi-valued variable</i>	Кодирующее выражение <i>Encoding expression</i>
x_1	(v^1, v^2)	$x_1^{(0)}$	$\bar{v}^1 \bar{v}^2$
		$x_1^{(1)}$	$\bar{v}^1 v^2$
		$x_1^{(2)}$	$v^1 \bar{v}^2$
x_2	(w^1, w^2)	$x_2^{(0)}$	$\bar{w}^1 \bar{w}^2$
		$x_2^{(1)}$	$\bar{w}^1 w^2$
		$x_2^{(2)}$	$w^1 \bar{w}^2$

Одноэлементные литералы многозначных переменных кодируются булевыми выражениями в виде произведений литералов булевых переменных (табл. 6). Многоэлементным литералам соответствуют некоторые ДНФ – дизъюнкции полных произведений одноэлементных литера-

лов, которые могут быть упрощены по законам булевой алгебры. Например, двухэлементный литерал $x_1^{(0,2)}$ кодируется ДНФ $\bar{v}^1\bar{v}^2 \vee v^1\bar{v}^2 = \bar{v}^2$. Для некоторых комбинаций булевых кодирующих переменных могут отсутствовать соответствующие им многозначные значения, в рассматриваемом примере такими комбинациями кодирующих булевых переменных являются (v^1v^2) , (w^1w^2) . Эти комбинации использовались бы, если бы элемент 3 входил в множество S . В результате кодирования MDD для каждой из многозначных функций исходной системы превращается в BDD векторной булевой функции, который можно задать множеством BDD, реализующих компонентные функции векторной булевой функции (пример дан ниже).

Согласно MDD (см. рис. 3) запишем следующие представления доопределенных частичных многозначных функций системы F :

$$\begin{aligned} f^1 &= x_1^{(0)}h^2 \vee x_1^{(1)}h^3 \vee x_1^{(2)}h^4, \\ f^2 &= x_1^{(1,2)}h^4 \vee x_1^{(0)}h^1, \\ f^3 &= x_1^{(0)}h^3 \vee x_1^{(1)}h^1 \vee x_1^{(2)}h^4, \\ f^4 &= x_1^{(0,1)}h^2 \vee x_1^{(2)}h^4. \end{aligned}$$

Тогда уравнения для разложений Шеннона соответствующих двухкомпонентных частичных векторных булевых функций примут вид

$$\begin{aligned} (f_1^1, f_2^1) &= \bar{v}^1\bar{v}^2(h_1^2, h_2^2) \vee \bar{v}^1v^2(h_1^3, h_2^3) \vee v^1\bar{v}^2(h_1^4, h_2^4) \vee v^1v^2(c_-, c_-), \\ (f_1^2, f_2^2) &= (\bar{v}^1v^2 \vee v^1\bar{v}^2)(h_1^4, h_2^4) \vee \bar{v}^1\bar{v}^2(h_1^1, h_2^1) \vee v^1v^2(c_-, c_-), \\ (f_1^3, f_2^3) &= \bar{v}^1\bar{v}^2(h_1^3, h_2^3) \vee \bar{v}^1v^2(h_1^1, h_2^1) \vee v^1\bar{v}^2(h_1^4, h_2^4) \vee v^1v^2(c_-, c_-), \\ (f_1^4, f_2^4) &= (\bar{v}^1\bar{v}^2 \vee \bar{v}^1v^2)(h_1^2, h_2^2) \vee v^1\bar{v}^2(h_1^4, h_2^4) \vee v^1v^2(c_-, c_-). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь кофакторы являются частичными булевыми функциями h_i^j , зависящими от булевых переменных w^1, w^2 . Булевы функции h_i^j заданы в табл. 7.

В уравнения (7) для каждой из векторных булевых функций (f_1^1, f_2^1) , (f_1^2, f_2^2) , (f_1^3, f_2^3) , (f_1^4, f_2^4) добавлен дизъюнктивный член $v^1v^2(c_-, c_-)$. Из этого следует, что на наборах переменных, где $v^1 = 1$, $v^2 = 1$, все значения компонентных булевых функций являются неопределенными:

v^1	v^2	w^1	w^2	f_1^1	f_2^1	f_1^2	f_2^2	f_1^3	f_2^3	f_1^4	f_2^4
1	1	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–
1	1	0	1	–	–	–	–	–	–	–	–
1	1	1	0	–	–	–	–	–	–	–	–
1	1	1	1	–	–	–	–	–	–	–	–

Вместе с тем эти значения могут заменяться определенными при логической оптимизации. В двухкомпонентном векторе (c_-, c_-) через c_- обозначена частичная булева функция, принимающая неопределенные значения для всех наборов значений булевых аргументов.

Таким образом, если в результате выполнения этапа 1 MDD для многозначной функции не содержит неопределенных листовых вершин (исходная частичная многозначная функция доопределена до полностью определенной), то в результате кодирования на этапе 2 полученная система булевых функций может оказаться частичной.

Доопределение частичных булевых функций (этап 3). Можно провести доопределение частичных булевых кофакторов из табл. 7 до полностью определенных, заменяя булевы неопределенные значения «-» нулями и единицами так, чтобы многоуровневое BDD-представление реализующих полностью определенных булевых функций стало как можно менее сложным. Проведение таких доопределений описано в статье [19], где эта задача сведена к нахождению кратчайшей имплицитующей формы троичной матрицы, задающей значения частичных булевых функций.

В рассматриваемом примере булевых функций (табл. 7) в последней строке указаны алгебраические формы полностью определенных булевых функций, полученные путем доопределения частичных функций h_i^j . Например, заменяя неопределенные значения функции h_2^3 единицами, получаем, что $h_2^3 = 1$. Это аналогично и для других функций. Приведем отношения реализации частичных булевых кофакторов полностью определенными булевыми кофакторами, заданными в последней строке табл. 7:

$$h_1^1 < 0, h_2^1 < 0, h_1^2 < \bar{w}_2, h_2^2 < w_2, h_1^3 < 0, h_2^3 < 1, h_1^4 < \bar{w}^1\bar{w}^2, h_2^4 < w^1w^2.$$

Таблица 7
Замена многозначных кофакторов системами частичных булевых функций

Table 7
Replacement of multi-valued cofactors by systems of partial Boolean functions

Булевы переменные Boolean variables		Многозначный кофактор Multi-valued cofactor							
		h^1		h^2		h^3		h^4	
		Система частичных булевых функций System of partial Boolean functions							
		1		2		3		4	
w^1	w^2	h_1^1	h_2^1	h_1^2	h_2^2	h_1^3	h_2^3	h_1^4	h_2^4
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	-	-	0	1	-	-	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	-	-	-	-	-	-	-	-
Реализующие булевы функции Implementing Boolean functions		0	0	\bar{w}^2	w^2	0	1	$\bar{w}^1\bar{w}^2$	w^1w^2

От векторных уравнений (7) перейдем к алгебраическому заданию частичных компонентных булевых функций:

$$\begin{aligned} f_1^1 &= \bar{v}^1\bar{v}^2h_1^2 \vee \bar{v}^1v^2h_1^3 \vee v^1\bar{v}^2h_1^4 \vee v^1v^2c_-; & f_2^1 &= \bar{v}^1\bar{v}^2h_2^2 \vee \bar{v}^1v^2h_2^3 \vee v^1\bar{v}^2h_2^4 \vee v^1v^2c_-; \\ f_1^2 &= (\bar{v}^1v^2 \vee v^1\bar{v}^2)h_1^4 \vee \bar{v}^1\bar{v}^2h_1^1 \vee v^1v^2c_-; & f_2^2 &= (\bar{v}^1v^2 \vee v^1\bar{v}^2)h_2^4 \vee \bar{v}^1\bar{v}^2h_2^1 \vee v^1v^2c_-; \\ f_1^3 &= \bar{v}^1\bar{v}^2h_1^3 \vee \bar{v}^1v^2h_1^1 \vee v^1\bar{v}^2h_1^4 \vee v^1v^2c_-; & f_2^3 &= \bar{v}^1\bar{v}^2h_2^3 \vee \bar{v}^1v^2h_2^1 \vee v^1\bar{v}^2h_2^4 \vee v^1v^2c_-; \\ f_1^4 &= (\bar{v}^1\bar{v}^2 \vee \bar{v}^1v^2)h_1^2 \vee v^1\bar{v}^2h_1^4 \vee v^1v^2c_-; & f_2^4 &= (\bar{v}^1\bar{v}^2 \vee \bar{v}^1v^2)h_2^2 \vee v^1\bar{v}^2h_2^4 \vee v^1v^2c_- \end{aligned} \quad (8)$$

Константа c_- в задании (8) может быть доопределена до любой частичной либо полностью определенной функции и при упрощении логических выражений заменена этой функцией. Другими словами, функция c_- совместима с любой частичной функцией. Например,

$$v^1\bar{v}^2h_1^4 \vee v^1v^2c_- = v^1\bar{v}^2h_1^4 \vee v^1v^2h_1^4 = v^1(\bar{v}^2 \vee v^2)h_1^4 = v^1h_1^4.$$

В этом случае была использована замена c_- на h_1^4 . Упрощая уравнения (8) и записывая реализующие булевы кофакторы, получим более компактные уравнения компонентных полностью определенных булевых функций:

$$\begin{aligned} f_1^1 &= \bar{v}^1 \bar{v}^2 h_1^2 \vee \bar{v}^1 v^2 h_1^3 \vee v^1 h_1^4; & f_2^1 &= \bar{v}^1 \bar{v}^2 h_2^2 \vee \bar{v}^1 v^2 h_2^3 \vee v^1 h_2^4; \\ f_1^2 &= (\bar{v}^1 v^2 \vee v^1) h_1^4 \vee \bar{v}^1 \bar{v}^2 h_1^1; & f_2^2 &= (\bar{v}^1 v^2 \vee v^1) h_2^4 \vee \bar{v}^1 \bar{v}^2 h_2^1; \\ f_1^3 &= \bar{v}^1 \bar{v}^2 h_1^3 \vee \bar{v}^1 v^2 h_1^1 \vee v^1 h_1^4; & f_2^3 &= \bar{v}^1 \bar{v}^2 h_2^3 \vee \bar{v}^1 v^2 h_2^1 \vee v^1 h_2^4; \\ f_1^4 &= \bar{v}^1 h_1^2 \vee v^1 h_1^4; & f_2^4 &= \bar{v}^1 h_2^2 \vee v^1 h_2^4; \\ h_1^1 &= 0; & h_2^1 &= 0; & h_1^2 &= \bar{w}^2; & h_2^2 &= w^2; & h_1^3 &= 0; & h_2^3 &= 1; & h_1^4 &= \bar{w}^1 \bar{w}^2; & h_2^4 &= w^1 \bar{w}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Проверим, реализует ли с учетом выбранного кодирования значений многозначных переменных и функций логическая модель (9) исходное табличное задание (см. табл. 1). По уравнениям (9) построим таблицу истинности булевых функций (табл. 8), элиминируя (устраняя) промежуточные переменные.

Таблица 8
Таблица истинности системы булевых функций

Table 8
Truth table of a system of Boolean functions

x_1	x_2	f^1	f^2	f^3	f^4
$v^1 \ v^2$	$w^1 \ w^2$	$f_1^1 \ f_2^1$	$f_1^2 \ f_2^2$	$f_1^3 \ f_2^3$	$f_1^4 \ f_2^4$
00	00	10	00	01	10
00	01	01	00	01	01
00	10	10	00	01	10
00	11	01	00	01	01
01	00	01	10	00	10
01	01	01	00	00	01
01	10	01	01	00	10
01	11	01	00	00	01
10	00	10	10	10	10
10	01	00	00	00	00
10	10	01	01	01	01
10	11	00	00	00	00
11	00	10	10	10	10
11	01	00	00	00	00
11	10	01	01	01	01
11	11	00	00	00	00

Полужирным шрифтом в табл. 8 выделены коды значений аргументов и значений исходных многозначных функций, заданных в табл. 1. Курсивом отмечены булевы коды, которыми были заменены неопределенные значения многозначных функций. Выполняя замену неопределенных многозначных значений в табл. 1 определенными значениями, получим систему полностью определенных многозначных функций (табл. 9). Заметим, что различные неопределенные многозначные значения « \rightarrow » (см. табл. 1) заменены в табл. 9 определенными значениями из множества $\{0, 1, 2\}$.

Таблица 9
Доопределение многозначных функций системы F
Table 9
Additional definition of multi-valued functions of the system F

Многозначный аргумент Multi-valued argument		Полностью определенная многозначная функция Fully defined multi-valued function			
x_1	x_2	f^1	f^2	f^3	f^4
0	0	2	0	1	2
0	1	1	1	1	1
0	2	2	0	1	2
1	0	1	2	0	2
1	1	1	0	0	1
1	2	1	1	0	2
2	0	2	2	2	2
2	1	0	0	0	0
2	2	1	1	1	1

От первых шести уравнений (9) легко перейти к уравнениям, соответствующим BDD, проведя разложения Шеннона ДНФ булевых функций, и получить другой вид представления полностью определенных функций, реализующих исходную систему многозначных функций:

$$\begin{aligned}
 f_1^1 &= \bar{v}^1 z_1 \vee v^1 h_1^4; & z_1 &= \bar{v}^2 h_1^2 \vee v^2 h_1^3; & f_2^1 &= \bar{v}^1 z_3 \vee v^1 h_2^4; & z_3 &= \bar{v}^2 h_2^2 \vee v^2 h_2^3; \\
 f_1^2 &= \bar{v}^1 z_4 \vee v^1 h_1^4; & z_4 &= \bar{v}^2 h_1^1 \vee v^2 h_1^4; & f_2^2 &= \bar{v}^1 z_6 \vee v^1 h_2^4; & z_6 &= \bar{v}^2 h_2^1 \vee v^2 h_2^4; \\
 f_1^3 &= \bar{v}^1 z_9 \vee v^1 h_1^4; & z_9 &= \bar{v}^2 h_1^3 \vee v^2 h_1^1; & f_2^3 &= \bar{v}^1 z_{10} \vee v^1 h_2^4; & z_{10} &= \bar{v}^2 h_2^3 \vee v^2 h_2^1; \\
 f_1^4 &= \bar{v}^1 h_1^2 \vee v^1 h_1^4; & f_2^4 &= \bar{v}^1 h_2^2 \vee v^1 h_2^4; \\
 h_1^1 &= 0; & h_2^1 &= 0; & h_1^2 &= \bar{w}^2; & h_2^2 &= w^2; & h_1^3 &= 0; & h_2^3 &= 1; & h_1^4 &= \bar{w}^1 \bar{w}^2; & h_2^4 &= w^1 \bar{w}^2.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Процесс перехода от разложения Шеннона для многозначной функции f^1 (см. рис. 3) к BDD показан на рис. 5. Для других многозначных функций – аналогично.

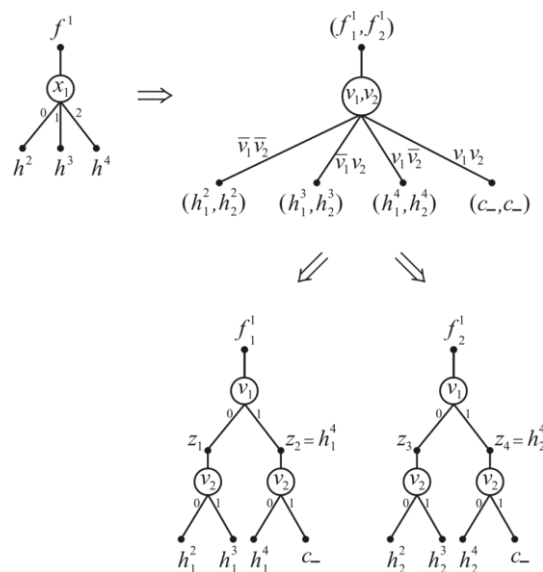


Рис. 5. Переход от разложения Шеннона многозначной функции (подграфа MDD) к BDD частных булевых функций
Fig. 5. Transition from the Shannon expansion of a multi-valued function (subgraph of MDD) to BDD partial Boolean functions

Для полученной системы полностью определенных булевых функций можно применять различные методы логической оптимизации, например минимизировать представления функций в классе ДНФ. Также можно использовать программу Espresso [12] для минимизации булевых функций из табл. 8 и получить минимизированные ДНФ, матричные формы которых заданы в табл. 10.

Таблица 10
Минимизированные ДНФ булевых функций

Table 10
Minimized SOPs of Boolean functions

x_1	x_2	f^1	f^2	f^3	f^4
$v^1 v^2$	$w^1 w^2$	$f_1^1 f_2^1$	$f_1^2 f_2^2$	$f_1^3 f_2^3$	$f_1^4 f_2^4$
0 0	- -	0 0	0 0	0 1	0 0
0 1	0 0	0 1	1 0	0 0	1 0
0 1	1 0	0 1	0 1	0 0	1 0
0 0	- 0	1 0	0 0	0 0	1 0
1 -	0 0	1 0	1 0	1 0	1 0
0 -	- 1	0 1	0 0	0 0	0 1
1 -	1 0	0 1	0 1	0 1	0 1

Табличное задание компонентных булевых функций из табл. 10 соответствует следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 f_1^1 &= \bar{v}^1 \bar{v}^2 \bar{w}^2 \vee v^1 \bar{w}^1 \bar{w}^2; & f_2^1 &= \bar{v}^1 v^2 \bar{w}^1 \bar{w}^2 \vee \bar{v}^1 v^2 w^1 \bar{w}^2 \vee \bar{v}^1 w^2 \vee v^1 w^1; \\
 f_1^2 &= \bar{v}^1 v^2 \bar{w}^1 \bar{w}^2 \vee v^1 \bar{w}^1 \bar{w}^2; & f_2^2 &= \bar{v}^1 v^2 w^1 \bar{w}^2 \vee v^1 w^1; \\
 f_1^3 &= v^1 \bar{w}^1 \bar{w}^2; & f_2^3 &= \bar{v}^1 \bar{v}^2 \vee v^1 w^1; \\
 f_1^4 &= \bar{v}^1 v^2 \bar{w}^1 \bar{w}^2 \vee \bar{v}^1 v^2 w^1 \bar{w}^2 \vee \bar{v}^1 \bar{v}^2 \bar{w}^2 \vee v^1 \bar{w}^1 \bar{w}^2; & f_2^4 &= \bar{v}^1 w^2 \vee v^1 w^1.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Синтез логической схемы (этап 4). По логическим уравнениям (9)–(11) были разработаны соответствующие VHDL-описания [20] путем замены логических операций операциями языка VHDL. Схемная реализация полученных VHDL-описаний в библиотеке проектирования отечественных КМОП СБИС выполнялась с помощью синтезатора LeonardoSpectrum [16]. Функции логических КМОП-элементов используемой библиотеки синтеза приведены в работе [15]. Для каждого VHDL-описания синтез осуществлялся с одними и теми же опциями управления синтезом. Для полученной схемы подсчитывались ее площадь (сумма площадей элементов, у. е.) и временная задержка. Результаты синтеза даны в табл. 11.

Таблица 11
Параметры логических схем, реализующих систему
многозначных функций

Table 11
Parameters of logic circuits implementing a system
of multi-valued functions

Функциональное описание схемы <i>Functional description of the circuit</i>	Площадь схемы, у. е. <i>Area of the circuit, c. u.</i>	Задержка схемы, нс <i>Circuit delay, ns</i>
Описание MDD (9)	5 519	1,61
Описание BDD (10)	5 284	2,07
Система ДНФ (11)	6 344	1,69
Исходное описание (см. табл. 1)	6 333	2,30

В строке «Исходное описание» табл. 11 представлены результаты синтеза минимизированной (программой Espresso) системы из восьми частичных функций, полученных из функций системы F кодированием многозначных значений как аргументов, так и функций системы F . Площадь схемы (5 284), полученной по BDD-представлению, оказалась наименьшей, а резуль-

таты синтеза схем после минимизации в классе ДНФ (две последние строки) показали худшие результаты. Можно заметить также, что изменения формы задания функций влияют на результаты синтеза даже для описаний схем небольшой размерности.

Пример 2. Проведем схемную реализацию функционального описания умножителя по модулю 5, заданного частичной многозначной функцией (табл. 12). Произведение по модулю p (основание модулярной вычислительной системы) для двух целых неотрицательных чисел (операндов) a, b , находящихся в диапазоне $\{0, 1, \dots, p - 1\}$, вычисляется по формуле

$$|a \times b|_p = (a \times b) - \left\lfloor \frac{a \times b}{p} \right\rfloor \times p,$$

где через $\lfloor k \rfloor$ обозначена целая часть числа, т. е. ближайшее целое, меньшее либо равное k . В случае если $(a \times b) < p$, то $|a \times b|_p = a \times b$. При схемной реализации умножителя по модулю p , подача на вход схемы значения, большего $p - 1$, хотя бы для одного из операндов a, b , соответствует неопределенному значению частичной многозначной функции y .

Таблица 12
Умножитель по модулю 5 (частичная многозначная функция)

Table 12
The multiplier modulo 5 is a partial multi-valued function

Область определенных значений многозначной функции <i>The domain of the defined values of a multi-valued function</i>			Область неопределенных значений многозначной функции <i>The domain of undefined values of a multi-valued function</i>		
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>y</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>y</i>
0	0	0	0	5	-
0	1	0	0	6	-
0	2	0	0	7	-
0	3	0	1	5	-
0	4	0	1	6	-
1	0	0	1	7	-
1	1	1	2	5	-
1	2	2	2	6	-
1	3	3	2	7	-
1	4	4	3	5	-
2	0	0	3	6	-
2	1	2	3	7	-
2	2	4	4	5	-
2	3	1	4	6	-
2	4	3	4	7	-
3	0	0	5	0	-
3	1	3	5	1	-
3	2	1	5	2	-
3	3	4	5	3	-
3	4	2	5	4	-
4	0	0	5	5	-
4	1	4	5	6	-
4	2	3	5	7	-
4	3	2	6	0	-
4	4	1	6	1	-
			6	2	-
			6	3	-
			6	4	-
			6	5	-
			6	6	-
			6	7	-
			7	0	-
			7	1	-
			7	2	-
			7	3	-
			7	4	-
			7	5	-
			7	6	-
			7	7	-

Для умножителя по модулю 5 множество $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ составляют пять чисел $|S| = 5$; для их представления нужен трехбитный двоичный код, так как $m = \lceil \log_2 5 \rceil = 3$.

Проведем схемную реализацию умножителя по модулю 5, не описывая подробно выполненные этапы 1–4. Будем строить MDD многозначной функции y по перестановке переменных $\langle a, b \rangle$. Разложение по переменной a показано на рис. 6, кофактор p_0 доопределяется до 0 (многозначного), кофактор p_1 – до многозначной переменной b . Разложение кофакторов p_2, p_3, p_4 по переменной b изображено на рис. 7.

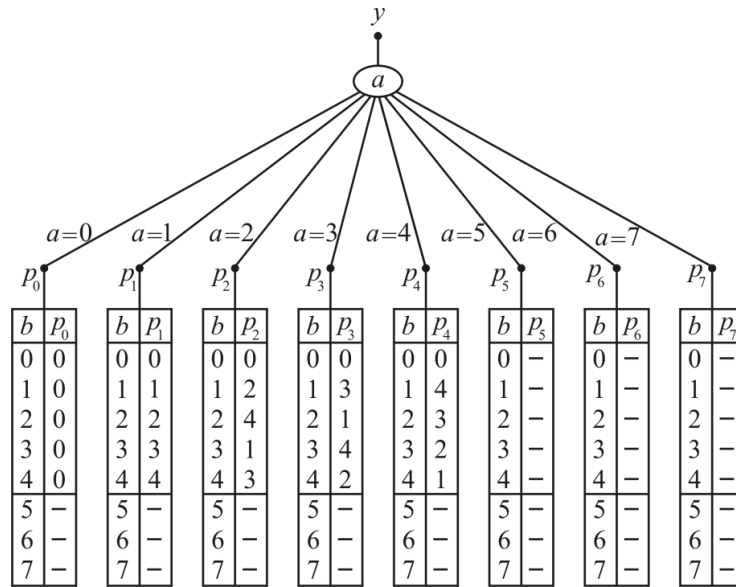


Рис. 6. Первый шаг построения MDD – разложение Шеннона по переменной a
Fig. 6. The first step of MDD construction is the Shannon expansion by variable a

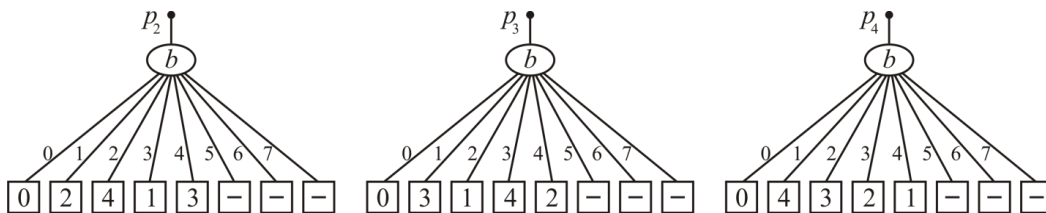


Рис. 7. Второй шаг построения MDD – разложение Шеннона нетривиальных кофакторов p_2, p_3, p_4 по переменной b
Fig. 7. The second step of MDD construction is the Shannon expansion of nontrivial cofactors p_2, p_3, p_4 by variable b

Разложение Шеннона многозначной функции y по переменной a имеет вид

$$y = a^{\{0\}} p_0 \vee a^{\{1\}} p_1 \vee a^{\{2\}} p_2 \vee a^{\{3\}} p_3 \vee a^{\{4\}} p_4 \vee a^{\{5\}} p_- \vee a^{\{6\}} p_- \vee a^{\{7\}} p_- \tag{12}$$

Многозначные кофакторы p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 попарно несовместимы. Кофактор p_- совместим с любым из перечисленных ранее. Позже кофактор p_- будет заменен кофактором p_4 , эту замену можно будет сделать и после выполнения этапа 2 булева кодирования значений многозначных переменных. Кодирование переменных и функции булевыми кодами представлено в табл. 13.

Таблица 13
Кодирование переменных и функции умножителя по модулю 5

Table 13
Coding of variables and multiplier functions modulo 5

Многозначная переменная, функция <i>Multi-valued variable, function</i>	Булев код <i>Boolean code</i>
<i>a</i>	(a_1, a_2, a_3)
<i>b</i>	(b_1, b_2, b_3)
<i>y</i>	(y_0, y_1, y_2)

Кодирование каждого многозначного кофактора своим булевым кодом приводит к пяти системам булевых функций (табл. 14).

Таблица 14
Замена многозначных кофакторов системами частичных булевых функций

Table 14
Replacement of multi-valued cofactors by systems of partial Boolean functions

Булева переменная <i>Boolean variable</i>	Кофактор <i>Cofactor</i>				
	<i>p</i> ₀	<i>p</i> ₁	<i>p</i> ₂	<i>p</i> ₃	<i>p</i> ₄
	Система частичных булевых функций <i>System of partial Boolean functions</i>				
<i>b</i> ₁ <i>b</i> ₂ <i>b</i> ₃	<i>c</i> ₁ <i>c</i> ₂ <i>c</i> ₃	<i>c</i> ₄ <i>c</i> ₅ <i>c</i> ₆	<i>c</i> ₇ <i>c</i> ₈ <i>c</i> ₉	<i>c</i> ₁₀ <i>c</i> ₁₁ <i>c</i> ₁₂	<i>c</i> ₁₃ <i>c</i> ₁₄ <i>c</i> ₁₅
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
0 0 1	0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0
0 1 0	0 0 0	0 1 0	1 0 0	0 0 1	0 1 1
0 1 1	0 0 0	0 1 1	0 0 1	1 0 0	0 1 0
1 0 0	0 0 0	1 0 0	0 1 1	0 1 0	0 1 0
1 0 1	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -
1 1 0	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -
1 1 1	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -

Анализируя булевы кофакторы из табл. 14, можно установить, что каждый из кофакторов c_1, c_2, c_3 доопределяется до булева нуля ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$), а булевы кофакторы c_4, c_5, c_6 доопределяются до булевых переменных ($c_4 = b_1, c_5 = b_2, c_6 = b_3$). Кроме того, $c_8 = c_{11}$ (в табл. 14 c_8, c_{11} выделены полужирным курсивом).

Используя коды многозначных переменных и кофакторов, перейдем от разложения Шеннона (12) частичной многозначной функции к представлению частичной векторной булевой функции:

$$(y_0, y_1, y_2) = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 (c_1, c_2, c_3) \vee \bar{a}_1 \bar{a}_2 a_3 (c_4, c_5, c_6) \vee \bar{a}_1 a_2 \bar{a}_3 (c_7, c_8, c_9) \vee \bar{a}_1 a_2 a_3 (c_{10}, c_{11}, c_{12}) \vee a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 (c_{13}, c_{14}, c_{15}) \vee a_1 \bar{a}_2 a_3 (c_-, c_-, c_-) \vee a_1 a_2 \bar{a}_3 (c_-, c_-, c_-) \vee a_1 a_2 a_3 (c_-, c_-, c_-). \quad (13)$$

Выражение (13) соответствует представлению частичной векторной функции, компонентами которой являются частичные булевы функции y_0, y_1, y_2 , зависящие от булевых переменных $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. По формуле (13) построим BDD частичной векторной булевой функции (рис. 8) и упростим его, используя соответствующее доопределение трехкомпонентных листовых вершин и правила сокращения BDD (рис. 9).

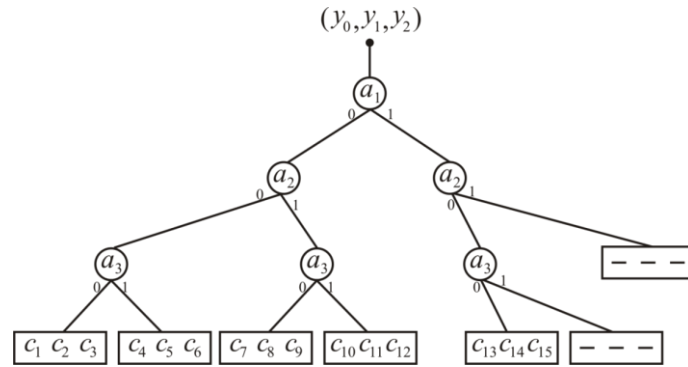


Рис. 8. BDD векторной булевой функции
Fig. 8. BDD of a vector Boolean function

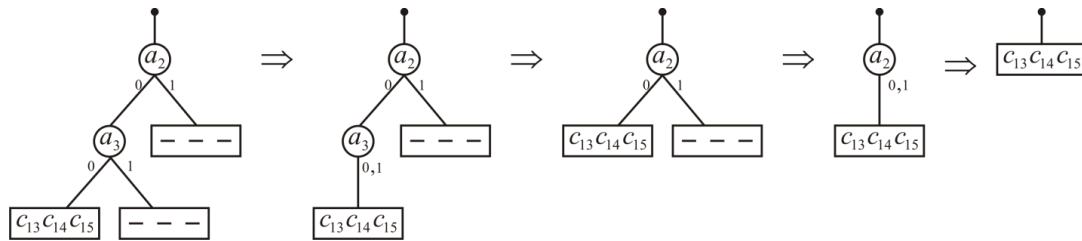


Рис. 9. Редукция подграфа BDD
Fig. 9. Reduction of the BDD subgraph

По формуле (13) запишем и упростим представления компонентных булевых функций y_0, y_1, y_2 :

$$\begin{aligned} y_0 &= \bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_1 \vee \bar{a}_1\bar{a}_2a_3c_4 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_7 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{10} \vee a_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_{13} \vee a_1\bar{a}_2a_3c_- \vee a_1a_2\bar{a}_3c_- \vee a_1a_2a_3c_- = \\ &= \bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_1 \vee \bar{a}_1\bar{a}_2a_3c_4 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_7 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{10} \vee (a_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_{13} \vee a_1\bar{a}_2a_3c_- \vee a_1a_2\bar{a}_3c_- \vee a_1a_2a_3c_-) = \\ &= \bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_1 \vee \bar{a}_1\bar{a}_2a_3c_4 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_7 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{10} \vee a_1c_{13}. \end{aligned}$$

Здесь использована замена c_- на c_{13} :

$$\begin{aligned} (a_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_{13} \vee a_1\bar{a}_2a_3c_- \vee a_1a_2\bar{a}_3c_- \vee a_1a_2a_3c_-) &= a_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_{13} \vee a_1\bar{a}_2a_3c_{13} \vee a_1a_2\bar{a}_3c_{13} \vee a_1a_2a_3c_{13} = \\ &= a_1c_{13}(\bar{a}_2\bar{a}_3 \vee \bar{a}_2a_3 \vee a_2\bar{a}_3 \vee a_2a_3) = a_1c_{13}1 = a_1c_{13}. \end{aligned}$$

Так как $c_1 = 0, c_4 = b_1$, то

$$y_0 = \bar{a}_1\bar{a}_2a_3b_1 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_7 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{10} \vee a_1c_{13}. \tag{14}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} y_1 &= \bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_2 \vee \bar{a}_1\bar{a}_2a_3c_5 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_8 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{11} \vee a_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_{14} \vee a_1\bar{a}_2a_3c_- \vee a_1a_2\bar{a}_3c_- \vee a_1a_2a_3c_- = \\ &= \bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_2 \vee \bar{a}_1\bar{a}_2a_3c_5 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_8 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{11} \vee (a_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_{14} \vee a_1\bar{a}_2a_3c_- \vee a_1a_2\bar{a}_3c_- \vee a_1a_2a_3c_-) = \\ &= \bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_2 \vee \bar{a}_1\bar{a}_2a_3c_5 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_8 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{11} \vee a_1c_{14}. \end{aligned}$$

Поскольку $c_2 = 0, c_5 = b_2, c_8 = c_{11}$, то

$$y_1 = \bar{a}_1\bar{a}_2a_3b_2 \vee \bar{a}_1a_2c_8 \vee a_1c_{14}. \tag{15}$$

Функция y_2 запишется в виде

$$\begin{aligned} y_2 &= \bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_3 \vee \bar{a}_1\bar{a}_2a_3c_6 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_9 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{12} \vee a_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_{14} \vee a_1\bar{a}_2a_3c_{15} \vee a_1a_2\bar{a}_3c_{13} \vee a_1a_2a_3c_{10} = \\ &= \bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_3 \vee \bar{a}_1\bar{a}_2a_3c_6 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_9 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{12} \vee (a_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_{15} \vee a_1\bar{a}_2a_3c_{14} \vee a_1a_2\bar{a}_3c_{13} \vee a_1a_2a_3c_{10}) = \\ &= \bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3c_3 \vee \bar{a}_1\bar{a}_2a_3c_6 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_9 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{12} \vee a_1c_{15}. \end{aligned}$$

Так как $c_3 = 0$, $c_6 = b_3$, то

$$y_2 = \bar{a}_1\bar{a}_2a_3b_3 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_9 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{12} \vee a_1c_{15}. \quad (16)$$

Частичные булевы функции из табл. 14 (кофакторы) реализуются следующими логическими уравнениями:

$$\begin{aligned} c_7 &= b_2\bar{b}_3; \quad c_8 = \bar{b}_2s_3; \quad c_9 = \bar{b}_2s_5 \vee b_2s_3; \quad c_{10} = b_2s_3; \quad c_{12} = \bar{b}_2b_3 \vee b_2\bar{b}_3; \\ c_{13} &= \bar{b}_2b_3; \quad c_{14} = b_2; \quad c_{15} = \bar{b}_2s_5 \vee b_2\bar{b}_3; \quad s_3 = \bar{b}_3b_1 \vee b_3; \quad s_5 = \bar{b}_3b_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Для получения формул (17) использовалась программа [11, с. 201] минимизации BDD-представления частичных функций с учетом возможности их доопределения. В целом система полностью определенных булевых функций, реализующая умножитель по модулю 5, имеет вид

$$\begin{aligned} y_0 &= \bar{a}_1\bar{a}_2a_3b_1 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_7 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{10} \vee a_1c_{13}; \\ y_1 &= \bar{a}_1\bar{a}_2a_3b_2 \vee \bar{a}_1a_2c_8 \vee a_1c_{14}; \\ y_2 &= \bar{a}_1\bar{a}_2a_3b_3 \vee \bar{a}_1a_2\bar{a}_3c_9 \vee \bar{a}_1a_2a_3c_{12} \vee a_1c_{15}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} c_7 &= b_2\bar{b}_3; \quad c_8 = \bar{b}_2s_3; \quad c_9 = \bar{b}_2s_5 \vee b_2s_3; \quad c_{10} = b_2s_3; \quad c_{12} = \bar{b}_2b_3 \vee b_2\bar{b}_3; \\ c_{13} &= \bar{b}_2b_3; \quad c_{14} = b_2; \quad c_{15} = \bar{b}_2s_5 \vee b_2\bar{b}_3; \quad s_3 = \bar{b}_3b_1 \vee b_3; \quad s_5 = \bar{b}_3b_1. \end{aligned}$$

Заменяя ДНФ булевых функций y_0 , y_1 , y_2 в формулах (18) разложениями Шеннона, получим многоуровневое BDD-представление (рис. 10), которому соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} y_0 &= \bar{a}_1z_1 \vee a_1c_{13}; \quad z_1 = \bar{a}_2z_2 \vee a_2z_3; \quad z_2 = a_3b_1; \quad z_3 = \bar{a}_3c_7 \vee a_3c_{10}; \quad y_1 = \bar{a}_1z_4 \vee a_1c_{14}; \\ z_4 &= \bar{a}_2z_5 \vee a_2c_8; \quad z_5 = a_3b_2; \quad y_2 = \bar{a}_1z_6 \vee a_1c_{15}; \quad z_6 = \bar{a}_2z_7 \vee a_2z_8; \quad z_7 = a_3b_3; \quad z_8 = \bar{a}_3c_9 \vee a_3c_{12}; \\ c_7 &= b_2\bar{b}_3; \quad c_8 = \bar{b}_2s_3; \quad c_9 = \bar{b}_2s_5 \vee b_2s_3; \quad c_{10} = b_2s_3; \quad c_{12} = \bar{b}_2b_3 \vee b_2\bar{b}_3; \quad c_{13} = \bar{b}_2b_3; \\ c_{14} &= b_2; \quad c_{15} = \bar{b}_2s_5 \vee b_2\bar{b}_3; \quad s_3 = \bar{b}_3b_1 \vee b_3; \quad s_5 = \bar{b}_3b_1. \end{aligned} \quad (19)$$

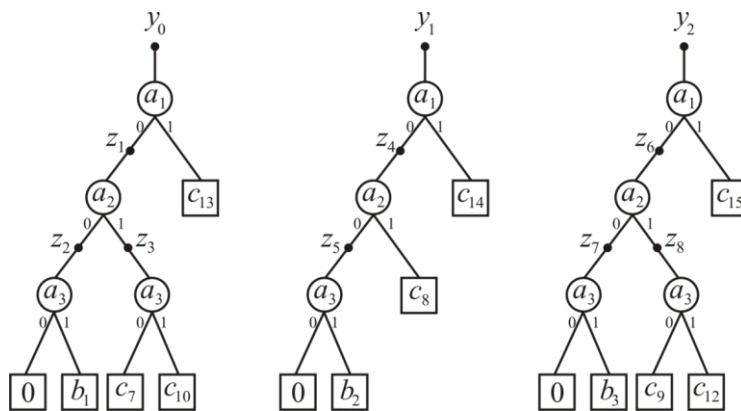


Рис. 10. BDD, заменяющие разложение Шеннона многозначной функции y по многозначной переменной a

Fig. 10. BDD replacing the Shannon expansion of a multi-valued function y by a multi-valued variable a

Синтез схем умножителя по модулю 5. Рассмотрим четыре варианта (способа) VHDL-описаний функций умножителя по модулю 5 и результаты синтеза логических схем по этим описаниям:

1. VHDL-описание полностью определенной многозначной функции, задающей область ее определенных значений.

Листинг 1. VHDL-описание полностью определенной многозначной функции умножителя по модулю 5

```
Library IEEE;
use IEEE.STD_LOGIC_1164.all;
entity mult_mod_5 is
  port ( a, b : in integer range 0 to 4;
         y : out integer range 0 to 4);
end mult_mod_5;
architecture beh of mult_mod_5 is
  begin
  process (a,b)
  begin
  if ((a = 0) or (b = 0)) then y <= 0; end if;
  if ((a = 1) and (b = 1)) then y <= 1; end if;
  if ((a = 1) and (b = 2)) then y <= 2; end if;
  if ((a = 1) and (b = 3)) then y <= 3; end if;
  if ((a = 1) and (b = 4)) then y <= 4; end if;
  if ((a = 2) and (b = 1)) then y <= 2; end if;
  if ((a = 2) and (b = 2)) then y <= 4; end if;
  if ((a = 2) and (b = 3)) then y <= 1; end if;
  if ((a = 2) and (b = 4)) then y <= 3; end if;
  if ((a = 3) and (b = 1)) then y <= 3; end if;
  if ((a = 3) and (b = 2)) then y <= 1; end if;
  if ((a = 3) and (b = 3)) then y <= 4; end if;
  if ((a = 3) and (b = 4)) then y <= 2; end if;
  if ((a = 4) and (b = 1)) then y <= 4; end if;
  if ((a = 4) and (b = 2)) then y <= 3; end if;
  if ((a = 4) and (b = 3)) then y <= 2; end if;
  if ((a = 4) and (b = 4)) then y <= 1; end if;
  end process;
end architecture beh;
```

2. VHDL-описание системы частичных функций, кодирование чисел стандартное.

Табл. 15 и листинг 2 (VHDL-описание) задают одну и ту же систему частичных булевых функций, реализующих умножитель по модулю 5.

Таблица 15

Умножитель по модулю 5 (система частичных булевых функций)

Table 15

The multiplier modulo 5 is a system of partial Boolean functions

Область определенных значений системы частичных булевых функций <i>The domain of the defined values of a system of partial Boolean functions</i>		Область неопределенных значений системы частичных булевых функций <i>The domain of undefined values of a system of partial Boolean functions</i>	
$a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3$	$y_0 y_1 y_2$	$a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3$	$y_0 y_1 y_2$
000 000	000	000 101	- - -
000 001	000	000 110	- - -
000 010	000	000 111	- - -
000 011	000	001 101	- - -
000 100	000	001 110	- - -
001 000	000	001 111	- - -
001 001	001	010 101	- - -
001 010	010	010 110	- - -
001 011	011	010 111	- - -
001 100	100	011 101	- - -
010 000	000	011 110	- - -

Окончание табл. 15
End of table 15

Область определенных значений системы частичных булевых функций <i>The domain of the defined values of a system of partial Boolean functions</i>					Область неопределенных значений системы частичных булевых функций <i>The domain of undefined values of a system of partial Boolean functions</i>			
a_1	a_2	a_3	b_1	b_2 b_3	y_0	y_1	y_2	
0	1	0	0	0	0	1	0	-
0	1	0	0	1	1	0	0	-
0	1	0	0	1	1	1	0	-
0	1	0	1	0	0	1	1	-
0	1	0	1	0	1	1	1	-
0	1	0	1	1	0	0	0	-
0	1	0	1	1	0	0	1	-
0	1	0	1	1	0	1	0	-
0	1	0	1	1	0	1	1	-
0	1	1	0	0	0	0	0	-
0	1	1	0	0	0	0	1	-
0	1	1	0	0	0	1	0	-
0	1	1	0	0	0	1	1	-
0	1	1	0	1	0	0	0	-
0	1	1	0	1	0	0	1	-
0	1	1	0	1	0	1	0	-
0	1	1	0	1	0	1	1	-
0	1	1	1	0	0	0	0	-
0	1	1	1	0	0	0	1	-
0	1	1	1	0	0	1	0	-
0	1	1	1	0	0	1	1	-
0	1	1	1	1	0	0	0	-
0	1	1	1	1	0	0	1	-
0	1	1	1	1	0	1	0	-
0	1	1	1	1	0	1	1	-
0	1	1	1	1	1	0	0	-
0	1	1	1	1	1	0	1	-
0	1	1	1	1	1	0	1	-
0	1	1	1	1	1	1	0	-
0	1	1	1	1	1	1	1	-
1	0	0	0	0	0	0	0	-
1	0	0	0	0	0	0	1	-
1	0	0	0	0	0	0	1	-
1	0	0	0	1	0	0	0	-
1	0	0	0	1	0	0	1	-
1	0	0	0	1	0	1	0	-
1	0	0	0	1	0	1	1	-
1	0	0	1	0	0	0	0	-
1	0	0	1	0	0	0	1	-
1	0	0	1	0	0	1	0	-
1	0	0	1	0	0	1	1	-
1	0	0	1	1	0	0	0	-
1	0	0	1	1	0	0	1	-
1	0	0	1	1	0	1	0	-
1	0	0	1	1	0	1	1	-
1	0	1	0	0	0	0	0	-
1	0	1	0	0	0	0	1	-
1	0	1	0	0	0	1	0	-
1	0	1	0	0	0	1	1	-
1	0	1	0	1	0	0	0	-
1	0	1	0	1	0	0	1	-
1	0	1	0	1	0	1	0	-
1	0	1	0	1	0	1	1	-
1	0	1	1	0	0	0	0	-
1	0	1	1	0	0	0	1	-
1	0	1	1	0	0	1	0	-
1	0	1	1	0	0	1	1	-
1	0	1	1	1	0	0	0	-
1	0	1	1	1	0	0	1	-
1	0	1	1	1	0	1	0	-
1	0	1	1	1	0	1	1	-
1	0	1	1	1	1	0	0	-
1	0	1	1	1	1	0	1	-
1	0	1	1	1	1	0	1	-
1	0	1	1	1	1	1	0	-
1	0	1	1	1	1	1	1	-
1	1	0	0	0	0	0	0	-
1	1	0	0	0	0	0	1	-
1	1	0	0	0	0	0	1	-
1	1	0	0	1	0	0	0	-
1	1	0	0	1	0	0	1	-
1	1	0	0	1	0	1	0	-
1	1	0	0	1	0	1	1	-
1	1	0	1	0	0	0	0	-
1	1	0	1	0	0	0	1	-
1	1	0	1	0	0	1	0	-
1	1	0	1	0	0	1	1	-
1	1	0	1	1	0	0	0	-
1	1	0	1	1	0	0	1	-
1	1	0	1	1	0	1	0	-
1	1	0	1	1	0	1	1	-
1	1	1	0	0	0	0	0	-
1	1	1	0	0	0	0	1	-
1	1	1	0	0	0	0	1	-
1	1	1	0	0	1	0	0	-
1	1	1	0	0	1	0	1	-
1	1	1	0	0	1	1	0	-
1	1	1	0	0	1	1	1	-
1	1	1	1	0	0	0	0	-
1	1	1	1	0	0	0	1	-
1	1	1	1	0	0	0	1	-
1	1	1	1	0	0	1	0	-
1	1	1	1	0	0	1	1	-
1	1	1	1	1	0	0	0	-
1	1	1	1	1	0	0	1	-
1	1	1	1	1	0	1	0	-
1	1	1	1	1	0	1	1	-
1	1	1	1	1	1	0	0	-
1	1	1	1	1	1	0	1	-
1	1	1	1	1	1	0	1	-
1	1	1	1	1	1	1	0	-
1	1	1	1	1	1	1	1	-

В представленном ниже VHDL-описании функций умножителя по модулю 5 вектор $y = (y_0, y_1, y_2)$ задает компонентные частичные булевы функции, а вектор $x = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ – это вектор входных переменных.

Листинг 2. VHDL-описание системы частичных булевых функций, задающей функционирование умножителя по модулю 5

```

Library IEEE;
use IEEE.STD_LOGIC_1164.all;
entity mult_5_mod is
  port ( x : in std_logic_vector (1 to 6);
        y : out std_logic_vector (1 to 3));
end;
architecture BEHAVIOR of mult_5_mod is
begin
y <= "000" when x = "000000" else
    "000" when x = "000001" else
    "000" when x = "000010" else
    "000" when x = "000011" else
    "000" when x = "000100" else
    "000" when x = "001000" else
    "001" when x = "001001" else
    "010" when x = "001010" else
    "011" when x = "001011" else
    "100" when x = "001100" else
    "000" when x = "010000" else
    "010" when x = "010001" else
    "100" when x = "010010" else

```

```

"001" when x = "010011" else
"011" when x = "010100" else
"000" when x = "011000" else
"011" when x = "011001" else
"001" when x = "011010" else
"100" when x = "011011" else
"010" when x = "011100" else
"000" when x = "100000" else
"100" when x = "100001" else
"011" when x = "100010" else
"010" when x = "100011" else
"001" when x = "100100" else
"---";
end BEHAVIOR;

```

3. BDDI-оптимизация системы полностью определенных булевых функций.

Под BDDI (от англ. Binary Decision Diagram with Inverse cofactors) понимается ориентированный бесконтурный граф, задающий последовательные разложения Шеннона системы булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$ по всем ее переменным x_1, \dots, x_n при заданном порядке (перестановке) переменных, по которым проводятся разложения, при условии нахождения пар взаимно инверсных кофакторов [18]. Построение BDDI осуществлялось программой BDD_Builder [18] при «нулевом доопределении» исходной системы частичных функций, т. е. оптимизировалась система полностью определенных функций, получающаяся заменой в табл. 15 всех неопределенных значений частичных булевых функций нулями.

4. Оптимизация MDD и переход к графам BDD, которым соответствуют уравнения (19).

Результаты синтеза умножителя по модулю 5 приведены в табл. 16.

Таблица 16
Параметры логических схем, реализующих умножитель по модулю 5

Table 16
Parameters of logic circuits implementing a multiplier modulo 5

Вариант <i>Option</i>	Способ оптимизации, функциональное описание схемы <i>Optimization method, functional description of the circuit</i>	Площадь схемы, у. е. <i>Area of the circuit, c. u.</i>	Задержка схемы, нс <i>Circuit delay, ns</i>
1	Оптимизации нет, задание исходной многозначной полностью определенной функции в листинге 1	22 281	5,87
2	Оптимизации нет, неоптимизированное представление системы частичных функций в листинге 2	9 012	3,91
3	BDDI-оптимизация [18], исходное задание для BDDI-оптимизации в табл. 15	10 602	3,20
4	Предлагаемый способ: оптимизация MDD и переход к BDD, задание функций схемы уравнениями (19)	*8 554	*2,03

Четвертый вариант описания умножителя по модулю 5 (предлагаемый способ) позволил получить схему наименьшей площади и с наименьшей задержкой. Эти решения помечены в табл. 16 символом *.

Анализируя результаты синтеза, можно установить, что модели описания функционирования умножителя, использующие область неопределенных значений (второй и четвертый варианты), позволяют получать логические схемы меньшей площади и меньшей задержки по сравнению со способами описаний, базирующимися на описании только области определенных значений многозначной функции умножителя (первым вариантом) либо булевых полностью определенных функций (третьим вариантом).

Заключение. Предложенный способ рационального доопределения частичных многозначных диаграмм решений в процессе их построения позволяет находить совместимые кофакторы, которым после булева кодирования соответствуют подсистемы булевых функций. Это дает возможность сокращать число вершин MDD (кофакторов), что приводит к более экономичным по площади логическим схемам. Наряду с булевой минимизацией в классе ДНФ функциональных описаний двухоперандных модулярных устройств [2, 3] предложенный в статье способ доопределения MDD может применяться для оптимизации логических представлений последовательностей арифметических операций, операнды которых имеют ограниченные диапазоны значений, и для оптимизации многооперандных модулярных устройств, особенно в тех случаях, когда соответствующие им многозначные функции имеют большие области неопределенных значений.

Список использованных источников

1. Модулярные параллельные вычислительные структуры нейропроцессорных систем / Н. И. Червяков [и др.]. – М. : Физматлит, 2003. – 288 с.
2. Особенности проектирования модулярных умножителей с помощью современных САПР / Р. А. Соловьев [и др.]. // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем (МЭС). – 2016. – № 1. – С. 249–254.
3. Амербаев, В. М. Реализация библиотеки модульных арифметических операций на основе алгоритмов минимизации логических функций / В. М. Амербаев, Р. А. Соловьев, Д. В. Тельпухов // Изв. ЮФУ. Техн. науки. – 2013. – № 7. – С. 221–225.
4. Multi-Valued Decision Diagrams for Logic Synthesis and Verification / T. Kam [et al.]. – Berkeley : College of Engineering University of California, 1996. – 39 p.
5. Bryant, R. E. Graph-based algorithms for Boolean function manipulation / R. E. Bryant // IEEE Transactions on Computers. – 1986. – Vol. 35, no. 8. – P. 677–691.
6. Drechsler, R. Binary Decision Diagrams: Theory and Implementation / R. Drechsler, B. Becker. – Springer, 1998. – 210 p.
7. Ebendt, R. Advanced BDD Optimization / R. Ebendt, G. Fey, R. Drechsler. – Springer, 2005. – 222 p.
8. Bryant, R. E. Ordered binary decision diagrams / R. E. Bryant, C. Meinel // Logic Synthesis and Verification / eds.: S. Hassoun, T. Sasao, R. K. Brayton. – Kluwer Academic Publishers, 2002. – P. 285–307.
9. Meinel, C. Algorithms and Data Structures in VLSI Design: OBDD – Foundations and Applications / C. Meinel, T. Theobald. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1998. – 267 p.
10. Кнут, Д. Э. Искусство программирования. Т. 4, А. Комбинаторные алгоритмы. Ч. 1 : пер. с англ. / Д. Э. Кнут. – М. : Вильямс, 2013. – 960 с.
11. Бибило, П. Н. Применение диаграмм двоичного выбора при синтезе логических схем / П. Н. Бибило. – Минск : Беларус. навука, 2014. – 231 с.
12. Logic Minimization Algorithm for VLSI Synthesis / K. R. Brayton [et al.]. – Boston, Kluwer Academic Publishers, 1984. – 193 p.
13. Торопов, Н. Р. Минимизация систем булевых функций в классе ДНФ / Н. Р. Торопов // Логическое проектирование : сб. науч. тр. – Минск : Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1999. – Вып. 4. – С. 4–19.
14. Брейтон, Р. К. Синтез многоуровневых комбинационных логических схем / Р. К. Брейтон, Г. Д. Хэчтел, А. Л. Санджованни-Винченцелли // ТИИЭР. – 1990. – Т. 78, № 2. – С. 38–83.
15. Бибило, П. Н. Оценка энергопотребления логических КМОП-схем по их переключательной активности / П. Н. Бибило, Н. А. Кириенко // Микроэлектроника. – 2012. – № 1. – С. 65–77.
16. Бибило, П. Н. Системы проектирования интегральных схем на основе языка VHDL. StateCAD, ModelSim, LeonardoSpectrum / П. Н. Бибило. – М. : СОЛОН-Пресс, 2005. – 384 с.
17. Закревский, А. Д. Логический синтез каскадных схем / А. Д. Закревский. – М. : Наука, 1981. – 416 с.
18. Бибило, П. Н. Использование полиномов Жегалкина при минимизации многоуровневых представлений систем булевых функций на основе разложения Шеннона / П. Н. Бибило, Ю. Ю. Ланкевич // Программная инженерия. – 2017. – № 8. – С. 369–384.
19. Бибило П. Н. Минимизация BDDI-представлений систем не полностью определенных булевых функций / П. Н. Бибило // Программная инженерия. – 2020. – Т. 11, № 3. – С. 152–168.
20. Ashenden, P. J. VHDL-2008. Just the New Stuff / P. J. Ashenden, J. Lewis. – Burlington : Morgan Kaufman Publishers, 2008. – 909 p.

References

1. Chervyakov N. I., Sakhnyuk P. A., Shaposhnikov A. V., Ryadnov S. A. *Modulyarnye parallel'nye vychislitel'nye struktury neyroprotsessornykh system. Modular Parallel Computing Structures of Neuroprocessor Systems*. Moscow, Fizmatlit, 2003, 288 p. (In Russ.).
2. Solov'ev R. A., Tel'puhov D. V., Balaka E. S., Ruhlov V. S., Mihmel' A. S. *Design features of modular multipliers using modern CAD. Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem (MES) [Problems of Developing Promising Micro- and Nanoelectronic Systems (MES)]*, 2016, no. 1, pp. 249–254 (In Russ.).
3. Amerbaev V. M., Solov'ev R. A., Tel'puhov D. V. *Implementation of a library of modular arithmetic operations based on algorithms for minimizing logical functions. Izvestija Juzhnogo federal'nogo universiteta. Tehnicheskie nauki [Proceedings of the Southern Federal University. Technical Science]*, 2013, no. 7, pp. 221–225 (In Russ.).
4. Kam T., Villa T., Brayton R. K., Sangiovanni-Vincentelli A. L. *Multi-Valued Decision Diagrams for Logic Synthesis and Verification*. Berkeley, College of Engineering University of California, 1996, 39 p.
5. Bryant R. E. Graph-based algorithms for Boolean function manipulation. *IEEE Transactions on Computers*, 1986, vol. 35, no. 8, pp. 677–691.
6. Drechsler R. *Binary Decision Diagrams: Theory and Implementation*. Springer, 1998, 210 p.
7. Ebendt R., Fey G., Drechsler R. *Advanced BDD Optimization*. Springer, 2005, 222 p.
8. Bryant R. E., Meinel C. Ordered binary decision diagrams. *Logic Synthesis and Verification*. In S. Hassoun, T. Sasao, R. K. Brayton (eds.). Kluwer Academic Publishers, 2002, pp. 285–307.
9. Meinel C., Theobald T. *Algorithms and Data Structures in VLSI Design: OBDD – Foundations and Applications*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1998, 267 p.
10. Knuth D. E. *The Art of Computer Programming, Volume 4A: Combinatorial Algorithms, Part 1*. Addison-Wesley Professional, 2011, 912 p.
11. Bibilo P. N. *Primenenie diagram dvoichnogo vybora pri sinteze logicheskikh shem. Application of Binary Decision Diagrams in the Synthesis of Logic Circuits*. Minsk, Belaruskaja navuka, 2014, 231 p. (In Russ.).
12. Brayton R. K., Hachtel G. D., McMullen C., Sangiovanni-Vincentelli A. L. *Logic Minimization Algorithm for VLSI Synthesis*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1984, 193 p.
13. Toropov N. R. *Minimization of systems of Boolean functions in the class DNF. Logicheskoe proektirovanie : sbornik nauchnykh trudov [Logical Design: Collection of Scientific Papers]*. Minsk, Institut tehnikoskoj kibernetiki Nacional'noj akademii nauk Belarusi, 1999, iss. 4, pp. 4–19 (In Russ.).
14. Brayton R. K., Hachtel G. D., Sangiovanni-Vincentelli A. L. *Synthesis of multi-level combinational logic circuits. Trudy Institute inzhenerov po jelektronike i radiotekhnike [Proceedings of the Institute of Electronics and Radio Engineering]*, 1990, vol. 78, no. 2, pp. 38–83 (In Russ.).
15. Bibilo P. N., Kirienko N. A. *Estimating energy consumption in logical CMOS circuits based on their switching activity. Mikroelektronika [Microelectronics]*, 2012, no. 1, pp. 65–77 (In Russ.).
16. Bibilo P. N. *Cistemy proektirovaniya integral'nykh skhem na osnove yazyka VHDL. StateCAD, ModelSim, LeonardoSpectrum. Integrated Circuit Design Systems Based on the VHDL Language. StateCAD, ModelSim, LeonardoSpectrum*. Moscow, SOLON-Press, 2005, 384 p. (In Russ.).
17. Zakrevskij A. D. *Logicheskij sintez kaskadnykh skhem. Logical Synthesis of Cascading Circuit*. Moscow, Nauka, 1981, 416 p. (In Russ.).
18. Bibilo P. N., Lankevich Yu. Yu. *The use of Zhegalkin polynomials in minimizing multi-level representations of systems of Boolean functions based on the Shannon expansion. Programmnyaya inzheneriya [Software Engineering]*, 2017, no. 8, pp. 369–384 (In Russ.).
19. Bibilo P. N. *Minimization of Binary Decision Diagrams for Systems of Incompletely Defined Boolean Functions using inverse cofactors. Programmnyaya inzheneriya [Software Engineering]*, 2020, vol. 11, no. 3, pp. 152–168 (In Russ.).
20. Ashenden P. J., Lewis J. *VHDL-2008. Just the New Stuff*. Burlington, Morgan Kaufman Publishers, 2008, 909 p.

Информация об авторе

Бибилу Петр Николаевич, доктор технических наук, профессор, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.
E-mail: bibilo@newman.bas-net.by

Information about the author

Petr N. Bibilo, D. Sc. (Eng.), Prof., The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.
E-mail: bibilo@newman.bas-net.by