DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), 57 - 69, DOI: 10.33683/ddm.23.13.3 OPEN ACCESS

"Ti sfido in altezza": da un gioco-indagine in ambiente di geometria dinamica alla discussione di attributi critici delle figure

"The height challenge": from the game in a dynamic geometry environment to the discussion of critical attributes of the figures

Carlotta Soldano e Cristina Sabena
Università degli Studi di Torino – Italia

carlotta.soldano@unito.it, cristina.sabena@unito.it

Sunto / L'intreccio tra componenti concettuali e figurali è una caratteristica fondamentale del pensiero geometrico e costituisce un importante obbiettivo didattico a tutti i livelli scolastici. In questo articolo si considerano le altezze dei triangoli inquadrando il problema da un punto di vista teorico e analizzando un'attività didattica sperimentata in classi seconde di scuola secondaria di primo grado. L'attività è centrata su un gioco-indagine con feedback digitale implementato in GeoGebra, seguito da una discussione di classe. Attraverso l'analisi di estratti dalla discussione di classe verranno mostrate le potenzialità didattiche della progettazione, con particolare riferimento all'evoluzione dell'immagine concettuale personale degli studenti.

Parole chiave: gioco-indagine; feedback; discussione di classe; immagine concettuale; attributi critici.

Abstract / The intertwining of conceptual and figural components is a fundamental feature of geometric thinking and constitutes an important didactic goal at all school levels. This article focuses on the heights of the triangles by framing the problem from a theoretical point of view and analyzing a didactic activity experimented in seventh grade classes. The activity is centered on an inquiring-game with digital feedback implemented in GeoGebra, followed by a class discussion. Through the analysis of extracts from the class discussion, the teaching potential of the design will be shown, with particular reference to the evolution of the students' personal concept image.

Keywords: inquiring-game; feedback; class discussion; concept image; critical attributes.

© 2023 Soldano Carlotta e Sabena Cristina. Questo è un articolo Open Access, sottoposto a un processo di revisione tra pari a doppio cieco, pubblicato dal Centro competenze didattica della matematica e dal Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione del DFA-SUPSI in collaborazione con il DECS. L'articolo è distribuito sotto i termini della Licenza Creative Commons Attribuzione 4.0 Internazionale (CC BY 4.0) che permette di usare, condividere e modificare l'articolo su qualsiasi mezzo a patto che l'autore e la fonte originale siano citati.

1 Il delicato ruolo degli esempi in geometria

Nella maggior parte dei libri di testo della scuola primaria, le altezze dei triangoli, intese come segmenti,[1] vengono esemplificate prevalentemente su triangoli equilateri o isosceli. La scelta di usare queste tipologie di triangolo può indurre gli studenti a pensare erroneamente che le altezze dividano sempre a metà l'angolo al vertice e che un loro estremo coincida sempre con il punto medio del lato opposto al vertice dal quale sono tracciate. In altri termini, elementi non contenuti nella definizione di altezza, perché non caratterizzanti il concetto, vengono assunti come attributi critici, ossia proprietà che un esempio di un concetto deve avere per poter essere considerato tale[2] (Hershkowitz, 1987; Hershkowitz & Vinner, 1983). L'occhio inesperto dello studente viene quindi ingannato da elementi accidentali osservabili negli esempi. Inoltre, una base e la relativa altezza sono spesso rappresentate seguendo l'orientamento orizzontale-verticale della pagina. Configurazioni di questo tipo sono molto comode perché in sintonia con il modo in cui osserviamo il mondo che ci circonda ma possono indurre gli studenti a pensare che la base e la relativa altezza debbano sempre essere orizzontali o verticali. Anche nei libri di testo della scuola secondaria di primo grado,[3] l'altezza rappresentata in un triangolo è generalmente una sola ed è quasi sempre quella relativa al lato posizionato secondo l'orientamento orizzontale della pagina. Dunque, le problematiche relative allo studio del concetto di altezza riscontrate nella scuola primaria[4] tendono a permanere anche nel successivo segmento scolastico.
Le errate deduzioni descritte nel paragrafo precedente sono ricollegabili a processi spontanei di categorizzazione di cose, persone o eventi messi in atto nella vita di tutti i giorni. Nell'ambito della psicologia cognitiva, gli studi di Eleonor Rosch (1999) hanno evidenziato la presenza di due dimensioni all'interno della struttura del sistema categoriale. La prima è una cosiddetta *dimensione verticale*, secondo cui i rapporti tra le categorie vengono stabiliti gerarchicamente sulla base di una tassonomia a tre livelli: sovraordinata, base, subordinata. Ad esempio, poligoni – triangoli – triangoli isosceli rappresentano rispettivamente il livello sovraordinato, base e subordinato. La seconda è una dimensione detta *orizzontale* e prevede un'organizzazione interna alla stessa categoria, la quale ruota intorno ai prototipi, «i casi più evidenti di appartenenza ad una categoria definiti operativamente dai giudizi delle persone sulla bontà dell'appartenenza ad una data categoria» (Rosch, 1999, p. 196, traduzione delle autrici). I prototipi sono fondamentali nella costruzione dei concetti e i meccanismi che portano alla loro formazione secondo Rosch possono avere natura fisiologica, esperienziale e culturale.
La didattica della matematica ha individuato nell'utilizzo dei prototipi un elemento delicato per l'apprendimento della geometria. Riprendendo gli studi di Rosch, Hershkowitz (1987) designa come prototipi di un concetto gli «esempi classici» o i «"super" esempi».

> «Ogni "concetto" ha una serie di attributi critici e una serie di esempi. Nell'insieme degli esempi di un concetto ci sono i "super" esempi: - i prototipi (Rosch & Mervis, 1975); questi sono gli esempi classici. In altre parole, tutti gli esempi di un concetto sono matematicamente uguali, perché sono conformi alla definizione del concetto e contengono tutti i suoi attributi critici, ma sono diversi l'uno dall'altro psicologicamente. (Tutti gli esempi sono (matematicamente) uguali, ma alcuni sono più uguali di altri – scusandomi con George Orwell)».
>
> (Hershkowitz, 1987, p. 240, traduzione delle autrici)

1. Il termine "altezza" ha molti significati anche nel linguaggio quotidiano. In geometria Stella Baruk (1992/1998) ne identifica tre: una retta, un segmento, una lunghezza. In questo articolo si utilizzerà il termine nel senso di segmento.
2. Nel caso dell'altezza di un triangolo, intendendo l'altezza come segmento, sono attributi critici: la coincidenza di un estremo dell'altezza con un vertice del triangolo e l'appartenenza dell'altro estremo al lato opposto o al suo prolungamento; la perpendicolarità tra la retta contenente l'altezza e la retta contenente la base; la formazione di due angoli retti tra l'altezza e la retta contenente la base.
3. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
4. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

Quando nelle produzioni degli studenti è riconoscibile la selezione di attributi non critici e la loro estensione a tutti gli esempi di un dato concetto matematico, si parla di *effetto prototipo*. L'utilizzo predominante nella prassi didattica di altezze verticali o aventi un estremo nel punto medio della base del triangolo è molto rischioso, perché può portare gli studenti a selezionare questi attributi (essere verticale, avere un estremo nel punto medio della base) come critici per il concetto di altezza. Applicando questo impianto teorico, si può ipotizzare che quando il prototipo di altezza per uno studente coincide con l'altezza del triangolo isoscele, ossia con un esempio di altezza appartenente a un livello subordinato, l'alunno mostrerà difficoltà a riconoscere e/o produrre altezze di figure geometriche che appartengono al livello base o sovraordinato. È possibile che inizialmente lo studente riesca a operare correttamente con tale prototipo a livello subordinato (quindi sui triangoli isosceli ed equilateri), ma successivamente, quando incontrerà esempi dello stesso concetto appartenenti a livelli sovraordinato o base (triangoli non isosceli o non equilateri, quadrilateri), il prototipo a sua disposizione lo porterà a commettere errori o a trovarsi in situazioni conflittuali.
Gli esempi che vengono in mente agli studenti dipendono fortemente dalle situazioni vissute, infatti lo spazio degli esempi, ossia lo spazio metaforico che contiene alcuni esempi e ne esclude altri, in cui esempi diversi ricoprono ruoli differenti, è diverso nel contenuto per ciascuno studente, varia nel tempo e dipende dal contesto (Watson & Mason, 2005). Uno spazio degli esempi contenente prevalentemente esempi prototipici potrà essere con il tempo ingrandito grazie all'esposizione a nuove situazioni e nuovi contesti.
Più in generale, facendo riferimento agli studi di Tall e Vinner (1981), potremmo dire che l'*immagine concettuale personale dello studente*, ossia

> «[…] la struttura cognitiva associata al concetto, la quale include tutte le immagini mentali e le proprietà e i processi associati […] costruita negli anni attraverso vari tipi di esperienze, che cambia quando l'individuo incontra nuovi stimoli e matura».
>
> (Tall & Vinner, 1981, p. 152, traduzione delle autrici)

può contenere elementi in conflitto con la definizione formale del concetto, che è stabilita dalla comunità dei matematici con riferimento a una certa teoria. Hershkowitz (1987) parla di *misconcetto* per indicare un'immagine concettuale che o è parziale o contiene elementi in conflitto con la definizione formale del concetto. L'utilizzo prevalente se non esclusivo di esempi prototipici nella prassi didattica (come visto, incoraggiata dai libri di testo) favorisce la formazione di tali misconcetti geometrici.
Evidenze in tal senso sono osservabili negli studenti anche attraverso i risultati di alcuni quesiti somministrati dall'Invalsi[5] nelle prove standardizzate di matematica. Emblematico è il quesito di grado 5 del 2017 (**Figura 1**) in cui, a partire da quattro possibili rappresentazioni di altezze di triangoli, si chiede agli studenti di individuare quella non corretta.

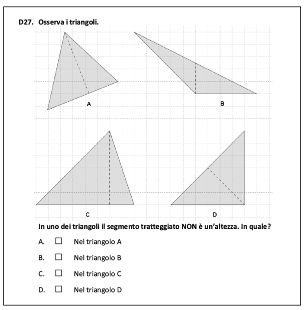

Figura 1. Quesito Invalsi di grado 5 – 2017.

5. Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione, in Italia.

La risposta corretta è stata selezionata da poco meno del 40% degli studenti: circa il 60% non riconosce nell’opzione B un non-esempio di altezza. È plausibile ipotizzare che l’orientamento verticale di tale segmento sia stato interpretato dagli studenti come attributo critico di altezza, ossia che l’effetto prototipo abbia prodotto risposte non corrette. Tra le risposte non corrette il 13,5% degli studenti ha selezionato la risposta A e il 39,1% ha selezionato la risposta D, probabilmente a causa dell’orientamento non prototipico delle altezze rappresentate. Infine, il 6,2% degli studenti che ha selezionato la risposta C probabilmente non ha prestato attenzione al “NON” presente nel quesito. Come evidenziano Botta e Sbaragli (2016) attraverso l’analisi di prove Invalsi, questo tipo di difficoltà permane anche in allievi di scuola secondaria di primo e secondo grado.[6]

Certamente i libri di testo hanno parte della responsabilità nel favorire questo tipo di errori, che tuttavia hanno radici profonde nella natura stessa degli oggetti del ragionamento geometrico. Come messo in luce dalle ricerche di Fischbein (1993), il ragionamento geometrico si basa su concetti che riflettono proprietà figurali (come forma, posizione, grandezza) e allo stesso tempo qualità concettuali (come idealità, generalità, astrattezza, perfezione): per evidenziare la coesistenza di questi due aspetti, Fischbein parla di *concetti figurali*. Costruire un concetto figurale vuol dire perseguire «l’integrazione di proprietà concettuali e figurali in una struttura mentale unitaria, con la predominanza dei vincoli concettuali su quelli figurali […]» (Fischbein, 1993, p. 156, traduzione delle autrici). Nei concetti figurali degli studenti le due componenti figurale e concettuale non sempre convivono in modo armonico, in quanto tipicamente la componente figurale tende a prevaricare e a sfuggire a una forma di controllo di tipo teorico, aderendo a leggi percettive o gestaltiche (Fischbein, 1993). I concetti figurali non sono né innati né naturali, al contrario la loro costruzione è un traguardo che deve essere supportato con cura da adeguate esperienze didattiche.

2 Il gioco-indagine sulle altezze del triangolo

Queste riflessioni hanno costituito la base per una progettazione didattica mirata a far evolvere l’immagine concettuale personale degli studenti e allargare lo spazio degli esempi a includere casi non prototipici di altezza di un triangolo.

Sono state progettate attività di gioco-indagine basate su sfide tra due giocatori all’interno di ambienti di geometria dinamica, seguite da una riflessione guidata (scheda di lavoro) e da una discussione di classe. I giochi-indagine sono stati usati come metodologia didattica in ricerche precedenti (si vedano, ad esempio, Soldano, 2019; Soldano & Arzarello, 2017) e hanno mostrato di incentivare l’esplorazione di figure non-prototipiche, ossia esempi che tradizionalmente non vengono usati nei libri di testo o nella prassi didattica (ad esempio un triangolo con nessun lato in direzione orizzontale) (Soldano & Sabena, 2019). Alla base delle dinamiche di questo tipo di giochi vi sono l’approccio della logica dell’indagine e i giochi semantici tra un verificatore e un falsificatore, attraverso i quali viene stabilita la verità di enunciati matematici del tipo “per ogni *x*… esiste *y*…” (Hintikka, 1998, 1999). Il falsificatore controlla la variabile *x* e sceglie un valore in modo tale da mettere nella situazione di maggior difficoltà il verificatore; il verificatore controlla la variabile *y* e deve trovare il valore di tale variabile che rende vera una certa affermazione S(*x*,*y*). Se, anche nel peggior scenario possibile, il verificatore è in grado di trovare un valore per la variabile *y* che rende vera S(*x*,*y*), allora l’affermazione è vera; in caso contrario è falsa. La possibilità per il verificatore di vincere sempre dipende dall’esistenza di una strategia vincente, infatti in questo caso significa che per ogni scelta di *x* esiste *y* tale che S(*x*,*y*) è vero;

6. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all’ultimo anno di scuola media e agli anni di scuola media superiore o professionali nel Canton Ticino.

se invece il verificatore non vince in tutti i casi significa che esiste almeno un *x* tale che per ogni *y* S(*x*,*y*) è falsa e dunque risulta falsa la proposizione "per ogni *x* esiste *y* tale che S(*x*,*y*)". Si tratta dunque di una definizione di verità diversa da quella classica e che fa riferimento alla Teoria dei Giochi. In questo studio è stato introdotto un elemento di novità, dato dalla possibilità di avere un feedback visivo immediato da parte del computer, che serve a stabilire il vincitore della sfida. L'ipotesi di lavoro è che il feedback possa innescare negli studenti una riflessione sui propri errori e favorire l'evolvere della propria immagine concettuale.
L'attività di gioco-indagine con feedback sul concetto di altezza è stata sperimentata nell'anno scolastico 2018/2019 in tre classi seconde di scuola secondaria di primo grado, in cui l'insegnante aveva già presentato il concetto di altezza (come segmento) per il triangolo. La durata dell'attività, inclusa la discussione di classe, è stata di due ore curricolari.
Durante le sperimentazioni, oltre all'insegnante della relativa classe, le autrici erano presenti con il compito di introdurre il gioco-indagine, filmare una coppia di studenti durante lo svolgimento dello stesso e, infine, filmare e condurre insieme all'insegnante la discussione di classe. Durante lo svolgimento dell'attività, gli studenti hanno lavorato a coppie: inizialmente si sono sfidati nel gioco utilizzando un pc o un tablet e successivamente hanno risposto in forma scritta ad alcune domande di riflessione sull'esperienza svolta, presentate in una scheda di lavoro.
Il gioco è stato progettato all'interno dell'ambiente di geometria dinamica GeoGebra ed è raggiungibile al link https://www.geogebra.org/m/rnmqcvm3. La Figura 2 contiene la schermata del gioco: i vertici A, B e C sono liberi di essere trascinati sullo schermo; cliccando sulle caselle in corrispondenza delle scritte "Vertice A", "Vertice B", "Vertice C" compare un segmento che ha un estremo nel vertice indicato dal pulsante e l'altro estremo libero di muoversi sulla retta contenente il lato opposto al vertice; cliccando sulle caselle in corrispondenza delle scritte "Test A", "Test B", "Test C" compaiono le altezze con estremi rispettivamente in A, B e C (previamente costruite con i comandi di GeoGebra). Queste altezze costituiscono il feedback visivo fornito dal software al termine del gioco. Le scritte sulla destra della schermata hanno lo scopo di ricordare ai giocatori quali punti possono essere mossi nei rispettivi ruoli.

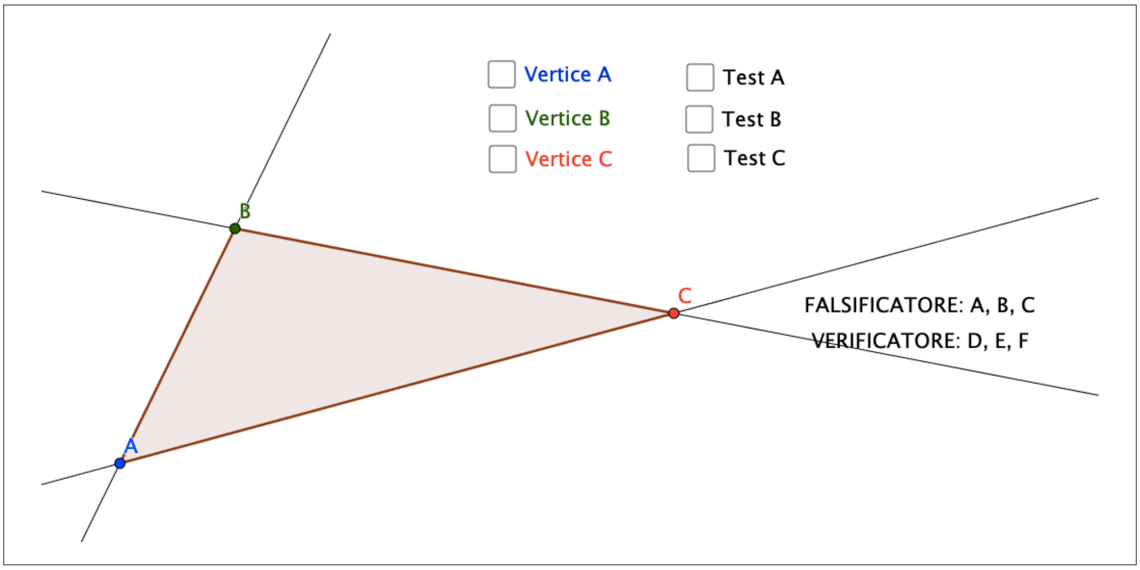

Figura 2. Schermata iniziale del gioco-indagine.

SFIDA – ALTEZZE DEL TRIANGOLO

1) All'interno della vostra coppia stabilite un verificatore e un falsificatore.
2) Ogni partita è costituita da due mosse e da un test.
3) La prima mossa è quella del falsificatore che muove i punti A, B, C dando al triangolo la forma che desidera e sceglie un vertice del triangolo selezionando la casella relativa (Vertice A, Vertice B oppure Vertice C).
4) La seconda mossa è del verificatore che muove il punto che appare (D, E oppure F) e cerca di spostare l'altezza nella posizione corretta.
5) Quando il verificatore è soddisfatto il falsificatore seleziona il test corrispondente e verifica se l'altezza disposta dal verificatore è corretta.

	Verificatore	*Falsificatore*
Partita 1		
Partita 2		
...		

Scambiatevi i ruoli e giocate ancora

	Verificatore	*Falsificatore*
Partita 1		
Partita 2		
...		

Riflessioni sull'attività:

1. Quando giocavi il ruolo del verificatore, a cosa prestavi attenzione al fine di spostare l'altezza nella posizione corretta?
2. Quando giocavi il ruolo del falsificatore, sei riuscito a mettere in difficoltà il verificatore? In questi casi quali caratteristiche geometriche aveva la figura?
3. Quando giocavi il ruolo del verificatore, riuscivi sempre a raggiungere l'obiettivo? Se sì, spiega come facevi, altrimenti spiega perché alcune volte non riuscivi.

Figura 3. Scheda di lavoro contenente le domande di riflessione.

Il testo dell'attività è stato proposto tramite una scheda di lavoro cartacea, riportata in **Figura 3** e nell'Allegato 1. Al lavoro a coppie è seguita una discussione di classe supportata dall'utilizzo della LIM.

Nella sfida, i due studenti ricoprono ruoli diversi: il falsificatore, con la sua mossa, "scombina" il triangolo trascinandone i vertici e sceglie un vertice da cui il verificatore deve posizionare l'altezza. Cliccando sulla casella corrispondente al vertice scelto, appare un segmento avente un estremo nel vertice selezionato e l'altro estremo in un punto qualsiasi della retta contenente il lato opposto del triangolo (un esempio è dato in **Figura 4a**). Il verificatore deve spostare il punto libero di muoversi sulla retta al fine di collocare l'altezza nella posizione ritenuta corretta, basandosi sulla sua percezione visiva. Terminata la mossa, per stabilire se l'altezza è stata posizionata correttamente si clicca il corrispondente tasto "Test", che fa comparire il segmento di altezza costruito con i comandi di GeoGebra (si veda **Figura 4b**). Se i due segmenti coincidono[7] si assegna un punto al verificatore, altrimenti il punto sarà attribuito al falsificatore.

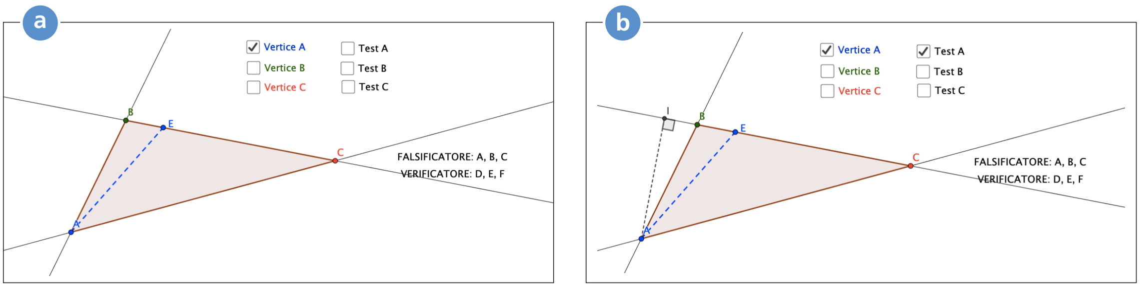

Figura 4. a) Effetto del pulsante "Vertice A"; **b)** Effetto del pulsante "Test A".

7. Durante la spiegazione dell'attività si è specificato che nel gioco è ammesso un margine di errore: se il segmento posizionato dal verificatore è molto vicino al segmento generato dal feedback del computer, anche se non c'è sovrapposizione perfetta, il punto deve essere assegnato al verificatore.

L'intenzionalità didattica delle sfide è far esplorare ai giocatori diversi esempi di triangolo, inducendoli a immaginare le possibili collocazioni delle altezze. Si può ipotizzare che l'esplorazione compiuta dal falsificatore sia guidata dalla domanda implicita: «Dove cadrà l'altezza se il triangolo ha questa configurazione e se la faccio partire da questo vertice?». Per mettere in difficoltà l'avversario, proporrà un triangolo in cui ritiene sia difficile individuare l'altezza, probabilmente ricorrendo a figure non-prototipiche, come triangoli ottusangoli senza lati orizzontali, né congruenti, e selezionerà il vertice da cui ritiene essere maggiormente difficile tracciare l'altezza. La situazione competitiva creata dal gioco porterà quindi gli studenti ad ampliare lo spazio degli esempi perché li indurrà a immaginare e rappresentare altezze in triangoli che generalmente non vengono proposti nella prassi scolastica. Ad esempio, nella **Figura 5a** il verificatore dovrà produrre un'altezza esterna al triangolo, nella **Figura 5b** un'altezza interna ma non parallela alle direzioni verticale-orizzontale.

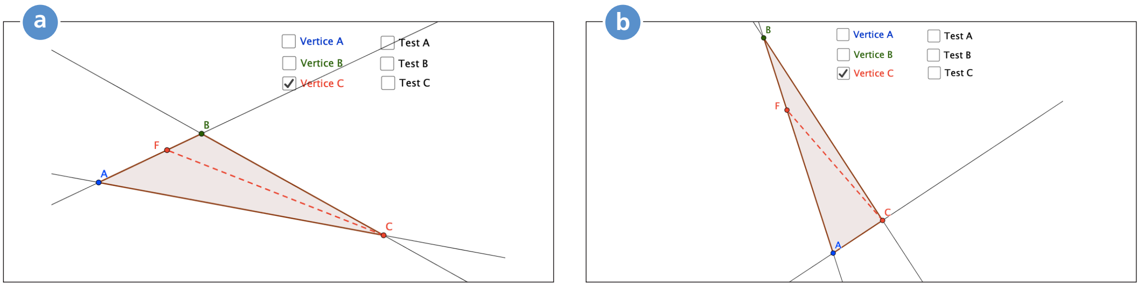

Figura 5a, b. Possibili figure non prototipiche di triangolo prodotte dal falsificatore.

Per posizionare l'altezza in modo corretto, il verificatore sposterà l'estremo libero del segmento (l'estremo F in entrambi gli esempi di **Figura 5**) cercando di far aderire il segmento visualizzato in GeoGebra all'immagine concettuale da lui posseduta (più precisamente, alla componente figurale del proprio concetto di altezza). La produzione di altezze errate può essere l'indizio della presenza di misconcetti relativi all'altezza. Questo indizio può essere colto dall'insegnante e riproposto agli studenti nella successiva discussione di classe. Inoltre, attivando il comando Test, il feedback visivo dato dal computer al termine della sfida può aiutare gli studenti a prendere consapevolezza dei propri errori.
Dopo aver giocato alcune partite, mantenendo le coppie relative alla fase di gioco, gli studenti rispondono alle domande contenute nella scheda. La prima domanda («Quando giocavi il ruolo del verificatore, a cosa prestavi attenzione al fine di spostare l'altezza nella posizione corretta?») intende indagare gli attributi critici conferiti al concetto di altezza da parte degli studenti e quindi avere indizi sull'immagine concettuale personale di altezza degli studenti. La seconda («Quando giocavi il ruolo del falsificatore, sei riuscito a mettere in difficoltà il verificatore? In questi casi quali caratteristiche geometriche aveva la figura?») si focalizza sulla mossa del falsificatore, indagando le caratteristiche dei triangoli proposti al verificatore, in particolare se veniva premeditata la scelta di triangoli le cui altezze erano non-prototipiche. Infine, la terza domanda («Quando giocavi il ruolo del verificatore, riuscivi sempre a raggiungere l'obiettivo? Se sì, spiega come facevi, altrimenti spiega perché alcune volte non riuscivi») intende indagare il ruolo formativo dell'attività e vedere se, grazie al feedback del computer, gli studenti diventano consapevoli di eventuali errori. Queste domande sono allo stesso tempo sia obiettivi del ricercatore, sia strumenti didattici per promuovere riflessione e consapevolezza sugli esempi prodotti e sui processi di produzione di tali esempi (per esempio sulle relazioni tra la componente figurale del triangolo, le sue proprietà – ottusangolo, rettangolo, isoscele ecc. – e la posizione dell'altezza). Infatti, la riflessione esplicita sui processi appare necessaria per realizzare quella armonia tra componente figurale e componente concettuale, che è al cuore del ragionamento geometrico. Le domande sono state pertanto oggetto della discussione di classe, di cui si analizzeranno alcuni estratti

nel prossimo paragrafo. Si considereranno parole, gesti e segni scritti generati nella discussione come produzioni semiotiche attraverso cui il pensiero matematico evolve nel percorso di apprendimento degli studenti. Per un approfondimento si rimanda ad Arzarello (2006) e Sabena (2011). In particolare, verranno analizzate parole, gesti e rappresentazioni in GeoGebra, al fine di indagare gli attributi critici individuati dagli studenti per l’altezza e avere accesso all’immagine concettuale personale degli studenti.

3 Estratti dalla discussione di classe

La discussione si apre con una sfida alla LIM tra una coppia di studenti volontari. Terminata la sfida, la ricercatrice R1 avvia una riflessione sulla mossa del verificatore (intervento 1):

1. R1: «Cosa guardavate per riuscire a raggiungere l’obiettivo?»
2. S1: «Fare gli angoli di 90, cioè per fare l’altezza di un triangolo bisogna guardare gli angoli di 90°».
3. R1: «Ok, vieni un attimo a farci vedere quali angoli guardavi? Me li indichi sulla LIM?»
4. S1: «Guardavo questo il punto blu e quel punto... [indicando il vertice da cui far partire l’altezza e successivamente uno dei due angoli che si formano con la base, **Figura 6a**]?»
5. Prof.: «Chi vuole dire la propria? S2 vai…»
6. S2: «Io guardavo…»
7. Prof.: «Vai ad indicare!»
8. S2: «Io guardavo il lato su cui posizionare il punto dell’altezza [mentre cammina verso la LIM solleva il braccio destro orizzontalmente, **Figura 6b**]. Guardo il lato sotto e guardo che l’altezza sia di 90° [solleva l’avambraccio sinistro perpendicolarmente, **Figura 6b**]».
9. R1: «Quindi ci indichi esattamente dove?»
10. S2: «Io guardo questo qua, questo lato qua sotto e guardo che la linea dell’altezza sia di 90° [indicando la base e l’altezza, **Figura 6c**]».

Figura 6a, b, c. Gesti degli studenti durante la discussione di classe.

La domanda posta da R1 intende far esplicitare agli studenti gli elementi figurali che costituiscono gli attributi critici del concetto di altezza a partire dal contesto di gioco. Il primo ad esprimersi è S1 che propone “gli angoli di 90°” (intervento 2). Quando viene chiamato alla LIM a indicare gli angoli, S1 indica il vertice da cui tracciare l’altezza e uno degli angoli retti che il segmento di altezza forma con la base (intervento 4). Non è chiaro perché, alla richiesta di indicare gli angoli di 90°, S1 abbia indicato anche l’angolo al vertice. È possibile che la configurazione di triangolo molto allungata creata nella sfida precedente abbia tratto in inganno lo studente inducendolo a vedere un angolo di 90° nel vertice da cui far partire l’altezza. L’insegnante dà la parola ad un altro studente, S2, che esprime gli attributi critici a parole e attraverso gesti prodotti mentre cammina verso la LIM (intervento 8). S2, sollevando il braccio destro in orizzontale dice di guardare il lato su cui posizionare l’estremo libero

dell'altezza, e successivamente, sollevando l'avambraccio sinistro verticalmente, dice di guardare che l'altezza sia a 90°. Quest'ultimo gesto richiama come attributo critico la perpendicolarità tra base e relativa altezza: l'avambraccio sinistro è infatti disposto perpendicolarmente al braccio destro precedentemente sollevato.
Per indagare più a fondo l'immagine concettuale relativa all'attributo critico "angolo di 90°", R2 pone una nuova domanda (intervento 11):

11. R2: «E come fai per dire "è di 90°" oppure "non lo è"?»
12. S2: «Si vede».
13. S1: «Devi guardare che le due…l'altezza e la base siano più o meno a 90°… che siano… che… [traccia base e altezza nell'aria e poi posiziona la mano perpendicolarmente al piano del banco, **Figura 7a**]».
14. S3: «Beh sì ma si vede che è così…»
15. R2: «Cosa intendi? Che cos'è che si vede?»
16. S3: «Si vede che è un angolo di 90° perché è così [dispone i palmi delle mani uno perpendicolare all'altro, **Figura 7b**]».
17. S4: «È a forma di elle».
18. S2: «Se ho in mente com'è fatto un angolo di 90° [ripropone il gesto di S3 ruotato, **Figura 7c**]».

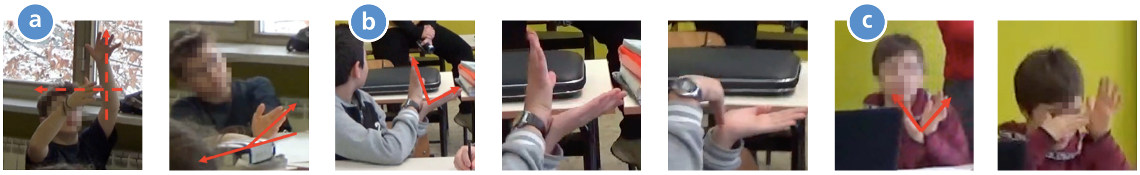

Figura 7a, b, c. Gesti degli studenti durante la discussione di classe.

Per spiegare come stabilire che un angolo misura 90°, gli studenti usano gesti che riproducono la loro immagine concettuale personale di altezza. S1 produce due tipi di gesti rappresentanti base e relativa altezza che seguono l'orientamento orizzontale-verticale (intervento 13): il primo è tracciato nell'aria, il secondo, invece, usa come riferimento orizzontale per la base il piano del banco. S3 propone un diverso tipo di gesto (intervento 16): dispone i due palmi delle mani perpendicolarmente individuando tra essi l'angolo di 90°. A differenza del gesto di S1, il gesto di S3 è slegato da vincoli materiali posti in direzioni privilegiate e permette di visualizzare entrambi gli elementi, base e relativa altezza, contemporaneamente. Inoltre, questo gesto è libero di ruotare mantenendo gli attributi critici di altezza. S2, infatti, lo riprende senza inserirlo in un riferimento orizzontale-verticale (intervento 18).
Per promuovere l'esplicitazione e una riflessione su eventuali misconcetti relativi all'altezza, R2 pone una nuova domanda (intervento 19):

19. R2: «Nessuno ha trovato un caso in cui si è sbagliato? Dice, mi sono proprio sbagliato, l'ho messa proprio da un'altra parte l'altezza».
20. R2: «Ecco [rivolgendosi a S5 che ha la mano alzata], vuoi farci vedere com'è andata? Quale tipo di errore? E poi come hai fatto?»
21. Prof.: «Ti ricordi come l'avevi messa? [rivolgendosi a S5 che si è alzato e sta camminando verso la LIM]».
22. S5: «Così [mette l'altezza coincidente con un lato del triangolo, **Figura 8a**]».
23. S1: «No, l'aveva messa in centro [S5 sposta l'altezza in modo che abbia un estremo nel punto medio del lato opposto al vertice selezionato, **Figura 8b**]».

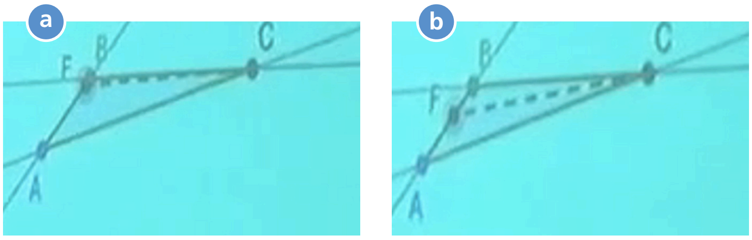

Figura 8a, b. Figure alla LIM proposte durante la discussione di classe.

Alla LIM S5 tenta di riprodurre un errore che ha commesso nella precedente fase di gioco (intervento 22), nel ruolo di verificatore. È però il suo compagno sfidante S1 a ricordare precisamente l’errore (intervento 23). Si può quindi osservare l’effetto prototipo, nel quale un attributo non critico per il concetto di altezza, ossia il fatto di avere un estremo nel punto medio del lato, è stato attribuito erroneamente ad esso. È possibile, pertanto, ipotizzare che l’immagine concettuale personale che ha orientato la mossa di S5 sia in conflitto con la definizione formale del concetto di altezza, ossia che S5 abbia un misconcetto relativo all’altezza. Infatti, in questo caso ad orientare la mossa del verificatore non è stato l’angolo di 90° o la relazione di perpendicolarità, ma il punto medio della base, cosa che funziona per la categoria subordinata a cui appartiene il triangolo isoscele ma non sempre per la categoria base. L’attributo non critico associato erroneamente al concetto di altezza viene messo in luce dalle parole di S1 (intervento 23). Il feedback del computer ha permesso agli studenti di notare l’incongruenza tra dove hanno posizionato il segmento (in base alla loro immagine concettuale personale di altezza) e la costruzione corretta di altezza, come è possibile notare dal fatto che ripropongono all’attenzione di tutta la classe quanto vissuto nel gioco. Notare tale differenza può consentire all’immagine concettuale personale di altezza dello studente di evolvere.
Dall’estratto successivo emerge che l’incongruenza può essere percepita non soltanto attraverso il feedback del computer ma anche grazie all’osservazione delle mosse dei compagni.

24. R1: «E questo succedeva magari all’inizio delle partite? Oppure…».
25. S1: «Sì all’inizio, la seconda partita».
26. R1: «La seconda partita».
27. S3: «Io sbagliavo sempre!»
28. R2: «Chi dice che sbagliava sempre poi come ha fatto? Poi hai smesso di sbagliare?»
29. S3: «Sì ho perso tutte e due le volte e poi dopo cioè quando abbiamo finito tutto quanto, durante le domande ho capito come fare».
30. Prof.: «Hai capito cosa sbagliavi?»
31. S3: «Sì, perché vedevo lui come le faceva e quindi ho capito poi come metterle».
32. R2: «Ma lui ti ha anche spiegato il suo trucco oppure no…guardavi».
33. S3: «No, guardavo e basta».

Dalle parole di S3 (intervento 31) emerge che l’osservazione attenta della mossa compiuta da un avversario più esperto assume un ruolo formativo nel capire come posizionare l’altezza e quindi può far prendere coscienza dei propri errori e far evolvere l’immagine concettuale personale dello studente. Il compagno di sfida è un avversario nel gioco ma un alleato nell’apprendimento.
Infine, per indagare se i triangoli proposti dal falsificatore abbiano promosso l’esplorazione di esempi non-prototipici di altezza e per porre l’attenzione degli studenti su di essi, R2 pone una nuova domanda:

34. R2: «Erano tutti ugualmente difficili i triangoli che vi proponevano i falsificatori o c’erano dei casi più facili e dei casi più difficili?»

35. S6: «Secondo me questo caso qua [indica il triangolo rettangolo isoscele alla LIM] è più semplice, invece quando è ottusangolo allungato è più difficile».
36. S2: «Secondo me è il contrario perché quando è più grande sono più allargati, sono più all… allargati quindi c’è più spazio e quindi è più difficile vedere, invece quando lo fai piccolo c’è tanto così tra le tue cose quindi è vicinissimo».
37. Prof.: «E se sono più o meno della stessa dimensione? Perché S6 ha usato un termine che è interessante, quindi capito il discorso del piccolo e del grande… ma se sono tutti e due abbastanza grandi che ci si può lavorare, quand’è più semplice e quand’è meno semplice? Hai voglia S6 di ridirlo e poi sentiamo… perché la tua teoria era diversa…»
38. S6: «Quando è ottusangolo è più difficile, quando è acutangolo è più facile».
39. S7: «Anche perché devi percepire se bisogna far cadere l’altezza all’interno o all’esterno».

Dall’estratto è possibile osservare che il gioco promuove la produzione di altezze in triangoli ottusangoli (intervento 35) e in triangoli molto grandi e molto allargati (intervento 36). Nel primo caso si tratta di altezze non prototipiche in quanto, se non vengono fatte partire dal vertice in corrispondenza dell’angolo ottuso, cadono esternamente. Nel secondo caso a creare la difficoltà nella sfida è invece l’approssimazione del software: in configurazioni molto zoomate un piccolo errore di posizionamento si nota immediatamente e quindi anche nel caso in cui a orientare la mossa del verificatore sia un’immagine concettuale corretta di altezza, è possibile che questa risulti non precisa e quindi errata nel contesto del gioco. L’intervento dell’insegnante (intervento 37) mostra la sua intenzionalità didattica a richiamare l’attenzione su quelli che possono essere elementi, legati alla matematica e svincolati dalle dinamiche del gioco, che possono creare difficoltà nella produzione di altezze.

4 Riflessioni conclusive

Attraverso il gioco-indagine, le domande di riflessione contenute nella scheda e la discussione di classe, la progettazione didattica si era posta l’obiettivo di esplicitare e far evolvere l’immagine concettuale personale degli studenti relativa al concetto di altezza, includendo anche esempi non prototipici. Dalle osservazioni a posteriori emerse sulle attività sperimentate in classe sono stati evidenziati alcuni passaggi chiave di questa evoluzione.
Il gioco-indagine innesca una successione di figure di varia natura: immaginate dai giocatori, prodotte sullo schermo dal verificatore e prodotte sullo schermo dal feedback digitale (**Figura 9**).

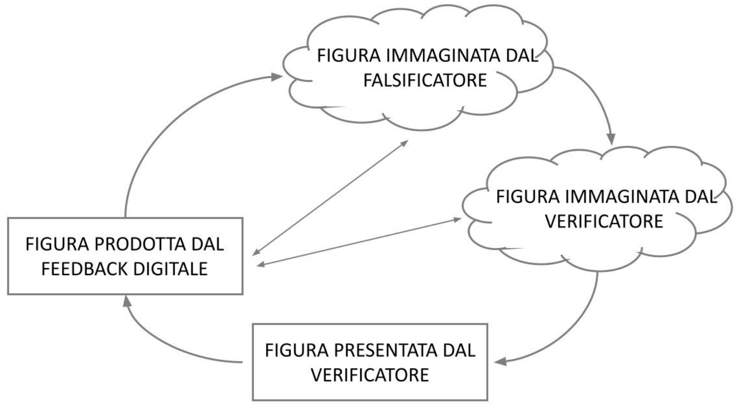

Figura 9. Dialettica creata dal gioco tra figure immaginate e figure visibili sullo schermo.

All'inizio del gioco, gli studenti hanno una data immagine concettuale personale di altezza, che si manifesta nelle figure che immaginano. Attraverso il gioco, solo la figura immaginata dal verificatore viene resa visibile. Grazie al feedback del computer gli studenti possono notare un'eventuale incongruenza tra le figure immaginate, la figura presentata dal verificatore e la figura feedback. Il contrasto tra la figura data dal feedback digitale e quella immaginata può essere un indicatore di errore per lo studente, che può prenderne consapevolezza. L'osservazione dell'incongruenza offre l'occasione per una prima evoluzione dell'immagine concettuale personale di altezza degli studenti. Se tale evoluzione si è verificata, allora questa avrà effetti nelle successive partite in cui verranno prodotte nuove figure immaginate, presentate e feedback. Come osservato in alcuni casi durante la sperimentazione, anche l'osservazione attenta delle mosse dell'avversario può aiutare lo studente a modificare il proprio gioco, con possibili implicazioni sull'immagine concettuale personale. Naturalmente potrebbe anche succedere che gli studenti, pur notando l'incongruenza tra la figura immaginata e la figura feedback, non mettano in discussione la propria immagine concettuale. Diversamente, per gli studenti che possiedono già l'immagine concettuale corretta di altezza, il gioco ha un ruolo di consolidamento dell'immagine stessa.
Questi diversi comportamenti possono essere osservati dall'insegnante durante il gioco e influenzare l'organizzazione della discussione di classe, durante la quale l'evoluzione dell'immagine concettuale personale dello studente può avvenire non solamente dal confronto tra le figure (immaginate, presentate e feedback) realizzate durante le partite condivise alla LIM, ma anche attraverso la condivisione di errori emersi durante le precedenti sfide. Nello studio di caso presentato, tale evoluzione è stata supportata dal pensiero metacognitivo attivato dalle domande delle ricercatrici e dell'insegnante, come è emerso dall'analisi delle risorse semiotiche (parole, gesti, rappresentazioni in GeoGebra) prodotte dagli studenti per esplicitare gli attributi critici del concetto di altezza e la loro immagine concettuale.
Più in generale, le dinamiche innescate dalle attività di gioco-indagine possono offrire allo studente la possibilità di arricchire lo spazio degli esempi, di esplicitare e prendere consapevolezza della propria immagine concettuale e di metterla a confronto con quella dei compagni e dell'insegnante. Al contempo l'insegnante, grazie a questo tipo di attività, può cogliere informazioni generalmente poco accessibili riguardanti l'immagine concettuale degli studenti e gli attributi critici conferiti a un oggetto matematico, può individuare eventuali misconcetti che stanno alla base delle difficoltà degli studenti e potrebbe, successivamente, proporre attività ad hoc per affrontare le criticità individuate.
Questo tipo di processi in cui gli allievi immaginano un certo oggetto geometrico in figure diverse e in posizioni non prototipiche e si sforzano nel comprendere come i propri compagni hanno immaginato lo stesso concetto possono promuovere quel "saper vedere in matematica" auspicato da Bruno de Finetti: «Giova soprattutto riflettere su esempi, imparare a riflettere su esempi svariati ed a modificarli o costruirsene di nuovi, e riuscire così sempre meglio a capire e scoprire ciò che occorre saper vedere per dominare un problema» (de Finetti, 1967, p. 1).

Ringraziamenti

Siamo grate agli studenti e agli insegnanti sperimentatori. Ringraziamo anche i referatori per i loro suggerimenti sulla prima versione dell'articolo.

Bibliografia

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista latino americana de investigación en matemática educativa*, Número Especial, 267–299.

Baruk, S. (1998). *Dizionario di matematica elementare*. Zanichelli. (Titolo originale: *Dictionnaire de mathématiques élémentaires* pubblicato nel 1992).

Botta, E., & Sbaragli, S. (2016). Il caso dell'altezza. Un sapere fondante. *Nuova secondaria, XXXIV*(1), 112–116.
de Finetti, B. (1967). *Il "saper vedere" in matematica*. Loescher.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162.

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconcepts in basic geometry - or when "a little learning is a dangerous thing". In J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics* (Vol. 3, pp. 238–51). Cornell University.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1983). The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. In R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the seventh international conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 223–228). Department of Science Teaching, The Weizmann Institute of Science.

Hintikka, J. (1998). *The principles of Mathematics revisited*. Cambridge University Press.

Hintikka, J. (1999). *Inquiry as Inquiry: A logic of Scientific Discovery*. Springer Science+Business Media Dordrecht.

Rosch, E. (1999). Principles of categorization. In E. Margolis & S. Laurence (Eds.), *Concepts: Core Readings* (pp. 189–206). MIT Press.

Sabena, C. (2011). Studiare la multimodalità dell'insegnamento-apprendimento: focus sui gesti. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *34*(3), 333–342.

Soldano, C. (2019). Apprendere con la logica dell'indagine: attività di gioco-indagine all'interno di ambienti di geometria dinamica. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *42*(3), 237–259.

Soldano, C., & Arzarello, F. (2017). Learning with the logic of inquiry: game-activities inside Dynamic Geometry Environments. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceeding of CERME 10-Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 267–274). DCU Institute of Education & ERME.

Soldano, C., & Sabena, C. (2019). Exploring non-prototypical configurations of equivalent areas through inquiring-game activities within DGE. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of CERME 11-Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Routledge.