



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

JAILTON BARTHO DOS SANTOS

**DISTÂNCIA ENTRE CURVAS ALGÉBRICAS:  
UMA DISCUSSÃO PARA O ENSINO MÉDIO**

CAMPINAS  
2016

JAILTON BARTHO DOS SANTOS

**DISTÂNCIA ENTRE CURVAS ALGÉBRICAS:  
UMA DISCUSSÃO PARA O ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

**Orientador: DIEGO SEBASTIAN LEDESMA**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO JAILTON BARTHO DOS SANTOS, E ORIENTADA PELO PROF. DR. DIEGO SEBASTIAN LEDESMA.

CAMPINAS  
2016

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Santos, Jailton Bartho dos, 1980-  
Sa59d Distância entre curvas algébricas : uma discussão para o ensino médio /  
Jailton Bartho dos Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Curvas planas. 2. Espaços métricos. 3. Hausdorff, Medidas de. 4.  
Didática. 5. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino - Metodologia. I.  
Ledesma, Diego Sebastian, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Distance between algebraic curves : a talk to the high school

**Palavras-chave em inglês:**

Plane curves

Metric spaces

Hausdorff measures

Didactics

Mathematics (High school) - Study and teaching - Methodology

**Área de concentração:** Matemática em Rede Nacional

**Titulação:** Mestre em Matemática

**Banca examinadora:**

Diego Sebastian Ledesma [Orientador]

Cristiano Torezzan

Fabiano Borges da Silva

**Data de defesa:** 04-07-2016

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 04 de julho de 2016  
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA**

**Prof(a). Dr(a). CRISTIANO TOREZZAN**

**Prof(a). Dr(a). FABIANO BORGES DA SILVA**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros  
encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

*Aos meus pais, Albertina e Tarcísio.  
À minha esposa, Viviane.  
Aos meus filhos, Natallie e Nichollas.*

# Agradecimentos

A Deus, que sempre me iluminou durante esta caminhada.

À minha mãe, Albertina, e a meu pai, Tarcísio, que conduziram e incentivaram toda minha educação formal.

À minha querida e amada esposa, Viviane, que, de forma especial e carinhosa, deu-me força e coragem, apoiando-me nos momentos de dificuldades e iluminando meus pensamentos para que eu buscasse mais conhecimentos.

A meus filhos, Natallie e Nichollas, pelas pessoas que me motivam a estudar sempre mais.

Agradeço, com muita admiração, ao professor Dr. Diego Sebastian Ledesma, pela atenção, dedicação, apoio e encorajamento, a fim de me conduzir até a conclusão deste trabalho; também aos demais professores desta instituição, pelos ensinamentos passados de modo tão brilhante.

In memoriam ao professor Emanuel Pimentel Barbosa.

À CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual este Mestrado dificilmente seria levado a término.

E por fim, a todos os meus colegas do curso PROFMAT, pela interação e coleguismo, em especial aos amigos Kiscinger, Marcos e Fábio pelo companheirismo sempre presente em nós.

## Resumo

O presente trabalho teve como problema de investigação o ensino da Distância entre Curvas Planas Fechadas, no Ensino Médio, por meio da conexão entre conceitos diferentes e abstratos com objetos que são estudados nesse nível escolar. Dessa forma, foram propostos a introdução de noções básicas sobre Topologia no Ensino Básico. Distância entre Curvas Algébricas Planas Fechadas foi o centro de interesse. A questão que moveu esta pesquisa foi: Como colocar uma Distância entre Curvas? Para uma transposição didática, buscou-se relacionar saberes básicos presentes em alunos do Ensino Médio a uma noção abstrata de Distância entre Curvas no plano. A fim de ampliar a investigação central, delimitaram-se outras duas perguntas que podem complementar a primeira: O que é Distância? Como utilizar a noção intuitiva de Distância no plano para colocar uma Distância entre objetos que estão no plano? Metodologicamente, esta pesquisa baseou-se em estudos bibliográficos e na elaboração de sequências didáticas, utilizando ferramentas tecnológicas educacionais, com o propósito de otimizar e assegurar a aprendizagem deste assunto, mesmo estando no Ensino Básico. Os Resultados desta pesquisa apontam que há ligação entre Curvas Algébricas Planas, espaço das Curvas, espaço métrico, *Distância de Hausdorff* e Distâncias entre Curvas, que, se trabalhados de forma articulada pelo professor, pode levar o aluno a associar o conceito de Distância entre Conjuntos em um espaço métrico à Distância entre Curvas planas Fechadas. A partir disso, conclui-se que, embora tenham sido consideradas condições ideais para o processo de ensino e aprendizagem, como a existência de programas de computador ao alcance do professor e dos alunos, é possível o trabalho dessa temática complexa no Ensino Médio, auxiliando o desenvolvimento de diversas noções matemáticas.

**Palavras-chave:** Curvas Planas, Espaço Métrico, Medidas de Hausdorff, Didática, Matemática(Ensino Médio) - Estudo e ensino - Metodologia.

## Abstract

This research investigates the various methods used to teach “Distance between Closed Curves” in High School, by the association between abstract mathematical concepts and the various objects which are taught at this school level. Hence, the introduction of basic topology concepts was proposed for the elementary and middle school grades. Distance between Closed Curves was the main focus of this study. The guiding question for this investigation was: how can we determine the distance between curves? For a didactic transposition, this project sought to promote a relationship between high school students’ elementary mathematical knowledge and abstract notions of distance between curves on a plane. To further expand this analysis, other questions were asked to complement the first one. They were: what is distance?; and, how can students use the intuitive understanding of distance to place it between objects on a plane? Methodically, this study was based on bibliographic studies, on the elaboration of didactic sequences and on the use of technology to optimize and ensure students’ successful learning of this subject even in elementary and middle school grades. The results show that there is a connection between plane algebraic curves, curve spacing, metric space, Hausdorff distance, and distance between curves that may, if presented in an articulated manner, help students to associate the concept of distance between sets in metric space and the distance between closed plane curves. Therefore, although this research assumed the existence of ideal teaching conditions, such as accessibility to computer programs in the classroom, teaching these complex contents in High School is feasible, contributing to the development of diverse mathematical notions.

**Keywords:** Plane Curves, Metric Space, Hausdorff Measures, Didactics, Mathematics (High School) - Study and teaching - Methodology.



# Lista de Ilustrações

1.1	Curva Algébrica $x^3 - y^2 - x = 0$ .	27
1.2	Reta: $4x - 2y - 10 = 0$ .	28
1.3	Parábola: $x^2 - 8y = 0$ .	29
1.4	Circunferência: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ .	30
1.5	Elipse: $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ .	31
1.6	Hipérbole: $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ .	32
1.7	Cissóide de Diócles: $2x^2 - y(y^2 + x^2) = 0$ .	33
1.8	Folium de Descartes: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .	34
1.9	Trissectriz de Maclaurim	35
1.10	Caracol de Pascal	37
1.11	Fronteiras ou borda de uma cidade	38
1.12	Circunferência	38
1.13	Elipse	39
2.1	$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < \varepsilon^2$	50
2.2	$ x_1 - a_1  < \varepsilon$ e $ x_2 - a_2  < \varepsilon$	50
2.3	$ x_1 - a_1  +  x_2 - a_2  < \varepsilon$	51
2.4	Folium de Descartes $F(x, y)$ e sua Bola $B(F, \varepsilon)$	52
2.5	Caracol de Pascal $P(x, y)$ e sua Bola fechada $B[C, \varepsilon]$	53
2.6	Curva $C(x, y)$ e sua Bola $B(C, \varepsilon)$	53
3.1	$H(A, B) \neq H(B, A)$	55
3.2	Comparação da distância de Hausdorff com distância usual.	58
3.3	Distância de Hausdorff.	58
3.4	Curvas Algébricas $C_1$ e $C_2$ e a Bola da $B(C_2, \varepsilon_2)$ .	61
3.5	Curvas Algébricas $C_1$ e $C_2$ e a Bola da $B(C_1, \varepsilon_1)$ .	61
3.6	Curvas Algébricas $C_1$ e $C_2$ e suas respectivas bolas.	62
3.7	Curvas Algébricas $E(x, y)$ e $C(x, y)$ e suas respectivas Bolas.	62
4.1	Inserção de controles deslizantes.	67
4.2	Inserção da equação $ax + by + c = 0$ .	68
4.3	Gráfico gerado pela equação: $y = ax^2 + by + c$ .	69
4.4	Representação de uma Curva Fechada.	70
4.5	Gráfico gerado pela equação: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ .	71
4.6	Gráfico gerado pela equação: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ .	72
4.7	Distância entre pontos no plano $\mathbb{R}^2$	74
4.8	Distância entre ponto e reta no plano $\mathbb{R}^2$	75
4.9	$d(C, T) \neq d(T, C)$	80
4.10	Campinas e redondeza	81

4.11	Bola de um conjunto . . . . .	82
4.12	Triângulo ABC e sua Bola com $\varepsilon = 5$ . . . . .	82
4.13	Tela inicial do aplicativo . . . . .	83
4.14	Bola do $Conjunto_1 \subset Conjunto_2$ . . . . .	84
4.15	Bola do $Conjunto_2 \subset Conjunto_1$ . . . . .	84
4.16	Distância de Hausdorff entre os conjuntos $C_1$ e $C_2$ . . . . .	85
4.17	Representação das Curvas $f$ e $g$ . . . . .	86
4.18	Controles deslizantes $a$ e $b$ . . . . .	86
4.19	Bolas da Curvas . . . . .	87
4.20	Segmentos AB e CD . . . . .	87
4.21	Distância entre as Curvas 1 e 2 . . . . .	88

# Sumário

Dedicatória	5
Agradecimentos	6
Introdução	13
<b>1 Curvas</b>	<b>16</b>
1.1 Curvas Planas . . . . .	16
1.2 Polinômios . . . . .	17
1.2.1 Operações com Polinômios em Duas Variáveis . . . . .	19
1.2.2 Polinômios Irredutíveis . . . . .	24
1.3 Exemplos de Curvas Algébricas Planas . . . . .	27
1.3.1 Reta . . . . .	27
1.3.2 Cônicas . . . . .	28
1.3.3 A Cissóide de Diócles . . . . .	33
1.3.4 Folium de Descartes . . . . .	34
1.3.5 Trissectriz de Maclaurin . . . . .	34
1.3.6 Caracol de Pascal . . . . .	36
1.4 Curvas Fechadas em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	37
<b>2 Espaços Métricos</b>	<b>41</b>
2.1 Métrica . . . . .	41
2.2 Espaço Métrico . . . . .	41
2.3 Noções Básicas de Topologia . . . . .	48
2.4 Bola de uma Curva Algébrica . . . . .	51
<b>3 Métrica no Espaço das Curvas</b>	<b>54</b>
3.1 Distância de Hausdorff . . . . .	54
3.2 Distância entre Curvas Fechadas em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	60
<b>4 Plano de Ensino: Distância entre Curvas Fechadas em <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>66</b>
4.1 Sequência Didática 1: Associar uma Equação Polinomial a uma Curva Algébrica Aberta . . . . .	66
4.2 Sequência Didática 2: Associar uma Equação Polinomial a Curvas Fechadas	70
4.2.1 Atividade proposta . . . . .	73
4.3 Sequência Didática 3: Cálculo de distâncias . . . . .	74
4.3.1 Ponto a Ponto . . . . .	74
4.3.2 Ponto a Reta . . . . .	75
4.3.3 Reta a Reta . . . . .	76

4.4	Sequência Didática 4: Métrica em um Espaço Métrico . . . . .	78
4.4.1	Distâncias entre Conjuntos . . . . .	78
4.4.2	Desenvolvimento . . . . .	78
4.4.3	Métrica de Hausdorff . . . . .	83
	<b>Considerações Finais</b>	<b>89</b>
	<b>Referências</b>	<b>90</b>

# Introdução

Neste trabalho, pretendemos propor uma conexão entre dois conceitos diferentes e abstratos com objetos que são estudados no Ensino Médio. O primeiro deles é o conceito de Curvas. Geralmente quando se estudam Curvas no Ensino Médio, estuda-se o que em matemática são chamadas de Curvas Algébricas, isto é, Curvas que são obtidas como zeros de polinômios ou gráficos de funções elementares ( $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\ln(x)$ , ...). Dentre as Curvas que investigamos, estão: reta, parábola, elipse, entre alguns outros exemplos. Em particular, damos pouca atenção ao estudo das denominadas Curvas Fechadas, que são aquelas que não possuem "extremidades". As Curvas Fechadas aparecem naturalmente no plano como contorno de regiões dele. Se colocássemos todas estas curvas juntas num espaço, obteríamos um espaço abstrato no qual cada elemento deste conjunto seria uma Curva. Observando esse conjunto, a primeira coisa que podemos perguntar é: como distinguir estes objetos, isto é, como dizer que uma curva  $C_1$  e outra curva  $C_2$  são diferentes e ainda dar uma medida a esta diferença? Na vida real, a primeira ideia natural para diferenciar objetos é a posição deles: duas bolas, por mais que sejam do mesmo tamanho e cor, são diferentes por elas estarem em lugares diferentes. Uma medida desse "estar em lugares diferentes" é dada pela distância relativa entre elas. Assim, podemos estabelecer que elas são diferentes, porque estão a uma distância  $d$  uma da outra. Isso nos leva a pensar se é possível no espaço das Curvas estabelecer um conceito de distância entre elas, o que permitiria não somente estabelecer se os objetos são diferentes, mas também nos permitiria dar uma medida a essa diferença. Dessa forma, poderíamos afirmar que as Curvas  $C_1$  e  $C_2$  são diferentes, pois estão a uma distância  $d > 0$ .

No Ensino Médio, é relativamente fácil introduzir o conceito de distância entre pontos, pois é uma ideia intuitiva que os alunos adquirem como parte dos conhecimentos básicos que temos na vida. E ainda há tópicos como trigonometria, por exemplo, que são estudados com base nesses conhecimentos adquiridos. No entanto, o conceito de distância em um espaço abstrato requer um pouco mais de estudo aprofundado na matemática. Assim surge a pergunta natural: o que é o conceito de distância em um espaço qualquer? Essa pergunta foi respondida em matemática há algum tempo e, de tão importante, ela ganha um tópico quando estudamos "Espaços Métricos".

O Espaço Métrico diz respeito à área da matemática denotada Topologia. Segundo [3], o termo Topologia foi usado pela primeira vez por Johann Benedict Listing

em 1847. Mas Listing já vinha usando este termo há pelo menos 10 anos, em suas correspondências. O palavra "topology" (Topologia em inglês) foi introduzida muitos anos mais tarde na revista *Nature* em um artigo de 1883 que tinha como finalidade distinguir a geometria qualitativa da geometria comum. No entanto, segundo [3] o fato que foi considerado como o primeiro resultado topológico foi a resolução do problema das sete pontes de Königsberg por Leonard Euler em 1736. Nesse exemplo de problema, ligamos diferentes áreas da matemática, neste caso, a teoria dos grafos com a topologia. Vito Volterra, Jacques Hadamard, Georg Cantor, Cesare Arzelà e outros notáveis matemáticos deram inúmeras contribuições para os estudos sobre espaços de funções. Estes estudos, por sua vez, culminaram com o trabalho de Maurice Fréchet, que introduziu a noção de espaço métrico. Atualmente os espaços métricos são considerados casos específicos, mas muito importantes, de uma classe mais geral conhecida como espaços topológicos.

No entanto, a formalização do conceito de espaço topológico de acordo com [3] é creditada a Felix Hausdorff, que definiu em 1914 o que conhecemos como Espaço de Hausdorff. Ele foi um matemático alemão, nasceu em Breslávia, em 8 de novembro de 1868, infelizmente, suicidou-se em Bona, em 26 de janeiro de 1942, fugindo do Nazismo. Discutiremos neste trabalho o conceito de Distância entre conjuntos em um espaço métrico, conceito esse definido por Hausdorff.

Com isso em mente, começamos esta dissertação fazendo, no capítulo 1, um estudo das Curvas. Prestaremos especial atenção ao caso das Curvas Algébricas e Curvas em geral. Apresentaremos vários exemplos de Curvas que possam ser estudadas no Ensino Médio. No segundo capítulo, estudaremos um pouco sobre Espaços Métricos. Estudaremos em particular o plano com métricas diferentes das usuais como forma de exercitar a abstração no conceito de métrica. Também estudaremos os conceitos básicos de um outro ramo da matemática que é a Topologia. Trataremos dos conceitos básicos sobre Conjuntos Fechados, Abertos, Compactos e Função Contínua. No capítulo 3, juntaremos estes conjuntos ao munir ao espaço das Curvas Fechadas com a estrutura de espaço métrico, utilizando a conhecida *Distância de Hausdorff*. Mostraremos como ela é calculada e apresentaremos alguns exemplos. Para finalizar, proporemos um plano de aula sobre como ensinar estes conceitos ou pelo menos tentar transmitir a ideia central para alunos do Ensino Médio. Entendemos que, por ser um conceito abstrato, é uma tarefa delicada, mas nem por isso deixa de ser importante.

Tomando como parâmetro a temática e a organização descritas acima, o presente trabalho tem como objetivo geral a introdução e o aprofundamento sobre Distância entre Curvas Algébricas Planas Fechadas para alunos do Ensino Médio.

Esta pesquisa, de cunho bibliográfico, embasou-se em estudos de Vainsencher (2005), Lima (2005), Prasolov (2000), entre outros teóricos. Também foram elaboradas, em um plano de ensino, sequências didáticas que tomam como apoio ferramentas tecnológicas, como o aplicativos desenvolvidos a partir do software Geogebra.

Como resultados, apontamos que há ligação entre Curvas Algébricas Planas, espaço das Curvas fechadas, Espaço Métrico, *Distância de Hausdorff* e Distâncias entre Curvas fechadas, que, se trabalhados de forma articulada pelo professor, podem levar o aluno a associar o conceito de Distância entre Conjuntos em um espaço métrico à Distância entre Curvas Algébricas Planas fechadas.

Conclui-se, dessa forma, que, apesar de terem sido consideradas condições ideais para o processo de ensino e aprendizagem, como a existência de programas de computador ao alcance do professor e dos alunos, é possível o trabalho dessa temática complexa no Ensino Médio, auxiliando o desenvolvimento de diversas noções matemáticas.

# Capítulo 1

## Curvas

*“A Matemática é como um moinho de café que mói admiravelmente o que se lhe dá para moer, mas não devolve outra coisa senão o que se lhe deu.”*

Faraday

Neste capítulo, apresentaremos o conceito de curva. Em particular estudaremos algumas Curvas Algébricas Planas, que se apresentam no currículo do Ensino Básico. No decorrer deste capítulo, discutiremos um pouco de polinômios em duas variáveis e suas propriedades para logo fazer uma breve exposição de curvas algébricas. Utilizaremos como ferramenta um software de matemática dinâmica, conhecido como Geogebra <sup>1</sup>, para construirmos as representações gráficas. Finalmente, faremos uma breve exposição dos principais objetos a serem estudados neste trabalho que são as curvas fechadas no plano. As referências [1], [6], [7], [9] e [12] serão norteadoras deste capítulo.

### 1.1 Curvas Planas

Uma curva parametrizada no plano é uma aplicação  $\gamma : (a, b) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Desta forma, podemos escrever em função de duas funções reais  $x, y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)); t \in (a, b).$$

A imagem  $\gamma(a, b) \subset \mathbb{R}^2$  é chamada de traço da Curva e é definida como o lugar geométrico de todos os pontos  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $t \in (a, b)$ . Observamos que há uma distinção entre a Curva e o seu traço.

Um tipo particular de Curva que costumamos abordar no Ensino Médio são as Curvas Algébricas. Uma Curva Algébrica Plana é o lugar geométrico formado pelos pontos cujas coordenadas cartesianas satisfazem a uma dada equação polinomial do tipo

$$f(x, y) = 0,$$

---

<sup>1</sup> O Geogebra é uma ferramenta que se encontra disponível gratuitamente na internet.



onde  $f$  é um polinômio não constante. Formalmente:

**Definição 1.1.1.** Uma Curva Algébrica Plana é o lugar geométrico formado pelos pontos cujas coordenadas cartesianas satisfazem a uma dada equação polinomial do tipo  $f(x, y) = 0$ , onde  $f$  é um polinômio não constante. Logo, entendemos como Curva Algébrica Real Plana Afim como o conjunto de zeros de um polinômio real, não constante em duas variáveis:

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$

Então, todo conjunto da forma:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

é dito Curva Algébrica Real Plana, onde  $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ .

Observamos que uma curva parametrizada não necessariamente é uma Curva Algébrica. Isto somente acontece se existir um polinômio em duas variáveis  $f(x, y)$  tal que ao ser avaliado nas funções  $x(t)$ ,  $y(t)$  que definem a curva  $\gamma = (x(t), y(t)) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  temos:

$$f(x(t), y(t)) = 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

**Exemplo 1.1.1.** Uma Curva  $\gamma(t) = (t, e^t) : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  não é uma Curva Algébrica. Isso se deve ao fato de  $e^t$  não ser uma função polinomial em duas variáveis. Logo, podemos entender que não existe função  $\gamma$  tal que  $\gamma(t, e^t) = 0$ .

Neste trabalho, vamos nos deter um pouco no estudo sobre as Curvas Algébricas Fechadas. Para tanto, como introdução, faremos uma breve revisão de polinômios em duas variáveis.

## 1.2 Polinômios

Nesta seção, estudaremos alguns conceitos básicos sobre polinômios em duas variáveis com o objetivo de alicerçar estudos posteriores.

**Definição 1.2.1.** Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , onde  $\mathbb{N}$  é o conjunto dos números naturais e  $a_{m,0}, a_{m-1,1}, a_{m-2,2}, \dots, a_{0,n} \in \mathbb{R}$  onde  $\mathbb{R}$  é o conjunto dos números reais (pode ser também sobre os números complexos  $\mathbb{C}$ ), denomina-se polinômio em duas variáveis em  $\mathbb{R}$ , a expressão algébrica definida por:

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{i,j} x^i y^j$$

Denotamos por  $\mathbb{R}[x, y]$  ao conjunto dos polinômios em duas variáveis.

Em muitos casos, deparamo-nos com representações polinomiais extensivas que podem ser reduzidas por meio das ideias relativas à adição e/ou à subtração de monômios. Para que a redução seja possível, é necessária a existência de monômios semelhantes na expressão. Monômios semelhantes são aqueles que apresentam a mesma parte literal. Podemos perceber no exemplo apresentado a seguir:

**Exemplo 1.2.1.** *Observe os polinômios a seguir:*

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2x^3 + xy + 3x^3 - xy - x^3 &\longrightarrow \underbrace{2x^3 + 3x^3 - x^3}_{\text{semelhantes}} + \underbrace{xy - xy}_{\text{semelhantes}} = 4x^3. \\ \bullet \quad 10x^2y + 8y^3 - 4y^3 - 9x^2y &\longrightarrow \underbrace{10x^2y - 9x^2y}_{\text{semelhantes}} + \underbrace{8y^3 - 4y^3}_{\text{semelhantes}} = x^2y + 4y^3. \end{aligned}$$

De acordo com a quantidade de termos resultantes das reduções polinomiais ou até mesmo da representação inicial dos polinômios, podemos classificá-los das seguintes formas:

- **monômio**, quando há apenas um termo;
- **binômio**, quando há dois termos;
- **trinômio**, quando há três termos;
- acima de três termos, não há nome particular, sendo chamado apenas **polinômio**.

Cada termo  $a_{ij}x^i y^j$  do polinômio é chamado *monômio* e seu grau é definido como  $gr = i + j$  sempre que  $a_{ij} \neq 0$ .

Portanto, definimos o grau de um *polinômio* não nulo em duas variáveis como sendo o maior dos graus de seus monômios não nulos.

**Exemplo 1.2.2.** *São polinômios de duas variáveis:*

$$f(x, y) = xy + 3x^3y - 3x^3y^2 + 5x^2y^4$$

$$g(x, y) = x^7 - 3x^4y + 2x^7y^5 + 3xy + 4y^3$$

$$h(x, y) = 3x^4y^5 + 3x^4y^2 - 3x^5 + 7y^8$$

*Temos que:*

$$gr(f(x, y)) = 6, \quad gr(g(x, y)) = 12 \quad \text{e} \quad gr(h(x, y)) = 9.$$

*Pois, em  $f(x, y)$  por exemplo, o monômio  $5x^2y^4$  apresenta o maior grau entre todos os monômios que compõem o polinômio  $f(x, y)$  ( $gr = 2 + 4 = 6$ ), já em  $g(x, y)$  o monômio  $2x^7y^5$  apresenta o maior grau que é 12 e em  $h(x, y)$  o monômio  $3x^4y^5$  apresenta grau maior entre todos os monômios 9.*

Um polinômio não nulo é chamado de *Homogêneo* de grau  $m$  se todos os seus monômios não nulos têm grau  $m$ .

Em um polinômio não nulo de duas variáveis, a soma dos seus monômios não nulos de grau  $m$  é um polinômio homogêneo, chamado componente homogênea de grau  $m$ .

**Exemplo 1.2.3.** O polinômio  $K(x, y) = x^2 + 5xy + y^2$  é um polinômio homogêneo de grau 2.

**Exemplo 1.2.4.** Em  $A(x, y) = 3 + 4x + 3y - 2xy^2 - 4xy - 3x^2y - 8xy + 4x^3$  apresentam-se componentes homogêneas:

- componente homogênea de grau 0: 3.
- componente homogênea de grau 1:  $4x + 3y$ ;
- componente homogênea de grau 2:  $-4xy - 8xy$ ;
- componente homogênea de grau 3:  $-3x^2y + 4x^3$ .

### 1.2.1 Operações com Polinômios em Duas Variáveis

Vamos agora a definir as operações Adição, Subtração e Multiplicação de Polinômios em duas variáveis. Estas vão munir o conjunto dos polinômios em duas variáveis de uma estrutura conhecida como Álgebra.

A adição e a subtração envolvendo polinômios seguem os critérios da redução de polinômios, no que se refere a termos semelhantes. Devemos sempre agrupar os termos semelhantes e realizar suas adições ou subtrações.

Sejam:

$$A(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \text{ e } B(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} x^i y^j$$

Definiremos a operação adição de polinômios da seguinte maneira:

$$A(x, y) + B(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} x^i y^j = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} x^i y^j, \text{ onde, } \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} x^i y^j \text{ é o resultado da adição dos polinômios, em que } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ para } 0 \leq i, j \leq m, n.$$

**Observação 1.2.2.** Será importante reconhecermos que na adição envolvendo polinômios é válida a propriedade comutativa:

$$\begin{aligned} A(x, y) + B(x, y) &= (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_n y^n) \\ &+ (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + b_2 x^{n-2} y^2 + \dots + b_n y^n) \\ &= (a_0 + b_0) x^n + (a_1 + b_1) x^{n-1} y + (a_2 + b_2) x^{n-2} y^2 + \dots + (a_n + b_n) y^n \\ &= (b_0 + a_0) x^n + (b_1 + a_1) x^{n-1} y + (b_2 + a_2) x^{n-2} y^2 + \dots + (b_n + a_n) y^n \\ &= (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + b_2 x^{n-2} y^2 + \dots + b_n y^n) \\ &+ (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_n y^n) \\ &= B(x, y) + A(x, y). \end{aligned}$$

**Exemplo 1.2.5.** Sejam  $f(x, y) = 2x^4 + xy^3 - 5y^2 + 1$  e  $g(x, y) = xy^3 + 12x^4 - 7y^2 + 4$ . Vamos calcular  $f(x, y) + g(x, y)$ .

Na adição de polinômios, adicionamos os coeficientes correspondentes aos termos semelhantes e mantemos a parte literal, assim:

$$\begin{aligned} f(x, y) + g(x, y) &= (2x^4 + xy^3 - 5y^2 + 1) + (xy^3 + 12x^4 - 7y^2 + 4) \\ &= (2 + 12)x^4 + (1 + 1)xy^3 + (-5 - 7)y^2 + (1 + 4) \\ &= 14x^4 + 2xy^3 - 12y^2 + 5. \end{aligned}$$

$$\therefore (f + g)(x, y) = 14x^4 + 2xy^3 - 12y^2 + 5.$$

Outra maneira de efetuarmos a Adição de polinômios é por meio de uma tabela, devemos observar também que os termos precisam ser completados, colocando um zero no termo de mesmo expoente que está faltando.

**Exemplo 1.2.6.** Seja  $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - 4y^2$  e  $g(x, y) = 4x^2 - 4xy + 3$ , calcularemos  $f(x, y) + g(x, y)$ , utilizando uma tabela.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2xy - 4y^2 \\ (+) 4x^2 - 4xy + 3 \\ \hline 7x^2 - xy - 4y^2 + 3 \end{array}$$

Portanto,  $f(x, y) + g(x, y) = 7x^2 - xy - 4y^2 + 3$ .

**Exemplo 1.2.7.** Sejam  $h(x, y) = 4xy^4 + 3x^2y - 5x^2 + 3$  e  $j(x, y) = 3xy^4 + 12x^2y - 4xy^2 + 4$ , vamos calcular  $f(x, y) - g(x, y)$ .

$$\begin{aligned} h(x, y) - j(x, y) &= (4xy^4 + 3x^2y - 5x^2 + 3) - (3xy^4 + 12x^2y - 4xy^2 + 4) \\ &= (4 - 3)xy^4 + (3 - 12)x^2y + (-5 - (-4))x^2 + (3 - 4) \\ &= xy^4 - 9x^2y - 1xy^2 - 1. \end{aligned}$$

$$\therefore (h - j)(x, y) = xy^4 - 9x^2y - 1xy^2 - 1.$$

Para efetuarmos a operação acima, podemos fazer uso de um tabela conforme o exemplo acima:

$$\begin{array}{r} 4xy^4 + 3x^2y - 5x^2 + 3 \\ (-) 3xy^4 + 12x^2y - 4xy^2 + 4 \\ \hline xy^4 - 9x^2y - xy^2 - 1 \end{array}$$

Portanto,  $h(x, y) + j(x, y) = xy^4 - 9x^2y - xy^2 - 1$ .

Para desenvolver o produto de um monômio por um polinômio e consequentemente o produto de polinômio por polinômio, é primordial o domínio do conhecimento sobre a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, pois esta operação é feita multiplicando-se o monômio por cada termo do polinômio.

**Observação 1.2.3.** É válida a distributividade da multiplicação em relação à adição. Supondo que  $p = m$ , temos:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) \cdot \{g(x, y) + h(x, y)\} &= \left( \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x^i y^j \right) \cdot \left\{ \left( \sum_{i,j=0}^m b_{i,j} x^i y^j \right) + \left( \sum_{i,j=0}^p c_{i,j} x^i y^j \right) \right\} \\
 &= \left( \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x^i y^j \right) \cdot \left( \sum_{i,j=0}^m (b_{i,j} + c_{i,j}) x^i y^j \right) \\
 &= \sum_{i,j=0}^{n+m} \left( \sum_{i,j=\alpha+\beta} a_{\alpha} \cdot (b_{\beta} + c_{\beta}) \right) x^i y^j \\
 &= \sum_{i,j=0}^{n+m} \left( \sum_{i,j=\alpha+\beta} a_{\alpha} \cdot b_{\beta} + a_{\alpha} \cdot c_{\beta} \right) x^i y^j \\
 &= \sum_{i,j=0}^{n+m} \left( \sum_{i,j=\alpha+\beta} a_{\alpha} \cdot b_{\beta} \right) x^i y^j + \sum_{i,j=0}^{n+m} \left( \sum_{i,j=\alpha+\beta} a_{\alpha} \cdot c_{\beta} \right) x^i y^j \\
 &= \left( \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x^i y^j \right) \cdot \left( \sum_{i,j=0}^m b_{i,j} x^i y^j \right) \\
 &+ \left( \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x^i y^j \right) \cdot \left( \sum_{i,j=0}^m c_{i,j} x^i y^j \right) \\
 &= f(x, y) \cdot g(x, y) + f(x, y) \cdot h(x, y).
 \end{aligned}$$

**Exemplo 1.2.8.** Multiplicaremos  $M(x, y) = 4x^2y$  por  $P(x, y) = 2x^3 - 1xy + 2y^3$ .

$$\begin{aligned}
 M(x, y) \cdot P(x, y) &= (4x^2y) \cdot (2x^3 - xy + 2y^3) \\
 &= 8x^5y - 4x^3y^2 + 8x^2y^4
 \end{aligned}$$

**Exemplo 1.2.9.** Sejam  $f(x, y) = 2x^4y + xy - 5x^2y + 1$  e  $g(x, y) = 12x^3 - 7y$ , vamos calcular  $f(x, y) \cdot g(x, y)$ .

Percebe-se que, na operação de multiplicação de polinômios, utilizamos a pro-

riedade distributiva, assim:

$$\begin{aligned}
 f(x) \cdot g(x) &= (2x^4y + xy - 5x^2y + 1) \cdot (12x^3 - 7y) \\
 &= 2x^4y \cdot (12x^3 - 7y) + xy \cdot (12x^3 - 7y) + \\
 &\quad (-5x^2y) \cdot (12x^3 - 7y) + 1 \cdot (12x^3 - 7y) \\
 &= (24x^7y - 14x^4y^2) + (12x^4y - 7xy^2) + (-60x^5y + 35x^2y^2) + (12x^3 - 7y) \\
 &= 24x^7y - 14x^4y^2 + 12x^4y - 7xy^2 - 60x^5y + 35x^2y^2 + 12x^3 - 7y
 \end{aligned}$$

Para ficarem mais visíveis as propriedades operatórias dos coeficientes, realizaremos os cálculos com o auxílio de uma tabela e observaremos também que os termos precisam ser completados colocando um zero para que o termo de mesmo expoente que está faltando complete a coluna, da direita para esquerda e abaixo, um do outro.

**Exemplo 1.2.10.** *Sejam  $f(x, y) = 2x^4 + xy - 5x^2y$  e  $g(x, y) = 12x^3 - 7y$  dois polinômios, vamos calcular  $f(x) \cdot g(x)$  usando uma tabela.*

		$2x^4$	+	$xy$	-	$5x^2y$	
	( $\times$ )			$12x^3$	-	$7y$	
			-	$14x^4y$	-	$7xy^2$	+
				$35x^2y^2$			
(+)	$24x^7$	-	$60x^5y$	+	$12x^4y$		
	$24x^7$	-	$60x^5y$	-	$2x^4y$	-	$7xy^2$
					+	$35x^2y^2$	

Portanto,  $f(x) \cdot g(x) = 24x^7 - 60x^5y - 2x^4y - 7xy^2 + 35x^2y^2$

Agora, iremos apresentar sucintamente o algoritmo da divisão de polinômios em duas variáveis, estudar o algoritmo da divisão de modo que um aluno do Ensino Médio possa ter domínio.

Na divisão de polinômios por monômios, utilizamos duas regras matemáticas fundamentais: realizamos a divisão entre os coeficientes numéricos e a divisão entre as partes algébricas, recorrendo à divisão de potências que apresentam a mesma base. Observe os exemplos a seguir:

**Exemplo 1.2.11.** *Sejam  $D(x, y) = 8x^4y^6 + 12x^3y^4 + 4x^2y^2$  e  $d(x, y) = 4x^2y$ , vamos operar  $D \div d$  da seguinte forma:*

$$(8x^4y^6 + 12x^3y^4 + 4x^2y^2) \div (4x^2y)$$

Neste caso, devemos proceder da seguinte maneira: dividiremos cada um dos termos do polinômio  $D(x, y)$  pelo monômio  $d(x, y)$ .

$$\begin{aligned} \frac{D(x, y)}{d(x, y)} &= \frac{8x^4y^6 + 12x^3y^4 + 4x^2y^2}{4x^2y} \\ &= \frac{8x^4y^6}{4x^2y} + \frac{12x^3y^4}{4x^2y} + \frac{4x^2y^2}{4x^2y} \\ &= 2x^2y^5 + 3xy^3 + y \end{aligned}$$

Quando dividimos polinômios por polinômios, devemos recorrer ao método das chaves ou algoritmo de Euclides. No entanto, para realizarmos tal operação, será necessário que os polinômios estejam reduzidos e ordenados.

O conceito da redução de termos semelhantes foi visto em (1.2.1). Quanto à ordenação de polinômios, dizemos que um polinômio está ordenado em relação à determinada variável, quando o grau de todos os monômios que o compõem, em relação a esta variável, está ordenado de forma crescente ou decrescente.

Para explicar o procedimento da divisão de polinômios pelo método das chaves, vamos dividir  $k(x, y) = 9x^3 - 18x^2y + 23xy^2 - 20y^3$  por  $h(x, y) = 3x - 4y$ .

**Exemplo 1.2.12.** *Sejam os polinômios  $k(x, y) = 9x^3 - 18x^2y + 23xy^2 - 20y^3$  e  $h(x, y) = 3x - 4y$ , vamos dividir  $k$  por  $h$  utilizando o método das chaves ou algoritmo de Euclides.*

$9x^3 - 18x^2y + 23xy^2 - 20y^3$	$3x - 4y$
$- 9x^3 + 12x^2y$	$3x^2 - 2xy + 5y^2$
$- 6x^2y + 23xy^2$	
$+ 6x^2y - 8xy^2$	
$+ 15xy^2 - 20y^3$	
$- 15xy^2 + 20y^3$	
$0$	

Pelo algoritmo de Euclides, temos:

$$k(x, y) = 9x^3 - 18x^2y + 23xy^2 - 20y^3 = (3x - 4y)(3x^2 - 2xy + 5y^2) + 0.$$

Assim, como  $r = 0$ , então  $k|h$ .

Em alguns casos, o polinômio a ser dividido, ou seja, o dividendo requer alguma preparação na sua ordenação, conforme iremos conferir no exemplo a seguir:

**Exemplo 1.2.13.** Vamos dividir  $f(x, y) = x^3 - y^3$  por  $g(x, y) = x - y$  recorrendo ao método das chaves.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - y^3 & x - y \\ \hline & \end{array}$$

Neste caso, devemos escrever o polinômio  $f(x, y)$  ordenando-o segundo as potências decrescentes de  $x$  e crescentes de  $y$ .

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2y + 0xy^2 - y^3 & x - y \\ - x^3 + x^2y & \hline x^2y + 0xy^2 & \\ - x^2y + xy^2 & \hline xy^2 - y^3 & \\ - xy^2 + y^3 & \hline 0 & \end{array}$$

Sendo assim, pelo algoritmo de Euclides, temos:

$$f(x, y) = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

### 1.2.2 Polinômios Irredutíveis

Assim como o que acontece com polinômios de uma variável, polinômios de duas variáveis podem ser escritos como produto de polinômios de graus menores. Uma vez que o conjunto de zeros não se altera se multiplicamos o polinômio  $P(x, y)$  por uma constante real, dizemos que  $P(x, y)$  e qualquer múltiplo não nulo  $\gamma P(x, y)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^*$  definem a mesma Curva. Por exemplo, os polinômios  $x - y$  e  $2x - 2y$  definem a mesma Reta. Curvas de grau 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são chamadas de retas, cônicas, cúbicas, quárticas, quinticas e sêxticas. Pode ainda acontecer de um conjunto de zeros em  $\mathbb{R}^2$  ser vazio, por exemplo, se  $P(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ , a Curva Real associada é vazia, no entanto,  $P(x, y)$  sempre define uma Curva em  $\mathbb{R}^2$ .

Podemos, ainda, fazermos uso de algumas ferramentas da computação para esboçar Curvas Algébricas Reais Planas, a efeito de visualizarmos essa Curva. Existem vários programas de computador que esboçam a Curva de equações polinomiais em duas ou três variáveis; neste trabalho recorreremos ao Geogebra para a maioria das Curvas aqui representadas. Uma questão que naturalmente se põe é se a equação polinomial  $f = 0$  está



bem determinada pela curva, i. e., o lugar das soluções, mas isso não é possível. Pode-se observar que  $f = 0$  e  $f^2 = 0$  apresentam as mesmas soluções. Se tomássemos  $f$  com grau mínimo, talvez todas as outras equações definindo a mesma curva seriam do tipo  $f^m = 0$ , mas as soluções de  $XY = 0$  e  $X^2Y = 0$  são as mesmas, contradizendo a proposta. O caso das equações:  $X^2 + Y^2 = 0$  e  $2X^2 + 2Y^2 = 0$  também têm o mesmo conjunto de soluções reais. A inexistência de pontos reais nesse último exemplo parece estar na raiz do problema. Para estudar isso, precisamos da seguinte definição e, conseqüentemente, das proposições apresentadas em [12]:

**Definição 1.2.4.** Um polinômio  $f \in \mathbb{R}[x, y]$  é irredutível se  $f$  é não constante e não pode ser escrito como produto de polinômios não constante em  $\mathbb{R}[x, y]$

Um resultado interessante é o seguinte:

**Proposição 1.2.1.** *Todo polinômio  $f \in \mathbb{R}[x, y]$  pode ser escrito como produto de polinômios irredutíveis.*

*Demonstração.* Se  $f$  for irredutível, não temos nada a fazer e o resultado está provado. Se  $f$  não for irredutível, então  $f = g \cdot h$  com  $g, h \in \mathbb{R}[x, y]$  não constantes. Como os graus de  $g$  e  $h$  são menores que o de  $f$ , podemos reaplicar o processo a  $g$  e  $h$ : se eles são irredutíveis temos provado o resultado; senão, podemos escrever aquele que não for irredutível como produto de irredutíveis e assim continuando o processo para os próximos fatores. Vale ressaltar que o grau dos polinômios resultantes tem que ser menor que o dos fatores do passo anterior e maior do que zero.  $\square$

No que diz respeito a Curvas Algébricas, temos o seguinte resultado.

**Proposição 1.2.2.** *Sejam  $f$  e  $g$  polinômios em duas variáveis com coeficientes nos Reais, então  $f(x, y) = 0$  e  $g(x, y) = 0$  têm as mesmas soluções em  $\mathbb{R}^2$  se e somente se, os fatores irredutíveis de  $f$  e  $g$  são os mesmos.*

*Demonstração.* Seja  $p \in \mathbb{R}[x, y]$  um fator irredutível de  $f$ .

Supondo que  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, p(x, y) = 0 \Rightarrow g(x, y) = 0$ , provaremos que  $p$  divide  $g$  em  $\mathbb{R}[x, y]$ . Podemos supor que  $Y$  ocorre efetivamente em  $p$ , sendo  $A = \mathbb{K}(x), K = \mathbb{K}(x)$ . Assim,  $p \in \mathbb{A}[Y]$  é não constante. Visto que  $A$  é um anel fatorial, sabemos que  $p$  é irredutível em  $\mathbb{K}[Y]$ . Se por absurdo  $p \nmid g$ , então  $\text{mdc}(p, g) = 1$ . Daí existiria uma relação

$$ap + bg = c,$$

onde  $a, b \in \mathbb{A}[Y]$  e  $c \in \mathbb{A}, c \neq 0$ . Agora como  $p$  não é constante exceto para um número finito de valores de  $x$ , a equação  $p(x, y) = 0$  admite solução. Daí há uma infinidade de valores de  $x$ , tais que  $c(x) = 0$ , onde  $c = 0$ . Esta contradição mostra que  $p/g$  em  $\mathbb{K}[Y]$  e, portanto  $p/g$  em  $\mathbb{A}[Y]$ .  $\square$

Com efeito, se  $P(x, y)$  é um polinômio irreduzível e a curva  $C$  que está definida por  $P(x, y) = 0$  é infinita, então a equação de grau mínimo está bem determinada. Daí em diante, passam-se a admitir pontos cujas coordenadas são números complexos. Em praticamente toda a teoria que apresentaremos neste trabalho, a propriedade decisiva dos números complexos garante que estes formam um corpo algebricamente fechado de característica zero.

**Definição 1.2.5** (12). Uma curva algébrica plana afim é uma classe de equivalência de polinômios não constantes  $f \in \mathbb{K}[x, y]$ , módulo a relação que identifica dois tais polinômios se um é múltiplo do outro por uma constante diferente de zero.

Nesse caso, a equação da curva é qualquer um dos polinômios dessa classe de equivalência.

O traço de uma curva é o conjunto de pontos que satisfaz uma dada equação polinomial, ou seja, é o conjunto de soluções da equação polinomial. O traço real de uma curva definida sobre  $\mathbb{R}$  é o conjunto de soluções reais da equação.

Assim passaremos a identificar uma curva algébrica plana por sua equação.

Observe que as curvas  $x^2 = 0$  e  $x = 0$ , embora tenham o mesmo traço, são consideradas distintas. Uma curva é irreduzível se admite uma equação que é um polinômio irreduzível. As componentes irreduzíveis de uma dada curva  $f$  são as curvas definidas pelos fatores irreduzíveis de  $f$ . A multiplicidade de uma componente  $p$  de  $f$  é o expoente com que  $p$  ocorre na decomposição de  $f$ ; quando maior ou igual a dois, dizemos que  $p$  é componente múltipla de  $f$ .

Podemos dizer, ainda, que as componentes irreduzíveis de uma curva  $f$  são os pedaços que constituem  $f$  e que são também curvas. No entanto, devemos ter atenção para o fato de que uma curva pode ser irreduzível mesmo sendo seu traço real formado por duas ou mais partes disjuntas.

E iremos tratar curvas algébricas e polinômios irreduzíveis como duas representações de um mesmo objeto.

Seja  $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ ,  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  um polinômio em duas variáveis com coeficientes reais, a curva algébrica real afim definida por  $P(x, y)$  é o conjunto de zeros no  $\mathbb{R}$  deste polinômio, ou seja:

$$C_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

**Exemplo 1.2.14.** A representação geométrica da curva dada pela equação  $x^3 - y^2 - x = 0$ , ou ainda,  $y^2 = x(x - 1)(x + 1)$  que pode ser vista na Figura 1.1 a seguir:

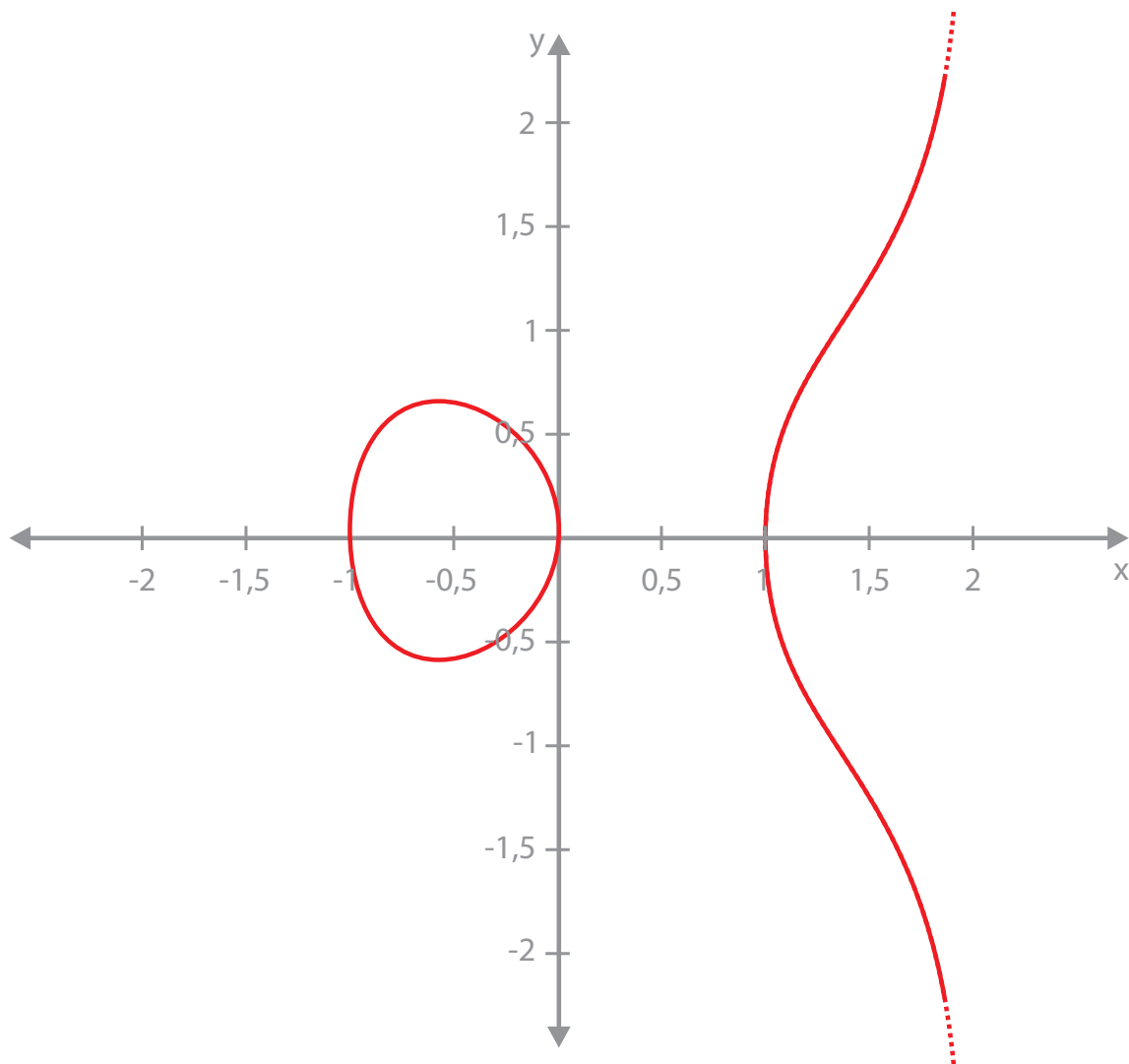


Figura 1.1: Curva Algébrica  $x^3 - y^2 - x = 0$ .

### 1.3 Exemplos de Curvas Algébricas Planas

No ensino básico, temos contato com algumas dessas curvas: retas, que são Curvas Algébricas de primeira ordem, e cônicas, que são de segunda ordem. Veremos a seguir alguns exemplos que aparecem no ensino básico e outros que não aparecem.

#### 1.3.1 Reta

A reta que passa pelos pontos  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ . Sua equação é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

onde  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$  denota o determinante.

**Exemplo 1.3.1.** Observe a representação algébrica e geométrica da reta que passa pelos pontos  $(4, 3)$  e  $(6, 7)$ :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 2y - 10 = 0.$$

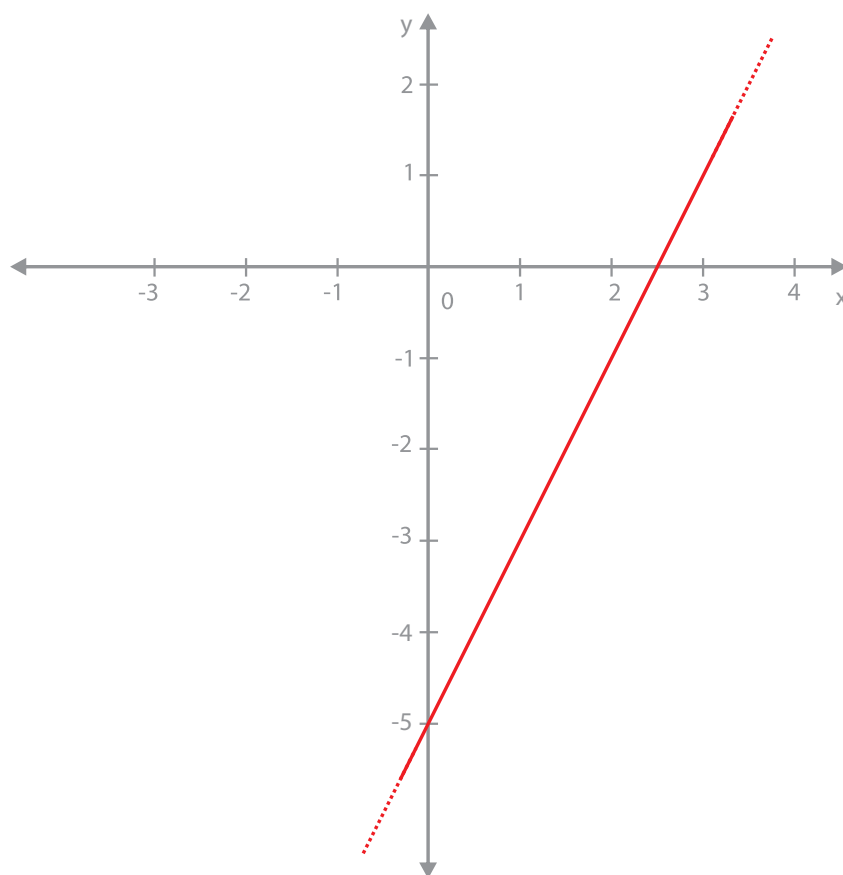


Figura 1.2: Reta:  $4x - 2y - 10 = 0$ .

### 1.3.2 Cônicas

Denominamos Cônicas o conjunto de Curvas Algébricas de segunda ordem, ou seja, definidas por polinômio de grau 2.

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

## Parábola

Curva plana cujos pontos distam igualmente de um ponto fixo (foco) e de uma reta (diretriz), ambos situados no plano da curva. Sua equação, num referencial apropriado, é dada por:

$$y = ax^2 + bx + c$$

onde  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b, c \in \mathbb{R}$

**Exemplo 1.3.2.** Observe a seguir na Figura 1.3 o exemplo da representação geométrica de uma Curva Algébrica dada por:

$$y = \frac{x^2}{8} \Rightarrow x^2 - 8y = 0$$
$$\Rightarrow f(x, y) = x^2 - 8y = 0$$

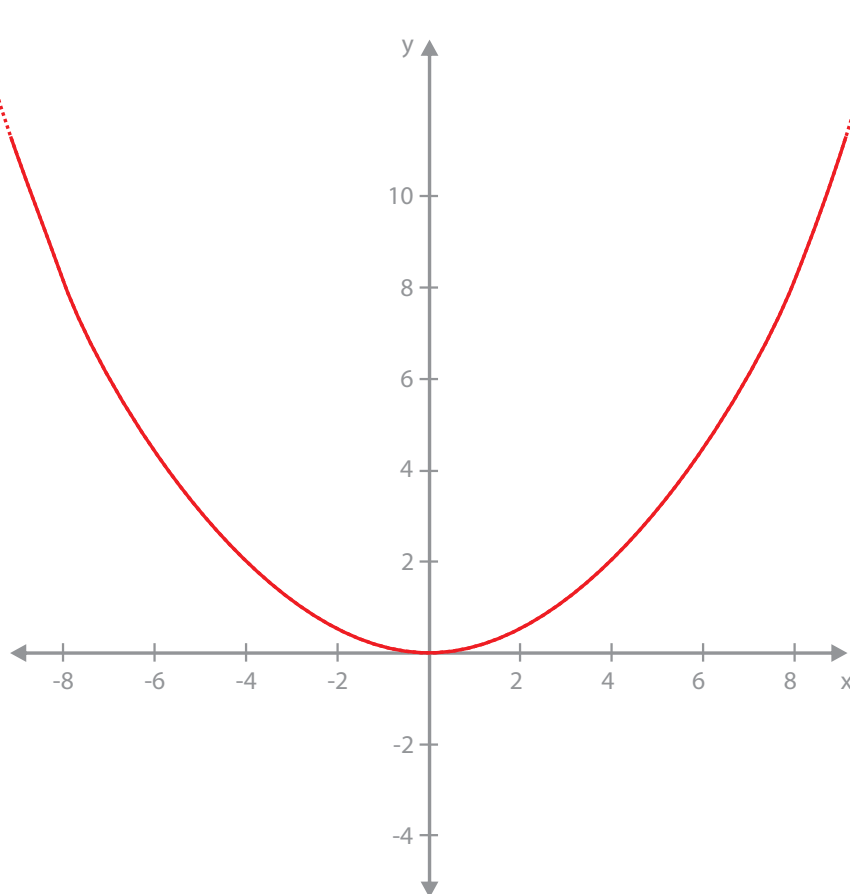


Figura 1.3: Parábola:  $x^2 - 8y = 0$ .

### Circunferência

A Circunferência com raio medindo  $r$  e centro  $(x_0, y_0)$  é o lugar geométrico dos pontos que estão a mesma distância  $r$  de  $(x_0, y_0)$ . Sua equação geral é dada por:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

onde  $P = (x_0, y_0)$  se corresponde com o centro da circunferência.

**Exemplo 1.3.3.** Observe na Figura 1.4, o traço da Curva Algébrica denotada por Circunferência com centro no ponto  $A(3, 4)$  e raio 5:

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y - 4)^2 &= 5^2 \\ \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 &= 25 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y &= 0 \\ \therefore f(x, y) &= x^2 + y^2 - 6x - 8y\end{aligned}$$

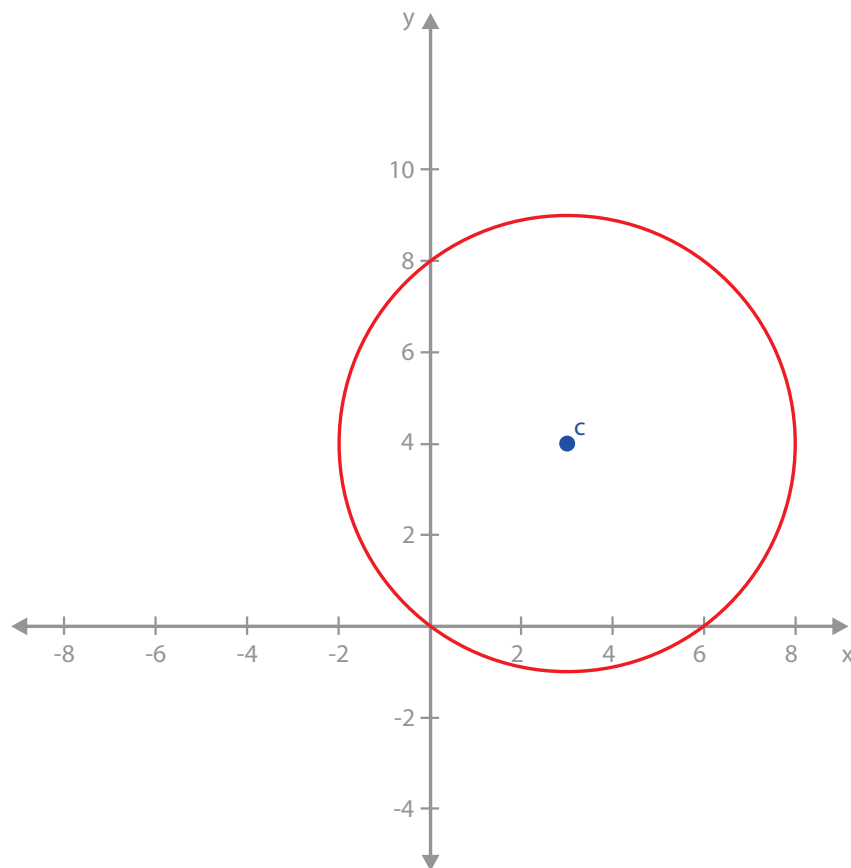


Figura 1.4: Circunferência:  $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ .

## A Elipse

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano em que a soma das distâncias de cada um desses pontos a dois pontos fixos (focos da elipse) desse plano é constante. Sua equação, num referencial apropriado, é dada por:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\ \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1,\end{aligned}$$

onde

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

**Exemplo 1.3.4.** Observe o exemplo da curva a seguir:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{9x^2 + 16y^2}{144} &= 1 \Rightarrow 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0 \\ \therefore f(x, y) &= 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0.\end{aligned}$$

Observe na Figura 1.5 o traço da referida Curva.

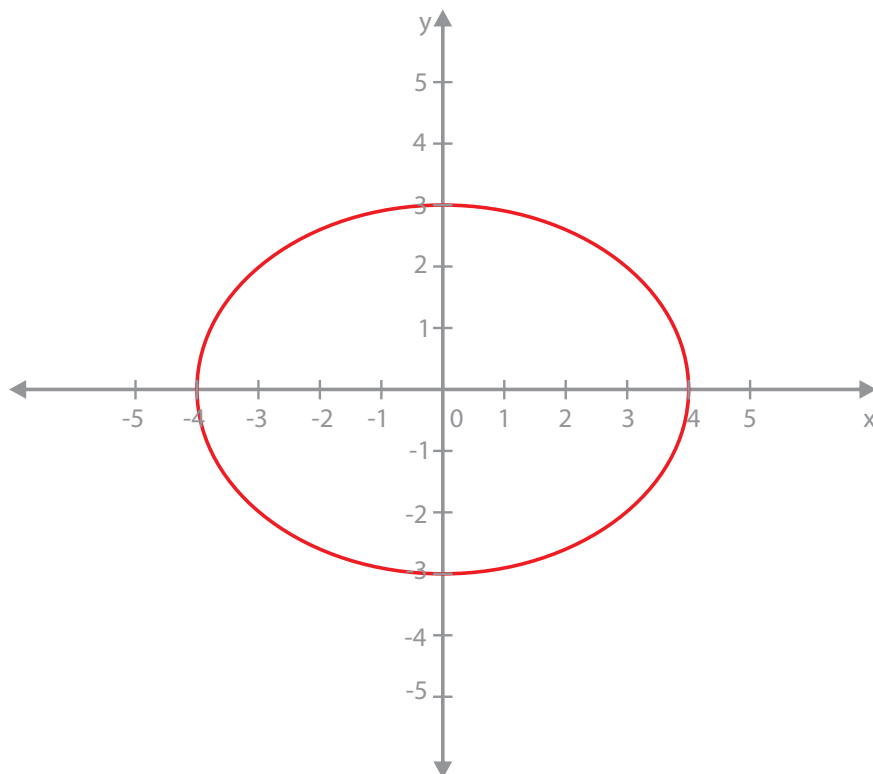


Figura 1.5: Elipse:  $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ .

## A Hipérbole

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos (focos da hipérbole) é constante. Sua equação simplificada, num referencial apropriado, é dada por:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\ \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1,\end{aligned}$$

onde

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

**Exemplo 1.3.5.** Observe na Figura 1.6 o traço da curva dada por:

$$f(x, y) = 9x^2 - 16y^2 - 144.$$

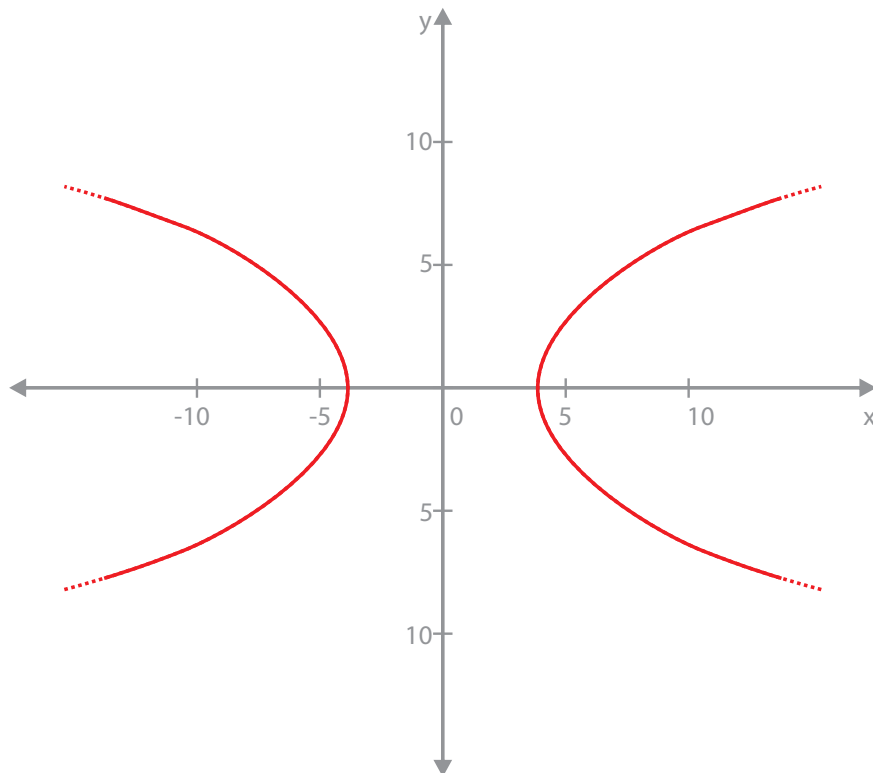


Figura 1.6: Hipérbole:  $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ .

As curvas exemplificadas acima, reta e cônicas, são exemplos abordados analiticamente no ensino básico.

Abaixo vamos listar alguns exemplos de curvas algébricas que não aparecem no ensino básico.



### 1.3.3 A Cissóide de Diócles

A Cissóide de Diócles é uma curva de terceira ordem, descrita pelo matemático grego Diócles 200 a. C., a fim de auxiliar na resolução do problema de duplicação do cubo (Problema de geometria, que consiste em obter um método para, dada uma aresta de um cubo, construir, com régua e compasso, a aresta do cubo cujo volume seja o dobro do volume do cubo inicial). Trata-se, no entanto, do lugar geométrico dos pontos dos pés das normais traçadas do vértice de uma parábola às suas tangentes.

Dada a parábola de equação  $x^2 = 4by$ , a tangente num ponto  $(x_0, y_0)$  se escreve:

$$x_0x - 4by_0 = 2b(y - y_0).$$

A normal tomada da origem (que é o vértice) é:

$$2bx + x_0y = 0.$$

Dessas duas, resulta a equação da cissóide,

$$bx^2 - y(y^2 + x^2) = 0.$$

**Exemplo 1.3.6.** Observe a representação gráfica da curva dada por:

$$f(x, y) = bx^2 - y(y^2 + x^2) = 0 \text{ com } b = 2 \Rightarrow f(x, y) = 2x^2 - y(y^2 + x^2) = 0$$

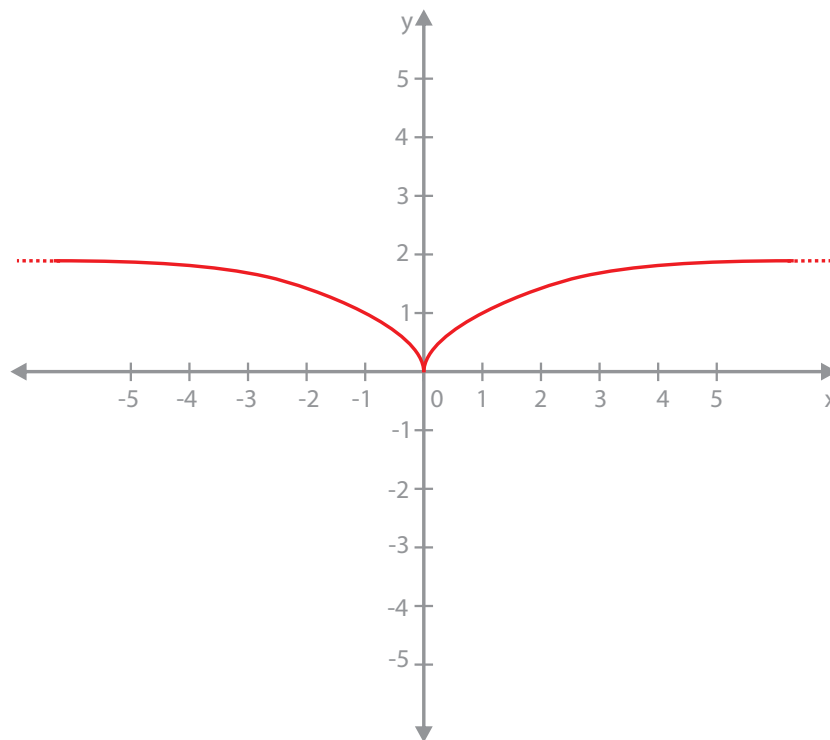


Figura 1.7: Cissóide de Diócles:  $2x^2 - y(y^2 + x^2) = 0$ .

### 1.3.4 Folium de Descartes

Com nome advindo do latim, *Folium* significa folha. O Folium foi proposto pela primeira vez por Descartes em 1638. O Folium de Descartes é uma curva algébrica de terceira ordem definida por:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

A curva faz um laço no primeiro quadrante com um ponto duplo na origem e assíntota.

$$x + y + a = 0$$

A curva é simétrica para  $y = x$ .

**Exemplo 1.3.7.** Esta é a representação da curva denotada por Folium de Descartes, dado por  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$  para o parâmetro  $a = 1$ .

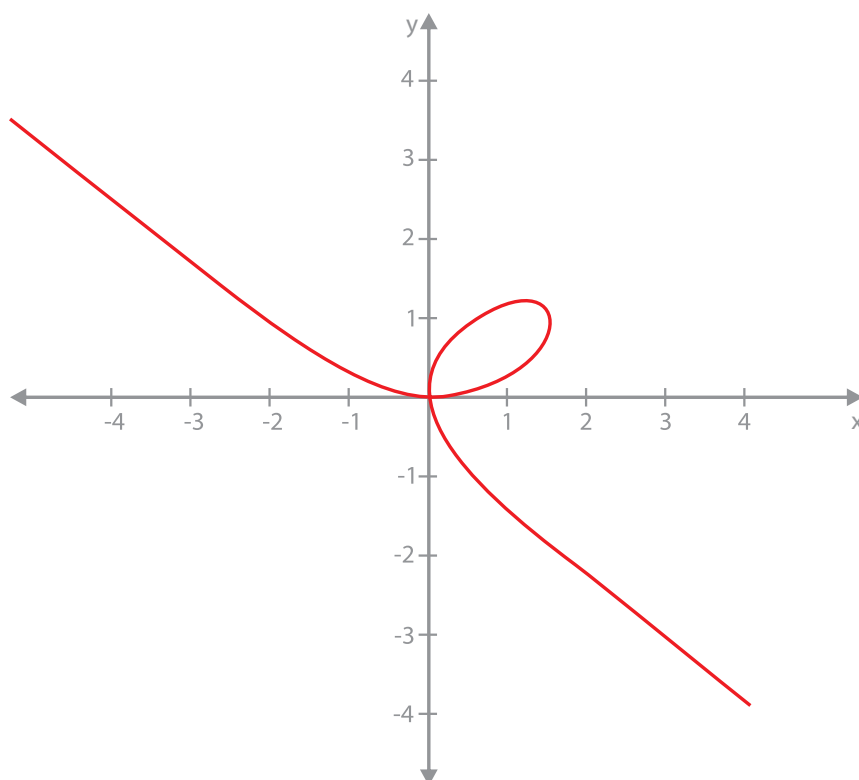


Figura 1.8: Folium de Descartes:  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .

### 1.3.5 Trissectriz de Maclaurin

A trissectriz de Maclaurin é uma curva de terceira ordem que ganhou notoriedade por sua propriedade trissectriz, isto é, ela pode ser utilizada para trisseccionar

ângulos. Essa propriedade pode ser definida pelo lugar geométrico dos pontos de interseção de duas retas, cada uma girando a uma velocidade uniforme sobre pontos distintos, de tal forma que a relação entre as taxas de rotação é de  $1/3$  e as retas inicialmente coincidem coma reta divisória entre dois pontos. O nome foi atribuído em homenagem a Colin Maclaurin, que investigou essa curva em 1742. Ela relaciona-se com o Folium de Descartes por transformações afins.

Folium de Descartes:  $x^3 + y^3 = 3axy$  mudando as variáveis para encontrar a equação em um sistema de coordenadas rotacionado 45 graus.

$$x = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}, y = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}.$$

Logo, no sistema de coordenadas  $X, Y$ , a equação passa a ser descrita por:

$$2X(X^2 + 3Y^2) = 3a\sqrt{2}(X^2 - Y^2)$$

Multiplicando a direção  $Y$  por um fator de  $\sqrt{3}$ , temos:

$$2X(X^2 + Y^2) = a\sqrt{2}(3X^2 - Y^2)$$

**Exemplo 1.3.8.** *Aqui temos a representação da Trissectriz de Maclaurin dado por:  $f(x, y) = x(x^2 + y^2) - a(y^2 - 3x^2) = 0$ , para  $a = 1$*

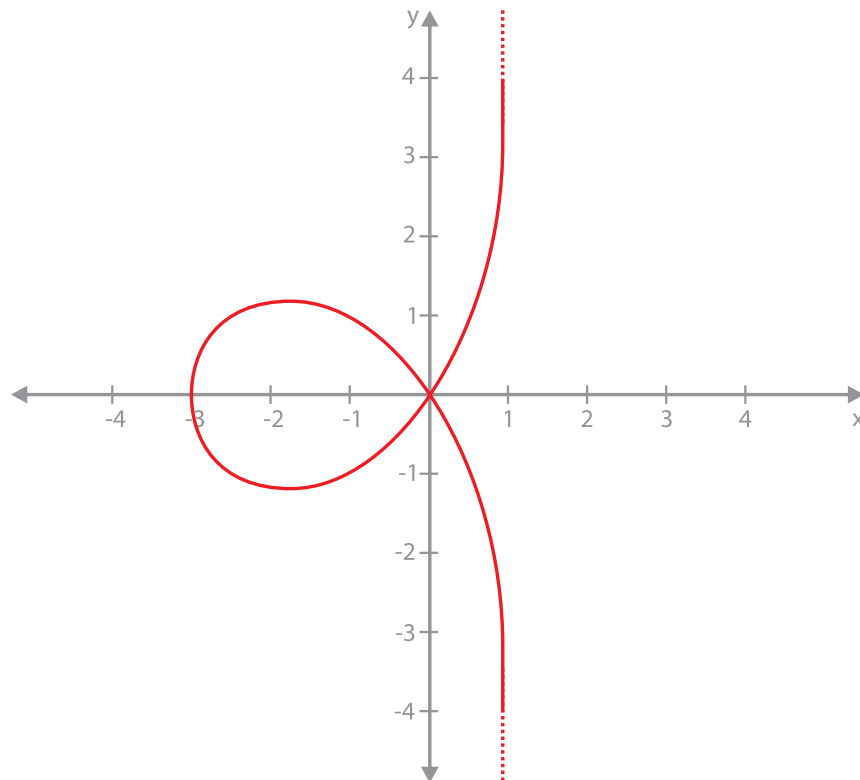


Figura 1.9: Trissectriz de Maclaurim

### 1.3.6 Caracol de Pascal

O nome Caracol de Pascal foi atribuído a esta curva pelo matemático francês Roverbal (por volta de 1730). Ele a utilizou para desenhar tangentes a curvas e mais tarde calculou a sua área. Esta curva foi estudada por Étienne Pascal, pai do matemático e filósofo Blaise Pascal. O nome Limaçon vem da palavra em Latin "limax" que significa "caracol". Após essa época, diversos trabalhos têm sido publicados sobre essa curva bem como diversas definições geométricas têm sido dadas a ela. Ao longo dos tempos, foram publicados diversos artigos nos quais se expuseram as propriedades do caracol e as formas de o construir. Foram também desenvolvidos aparelhos para descrever mecanicamente esta curva por meio de um movimento contínuo. O primeiro destes mecanismos foi construído por Peaucellier e é constituído por duas barras articuladas.

Em coordenadas cartesianas, a curva algébrica denotada de Caracol de Pascal se apresenta da forma:

$$C(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) + (a^2 - b^2)x^2 - b^2y^2 = 0.$$

Já em coordenadas polares, a curva algébrica Caracol de Pascal se apresenta da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} C(x, y) &= (x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) + (a^2 - b^2)x^2 - b^2 \cdot y^2 = 0 \\ &\downarrow \\ ((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2)^2 - 2ar\cos\theta((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2) + (a^2 - b^2)(r\cos\theta)^2 - b^2(r\sin\theta)^2 &= 0 \\ &\downarrow \\ (r^2(\cos\theta)^2 + r^2(\sin\theta)^2)^2 - 2ar\cos\theta(r^2(\cos\theta)^2 + r^2(\sin\theta)^2) + (a^2 - b^2)r^2(\cos\theta)^2 - b^2r^2(\sin\theta)^2 &= 0 \\ &\downarrow \\ (r^2)^2 - 2ar\cos\theta r^2 + a^2r^2(\cos\theta)^2 - b^2r^2(\cos\theta)^2 - b^2r^2(\sin\theta)^2 &= 0 \\ &\downarrow \\ r^4 + 2ar^3\cos\theta + [a^2(\cos\theta)^2 - b^2(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2].r^2 &= 0 \\ &\downarrow \\ r^2 \cdot r^2 + 2ar\cos\theta + a^2(\cos\theta)^2 - b^2 &= 0 \\ &\downarrow \\ r^2 \cdot (r^2 + 2ar\cos\theta + a^2(\cos\theta)^2) &= r^2b^2 \\ &\downarrow \\ (r + a\cos\theta)^2 &= b^2 \\ &\downarrow \\ r + a\cos\theta &= \pm b \\ &\downarrow \\ r &= a\cos\theta \pm b. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.3.9.** A seguir temos a representação do traço de um caso particular da curva denominada Caracol de Pascal, para  $a = 1$  e  $b = 1$ :

$$\begin{aligned}
 C(x, y) &= (x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) + (a^2 - b^2)x^2 - b^2 \cdot y^2 = 0 \\
 &\Downarrow \\
 C(x, y) &= (x^2 + y^2)^2 - 2 \cdot 1 \cdot x(x^2 + y^2) + (1^2 - 1^2)x^2 - 1^2 \cdot y^2 = 0 \\
 &\Downarrow \\
 C(x, y) &= (x^2 + y^2)^2 - 2x(x^2 + y^2) - y^2 = 0.
 \end{aligned}$$

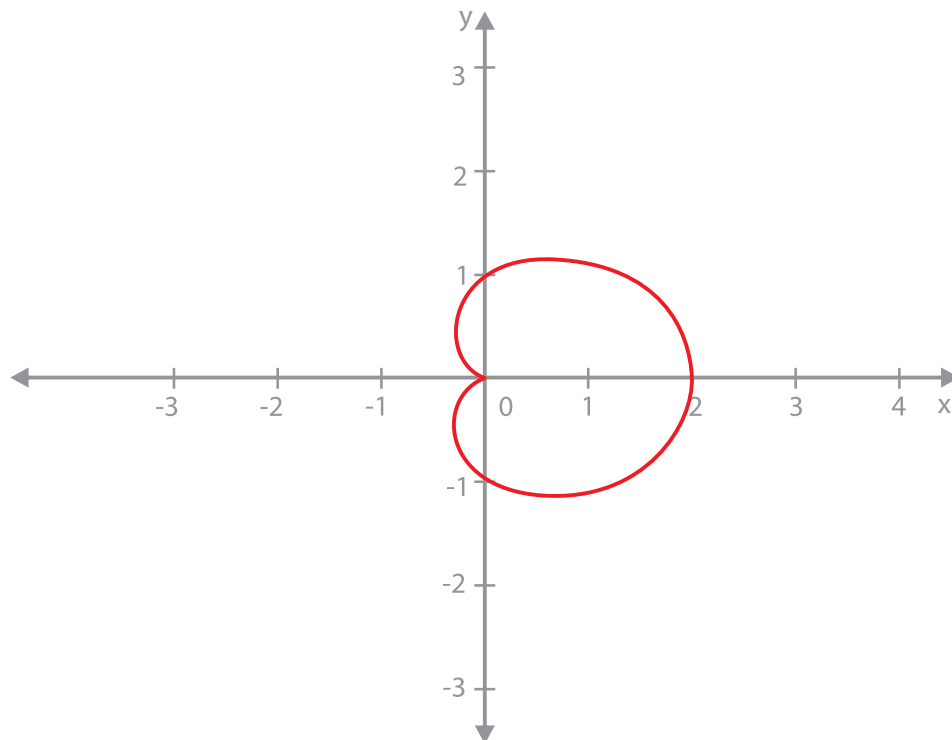


Figura 1.10: Caracol de Pascal

## 1.4 Curvas Fechadas em $\mathbb{R}^2$

As fronteiras de uma cidade representam um objeto quando desenhadas em um plano; esse objeto possui algumas características interessantes às quais devemos dar a devida atenção. Pode-se perceber que esse objeto não apresenta extremidades, ou seja, não tem início ou fim, ele é formado por um conjunto de pontos e, ainda, pode ser representado

por uma Curva no plano  $\mathbb{R}^2$ . Então as fronteiras ou borda dessa representação são dadas por uma Curva que classificaremos como Fechada.

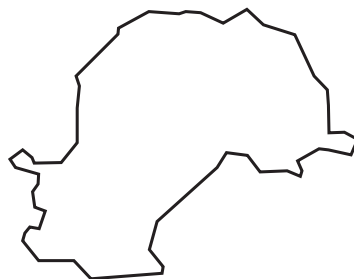


Figura 1.11: Fronteiras ou borda de uma cidade

O centro de interesse deste trabalho é calcular a distância entre objetos no plano, mais especificamente Curvas Fechadas. Vamos a dar a definição formal:

**Definição 1.4.1.** Uma Curva Fechada  $C : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação contínua tal que:  $C(a) = C(b)$ .

**Exemplo 1.4.1.** Observe o traço da curva fechada na Figura 1.12 dada por:

$$C(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$$

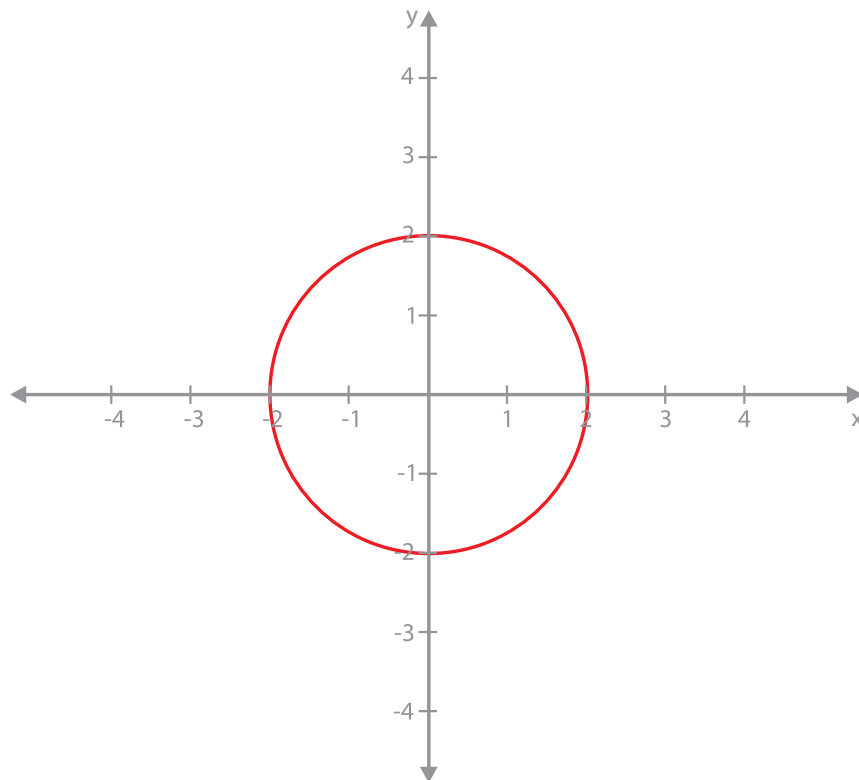


Figura 1.12: Circunferência

De fato, observe que a Figura 1.12 é imagem da curva parametrizada  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$  e que  $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ .

**Observação 1.4.2.** As Curvas Fechadas podem ser vistas como soluções periódicas de problemas modelados em  $\mathbb{R}^2$ , pois elas se apresentam como uma  $f(t)$ , em que existe um  $T$ , tal que  $f(t + T) = f(t)$ .

**Exemplo 1.4.2.** Problemas modelados por Curvas Fechadas do tipo  $\lambda(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ , percebemos que nesse tipo de problema,  $\lambda(t + 2\pi) = \lambda(t)$ .

**Exemplo 1.4.3.** Observe o traço da curva fechada dada por:

$$C(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 8\}$$

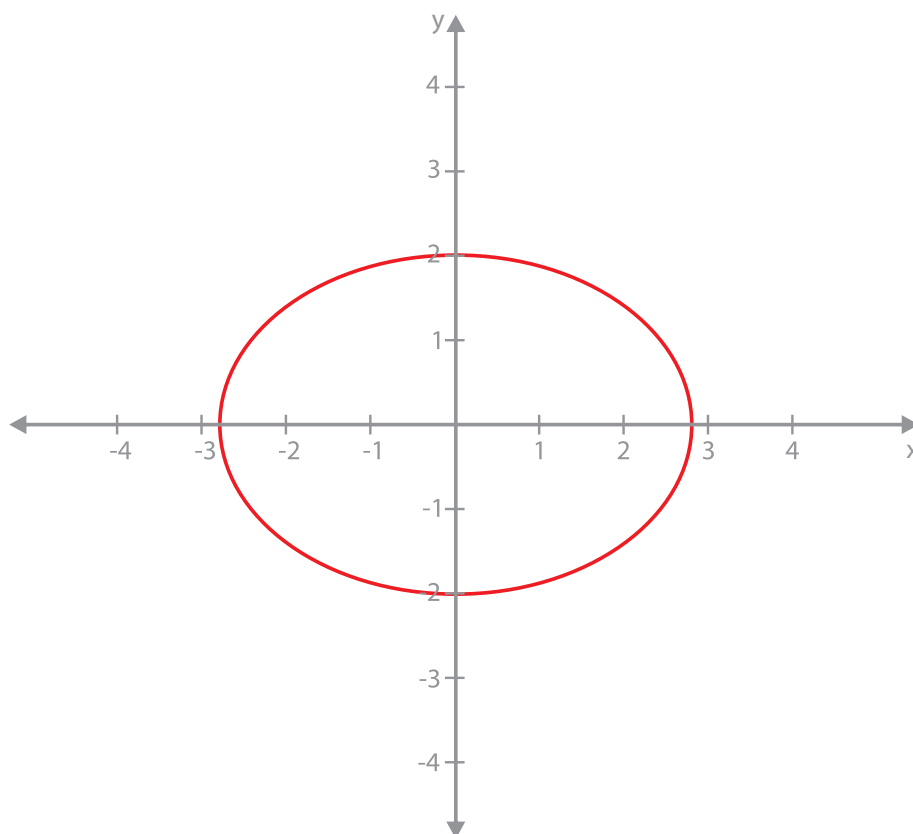


Figura 1.13: Elipse

Informalmente, podemos entender Curvas Fechadas em  $\mathbb{R}^2$  como sendo aquelas curvas que não apresentam extremidades.

**Observação 1.4.3.** Algumas das Curvas apresentadas neste capítulo: Cissóide de Diócles, Folium de Descartes, Trissectriz de Maclaurin e Caracol de Pascal não fazem parte

do roll de conhecimentos previstos para um aluno do Ensino Médio. Porém, o presente trabalho propõe a discussão e o aprofundamento desse tema ainda no Ensino Médio, dessa forma, a apresentação dessas novas curvas irá aguçar o interesse dos alunos iniciantes à Geometria Algébrica.



## Capítulo 2

# Espaços Métricos

O propósito deste capítulo é introduzir conceitos sobre Espaço Métrico e apresentar algumas definições e exemplos que serão relevantes para o prosseguimento deste trabalho; na sequência, discutiremos um assunto não menos importante que são as noções sobre Bolas de uma Curva representada em um espaço métrico. O presente capítulo terá como referências principais: [4] e [10]

### 2.1 Métrica

**Definição 2.1.1.** Uma função  $d$  é considerada uma métrica ou distância em um espaço  $\mathbb{X}$  arbitrário, se as seguintes condições forem satisfeitas para todos os  $x, y, z \in \mathbb{X}$ .

- 1) Positividade:  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$  e  $d(x, x) = 0$ .
- 2) Simetria:  $d(x, y) = d(y, x)$
- 3) Desigualdade triangular:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

A propriedade 3), descrita acima, é conhecida como desigualdade triangular e tem origem no fato de, na geometria elementar, cada lado de um triângulo ter medida menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

### 2.2 Espaço Métrico

**Definição 2.2.1.** Um espaço métrico é um conjunto  $\mathbb{X}$  no qual é possível definir uma distância  $d(x, y)$  entre cada par de pontos  $x, y \in \mathbb{X}$ , ou seja, sendo  $\mathbb{X}$  um conjunto arbitrário. A função  $d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma métrica em  $\mathbb{X}$  se as seguintes condições descritas em (2.1.1) forem satisfeitas para todos os  $x, y, z \in \mathbb{X}$ .

Logo, podemos concluir que: um espaço métrico é um conjunto em que seja possível calcular a distância entre seus elementos, ou seja, com uma medida nele. Em

linguagem formal, define-se um espaço métrico como um par  $(\mathbb{X}, d)$ , onde  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{X}$ . Os elementos de  $\mathbb{X}$  são chamados pontos do espaço métrico e  $d(x, y)$  refere-se à distância entre  $x$  e  $y$ ; em alguns exemplos, podemos nos deparar com uma definição de distância entre  $x$  e  $y$  denotada como  $|xy|$ , assim como podemos nos referir a um determinado “espaço métrico  $\mathbb{X}$ ” ao invés de usarmos espaço métrico  $(\mathbb{X}, d)$ .

**Exemplo 2.2.1.** *Um exemplo bastante trivial de uma métrica em qualquer conjunto  $\mathbb{X}$  é a métrica discreta*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y; \\ 1, & \text{se } x \neq y; \end{cases}$$

*Então  $d$  é uma função e valem:*

*$d(x, y) = 0$  se  $x = y$ , por definição.  $d(x, x) = 0$ .*

*$d(x, y) = 1$  para  $x \neq y$ , por definição. Como  $1 > 0$  temos que  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ .*

*Se  $x = y$ , então  $d(x, x) = 0$ . Se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) = 1$ , por definição.*

*Também se  $y \neq x \Rightarrow d(y, x) = 1$ . Logo,  $d(x, y) = d(y, x)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{X}$ .*

*Se  $x = z$ , então  $d(x, z) = 0 \leq d(x, y) + d(y, z)$*

*Se  $x \neq z$ , então  $d(x, z) = 1$*

**i)** *Se  $y = x$ , então  $y \neq z$ . Neste caso,  $d(x, z) = 1$ ,  $d(x, y) = 0$  e  $d(y, z) = 1$ , então  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .*

**ii)**  *$y = z$  então  $y \neq x$ . Neste caso,  $d(x, z) = 1$ ,  $d(x, y) = 1$  e  $d(y, z) = 0$ , então  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .*

**iii)** *Se  $y \neq x$  e  $y \neq z$ , então  $d(x, z) = 1$ ,  $d(x, y) = 1$  e  $d(y, z) = 1$ , então  $1 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 2$ .*

*Assim,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$ .*

*Portanto,*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

*é uma métrica em  $\mathbb{X}$ .*

**Proposição 2.2.1.** *Seja  $d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que:*

*(a)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .*

*(b)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$ .*

Então  $d$  é uma métrica.

i)  $d(x, x) = 0$ . De (a) temos que  $x = y$  implica  $d(x, x) = 0$ .

Além disso, se  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ . Em (b), se  $z = x$ , temos:  $d(x, x) \leq d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$ . De  $i$ ) acima,  $d(x, x) = 0$ . Logo,  $2d(x, y) \geq 0 \Rightarrow d(x, y) \geq 0$ . Por (a),  $d(x, y) \neq 0$ . Então  $d(x, y) > 0$ . se  $x \neq y$ .

ii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{X}$ . Em (b), se  $y = x$ , temos:

$$d(x, z) \leq d(x, x) + d(z, x)$$

Por  $i$ ),  $d(x, x) = 0$  então  $d(x, z) \leq d(z, x)$ ,  $\forall x, z \in \mathbb{X}$ . Trocando  $x$  por  $z$  e  $z$  por  $x$ , temos:  $d(z, x) \leq d(x, z)$ ,  $\forall z, x \in \mathbb{X}$ . Assim,  $d(x, z) = d(z, x)$ ,  $\forall x, z \in \mathbb{X}$ .

iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$ . Usando  $iii$ ) na segunda parcela da soma em (b);  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y) = d(x, y) + d(y, z)$ .

Portanto,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$ .

Então, as condições (a) e (b) da proposição (2.2.1) são suficientes para demonstrar que uma função  $d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma métrica em  $\mathbb{X}$ , conforme o definido em (2.2.1).

**Exemplo 2.2.2.** Podemos definir  $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Observe a seguir a demonstração:

$|x - y| \geq 0$ , então  $d(x, y) \geq 0$ . Por outro lado,  $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ , logo  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

Sendo,  $d(x, z) = |x - z| = |x + y - y - z| \leq |x - y| + |y - z| = |x - y| + |z - y| = d(x, y) + d(z, y)$ . Assim,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ .

Portanto,  $(\mathbb{R}, d)$  é um espaço métrico.

Todos os conceitos para espaço métrico discutidos neste trabalho até então são naturais generalizações dos conceitos correspondentes para o conjunto  $\mathbb{R}$  com essa métrica de valor absoluto.

**Exemplo 2.2.3.** Podemos definir distância como  $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$x = (x_1, x_2)$$

$$y = (y_1, y_2)$$

Observe a demonstração a seguir:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0 \Rightarrow (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0.$$

Como  $(x_1 - y_1)^2 \geq 0$  e  $(x_2 - y_2)^2 \geq 0$ , então  $(x_1 - y_1)^2 = 0$  e  $(x_2 - y_2)^2 = 0 \iff x_1 - y_1 = 0$  e  $x_2 - y_2 = 0$ , ou seja,  $x_1 = y_1$  e  $x_2 = y_2$ , o que implica  $x = y$ . Portanto,  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .

Para provarmos a seguinte propriedade:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ , recorreremos à desigualdade de Cauchy-Schwarz no  $\mathbb{R}^n$ , que se enuncia da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

De fato, e a demonstração segue abaixo:

$2rs \leq r^2 + s^2$  é verdadeira para todo  $r, s \in \mathbb{R}$ , pois  $(r - s)^2 = r^2 - 2rs + s^2 \geq 0$ . Assim, se fizermos  $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  e  $b = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$ , é verdadeira a relação:

$$2 \cdot \frac{|x_i|}{a} \cdot \frac{|y_i|}{b} \leq \frac{(x_i^2)}{a^2} + \frac{(y_i^2)}{b^2}$$

Para todo  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Somando em relação ao índice  $i$ , teremos:

$$\frac{2}{ab} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq 1 + 1 = 2$$

E portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq ab &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Retomando a propriedade, temos:

$$\begin{aligned} (d(x, z))^2 &= (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 \\ &= (x_1 - y_1 + y_1 - z_1)^2 + (x_2 - y_2 + y_2 - z_2)^2 \\ &= (x_1 - y_1)^2 + 2(x_1 - y_1)(y_1 - z_1) + (y_1 - z_1)^2 + \\ &+ (x_2 - y_2)^2 + 2(x_2 - y_2)(y_2 - z_2) + (y_2 - z_2)^2. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\begin{aligned}
(d(x, z))^2 &\leq (x_1 - y_1)^2 + 2[(x_1 - y_1)(y_1 - z_1)]^{\frac{1}{2}} + (y_1 - z_1)^2 + \\
&+ (x_2 - y_2)^2 + 2[(x_2 - y_2)(y_2 - z_2)]^{\frac{1}{2}} + (y_2 - z_2)^2 \\
&= [\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}]^2 \\
&= [\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}]^2 \\
&= [d(x, y) + d(z, y)]^2.
\end{aligned}$$

Assim,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  e portanto  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{R}^2$ .

A métrica acima é apresentada aos alunos do ensino básico. Ela é uma métrica natural, pois provém da Distância da Geometria Euclidiana e é chamada Métrica Euclidiana. Também é conhecida como métrica usual em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 2.2.4.** Demonstre que  $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$  é uma métrica.

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \text{ é uma função } d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

i)  $d(x, y) \geq 0$ . Como  $|x_1 - y_1| \geq 0$  e  $|x_2 - y_2| \geq 0$ , isso implica que  $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$ .

Por outro lado,  $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| = 0$  e  $|x_2 - y_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 - y_1 = 0$  e  $x_2 - y_2 = 0$ , ou seja,  $x_1 = y_1$  e  $x_2 = y_2$ . Portanto,  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

ii)

$$\begin{aligned}
d(x, z) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \\
&= |x_1 + y_1 - y_1 - z_1| + |x_2 + y_2 - y_2 - z_2| \\
&\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \\
&= (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) + (|z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|) \\
&= d(x, y) + d(z, y).
\end{aligned}$$

Assim,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$  e portanto  $d_1$  é uma métrica em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 2.2.5.** Demonstre que  $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$  onde  $x = (x_1, y_1)$  e  $y = (x_2, y_2)$  é uma métrica em  $\mathbb{R}^2$ .

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \text{ é uma função de } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

i)  $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ , como  $|x_1 - y_1| \geq 0$  e  $|x_2 - y_2| \geq 0$ .

Então  $d(x, y) \geq 0$ . Por outro lado,  $d(x, x) = \max\{|x_1 - x_1|, |x_2 - x_2|\} = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| \geq 0$  e  $|x_1 - y_1| \geq 0 \Leftrightarrow x_1 - y_1 = 0$  e  $x_2 - y_2 = 0$ , ou seja,  $x_1 = y_1$  e  $x_2 = y_2 \Leftrightarrow x = y$ . portanto, se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) \geq 0$ .

ii)

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - y_1 + y_1 - z_1|, |x_2 - y_2 + y_2 - z_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|, |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\} \\ &= d(x, y) + d(z, y). \end{aligned}$$

Assim,  $d(x, z) = d(x, y) + d(z, y)$  para todo  $x, y, z \in \mathbb{R}^2$  e portanto  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 2.2.6.** Seja  $d$  uma métrica em  $\mathbb{M}$ , então as funções  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  também são métricas em  $\mathbb{M}$ . Observe:

a)  $\alpha(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ .

i)  $\alpha(x, y) = \sqrt{d(x, y)} \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{M}$ , pela própria definição. Por outro lado,  $\alpha(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{d(x, y)} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ . Já que  $d$  é métrica,  $\alpha(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

ii)  $\alpha(x, z) = \sqrt{d(x, y)} \leq \sqrt{d(x, y) + d(y, z)} \leq \sqrt{d(x, y) + d(z, y)} = \alpha(x, y) + \alpha(z, y)$ .  
Assim,  $\alpha(x, z) \leq \alpha(x, y) + \alpha(y, z), \forall x, y, z \in \mathbb{M}$ .

Portanto,  $\alpha(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$  é uma métrica  $\mathbb{M}$ .

b)  $\beta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$

$\beta$  é uma função de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g(x) = \frac{x}{1 + x}$  são funções.

i) Como  $d(x, y) \geq 0$ , então  $1 + d(x, y) > 0$  e portanto,

$$\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \geq 0$$

.

Por outro lado,  $\beta(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ . Assim,  $\beta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

ii)  $\beta(x, z) \leq \beta(x, y) + \beta(z, y), \forall x, y, z \in \mathbb{M}$ .

Temos que mostrar que

$$\frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \geq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)}$$

Sabemos que  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ , denotemos  $a = d(x, y)$ ,  $b = d(z, y)$  e  $c = d(x, z)$ .

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} &= \frac{a \cdot (1+b) + b \cdot (1+a)}{(1+a) \cdot (1+b)} \\ &= \frac{a + ab + ba + b}{1 + a + b + ab} \\ &\geq \frac{a + b + ab}{1 + a + b + ab} \\ &= \frac{1 + a + b + ab - 1}{1 + a + b + ab} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + a + b + ab} \end{aligned}$$

$$1 + a + b + ab \geq 1 + c + ab \geq 1 + c.$$

A desigualdade acima vale, pois  $a \cdot b \geq 0$ .

Observe que  $c \leq a + b$ , pois  $d$  é uma métrica. Logo,  $1 + a + b + ab \geq 1 + c + ab \geq 1 + c$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + a + b + ab} &\leq \frac{1}{1 + c} \Rightarrow -\frac{1}{1 + a + b + ab} \geq -\frac{1}{1 + c} \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{1 + a + b + ab} &\leq 1 - \frac{1}{1 + c} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq 1 - \frac{1}{1+c} = \frac{1+c-1}{1+c} = \frac{c}{1+c}$$

e mostramos a desigualdade desejada.

Logo,

$$\beta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

c)  $\gamma(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$

Como o mínimo entre dois números é único, então  $\gamma$  é função.

- i) Como  $d(x, y) \geq 0$ , isso implica que  $\min\{1, d(x, y)\} \geq 0$ . Por outro lado,  $\gamma(x, y) = 0 \Leftrightarrow \min\{1, d(x, y)\} = 0 \Leftrightarrow d(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$ . Assim,  $\gamma(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- ii)  $\gamma(x, z) \leq \gamma(x, y) + \gamma(z, y)$

$$\begin{aligned}\gamma(x, y) + \gamma(z, y) &= \min\{1, d(x, y)\} + \min\{1, d(z, y)\} \\ &= \min\{1 + 1, 1 + d(x, y), 1 + d(z, y), d(x, y) + d(z, y)\}\end{aligned}$$

Como,  $1 + 1 > 1$ ,  $1 + d(x, y) \geq 1$ ,  $1 + d(z, y) \geq 1$  e  $d(x, y) + d(z, y) \geq d(x, z)$

Temos que:

$$\min\{1 + 1, 1 + d(x, y), 1 + d(z, y), d(x, y) + d(z, y)\} \geq \min\{1, d(x, z)\} = \gamma(x, z).$$

Assim,  $\gamma(x, z) \leq \gamma(x, y) + \gamma(z, y)$ . Portanto,  $\gamma(x, y)$  é uma métrica em  $\mathbb{M}$ .

## 2.3 Noções Básicas de Topologia

Para iniciarmos essa seção, iremos definir alguns conceitos sobre Bolas que serão de extrema relevância para este trabalho.

Não menos importante será o estudo sobre alguns conceitos acerca de conjuntos, que iremos fazer neste capítulo. Apresentaremos alguns exemplos acerca desses assuntos. Para tanto, iremos ter como referência [10].

Toma-se um espaço métrico  $\mathbb{M}$ , um ponto  $a$  pertencente a  $\mathbb{M}$  e um número real  $\varepsilon > 0$ .

**Definição 2.3.1.** Definimos como Bola Aberta de centro  $a$  e raio  $\varepsilon > 0$  o conjunto  $B(a, \varepsilon)$  formado pelos pontos do espaço métrico  $\mathbb{M}$  cuja distância ao ponto  $a$  seja menor do que  $\varepsilon$ , ou seja,

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{M} \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

Munidos da noção de Bola Aberta, podemos definir o conceito de conjunto aberto.

**Definição 2.3.2 (Conjunto Aberto).** Um conjunto  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  é denotado **aberto** se, para cada ponto  $p \in \mathbb{M}$ , existir um  $\varepsilon$  tal que  $B(p, \varepsilon) \subset \mathbb{U}$ .

**Definição 2.3.3.** Uma Bola Fechada de centro  $a$  e raio  $\varepsilon > 0$  é o conjunto  $B[a, \varepsilon]$  formado pelos pontos do espaço métrico  $\mathbb{M}$  cuja distância ao ponto  $a$  seja menor ou igual do que  $\varepsilon$ , ou seja,

$$B[a, \varepsilon] = \{x \in \mathbb{M} \mid d(x, a) \leq \varepsilon\}$$

Munidos da noção de Bola Fechada, podemos definir o conceito de Conjunto Fechado.



**Definição 2.3.4 (Conjunto Fechado).** Um conjunto  $U \subset \mathbb{M}$  é denotado **fechado**, quando seu complementar é **aberto**.

**Definição 2.3.5.** Definimos como esfera de centro  $a$  e raio  $\varepsilon > 0$  o conjunto  $S(a, \varepsilon)$  formado pelos pontos do espaço métrico  $\mathbb{M}$  cuja distância ao ponto  $a$  seja igual a  $\varepsilon$ , ou seja,

$$S(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{M} \mid d(x, a) = \varepsilon\}$$

Note que  $B[a, \varepsilon] = B(a, \varepsilon) \cup S(a, \varepsilon)$  é uma reunião disjunta.

Será de grande valia aproveitarmos essa seção para definirmos alguns conceitos que permearão este trabalho.

**Definição 2.3.6 (Conjunto Limitado).** Um conjunto  $U \subset \mathbb{M}$  é dito **limitado**, se existir um  $r < \infty$  e  $p \in \mathbb{M}$  tal que  $U \subset B(p, r)$ , ou seja, um conjunto é dito **limitado** se estiver contido em alguma Bola aberta de raio finito.

**Definição 2.3.7 (Propriedade de Heine-Borel).** Um conjunto  $U$  em  $\mathbb{R}^n$ , munido de uma métrica, é denotado **compacto** se ele for *fechado e limitado*.

**Observação 2.3.8.** As curvas fechadas são compactas e iremos utilizar as definições de conjunto compacto e fechado, para definir a *métrica de Hausdorff*, centro deste trabalho.

**Definição 2.3.9.** Uma função  $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $p \in \mathbb{M}$ , se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir um  $\delta > 0$ , tal que se  $d(p, q) < \delta$ , então  $d(f(p), f(q)) < \varepsilon$ . A função  $f$  é contínua se  $f$  for contínua para todo ponto  $p \in \mathbb{M}$ .

**Exemplo 2.3.1.** Com a métrica usual da reta, para todo  $a \in \mathbb{R}$  e todo  $r > 0$ , a Bola Aberta  $B(a, \varepsilon)$  é o intervalo aberto  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , pois  $|x - a| < \varepsilon$  equivale a  $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$ , ou seja,  $a - \varepsilon < x < \varepsilon + a$ . Analogamente, a Bola Fechada  $B[a, \varepsilon]$  é o intervalo fechado  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  e a esfera  $S[a, \varepsilon]$  tem apenas os pontos  $a - \varepsilon$  e  $a + \varepsilon$ .

**Exemplo 2.3.2.** Seja  $\mathbb{M}$  um espaço métrico. Se  $\mathbb{M}$  está munido da métrica zero-um, então, para todo  $a \in \mathbb{M}$ ,

se  $\varepsilon > 1$ , tem-se  $B(a, \varepsilon) = B[a, \varepsilon] = M$  e,

se  $\varepsilon < 1$ , tem-se  $B(a, \varepsilon) = B[a, \varepsilon] = a$ , pois  $d(x, x) = 0$  e  $d(x, y) = 1$ ,

considerando  $x \neq y, \forall x, y \in \mathbb{M}$ .

Por outro lado, se  $\varepsilon = 1$ , a Bola Aberta  $B(a, \varepsilon) = \{a\}$  e a Bola Fechada  $B[a, \varepsilon] = M$ . Assim, se  $\varepsilon \neq 1, S(a, r) = \{\}$  e se  $\varepsilon = 1, S(a, 1) = M - \{a\}$ .

**Exemplo 2.3.3.** Usando a métrica usual:

$$B((a_1, a_2), \varepsilon) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < \varepsilon\}.$$

Observe que

$$d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \varepsilon \Leftrightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < \varepsilon^2,$$

o interior de um círculo de centro  $a = (a_1, a_2)$  e raio  $\varepsilon$ .

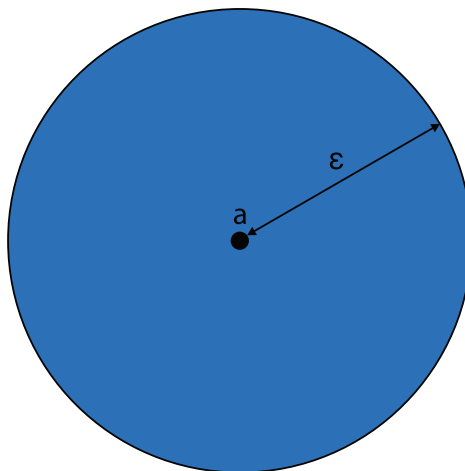


Figura 2.1:  $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < \varepsilon^2$

i) Usando a métrica  $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$$B((a_1, a_2), \varepsilon) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < \varepsilon\}$$

$d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < \varepsilon$  que é o interior de um quadrado de centro  $a = (a_1, a_2)$  e diagonais de comprimento  $2\varepsilon$ , paralelas aos eixos.

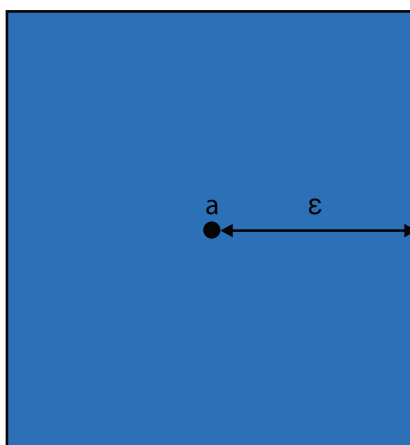


Figura 2.2:  $|x_1 - a_1| < \varepsilon$  e  $|x_2 - a_2| < \varepsilon$

ii) Usando a métrica  $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

$$B(a, \varepsilon) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < \varepsilon\}$$

$d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = \max\{|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|\} < \varepsilon \Rightarrow |x_1 - a_1| < \varepsilon$  e  $|x_2 - a_2| < \varepsilon$  que é o interior de um quadrado de centro  $a = (a_1, a_2)$  e lados de comprimento  $2\varepsilon$ , paralelos aos eixos.

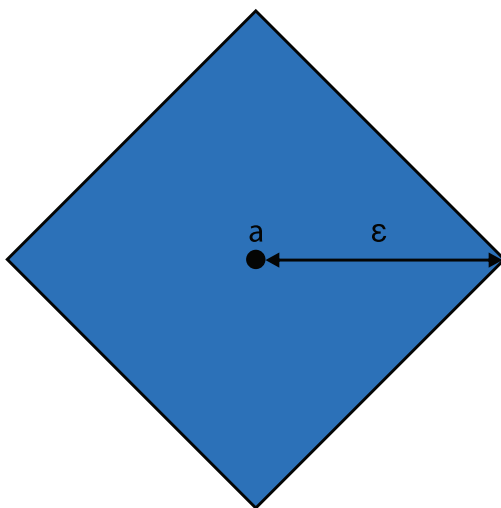


Figura 2.3:  $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < \varepsilon$

**Exemplo 2.3.4.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções, além disso, sejam  $f \in B([a, b], \mathbb{R})$  e  $B[f, \varepsilon] = \{g \in B([a, b], \mathbb{R}) \mid d(f, g) \leq \varepsilon\}$  a Bola Fechada na métrica  $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$ , a condição para que  $g \in B([a, b], \mathbb{R})$  pertença à Bola Fechada  $B[f, \varepsilon]$  é que  $\sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} \leq \varepsilon$ , ou seja,  $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b]$ .

*Geometricamente:*

Consideremos o gráfico  $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$ . Como  $|f(x) - y| = |y - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leq y - f(x) \leq \varepsilon \Rightarrow f(x) - \varepsilon \leq y \leq f(x) + \varepsilon, \forall x \in [a, b]$ , então  $G(g) = \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$  está contido numa faixa de amplitude  $2\varepsilon$  em torno de  $G(f)$ .

Agora, para que  $g \in B(f, \varepsilon), |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$ , geometricamente,  $G(g)$  está contido numa “faixa aberta” de amplitude  $2\varepsilon$  em torno de  $G(f)$ .

## 2.4 Bola de uma Curva Algébrica

Vimos neste capítulo que Bola de um ponto  $a$  é o conjunto aberto ou fechado de todos os pontos que apresentam distância menor ou igual  $\varepsilon$  de um determinado ponto  $a$ . Vamos aplicar agora este conceito a um conjunto de pontos que pertencem a uma Curva Algébrica Plana, teremos a Bola da Curva  $B(C, \varepsilon)$ .

**Definição 2.4.1.** Dado um espaço métrico  $(\mathbb{X}; d)$ , além disso, seja  $\varepsilon > 0$  um valor arbitrário qualquer. A Bola ou "vizinhança- $\varepsilon$ " da Curva Algébrica  $C$  é um subconjunto  $B(C, \varepsilon)$  desse espaço métrico, formado por todos os pontos  $p \in (\mathbb{X}; d)$ , tal que, a distância de  $p$  a curva Algébrica  $C$  é menor ou igual a  $\varepsilon$ , ou ainda:

$$B(C, \varepsilon) = \bigcup_{p \in C} B(p, \varepsilon),$$

ou seja, a união das Bolas de raio  $\varepsilon$  com centro em cada ponto pertencente a Curva  $C$ .

**Exemplo 2.4.1.** Conforme o Exemplo (1.3.8), que apresenta a Curva Algébrica

$$F(x, y) = 2x^2 - y(y^2 + x^2) = 0,$$

denotada Folium de Descartes representada em  $\mathbb{R}^2$ , a seguir temos a representação do traço da curva  $F(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$  e a sua Bola  $B(F, \varepsilon)$ .

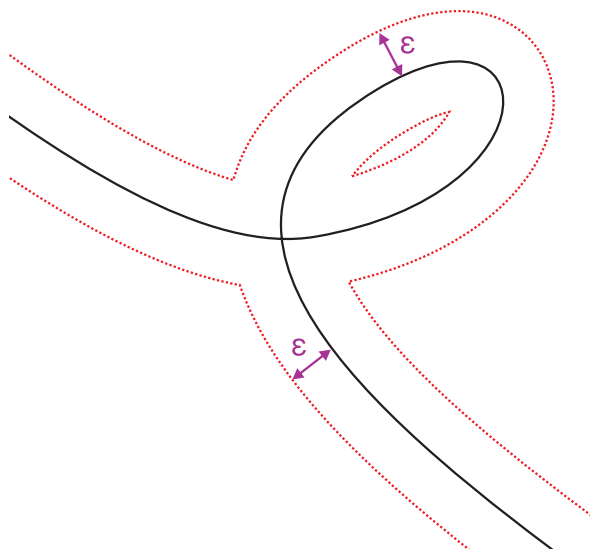


Figura 2.4: Folium de Descartes  $F(x, y)$  e sua Bola  $B(F, \varepsilon)$

**Exemplo 2.4.2.** A Curva Algébrica Plana, apresentada no Exemplo (1.3.9),

$$C(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) + (a^2 - b^2)x^2 - b^2y^2 = 0,$$

é o Caracol de Pascal. A seguir temos a representação do traço da curva  $C(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$  e a sua Bola  $B[C, \varepsilon]$ .

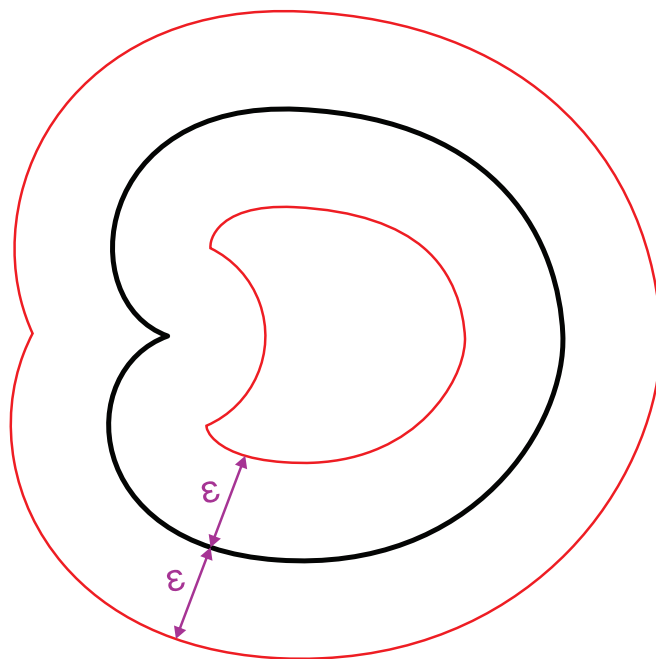


Figura 2.5: Caracol de Pascal  $P(x, y)$  e sua Bola fechada  $B[C, \varepsilon]$

**Exemplo 2.4.3.** *Seja a curva  $C(x, y) = 4x^2 + y^2 - 24x - 4y - 60$  em  $\mathbb{R}^2$ . A seguir, temos a representação do traço da curva fechada  $C(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$  e sua Bola  $B(C, \varepsilon)$ .*

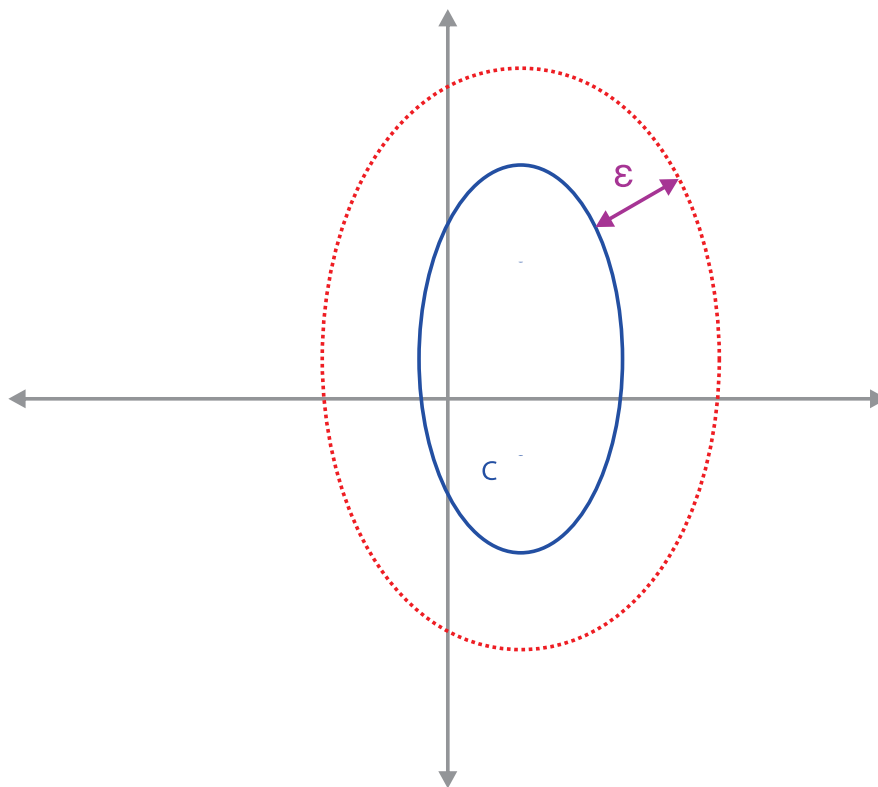


Figura 2.6: Curva  $C(x, y)$  e sua Bola  $B(C, \varepsilon)$

## Capítulo 3

# Métrica no Espaço das Curvas

Seja  $(\mathbb{X}; d)$  um espaço métrico e  $\mathcal{P}$  um conjunto dos seus subconjuntos, neste capítulo faremos uma reflexão sobre as distâncias entre esses subconjuntos. Para tanto, apresentaremos e discutiremos o conceito de *Distância de Hausdorff*. Segundo [3], esse conceito de distância foi introduzida pela primeira vez por Hausdorff em seu livro *Grundzüge der Mengenlehre*, Fundamentos da teoria dos conjuntos, publicado em 1914.

Para que a *Distância de Hausdorff* seja uma métrica, é necessário restringirmos aos subconjuntos compactos de  $\mathbb{X}$ , ou seja, os subconjuntos limitados e fechados de  $\mathbb{R}^2$ .

Vamos começar introduzindo a definição de *Distância de Hausdorff* num subconjunto, convenientemente escolhido, do conjunto das partes de um espaço métrico  $(\mathbb{X}; d)$ .

A seguir, serão provados alguns resultados envolvendo a *Distância de Hausdorff* entre subconjuntos fechados e limitados de  $\mathbb{R}^2$ . Vale ressaltar que a ideia de munir um conjunto abstrato, como o espaço das Curvas, de uma noção de distância é o que nos motiva, esse é o centro do trabalho. Isto permitirá a distinção entre conjuntos e nos dará uma ideia de quão diferentes eles são um do outro. Podemos nos deparar com duas curvas iguais, no sentido de que uma é a translação da outra. Nesse caso, a métrica que vamos estudar não conseguirá distingui-las; no entanto, poderá nos indicar a posição na qual elas estão. Para essa reflexão, seremos norteados pelas referências [4] e [11].

### 3.1 Distância de Hausdorff

Na matemática, a *Distância Hausdorff*, ou *Métrica Hausdorff*, mede o quão distante dois subconjuntos de um espaço métrico estão um do outro.

De modo informal, dois conjuntos estão perto, do ponto de vista da Distância de Hausdorff, se todo ponto de cada conjunto está perto a algum ponto do outro conjunto. Para um melhor entendimento do assunto, analisemos a situação problema a seguir:

Tomemos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  dois conjuntos compactos no plano  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $\mathbf{x}$  um elemento do conjunto  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{y}$  um elemento do conjunto  $\mathbf{B}$ .

A distância de um elemento  $\mathbf{x}$  ao conjunto  $\mathbf{B}$  é dada pela distância desse elemento  $\mathbf{x}$  ao vizinho mais próximo do conjunto  $\mathbf{B}$ , ou seja,  $\inf_{x \in A} d(x, B)$ . Do mesmo modo, a distância de um elemento  $\mathbf{y}$  ao conjunto  $\mathbf{A}$  pode ser considerada a distância desse elemento ao seu vizinho mais próximo em  $\mathbf{A}$ , ou seja,  $\inf_{y \in B} d(y, A)$ .

Assim, a “distância” entre o conjunto  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  poderia ser definida como:

$$H(A; B) = \sup\{d(x, B) : x \in A\}$$

E a “distância” entre o conjunto  $\mathbf{B}$  e o conjunto  $\mathbf{A}$  por:

$$H(B; A) = \sup\{d(y, A) : y \in B\}$$

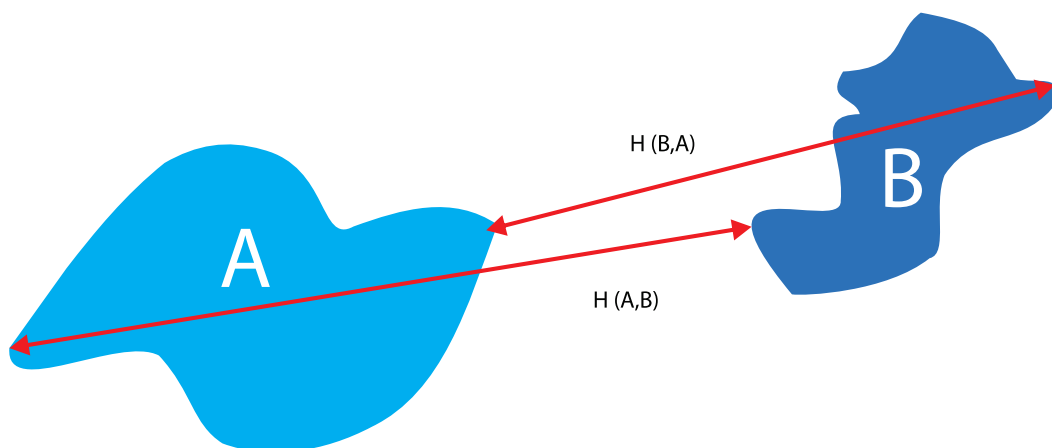


Figura 3.1:  $H(A, B) \neq H(B, A)$

No entanto, note que, se  $H(A, B) \neq H(B, A)$ , então esta definição para distância não atende às propriedades de métrica.

Então, iremos propor neste caso o uso da *Distância de Hausdorff* ou *Métrica de Hausdorff* para mensurar a distância entre dois conjuntos em  $\mathbb{R}^2$ .

Para definirmos a *Distância de Hausdorff* entre os elementos dos conjuntos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , devemos tomar a maior distância possível entre um elemento de  $\mathbf{A}$  e o conjunto de todos os elementos de  $\mathbf{B}$ , ou seja,  $H(A; B)$ , e também a maior distância entre um elemento de  $\mathbf{B}$  e o conjunto de todos os elementos de  $\mathbf{A}$ , isto é,  $H(B; A)$ . O maior destes dois números seria o que poderíamos definir como a *Distância de Hausdorff* entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .

Vamos definir formalmente a *Distância de Hausdorff*; vale lembrar que essa distância é uma distância entre subconjuntos de um conjunto com métrica presente nele.

**Definição 3.1.1.** Dado um espaço métrico  $(\mathbb{X}, d)$ , seja

$$\mathbb{H} = \{K \subseteq \mathbb{X}: K \text{ é compacto e não vazio}\}$$

Dados dois conjuntos  $A; B \in \mathbb{H}$ , define-se *Distância de Hausdorff* entre  $A$  e  $B$  como:

$$d_H(A; B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B); \sup_{y \in B} d(y, A)\}$$

**Proposição 3.1.1.** *Seja  $A$  um subconjunto não vazio fechado de  $\mathbb{R}^n$ . Dado  $x \in \mathbb{R}^n$  existe  $a \in A$  tal que:*

$$d(x, A) = d(x, a)$$

*Demonstração.* Como  $d(x, A) = \inf_{a \in A} \{d(x, a)\}$ , por definição temos:

$\forall k \in \mathbb{N}$ , existe  $a_k \in A$  cuja  $d(x, A) \geq d(x, a_k) - \frac{1}{k}$ . Então, como  $d(x, A) \leq d(x, a_k)$ ,

temos que:  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $|d(x, A) - d(x, a_k)| \leq \frac{1}{k}$ .

Pelo que  $d(x, a_k) \rightarrow_k d(x, A)$ .

Por outro lado, a sequência  $(a_k)_k$  é limitada, pois admite uma subsequência,  $(a_{k_j})_j$  convergente para algum  $a_0 \in \mathbb{X}$ . Mas como  $A$  é fechado,  $a_0 \in A$ . Sendo  $A$  fechado, então  $d(x, A) = d(x, a)$  para algum  $a \in A$ .

□

**Proposição 3.1.2.** *Seja  $(\mathbb{X}, d)$  um espaço métrico e  $A$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{X}$ , então a função*

$$\begin{aligned} \Psi: \mathbb{X} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, A) \end{aligned}$$

*é contínua.*

*Demonstração.* Começemos por observar que:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{X}, |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

Uma vez que pela desigualdade triangular temos que:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{X}, |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \text{ e } d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$$

Para mostrar a continuidade de  $\Psi$  em  $x_0 \in \mathbb{X}$ , temos de verificar que  $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{X} \ d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |d(x, A) - d(x_0, A)| < \varepsilon$$

Observe que  $\forall a \in A \ d(x, A) \leq d(x, a)$



por outro lado, como  $d(x_0, A) = \inf_{a \in A} \{d(x_0, a)\}$ , pela definição de ínfimo,

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists a_n \in A: d(x_0, A) \geq d(x_0, a_n) - \frac{1}{n}$$

então,

$$d(x, A) - d(x_0, A) \leq d(x, a_n) - d(x_0, a_n) - \frac{1}{n} \leq d(x, x_0) + \frac{1}{n}$$

e, como  $n$  é qualquer,

$$d(x, A) - d(x_0, A) \leq d(x, x_0)$$

Analogamente se mostra que  $d(x_0, A) - d(x, A) \leq d(x_0, x)$

e, portanto, como  $|d(x, A) - d(x_0, A)| \leq d(x, x_0)$ , basta tomar  $\delta = \varepsilon$  em  $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{X}$ .

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |d(x, A) - d(x_0, A)| < \varepsilon.$$

□

**Exemplo 3.1.1.** Consideremos, em  $\mathbb{R}^2$ , os conjuntos  $A = [0; 1] \times [0; 1]$  e  $B = ]0; 1[ \times ]0; 1[$ .

Então  $H(A; B) = H(B; A) = 0$ , mas  $A$  e  $B$  não são iguais. Este exemplo permite-nos perceber que  $H(A; \bar{A}) = H(\bar{A}; A) = 0$ . Para que a nossa definição seja uma distância, devemos considerar apenas conjuntos fechados.

Observamos que os subconjuntos limitados e fechados de  $\mathbb{R}^2$  são, precisamente, os subconjuntos compactos. Vamos introduzir a definição de Distância de Hausdorff num subconjunto, convenientemente escolhido, do conjunto das partes de um espaço métrico  $(\mathbb{X}; d)$ .

**Observação 3.1.2.** Não se pode confundir a Distância de Hausdorff entre dois conjuntos  $A$  e  $B$  com a distância entre conjuntos, usualmente definida num espaço métrico do seguinte modo:

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

A distância entre conjuntos apresentada dessa forma não é uma distância no conjunto dos subconjuntos de um espaço métrico. De fato, basta existir uma intersecção entre os conjuntos, para que dois conjuntos diferentes  $A, B$  tenham a distância  $d(A, B) = 0$ , o que viola uma das condições para que uma função seja definida como métrica em um espaço arbitrário. Segundo a condição, se  $d(A, B) = 0$ , então  $A = B$ , o que não é o caso, pois estamos nos referindo a dois conjuntos distintos.

**Exemplo 3.1.2.** Consideremos, em  $\mathbb{R}^2$ ,  $A = [0; 3] \times [0; 6]$  e  $B = [6; 9] \times [0; 3]$ .

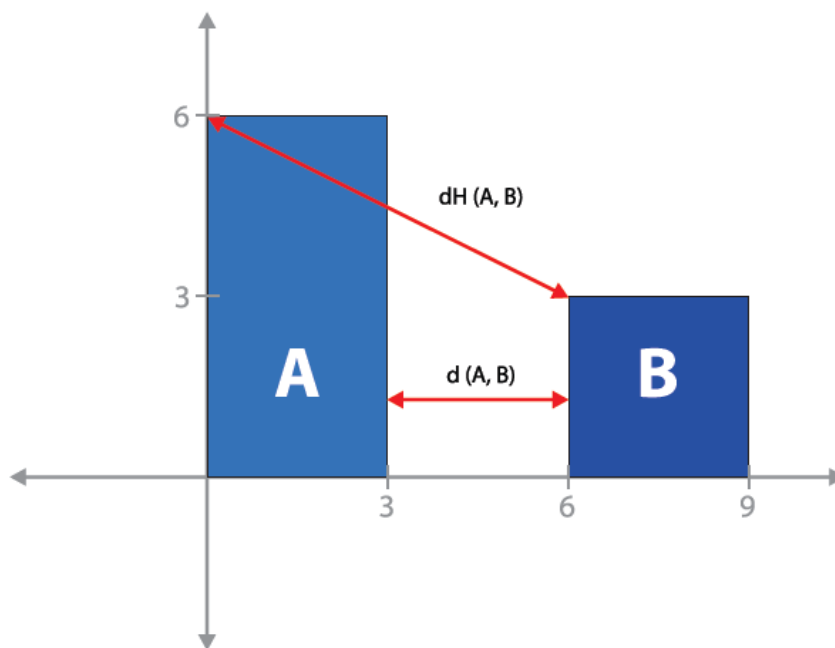


Figura 3.2: Comparação da distância de Hausdorff com distância usual.

*Pode-se perceber nesse exemplo que a  $d_H(A, B) = 9\sqrt{5}$  e a  $d(A, B) = 3$ , portanto não são iguais.*

**Exemplo 3.1.3.** *Considere o conjunto  $A = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2)\}$  e  $B = \{(4, 3); (4, 4)\}$  como sugere a figura a seguir:*

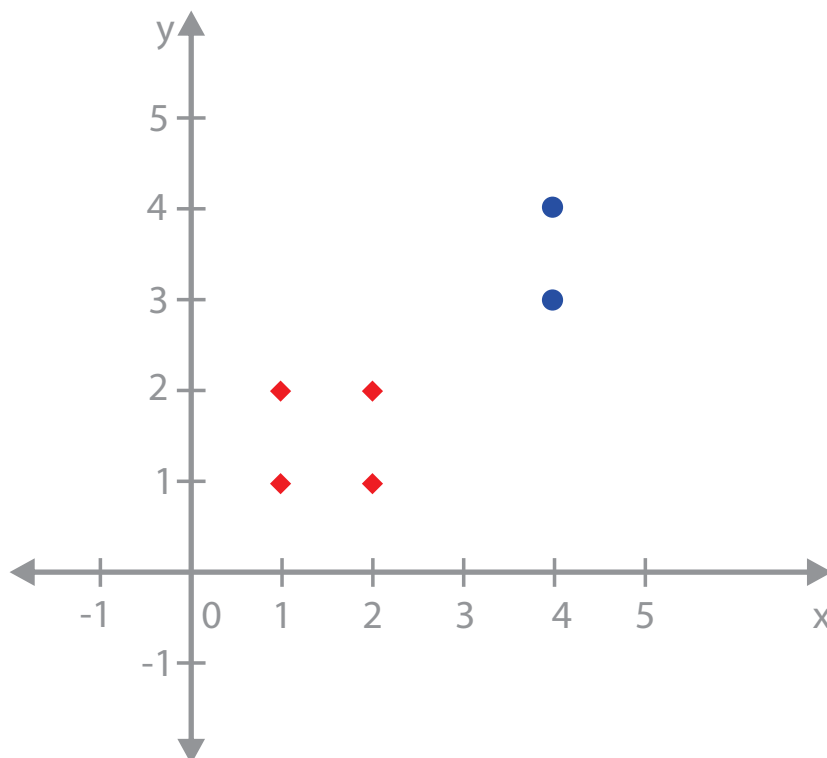


Figura 3.3: Distância de Hausdorff.

Observe que:

$$d(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = 2\sqrt{2}$$

$$d(B, A) = \sup_{y \in B} d(y, A) = \sqrt{13},$$

$$\text{Então, a } d_H(A, B) = \max\{2\sqrt{2}, \sqrt{13}\} = \sqrt{13}.$$

**Teorema 3.1.3.** Seja  $(\mathbb{X}, d)$  um espaço métrico. Então a Distância de Hausdorff é uma métrica em  $\mathbb{H}$ .

*Demonstração.*

I- Podemos concluir que, para todo  $A \in \mathbb{H}$ , se tem  $d_H(A, A) = 0$ .

II- Sendo  $h(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$  e  $h(B, A) = \sup_{y \in B} d(y, A)$

$\forall A, B \in \mathbb{H} \ A \neq B \Rightarrow d_H(A, B) > 0$ .

Sejam  $A, B \in \mathbb{H}$ . Como  $A$  e  $B$  são conjuntos limitados e fechados de  $\mathbb{R}^2$  e não vazios, então existe  $x \in A$  e  $y \in B$ , tais que  $h(A, B) = d(x, y)$ .

Como  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{X}$ , então  $d(x, y) \geq 0$ . Se  $A \neq B$ , então existe  $x \in A$ , tal que  $x \notin B$ , de onde  $h(A, B) \neq 0$ , pois  $A$  e  $B$  são fechados, portanto  $d_H(A, B) \neq 0$ .

III- É imediato concluirmos que a função  $d_H$  é simétrica.

IV-  $\forall A, B, C \in H(x)$  temos,  $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$ .

Inicialmente verificaremos que

$$h(A, B) \leq h(A, C) + h(B, C).$$

Observe que dados  $a \in A$  e  $b \in B$ , temos que:

$$\forall c \in C \ d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c).$$

Então,

$$\forall c \in C \ \min_{b \in B} d(a, b) \leq \min_{b \in B} (d(a, c) + d(b, c)) = d(a, c) + \min_{b \in B} (d(b, c)),$$

que significa que, para todo  $c \in C$ , temos que  $d(a, B) \leq d(a, c) + d(B, c)$ .

Mas como  $d(c, B) \leq h(C, B)$ , que não depende de  $c$ , podemos concluir que:

$$d(a, B) \leq \min_{c \in C} d(a, c) + h(C, B),$$

O que implica em

$$d(a, B) \leq d(a, C) + h(C, B) \leq h(A, C) + h(C, B).$$

Concluimos então que:

$$h(A, B) = \max_{a \in A} d(a, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$$

Analogamente,

$$h(B, A) \leq h(B, C) + h(C, A)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \max\{h(A, B), h(B, A)\} \\ &\leq \max\{h(A, C) + h(C, B), h(B, C) + h(C, A)\} \\ &\leq \max\{h(A, C), h(C, A)\} + \max\{h(B, C), h(C, B)\} \\ &= d_H(A, C) + d_H(C, B) \end{aligned}$$

□

## 3.2 Distância entre Curvas Fechadas em $\mathbb{R}^2$

Para darmos continuidade à nossa reflexão, apresenta-se a definição de Bola de uma Curva Algébrica que foi introduzida no capítulo 2, em (2.1) e (2.3) para subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 3.2.1.** A distância entre duas Curvas Fechadas denominadas por  $C_1$  e  $C_2$  será dada por uma noção de distância equivalente à Métrica de Hausdorff entre subconjuntos, levando em consideração as Bolas das respectivas Curvas  $B(C_1, \varepsilon_1)$  e  $B(C_2, \varepsilon_2)$  em  $\mathbb{R}^2$ , conforme segue a seguir:

$$d_H(C_1, C_2) = \max\{\inf\{\varepsilon_2 > 0: C_1 \subseteq B(C_2, \varepsilon_2)\}; \inf\{\varepsilon_1 > 0: C_2 \subseteq B(C_1, \varepsilon_1)\}\}$$

**Exemplo 3.2.1.** Observe a figura a seguir:

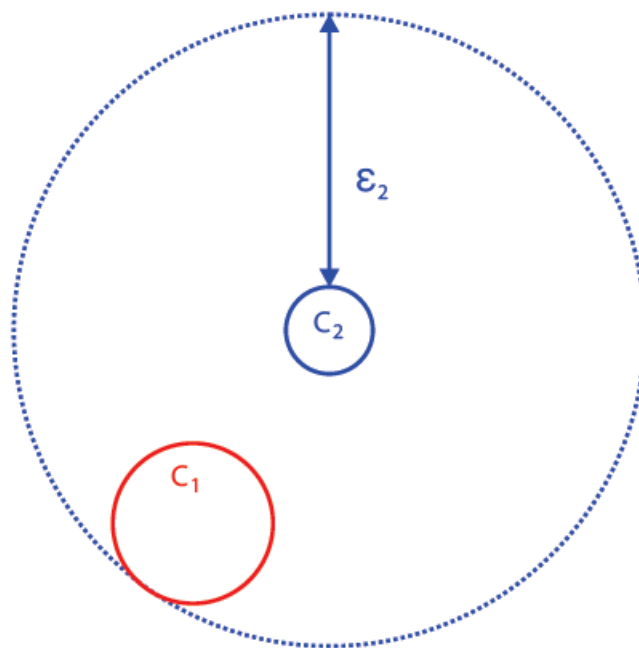


Figura 3.4: Curvas Algébricas  $C_1$  e  $C_2$  e a Bola da  $B(C_2, \varepsilon_2)$ .

*Note que a Curva  $C_1$  está contida na Bola da curva  $C_2$  que apresenta  $\varepsilon_2$  como menor  $\varepsilon$  para que  $C_1 \subseteq B(C_2, \varepsilon_2)$ .*

*Já na figura a seguir, temos a Bola da Curva  $C_1$ ,  $B(C_1, \varepsilon_1)$  contendo a curva  $C_2$ , apresentando  $\varepsilon_1$  como menor valor para que isso ocorra.*

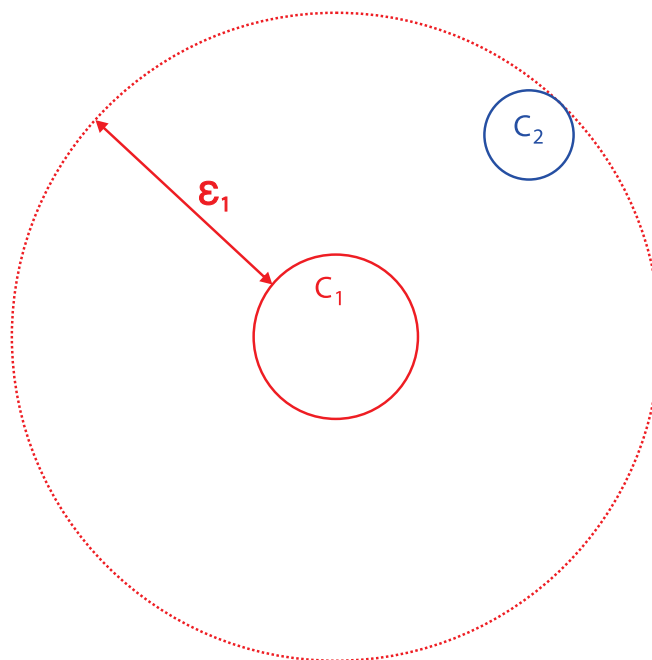


Figura 3.5: Curvas Algébricas  $C_1$  e  $C_2$  e a Bola da  $B(C_1, \varepsilon_1)$ .

*Sobrepondo uma situação a outra, temos:*

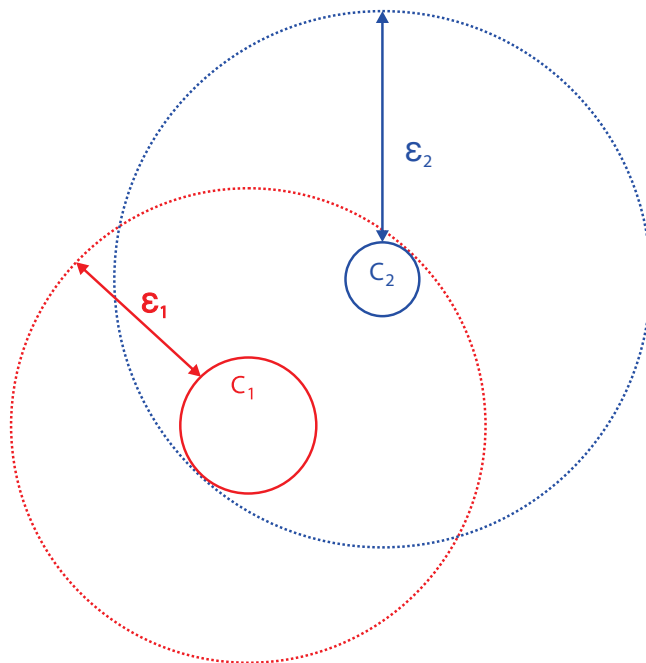


Figura 3.6: Curvas Algébricas  $C_1$  e  $C_2$  e suas respectivas bolas.

Sendo assim, podemos concluir que a distância entre as curvas  $C_1$  e  $C_2$  será dada por:

$$d_H(C_1, C_2) = \max\{\inf\{\varepsilon_2 > 0: C_1 \subseteq B(C_2, \varepsilon_2)\}; \inf\{\varepsilon_1 > 0: C_2 \subseteq B(C_1, \varepsilon_1)\}\}$$

Logo,  $d_H(C_1, C_2) = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ .

**Exemplo 3.2.2.** Sejam uma elipse  $E(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  e uma circunferência  $C(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c^2$  representadas nas ilustrações a seguir.

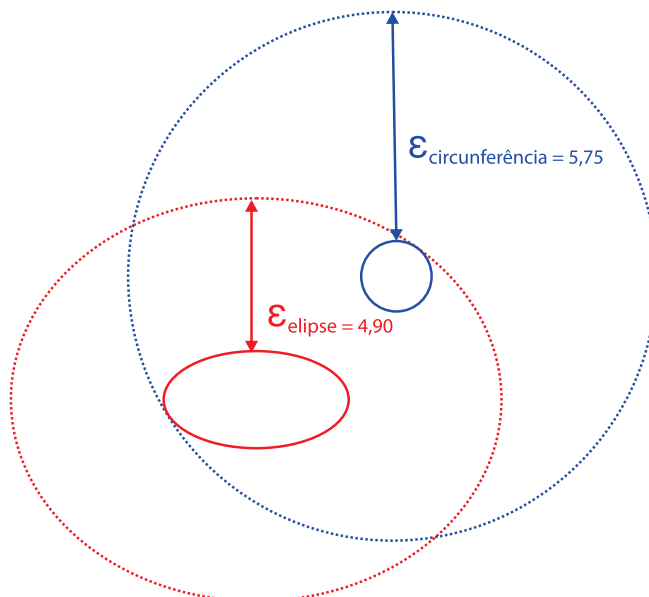


Figura 3.7: Curvas Algébricas  $E(x, y)$  e  $C(x, y)$  e suas respectivas Bolas.

Pela representação da Figura 3.7, temos que o menor valor de  $\varepsilon_{\text{ellipse}}$  para o qual a Bola  $B(E, \varepsilon_{\text{ellipse}})$  contenha a Curva  $C(x, y)$  é 4,90.

$$\inf\{\varepsilon_{\text{ellipse}} > 0: C \subseteq B(E, \varepsilon_{\text{ellipse}})\} = 4,90$$

Além disso,

$$\inf\{\varepsilon_{\text{circunferência}} > 0: E \subseteq B(C, \varepsilon_{\text{circunferência}})\} = 5,75$$

Portanto, a distância  $d(C, E)$  entre as Curvas  $C(x, y)$  e  $E(x, y)$  será dada por:

$$\begin{aligned} d(C, E) &= \max\{\inf\{\varepsilon_{\text{ellipse}}\}, \inf\{\varepsilon_{\text{circunferência}}\}\} \\ &= \max\{4,90; 5,75\} \\ &= 5,75. \end{aligned}$$

Também podemos definir a Distância de Hausdorff sob o ponto de vista de um mesmo  $\varepsilon$  para as duas bolas. Assim iremos definir a Distância de Hausdorff como:

$$d_H^*(C_1, C_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : C_1 \subseteq B(C_2, \varepsilon) \text{ e } C_2 \subseteq B(C_1, \varepsilon)\}$$

**Observação 3.2.2.** Note que, para a definição de  $d_H^*$ , ambas as Bolas têm o mesmo  $\varepsilon$ , já na definição  $d_H$  não adotamos a mesma medida para  $\varepsilon$ , no entanto as duas são equivalentes.

**Teorema 3.2.3.** A função  $d_H^*: H(x) \times H(x) \rightarrow \mathbb{R}$  é a Distância de Hausdorff.

*Demonstração.* Sejam  $C_1, C_2 \in H(x)$  e denote-se  $\beta = d_H^*(C_1, C_2)$ . Vamos demonstrar que  $\beta = d_H(C_1, C_2)$ .

Seja  $\delta > 0$ , se tem que  $d_H^*(C_1, C_2) < \beta + \delta$ , então, pela definição de  $d_H^*(C_1, C_2)$  temos que:

$$C_1 \subseteq B(C_2, \beta + \delta) \text{ e } C_2 \subseteq B(C_1, \beta + \delta) \text{ (i)}$$

e, como  $d_H^*(C_1, C_2) > \beta - \delta$ , então:

$$C_1 \not\subseteq B(C_2, \beta - \delta) \text{ ou } C_2 \not\subseteq B(C_1, \beta - \delta) \text{ (ii)}$$

Por (i), temos que, dado  $a \in C_1$ , existe  $b_\delta \in C_2$ , tal que  $d(a, b_\delta) \leq \beta + \delta$  e também que, dado  $b \in C_2$ , existe  $a_\delta \in C_1$ , verificando  $d(a_\delta, b) \leq \beta + \delta$ . Sendo assim, concluímos que:

$$\forall a \in C_1, \forall b \in C_2 \ d(a, C_2) \leq \beta + \delta \text{ e } d(b, C_1) \leq \beta + \delta$$

daí, como  $\delta$  é um número positivo qualquer, fazendo  $\delta$  tender para zero, temos:

$$\forall a \in C_1 \text{ e } \forall b \in C_2 \quad d(a, C_2) \leq \beta \text{ e } d(b, C_1) \leq \beta$$

o que implica em

$$d_H(C_1, C_2) = \max\left\{\sup_{a \in C_1} d(a, C_2); \sup_{b \in C_2} d(b, C_1)\right\} \leq \beta = d_H^*(C_1; C_2).$$

Por outro lado de **(ii)**, concluímos que, dado  $\delta > 0$ , existe  $a_\delta \in C_1$ , tal que, para todo  $b \in C_2$ , temos que  $d(a_\delta, b) > \beta - \delta$  ou então existe  $b_\delta \in C_2$  tal que, para todo  $a \in C_1$ , temos que  $d(b_\delta, a) > \beta - \delta$ . Então, para todo  $\delta > 0$ ,

$$\sup_{a \in C_1} d(a, C_2) \geq d(a_\delta, C_2) \geq \beta - \delta$$

ou

$$\sup_{b \in C_2} d(b, C_1) \geq d(b_\delta, C_1) \geq \beta - \delta$$

o que significa:

$$d_H(C_1; C_2) = \max\left\{\sup_{a \in C_1} d(a, C_2); \sup_{b \in C_2} d(b, C_1)\right\} \geq \beta - \delta = d_H^*(C_1, C_2) - \delta$$

Como  $\delta$  é qualquer número positivo (pequeno), fazendo  $\delta$  convergir para zero, concluímos que  $d_H \geq d_H^*$ .

De acordo com o teorema apresentado em (3.1.3), a Distância de Hausdorff é uma Métrica em  $H(x)$ . No entanto, apresentamos uma demonstração da desigualdade triangular usando o conceito de Bola de uma curva algébrica. Vejamos então que dados três conjuntos quaisquer  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  pertencentes a  $H(x)$ , estes verificam a desigualdade,

$$d_H(C_1, C_3) \leq d_H(C_1, C_2) + d_H(C_2, C_3)$$

Mostremos que, dado um número real positivo  $\varepsilon$ , temos que:

$$\varepsilon > d_H(C_1, C_2) + d_H(C_2, C_3) \Rightarrow \varepsilon > d_H(C_1, C_3). \quad \textbf{(iii)}$$

Consideremos  $\beta = d_H(C_1, C_2) + d_H(C_2, C_3)$ . Então

$$\forall \delta > 0 \text{ temos: } \beta + \delta > \beta = d_H(C_1, C_2) + d_H(C_2, C_3).$$

Considerando a condição **(iii)** verdadeira, podemos concluir que

$$\forall \delta > 0 \text{ temos que } \beta + \delta > d_H(C_1, C_3)$$



Sabemos que  $\delta$  é um número positivo arbitrário, fazendo  $\delta$  convergir para zero, obtemos que  $\beta \geq d_H(C_1, C_3)$ , o que conclui a prova, desde que mostremos **(iii)**. Para isso, seja  $\varepsilon > d_H(C_1, C_2) + d_H(C_2, C_3)$  e escolhamos  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  dois números reais positivos tais que  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  e,

$$\varepsilon_1 > d_H(C_1, C_2) \text{ (iv)}$$

$$\varepsilon_2 > d_H(C_2, C_3) \text{ (v)}$$

Mostremos que  $\varepsilon > d_H(C_1, C_3)$ .

Por definição de Bola e por **(iv)**, temos:

$$C_1 \subseteq B(C_2, \varepsilon_1) \text{ e } C_2 \subseteq B(C_1, \varepsilon_1)$$

e, por **(v)**, temos:

$$C_2 \subseteq B(C_3, \varepsilon_2) \text{ e } C_3 \subseteq B(C_2, \varepsilon_2).$$

Temos então que:

$$B(C_2, \varepsilon_2) \subseteq B(C_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \text{ e } B(C_2, \varepsilon_1) \subseteq B(C_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Assim, conclui-se que:

$$C_1 \subseteq B(C_2, \varepsilon_1) \subseteq B(C_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Do mesmo modo,

$$C_3 \subseteq B(C_2, \varepsilon_2) \subseteq B(C_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Por consequência,

$$C_1 \subseteq B(C_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \text{ e } C_3 \subseteq B(C_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

o que mostra que:  $d_H(C_1, C_3) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ . □

Conforme discutido neste capítulo, a Distância de Hausdorff é uma medida entre dois conjuntos de pontos, não necessariamente com a mesma dimensão. Ela mede o quanto um conjunto de pontos A está perto de um conjunto de pontos B.

Então, dados dois conjuntos de pontos A e B, a *Distância de Hausdorff* entre eles é definida como:

$$d_H(A, B) = \max(d(A, B), d(B, A))$$

onde

$$d(A, B) = \max_{a \in A} (\min_{b \in B} \|a - b\|) \text{ e } d(B, A) = \max_{b \in B} (\min_{a \in A} \|b - a\|).$$

## Capítulo 4

# Plano de Ensino: Distância entre Curvas Fechadas em $\mathbb{R}^2$

Neste capítulo, propõe-se um aprofundamento no estudo referente à Geometria Algébrica, por meio de uma sequência didática elementar, que, além das referências [1], [4], [7] e [8], faz uso de uma ferramenta facilitadora da aprendizagem, disponível na internet, trata-se de um software gratuito conhecido como Geogebra. O objetivo desta sequência é deixar o estudo mais acessível para um aluno do Ensino Básico, tendo em vista que será o seu primeiro passo no estudo do campo da Topologia. Os pré-saberes necessários para o desenvolvimento de tal sequência didática são: Geometria Analítica Plana, Polinômios e Equações algébricas.

Nosso objetivo neste capítulo, portanto, é apresentar uma sequência didática que leve o aluno a uma reflexão aprofundada sobre distâncias.

### 4.1 Sequência Didática 1: Associar uma Equação Polinomial a uma Curva Algébrica Aberta

**Objetivo:** Compreender e reconhecer que uma Equação Algébrica de graus 1 e 2 representam no espaço  $\mathbb{R}^2$  um conjunto de pontos que toma a forma de uma Curva.

#### Equação Polinomial de grau 1

Toda e qualquer equação descrita na forma:  $ax + by + c = 0$ , com  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$  com  $b \neq 0$  é conhecida como equação de grau 1.

- $2x + 3y - 5 = 0$  é uma equação polinomial de grau 1 que apresenta  $a = 2$ ,  $b = 3$  e  $c = -5$ .
- $x - y = 0$  trata-se de uma equação polinomial de grau 1 que apresenta  $a = 1$ ,  $b = 1$  e  $c = 0$ .

**Observação 4.1.1.** É necessário enfatizar que uma equação polinomial de grau 1 pode ser representada também na sua forma reduzida; neste caso, os coeficientes ficam dispostos da seguinte maneira:

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \text{ com } b \neq 0.$$

Apresentaremos a seguir uma sequência de ações utilizando o Geogebra, a fim de proporcionar ao aluno a elucidação, clara, objetiva e significativa, dos significados da representação geométrica de uma equação algébrica de grau 1.

1. Na tela de controle do Geogebra, inserimos três controles deslizantes,  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

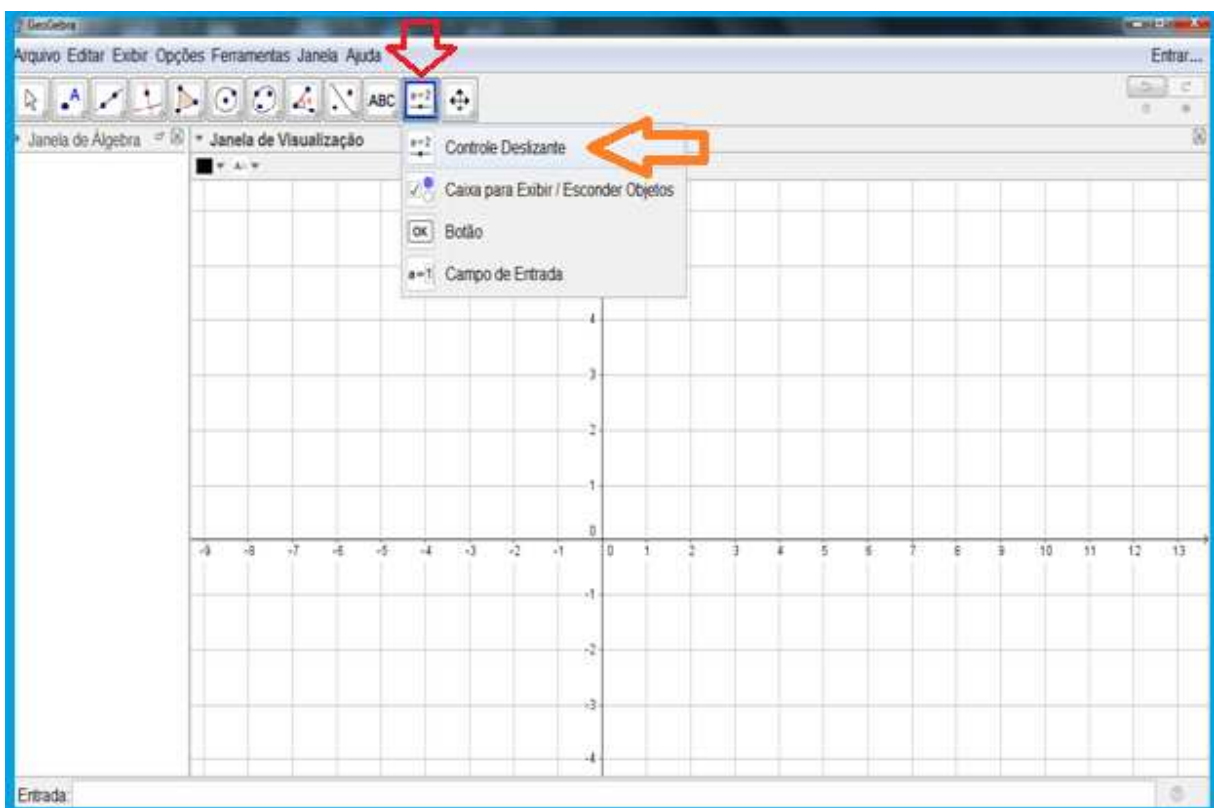


Figura 4.1: Inserção de controles deslizantes.

2. A seguir, no campo de entrada do Geogebra, digitamos a equação a ser plotada:  
 $ax + by + c = 0.$

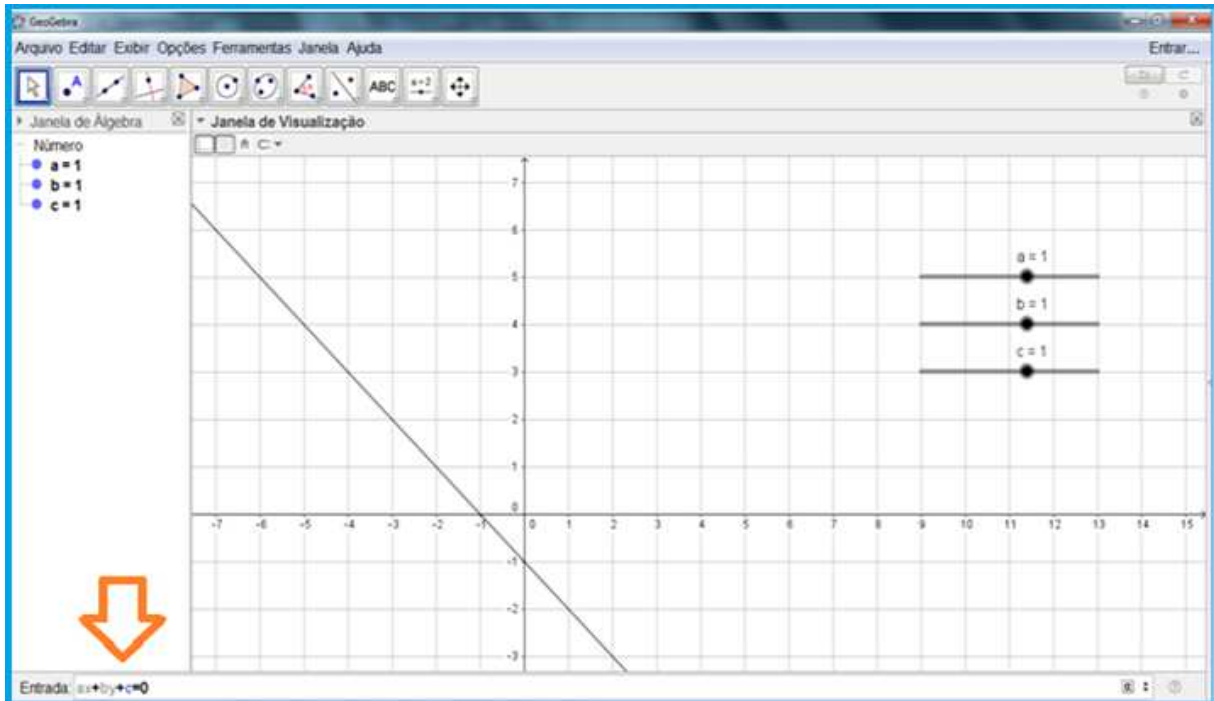


Figura 4.2: Inserção da equação  $ax + by + c = 0$ .

Mediante tal ferramenta, a interação levará o aluno a perceber e fazer as seguintes conjecturas:

- Quando o valor dos coeficiente  $a$  e  $b$  são nulos, o que acontece com a curva?
- O que acontece com a representação da curva, se o coeficiente  $a$  é positivo ou negativo?
- Quando faço o coeficiente "c" deslizar, ou seja, variar, qual é o reflexo disso na representação geométrica?

**Observação 4.1.2.** É importante o professor aproveitar este momento, para ressaltar que a representação geométrica da equação de grau 1 é uma reta, e uma reta é um conjunto infinito de pontos.

### Equação Polinomial de grau 2

Toda e qualquer equação descrita na forma:  $y = ax^2 + bx + c$ , com  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$  é conhecida como equação de grau 2.

- $y = x^2 + 2x - 3$  é uma equação polinomial de grau 2 que apresenta  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $c = -3$ .
- $x^2 - 3x - y = 0$  é uma equação polinomial de grau 2 que apresenta  $a = 1$ ,  $b = -3$  e  $c = 0$ .

- $2x^2 - 3 = y$  trata-se de uma equação polinomial de grau 2 que apresenta  $a = -2$ ,  $b = 0$  e  $c = -3$ .
- $x^2 - y = 0$  trata-se de uma equação polinomial de grau 2 que apresenta  $a = 1$ ,  $b = 0$  e  $c = 0$ .

Agora iremos expor uma sequência de ações utilizando o Geogebra, a fim de elucidar a associação entre equação de grau 2 e representação gráfica dela.

1. Na tela de controle do Geogebra, inserimos três controles deslizantes,  $a$ ,  $b$  e  $c$ .
2. A seguir, no campo de entrada do Geogebra, digitamos a equação a ser plotada:  
 $y = ax^2 + bx + c$ .

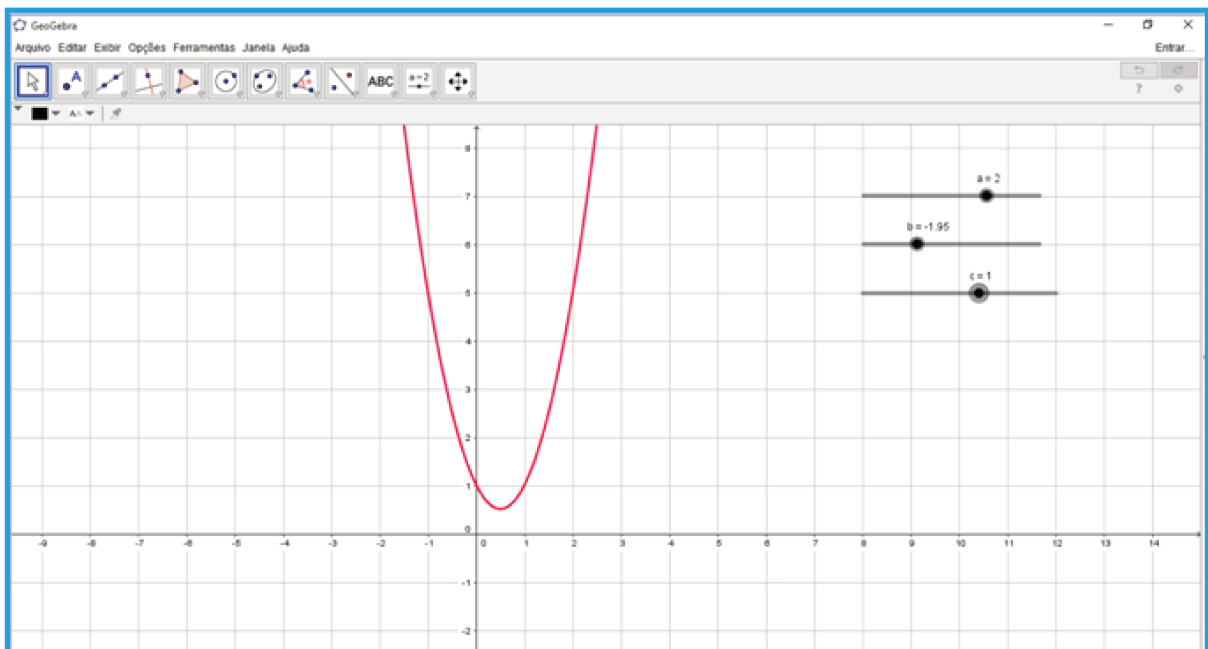


Figura 4.3: Gráfico gerado pela equação:  $y = ax^2 + by + c$ .

**Exemplo 4.1.1.** *Depois dessa construção, o aluno deverá fazer as seguintes conjecturas:*

- *Quando o valor dos coeficiente  $a$  e  $b$  são nulos, o que acontece com a curva?*
- *O que acontece com a representação da curva, se o coeficiente  $a$  é positivo ou negativo?*
- *Qual é a função do coeficiente "c" na equação? Se variar tal coeficiente, qual é o efeito disso na representação geométrica?*

**Observação 4.1.3.** Esta representação é denotada Parábola, e uma parábola é um conjunto de infinitos de pontos que equidistam de um mesmo ponto, denotado foco da Parábola. O professor pode levar o aluno a perceber claramente a questão de conjunto de pontos, o que será importante mais tarde neste plano de ensino.

**Atividade Proposta**

1. Construa, utilizando o Geogebra, as representações gráficas de cada uma das curvas a seguir:
  - a)  $2x + 3y - 9 = 0$
  - b)  $y = 9x^2 - 4x + 7$

## 4.2 Sequência Didática 2: Associar uma Equação Polinomial a Curvas Fechadas

**Objetivo:** Compreender e reconhecer que uma equação algébrica quadrática da forma:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$  ou  $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  com coeficientes  $x_0, y_0, a$  e  $b \in \mathbb{R}$ , representam um conjunto de pontos no plano, que formam Curvas Fechadas em  $\mathbb{R}^2$ .

Ressaltamos que podemos entender Curvas Fechadas em  $\mathbb{R}^2$  como sendo aquelas curvas que não apresentam extremidades.

**Exemplo 4.2.1.** *Como contextualização, apontam-se as fronteiras da cidade de Campinas, que podem representar uma Curva fechada em  $\mathbb{R}^2$ . Observe:*



Figura 4.4: Representação de uma Curva Fechada.

Para melhor percepção e centralização das reflexões nas Curvas que aparecem no currículo do Ensino Básico, iremos apresentar algumas curvas quadráticas escritas de diferentes maneiras. Nessa proposta, apareceram duas curvas conhecidas de um aluno do Ensino Médio: a Circunferência e a Elipse. Ambas se apresentam com uma escrita diferente da escrita geral com o objetivo de facilitar sua identificação.

### Equação de uma Circunferência

Conforme enunciado em (1.3.2), temos que uma equação do tipo:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

representa uma Circunferência com raio medindo  $r$  e centro no ponto  $(x_0, y_0)$ .

Para mostrar a Curva fechada que representa essa equação, utilizaremos o Geogebra e proporemos as seguintes ações:

1. Na tela de controle do Geogebra, inserimos três controles deslizantes,  $x_0$ ,  $y_0$  e  $r$ , que irão representar as coordenadas do centro e o raio da Circunferência.
2. A seguir, no campo de entrada do Geogebra, digitaremos equação a ser plotada:  
 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2=r^2$ .

Vamos constatar esse fato no Geogebra.

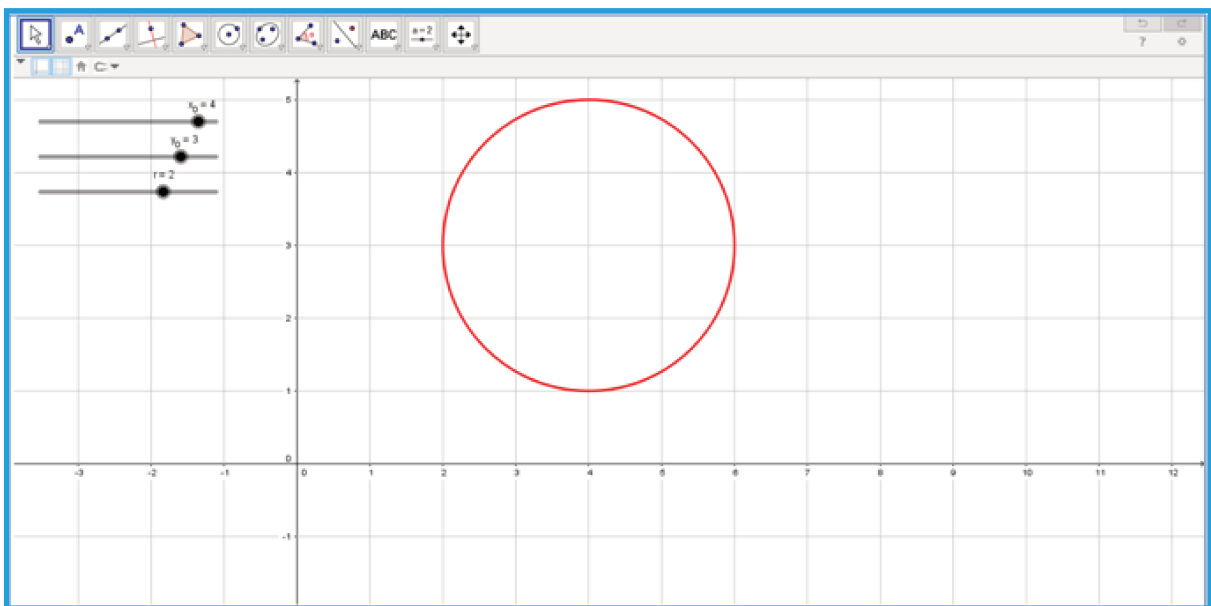


Figura 4.5: Gráfico gerado pela equação:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ .

**Exemplo 4.2.2.** A variação dos controles deslizantes para  $x_0$ ,  $r$ , e  $b$  irá levar os alunos às seguintes conjecturas:

- Quando o valor dos coeficiente  $x_0$  e  $y_0$  varia, o que acontece com a curva?
- O que acontece com a representação da curva, se o coeficiente  $r$  variar?

**Observação 4.2.1.** O lugar geométrico, ou seja, o conjunto de todos os pontos que equidistam de um mesmo ponto, denotado centro, chama-se Circunferência.

Logo, a definição de uma curva recai mais uma vez sobre conjunto de pontos.

### Equação de uma Elipse

De acordo com o enunciado em (1.3.2), temos que uma equação do tipo:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

representa uma curva chamada Elipse centrada no ponto  $(x_0, y_0)$ .

Para demonstrar a Curva Algébrica, ou seja, o gráfico que representa essa equação, utilizaremos o Geogebra, propondo as seguintes ações:

1. Na tela de controle do Geogebra, inserimos quatro controles deslizantes,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $a$  e  $b$ .
2. A seguir, no campo de entrada do Geogebra, digitamos a equação a ser plotada:  

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Logo teremos:

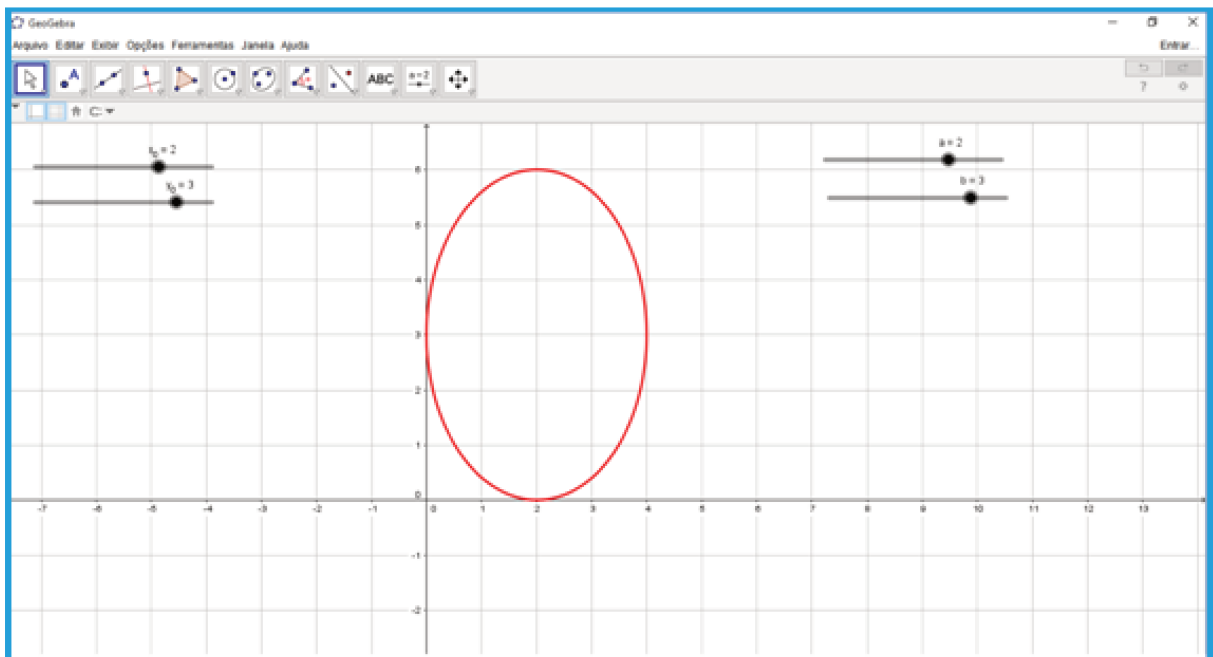


Figura 4.6: Gráfico gerado pela equação:  $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ .

**Exemplo 4.2.3.** A observação de tal curva algébrica e a variação dos controles deslizantes para  $x_0$ ,  $y_0$  e  $r$  irão levar os alunos aos seguintes questionamentos:

- Quando o valor dos coeficiente  $x_0$  e  $y_0$  varia, o que acontece com a curva?
- O que acontece com a representação da curva, se os coeficientes  $a$  e  $b$  variarem?
- É possível o coeficiente  $a$  e  $b$  serem nulos ou negativos?



**Observação 4.2.2.** Assim, definimos Elipse como o lugar geométrico, ou seja, o conjunto de todos os pontos cuja soma de suas distâncias a dois pontos fixos,  $F_1$  e  $F_2$ , denominados focos, seja constante.

Mais uma vez, a definição de uma curva recai sobre uma questão que será extremamente relevante para essa sequência didática, que é a questão sobre conjunto de pontos.

### 4.2.1 Atividade proposta

1. Identifique as quadráticas representadas a seguir:

a)  $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$

Solução:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 &= 0 \\ 9(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 6y) &= -36 \\ 9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 6y + 9) &= -36 + 72 \\ 9(x - 2)^2 + 4(y - 3)^2 - 36 &= 36 \\ \frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{9} &= 1. \end{aligned}$$

Portanto,  $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$  representa uma Elipse com centro em  $(2, 3)$ .

b)  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

Solução:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 &= 0 \\ x^2 + 4x + y^2 - 6y &= -4 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 &= -4 + 13 \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 &= 9 \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 &= 3^2 \end{aligned}$$

Portanto,  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$  representa uma Circunferência com centro em  $(-2, 3)$  e raio medindo 3.

c)  $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$

d)  $5x^2 + 9y^2 - 20x - 18y - 16 = 0$

2. Construa, utilizando o Geogebra, as representações gráficas, ou seja, as curvas representadas a seguir:

- a)  $x^2 + y^2 - 4 = 0$   
b)  $3x^2 + 3y^2 - 12x - 6y + 10 = 0$   
c)  $4x^2 + 25y^2 = 100$   
d)  $x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = 0$

**Observação 4.2.3.** Ao término dessas duas primeiras sequências didáticas, o professor deverá certificar-se de que o aluno está compreendendo que: cada uma das curvas apresentadas por meio de uma equação polinomial representa um conjunto de pontos no espaço  $\mathbb{R}^2$ .

### 4.3 Sequência Didática 3: Cálculo de distâncias

**Objetivo:** Reconhecer distâncias em  $\mathbb{R}^2$  a fim de compreender que o espaço  $\mathbb{R}^2$  é um espaço métrico.

#### 4.3.1 Ponto a Ponto

Seja  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  pontos no plano  $\mathbb{R}^2$ , pode-se determinar analiticamente a distância entre esses pontos raciocinando da seguinte forma:

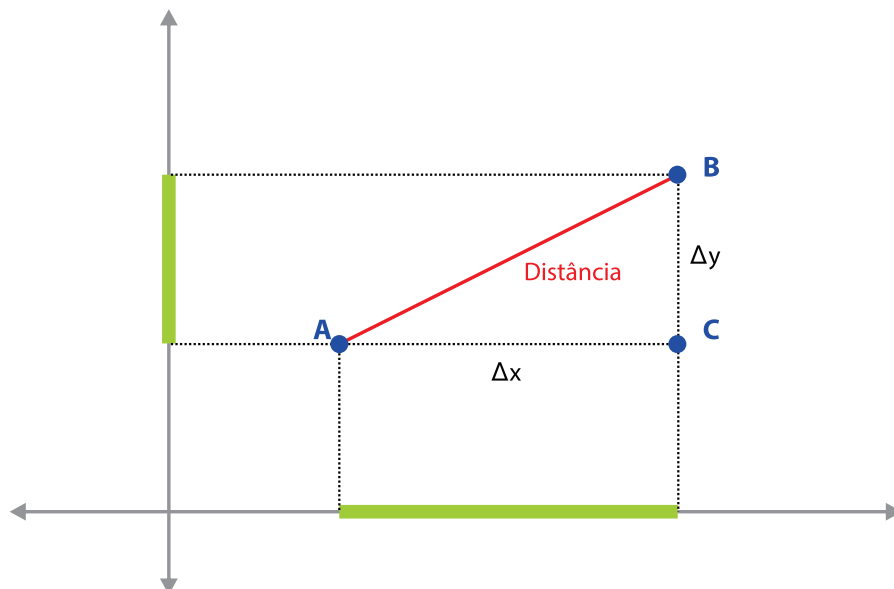


Figura 4.7: Distância entre pontos no plano  $\mathbb{R}^2$

Percebemos que o polígono ABC é um triângulo retângulo e que, para chegarmos à distância entre A e B, podemos recorrer à relação de Pitágoras.

**Relação Pitagórica:** "O quadrado da Hipotenusa é igual à soma dos quadrados de seus catetos."

$$\begin{aligned}d_{AB}^2 &= d_{BC}^2 + d_{AC}^2 \\d_{AB}^2 &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \\d_{AB} &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}\end{aligned}$$

### 4.3.2 Ponto a Reta

Dado um ponto  $P(x_P, y_P)$  e uma reta determinada pela equação  $ax + by + c = 0$ . Vamos determinar a distância entre o ponto  $P$  e a reta  $r$ .

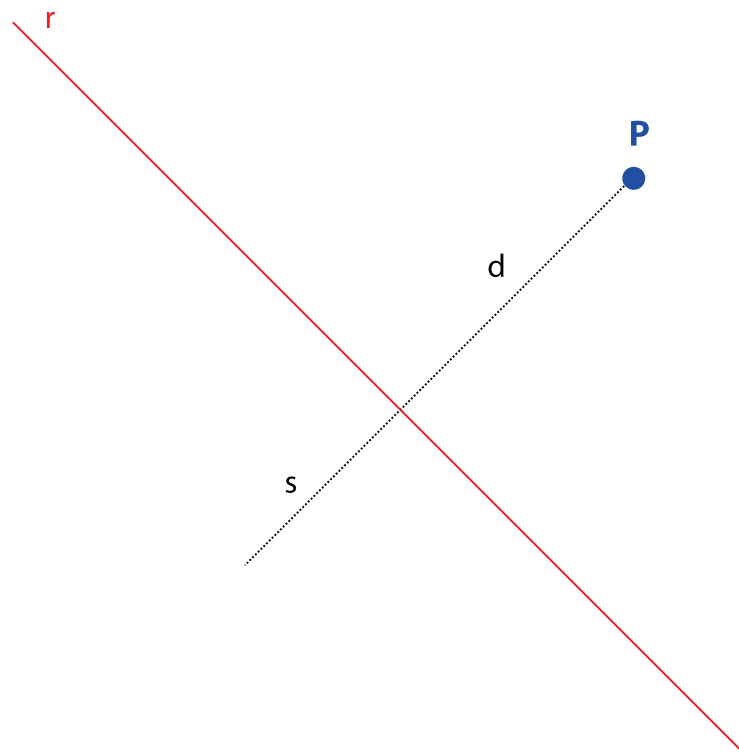


Figura 4.8: Distância entre ponto e reta no plano  $\mathbb{R}^2$

Seja  $P(x_0, y_0)$  e  $r : ax + by + c = 0$

1º) Determinamos a equação da reta perpendicular a  $r$  por  $P$ .

- Como  $s \perp r$ ,  $m_s = \frac{1}{m_r} = -\frac{1}{(-\frac{a}{b})} = \frac{b}{a}$ .

-  $s$  passa por  $P(x_0, y_0) \Rightarrow y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow s : bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$

2º) Determinamos as coordenadas de  $P'$ , projeção ortogonal de  $P$  sobre  $r$ . Devemos resolver o sistema, nas incógnitas  $x$  e  $y$ , formado pelas equações de  $r$  e de  $s$ :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0 \end{cases}$$

Somando a primeira equação multiplicada por  $b$  com a segunda equação multiplicada por  $-a$ , obtemos:

$$y = \frac{a^2 y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2}$$

Substituindo esse valor em qualquer uma das equações, obtemos o valor de  $x$ :

$$x = \frac{b^2 x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2}$$

3º) Calculamos a distância entre  $P$  e  $P'$ .

A distância de  $P$  a  $r$  é a distância entre  $P(x_0, y_0)$  e

$$P'\left(\frac{b^2 x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2}\right):$$

$$d = \sqrt{(\Delta_x)^2 + (\Delta_y)^2} = \sqrt{\left(\frac{b^2 x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{a^2 y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2} - y_0\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\left[\frac{a \cdot (-ax_0 - by_0 - c)}{a^2 + b^2}\right]^2 + \left[\frac{b \cdot (-ax_0 - by_0 - c)}{a^2 + b^2}\right]^2}$$

Lembrando que  $\forall t \in \mathbb{R}, (-t)^2 = t^2$ , e colocando  $ax_0 + by_0 + c$  em evidência, vem:

$$d = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2 \cdot (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### 4.3.3 Reta a Reta

Para o caso do cálculo de distâncias entre duas retas, teremos que contar com o seguinte requisito: as retas precisam ser paralelas, caso contrário a distância entre elas será zero.

Sendo assim, podemos usar o raciocínio análogo ao usado para calcular a distância entre ponto e reta. Para ilustrar o que estamos propondo, vamos a um exemplo:

1º Iremos calcular a distância entre as retas  $r$  e  $s$  dadas a seguir por:  $r : x + y - 10 = 0$  e  $x + y - 6 = 0$ , sabendo que elas são paralelas.

Da Geometria Plana, sabemos que a distância entre duas retas paralelas é igual à distância de um ponto  $A$  qualquer pertencente a uma das retas à outra reta.

2º Para calcular as coordenadas de um ponto  $A$  qualquer da reta  $r$ , toma-se arbitrariamente  $x = 2$ . Temos:

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow 2 + y - 10 = 0 \Rightarrow y = 8$$

Portanto,  $A(2, 8)$  é um ponto da reta  $r$ .

3º Por fim, calcula-se a distância de  $A$  até à reta  $s$ .

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 + 8 - 6|}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{68}} = \frac{4}{2\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}.$$

### Atividades Desenvolvidas

1. Vamos determinar a distância entre os pontos  $A(2, 2)$  e  $B(6, 5)$ .

Solução: Sabemos que,

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d = \sqrt{(2 - 6)^2 + (2 - 5)^2}$$

$$d = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$

$$d = \sqrt{16 + 9}$$

$$d = \sqrt{25}$$

$$d = 5$$

2. Vamos determinar agora a distância entre o ponto  $P(3, 4)$  e a reta  $x + y + 1 = 0$ .

Solução:

$$\text{Sabemos que, } d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Substituindo o ponto  $P$  e a equação da reta  $r$ , temos:

$$d = \frac{|3 + 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow d = \frac{|8|}{\sqrt{2}} \Rightarrow d = \frac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow d = 4\sqrt{2}.$$

### Atividades Propostas

1. Determine as distâncias entre os seguintes pares de pontos:

a)  $A(3, 4)$  e  $B(4, 5)$ .

b)  $C(1, 3)$  e  $D(6, 5)$ .

- c)  $E(-1, 4)$  e  $F(-3, -8)$
- d)  $G(-7, 1)$  e  $H(9, 8)$ .
2. Um ponto  $A$  tem coordenadas  $(3, 2)$ . Qual é a distância desse ponto até a reta  $r$ , em cada um dos seguintes casos:
- a)  $r : 3x + 4y + 1 = 0$
- b)  $r : x + 2y - 3 = 0$
- c)  $r : 2x - 3y + 9 = 0$
- d)  $r : 3x + 4y - 2 = 0$
3. Sabendo que as retas de equações  $4x - 3y + 10 = 0$  e  $4x - 3y - 6 = 0$  são paralelas, determine a distância entre as duas retas.
4. Sendo  $A$  o ponto de intersecção da reta  $r$ , de equação  $x + y - 6 = 0$ , com o eixo  $x$ , determine a distância do ponto  $A$  à reta  $s$ , de equação  $3x - 4y + 10 = 0$ .
5. Se a distância do ponto  $P(0, p)$  à reta  $r$ , de equação  $4x + 3y - 2 = 0$ , é igual a 2 unidades, determine a coordenada  $p$ .

## 4.4 Sequência Didática 4: Métrica em um Espaço Métrico

**Objetivo:** Reconhecer e compreender distâncias entre Curvas Fechadas em  $\mathbb{R}^2$ .

Os exemplos de Curvas Fechadas que fazem parte do currículo das séries finais do Ensino Básico apresentam-se somente em dois casos: A Circunferência e a Elipse. Dessa forma, nesta sequência, centraremos nossos estudos nessas duas curvas.

### 4.4.1 Distâncias entre Conjuntos

Para fazermos um aluno do Ensino Médio se apropriar dos saberes sobre distância ou Métrica de Hausdorff, propomos a utilização de um aplicativo desenvolvido a partir do Geogebra, que será apresentado no decorrer desta sequência didática.

### 4.4.2 Desenvolvimento

Propomos aos estudantes as seguintes motivações reflexivas:

- 1º) Como calcular a distância entre duas Circunferências?

- 2º) Como calcular a distância entre uma Circunferência e uma Elipse?
- 3º) Como calcular a distância entre Elipses?
- 4º) Como calcular a distância entre dois conjuntos?

Antes de chegarmos às respostas sobre esses questionamentos, vamos refletir sobre outra situação: Como calculamos a distância entre duas cidades?

### Contextualizando:

Seja  $\mathbf{C}$  o conjunto da cidade de Campinas, cada elemento  $\mathbf{c}$  será um endereço fixo de cada habitante campinense. Além disso, seja  $\mathbf{T}$  o conjunto dos endereços fixos dos habitantes de Taubaté, cada  $\mathbf{t}$  é um elemento fixo de  $\mathbf{T}$ . Como podemos medir a distância entre essas duas cidades?

**Observação 4.4.1.** Podemos associar a ideia de conjunto a uma cidade e elementos de um conjunto ao possível endereço de seus habitantes. Com isso, o aluno poderá conseguir fazer abstrações e conjecturas mais acessíveis.

A distância do endereço de um habitante campinense  $\mathbf{c}$  à cidade de Taubaté pode ser considerada a distância do endereço desse habitante  $\mathbf{c}$  ao possível endereço de seu vizinho mais próximo residente em Taubaté, ou seja,  $\inf_{t \in T} d(\mathbf{c}, \mathbf{t})$ . Do mesmo modo, a distância do endereço de um habitante taubateano  $\mathbf{t}$  à cidade de Campinas pode ser considerada a distância desse habitante taubateano a seu vizinho mais próximo em Campinas, ou seja,  $\inf_{c \in C} d(\mathbf{t}, \mathbf{c})$ .

Assim sendo, a “distância” de Campinas a Taubaté seria definida como:

$$d(C; T) = \sup\{d(\mathbf{c}, T) : \mathbf{c} \in C\}$$

E a “distância” entre Taubaté e Campinas por:

$$d(T; C) = \sup\{d(\mathbf{t}, C) : \mathbf{t} \in T\}$$

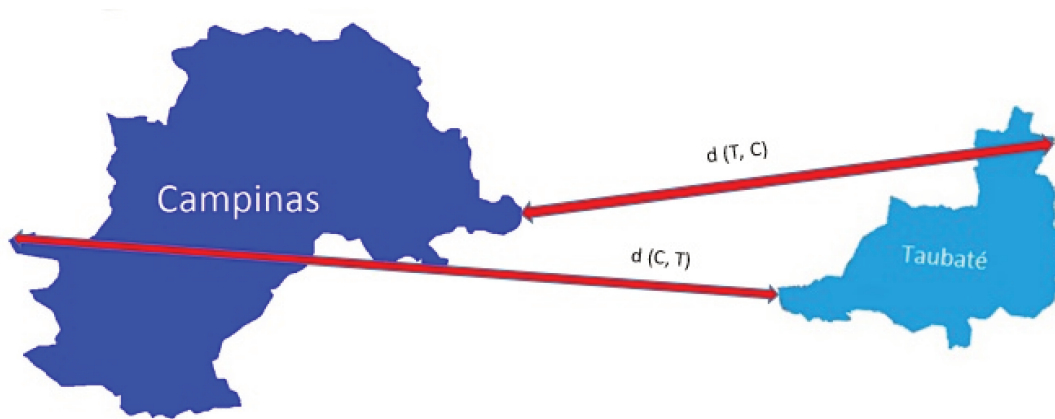


Figura 4.9:  $d(C, T) \neq d(T, C)$

Mas temos um impasse: como pode a distância de Taubaté a Campinas ser diferente da distância de Campinas a Taubaté?

Pode-se notar que a distância de Campinas a Taubaté, denotada por  $d(C, T)$ , não é a mesma que a distância de Taubaté a Campinas, denotada por  $d(T, C)$ .

Para resolvermos esse impasse, recorreremos ao definido em (3.1.1) por Hausdorff, segundo Hausdorff a distância entre subconjuntos em um espaço métrico será dada por:

$$d_H(A; B) = \max\left\{\sup_{x \in A} d(x, B); \sup_{y \in B} d(y, A)\right\}$$

Logo, a distância de Campinas a Taubaté, segundo Hausdorff, será dada pela maior distância de um habitante de uma das cidades ( $\mathbf{c}$  ou  $\mathbf{t}$ ) e os limites territoriais da outra cidade.

$$d_H(C; T) = \max\left\{\sup_{c \in C} d(c, T); \sup_{t \in T} d(t, C)\right\}$$

Para desenvolvermos essa a ideia de Distância de Hausdorff de forma natural, temos que desenvolver melhor a noção de vizinhança de um conjunto.

**Exemplo 4.4.1.** Observe a curva denotada como "Campinas" representada abaixo:



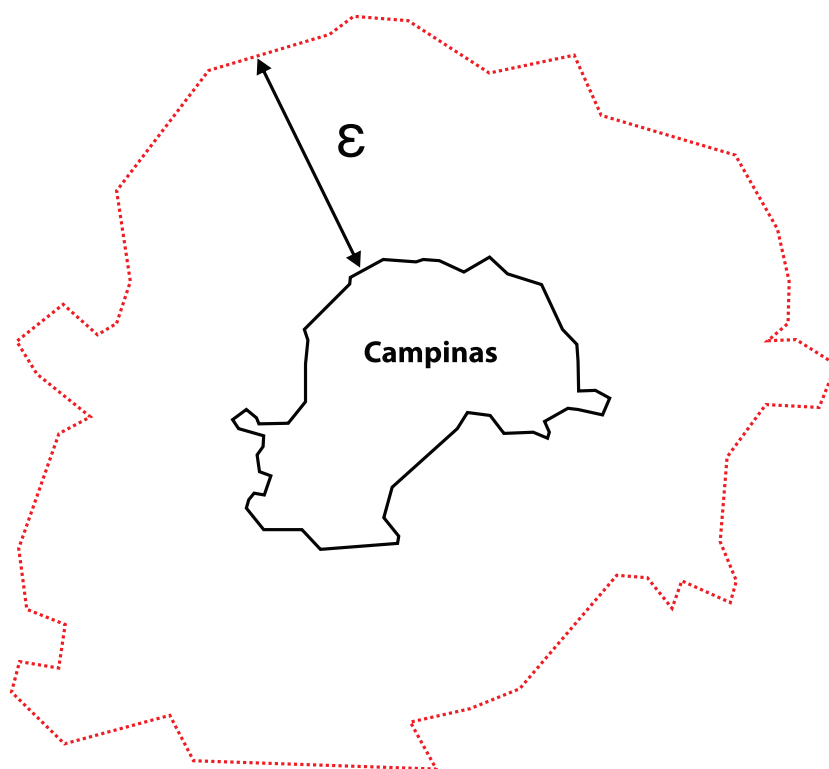


Figura 4.10: Campinas e redondeza

No entorno de seu perímetro, está representado um espaço, composto por todos os pontos com distância menor ou igual a  $\varepsilon$ . Esses pontos formam um conjunto que chamamos de Bola da Curva "Campinas".

Para deixar mais dinâmico e significativo, utilizaremos software Geogebra. Abaixo está apresentada uma série de ações utilizando o Geogebra para ajudar o professor:

- 1º) No campo de entrada do Geogebra, digitaremos uma curva algébrica que representará um conjunto, denotado por **A**:  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$ ;
- 2º) Na tela de controle, criamos o controle deslizante  $\varepsilon$ ;
- 3º) A seguir, inserimos a equação que irá representar a Bola do conjunto, ou seja, o conjunto dos pontos das vizinhanças do conjunto **A**, digitando a equação:  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = \varepsilon$ .

Temos, então, a seguinte representação:

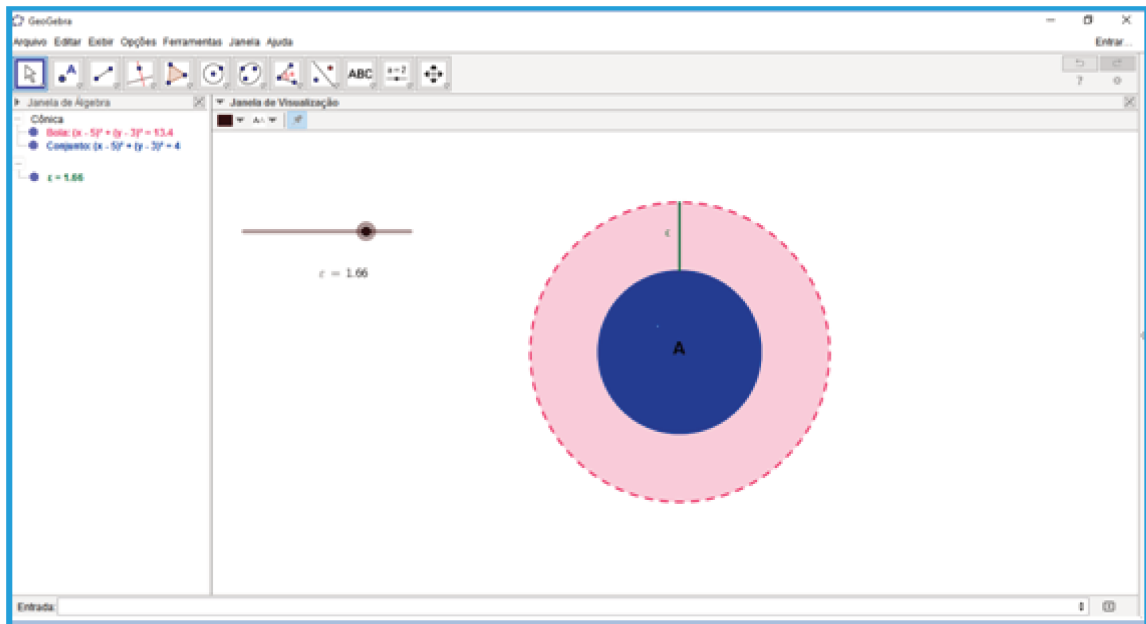


Figura 4.11: Bola de um conjunto

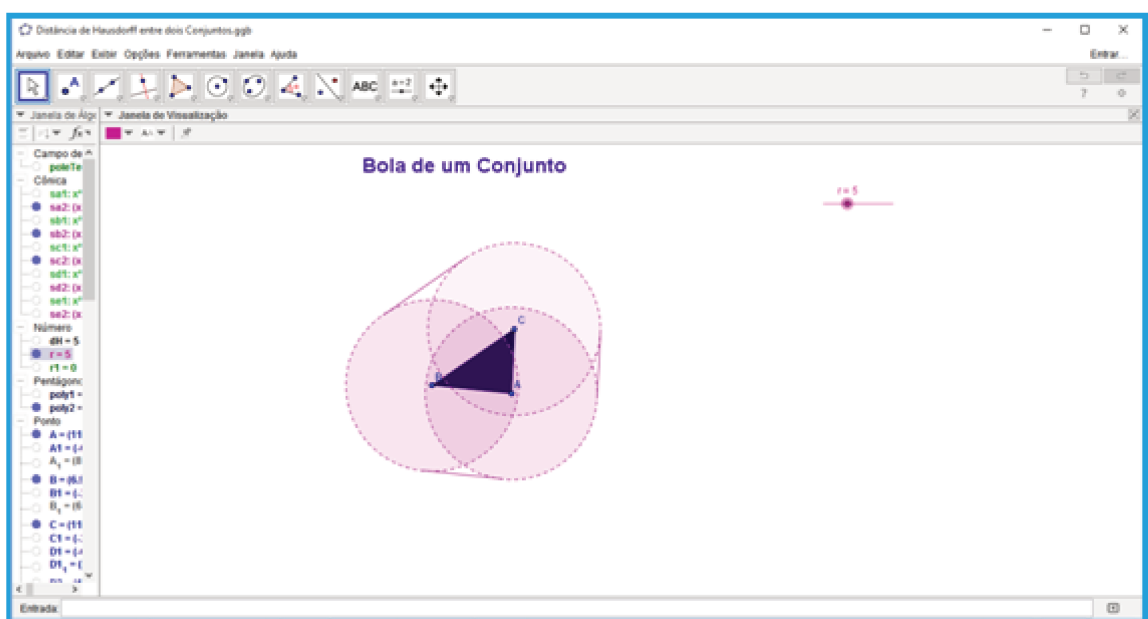
À medida que deslizamos o controle  $\epsilon$ , o conjunto das vizinhanças aumenta ou diminui de acordo com nosso interesse. Com isso, o aluno poderá compreender melhor o conceito de Bola de uma Curva Algébrica Plana.

No espaço em rosa, estão todos os pontos que distam medidas menores do que  $\epsilon$  do conjunto **A**.

Assim sendo, temos a Bola do conjunto **A**.

Para ilustrarmos melhor a situação, propomos a utilização de um aplicativo, desenvolvido a partir do Geogebra, para uma melhor compreensão de tal assunto.

Observe esse outro conjunto, representado por um triângulo ABC e sua Bola:

Figura 4.12: Triângulo ABC e sua Bola com  $\epsilon = 5$

### 4.4.3 Métrica de Hausdorff

Conforme o conceito que definimos em (3.1.1) acerca da distância entre subconjuntos, iremos fazer em um aplicativo uma demonstração dessa distância, que o professor pode explorar em sua aula. Tal aplicativo é denotado como: "Hausdorff distance between two sets"<sup>1</sup>. Neste aplicativo interativo, o aluno poderá fazer intervenções, como: deslocar os conjuntos pela tela e chegar às distâncias entre eles, além de conseguir visualizar o novo conceito de distância apresentado a ele. Tal ferramenta dará uma contribuição valiosa para a aprendizagem e fixação desse tópico matemático, auxiliando o aluno a compreender melhor o novo conceito de distância discutido neste trabalho.

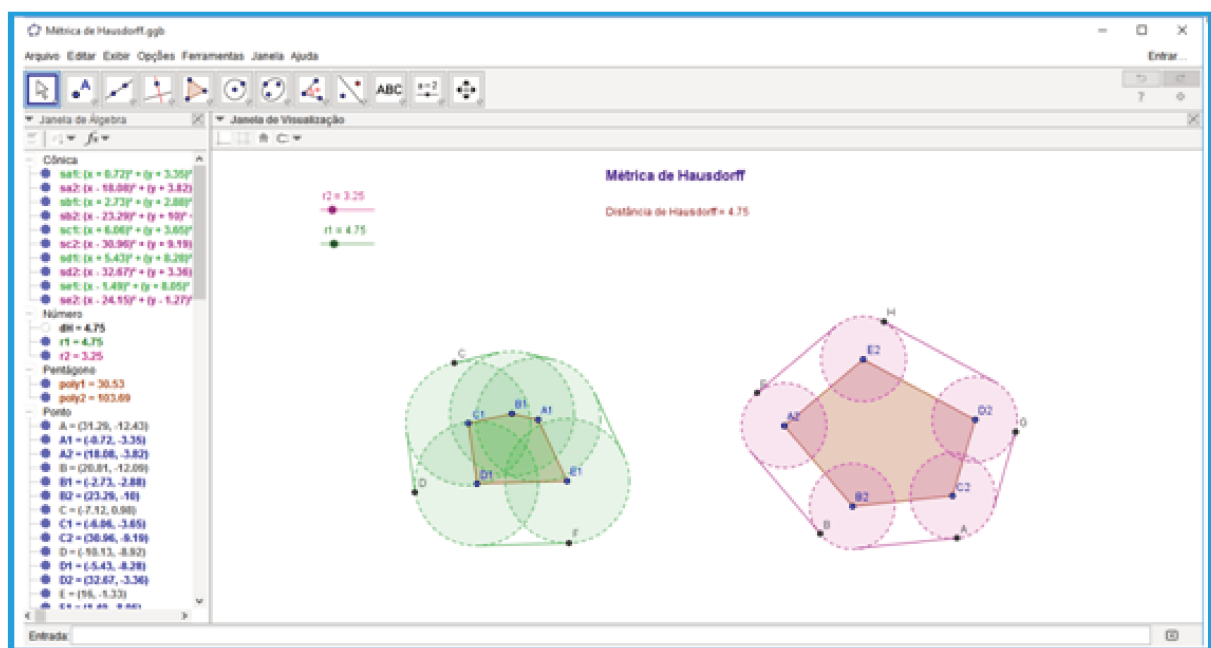


Figura 4.13: Tela inicial do aplicativo

Apresentamos a seguir uma sequência de ações, a fim de o aluno compreender o que seria a Distância de Hausdorff.

- 1º) Primeiramente, deslocamos o controle deslizante  $r_1$  até a Bola do conjunto 1 representada pelo polígono 1, encontrando o ponto mais distante do conjunto representado pelo polígono 2;

<sup>1</sup>disponível em: [www.geogebra.org/materials/](http://www.geogebra.org/materials/)

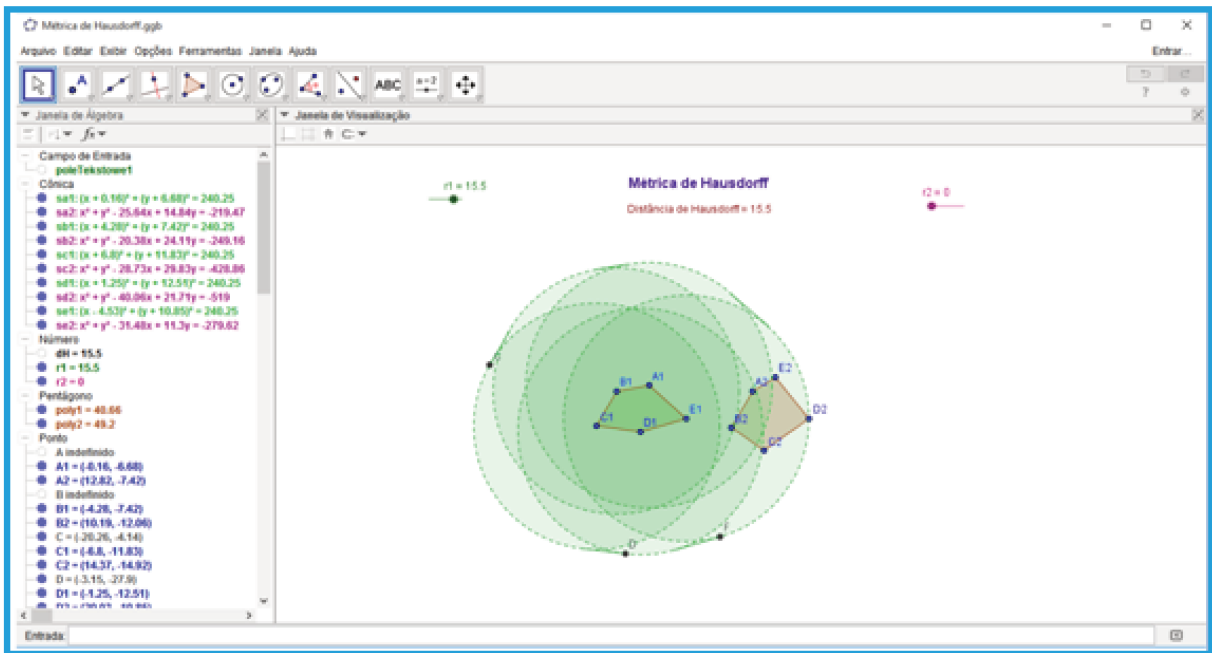


Figura 4.14: Bola do  $Conjunto_1 \subset Conjunto_2$

2º) Em seguida, mostramos aos alunos que o mesmo processo se aplica ao conjunto 2, se ele deslizar o controle  $r_2$ ;

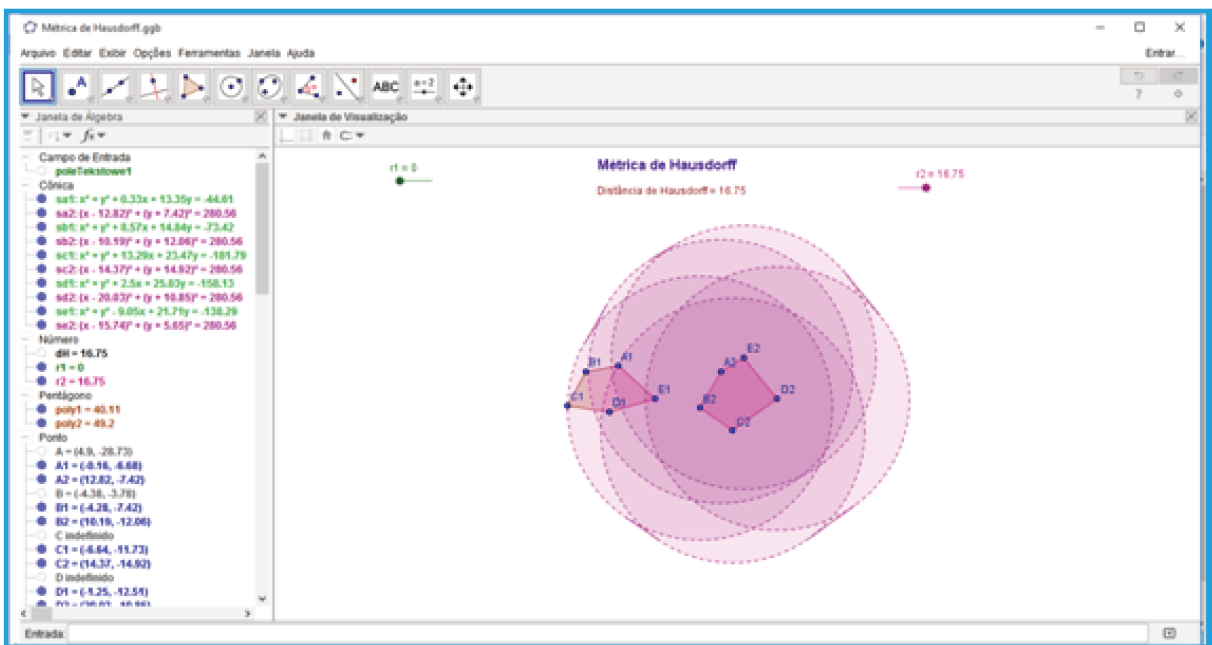


Figura 4.15: Bola do  $Conjunto_2 \subset Conjunto_1$

3º) Refazendo este processo simultaneamente para os conjunto  $C_1$  e  $C_2$ , o aplicativo nos mostra qual é a Distância de Hausdorff entre esses conjuntos. Observe:

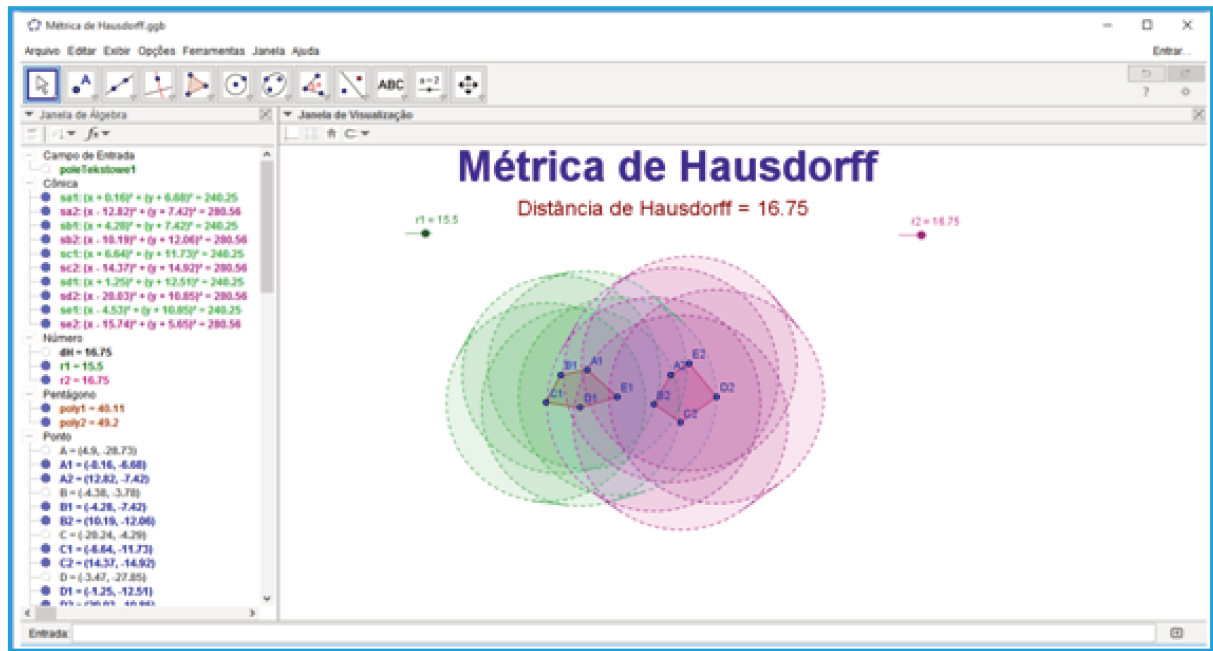


Figura 4.16: Distância de Hausdorff entre os conjuntos  $C_1$  e  $C_2$

**Observação 4.4.2.** Logo após a explanação, é importante deixar o aluno manusear este aplicativo, para que ele desenvolva o conhecimento sobre distância apresentado.

Depois desse período de fixação do conceito de distância entre conjuntos, o professor poderá fazer as seguintes motivações:

Como faríamos para calcularmos distâncias entre curvas algébricas planas que estudamos no Ensino Básico, por exemplo, Elipses e Circunferências?

O aluno deverá perceber que uma curva é um conjunto de pontos no plano  $\mathbb{R}^2$ , sendo assim, um subconjunto do espaço métrico  $\mathbb{R}^2$ . A *Distância de Hausdorff* destina-se a mensurar distância entre subconjuntos de um espaço métrico, portanto podemos utilizá-la para o cálculo da distância entre Curvas Algébricas Planas.

**Exemplo 4.4.2.** Calcule a distância entre as curvas algébricas  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  e  $g(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 6)^2 - 9$ .

Descreveremos uma sequência de ações para construirmos no Geogebra as Curvas Algébricas Planas acima:

1º) Digitar no campo de entrada a curva:  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  e  $g(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 6)^2 - 9$ ;

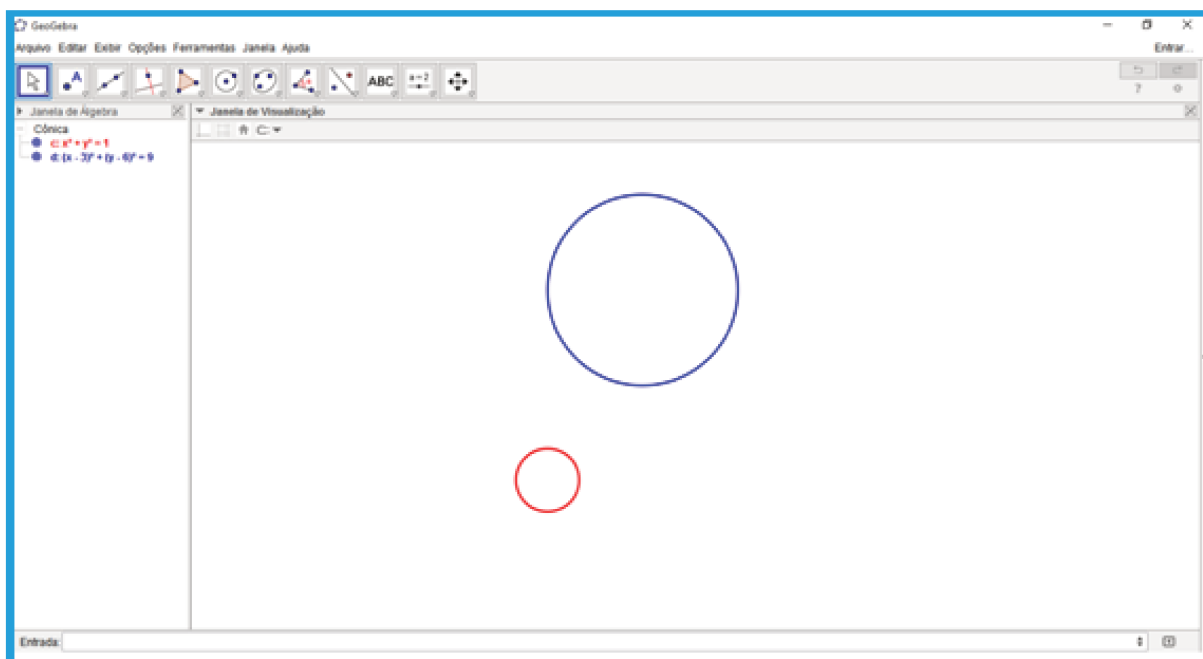


Figura 4.17: Representação das Curvas  $f$  e  $g$ .

2º) Inserir dois controles deslizantes  $a$  e  $b$ ;

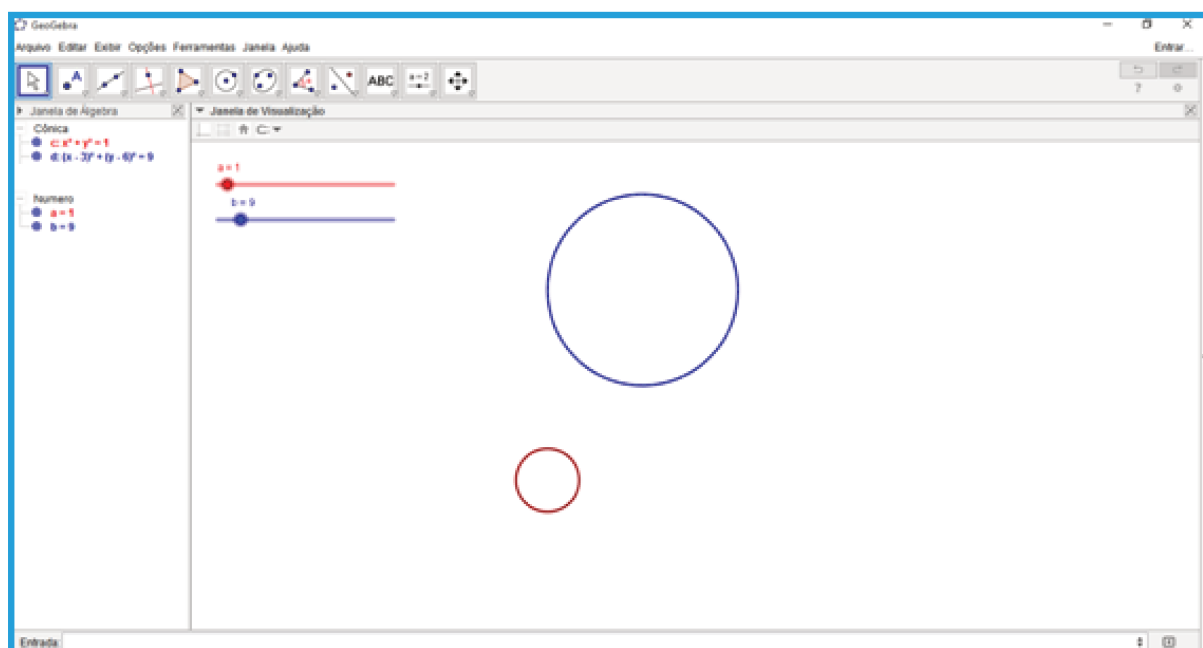


Figura 4.18: Controles deslizantes  $a$  e  $b$

3º) Digitar no campo de entrada as curvas:  $f(x, y) = x^2 + y^2 - a$  e  $g(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 6)^2 - b$ ;

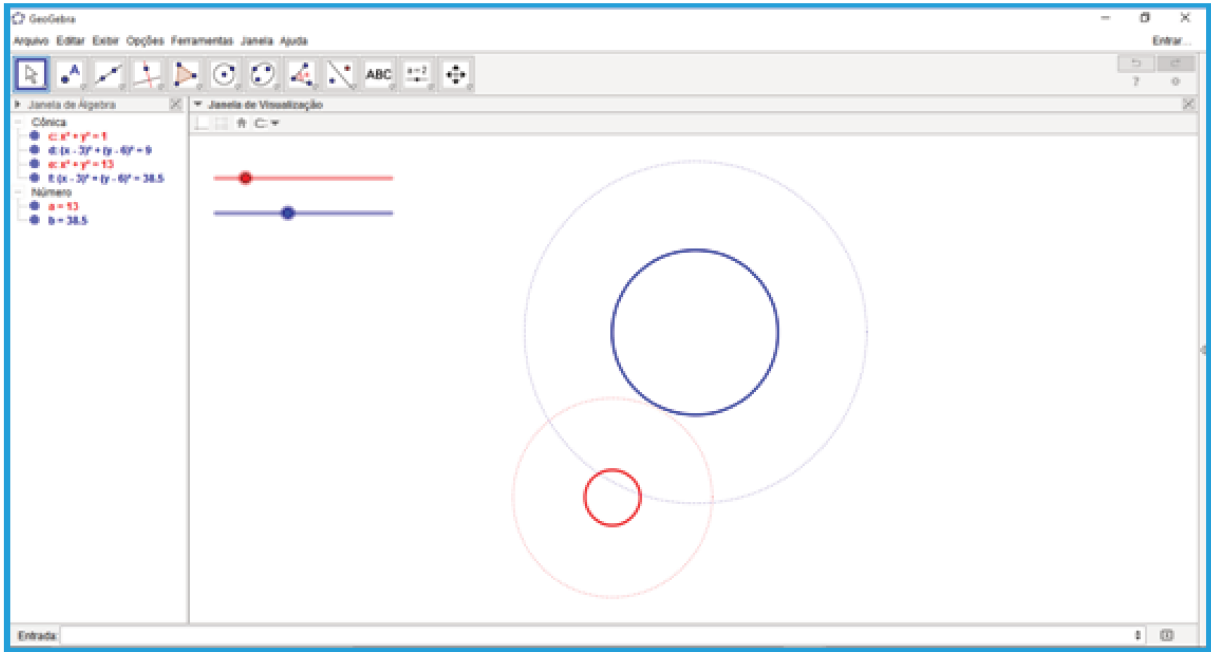


Figura 4.19: Bolas da Curvas

4<sup>o</sup>) Inserir o segmento  $AB$  e o segmento  $CD$ .

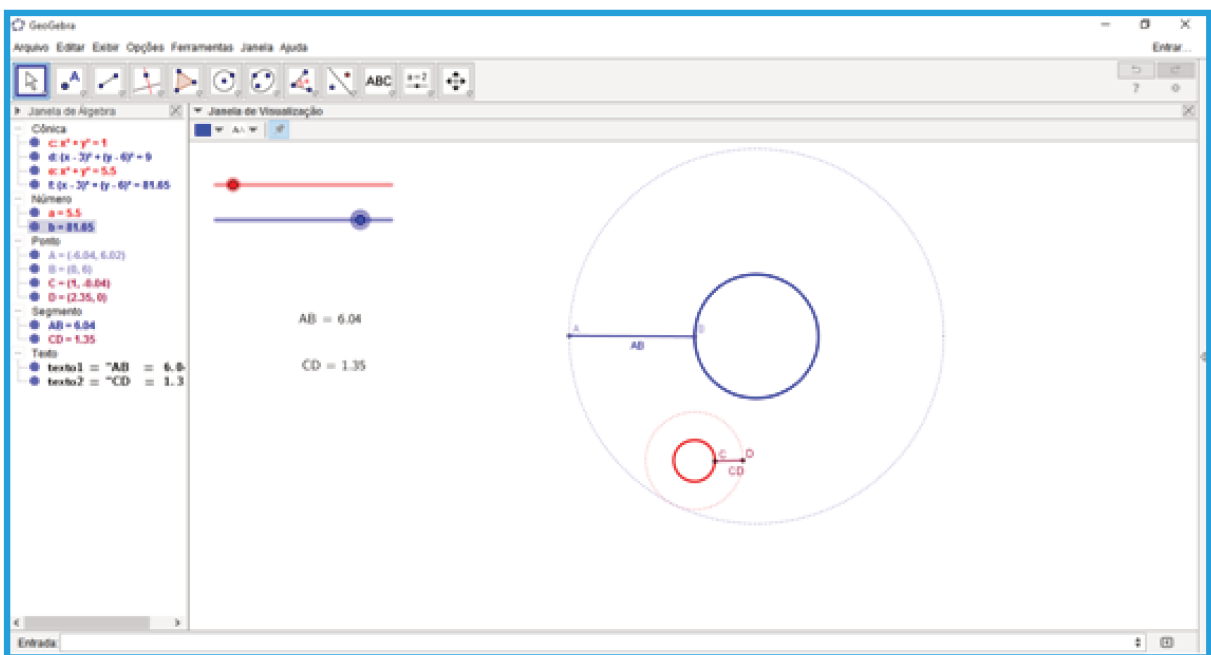


Figura 4.20: Segmentos  $AB$  e  $CD$

Percebemos que os segmentos  $AB$  e  $CD$  das Curvas representam respectivamente os  $\varepsilon$ s das Curvas Algébricas Planas.

Sendo assim, o maior desses valores quando as Bolas das curvas contêm as curvas opostas, ou seja,  $C_1 \subset C_2$  e  $C_2 \subset C_1$ , será a Distância de Hausdorff entre as curvas 1 e 2, e será considerada por nós a distância entre as curvas.

Portanto, no caso desenvolvido como exemplo, temos:

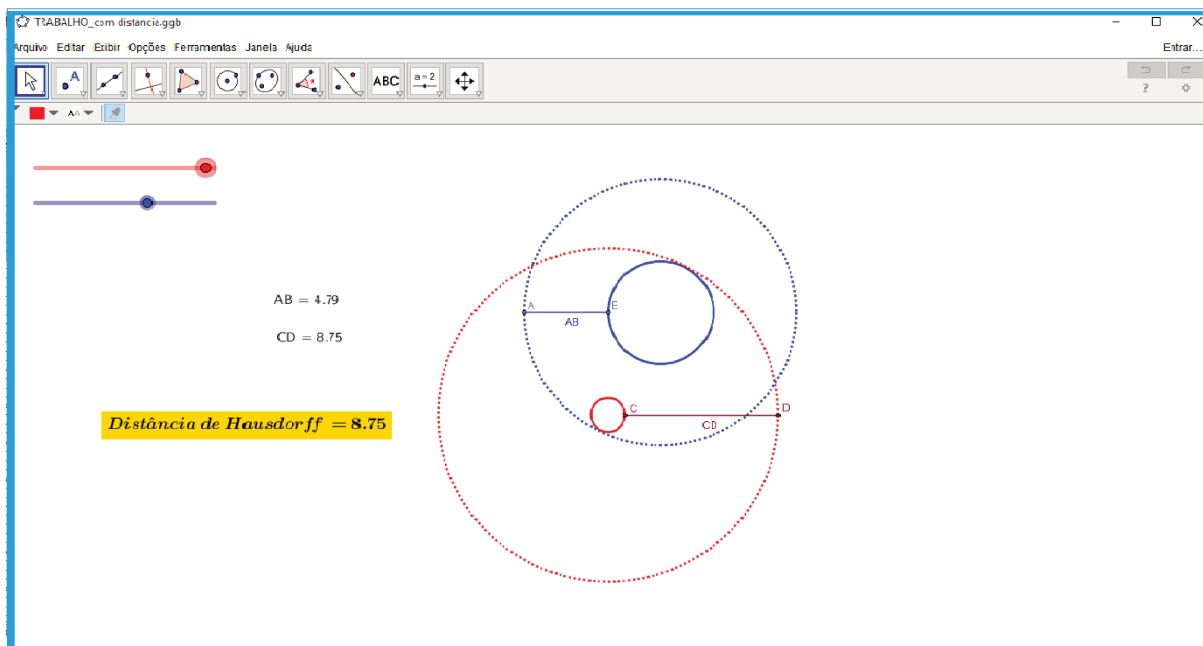


Figura 4.21: Distância entre as Curvas 1 e 2

Sendo assim, a distância de Hausdorff será dada por:

$d_h = \max\{AB, CD\}$  conforme apresentado em (3.1.1) então:

$$d_h = \max\{4,75; 8,75\} \Rightarrow d_H = 8,75$$

Portanto, a distância entre as curvas  $f$  e  $g$  será igual a 8,75.



## Considerações Finais

Para finalização deste trabalho, que se pretende não definitivo, mas sim impulsionador de outros, retoma-se o objetivo geral da pesquisa, a saber: introduzir e aprofundar o estudo sobre distância entre Curvas Planas Fechadas no Ensino Médio.

Para tanto, era preciso propor uma conexão entre dois conceitos diferentes e abstratos - o de Curvas Fechadas e espaço formado por elas e o de distância - com noções já frequentemente estudadas pelos alunos - funções polinomiais e suas representações gráficas. A ideia era partir de algo que os alunos intuem no contexto escolar da disciplina de Matemática para se proporem estudos mais complexos a eles.

A fim de se alcançar tal desafio, teceram-se reflexões acerca dos tipos de Curvas, Espaço Métrico, Noções de Topologia, mais especificamente de Bolas de Curva Algébrica, entre outros tópicos abordados no decorrer do trabalho. No último capítulo, foi proposto um plano de ensino a partir de quatro sequências didáticas relacionadas entre si a fim de levar o aluno à compreensão gradual do tema abordado. Buscava-se possibilitar que ele percebesse a relação entre curvas fechadas, espaço das curvas fechadas, espaço métrico e distância entre curvas fechadas, para que, finalmente, pudesse responder à questão: Como dizer que uma curva  $C_1$  e outra curva  $C_2$  são diferentes e ainda dar uma medida a essa diferença? A solução para tal questão seria dada pelo conceito de Distância de Hausdorff.

Por meio de estudos bibliográficos, pôde-se observar que, embora a temática tratada neste trabalho seja complexa e abstrata, é possível de ser desenvolvida no Ensino Médio, com utilização de ferramentas tecnológicas educacionais disponíveis gratuitamente na Internet. A introdução e a compreensão de tópicos em Topologia, mesmo que de forma pouco aprofundada, podem contribuir para o desenvolvimento dos alunos em noções matemáticas importantes. Além disso, possivelmente podem abrir as portas de um novo campo de investigação que poderá motivar futuros estudos na área de Matemática.

## Bibliografia

- [1] Abramo, Hefez; Villela, Maria Lucia Torres: *Polinômios e Equações Algébricas*. Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2012.
- [2] Barufi, Maria Cristina B.; Oliveira, Anderson F.; Pinheiro, Conrad E.; Nunes, Luiz Flavio S.; Prado, Luiz A. G.; Rodrigues, Marcelo G.; Debus, Michele Viana. *Apontamentos de Cálculo*. IME-Universidade de São Paulo, 2002. Disponível em: [http://ecalculo.if.usp.br/derivadas/forma\\_implicita/links/curva\\_alg\\_plana.htm](http://ecalculo.if.usp.br/derivadas/forma_implicita/links/curva_alg_plana.htm). Acesso em: 20 dezembro 2015.
- [3] Boyer, Carl B.: *História da Matemática*. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.
- [4] Burago, Dmitri; Yuri Burago, and Sergei Ivanov: *A Course in Metric Geometry*. American Mathematical Society, 2001.
- [5] Domingues, Hygino H. e Iezzi, Gelson: *Algebra Moderna*. Volume único. 4. Reform. São Paulo: Atual, 2003.
- [6] Egbert Brieskorn and Horst Knörrer: *Plane Algebraic Curves*. John Stillwell, trans., Birkhäuser, 1986.
- [7] Iezzi, Gelson: *Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Analítica*. - 6ª ed. -São Paulo: Atual, 2013.
- [8] Iezzi, Gelson: *Fundamentos da Matemática Elementar: Complexos, Polinômios, Equações*. - 8ª ed. -São Paulo: Atual, 2013.
- [9] Lima, Elon Lages, com a colaboração de Paulo Cezar Pinto Carvalho: *Coordenadas no Plano*. 5ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.
- [10] Lima, Elon Lages: *Espaços Métricos*. Coleção Projeto Euclides. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

- [11] Prasolov, Victor V.: *Polynomials*. Springer, 2000 ISBN 3-540-40714-6
- [12] Vainsencher, Israel: *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2<sup>a</sup> edição, Rio de Janeiro, 2005.