ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 530.12
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-3-189-196

Поступило в редакцию 17.05.2023
Received 17.05.2023

А. П. Рябушко[1], Т. А. Жур[2]

[1]Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Республика Беларусь

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ И ИХ ЦЕНТРА МАСС В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

(Представлено членом-корреспондентом С. А. Тихомировым)

Аннотация. В рамках ньютоновской небесной механики рассмотрена материальная система, состоящая из двух сферически симметричных тел сравнимых масс, движущихся внутри газопылевого шара со сферически симметричным распределением плотности среды в нем. Сформулированы и решены задачи, дающие ответ на степень влияния гравитационного поля неоднородной среды на устойчивость движения тел и их центра масс относительно координат тел, координат их центра масс, на орбитальную устойчивость по Ляпунову. Дополнительно рассмотрены задачи об устойчивости движения тел в смысле Лагранжа и Пуассона. Доказано, что гравитационное поле сферически симметрично распределенной среды превращает рассматриваемые движения, которые в пустоте являются устойчивыми, в неустойчивые в смыслах Лагранжа, Пуассона, Ляпунова. Даны некоторые численные оценки, связанные с неустойчивостями, которые показывают, что для популярных пар звезд и пар галактик в неоднородной среде возникают их дополнительные смещения порядка многих миллионов километров, а при учете темной материи смещения должны быть на порядок больше последней оценки. Отмеченные неустойчивости являются следствием векового смещения по циклоиде или деформированной циклоиде центра масс системы двух тел и отсутствия барицентрической системы координат при учете влияния гравитационного поля сферически симметрично распределенной среды на движение тел (рассматриваемая материальная система незамкнутая). Доказано, что для этой системы круговые и эллиптические орбиты тел не могут существовать. Вместо этих орбит имеем «витки», изображенные на приводимом рисунке. В планетарных системах (типа Солнечной системы), погруженных в неоднородную среду, смещения центров масс ничтожно малы и поэтому можно считать, что круговые и эллиптические орбиты практически могут существовать.

Ключевые слова: ньютоновская небесная механика, два тела, неоднородная среда, центр масс тел, уравнения движения центра масс, устойчивость, неустойчивость движения

Для цитирования. Рябушко, А. П. Об устойчивости движения системы двух тел и их центра масс в неоднородной среде / А. П. Рябушко, Т. А. Жур // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2023. – Т. 67, № 3. – С. 189–196. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-3-189-196

Anton P. Ryabushko[1], Tatyana A. Zhur[2]

[1]Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Republic of Belarus

MOTION STABILITY OF THE SYSTEM OF TWO BODIES AND THEIR MASS CENTER IN AN INHOMOGENEOUS MEDIUM

(Communicated by Corresponding Member Sergey A. Tikhomirov)

Abstract. Within the framework of Newtonian celestial mechanics, a material system is considered. It consists of two spherically symmetrical bodies of comparable masses moving inside a gas dust ball with a spherically symmetrical density distribution of the medium in it. Problems are formulated and solved. They give an answer to the degree of influence of the gravitational field of an inhomogeneous medium on the motion stability of bodies and their mass center relative to the coordinates of the bodies, the coordinates of their mass center, as well as on the orbital stability according to Lyapunov. Additionally, the problems of the motion stability of bodies in the sense of Lagrange and Poisson are considered. It is proved that the gravitational field of a spherically symmetrically distributed medium transforms the considered motions, which are stable in vacuum, into unstable ones in the sense of Lagrange, Poisson, Lyapunov. Some numerical estimates related to instabilities are presented. They show that for popular pairs of stars and pairs of galaxies in an inhomogeneous medium, their additional displacements of the order of many millions of kilometers arise. When dark matter is taken into account, the displacements should not be an order of magnitude greater than the last estimate. The noted instabilities are a consequence of a secular displacement along the cycloid or deformed cycloid of the mass center of the system of two bodies and the absence of a barycentric coordinate system when taking into account the influence of the gravitational field of a spherically symmetrically distributed medium on the motion of bodies (the considered material system is not closed). It is proved that for this system, circular and elliptical orbits of bodies cannot exist. Instead of these orbits, we have “turns” shown in the figure given in the article. In planetary systems (such as the Solar System) immersed into an inhomogeneous medium, the displacements of the mass centers are negligible and therefore we can assume that circular and elliptical orbits can practically exist.

Keywords: Newtonian celestial mechanics, two bodies, inhomogeneous environment, center of mass of bodies, equations of motion of the center of mass, stability, instability of motion

For citation. Ryabushko A. P., Zhur T. A. Motion stability of the system of two bodies and their mass center in an inhomogeneous medium. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2023, vol. 67, no. 3, pp. 189–196 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-3-189-196

Введение. В [1] рассмотрена материальная система, состоящая из двух сферически симметричных тел A и B сравнимых масс m_a и m_b, движущихся внутри газопылевого шара радиусом R со сферически симметричным распределением плотности среды ρ в нем:

$$\rho=\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right),\ 0\le r\le R;\ \rho=0,\ R\le r<+\infty. \tag{1}$$

Для этой системы в [1] выведены уравнения движения тел A, B и их центра масс C_ρ, которые в ньютоновском приближении (НП) общей теории относительности (ОТО) имеют вид (см. в [1] формулы (22), (23), (27)):

$$m_a\ddot{a}_\rho^i=m_a\frac{d^2a_\rho^i}{dt^2}=-\frac{\gamma m_a m_b}{\left|\vec{a}_\rho-\vec{b}_\rho\right|^3}\left(a_\rho^i-b_\rho^i\right)-2\pi\gamma\rho_0 m_a\left(\frac{2}{3}-\frac{a}{2R}\right)a^i, \tag{2}$$

$$m_b\ddot{b}_\rho^i=m_b\frac{d^2b_\rho^i}{dt^2}=-\frac{\gamma m_a m_b}{\left|\vec{a}_\rho-\vec{b}_\rho\right|^3}\left(b_\rho^i-a_\rho^i\right)-2\pi\gamma\rho_0 m_b\left(\frac{2}{3}-\frac{b}{2R}\right)b^i, \tag{3}$$

$$\ddot{c}_\rho^i=\frac{d^2c_\rho^i}{dt^2}=\frac{\pi\gamma\rho_0}{(m_a+m_b)R}\left(m_a a a^i+m_b b b^i\right). \tag{4}$$

Напомним смысл входящих в уравнения (2)–(4) величин и значков. Динамические системы записаны в барицентрической декартовой системе координат $Ox^1x^2x^3$ при движении тел A и B в «пустоте» ($\rho_0=0$) и их координаты обозначены символами a^i и b^i, а так как движение тел плоское, то без ограничения общности за плоскость движения принята координатная плоскость Ox^1x^2, т. е. $x^3=0$. Поэтому значок «i» в уравнениях (2)–(4) принимает значения 1 и 2. Значок «ρ» у коренных букв a, b, c означает, что величины вычисляются при влиянии на движение тел ньютоновского гравитационного поля среды плотностью ρ из (1) ($\rho_0\ne 0$). В силу малости ρ уравнения (2)–(4) выведены при учете ρ только в первой степени. Итак, a^i, b^i, c^i – декартовы координаты тел A, B и их центра масс C в «пустоте», а $a_\rho^i, b_\rho^i, c_\rho^i$ – координаты A, B, C в среде (1). Радиусы-векторы $\vec{a}_\rho, \vec{b}_\rho$ имеют координаты a_ρ^i, b_ρ^i соответственно. Величины a и b являются расстояниями тел A и B до начала координат O, в котором находится центр масс C тел A и B в пустом пространстве ($\rho_0=0$). Система уравнений (2)–(4) при $\rho_0=0$ превращается в давно известную динамическую систему, решение которой дает классическую теорию движения двух тел: уравнение относительной орбиты в полярной системе координат (e – эксцентриситет линии второго порядка)

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}. \tag{5}$$

Координаты тел A и B

$$a^i=\frac{m_b}{m_a+m_b}x^i,\quad b^i=-\frac{m_a}{m_a+m_b}x^i,\quad x^1=r\cos\varphi,\quad x^2=r\sin\varphi. \tag{6}$$

Формулы для расстояний тел *A* и *B* до начала координат

$$a = \frac{m_b}{m_a + m_b} r, \quad b = \frac{m_a}{m_a + m_b} r \tag{7}$$

и координаты центра масс

$$c^i = 0. \tag{8}$$

Задача Коши для уравнения (4) в пустом пространстве ($\rho_0 = 0$) решена при начальных условиях: $c^i(t=0) = 0,\ \dot{c}^i(t=0) = 0,$ что приводит к решению (8).

Учет влияния гравитационного поля среды (1) на движение тел меняет законы их движения коренным образом. Действительно, как доказано в [1], интегрирование (4) с точностью до ρ_0 в первой степени, до e^2 и вековых членов приводит к параметрическим уравнениям траектории движения центра масс C_ρ тел *A* и *B* в среде (1):

$$C_\rho(c_\rho^1,\ c_\rho^2), \quad \begin{cases} c_\rho^1 = K_0(1 - \cos\varphi - e\varphi^2 + 4e^2\varphi\sin\varphi), \\ c_\rho^2 = K_0(\varphi - \sin\varphi + \dfrac{29}{6}e^2\varphi), \end{cases} \tag{9}$$

где

$$K_0 = \frac{\pi\rho_0 m_a m_b (m_a - m_b) p^5}{R(m_a + m_b)^4}, \tag{10}$$

а (9) представляет деформированную циклоиду.

Равенства (9), (10) показывают, что в среде (1) для двух тел *A* и *B* барицентрическая система координат (система отсчета) в НП ОТО *не существует.* Она существует только в частном случае, когда $m_a = m_b$. Тогда $K_0 = 0$ и центр масс C_ρ покоится в начале координат: $c_\rho^i = 0$.

Если тела движутся в пустоте по окружностям, то эксцентриситет $e = 0$ и из (5) следует $r = p$, расстояния *a* и *b* до центра масс *C* согласно (7) величины постоянные, а центр масс передвигается согласно (9) по циклоиде. В [2, рис. 3] изображены траектории тел A_1, A_2 (в нашей работе они обозначены буквами *A*, *B*) и их центра масс C_ρ в НП ОТО в среде (1): C_ρ передвигается по циклоиде, а тела *A*, *B* описывают витки-кружева (рисунок, который повторяет рис. 3 из работы [2]).

В общем случае координаты тел *A* и *B* в среде (1) в НП ОТО определяются формулами в соответствии с равенствами (5), (6), (9), (10):

$$a_\rho^i = \frac{m_b}{m_a + m_b} x^i + c_\rho^i, \quad b_\rho^i = -\frac{m_a}{m_a + m_b} x^i + c_\rho^i. \tag{11}$$

Траектории тел *A*, *B* и их центра масс C_ρ согласно уравнениям (11), (9) качественно похожи на траектории, изображенные в [2, рис. 3].

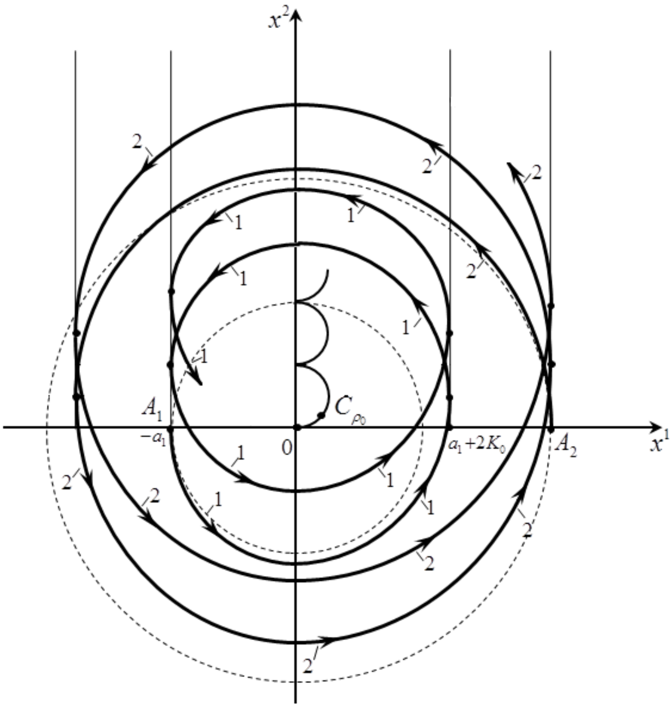
Параметрические уравнения орбит тел *A* и *B* (11) (φ – параметр) получены в [1] впервые и определяют неизвестные ранее закономерности движения тел в среде в ньютоновской небесной механике.

Эти неизвестные ранее закономерности состоят в следующем.

1. В среде (1) тела *A* и *B* не могут двигаться по кривым 2-го порядка (окружностям, эллипсам, гиперболам, параболам), что следует из (11) и (5)–(7), хотя в «пустоте» ($\rho = 0$) такие движения возможны.

2. Центр масс тел *A* и *B* в среде (1) движется по деформированной циклоиде (9), (10) при $e \neq 0$ (по циклоиде, если $e = 0$) и поэтому барицентрическая декартова система координат для системы $AB\rho$ – «тела + ρ из (1)» – не существует.

3. В случае $e = 0$ смещение центра масс тел будет происходить по циклоиде в первой четверти декартовой системы координат, если $m_a > m_b$, т. е. $K_0 > 0$ (на рисунке изображен именно этот случай). Если $m_a < m_b$, то $K_0 < 0$ и циклоида находится в третьей четверти, а витки уходят в отрицательном направлении оси Ox^2 (вниз), как и тела *A* и *B* на этих витках.



Поведение тел A_1, A_2 и их ЦМ в НП ОТО в неоднородной среде. Тело A_1 описывает витки, уходящие вверх и касающиеся вертикальных полупрямых $x^1 = -a_1$ и $x^1 = -a_1 + 2K_0$ в точках $(-a_1, 2n\pi K_0)$ и $(a_1 + 2K_0, (2n+1)\pi K_0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Аналогично: тело A_2 описывает уходящие вверх витки, касающиеся полупрямых $x^1 = a_2$ и $x^1 = -a_2 + \pi K_0$ в точках $(a_2, 2n\pi K_0)$ и $(-a_2 + \pi K_0, (2n+1)\pi K_0)$ соответственно. Пунктиром изображены окружности, по которым двигаются тела A_1 и A_2 в пустоте

The behavior of bodies A_1, A_2 and their CMs in NA of GTR in inhomogeneous medium. Body A_1 describes the turns going up and touching the vertical half-lines $x^1 = -a_1$ and $x^1 = -a_1 + 2K_0$ at the points $(-a_1, 2n\pi K_0)$ and $(a_1 + 2K_0, (2n+1)\pi K_0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Similarly, body A_2 describes the upward loops touching the half-lines $x^1 = a_2$ and $x^1 = -a_2 + \pi K_0$ at the points $(a_2, 2n\pi K_0)$ and $(-a_2 + \pi K_0, (2n+1)\pi K_0)$, respectively. The dotted line shows the circles, along which the bodies A_1 and A_2 move in the void

4. Если $0 < e \ll 1$, то имеем слабо деформированную циклоиду (9) и поведение тел A, B и их центра масс C_ρ мало отличающимся от случая, когда $e = 0$. Для значительных $e < 1$ деформированная циклоида (9) при $K_0 > 0$ смещается из первой во вторую четверть, что приводит к смещению витков (рисунок) влево и вверх, а при $K_0 < 0$ происходит смещение из третьей в четвертую четверть, что приводит к смещению витков вправо и вниз.

5. Имеем частный случай $m_a = m_b$, когда $K_0 = 0$ и центр масс тел C_ρ совпадает с началом координат и неподвижен, $e = 0$, циклоида исчезает, существует барицентрическая система координат.

6. К неизвестным закономерностям следует отнести вопросы устойчивости и неустойчивости новых решений (11) динамической системы (2)–(4).

Постановка задачи по исследованию устойчивости и неустойчивости решений системы (2)–(4).

З а д а ч а. *Выяснить, при каких условиях решения (9) и (11) динамической системы (2)–(4) будут устойчивыми в смысле Ляпунова, Лагранжа, Пуассона (определение этих понятий см., например, в [3] и указанных в нем источниках, а также в [4; 5]).*

Решение этой задачи представляет значительный теоретический и практический интерес в проблеме движения тел в небесной механике и еще никем не рассматривалось.

Решение сформулированной задачи начнем с исследования на устойчивость решения (9) системы (4). При интегрировании системы (4) решалась задача Коши при начальных условиях:

$$c_\rho^i(t=0) = 0, \quad \dot{c}_\rho^i(t=0) = 0. \tag{12}$$

В процессе получения решения (9), (10) использовался закон сохранения орбитального момента импульса (интеграл площадей)

$$r^2\dot{\varphi} = \sqrt{\gamma(m_a + m_b)p},$$

из которого следует связь времени t и угла φ такая, при которой выполняется соответствие $t = 0 \leftrightarrow \varphi = 0,$ т. е. из $t = 0$ следует $\varphi = 0$ и наоборот.

В случае круговых движений тел A и B ($e = 0$) из (5) следует $r = p,\ \dot{\varphi} = \sqrt{\gamma(m_a + m_b)/p^3} = \omega_0$ и легко устанавливаем связь $\varphi = \omega_0 t$. С точностью до вековых членов такая же связь ($\varphi = \omega_0 t$) осуществляется и при $e \neq 0$.

Решение (9), (10) называем *опорным*, а решение динамической системы центра масс тел A, B при других начальных условиях по сравнению с (12)

$$c_\rho^i(t=0) = c^i_{\rho_*}, \quad \dot{c}_\rho^i(t=0) = \dot{c}^i_{\rho_*}, \tag{13}$$

где числа $c^i_{\rho_*}$ и $\dot{c}^i_{\rho_*}$ достаточно малые величины, назовем *возмущенным* и представим его в виде

$$\overset{*}{c}{}^i_\rho = c^i_\rho + \Delta c^i_\rho, \tag{14}$$

где c^i_ρ определены формулами (9), (10), а Δc^i_ρ представляет возникающее при изменении начальных условий (12) на (13) возмущение опорного решения (9), (10).

З а м е ч а н и е. Так как координаты центра масс в среде $C_\rho\left(c^1_\rho,\ c^2_\rho\right)$ определяются формулой

$$c^i_\rho = \frac{m_a a^i_\rho + m_b b^i_\rho}{m_a + m_b}, \tag{15}$$

то возмущение начальных условий (13) нужно считать следствием возмущений начальных условий для координат тел $a^i_\rho,\ b^i_\rho,$ т. е. из

$$\begin{gathered} a_\rho^i(t=0) = a^i_{\rho_*}, \quad \dot{a}_\rho^i(t=0) = \dot{a}^i_{\rho_*}, \\ b_\rho^i(t=0) = b^i_{\rho_*}, \quad \dot{b}_\rho^i(t=0) = \dot{b}^i_{\rho_*} \end{gathered} \tag{16}$$

следует

$$\overset{*}{a}{}^i_\rho = a^i_\rho + \Delta a^i_\rho, \quad \overset{*}{b}{}^i_\rho = b^i_\rho + \Delta b^i_\rho \tag{17}$$

и согласно (15) следует (14). Получаем цепь равенств

$$\begin{aligned} \overset{*}{c}{}^i_\rho &= \frac{m_a \overset{*}{a}{}^i_\rho + m_b \overset{*}{b}{}^i_\rho}{m_a + m_b}; \\ c^i_\rho + \Delta c^i_\rho &= \frac{m_a(a^i_\rho + \Delta a^i_\rho) + m_b(b^i_\rho + \Delta b^i_\rho)}{m_a + m_b}; \\ \Delta c^i_\rho &= \frac{m_a \Delta a^i_\rho + m_b \Delta b^i_\rho}{m_a + m_b}. \end{aligned} \tag{18}$$

Последнее равенство в (18) устанавливает связь возмущений координат Δa^i_ρ и Δb^i_ρ тел A и B с возмущениями Δc^i_ρ координат c^i_ρ их центра масс C_ρ (14), что и было целью замечания.

Рассмотрим решение системы (4) при начальных условиях (13). Напоминаем, что решение (9), (10) получено при начальном условии (12) и значениях величин в правой части системы (4), относящихся к движению тел A и B в пустоте (5)–(8). Поэтому, подставив в (4) вместо c^i_ρ величину $\overset{*}{c}{}^i_\rho$ из (14) и решая задачу Коши при начальных условиях (13), находим:

$$\Delta c^i_\rho = \dot{c}^i_{\rho_*} t + c^i_{\rho_*}. \tag{19}$$

Следовательно, с оговоренной выше точностью разность решений Δc^i_ρ при разных начальных условиях (12) и (13) при $t \to \infty$ также стремится к бесконечности:

$$\lim_{t\to\infty}(\overset{*}{c}{}^i_\rho - c^i_\rho) = \lim_{t\to\infty}\Delta c^i_\rho = \lim_{t\to\infty}(\dot{c}^i_{\rho*} t + c^i_{\rho*}) = \infty. \tag{20}$$

Итак, возмущенное движение центра масс тел *A* и *B* (14) при сколь угодно малых возмущениях начальных условий (13) согласно (19) и (20) с течением времени будет значительно отличаться от опорного движения (9), (10), что означает неустойчивость движения по Ляпунову относительно координат c^i_ρ ньютоновского центра масс двух тел в неоднородной среде.

Координаты тел *A* и *B* определяются формулами (11), в которые в виде вторых слагаемых входят координаты центра масс c^i_ρ. Первые слагаемые в (11) являются координатами тел *A* и *B* в пустоте и вне зависимости от того устойчивы или неустойчивы они по Ляпунову, координаты тел *A* и *B* a^i_ρ и b^i_ρ будут неустойчивы по Ляпунову, так как неустойчивы c^i_ρ. Итак, движение тел *A* и *B* неустойчиво по Ляпунову относительно их координат a^i_ρ и b^i_ρ.

Как показано выше, переход от начальных условий (12) к начальным условиям (13) приводит к изменению начальных условий для координат тел (16), что вызывает возникновение возмущений координат тел *A*, *B* (17) и координат их центра масс (14), связанных (18).

Добавление к c^i_ρ в (9) и (11) величины Δc^i_ρ из (19) деформирует опорные орбиты (9) и (11). С течением времени в силу (20) деформации орбит увеличиваются. Следовательно, орбиты тел и их центра масс орбитально неустойчивы по Ляпунову.

Вопрос об устойчивости или неустойчивости решений (9), (11) в смысле Лагранжа и Пуассона в свете проведенных выше исследований решается достаточно просто.

По Лагранжу любое движение, происходящее в ограниченной области, считается устойчивым (см. [3]). В Солнечной системе, например, все эллиптические движения устойчивы в смысле Лагранжа. В нашем случае, согласно (9) и (11), координаты тел *A*, *B* и их центра масс C_ρ при движении тел в неоднородной среде согласно (19), (20) со временем неограниченно увеличиваются и, следовательно, траектории тел *A*, *B* и C_ρ выходят из любой конечной области – имеем неустойчивость по Лагранжу.

Траектория движения любого тела называется устойчивой по Пуассону (см. [3]), если траектория за бесконечное время проходит бесконечное число раз через достаточно малую окрестность своей начальной точки. Так как в нашем случае координаты точек *A*, *B*, C_ρ при $t \to \infty$ стремятся к бесконечности, то требование для устойчивости по Пуассону нарушается, т. е. траектории тел *A*, *B* и их центра масс C_ρ неустойчивы в смысле Пуассона.

Поставленная задача решена. Отметим только еще, что все выводы, полученные в процессе ее решения, справедливы и для частного случая, когда эксцентриситет $e = o$ (круговые движения).

Некоторые численные оценки. Представляет интерес оценка «силы» неустойчивости, т. е. оценка расстояния между точкой *M* на опорной траектории и точкой M^* на возмущенной траектории в некоторый один и тот же характерный момент времени *t*, когда, например, $t = T$ – период обращения тел *A* и *B* в пустоте ($\rho = 0$).

Рассмотрим траекторию центра масс C_ρ (9), (10), которая является опорной и в момент $t = 0$ ($\varphi = 0$) выходит из начала координат *O*. Задав начальные условия (13), находим в момент времени *t* изменение координат C_ρ на величину Δc^i_ρ, определяемую (19). Расстояние между точками *M* и M^* в момент времени *t* будет равно величине

$$M\,M^* = \left[\left(\Delta c^1_\rho\right)^2 + \left(\Delta c^2_\rho\right)^2\right]^{1/2} = \left[\left(\dot{c}^1_{\rho^*} t + c^1_{\rho^*}\right)^2 + \left(\dot{c}^2_{\rho^*} t + c^2_{\rho^*}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{21}$$

Формула (21) показывает, что величина расхождения траекторий зависит только от начальных условий (13) и времени *t*.

Пусть, например, тело *A* – Солнце, тело *B* – Юпитер. В момент $t = 0$ их центр масс находится в соответствии с уравнениями (9) в начале координат *O*, из которого выходит опорная траектория согласно начальным условиям (12). Возьмем возмущенную траекторию, приняв начальные условия (13), в которых $c^1_{\rho_*} = 1$ см, $\dot{c}^1_{\rho_*} = 1$ см $\cdot$ с$^{-1}$, $c^2_{\rho_*} = 0$, $\dot{c}^2_{\rho_*} = 0$, т. е. возмущение совершается в положительном направлении координатной оси. За время $t = T \approx 11{,}86$ лет $\approx 34{,}48 \cdot 10^7$ с – период обращения системы Солнце–Юпитер – расстояние $M\,M^*$ равно величине

$$M\,M^* = \dot{c}^1_{\rho_*}T + c^1_{\rho_*} \approx 1\text{см} \cdot \text{с}^{-1} \cdot 37{,}48 \cdot 10^7\,\text{с} + 1\,\text{см} \approx 3738\,\text{км}. \tag{22}$$

С увеличением времени t согласно формуле (21) расстояние $M\,M^*$ увеличивается. В нашем примере расстояние (22) за «n» обращений системы также увеличится в «n» раз.

Опираясь на (9), (10) нетрудно оценить расстояния, на которые центр масс C_ρ удаляется от начала координат за определенное время t_0. Для любой системы тел имеем за один период их обращения (периоду T соответствует $\varphi = 2\pi$):

$$OC_\rho = \left[(c^1_\rho)^2 + (c^2_\rho)^2\right]^{1/2} = |K_0| \left\{4\pi^2 e^2 + \left[2\pi + \frac{29}{3}\pi e^2\right]^2\right\}^{1/2}. \tag{23}$$

В [1] даны оценки величины K_0 для системы Солнце–Юпитер и систем двух звезд в среде (1), из которых видно, что для планетарных систем смещение центра масс C_ρ за один период T имеет порядок (10^{-5}–10^{-7}) см, т. е. смещение чрезвычайно малое, но для двойных звезд K_0 может достигать величины порядка (10^9–10^{12}) см и, следовательно, OC_ρ согласно (23) за один период обращения звезд может принимать значения порядка нескольких миллионов километров, и пара звезд может смещаться на такое же расстояние.

Общие заключительные замечания. В настоящее время считается доказанным существование темной материи во Вселенной, плотность которой значительно (в несколько раз) превышает плотность барионной (видимой) среды (см., напр., [6–8]).

Поэтому при учете плотности темной материи данные выше оценки также увеличиваются в несколько раз.

Так как двойные звезды существуют миллиарды лет, то их перемещения в галактиках, как и перемещения самих галактик в среде, оказываются весьма значительными, что должно приводить к сближениям и даже столкновениям различных пар звезд и пар галактик, влияя тем самым на формирование структуры галактик и их ансамблей. Эти процессы следует учитывать в вопросах космологии галактик и их совокупностей.

В заключение рассмотрим предельный случай задачи двух тел, когда масса одного из тел, например B, настолько мала, что не влияет на движение другого тела (ограниченная задача двух тел). Тогда динамическая система (2)–(4) для такой задачи существенно упрощается. В барицентрической системе координат, которая в рассматриваемом предельном случае существует, тело A находится в начале координат, так как $a = 0, m_b = 0, c^i_\rho = 0$ и уравнение (4) вырождается в нулевое тождество. Уравнение (2) также вырождается в нулевое тождество в силу $a^i = 0, m_b = 0$, $a^i_\rho = 0.$ Остается только уравнение (3), которое после сокращения на m_b (до предельного перехода $m_b \to 0$) приобретает вид и определяет движение пробного тела B:

$$\frac{d^2 b^i_\rho}{dt^2} = -\frac{\gamma m_a}{\left|\vec{b}_\rho\right|^3} b^i_\rho - 2\pi\gamma\rho_0\left(\frac{2}{3} - \frac{b}{2R}\right)b^i. \tag{24}$$

Если плотность ρ среды постоянна, то в (1) и (24) следует положить $R = \infty$, что приведет к исчезновению члена $\frac{r}{R}$ в (1) и члена $\frac{b}{2R}$ в (24), а ρ примет постоянное значение ρ_0, т. е. приходим к однородному распределению среды в пространстве. Этот случай рассмотрен в [9], а уравнение (24) обобщает уравнение (8) работы [9] на сферически симметричное распределение плотности среды (1).

Интегрирование (24) в случае $\rho = \rho_0 = \text{const}$ с точностью до вековых членов согласно [9] приводит к следующей орбите:

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos\varphi}{p}-\frac{2\pi\rho_0 p^2}{m_a}e\varphi\sin\varphi=\frac{1+e\cos\left[(1+\alpha_\rho^H)\varphi\right]}{p},\quad \alpha_\rho^H=\frac{2\pi\rho_0 p^3}{m_a},\tag{25}$$

т. е. происходит смещение периастра (перигелия) эллиптической орбиты, находящейся в однородной среде, на угол $\Delta\varphi_\rho^H=-2\pi\alpha_\rho^H$ за один ньютоновский период пробного тела *B*. Смещение, как видим, происходит в сторону, противоположную движению тела *B* по орбите (и релятивистскому смещению перигелия).

Обсуждаемое смещение приводит к тому, что движение в среде пробного тела уже в ньютоновской теории и тем более в ПНП ОТО является орбитально неустойчивым, а также неустойчивым относительно величин x^1, x^2, r, $\dot{x}^1$, $\dot{x}^2$, $\dot{r}$, но устойчивым относительно x^3, $\dot{x}^3$ по Ляпунову (подробнее см. [10, главы 3 и 4]).

Устойчивость орбиты (25) в смысле Лагранжа очевидна, так как пробное тело все время находится на конечном расстоянии от начала координат.

В смысле Пуассона движение пробного тела по закону (25) неустойчиво, так как орбита (25) с течением времени из-за смещения периастра не может пересекать достаточно малую окрестность исходной точки периастра.

Список использованных источников

1. Рябушко, А. П. Точки ρ-либрации в задаче трех тел / А. П. Рябушко, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 330–346. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-330-346
2. Рябушко, А. П. Движение системы двух тел и их центра масс в неоднородной среде / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 194–205. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-194-205
3. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В. К. Абалакин [и др.]. – М., 1976. – 865 с.
4. Себехей, В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел / В. Себехей. – М., 1982. – 656 с.
5. Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. – М., 1966. – 432 с.
6. Стражев, В. И. К тайнам Вселенной / В. И. Стражев. – Минск, 2006. – 160 с.
7. Лукаш, В. Н. Темная материя: от начальных условий до образования структуры Вселенной / В. Н. Лукаш, Е. В. Михеева // Успехи физических наук. – 2007. – Т. 177, № 9. – С. 1023–1028.
8. Питьев, Н. П. Ограничения на темную материю в Солнечной системе / Н. П. Питьев, Е. В. Питьева // Письма в астрономический журнал. – 2013. – Т. 39, № 3. – С. 163–172.
9. Рябушко, А. П. Релятивистские эффекты движения пробных тел в газопылевом шаре с притягивающим центром / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // Докл. Акад. наук БССР. – 1984. – Т. 28, № 9. – С. 806–809.
10. Рябушко, А. П. Проблема устойчивости движения тел в общей теории относительности / А. П. Рябушко. – Минск, 1987. – 112 с.

References

1. Ryabushko A. P., Zhur T. A. ρ-Libration point in the three body problem. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 330–346 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-330-346
2. Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. The motion of the system of two bodies and their center of mass in an inhomogeneous environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 194–205 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-194-205
3. Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebenikov E. A., Demin V. G., Ryabov Yu. A. *Reference guide to celestial mechanics and astrodynamic.* Moscow, 1976. 865 p. (in Russian).
4. Sebehey V. *Theory of Orbits: the Restricted Problem of three Bodies*. Moscow, 1982. 656 p. (in Russian).
5. Malkin I. G. *Motion stability theory.* Moscow, 1966. 432 p. (in Russian).
6. Strazhev V. I. *To the Secrets of the Universe*. Minsk, 2006. 160 p. (in Russian).
7. Lukash V. N., Mikheeva E. V. Dark matter: from initial conditions to structure formation in the universe. *Physics-Uspekhi*, 2007, vol. 50, no. 9, pp. 971–976. https://doi.org/10.1070/pu2007v050n09abeh006382
8. Pitjev N. P., Pitjeva E. V. Constraints on dark matter in the solar system. *Astronomy Letters*, 2013, vol. 39, no. 3, pp. 141–149. https://doi.org/10.1134/s1063773713020060
9. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. Relativistic Effects of the Motion of Test Bodies in the Gas-Dust Ball with an Attractive Center. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR*, 1984, vol. 28, no. 9, pp. 806–809 (in Russian).
10. Ryabushko A. P. *The Problem of Stability of Motion of Bodies in the General Theory of Relativity*. Minsk, 1987. 112 p. (in Russian).

Информация об авторах

Рябушко Антон Петрович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220141, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru.

Жур Татьяна Антоновна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru.

Information about the authors

Ryabushko Anton P. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru.

Zhur Tatyana A. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor. Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru.