



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
www.tul.cz

Technická univerzita v Liberci
Fakulta strojní
Katedra energetických zařízení

Studijní program: doktorský P2301 / Strojní inženýrství
Obor: 3901V003 / Aplikovaná mechanika
Zaměření: Mechanika tekutin a termodynamika

Ing. Kateřina Horáková

Autoreferát dizertační práce

Numerická simulace magnetohydrodynamických toků
(Numerical simulation of magnetohydrodynamic flows)

Vedoucí dizertační práce: doc. Ing. Karel Fraňa, Ph.D.

Státní doktorská zkouška vykonána dne: 19. 10. 2009

V Liberci, leden 2014



Technická univerzita v Liberci
Fakulta strojní
Katedra energetických zařízení

TÉMA: Numerická simulace magnetohydrodynamických toků

ANOTACE: (stručný výtah náplně, způsob řešení a výsledků)

Tato práce se zabývá účinky rotačního magnetického pole na elektricky vodivou taveninu v nádobě ve tvaru válce a krychle. Je zde odvozen analytický vztah pro sílu, která uvádí taveninu do pohybu, tzv. Lorentzovu sílu a odzkoušen vliv jednotlivých parametrů výsledného vztahu na velikost této síly. Numerická simulace proudění je provedena v komerčním softwaru Ansys Fluent s použitím nadstavbového modulu MHD a výsledky jsou porovnány s nekomerčním softwarem NS-FEM3D.

THEME: Numerical simulation of magnetohydrodynamic flows

ANNOTATION: (short summary of content, methods used and results)

This work deals with effects of rotating magnetic field on an electrically conductive melt inside a cylindrical and cuboid container. An analytical formula of the force which moves with the melt (so-called Lorentz force) is derived. Effects of formula parameters are tested. Numerical simulation of the flow is performed on commercial software Ansys Fluent with an add-on module MHD. Fluent results are compared with data from non-commercial software NS-FEM3D.

KLÍČOVÁ SLOVA: Ansys Fluent, Lorentzovy síly, Magnetohydrodynamika

KEY WORDS: Ansys Fluent, Lorentz forces, Magnetohydrodynamics

Obsah

| | | |
|-----|---|--------|
| 1 | Úvod..... | - 5 - |
| 2 | Magnetohydrodynamika..... | - 7 - |
| 2.1 | Využití MHD..... | - 7 - |
| 2.2 | Taveniny využitelné pro experimenty a numerické simulace..... | - 8 - |
| 2.3 | Taveniny pro praktické využití MHD..... | - 8 - |
| 2.4 | Pozitivní vliv RMP na taveninu..... | - 9 - |
| 3 | Odvození veličin magnetického pole..... | - 10 - |
| 3.1 | Princip elektromagnetického míchání taveniny..... | - 10 - |
| 3.2 | Skalární potenciál..... | - 10 - |
| 3.3 | Lorentzovy síly – resp. magnetické síly..... | - 13 - |
| 4 | Zobrazení výsledků a studium parametrů..... | - 14 - |
| 4.1 | Skalární potenciál..... | - 14 - |
| 4.2 | Lorentzova síla..... | - 15 - |
| 4.3 | Závislost azimutální složky Lorentzovy síly na velikosti nádoby..... | - 16 - |
| 4.4 | Závěr ke studiu parametrů výsledného analytického vzorce..... | - 17 - |
| 5 | Lorentzovy síly v krychli z kódu NS-FEM3D..... | - 19 - |
| 5.1 | Kód NS-FEM3D..... | - 19 - |
| 5.2 | Lorentzovy síly v normální, šikmé a horizontální rovině..... | - 19 - |
| 5.3 | Shrnutí Lorentzových sil v nádobě tvaru krychle..... | - 21 - |
| 6 | Využití vzorce pro válcovou nádobu na nádobu ve tvaru krychle..... | - 22 - |
| 6.1 | Kontury Lorentzových sil z analytického vzorce pro krychli..... | - 22 - |
| 6.2 | Porovnání výsledků z analytického vzorce s výpočetním kódem NS-FEM3D..... | - 23 - |
| 6.3 | Čím jsou chyby způsobeny..... | - 24 - |
| 6.4 | Tlumičí funkce..... | - 25 - |
| 6.5 | Shrnutí Lorentzových sil..... | - 26 - |
| 7 | Numerická simulace proudění pomocí softwaru Ansys Fluent..... | - 28 - |
| 7.1 | Válcová nádoba..... | - 28 - |
| 7.2 | Krychlová nádoba..... | - 31 - |
| 7.3 | Závěr k výpočtům MHD ve Fluentu..... | - 34 - |
| 8 | Frekvenční a vlnová spektra proudění..... | - 35 - |
| 8.1 | Vlnová spektra úseček..... | - 35 - |
| 8.2 | Shrnutí vlnových spekter..... | - 37 - |
| 9 | Závěr..... | - 38 - |

1 Úvod

Tématem práce je popis magnetohydrodynamických toků taveniny v nádobě. Pohyb taveniny je generován rotačním magnetickým polem. Pro praktické využití magnetického pole, např. při výrobě polovodičů, je velice důležité předem vědět, jak se bude tavenina pod vlivem magnetického pole chovat, jaké proudění toto pole vyvolá, jaké bude primární a sekundární proudění atd. Bez podrobného výzkumu nelze magnetické pole na taveninu efektivně použít. Má práce navazuje na odborný výzkum týmů z Německa, z Lotyšska, Izraele, Francie a dalších států. Výsledky výzkumu za poslední léta jsou zde shrnuty a jsou doplněny o další poznatky, zejména o silové účinky na taveninu v krychlové nádobě, které se v žádné práci neobjevily.

Práce se dělí na sedm hlavních částí, které na sebe vzájemně navazují či se doplňují. V první části je představen pojem magnetohydrodynamika a je popsáno, na co se magnetické pole v technické praxi využívá. Dále je vytvořen přehled odborných publikací zabývajících se obecně magnetohydrodynamikou, použitím magnetického pole a stav výzkumu v jiných odborných týmech. Krátce je uvedeno, jaký je stav výzkumu magnetohydrodynamiky v oblasti experimentů a jak magnetické pole ovlivňuje strukturu taveniny. Je zde popsáno, jaké taveniny se hodí pro experimentální (resp. numerický) výzkum a jaké taveniny se hodí pro praktické využití.

V druhé části je popsán silový účinek rotačního magnetického pole na taveninu uvnitř válcové nádoby. Je proveden systém odvození, který vede přes magnetickou indukci rotačního magnetického pole a výpočet skalárního potenciálu až na analytický vztah pro Lorentzovu sílu ve válcové nádobě. Jedná se o sílu, která uvádí taveninu do pohybu.

Ve třetí části jsou zobrazeny kontury hledaných fyzikálních veličin z druhé kapitoly (skalárního potenciálu a Lorentzovy síly) a je zde zkoumán vliv parametrů výsledného analytického vztahu pro Lorentzovu sílu. Je sledován vliv velikosti nádoby, vliv počtu členů teoreticky nekonečné řady a vliv magnetické indukce a Taylorova čísla na silový moment. Výsledky jsou porovnány s publikovanými výsledky jiných autorů odborných článků.

Ve čtvrté části jsou zpracovány výsledky z nekomerčního CFD kódu zvaného NS-FEM3D pro různá Taylorova čísla. Popisovány jsou zde silové účinky rotačního magnetického pole na taveninu v nádobě, tzn. časově středované Lorentzovy síly. Tyto výsledky slouží též k porovnávání výsledku s analytickým vzorcem v další části (části 5).

V páté části práce je výsledný analytický vztah pro Lorentzovu sílu ve válcové nádobě po úpravě použit na nádobu ve tvaru krychle. Výsledky jsou porovnány s Lorentzovými silami

z výpočetního kódu NS-FEM3D. Je určena chyba řešení, určen zdroj chyby a pro nejproblematictější místa navržena tlumicí funkce.

V šesté části je numerická simulace pohybu taveniny v nádobě provedena jinou, alternativní metodou, a to pomocí komerčního softwaru Ansys Fluent. Simulace je provedena pro válcovou a krychlovou nádobu. Je sledováno časově středované rychlostní pole (primární i sekundární proudění) a Lorentzovy síly.

V poslední části je proudění vyvolané silovými účinky rotačního magnetického pole popsáno i pomocí frekvenčních a vlnových energetických spekter. Všechna data jsou získána v kódu NS-FEM3D. Nejdříve jsou zpracovávány výsledky z DNS (jemnější a hrubší síť) a dále je již využito turbulentního modelu DDES. Matematické modely jsou popsány v publikacích [1, 2]. Některé výsledky jsou zpracovány pro různá Taylorova čísla.

Část práce předpokládá válcovou nádobu, která je jednodušší na testování, na popis účinku pole na tekutinu a jednodušší je i na numerickou simulaci. Nevýhoda tohoto předpokladu je v tom, že nemá tak časté praktické použití. V praxi je mnohem častější hranatý tvar nebo podobný hranatému tvaru. Při numerické simulaci pak v tomto případě vzniká problém s definicí magnetických sil, simulace se komplikují v důsledku narušení symetrie, což má vliv i na stabilitu proudu apod.

Analytický vztah pro časově středovanou Lorentzovu sílu v krychlové nádobě je důležitý proto, že případným zakomponováním do výpočetního kódu NS-FEM3D (nebo do jiného výpočetního kódu) by se dosáhlo výrazné úspory času výpočtu. Dosud je totiž výpočet externích sil proveden řešením složitých parciálních diferenciálních rovnic, a tím je výpočetní čas kódu poměrně dlouhý. Při využití analytického vztahu by zde odpadla nutnost řešit parciální diferenciální rovnice pro výpočet skalárního potenciálu. Tento krok je velice náročný, protože vyžaduje větší počet iteračních kroků, viz [2].

Pro praktické využívání magnetického pole je důležité znát, jaké proudění taveniny tyto silové účinky magnetického pole vyvolávají. Cílem je samozřejmě to, aby pohyb taveniny pozitivně ovlivňoval strukturu odlitků.

2 Magnetohydrodynamika

Magnetohydrodynamika (MHD) je nauka o chování elektricky vodivé tekutiny (kapaliny nebo plazmy) v magnetickém poli. Vzájemný pohyb vodivé tekutiny a magnetického pole indukuje elektrické pole a proudy. Elektrické proudy budí ve svém okolí magnetické pole, které může svými účinky zpětně ovlivňovat pohyb vodivé tekutiny.

Magnetohydrodynamické jevy v tekutých kovech jsou vyvolány vnějším, zpravidla časově či prostorově proměnným elektromagnetickým polem, jehož rozložení je popsáno Maxwellovými rovnicemi. Tím se v elektricky vodivé tavenině indukují vířivé proudy, které kromě jejich interakce s budícím magnetickým polem generují silové účinky působící na částice taveniny. Tyto účinky jsou příčinou proudění, které je popsáno Navier – Stokesovou rovnicí a rovnicí kontinuity [3].

2.1 Využití MHD

První zmínky o MHD se objevovaly v souvislosti s astrofyzikou a geofyzikou. V padesátých letech se zájem o MHD zaměřil hlavně na fyziku plazmatu a řízení termonukleární fúze. Později se zájem o MHD rozšířil i do průmyslových odvětví.

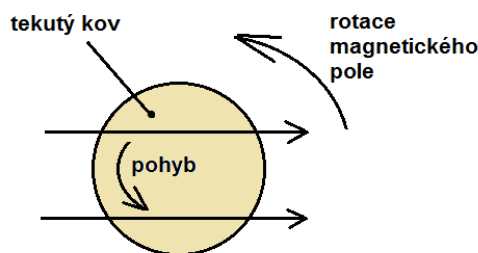
Obecně lze magnetické pole využít pro:

1. potlačení pohybu – magnetické brzdění (hlavně statické magnetické pole) [4]
2. generování pohybu.

První případ je použit např. při *kontinuálním lití oceli* [4, 5, 6, 7], kdy statické pole o vysoké intenzitě potlačuje pohyb taveniny.

Druhý případ využívá rotační magnetické pole (RMP) nebo přímo navedení elektrického proudu do vodivé taveniny, čímž způsobí její pohyb. RMP používá např. pro *bezkontaktní elektromagnetické míchání taveniny* v metalurgii a k růstu krystalů, kde slouží jak k homogenizaci různých kovových slitin, tak i čistých kovů během odlévání, kdy pohyb taveniny pozitivně ovlivňuje metalografickou strukturu odlitků. Dále se RMP velice často používá při *kontinuálním lití oceli*, kde odstraňuje nebo zmírňuje běžně vznikající (bez RMP) nehomogenity a segregace. Další možností, jak způsobit pohyb elektricky vodivé taveniny, je přivést elektrický proud přímo do taveniny. Nejjednodušším případem je *elektromagnetické čerpadlo* [4], které našlo ideální uplatnění v rychlých množivých reaktorech, kde je použito pro čerpání tekutého sodíkového chladiva procházejícího skrz reaktorové jádro [8]. Více o každé metodě – viz [8].

Nyní je magnetické pole v technické praxi využíváno např. v metalurgii pro ohřev, čerpání, míchání nebo levitaci tekutého kovu [8, 9].



obr. 1 Příklad magnetického míchání taveniny [3], [8]

Na obr. 1 je jedna z možností magnetického míchání taveniny. Je zde využito principu indukčního motoru. Tavenina, která má být roztáčena, je umístěna do rotačního magnetického pole, přebírá funkci rotoru a proudí v obvodovém směru [8].

Magnetické pole je využíváno i u *elektromagnetických dávkovačů tekutých kovů*, které zajišťují odlévání přesných dávek tekutých kovů a využívají se např. při vstřikování do forem atd. Více o této metodě je např. v publikacích [3, 8, 9].

2.2 Taveniny využitelné pro experimenty a numerické simulace

Možné taveniny využitelné pro experimenty v MHD jsou: rtuť, gallium, eutektická slitina InGaSn a Woodova slitina, a to proto, že se jedná o kovy s nízkou teplotou tání. Analýzy ukázaly, že taveniny nejvýhodnější pro simulace MHD proudění jsou eutektická tavenina InGaSn a gallium [10]. Tavenina InGaSn je při pokojové teplotě tekutá, tuhne při teplotě 10,5 °C. Z tohoto důvodu se skvěle hodí na experimentální ověřování. Během samotného experimentu bývá volná hladina chráněna před oxidací slabým vodným roztokem HCl, jinak by se vytvářely oxidy gallia [11].

2.3 Taveniny pro praktické využití MHD

Pro praktické využití MHD by se však samozřejmě využívaly taveniny (slitiny) o mnohem vyšší teplotě tání a tuhnutí. Chování této slitiny by však bylo obdobné jako zde zkoumané. Zachována však musí být stejná hodnota Taylorova čísla [12].

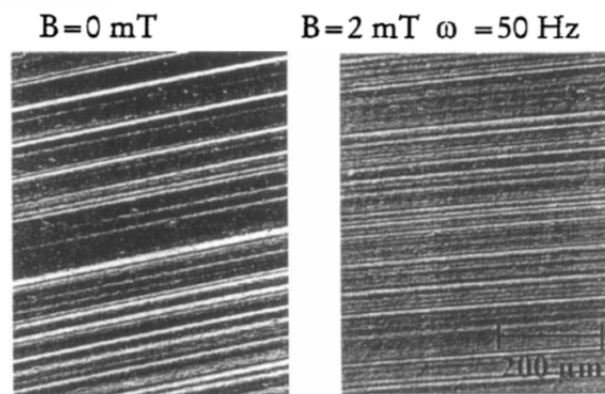
Obecně se dá říci, že tato slitina by neměla mít příliš velkou hustotu (měla by být lehčí) a jednotlivé složky, ze kterých bude slitina složená, by měly mít podobnou hustotu. Při velmi odlišných hustotách by složka s výrazně větší hustotou měla tendenci klesat, sedimentovat. Toto však platí v metalurgii obecně.

Polovodičové taveniny jsou díky jejich vysoké elektrické vodivosti velice vhodné na řízení proudění s použitím magnetického pole [13]. Příklad tavenin důležitých pro polovodiče, u kterých je možné využít MHD, je: křemík Si, germanium Ge, arsenid gallia GaAs, telurid kadmia CdTe atd. [13, 14, 15].

2.4 Pozitivní vliv RMP na taveninu

Homogenita a strukturální dokonalost u výroby monokrystalu z taveniny velice záleží na přenosu tepla a hmoty v tekuté fázi. Kontrola a řízení přenosu tepla a hmoty je tedy velmi důležitým krokem ke správnému pochopení a využití RMP u výroby monokrystalů.

Na obr. 2 je zobrazen řez materiálem – gallií, který měl legující prvek germanium. Obrázek vlevo ukazuje řez materiálem BEZ použití magnetického pole a obrázek vpravo při použití magnetické pole o magnetické indukci 2 mT a frekvenci 50 Hz. Zlepšení struktury je patrné. Při použití RMP je rýhování vlivem vztlaku redukováno a fázové rozhraní je plošší. Výsledky převzaty z publikace Dolda a Benze [13].



obr. 2 Mikrosegregace při neuzítí a užítí RMP u gallia (s legujícím prvkem germanium) [13]

Obecně podporuje elektromagneticky řízená konvekce v tavenině vytváření zárodků krystalu a růst rovnoosých krystalů (krystaly jako sněhové vločky) na úkor stromčkovitých (dendritických, jako jehličnatý strom), které jsou větší, anizotropické a obecně nevhodné [8]. V technické praxi je produkce taveniny s rovnoosou krystalovou strukturou velice žádaná, protože zlepšuje homogenitu výsledné slitiny a také mechanické vlastnosti. Na druhou stranu řízená konvekce může zvětšovat pohyb částic slitiny, které mají na svědomí vznik makrosegregací, obzvláště u slitin, které mají mnoho přísad. Běžně je rovnováha koncentrace přísad v primárním krystalu menší, což vede k formování tenké vrstvičky podél tuhacího přechodu. Dostatečně silné proudění ale může tuto vrstvu oslabovat a způsobovat tak významnou segregační zónu během tuhnutí. Sekundární proudění v tavenině dále dopravuje tyto přísady do oblasti středu taveniny, zatímco poblíž vnějších stěn je těchto přísad málo [12]. Jedním ze způsobů, jak odstraňovat tyto makrosegregace (pokud je dosaženo takto vysoké intenzity magnetického pole), je využití pulzačního magnetického pole [12].

I když při proudění taveniny v nádobě vlivem rotačního magnetického pole jsou dominantní azimutální rychlosti, i sekundární proudění hraje významnou roli při promíchávání a tuhnutí taveniny. Sekundární proudění ovlivňuje např. tepelné toky a tvar fázového rozhraní při tuhnutí taveniny. Nucená konvekce způsobená magnetickým polem rychleji ochlazuje tekutou fázi a následně dříve dosáhne teploty likvidu, tedy teplota začátku krystalizace [16].

3 Odvození veličin magnetického pole

3.1 Princip elektromagnetického míchání taveniny

Princip elektromagnetického míchání je stejný jako princip asynchronního motoru, kdy základem činnosti je vytvoření rotačního magnetického pole. Toto pole vznikne průchodem střídavého třífázového proudu vinutím statoru (induktoru). V obvodu střídavého proudu vzniká kolem cívky proměnné magnetické pole, které v cívce indukuje elektromotorické napětí [17]. Magnetické pole indukuje v rotoru (tavenině) napětí a vzniklý proud vyvolává sílu otáčející rotorem (taveninou).

3.2 Skalární potenciál

Proudění je uvažováno jako izotermické (pro dále zkoumanou intenzitu magnetického pole je proudění vzniklé vlivem vztaku potlačeno – viz např. [18]), nestacionární a nestlačitelné.

Taylorovo číslo je definováno vztahem $Ta = \frac{\sigma \cdot \varpi \cdot B_0^2 \cdot L^4}{2 \cdot \rho \cdot \nu^2}$, kde B_0 je amplituda magnetické

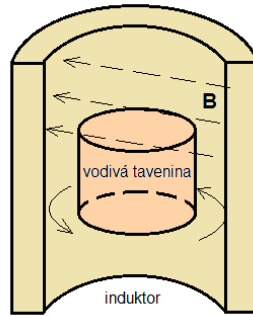
indukce, ϖ je úhlová frekvence magnetického pole, L je polovina rozměru podstavy nádoby, ρ je hustota tekutiny, ν kinematická viskozita a σ je elektrická vodivost materiálu.

Celkový pohyb taveniny uvnitř válcové nádoby (vlivem RMP) závisí (pro $K \ll 1$) pouze na magnetickém Taylorově čísle a samozřejmě na poměru $Z = \frac{H}{2R}$. Nádoba je uvažována

s elektricky izolovanými stěnami, tavenina uvnitř nádoby je elektricky vodivá, která je roztáčena vlivem rotačního magnetického pole o magnetické indukci (uvedeno v cylindrických souřadnicích):

$$\mathbf{B} = B_0 \cdot \sin(\varphi - \varpi \cdot t) \cdot \mathbf{e}_r + B_0 \cdot \cos(\varphi - \varpi \cdot t) \cdot \mathbf{e}_\varphi \quad (1)$$

V tomto vztahu (rce 1) jsou \mathbf{e}_r a \mathbf{e}_φ jednotkové vektory ve směru radiálním, resp. azimutálním, ϖ je úhlová frekvence pole a B_0 je amplituda magnetického pole. Magnetická indukce má jen složky B_r a B_φ , protože se předpokládá, že vertikální velikost dvoupólového induktoru je větší než výška taveniny, resp. výška nádoby. Dvě složky B_φ a B_r odpovídají i pro reálné případy [19].



obr. 3 Náčrtek induktoru rotačního magnetického pole s dutinou konečné délky

Vektorový potenciál \mathbf{A} se zjistí z rovnice $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}$ (2)

Po rozepsání do složek, rozdělení složek vektorů do směrů cylindrických souřadnic a integraci se dojde na výsledný vektorový potenciál: $\mathbf{A} = -B_0 \cdot r \cdot \cos(\varphi - \varpi \cdot t) \cdot \mathbf{e}_z$ (3)

Intenzita elektrického pole se vypočítá ze vztahu: $\mathbf{E} = -(\nabla \Phi_{\text{rot}} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})$. (4)

Z důvodu tzv. skin efektu se sleduje bezdimenzionální parametr (bezrozměrná frekvence) $K = \mu \cdot \sigma \cdot \varpi \cdot R^2$ (μ je magnetická permeabilita, σ je elektrická vodivost a ϖ je úhlová frekvence magnetického pole). Pokud platí, že bezdimenzionální parametr $K \ll 1$, magnetické pole (viz rce 1) proniká celým objemem taveniny beze změny.

Pro $K \ll 1$ lze skalární potenciál $\Phi_{\text{rot}}(r, \varphi, z, t)$ rozložit do 2 částí [20]:

$$\Phi_{\text{rot}}(r, \varphi, z, t) = \Phi_1(r, z) \cdot \sin(\varphi - \varpi \cdot t) + \Phi_2(r, z) \cdot \cos(\varphi - \varpi \cdot t) \quad (5)$$

Předpokládá se, že proudění v jádře nádoby vytváří pouze časově středovaná síla, tzn., že je nezávislé na fázi a také to znamená, že je síla *axisymetrická*. Na základě toho se dá předpokládat, že i časově středované rychlostní pole bude *axisymetrické*. Proudová hustota \mathbf{j} se dle Ohmova zákona pro pohybující se médium vypočítá [20]

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6)$$

Protože se však předpokládá nízká magnetická indukce a nízká frekvence magnetického pole, můžeme využít pro výpočet proudové hustoty určité zjednodušení. Magnetické pole ovlivňuje pohyb taveniny, ta ale zpětně neovlivňuje (nebo jen velice málo) magnetické pole. Člen vektorového součinu rychlosti proudění a magnetické indukce (v rovnici 6) lze zanedbat a použít redukovaný Ohmův zákon: $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$. (7)

$$\text{Pomocí rovnice } \nabla \cdot \mathbf{j} = \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (8)$$

což je podmínka kontinuity elektrického proudu (absence zdroje elektrického střídavého proudu) [8], lze vyjádřit složky proudové hustoty, kde jediné neznámé jsou derivace skalárního potenciálu v prostoru.

Po dalších úpravách se dojde na vztahy:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) \cdot \Phi_1 = 0 \quad (9)$$

$$(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}) \cdot \Phi_2 = 0 \quad (10)$$

Řešení rovnic 9 a 10 je poměrně obtížné, protože Φ_1 i Φ_2 jsou funkce dvou proměnných – r a z (viz rovnice 5). Fourierovou metodou separace proměnných se předpokládá, že lze řešení rovnice 9 (resp. rovnice 10) rozdělit na část závislou pouze na r a druhou pouze na z [21],

$$\text{tedy: } \Phi(r, z) = R(r) \cdot Z(z) \quad (11)$$

Další výpočty budou uvedeny pouze pro výpočet Φ_1 , protože ten je spojený s azimutální složkou proudění. Φ_2 je spojený s meridionálním prouděním a je možné ho zanedbat [20].

Rovnice 11 se dosadí do rovnice 10, a ta se následně rozdělí na část závislou pouze na r a část závislou pouze na z , tedy separují se proměnné (rovnice 12).

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{R'}{R} + \frac{R''}{R} - \frac{1}{r^2} = -\frac{Z''}{Z} \quad (12)$$

Rovnici 12 lze splnit tak, že se obě části budou rovnat stejné separační konstantě. Tato konstanta je $-m^2$ [21, 22, 23].

Rovnice 12 se tedy rozdělí na dvě části a každá z rovnic se teď vyřeší zvlášť. Část závislá pouze na r se po úpravě řeší pomocí Besselových funkcí. Část závislá pouze na z se převede na diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Tato rovnice se řeší pomocí charakteristické rovnice.

Poté se obě řešení vynásobí mezi sebou, a výsledný skalární potenciál pak je ve tvaru nekonečné řady:

$$\Phi(r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} J_1(m_i \cdot r) \cdot (K_{1i} \cdot \cosh(m_i \cdot z) + K_{2i} \cdot \sinh(m_i \cdot z)) \quad (13)$$

Dále je nutno dosadit okrajové podmínky. Protože se uvažují elektricky izolované stěny, kdy není umožněn průstup proudové hustoty skrz stěny, okrajová podmínka je: $j_n = 0$, (14)

$$Z \text{ toho plyne, že na svislých stěnách (} r = R) \text{ je } j_r = 0 \quad (15)$$

$$\text{a na horní a dolní podstavě (} z = 0, H) \text{ je } j_z = 0. \quad (15)$$

1. a 2. integrační konstanta pak vychází:

$$K_{1i} = \frac{K_{2i} \cdot (1 - \cosh(m_i \cdot H))}{\sinh(m_i \cdot H)} \quad (17)$$

$$K_{2i} = \frac{2}{m_i \cdot (m_i^2 - 1) \cdot J_1(m_i)} \quad (18)$$

Po dosazení vychází výsledný skalární potenciál:

$$\Rightarrow \Phi(r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cdot J_1(m_i \cdot r)}{m_i \cdot (m_i^2 - 1) \cdot J_1(m_i)} \cdot \frac{\cosh(m_i \cdot z) - \cosh(m_i \cdot (H - z))}{\sinh(m_i \cdot H)} \quad (19)$$

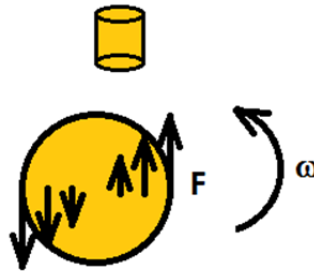
Aplikací okrajové podmínky na plášť válce se dostane vztah pro výpočet konstant – kořenů m .

$$\frac{\partial J_1(m)}{\partial m} = J_1(m)' = 0$$

Řešení této rovnice lze provést buď přibližně pomocí grafu (vykreslit křivku $J_1(m_i)$ a zjistit průsečíky s $y = 0$), nebo zjistit kořeny početně. V této práci byly kořeny zjištěny graficky pomocí MathCadu – pro kontrolu a následně analyticky podle [24].

3.3 Lorentzovy síly – resp. magnetické síly

I v jednoduchých tvarech nádob generuje RMP komplikované pohyby, je tedy třeba vyjádřit Lorentzovu sílu, aby bylo možné RMP lépe a efektivně využít.



obr. 4 Lorentzova síla

Lorentzovy síly (na obr. 4 označeny F) se vypočítají jako vektorový součin proudové hustoty a magnetické indukce: $\mathbf{f}_{\text{rot}} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$. (20)

Elektromagnetická síla je dle rovnice 20 dána součinem dvou proměnných, které jsou obecně závislé na čase. Výsledná síla proto obsahuje složku časově středovanou a oscilační. Předpokládá se však, že frekvence rotačního magnetického pole je dostatečně velká, aby mohla být oscilační složka (následkem setrvačnosti) zanedbána – vzhledem k časově středované složce [20]. Protože se tedy sleduje pouze časově zprůměrovaná složka Lorentzových sil, provede se časové zprůměrování přes jednu periodu.

$$\overline{\mathbf{f}_{\text{rot}}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \mathbf{f}_{\text{rot}} d\omega t \quad (21)$$

Jediná nenulová složka Lorentzových sil je proto ta v azimutálním směru. Radiální a axiální složka vychází nulová. Výpočet sil pouze se skalárním potenciálem Φ_1 je naprosto dostačující, dle publikace [25] nevede výpočet i se složkou Φ_2 k významným změnám výsledku.

Výsledný vztah pro časově průměrovanou Lorentzovu sílu v azimutálním směru je:

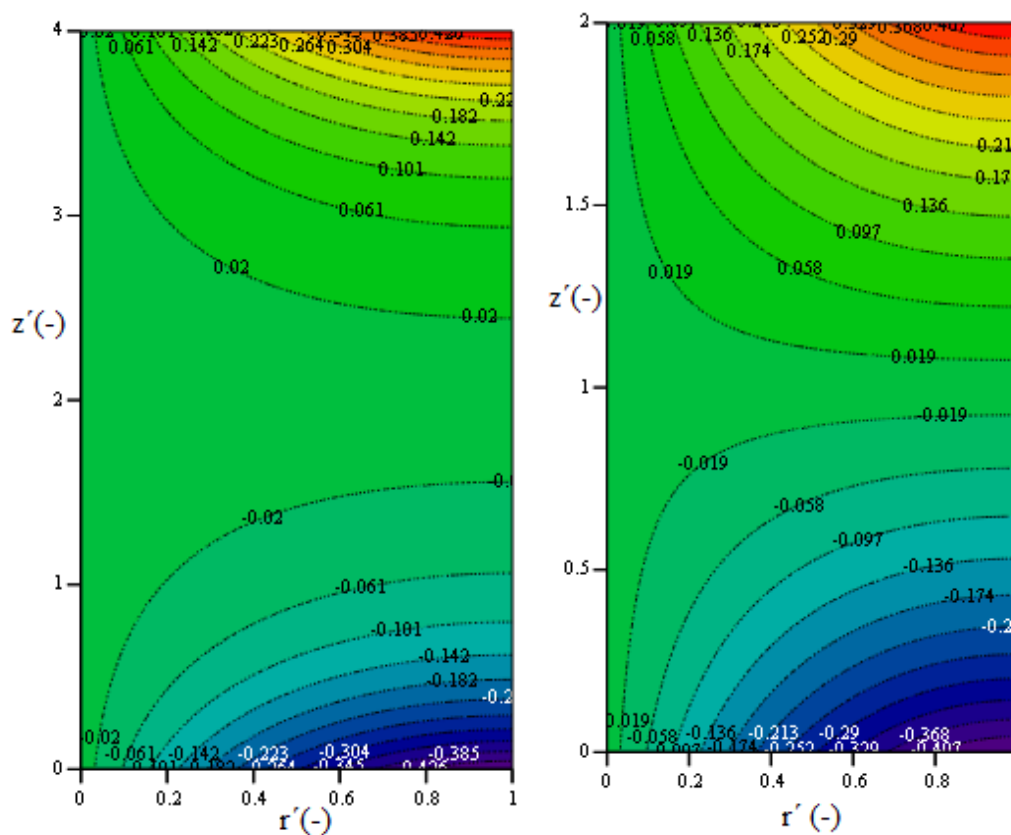
$$\overline{\mathbf{f}_{\text{rot } \varphi}} = \frac{\sigma \cdot B_0^2 \cdot \omega}{2} \cdot \left(r - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cdot J_1(m_i \cdot r)}{(m_i^2 - 1) \cdot J_1(m_i)} \cdot \frac{\sinh(m_i \cdot z) + \sinh(m_i \cdot (H - z))}{\sinh(m_i \cdot H)} \right) \quad (22)$$

Rovnice analytického vyjádření Lorentzových sil v azimutálním směru (rovnice 22) je ve shodě s publikovanými výsledky jiných autorů, viz např. [26, 27, 28, 29].

4 Zobrazení výsledků a studium parametrů

4.1 Skalární potenciál

Na obr. 5 jsou zobrazeny kontury skalárního potenciálu u válcové nádoby. Maxima skalárního potenciálu se vyskytují u vnějšího okraje horní podstavy, minima se vyskytují také u vnějšího okraje, ovšem u dolní podstavy. Toto rozložení skalárního potenciálu je ve shodě s již publikovanými výsledky jiných autorů [30].



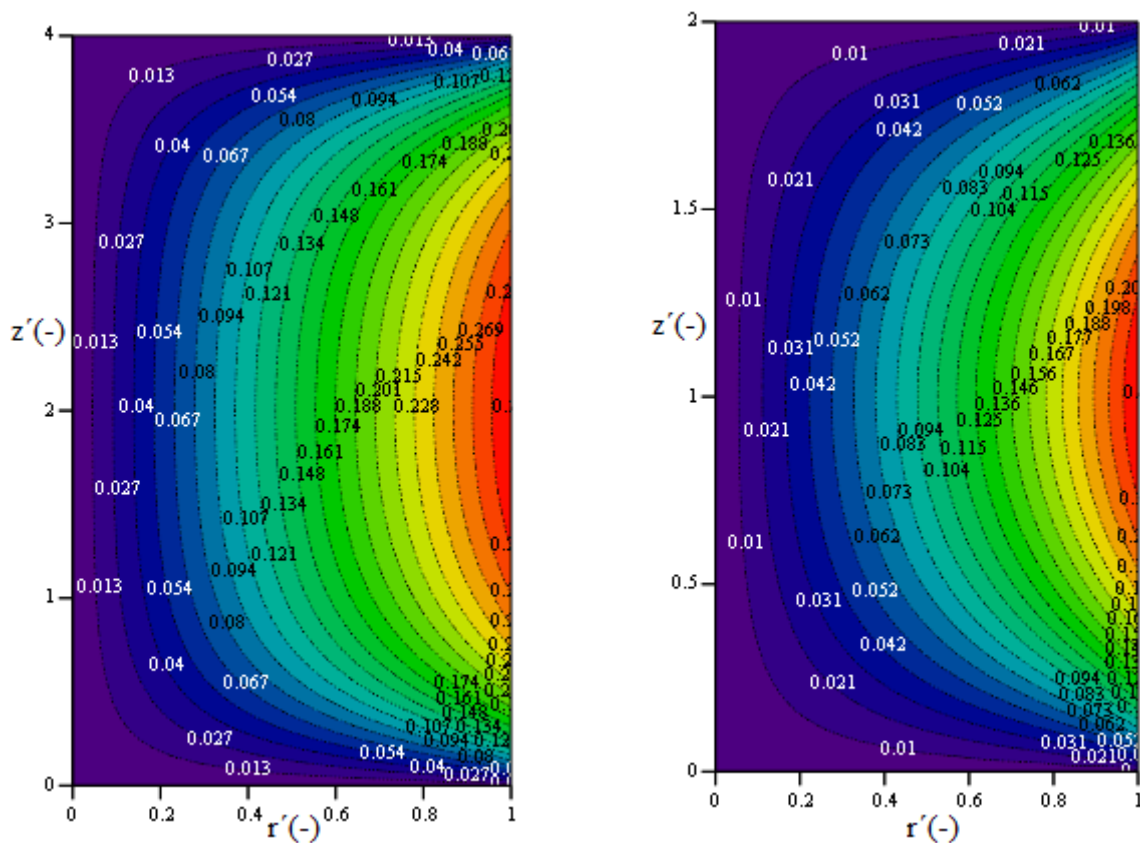
obr. 5 Kontury skalárního potenciálu pro velikost nádoby $\frac{H}{2R} = 2$ a $\frac{H}{2R} = 1$

Kontury skalárního potenciálu pro různé velikosti nádob jsou si podobné. Nejvíce je skalárním potenciálem ovlivněno okolí horní a dolní podstavy. Pro větší nádobu (resp. větší poměr $\frac{H}{2R}$) je méně ovlivněn střed nádoby. S rostoucí velikostí nádoby se celkově skalární potenciál zvětšuje. Maxima a minima jsou vždy zobrazena pro daný obrázek, nemají stejnou barevnou škálu.

4.2 Lorentzova síla

Maxima Lorentzových sil se vyskytují u vnějšího okraje nádoby v oblasti poloviny výšky nádoby, minima se vyskytují u axiální osy nádoby a u horní a dolní podstavy.

I zde je velikost nádoby reprezentována poměrem $\frac{H}{2R}$, a opět se mění pouze výška nádoby, poloměr nádoby zůstává konstantní. Na obr. 6 jsou zobrazeny kontury azimutálních časově středovaných složek Lorentzových sil pro velikosti nádoby $\frac{H}{2R} = 1$ a $\frac{H}{2R} = 2$.

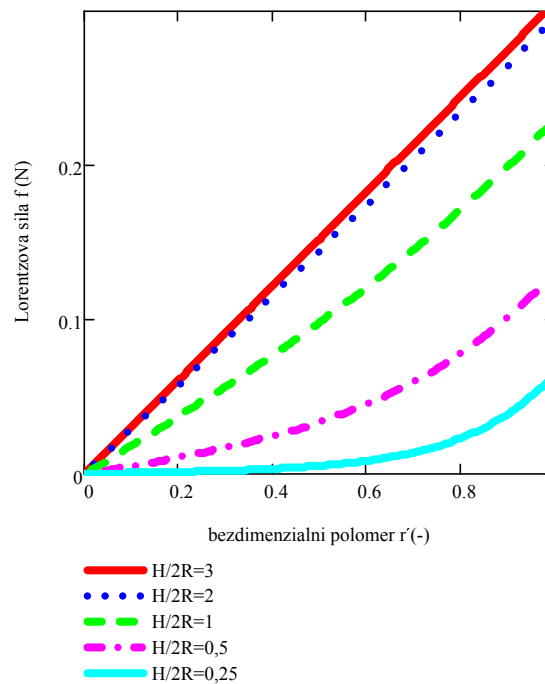


obr. 6 Kontury azimutální složky časově středovaných Lorentzových sil pro velikosti nádoby

$$\frac{H}{2R} = 2 \text{ a } \frac{H}{2R} = 1$$

S růstem velikosti nádoby se mění nejen tvar kontur Lorentzových sil, ale i velikost těchto sil. Tvar kontury pro různé velikosti nádob je si podobný s tím, že při vyšším poměru (2 a více) je zřetelnější zploštění kontur směrem k ose nádoby.

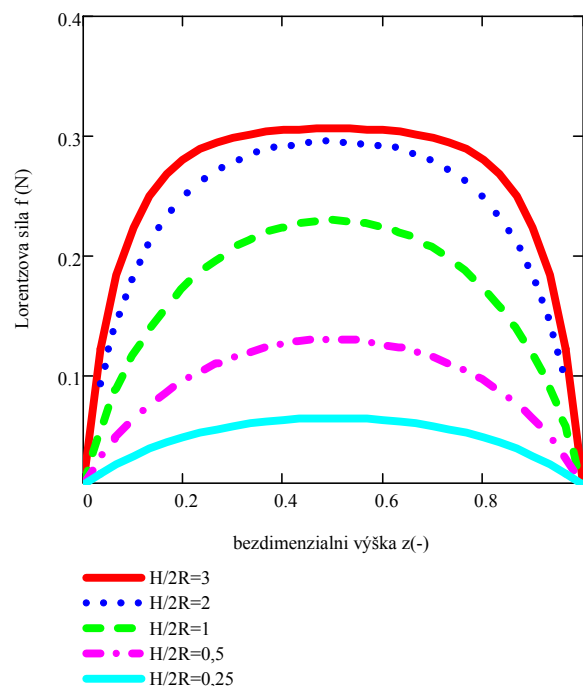
4.3 Závislost azimutální složky Lorentzovy síly na velikosti nádoby



obr. 7 Závislost azimutální složky Lorentzovy síly na poloměru nádoby

Na obr. 7 je zobrazena závislost azimutální časově středované složky Lorentzovy síly na poloměru nádoby. Protože Lorentzova síla je funkce dvou proměnných (r a z), velikost souřadnice z byla zvolena v polovině uvažované výšky nádoby (v místě, kde se nacházejí maximální síly). Z grafu vyplývá, že při zvoleném bezdimenzionálním poloměru nádoby se se zvyšujícím se poměrem $\frac{H}{2R}$ zvětšuje i Lorentzova síla. Stejně i čím je větší bezdimenzionální poloměr nádoby, zvětšuje se, při konstantní velikosti nádoby, Lorentzova síla. Při vyšším poměru $\frac{H}{2R}$ (cca 1 a více) je závislost téměř lineární a při poměru rovnému dva a více se již dalším zvětšováním velikosti nádoby velikost Lorentzovy síly téměř neztvětšuje. Při této velikosti nádoby již nehrají podstatnou roli na velikost Lorentzových sil podstavy nádoby.

Závislost Lorentzovy síly na velikosti nádoby je důležitá např. z hlediska tuhnutí. V některých publikacích [např. 18] je tuhnutí realizováno pomocí zmenšující se velikosti nádoby, a s tím spojeným zmenšováním Lorentzovy síly v průběhu tuhnutí. Tuhnutí vyjádřené pomocí zmenšující se výšky nádoby zahrnuje předpoklad, že horní hladina taveniny je bez tangenciálního napětí a nedeformovatelná. V praxi je možné obě podmínky dodržet, a to za předpokladu, že je horní hladina taveniny pokryta oxidační vrstvou, která potlačí povrchové napětí (první podmínka) [18] a Froudeho číslo je menší než 0,1 [31] (druhá podmínka). Experimentálně bylo v publikaci [31] zjištěno, že pokud je Froudeho číslo menší než 0,1, volná hladina rotující taveniny může být uvažována jako plochá, nezdeformovaná.



obr. 8 Závislost azimutální složky Lorentzovy síly na výšce nádoby

Na obr. 8 je zobrazena závislost azimutální složky Lorentzovy síly na výšce nádoby. Protože Lorentzova síla je funkce dvou proměnných (r a z), velikost souřadnice r byla volena na plášti uvažované nádoby ($r = 1$). Velikost nádoby se mění zvětšováním výšky nádoby. Z grafu vyplývá, že se při zvolené bezdimenzionální výšce nádoby se zvětšující se velikostí nádoby zvětšuje i Lorentzova síla. Se zvětšující se velikostí nádoby se mění i tvar křivky. Při poměru $\frac{H}{2R} = 3$ (a výše) je již znát zploštění křivky grafu. Po většinu intervalu výšky nádoby $\langle 0,2; 0,8 \rangle$ je Lorentzova síla cca maximální, výrazně se nemění. S dalším zvětšováním velikosti nádoby se velikost maximální síly téměř nemění.

4.4 Závěr ke studiu parametrů výsledného analytického vzorce

Byly zobrazeny kontury skalárního potenciálu a Lorentzových sil pro různou velikost nádoby, která je reprezentována poměrem $\frac{H}{2R}$. H je výška nádoby, resp. taveniny a R je poloměr válcové nádoby. Se zvyšujícím se poměrem $\frac{H}{2R}$ se zvyšuje i velikost skalárního potenciálu. Pro větší velikost nádoby je méně ovlivněna oblast v polovině výšky nádoby, protože zde není tak významný vliv horní a dolní podstavy.

Se zvětšující se velikostí nádoby se zvětšuje i velikost Lorentzových sil. Při poměru $\frac{H}{2R} > 2$ je vidět zploštění ve tvaru kontur.

Pomocí grafů byla zkoumána závislost azimutální složky Lorentzovy síly na velikosti nádoby. Protože je Lorentzova síla funkcí dvou proměnných (r , z), je sledován vliv zvětšujícího se

poloměru a zvětšující se výšky nádoby a druhý parametr je vždy volen. V závislosti na poloměru se se zvětšující se velikostí nádoby Lorentzova síla zvětšuje. Při poměru $\frac{H}{2R} > 1$ je závislost téměř lineární, při poměru $\frac{H}{2R} > 2$ se již dále nezvětšuje maximální Lorentzova síla, protože zde již nehrají podstatný vliv podstavy nádoby. Poměr $\frac{H}{2R}$ je důležitý i z hlediska simulace tuhnutí. Při určitých podmínkách lze uvažovat, že zmenšující se poměr $\frac{H}{2R}$ simuluje tuhnutí taveniny. Závislost velikosti Lorentzových sil na výšce nádoby je sledován na vnějším plášti nádoby (v oblasti maximálních sil). Ze zobrazeného grafu závislosti vyplývá, že při zvolené výšce nádoby se Lorentzova síla se zvětšující se velikostí nádoby zvětšuje. Tvar křivek odpovídá zobrazovaným konturám Lorentzových sil. Při poměru $\frac{H}{2R} > 3$ je již zřetelné zploštění grafu. Byl sledován vliv počtu členů teoreticky nekonečné řady, která se vyskytuje při výpočtu Lorentzových sil. Pro praktické výpočty je tato nekonečná řada nahrazována součtem několika členů. Minimální počet členů je 7, pro další výpočty je počítáno s 10 členy. Dále byly zobrazeny grafy závislostí magnetické indukce a Taylorova čísla na silový moment.

5 Lorentzovy síly v krychli z kódu NS-FEM3D

5.1 Kód NS-FEM3D

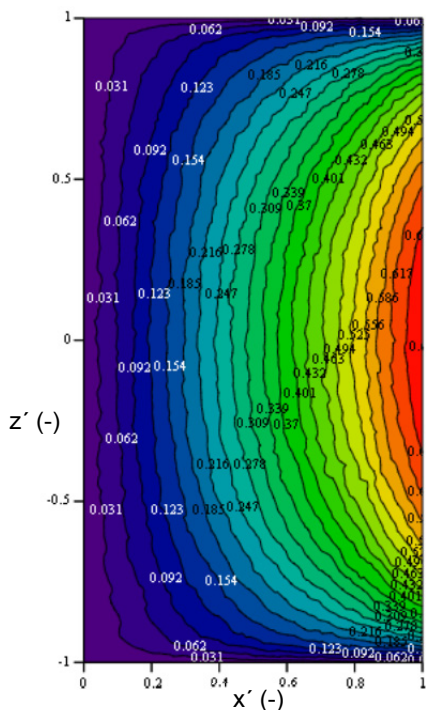
Z výpočtového kódu NS – FEM3D byly získány databáze hodnot Lorentzových sil pro různá Taylorova čísla. Bylo zde využito turbulentního modelu DDES. Jeho verifikace je např. v publikaci [1].

Jako tvar nádoby byla zvolena krychle. Výstupní databáze získaná z tohoto kódu tvořila matice dat – souřadnice uzlových bodů sítě, velikosti složek rychlosti v kartézských souřadnicích a velikosti Lorentzových sil v kartézských souřadnicích. Tato databáze byla dále zpracovávána v softwaru MathCad. Byl zde vytvořen program, který síly v kartézském systému souřadnic převede na cylindrické, protože dominantní síla v nádobě je azimutální, a proto je sledována a porovnávána hlavně tato složka.

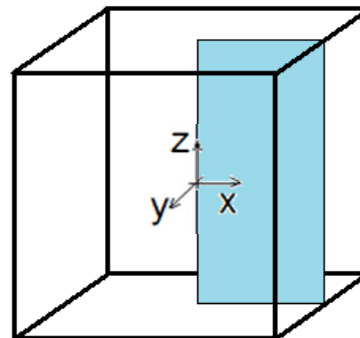
Celá uvažovaná síť má přes 2 200 000 elementů a je nestruturovaná. Nejdříve byl napsán v MathCadu program pro načtení dat, transformaci sil z kartézského systému souřadnic do cylindrického [32] a dále vybrání konkrétní roviny pro zobrazení výsledků. Protože je síť nestruturovaná, bylo nutné zvolit virtuální souřadnice dané roviny a zjistit, jakou velikost by síla v těchto virtuálních bodech měla. Toho se dosáhlo pomocí váhové funkce čtyř nejbližších bodů sítě. Pomocí této funkce se určí hodnota Lorentzových sil ve fiktivních bodech předem dané zobrazovací roviny. Největší váhu má hodnota v nejbližším bodě bodu fiktivnímu, nejmenší váhu má nejvzdálenější bod sítě.

5.2 Lorentzovy síly v normální, šikmé a horizontální rovině

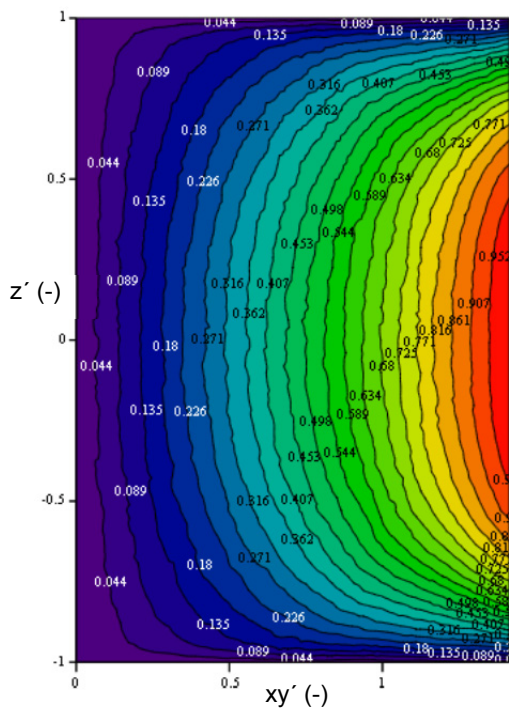
Tvar kontur časově středovaných Lorentzových sil (v azimutálním směru) v normální rovině jsou zobrazeny na obr. 9a, v šikmé rovině na obr. 10a a v horizontální rovině na obr. 11a. Vše je normalizováno k jedničce vydělením největší hodnotou Lorentzových sil vyskytujících se v celém objemu nádoby pro dané Taylorovo číslo ($Ta = 1 \cdot 10^6$). Největších hodnot je dosaženo v šikmé rovině u rohů a hran. Touto hodnotou tedy byly všechny ostatní hodnoty vyděleny a výsledky byly zobrazeny v příslušných rovinách. Čím větší je vzdálenost od pomyslné svíslé osy, tím větší jsou Lorentzovy síly (nejlépe vidět v polovině výšky nádoby).



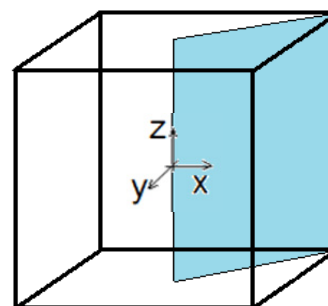
obr. 9 a) Zobrazení normalizovaných kontur azimutálních Lorentzových sil v nádobě tvaru krychle - $Ta = 1 \cdot 10^6$



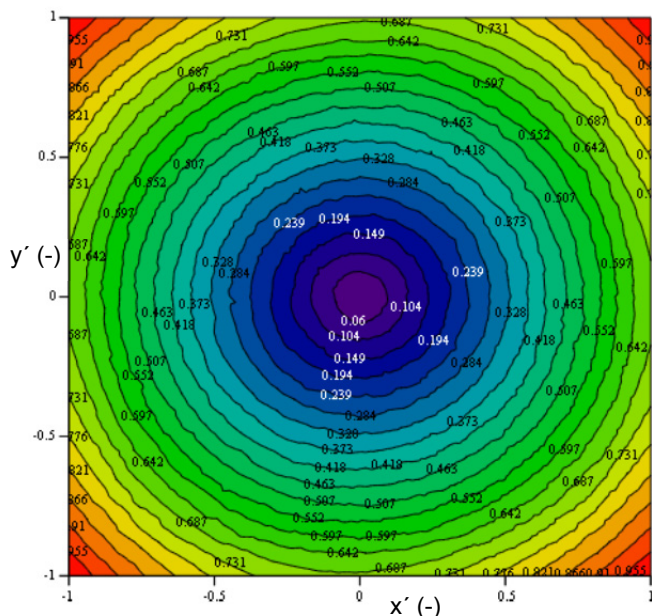
obr. 9 b) Zobrazení roviny, ve které se zobrazují výsledky



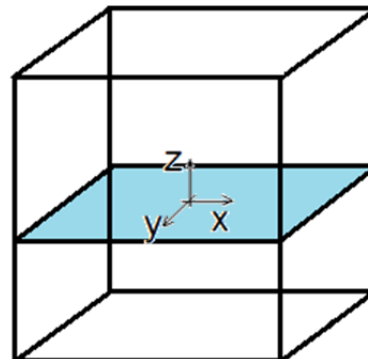
obr. 10 a) Zobrazení normalizovaných kontur azimutálních Lorentzových sil v nádobě tvaru krychle – v šikmé rovině - $Ta = 1 \cdot 10^6$



obr. 10 b) Zobrazení roviny, ve které se zobrazují výsledky



obr. 11 a) Zobrazení normalizovaných kontur azimutálních Lorentzových sil v nádobě tvaru krychle – v horizontální rovině - $Ta = 1 \cdot 10^6$



obr. 11 b) Zobrazení roviny, ve které se zobrazují výsledky

5.3 Shrnutí Lorentzových sil v nádobě tvaru krychle

Byly zobrazeny kontury časově středovaných Lorentzových sil pro krychlovou nádobu v různých řezech nádobou. Maxima časově středovaných Lorentzových sil v azimutálním směru se nacházejí v polovině výšky nádoby v hranách svislých stěn (tedy v šikmých řezech). V polovině výšky nádoby platí, že čím větší vzdálenost od pomyslné vertikální osy nádoby, tím větší Lorentzova síla. Na horní a dolní podstavě jsou Lorentzovy síly rovny nule. Pro vyšší Taylorova čísla jsou Lorentzovy síly větší. Protože jsou Lorentzovy síly ve výpočtovém kódu NS-FEM3D řešeny numericky z parciálních diferenciálních rovnic, vzniká zde kromě dominantní složky Lorentzových sil v azimutálním směru i malá síla v radiálním směru. V axiálním směru je síla nulová.

6 Využití vzorce pro válcovou nádobu na nádobu ve tvaru krychle

Pro zjištění, zda je možné použít analytický vztah pro Lorentzovu sílu válcové nádoby i pro nádobu tvaru krychle, je nutné převést sílu z cylindrických souřadnic na kartézské.

Výsledné zprůměrované složky síly jsou:

$$\bar{f}_x = -\frac{\sigma \cdot B_0^2 \cdot \omega}{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sigma \cdot B_0^2 \cdot \omega}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cdot J_1(m_i \cdot \sqrt{x^2 + y^2})}{(m_i^2 - 1) \cdot J_1(m_i)} \cdot \frac{\sinh(m_i \cdot z) + \sinh(m_i \cdot (H - z))}{\sinh(m_i \cdot H)} \quad (23)$$

$$\bar{f}_y = \frac{\sigma \cdot B_0^2 \cdot \omega}{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\sigma \cdot B_0^2 \cdot \omega}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cdot J_1(m_i \cdot \sqrt{x^2 + y^2})}{(m_i^2 - 1) \cdot J_1(m_i)} \cdot \frac{\sinh(m_i \cdot z) + \sinh(m_i \cdot (H - z))}{\sinh(m_i \cdot H)} \quad (24)$$

Analytické vztahy pro \bar{f}_x a \bar{f}_y platí samozřejmě za podmínky, že $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

Pro $x = 0 \wedge y = 0$ platí, že $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$.

Pro $x \neq 0 \wedge y = 0$ platí, že $\bar{f}_y = \bar{f}_\varphi$, $\bar{f}_x = 0$.

Pro $x = 0 \wedge y \neq 0$ platí, že $\bar{f}_x = \bar{f}_\varphi$, $\bar{f}_y = 0$.

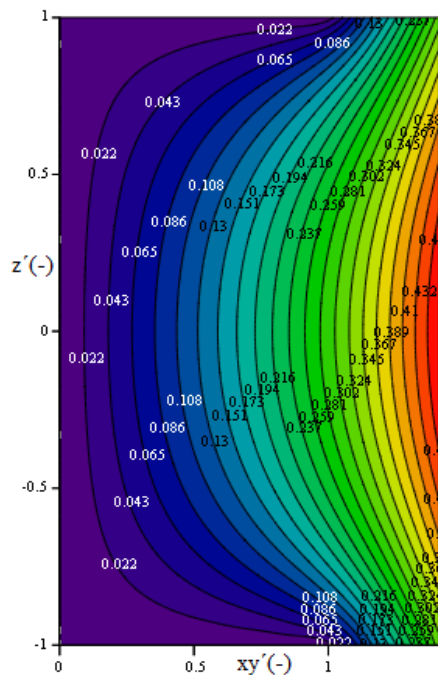
Celková Lorentzova síla v kartézských souřadnicích je:

$$\bar{f} = \sqrt{(\bar{f}_x^2 + \bar{f}_y^2)} \quad (25)$$

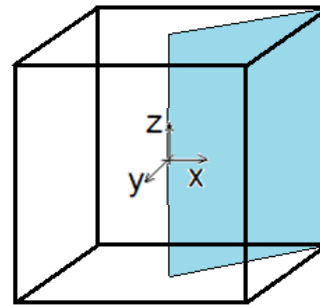
Na obr. 12 a) jsou zobrazeny kontury Lorentzových sil v šikmé rovině s použitím těchto analytických vztahů – tedy využití vzorce původně pro válcovou nádobu na nádobu tvaru krychle.

6.1 Kontury Lorentzových sil z analytického vzorce pro krychli

Při zobrazení v této dané normální rovině je Lorentzova síla $\bar{f}_x = 0$ a výsledná síla je dána pouze složkou \bar{f}_y . Kontury v této rovině odpovídají konturám sil ve válcové nádobě (vepsaném válci). Kontury Lorentzových sil v šikmé rovině jsou podobné konturám z výpočtového kódu NS-FEM3D, největší chyba vzniká těsně u horní a dolní podstavy, kde by síla měla být minimální.



obr. 12 a) Výsledná Lorentzova síla \bar{f} [N] v šikmé rovině (pro $Ta = 1 \cdot 10^6$) – z analytického vzorce



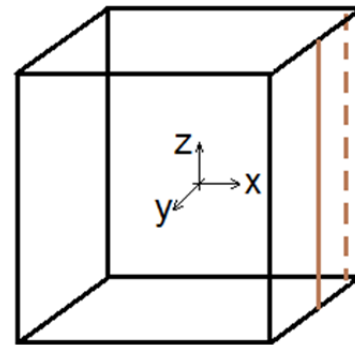
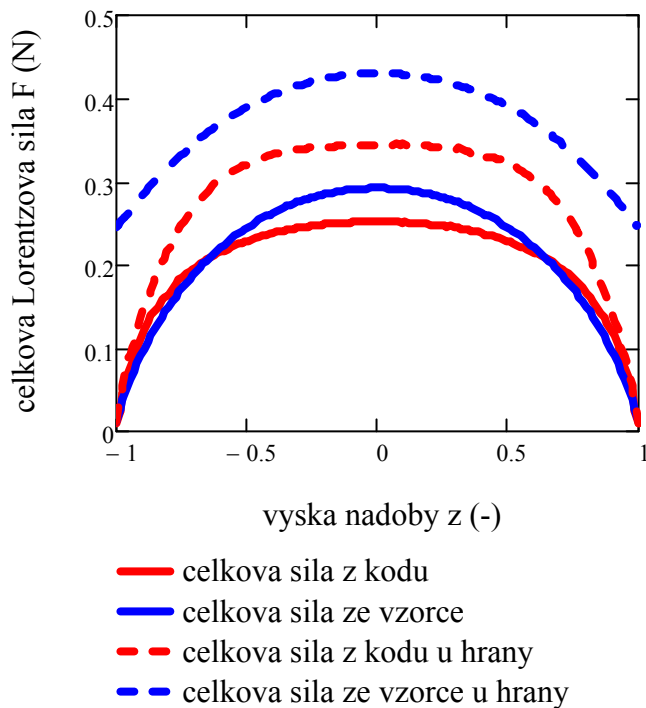
obr. 12 b) Zobrazení roviny, ve které se zobrazují výsledky

6.2 Porovnání výsledků z analytického vzorce s výpočtním kódem NS-FEM3D

Porovnáním výsledků z těchto analytických vzorců s výsledky z výpočtového kódu NS-FEM3D, se zjistí, jaké chyby bychom se dopustili, kdybychom tyto vzorce (primárně určené pro válcovou nádobu) použili pro nádobu tvaru krychle. Výpočtový kód NS-FEM3D byl již mnohokrát verifikován a výsledky byly odpublikovány ve významných odborných publikacích [např. 25]. Výsledky z tohoto kódu je proto možné považovat jako referenční a zjistit, zda je možné zjištěné analytické vzorce použít a kde vznikají největší chyby.

Porovnání hodnot Lorentzových sil je provedeno pro konkrétní úsečky (jejich poloha v krychli je u grafu znázorněna). Pro výpočtový kód a použitou nestrukturovanou síť je opět použita váhová funkce čtyř nejbližších bodů.

Na obr. 13 a) jsou zobrazeny výsledné Lorentzovy síly, kde je právě velice dobře patrné, že největší rozdíly vznikají právě v hranách a nejvíce u horní a dolní podstavy. V rámci uvažovaných zjednodušujících předpokladů (aby bylo možno výpočet realizovat) by v těchto místech bylo vhodné dodat určitou tlumicí funkci, která by utlumila tuto sílu poblíž horní a dolní podstavy (viz dále).



obr. 13 a) Závislost velikosti výsledné Lorentzovy síly v závislosti na výšce nádoby (souřadnice z) pro různé metody výpočtu

obr. 13 b) Zobrazení úsečky, ve které se zobrazují výsledky

Při porovnání výsledných Lorentzových sil vypočtených pomocí vzorce a pomocí kódu je vidět relativní shoda. Nejlépe se shodují síly v místě daném pomyslným vepsaným válcem. V místě úsečky naznačené plnou čarou je shoda velice dobrá. V místě poblíž stěny nádoby je chyba větší, přičemž největší je chyba u hrany nádoby. Síla vypočítaná pomocí analytického vzorce je o něco větší než síla pomocí výpočetního kódu (chyba vztážená k maximálnímu rozdílu v nádobě je cca 30 %).

6.3 Čím jsou chyby způsobeny

Nepřesnosti u Lorentzových sil v krychlové nádobě vypočtených pomocí analytického vzorce jsou způsobeny výpočtem skalárního potenciálu. Obecně je skalární potenciál funkcí čtyř proměnných – r , φ , z , t . Aby bylo možné skalární potenciál vypočítat, je nutné ho rozdělit na dvě části – viz [20]. To je však možné pouze za předpokladu mj. axisymetrie. Toho je však dosaženo pouze u odvozovaného válce, nikoli krychle. Protože by však jinak nebylo možné nalézt analytický vztah pro krychlovou nádobu (a skalární potenciál by se musel řešit numericky, čímž by se výpočet CFD proudění nezrychlil), uvažuje se, že tento limit neplatí a pro oblast největších chyb řešení (v rozích u horní a dolní podstavy) je použita tlumicí funkce. Symetrii podle axiální osy u krychlové nádoby narušují právě hrany stěn, které se u válcové nádoby nevyskytují. V těchto místech vznikají největší chyby a je třeba zde zavést tlumicí funkci.

6.4 Tlumičí funkce

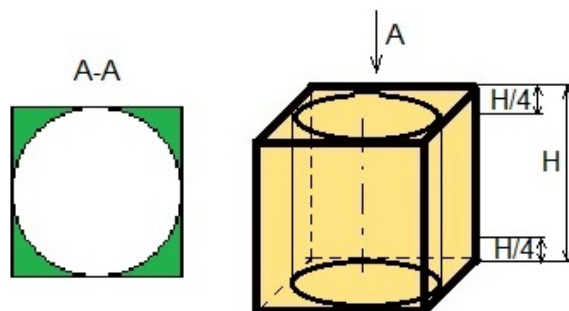
Na horní a dolní podstavě by měla být Lorentzova síla rovna nule, protože zde vektor magnetické indukce a proudová hustota leží ve stejné rovině. Z definice vektorového součinu v rovnici 20 pro vyjádření Lorentzovy síly tedy vyplývá, že na horní a dolní podstavě, kde jsou vektory v jedné rovině, musí být azimutální složka síly (jediná složka, která je uvažována) rovna nule. Protože při výpočtu z analytického vzorce poblíž hran pláště krychlové nádoby toto není dodrženo, je vhodné využít tlumičí funkce, která by sílu postupně utlumila tak, aby na horní a dolní podstavě nulová byla. Pokud by se i bez tlumičí funkce tato Lorentzova síla zakomponovala do CFD kódu na výpočet proudění v nádobě, nebyla by chyba tak velká, protože největší chyba je u styku se stěnou, a síla by zde byla tlumena i třením.

Tlumičí funkce pro horní podstavu (souřadný systém leží na průsečíku úhlopříček spodní podstavu) má tento tvar:

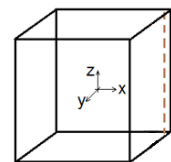
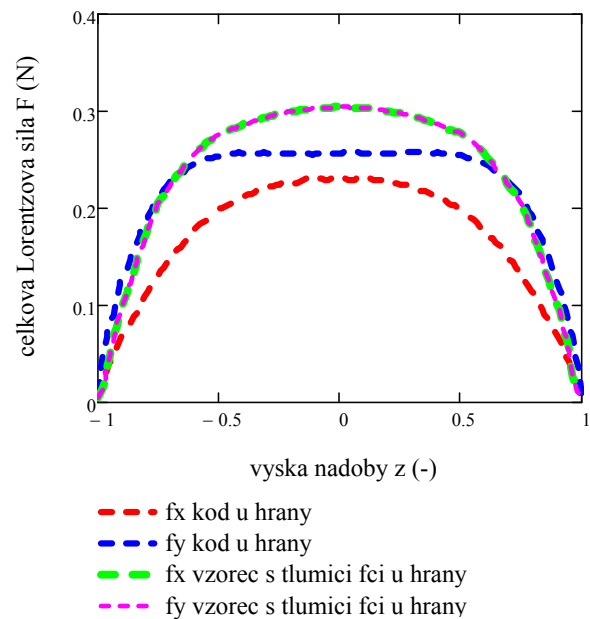
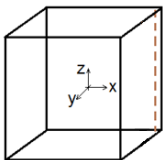
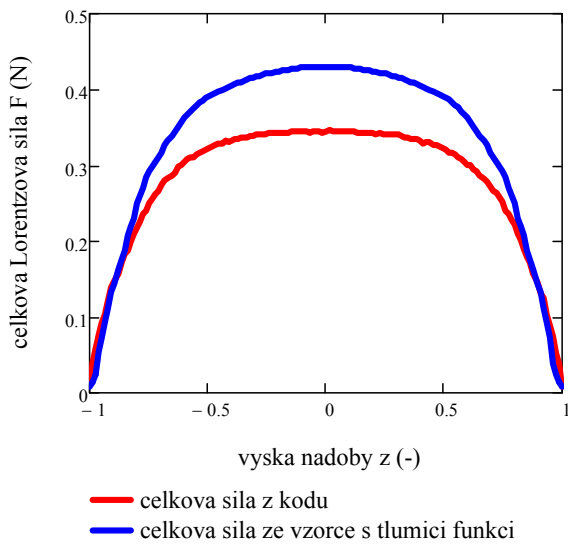
$$\begin{cases}
 \text{for } z \in H; 0,95 \cdot H \\
 \quad f \leftarrow m \cdot f \wedge m \leftarrow m - A \\
 \text{for } z \in 0,95 \cdot H; 0,85 \cdot H \\
 \quad f \leftarrow n \cdot f \wedge n \leftarrow n - B \\
 \text{for } z \in 0,85 \cdot H; 0,75 \cdot H \\
 \quad f \leftarrow l \cdot f \wedge l \leftarrow l - C
 \end{cases} \quad (26)$$

Jednotlivé konstanty (m , n , l , A , B , C) byly zjištěny experimentálně (aby na podstavách byla síla nulová, byly nejplynulejší přechody kontur a co nejmenší chyba). Počáteční hodnoty konstant m , n , l jsou jedna. Pro dělení každého úseku po $0,005 \cdot H$ byla experimentálně zjištěna konstanta $A = 0,05, B = 0,003, C = 0,0005$. Pro horní podstavu platí to samé, stejné konstanty i rozsahy (pouze začíná rozsah od nuly).

Oblast ovlivněná tlumičí funkcí je naznačená na obr. 14 zeleně, do hloubky $H/4$ od obou podstav.



obr. 14 Oblasti krychlové nádoby, které jsou ovlivněny tlumičí funkcí



obr. 15 Závislost celkové velikosti Lorentzových sil v závislosti na výšce nádoby (souřadnice z) pro různé metody výpočtu pro úsečku u hrany nádoby ($Ta = 1 \cdot 10^6$)

obr. 16 Závislost velikosti složek Lorentzových sil (ve směru osy x a y) v závislosti na výšce nádoby (souřadnice z) pro různé metody výpočtu pro úsečku u hrany nádoby ($Ta = 1 \cdot 10^6$)

Nejlépe je rozdíl v hodnotách vidět na grafech – obr. 15 a 16. Zobrazeny jsou zde Lorentzovy síly pro různé metody výpočtu pro úsečku blízko hrany nádoby – viz nákres. V oblastech, kde byla bez použití tlumicí funkce největší odchylka – tedy u horní a dolní podstavy, je již rozdíl minimální. Rozdíl je nyní již pouze zhruba v polovině výšky nádoby, chyba je ale oproti maximální velikosti Lorentzových sil již jen cca 20%.

6.5 Shrnutí Lorentzových sil

V části 3 byl vytvořen celý systém odvození vedoucí k nalezení analytického vzorce Lorentzovy síly vzniklé aplikací rotačního magnetického pole na elektricky vodivou taveninu ve válcové nádobě. Dále bylo třeba tento vzorec či celé odvození změnit tak, aby byl zjištěn analytický vztah pro krychlovou nádobu. Toho bylo docíleno převedením analytického vzorce pro válec z válcových souřadnic na kartézské. Protože byl zachován celý předchozí systém odvození (z válcové nádoby), největší zjednodušení (a tedy největší chyba řešení) byla ve výpočtu skalárního potenciálu. Z tohoto důvodu bylo třeba na místa nejvíce ovlivněná tímto předpokladem zavést tlumicí funkci, která tuto chybu (resp. Lorentzovu sílu u rohů nádoby) utlumí.

Kontury a velikost Lorentzových sil byly porovnány s výsledky z nekomerčního CFD kódu NS-FEM3D, jehož autor je doc. Fraňa a kolektiv. Výsledky proudění z tohoto kódu byly mnohokrát validovány a publikovány [např. 1, 2, 27, 30, 36]. Řešení MHD v tomto kódu je dáno numerickým výpočtem parciálních diferenciálních Maxwellových rovnic.

Porovnání výsledků těchto dvou metod zjišťování Lorentzových sil i bez použití tlumicí funkce dopadlo poměrně dobře. V normální rovině je vidět, že ve většině objemu je chyba cca 14 %. Největší chyby jsou u horní a dolní podstavy. Tyto chyby jsou dány trochu jinými tvary kontur. Největší chyby jsou v blízkosti hran stěn pláště nádoby u horní a dolní podstavy. Zde byla nasazena tlumicí funkce, a tím chyba klesla. Maximální rozdíl nyní odpovídá cca 20 % maximální Lorentzovy síly a vyskytuje se v oblasti maximálních Lorentzových sil (i tuto chybu by bylo zřejmě možné odstranit nějakou další tlumicí funkcí, bylo by to však na rozsáhlejší analýzu, možná na úplně samostatnou práci. Bylo by třeba zjistit, kam až je třeba tlumicí funkci nasadit a zejména vyřešit přechod mezi tlumenou a netlumenou částí v celém objemu nádoby). Analytický vzorec pro krychlovou nádobu je tedy možno použít. Samozřejmě však na úkor určité ztráty přesnosti. Největší chyby jsou u horní a dolní podstavy, zde jsou však také částečně tlumeny třením. Nespornou výhodou využitím analytického vzorce je rychlost výpočtu. Nyní lze vzorec zakomponovat do obecně jakéhokoli výpočtového kódu proudění, kde se využívá MHD. Zakomponováním vzorce do výpočtového kódu NS-FEM3D (uvažovaný v této práci) by se výrazně urychlil výpočetní čas, protože by se nemusely numericky počítat parciální diferenciální rovnice. Jiným nekomerčním výpočetním kódům, které v současnosti počítají MHD pouze pro válcovou nádobu [např. 33 a další], protože zde mají zakomponován analytický vzorec pro válcovou nádobu, by tento vzorec umožnil počítat MHD i pro krychlovou nádobu.

7 Numerická simulace proudění pomocí softwaru Ansys Fluent

Jako alternativní metodu simulování magnetohydrodynamických procesů lze též využít komerčních softwarů, např. Ansys Fluentu. Od nižších verzí Fluentu je možné použít placený nadstavbový modul MHD, což je přídavný modul pro standardní verzi Fluentu. Tento modul dovoluje analyzovat chování elektricky vodivé taveniny ovlivněné střídavým nebo stejnosměrným proudem. MHD modul je poměrně nový, a existují proto některé limity řešení a některé další části (tuhnutí, modelování volné hladiny, vícefázové proudění atd.) budou součástí vyšších verzí modulu a Fluentu. Limity současné verze jsou např.: výpočetní systém je nastaven pro taveninu o dostatečné vodivosti, musí se zadávat pouze přímo hodnoty magnetické indukce, předpokládá se nízká frekvence magnetického pole, další limity pro použití současného vícefázového proudění a výpočet poměrně špatně konverguje.

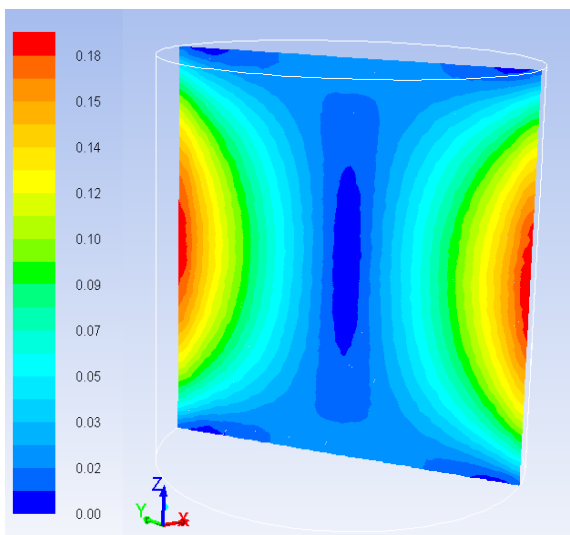
7.1 Válcová nádoba

Nejdříve bylo řešení provedeno pro válcovou nádobu, aby bylo možné porovnat řešení pomocí analytického vztahu pro válcovou nádobu s řešením pomocí Fluentu. Simulace byly provedeny pro Taylorovo číslo $Ta = 1 \cdot 10^6$.

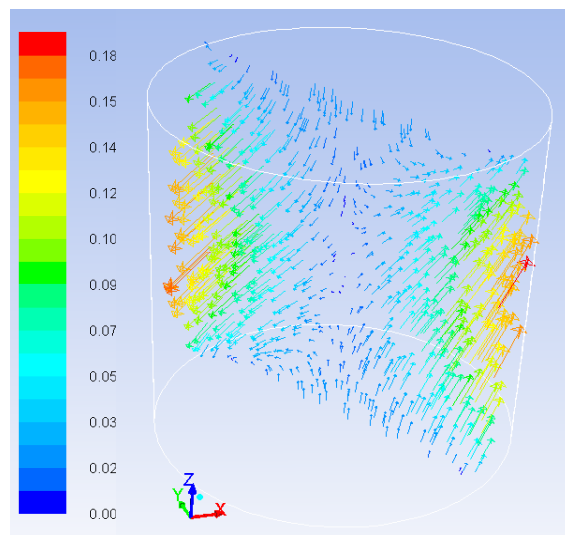
Model turbulence byl nastaven DDES s RANS modelem Spalart – Allmaras. Řešení MHD rovnic bylo rozšířeno o výpočet Lorentzových sil. Hodnoty fyzikálních veličin – hustota, elektrická vodivost a viskozita byly nastaveny v souladu s hodnotami ve výpočetním kódu NS-FEM3D a dále i v analytickém vzorci, stejně jako hodnoty externího magnetického pole, úhlová frekvence magnetického pole a amplituda magnetického pole. Výpočet byl proveden z důvodu špatné konvergence s velice malým časovým krokem. Výpočet byl velice nestabilní, jakékoli výraznější zvýšení časového kroku vedlo ke zkolabování magnetického pole, a tím k téměř zastavení proudění. Celý výpočet byl proveden na výpočetní stanici na 8 jádrech. Výpočet trval 8 měsíců a bylo dosaženo celkového času 10 s. Problematika nutnosti malého časového kroku byla též konzultována s p. Ludvíkem Láníčkem (SVS FEM s.r.o.). V manuálu MHD modulu u limitů tohoto modulu je uvedeno, že pro AC pole je možnost pracovat pouze s relativně malými frekvencemi pole. Tato vlastnost není brána explicitně jako limit verze, avšak pro vyšší frekvence je vyžadován velice malý časový krok [34].

Při výpočtu Lorentzových sil pomocí analytického vzorce je jedinou nenulovou složkou síly složka v azimutálním směru, ostatní jsou nulové. Jako dynamicky relevantní se uvažuje pouze

časově středovaná síla v azimutální směru, i když celková okamžitá síla vyvolaná RMP je třídimenzionální [8]. Fluent řeší parciální diferenciální Maxwellovy rovnice numericky a počítá se všemi složkami sil (nenulovými). Složka f_z je nenulová hlavně u horní a dolní podstavy. V těchto místech hraje roli na výpočet uzavření proudové smyčky [35] a vliv hran.

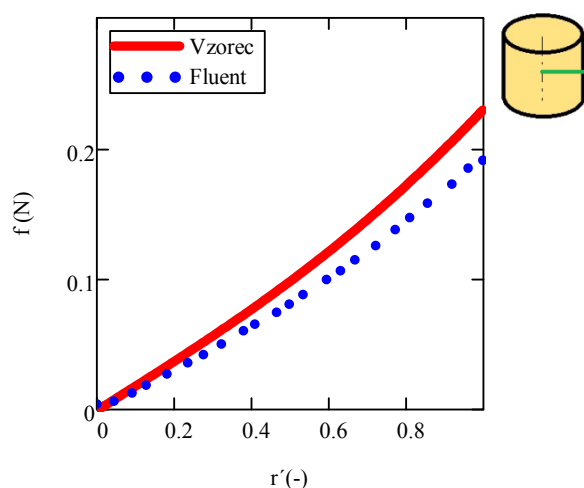


obr. 17 Kontury celkové Lorentzovy síly (N)

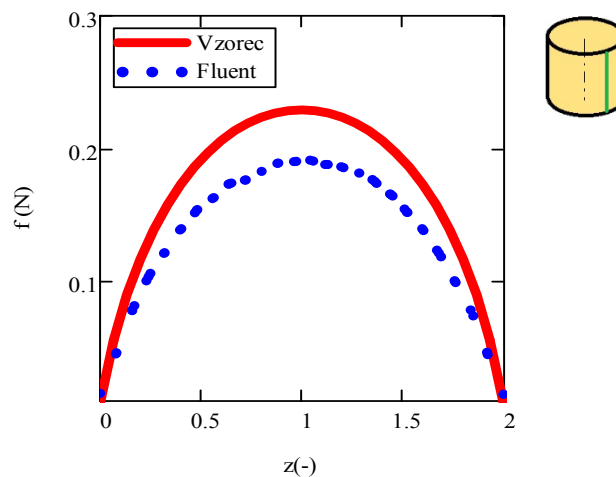


obr. 18 Vektory sil zbarvené podle celkové velikosti síly

Kontury Lorentzových sil vypočítané z Fluentu (obr. 17) jsou velice podobné konturám vycházejícím z analytického vzorce. Velikost Lorentzových sil z analytického vzorce (obr. 6) se s Fluentem poměrně slušně shodují (ve Fluentu jsou o cca 10 % menší).



obr. 19 Porovnání velikosti Lorentzových sil z Fluentu a z analytického vztahu – v závislosti na poloměru nádoby



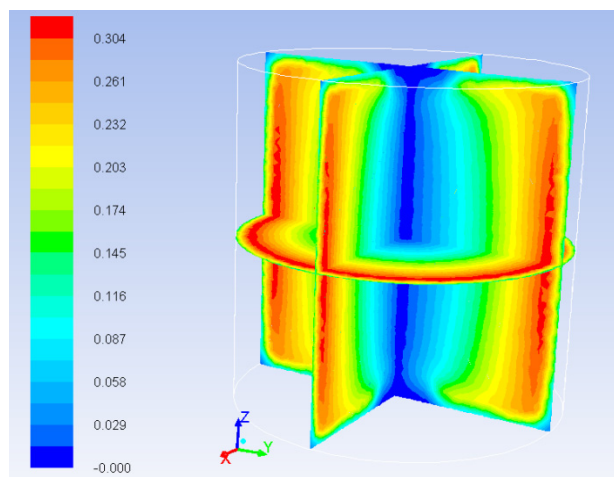
obr. 20 Porovnání velikosti Lorentzových sil z Fluentu a z analytického vztahu – v závislosti na výšce nádoby

Lépe je porovnání vidět na konkrétních myšlených úsečkách, které procházejí nádobou, resp. taveninou. Úsečky jsou (obr. 19 a 20) znázorněny zeleně. Na obr. 19 vychází sledovaná úsečka z axiální osy nádoby až k plášti, vše v polovině výšky nádoby (protože jsou zde největší Lorentzovy síly) a sleduje se závislost Lorentzových sil na poloměru nádoby. Na obr. 20 leží úsečka na plášti nádoby a sleduje se závislost Lorentzových sil na výšce nádoby. Průběh závislosti sil na poloměru, resp. výšce nádoby je stejný. Hodnoty Lorentzových sil se nejvíce liší v oblastech maximálních hodnot (na plášti, v polovině výšky nádoby). Zde jsou hodnoty z Fluentu přibližně o 10 % menší než vypočítané z analytického vzorce. Odchylka je zřejmě způsobena numerickou chybou při řešení rovnice kontinuity proudové hustoty [35]. Fluent navíc při numerickém řešení Maxwellových rovnic počítá se všemi třemi složkami sil. Složky v axiálním a radiálním směru jsou sice mnohem menší než dominantní složka v azimutálním směru, přesto výslednou sílu trochu ovlivňují.

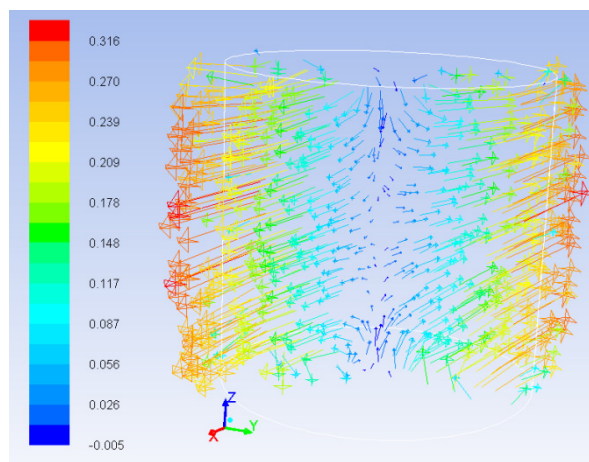
Při zobrazení časově středovaných rychlostí je vidět, jak je tavenina roztáčena vlivem rotačního magnetického pole v azimutálním směru. Maxima se nacházejí blízko u pláště (cca $0,9 R$), minima u horní a dolní podstavy a částečně u axiální osy.

I když dominantním prouděním v nádobě je primární proudění – v azimutálním směru, pro promíchávání taveniny je vznikající sekundární proudění též velmi důležité.

Tavenina by bez použití magnetického pole poblíž hran ztuhla nejdříve. Při použití magnetického pole je však v blízkosti hran proudění relativně intenzivní, dochází k promíchávání taveniny, která zamezuje předčasnému ztuhnutí a vzniku nehomogenit v materiálu. Magnetickým polem je třeba zvýšit intenzitu proudění poblíž stěn, hran a rohů, kde by bez ovlivnění magnetickým polem tuhla tavenina nejrychleji.



obr. 21 Časově středované rychlostní pole v azimutálním směru



obr. 22 Vektory celkových rychlostí zbarvené podle velikosti azimutálních rychlostí v nádobě

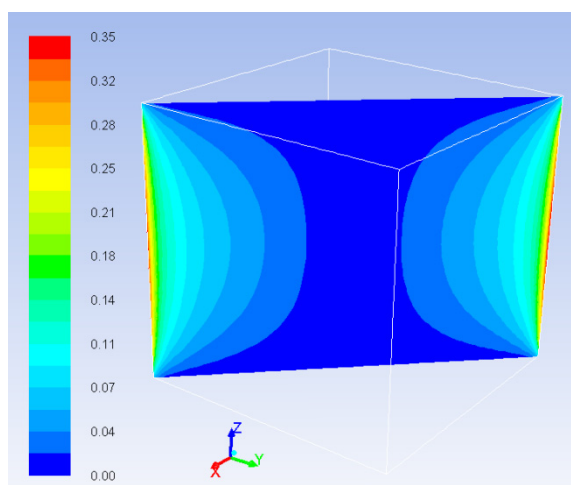
7.2 Krychlová nádoba

Model turbulence byl nastaven opět DDES s RANS modelem Spalart – Allmaras. Tento turbulentní model byl pro tuto problematiku již verifikován [1].

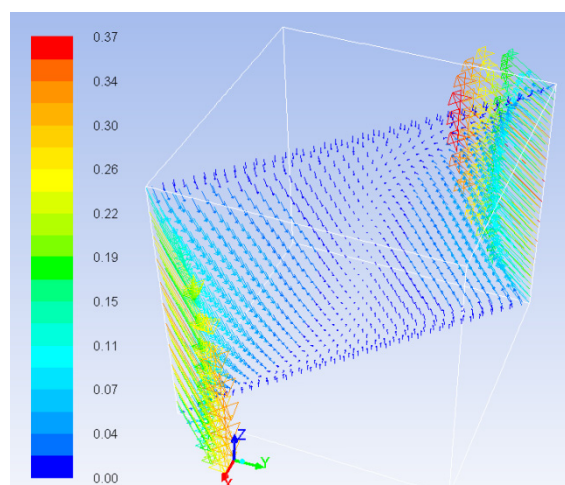
Hodnoty fyzikálních veličin byly opět nastaveny v souladu s hodnotami ve výpočetním kódu NS-FEM3D, stejně jako hodnoty externího magnetického pole, úhlová frekvence pole a amplituda magnetického pole. Výpočet byl proveden na pracovní stanici na 8 jádrech.

U výpočtu byl opět nastaven velice malý časový krok. Pro zadané hodnoty frekvence pole a magnetické indukce (obzvláště pro hranatou nádobu) bylo řešení velice citlivé na zvoleném časovém kroku. Přílišné zvětšení časového kroku by vedlo ke zkolabování magnetického pole, resp. Lorentzovy síly.

Kontury Lorentzových sil (obr. 23) jsou podobné konturám z výpočetního kódu NS-FEM3D. Hodnoty v rozích nádoby vykazují poměrně dobrou shodu ve velikosti Lorentzových sil, další hodnoty jsou však ve Fluentu o něco menší. Výsledná velikost sil je ovlivněna také tím, že Fluent počítá i se složkou síly f_z .

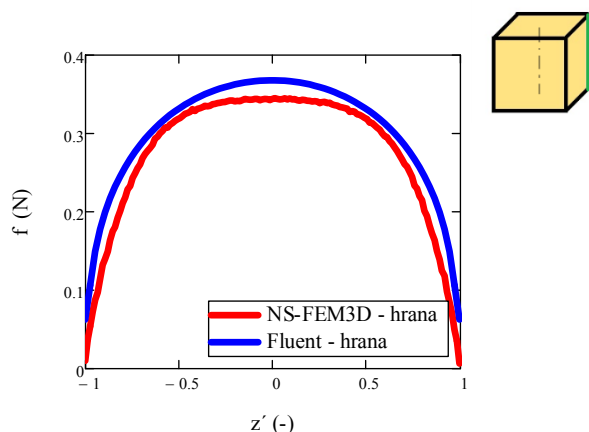


obr. 23 Kontury celkových Lorentzových sil

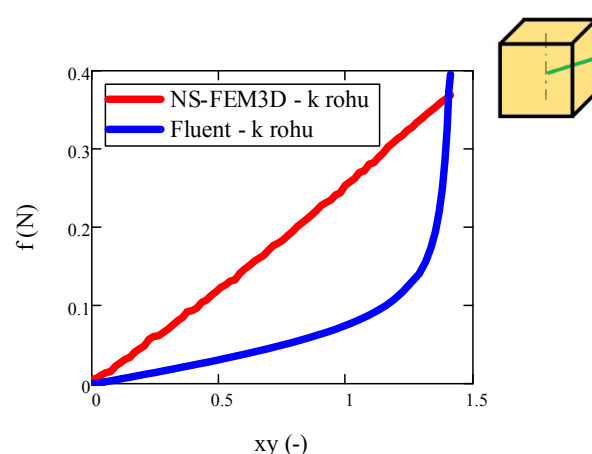


obr. 24 Vektory Lorentzových sil zbarvené podle celkové velikosti síly – daném v čase

Názornější porovnání výsledků rozdílu velikosti Lorentzových sil zjištěných z Fluentu a z nekomerčního softwaru NS-FEM3D je na obr. 25 – 26. Je zde zobrazena závislost Lorentzových sil na výšce nádoby, resp. na vzdálenosti od axiální osy k hraně nádoby. Záměrně jsou vybrána místa s maximálními Lorentzovými silami. Na obr. 25 je vidět, že v hraně nádoby (kde jsou maximální Lorentzovy síly) jsou kontury i velikost sil ve shodě. Uvnitř nádoby jsou však síly znatelně menší, než ty, které byly vypočítány v NS-FEM3D. Je zřejmé, že hrany nádoby činí Fluentu (resp. MHD modulu) potíže, opět hraje velkou roli uzavírání proudových smyček. Z důvodu těchto menších sil jsou i hodnoty rychlostí menší.

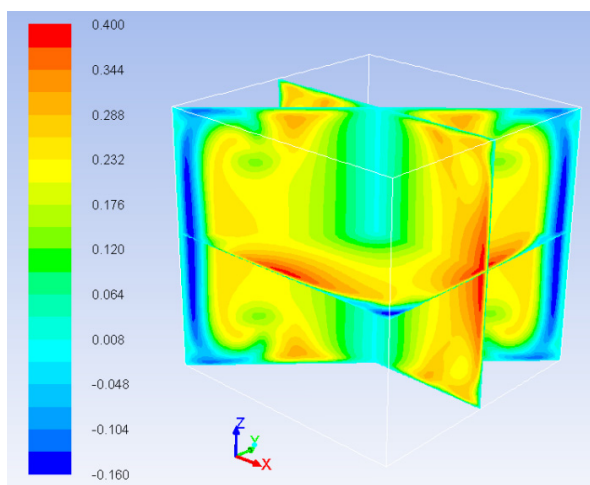


obr. 25 Porovnání velikosti Lorentzových sil z Fluentu a z výpočtového kódu NS-FEM3D – v hraně nádoby

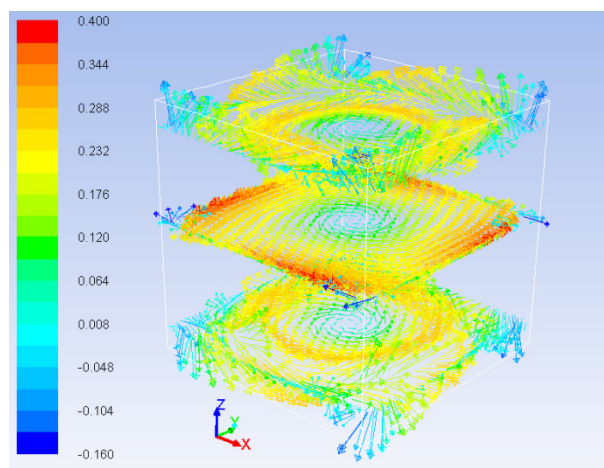


obr. 26 Porovnání velikosti Lorentzových sil z Fluentu a z výpočtového kódu NS-FEM3D – od axiální osy k hraně nádoby

Na obr. 27 je zobrazeno časově středované rychlostní pole v azimutálním směru. Maxima se vyskytují u vnějšího pláště (v polovině výšky nádoby) v oblasti pláště pomyslného vepsaného válce, minima jsou v rozích a u axiální osy. V polovině výšky nádoby je možné si povšimnout čtyř oblastí s nejvyššími rychlostmi proudění, jsou to oblasti s nejmenším poloměrem od axiální osy (osy z), v polovině výšky nádoby (v oblasti pláště pomyslného vepsaného válce). Tavenina je v těchto oblastech urychlována, aby v rozích následně zpomalila.



obr. 27 Kontury rychlostí v azimutálním směru



obr. 28 Vektory rychlostí zbarvené podle azimutálních rychlostí

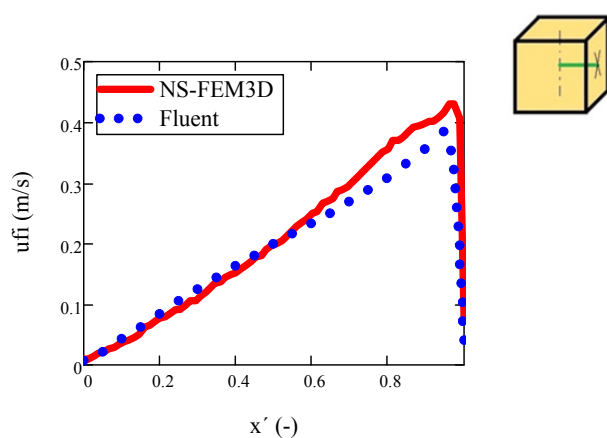
Vektorová rychlostní pole je zobrazeno na obr. 28. Je zde názorně vidět, jak je tavenina roztáčena vlivem rotačního magnetického pole dominantně v azimutálním směru.

V publikaci [36] byly publikovány kontury azimutálních a axiálních rychlostí pro stejné Taylorovo číslo ($Ta = 1 \cdot 10^6$) a stejný tvar nádoby. Tyto výsledky byly zjištěny pomocí

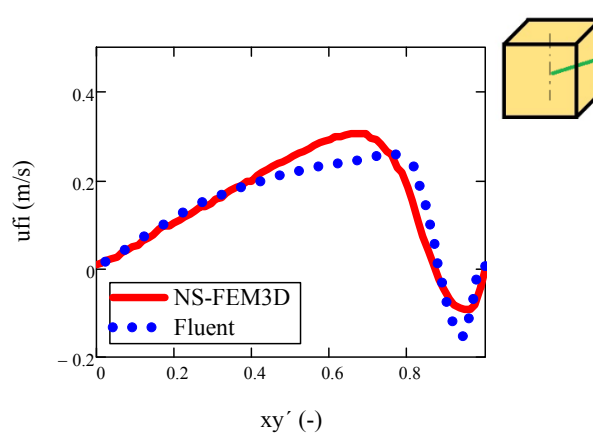
nekomerčního kódu NS-FEM3D s turbulentním modelem DDES. Další výsledky a rozbor kódu je uveden v rozpracované dizertační práci na TU v Liberci V. Honzejka.

Maxima a minima se vyskytují zhruba na stejných místech, jako je tomu u kontur zjištěných z Fluentu (obr. 27). Tvar kontur těchto rychlostí je podobný. Jiný tvar kontur se nachází u horní a dolní podstavy. Rozdíl je zřejmě způsoben vlivem nenulových sil v axiálním a radiálním směru u horní a dolní podstavy, se kterými počítá Ansys Fluent.

Porovnáním velikostí rychlostí vypočtených z Fluentu a výpočtového kódu NS-FEM3D se dojde k tomu, že rychlosti ve Fluentu jsou o něco nižší. V oblasti primárního proudění (azimutálního) jsou rozdíly v hodnotách velice malé. Hodnoty maximálních rychlostí jsou ve Fluentu o velice málo menší (o cca 3,5 %). Lépe je vidět porovnání azimutálních rychlostí na následujících grafech (obr. 29 a 30), kde je zobrazena závislost časově středovaných azimutálních rychlostí na poloze v nádobě. Poloha je určena úsečkami (naznačena zeleně), které vycházejí z axiální osy nádoby (v polovině výšky nádoby) a končí kolmo na stěně pláště, resp. v hraně pláště nádoby. Průběh rychlostí je podobný, jen maximální rychlosti ve Fluentu jsou o málo menší než z kódu NS-FEM3D. Hodnoty azimutálních rychlostí do grafu z kódu NS-FEM3D jsou převzaty z publikace [37, 38]. Porovnáním průběhů na grafech je vidět, jak je tavenina (v polovině výšky nádoby) v těsné blízkosti stěny urychlována, aby následně v hranách nádoby zpomalila a vytvořily se protisměrné vírové struktury v těchto hranách, jak se postupně zvětšuje a zmenšuje průřez nádoby.



obr. 29 Porovnání velikosti časově středovaných azimutálních rychlostí z Fluentu a z výpočtového kódu NS-FEM3D – od axiální osy kolmo na plášť nádoby



obr. 30 Porovnání velikosti časově středovaných azimutálních rychlostí z Fluentu a z výpočtového kódu NS-FEM3D – od axiální osy k hraně nádoby

Na obr. 28 je obzvlášť patrné, jak je tavenina promíchávána vlivem sekundárního proudění u horní a dolní podstavy. V oblasti poloviny výšky nádoby převažuje primární – azimutální – proudění.

7.3 Závěr k výpočtům MHD ve Fluentu

Pro výpočet MHD ve Fluentu byl použit dodatečný MHD modul. Lorentzovy síly a rychlostní pole byly vypočteny pro válec a krychli. Porovnáním velikostí Lorentzových sil (u válce s analytickým vzorcem a u krychle s výpočetním kódem NS-FEM3D) se dojde k poměrně dobré shodě. Největší odchylky jsou u krychlové nádoby, kdy je výpočet ovlivněn hranami nádoby. Maxima sil si poměrně dobře odpovídají, avšak uvnitř nádoby jsou síly menší než z kódu NS-FEM3D.

Rotační magnetické pole způsobí dominantní proudění v azimutálním směru, ale v Ekmanových vrstvách vzniká další proudění (sekundární), díky kterému v nádobě vzniknou protisměrné toroidální víry. Azimutální proudění je nejvíce ovlivněno postupným rozšiřováním a zužováním průřezu, axiální a radiální proudění třením o stěny a hrany nádoby.

Rychlostní pole u krychle z Fluentu vykazuje poměrně dobrou shodu s výpočetním kódem NS-FEM3D. Kontury rychlostí a oblasti maxim a minim si poměrně dobře odpovídají. Hodnoty azimutálních rychlostí jsou ve Fluentu o málo nižší než pomocí výpočtového kódu NS-FEM3D. Ve Fluentu výpočet proudění v krychlové nádobě ovlivňují hrany nádoby a vznikající menší síly uvnitř nádoby, než z kódu NS-FEM3D.

Výpočet ve Fluentu vykazuje poměrně pomalou konvergenci a nestabilitu výpočtu. Celý výpočet je velice závislý na velikosti časového kroku, při zvětšení časového kroku by došlo ke zkolabování magnetického pole, resp. Lorentzovy síly. Protože je největší možný časový krok $2 \cdot 10^{-5}$ s, ustálené proudění vznikne až po velice dlouhé době výpočtu. I když výpočty probíhaly na výpočetní stanici na 8 jádrech, doba výpočtu činila cca 10 měsíců. Pokud tedy výpočet pomocí nekomerčního softwaru trval cca 9 měsíců (s jemnější sítí, avšak pro vyvinuté proudění byl třeba celkový čas 2 s, u Ansys Fluentu to bylo až 12 s), není to žádná úspora času a navíc je zde zanesena větší chyba řešení. MHD modul pro Ansys Fluent je ještě poměrně nový a je zřejmě třeba ho pro komerční využití upravit, odstranit určité limity a zlepšit konvergenci řešení. Při úplném porovnávání výsledků z Ansys Fluentu a nekomerčního kódu NS-FEM3D by měly být stejné všechny parametry výpočtu. Zde jsou shodné parametry: velikost nádoby a Taylorovo číslo (resp. všechny fyzikální vlastnosti taveniny i velikost a druh magnetického pole). Jemnost sítě stejná není, protože by pak výpočet v Ansys Fluentu trval již nereálně dlouho.

Z hlediska metalurgie je výhodné, když je tavenina promíchávána rovnoměrně v azimutálním směru v celém objemu a dále také poblíž míst, kde by jinak (bez působení magnetického pole) tuhla nejrychleji – tedy u stěn, hran a v rozích. Tímto způsobem se ovlivňuje homogenita taveniny a rýhování vlivem legujících prvků [29]. Vzniklé proudění však nesmí být příliš intenzivní, protože by jinak docházelo ke značnému přenosu tepla a hmoty, a tím k mikrosegregaci legujících prvků [39] nebo makrosegregacím – defektům vznikajícím na volné hladině taveniny. Při vyšších Taylorových číslech by proto již nedošlo k požadovanému zjemnění krystalových struktur, resp. zm. Makrosegregace vznikají v důsledku příliš vysoké intenzity magnetického pole, a s tím spojeného příliš rychlého primárního proudění. Toto je možné odstranit využitím pulzačního časově modulovaného RMP [33], které zrychluje pouze sekundární proudění (bez zrychlování primárního – tedy bez problému s makrosegregacemi), které má právě za následek lepší promíchávání taveniny při menší energetické náročnosti.

8 Frekvenční a vlnová spektra proudění

Bylo využito výsledků z nekomerčního CFD kódu NS-FEM3D s turbulentním modelem DDES (Delayed Detached Eddy Simulation). Tvar energetických spekter u DDES modelu ovlivňuje též použitý „subgrid model“, který řeší nejmenší víry a jejich disipaci. Podrobnější analýza kódu NS-FEM3D, doprogramovaného turbulentního modelu DDES a vzniklého rychlostního pole je uvedena v [rozpracovaná dizertační práce V. Honzejka, 1, 37, 38]. Pro spektrální analýzu zde zpracovávanou bylo využito matic vzniklých dat (souřadnice sítě – x, y, z a okamžité rychlosti ve složkách kartézských souřadnic).

Pro analýzu proudění bylo spočítáno proudění o různých Taylorových číslech ($1 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^6$, $1 \cdot 10^7$, $5 \cdot 10^7$ a $1 \cdot 10^8$). Zkoumanou nádobou v tomto případě už byla pouze krychle.

Každá databáze (dle Ta) byla poměrně velká, mnoho GB dat. Na základě těchto dat bylo třeba zjistit, jak jemná síť (resp. jak hrubá) je dostatečná pro podchycení vznikajících jevů o malé i velké životnosti. Taylorovo číslo se zvyšovalo pouze růstem magnetické indukce, ostatní parametry zůstávaly konstantní. Výpočetní síť byla u všech případů stejná. Časový krok byl pro každé Taylorovo číslo rozdílný. Energetická spektra byla provedena pro několik bodů a úseček. Pozice těchto úseček je v $2/3 L$ (L je polovina velikosti hrany nádoby tvaru kvádrů), v $7/8 L$ a pak blízko rohů nádoby.

Výpočty spektrální analýzy společně s výslednými grafy byly provedeny v softwaru MathCad.

8.1 Vlnová spektra úseček

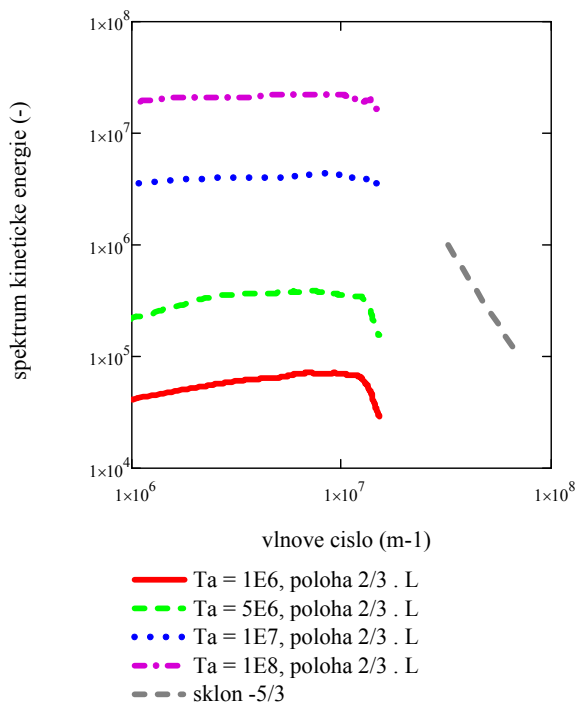
Děje uvnitř nádoby nejlépe popisují celé úsečky (resp. skupiny bodů s konstantní vzdáleností od sebe, které mají ostatní dvě souřadnice stejné $\rightarrow x$ a y je konstantní, z se mění po konstantním kroku). Jak bylo řečeno dříve, síť je nestrukturovaná a bylo využito virtuálních bodů a váhové funkce. Fluktuační kinetické energie byly transformovány pomocí FFT (Fast Fourier Transform) a dále zprůměrovány, vše pomocí softwaru MathCad [40, 41]. Hodnoty fluktuací kinetické energie virtuálních bodů úseček byly ukládány pro každý časový krok zvlášť. Složka se soubory z jednoho časového kroku obsahuje fluktuační kinetické energie všech bodů jedné úsečky v daný čas. Tato data byla pomocí FFT transformována a následně zprůměrována pro každý časový krok. Spektra byla zobrazena v závislosti na poloze bodu na z -ové ose (resp. na vlnovém čísle). Protože má nádoba roviny symetrie, využilo se této symetrie a výsledky čtyř úseček byly zprůměrovány.

Obr. 31 ukazuje závislost energetického spektra kinetické energie na vlnovém čísle. Pozice zprůměrovaných přímků je $2/3 L$. Grafy se liší pouze hodnotou Taylorova čísla. Graf pro $Ta = 1 \cdot 10^6$ má nejnižší hodnoty spekter kinetické energie ze zkoumaných spekter, graf pro $Ta = 1 \cdot 10^8$ má naopak nejvyšší. Z obr. 31 vyplývá, že v databázi pro $Ta = 1 \cdot 10^6$ a $Ta = 5 \cdot 10^6$ je

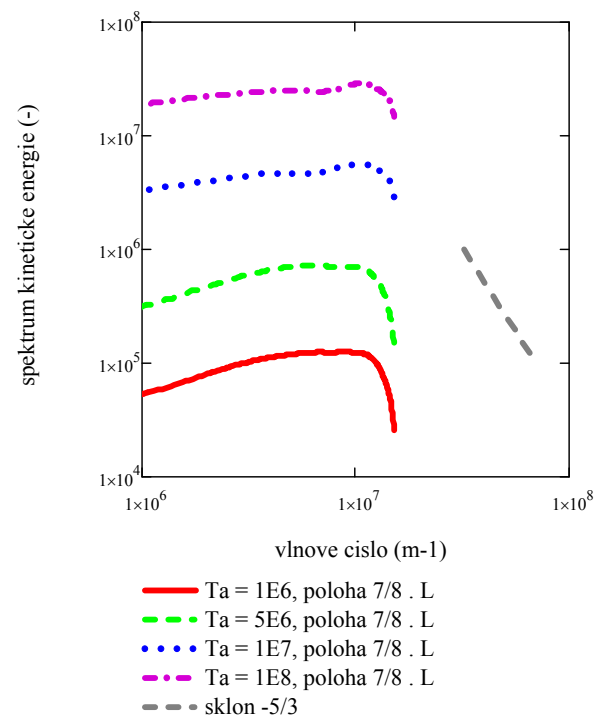
dostatek dat pro FFT a dosažený čas výpočtu je dostatečný. Pro porovnání je opět zobrazena úsečka (šedě), která má sklon $-5/3$. Dá se říci, že spektra dosahují podobného sklonu. Grafy s vyšším Taylorovým číslem dosahují spektra vyšších hodnot. Energie přechází z hlavního proudu deformací na víry. Tato energie je transformována na velké (nejvíce deformovatelné) víry. Poté se tato energie přenáší pomocí kaskády na menší víry. Nejmenší víry vlivem viskozity disipují v teplo [42, 43, 44].

Grafy pro hodnoty $Ta = 1 \cdot 10^8$ nemají dostatek dat pro FFT (sít' nádoby je příliš hrubá) anebo není dosaženo potřebného času výpočtu na plně vyvinuté proudění. Graf pro hodnoty $Ta = 1 \cdot 10^7$ má zřejmě limitní jemnost sítě, některé jevy s malou životností již zřejmě nebudou podchyceny. DDES metoda potřebuje pro výpočet velice jemnou sít', s hrubší sítí není schopna podchytit efekty spojené s malou životností. Pro výpočty s vyšším Taylorovým číslem by byla potřeba jemnější sít', případně ještě delší výsledný čas pro vytvoření plně vyvinutého proudění.

Další závislost energetického spektra na vlnovém čísle je na obr. 32.



obr. 31 Závislost bezrozměrného energetického spektra kinetické energie na vlnovém čísle ($Ta = 1 \cdot 10^6$, $Ta = 5 \cdot 10^6$, $Ta = 1 \cdot 10^7$, $Ta = 1 \cdot 10^8$, pozice 2/3 L)



obr. 32 Rozložení bezrozměrného energetického spektra kinetické energie v závislosti na vlnovém čísle ($Ta = 1 \cdot 10^6$, $Ta = 5 \cdot 10^6$, $Ta = 1 \cdot 10^7$, $Ta = 1 \cdot 10^8$, pozice 7/8 L)

Tyto grafy se od sebe též liší pouze hodnotou Taylorova čísla. Pozice zprůměrovaných úseček je 7/8 L (tedy blízko stěn nádoby, v oblasti maximálních azimutálních rychlostí). Šedou barvou je pro porovnání opět zobrazena úsečka se sklonem $-5/3$. V první části grafy dosahují podobného

sklonu jako je $-5/3$. Poté energii rychle ztrácejí (zřejmě vlivem blízkosti stěn). U grafů o vyšším Taylorově čísle dosahují spektra vyšších hodnot.

8.2 Shrnutí vlnových spekter

Byla zpracovávána data pro Taylorova čísla $Ta = 1 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^6$, $1 \cdot 10^7$ a $1 \cdot 10^8$. Spektra byla vytvořena v softwaru MathCad pomocí FFT (Fast Fourier Transform) a využito váhové funkce čtyř nejbližších bodů. Vlnová spektra pro různá Taylorova čísla ukázala, že dostatečně jemná síť a vyhovující celkový čas výpočtu (tedy vytvořené vyvinuté proudění) je pouze pro Taylorova čísla $Ta = 1 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^6$. Taylorovo číslo $Ta = 1 \cdot 10^7$ je zřejmě limitní stav (i zde však zřejmě nejsou podchycena některá malá měřítká vírů). Pro vyšší Taylorova čísla není zřejmě dostatečně jemná síť a výpočet neprobíhal dostatečně dlouho pro dosažení vyššího celkového času. Sklonu $-\frac{5}{3}$ bylo v oblasti maximálních azimutálních rychlostí dosaženo (pro $Ta = 1 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^6$).

9 Závěr

V práci byl popisován zejména silový účinek rotačního magnetického pole na taveninu v nádobě. Pro popis účinku bylo využito odvozených analytických vztahů, dále dat z nekomerčního CFD kódu NS-FEM3D a alternativně též komerčního softwaru Ansys Fluent. Celá práce byla rozdělena do několika částí, přičemž na začátku je popisována příčina proudění – Lorentzovy síly. V části zabývající se řešením pomocí komerčního softwaru Ansys Fluent byl kromě silového účinku popsán i následek tohoto silového působení na tekutinu - popis proudění byl proveden pomocí rychlostních polí, resp. primárního a sekundárního proudění. Nekomerční kód NS-FEM3D byl využit pro popis silových účinků, pro porovnání výsledků rychlostních polí s dalšími zdroji a pro analýzu proudění pomocí vlnových a frekvenčních spekter.

Nejdříve bylo provedeno odvození analytického vztahu pro skalární potenciál, resp. pro Lorentzovu sílu pro válcovou nádobu, a tím ověřeny výsledné již publikované vztahy [např. 26]. Odvození bylo doplněno o některé další aspekty, které byly nedostatečně publikovány nebo nebyly publikovány vůbec. Jedná se o studium vlivu jednotlivých parametrů analytického vztahu pro Lorentzovu sílu – vliv velikosti nádoby, vliv počtu členů teoreticky nekonečné řady atd. Výsledný analytický vztah pro válcovou nádobu byl dále upraven tak, aby ho bylo možné použít pro nádobu tvaru krychle. Analytický vztah pro krychlovou nádobu je velice užitečný, avšak žádná publikovaná práce se zatím tímto směrem nevydala. Tento analytický vztah může nahradit ve výpočetním kódu NS-FEM3D soustavu složitých diferenciálních rovnic, pomocí kterých jsou nyní externí magnetické síly počítány. Protože jsou při odvození použita určitá zjednodušení, zanáší se do výpočtu určitá chyba. Při použití tlumicí funkce se chyba u horní a dolní podstavy podstatně zmenší. Použitím tohoto analytického vzorce do výpočtů proudění by se ale výrazně urychlil výpočetní čas kódu. Je možné ho použít i ostatních CFD kódů, kde je třeba počítat Lorentzovy síly pro krychlovou nádobu. Jeho využití by mohlo usnadnit podmínky pro širší využívání magnetického pole v průmyslu, např. právě v oblasti metalurgie při odlévání taveniny do rozličných nádob (nejen do válce). Dále byly zobrazeny kontury Lorentzových sil v krychlové nádobě, jež vzešly z CFD kódu NS-FEM3D (výpočet Lorentzových sil je ještě z parciálních diferenciálních rovnic, analytický vzorec není zakomponován). Pomocí tohoto kódu, který využívá DDES model turbulence, bylo využito několik variant řešení pro různá Taylorova čísla: $1 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^6$, $1 \cdot 10^7$ a $1 \cdot 10^8$. Jak se ukázalo v následujících kapitolách práce (frekvenční a vlnová spektra), ne všechny výsledky bylo možné dále použít. Pro nejvyšší Taylorovo číslo ($1 \cdot 10^8$ a částečně i $1 \cdot 10^7$) je zřejmě nedostatečně jemná síť a výpočet by měl trvat delší dobu, aby došlo k vyvinutému proudění. Pro Taylorova čísla $Ta = 1 \cdot 10^6$ a $Ta = 5 \cdot 10^6$ byly zobrazeny v různých rovinách kontury Lorentzových sil v krychli.

Alternativně bylo proudění simulováno i pomocí komerčního softwaru Ansys Fluent, a to pro válcovou a krychlovou nádobu a Taylorovo číslo $1 \cdot 10^6$. Kontury Lorentzových sil ukazují relativně dobrou shodu s výsledky z NS-FEM3D. Celý výpočet byl velice závislý na velikosti časového kroku a ustáleného proudění se dosáhlo až po velice dlouhé době výpočtu srovnatelné s výpočty pomocí NS-FEM3D.

Vlnová a frekvenční spektra z výsledků z NS-FEM3D byla provedena ze začátku na data z DNS, kdy nebyl zakomponován žádný turbulentní model (jednalo se o nižší Taylorova čísla). Byly porovnány dvě databáze, z nichž jedna obsahovala hrubou a druhá mnohem jemnější síť. Byla vykreslena energetická spektra v závislosti na frekvenci (charakteristické body) a dále v závislosti na vlnovém čísle pro čtyři zprůměrované přímky. Spektra jemnější sítě se blíží sklonu $-\frac{5}{3}$. Obecně však má být tento sklon v rozmezí $1 < |n| < 2$, čehož bylo dosaženo u obou sítí. Dále byla již zpracovávána data proudění o vyšším Taylorově čísle a byl tedy již použit turbulentní model DDES. Protože programy pro zpracování výsledků (program pro zjištění energetických spekter v závislosti na frekvenci a na vlnovém čísle atd.) jsou univerzální, byly opět využity pro zobrazení frekvenčních spekter pro charakteristické body sítě a dále vlnová spektra pro čtyři zprůměrované přímky. Databáze obsahovaly výsledky proudění pro Taylorova čísla $1 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^6$, $1 \cdot 10^7$ a $1 \cdot 10^8$. Největší vypovídající hodnotu však měly výsledky hlavně $Ta = 1 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^6$. Sklonu $-\frac{5}{3}$ zde bylo dosaženo.

Přínosem práce je zejména popis silových účinků rotačního magnetického pole na taveninu pro vyšší Taylorova čísla, který umožní snáze pochopit chování taveniny pod vlivem tohoto magnetického pole. Pro další rozvoj a efektivní využití MHD v průmyslové praxi (např. pro výrobu monokrystalů, pro kontinuální lití oceli, v metalurgii atd.) je klíčové správné nastavení parametrů magnetického pole. Vzniklé programy v MathCadu pro vytváření frekvenčních a vlnových spekter z databází výsledků jsou univerzální a je možné je použít pro další zpracovávání dat. Stejně tak programy v MathCadu pro zobrazení veličin pomocí váhových funkcí v nedefinovaných rovinách využitím dat z 3D nestacionárních sítí mají všeobecné použití a je možné je dále využívat pro jakýkoli postprocessing. Analytický vzorec pro Lorentzovu sílu pro krychlovou nádobu lze použít v jakémkoli výpočetním kódu, který počítá proudění vzniklé rotačním magnetickým polem. Umožní nahradit zdlouhavé výpočty parciálních diferenciálních rovnic.

Využití komerčního softwaru Ansys Fluent, resp. jeho poměrně nového MHD modulu pro výpočty proudění (o vyšším Taylorově čísle) vyvolaného rotačním magnetickým polem, umožnilo mj. otestovat tento modul, porovnat výsledky silových účinků a rychlostní polí s dostupnými výsledky a zjistit limity řešení.

V budoucnu by bylo možné např. více rozebrat naznačenou tlumicí funkci, ovlivnit touto funkcí všechna místa krychlové nádoby s vyšší chybou řešení, zakomponovat tuto funkci do různých výpočtových kódů a výsledky porovnat. Dále je možnost řešit nejen krychlovou, ale i např. kvádrou nádobu.

Seznam použité literatury

- [1] K. Fraňa, V. Honzejek: Comments about a Self-developed Finite-Element Code Used in Incompressible Flow Simulations, 2nd WSEAS International Conference on Finite Elements, Finite Volumes, Boundary Elements, Tbilisi, Georgia, June 26-28, 2009
- [2] K. Fraňa, J. Stiller: A numerical study of flows driven by rotating magnetic field in a square container, *European Journal of Mechanics B/Fluids* 27 (2008)
- [3] Doležel I, Musil L.: Moderní průmyslové technologie založené na procesech v tekutých kovech řízených elektromagnetickým polem, č. 11/2003, Praha, 2003
- [4] B. Q. Li: Solidification Processing of Materials in Magnetic Fields, *JOM*, vol 50, no. 2, 1998
- [5] R. Chaudhary, C. Ji, B. G. Thomas, S. P. Vanka: Transient Turbulent Flow in a Liquid-Metal Model of Continuous Casting, Including Comparison of Six Different Methods, *The Minerals, Metals & Materials Society and ASM International 2011, Metallurgical and materials transactions B*, Vol. 42B, pp 987 – 1007, 2011
- [6] Klaus Timmel, S. Eckert, G. Gerbeth, F. Stefani, T. Wondrak: Experimental Modeling of the Continuous Casting Process of Steel Using Low Melting Point Metal Alloys—the LIMMCAST Program, *ISIJ International*, Vol. 50, No. 8, pp. 1134–1141, 2010
- [7] K. Fujisaki, T. Ueyama: Magneto-hydrodynamic Calculation of In-Mold Electromagnetic Stirring, *IEEE Transactions on magnetics*, Vol. 33, No. 2, Japan, 1997
- [8] P. A. Davidson: *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge, 2001
- [9] S. Molokov, R. Moreau, H. K. Moffatt: *Magnetohydrodynamics, Historical Evolution and Trends*, Volume 80, Springer, 2010
- [10] L. Gorbunov, A. Pedchenko, A. Feodorov, E. Tomzig, J. Virbulis, W. V. Ammon: Physical modelling of the melt flow during large-diameter silicon single crystal growth, *Journal of Crystal Growth* 257, 7–18, 2003
- [11] A. Cramer, C. Zhang, S. Eckert: Local flow structures in liquid metals measured by ultrasonic Doppler velocimetry, *Flow Measurement and Instrumentation*, 15 (2004), 145 - 153, Elsevier, 2004
- [12] B. Willers, S. Eckert, P. A. Nikrityuk, D. Rübinger, J. Dong, K. Eckert, G. Gerbeth, Efficient Melt Stirring Using Pulse Sequences of Rotating Magnetic Field: Part II. Application to Solidification of Al-Si Alloys, *The Minerals, Metals and Materials Society and ASM International 2007, Metallurgical and Materials Transactions B*, volume 39B, April 2008
- [13] P. Dold, K. W. Benz: Modification of Fluid Flow and Heat Transport in Vertical Bridgman Configurations by Rotating Magnetic Fields, *Crystal Research and Technology*, 32, 1997, 51-60
- [14] F. Píšek, L. Jeníček, P. Ryš: *Nauka o materiálu I, Nauka o kovech – neželezné kovy*, 3. svazek, Academia, Praha, 1973

- [15] internetové stránky dostupné: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Kadmium>,
http://cs.wikipedia.org/wiki/Czochralsk%C3%A9ho_proces,
<http://en.wikipedia.org/wiki/GaAs>,
<http://en.wikipedia.org/wiki/CdTe>,
http://en.wikipedia.org/wiki/Czochralski_process
<http://en.wikipedia.org/wiki/Germanium>
<http://cs.wikipedia.org/wiki/Germanium>
- [16] S. Eckert, B. Willers, P. A. Nikrityuk, K. Eckert, U. Michel, G. Zouhar: Application of rotating magnetic field during directional solidification of Pb-Sn alloys: Consequences on the CET, *Materials Science and Engineering A* 413-414 (2005), pp. 211-216
- [17] F.-U. Brückner, K. Schwerdtfeger: Single crystal growth with the Czochralski method involving rotational electromagnetic stirring of the melt, *Journal of Crystal Growth* 139 (1994), pp. 351 -356
- [18] P. A. Nikrityuk, K. Eckert, R. Grundmann: A numerical study of unidirectional solidification of binary metal alloy under influence of rotating magnetic field, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, pp. 1501-1515, 49, 2006
- [19] Grants I., Gerbeth G.: Linear three-dimensional instability of magnetically driven rotating flow, *J. Fluid Mech.* 463, 229-239 (2002)
- [20] J. Priede: Theoretical study of a flow in an axisymmetric cavity of finite length, driven by a rotating magnetic field, Ph. D. thesis, Latvia, 1993
- [21] J. V. Stewart: *Intermediate Electromagnetic Theory*, World Scientific, 2001
- [22] Komrska J: *Besselovy funkce*, Brno, 1999
- [23] Hora P.: *Akustické jevy v kontinuích*, Plzeň, 2001
- [24] A. Gray: *A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics*, New York, 1895
- [25] R. Mößner, G. Gerbeth: Buoyant melt flows under the influence of steady and rotating magnetic fields, *Journal of Crystal Growth* 197, 1999
- [26] P. A. Nikrityuk, K. Eckert, R. Grundmann: Numerical study of laminar melt flow driven by a rotating magnetic field in enclosed cylinders with different aspect ratios, *Acta Mechanica* 186, 17-35 (2006), Springer-Verlag 2006
- [27] J. Stiller, K. Fraňa, A. Cramer: Transitional and weakly turbulent flow in a rotating magnetic field, *Physics of Fluids* 18, 2006
- [28] P. A. Nikrityuk, K. Eckert, R. Grundmann: Rotating Magnetic Field – Driven Flows in Conductive Inhomogeneous Media: Part I – Numerical Study, *Metallurgical and Materials Transactions B* 37, 2006
- [29] Marty PH, M. Witkowski L.: On the stability of rotating MHD flows, *Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamic and Electroconduction Flows*, 1999
- [30] Fraňa K., Stiller J.; The Finite Element Method for Simulations of Magnetically Driven Flows, *International journal of mathematics and computers in simulation*, Issue 3, Vol. 1, 2007
- [31] A. Spohn, M. Mory, E. J. Hopfinger: Observation of vortex break-down in open cylindrical container with rotating bottom, *Exp. Fluids* 14, pp. 70-77, 1993

-
- [32] <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/sourad.pdf>
- [33] S. Eckert, P. A. Nikrityuk, D. Rübinger, K. Eckert, G. Gerbeth: Efficient Melt Stirring Using Pulse Sequences of Rotating Magnetic Field: Part I. Flow Field in a Liquid Metal Column, The Minerals, Metals and Materials Society and ASM International 2007, Metallurgical and Materials Transactions B, volume 38B, December 2007
- [34] ANSYS FLUENT 12.0, Magnetohydrodynamics (MHD), Module Manual, April 2009
- [35] D. S. Krasnov, E. Zienicke, A. Thess, O. Zikanov, T. Boeck: Numerical Simulation of Transition to Turbulence in MHD Channel Flow, Direct and Large-Eddy Simulation V, ERCOFTAC Series Volume 9, pp 197-204, 2004
- [36] K. Fraňa, V. Honzejek, K. Horáková: A Numerical Simulation of the Magnetically Driven Flows in a Square Container Using the Delayed Detached Eddy Simulation, Computational Fluid Dynamics 2010, pp 745-751, 2011
- [37] V. Honzejek, K. Fraňa: The Delayed Detached Eddy Simulation Used for Magnetically Driven Flow in Square Container, 30. Setkání kateder mechaniky tekutin a termomechaniky, Špindlerův Mlýn, Česká republika 2012
- [38] V. Honzejek, K. Fraňa: The Delayed Detached Eddy Simulation Used for Magnetically Driven Flow in Square Container, 11th conference on Power System Engineering, Thermodynamics and Fluid Flow – ES 2012, Srní, Czech Republic, 2012
- [39] P. Dold: Czochralski growth of doped germanium with an applied rotating magnetic field, Cryst. Res. Technol. 38, No 7-8, 659-668 (2003), Wiley-VCH Verlag
- [40] B. Maxfield, P. E.: Essential MathCad for Engineering, Science and Math, 2nd edition, Elsevier, 2009
- [41] R. W. Larsen: Introduction to MathCad 15, ESource, Montana State University, 2011
- [42] V. Tesař: Mezní vrstvy a turbulence, ČVUT, Praha, 1996
- [43] J. Janalík: Měření turbulentních fluktuací rychlostí, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 2006
- [44] J. Mathieu, J. Scott: An Introduction to Turbulent Flow, Cambridge University, 2000

Seznam vybraných vlastních publikací

1. Horáková, K., Fraňa, K.: Statistické vyhodnocování nestacionárních toků v přechodovém a turbulentním režimu proudění, XXVI. Setkání kateder mechaniky tekutin a termomechaniky 2007, Herbertov, Česká republika, pp. 31 – 32, 2007
2. Horáková K., Fraňa K.: Unsteady Flows Driven by Rotating Magnetic Field, Journal of Applied Science in the Thermodynamics and Fluid Mechanics, Česká republika, 1/2007
3. Horáková, K., Fraňa, K.: Statistical analyzing of unsteady flows, XXVII. Setkání kateder mechaniky tekutin a termomechaniky, Plzeň, Česká Republika, pp. 97-100, 2008
4. Fraňa, K., Stiller, J., Horáková, K.: A numerical study of flows driven by a rotating magnetic field in a square container, 79th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM), Bremen, Německo, 31. 3. – 4. 4. 2008
5. Fraňa K., Stiller J., Horáková K.: A numerical study of flows driven by a rotating magnetic field in a square container, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 8 (PAMM), pp. 10953 – 10954, 2008
6. Horáková K., Fraňa K.: Eduction of Lorentz forces in rotating magnetic field, 8th conference on Power System Engineering, Thermodynamics & Fluid Flow - ES 2009, pp. 59-64, Pilsen, Czech Republic, June 18, 2009
7. Horáková K., Fraňa K.: Lorentz forces of rotating magnetic field, Mechanical Engineering Journal Strojárstvo - XXVIII. ročník medzinárodnej konferencie Stretnutie Kateder mechaniky tekutín a termomechaniky, Košice, Slovenská republika, pp. 76-77, Jún 2009
8. Horáková K., Fraňa K.: Unsteady Flows Driven by Rotating Magnetic Field, Journal of Applied Science in the Thermodynamics and Fluid Mechanics, Česká republika, Vol. 2, No. 1/2009
9. Horáková K., Fraňa K.: The effect of Lorentz forces parameters, International Conference Experimental Fluid Mechanics 2009, Technical university of Liberec, 25. - 27. 11. 2009
10. Horáková K., Fraňa K.: Lorentz forces of rotating magnetic field, Journal of Applied Science in the Thermodynamics and Fluid Mechanics, Technical university of Liberec, 2/2009
11. Horáková K., Fraňa K.: The effect of rotating magnetic field, XXIX. Setkání kateder mechaniky tekutin a termomechaniky, Rožnov pod Radhoštěm, 23. - 25. 6. 2010
12. Horáková K., Fraňa K.: Lorentz forces of rotating magnetic field, Journal of Applied Science in the Thermodynamics and Fluid Mechanics, Technical university of Liberec, 3/2010
13. Horáková K., Fraňa K.: Unsteady flow in the container, Power engineering and environment 2010, Ostravice, Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, str. 38-39, 1. - 3. 9. 2010
14. Fraňa K., Honzejek V., Horáková K.: A numerical simulation of the magnetically driven flows in a square container using the Delayed Detached Eddy Simulation, Sixth International Conference on Computational Fluid Dynamics, St. Petersburg, Russia, 2010
15. Horáková K., Fraňa K.: Statistical analysing of unsteady flows, 30. Setkání kateder Mechaniky tekutin a Termomechaniky, Špindlerův Mlýn, 22. - 24. 6. 2011

16. Horáková K., Fraňa K.: Energetic spectra of unsteady flows, Journal of Applied Science in the Thermodynamics and Fluid Mechanics, 1/2011
17. Horáková K., Fraňa K.: Lorentz Forces in the Container, World Academy of Science Engineering and Technology (WASET), Issue 59, Venice Italy, November 2011
18. Horáková K., Fraňa K.: CFD solution of MHD, Journal of Applied Science in the Thermodynamics and Fluid Mechanics, 2/2011
19. Horáková K., Fraňa K.: Unsteady melt flows in the cylindrical container, 11th conference on Power System Engineering, Thermodynamics and Fluid Flow - ES 2012, Srní, Czech Republic, June 13-15 2012
20. Horáková K., Fraňa K.: Description of Lorentz forces in the cuboid container, 31. Setkání kateder mechaniky tekutin a termomechaniky, Mikulov, Czech Republic, 26. – 28. června 2012
21. Horáková K., Fraňa K.: Lorentz forces caused by rotating magnetic field, International Conference Experimental Fluid Mechanics 2012, listopad 2012 - publikováno též v: European Physical Journal - Web of Conferences 45, 01039 (2013)
22. Horáková K.: Numerická simulace magnetohydrodynamických toků, Studentská vědecká a odborná činnost 2013, TU v Liberci, 2013
23. Horáková K., Fraňa K.: Description of unsteady flows in the cuboid container caused by Lorentz forces, Engineering MECHANICS, p. 169–177, Vol. 20, No. 3/4, 2013
24. Horáková K., Fraňa K., Honzejek V.: Description of unsteady flows in the cuboid container, International Journal of Mechanical, Industrial Science and Engineering, World Academy of Science, Engineering and Technology, International Science Index 74, pp. 1024 – 1029, Vol. 7 No. 2, 2013