

MASTER

Doceren van redeneren en bewijzen na de wijziging van het examenprogramma in 2015

de Wit, Bart

Award date:
2020

[Link to publication](#)

Disclaimer

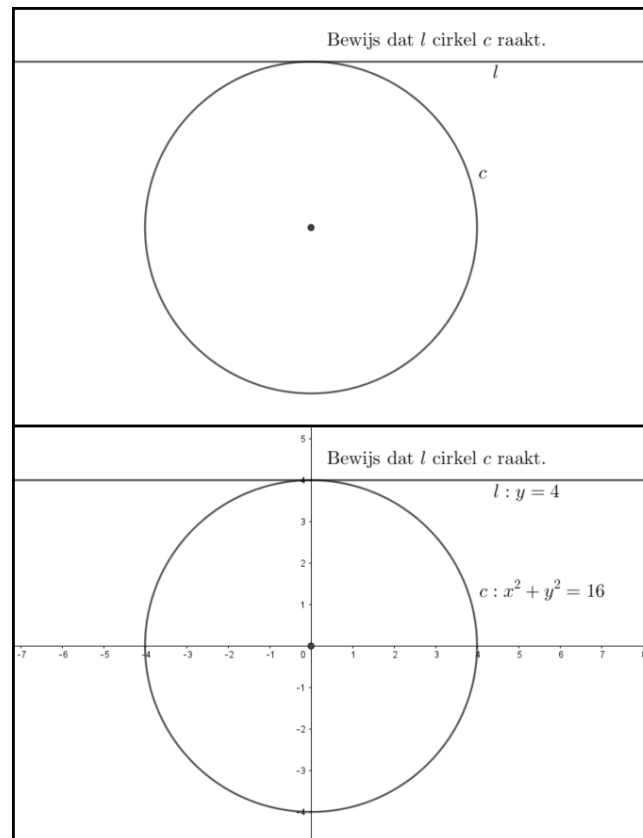
This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Doceren van redeneren en bewijzen na de wijziging van het examenprogramma in 2015



Een onderzoek naar de gevolgen voor het doceren van redeneren en bewijzen na het wijzigen van het examenprogramma voor 5 vwo wiskunde B



Student:	Bart de Wit (0741692)
Begeleider:	Prof. Dr. B.E.U. Pepin
Opleiding:	Master Science Education and Communication wiskunde
Opleidingsinstituut:	Eindhoven School of Education van de Technische Universiteit Eindhoven
Vak:	Onderzoek van Onderwijs (30 EC-variant)
Datum:	23 augustus 2020

Verklaring inzake TU/e Gedragscode



**Verklaring inzake TU/e Gedragscode Wetenschapsbeoefening
in het kader van de Masterscriptie**

Ik heb kennis genomen van de TU/e Gedragscode Wetenschapsbeoefening¹.

Hierbij verklaar ik dat mijn Masterscriptie conform de regels van de TU/e Gedragscode Wetenschapsbeoefening tot stand is gekomen.

Datum

23-08-2020

Roepnaam Achternaam (student 1)

Bart de Wit

Roepnaam Achternaam (student 2)

N.V.T.

Handtekening (student 1).

Handtekening (student 2).

Lever de ondertekende verklaring in bij de coördinator van Onderzoek van Onderwijs

¹ Zie: <http://www.tue.nl/universiteit/over-de-universiteit/integriteit/wetenschappelijke-integriteit/>
Hier is ook de Nederlandse Gedragscode Wetenschapsbeoefening van de VSNU te vinden.
Meer informatie over wetenschappelijke integriteit is te vinden op de websites van de TU/e en de VSNU.

1 Voorwoord

Deze scriptie heb ik geschreven voor mijn afstudeeronderzoek van de Master of Science Education and Communication aan de Eindhoven School of Education, Technische Universiteit Eindhoven. Dit onderzoek heeft door persoonlijke omstandigheden vier jaar in beslag genomen. Ik begon in september 2016 met het opzetten van het onderzoeksplan en het verzamelen van de data. De overige jaren zijn gevuld met het verantwoorden en schrijven van het verslag.

Tijdens het uitvoeren van mijn onderzoek en het schrijven van mijn verslag was ik werkzaam in het VO. Halverwege ben ik op het hbo gaan werken. Ik heb ervaring met het lesgeven en het leren van de euclidische meetkunde. Voor dit onderzoek ben ik mij gaan verdiepen in het doceren van redeneren en bewijzen en dit heeft mij geholpen om dit vak te doceren.

Onder begeleiding van prof. dr. Brigit Pepin heeft het onderzoeksplan vorm gekregen. Samen met Kirsten Oosterom heb ik de methodeboeken geanalyseerd en hebben we ervoor gezorgd dat alle hoofdstukken door vier ogen zijn gecontroleerd. Mijn onderzoeksbegeleider is bij het uitvoeren van het onderzoek een grote steun voor me geweest. Zij hielp mij als ik het nodig had en gaf telkens een zetje in de goede richting als ik niet wist wat de volgende stap moest worden. Zonder haar had ik dit niet kunnen verwezenlijken. Ook Kirsten Oosterom heeft veel geholpen en ervoor gezorgd dat in de beginfase het tempo er goed in bleef. Dank voor jullie inzet en hulp. Uiteraard wil ik ook de scholen en in het bijzonder de docenten bedanken bij wie ik de lesobservaties mocht doen en interviews kon afnemen.

2 Samenvatting

In het schooljaar 2015/2016 is een nieuw examenprogramma in werking gesteld op het vwo in de bovenbouw van het vak wiskunde B. Er zijn veel veranderingen binnen het domein redeneren en bewijzen. In dit onderzoek wordt onderzocht wat voor invloed deze veranderingen hebben op het doceren van redeneren en bewijzen en welke mogelijkheden de nieuwe methodeboeken bieden om te leren redeneren en bewijzen.

Voor dit onderzoek zijn zowel de methodeboeken van het oude als het nieuwe examenprogramma geanalyseerd. Bij deze analyse is gekeken naar de mogelijkheden van redeneren en bewijzen. Ook heeft er een literatuuronderzoek plaatsgevonden om te achterhalen hoe redeneren en bewijzen gedoceerd kan worden en wat de bijdrage van redeneren en bewijzen is voor de leerlingen. Vervolgens hebben er lesobservaties plaatsgevonden bij docenten die een hoofdstuk over redeneren en bewijzen met het nieuwe examenprogramma doceerden. Als laatste zijn de docenten geïnterviewd om te bepalen waar zij hun keuzes in de methodiek op baseren en naar hun voorbereidingen te vragen. Uit dit onderzoek bleek dat docenten de wijzigingen maar beperkt doorvoeren in de lessen en veelal vasthouden aan het oude examenprogramma. De analyse van de methodeboeken laat echter zien dat de leerdoelen anders zijn dan de leerdoelen van het oude examenprogramma. De leerdoelen liggen in het nieuwe examenprogramma meer op de analytische meetkunde dan de euclidische meetkunde. Docenten merken dit beperkt op en vullen de nieuwe leerdoelen aan met de oude leerdoelen. Ook blijkt dat docenten weinig tot niet communiceren met elkaar over de wijzigingen. Binnen één school gaan de docenten op merkbaar verschillende manieren om met de vernieuwde hoofdstukken. Communicatie over de verkregen inzichten is er niet en een gezamenlijke voorbereiding ontbreekt.

3 Inhoudsopgave

1	Voorwoord.....	2
2	Samenvatting	4
3	Inhoudsopgave.....	5
4	Inleiding.....	7
5	Methode.....	9
5.1	Context en steekproef van methodeboeken, docenten en scholen	9
5.2	Methode tekstboek analyse	10
	Horizontale analyse	12
	Verticale analyse van de uitleggende teksten	13
	Verticale analyse van de leerlingactiviteiten	14
	Analyseschema	15
5.3	Methode lesobservaties en docenten interviews	16
	Lesobservatie	17
	Interview	17
	Uitwerking observatielessen en interviews	18
6	Resultaten literatuuronderzoek	19
6.1	Wat is curriculum en hoe komt dit tot uiting in de les?	19
6.2	Wat is bewijzen en redeneren.....	20
6.3	Wat is het belang van redeneren en bewijzen en hoe is dit aan leerlingen te leren?.....	22
7	Resultaten tekstboekanalyse	24
7.1	Hoe wordt het begrip ‘bewijs’ geïntroduceerd?.....	24
	10 ^e editie	24
	11 ^e editie	26
7.2	In welke mate worden er uitgewerkte voorbeelden van bewijzen gegeven?	26
	10 ^e editie	26
	11 ^e editie	27
7.3	Op welke manier moeten bewijzen geformuleerd en genoteerd worden?	28
	10 ^e editie	28
	11 ^e editie	28
7.4	De aard van de opgaven waarin leerlingen een bewijs moeten geven	29
	10 ^e editie	29
	11 ^e editie	29
7.5	De mate van sturing die in opgaven gegeven wordt om tot een bewijs te komen	30

10 ^e editie	31
11 ^e editie	31
7.6 De diversiteit aan stellingen en eigenschappen die de leerlingen moet kennen.....	31
10 ^e editie	32
11 ^e editie	32
8 Resultaten lesobservaties en interviews	33
8.1 Hoe zijn de docenten de wijzigingen te weten gekomen?	33
8.2 Mening over de veranderingen binnen redeneren en bewijzen.....	34
8.3 Wat zijn de leerdoelen van het hoofdstuk volgens de docenten en hoe gaan ze hiermee om?	36
8.4 De gevolgen voor de lessen.....	38
8.5 Materialen.....	39
8.6 Wat vinden de docenten een bewijs?	41
9 Conclusies.....	43
10 Literatuur.....	46
11 Bijlage.....	49
11.1 Bijlage 1. Definitieve horizontale analyse schema	49
11.2 Bijlage 2. Lesobservatieschema	52
11.3 Bijlage 3. Vragen interview	57

4 Inleiding

In 2015 is het examenprogramma wiskunde aangepast voor de leerlingen in de bovenbouw. Met name in het domein redeneren en bewijzen zijn veel leerdoelen veranderd. Dit zorgt ervoor dat docenten nieuwe leerdoelen moeten leren en doceren. In dit onderzoek is onderzocht hoe docenten omgaan met deze curriculumwijziging, toegespitst op het domein redeneren en bewijzen in 5 vwo wiskunde B.

Zoals aangegeven is het examenprogramma van havo en vwo is veranderd voor leerlingen die vanaf het schooljaar 2015-2016 in de 4e havo/vwo klas zitten. Om die reden zijn deze leerlingen en hun docenten gaan werken met een nieuwe editie van hun methodeboek. Het domein Gb 'voortgezette meetkunde' is uit het programma verwijderd. In dit domein zaten bewijzen uit de euclidische meetkunde. Daarvoor is het domein E "Meetkunde met coördinaten" in de plaats gekomen. In dit nieuwe domein ligt de focus van het bewijzen niet meer bij de euclidische meetkunde, maar is deze verplaatst naar de algebraïsche vaardigheden in plaats van het wiskundig redeneren en een wiskundig bewijs opzetten.

Redeneren en bewijzen is een belangrijk onderdeel binnen de wiskunde. Als een leerling het in een bepaald wiskundedomein kan inzetten, dan wordt verondersteld dat hij een dieper begrip ontwikkelt over dit domein (Stylianides & Ball, 2008; Stylianides, 2014). Uit de onderzochte literatuur blijkt dat redeneren en bewijzen één van de onderdelen van 'mathematical proficiency' is (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

Het is de taak van docenten om leerlingen te helpen de wiskundige vaardigheden te ontwikkelen, inclusief redeneren en bewijzen. De methodeboeken worden vaak beschouwd als een cruciaal hulpmiddel voor het doceren van het curriculum (Pepin & Haggarty, 2001). Leerlingen ontwikkelen hun begrip van een bepaald wiskundig domein door de methodeboeken (en het gebruik daarvan door de docenten).

In termen van redeneren en bewijzen, beweert Stylianides (2011) dat docenten een goede kennis van redeneren en bewijzen nodig hebben. Nu het curriculum is gewijzigd, zullen docenten een andere aanpak moeten gebruiken om de leerlingen te kunnen activeren om ze de juiste kennis van de onderwerpen mee te geven. Ook zullen de docenten andere stof moeten doceren, die aansluit bij het nieuwe examenprogramma. En deze nieuwe manier van doceren moet ervoor zorgen dat de leerlingen een goed begrip van redeneren en bewijzen vormen. Maar in hoeverre hebben docenten kennis van dit nieuwe onderwerp? Weten zij wat er veranderd is en waarom dat zo is? en weten ze ook waarom en wat deze veranderingen zijn? Hebben de wijzigingen invloed op de kwaliteit van het redeneren en bewijzen in de methodeboeken? Brengen docenten de nieuwe eisen voor redeneren en bewijzen adequaat toe in hun lessen?

Al deze vragen leiden tot de onderzoeksvraag: *‘Op welke manieren gaan docenten om met redeneren en bewijzen in 5 vwo wiskunde B in de meetkunde in het nieuwe curriculum van 2015?’*

Om hier antwoord op te krijgen zijn er drie deelvragen geformuleerd:

- (1) Wat zegt de literatuur over hoe docenten het onderwerp redeneren en bewijzen kunnen doceren?
- (2) Hoe worden de begrippen ‘bewijs’ en ‘redeneren’ in de meetkunde gepresenteerd in lessen en lesmethoden behorend bij het oude en het nieuwe examenprogramma voor vwo wiskunde B en welke ‘middelen’ (o.a. taken, opdrachten, activiteiten en (digitale) middelen) worden hiervoor gebruikt?
- (3) Hoe bereiden docenten zich voor op het nieuwe hoofdstukken over redeneren en bewijzen en hoe doceren ze het?

Om bovenstaande onderzoeksvragen te beantwoorden wordt in hoofdstuk 5 een toelichting gegeven over de in dit onderzoek gebruikte onderzoeksmethoden. Daar wordt ook besproken hoe de data verkregen en geanalyseerd zijn. In hoofdstukken 6, 7 en 8 worden de resultaten gegeven van respectievelijk het literatuuronderzoek, tekstboekaanalyse en de lesobservaties en docenteninterviews. In hoofdstuk 9 staan de conclusies en de implicaties.

5 Methode

Dit verkennende onderzoek is hoofdzakelijk uitgevoerd in de vorm van een casestudy van een kleine groep van vijf docenten, verdeeld over twee scholen. Tabel 1 geeft een koppeling weer van de onderzoeksvragen aan methoden van dataverzameling:

Deelvraag	Datacollectie
1 Wat zegt de literatuur over hoe docenten het onderwerp redeneren en bewijzen kunnen doceren?	Literatuurstudie
2 Hoe worden de begrippen ‘bewijs’ en ‘redeneren’ in de meetkunde gepresenteerd in lessen en lesmethoden behorend bij het oude en het nieuwe examenprogramma voor vwo wiskunde B en welke ‘middelen’ (o.a. taken, opdrachten, activiteiten en (digitale) middelen) worden hiervoor gebruikt?	Leerboekanalyse
3 Hoe bereiden docenten zich voor op het nieuwe hoofdstukken over redeneren en bewijzen, en hoe doceren ze het?	Interviews en lesobservaties bij docenten

Tabel 1. Koppeling deelvragen en datacollectie

5.1 Context en steekproef van methodeboeken, docenten en scholen

Er is literatuuronderzoek gedaan rondom het redeneren en bewijzen vanuit het perspectief van de docent en het curriculum. De eerste deelvraag is beantwoord met behulp van de onderzochte en geanalyseerde literatuur. De onderzochte literatuur diende ook als basis voor het beantwoorden van de overige twee deelvragen.

Om de verschillen te bekijken voor en na de verandering van de examenstof zijn de oude (10^e) en de nieuwe (11^e) editie van ‘Moderne wiskunde’ met elkaar vergeleken met betrekking tot de hoofdstukken over redeneren en bewijzen.

Stylianides (2014) geeft inzichten over wat redeneren en bewijzen is, welke onderdelen hierin zitten en welke hiervan belangrijk zijn. Hier is in de analyse rekening mee gehouden. Otten, Gilbertson, Males en Clark (2014) hebben verschillende analyses uitgevoerd. Deze analyses leverden een bijdrage aan de methodeanalyse van dit onderzoek. Met behulp van een eigen ontworpen analyseschema (zie bijlage 1) zijn de boeken geanalyseerd op de mogelijkheden van ‘bewijzen en redeneren’ die in de boeken worden geboden. Er zijn verschillende criteria gebruikt om zowel een horizontale als verticale analyse uit te voeren, zoals gedefinieerd door Charalambous, Delaney, Hsu en Mesa (2010). Bij de horizontale

analyse is gekeken naar de algehele structuur van de methodeboeken. In de verticale analyse is met detail naar de inhoud van een hoofdstuk gekeken. Daarbij is onderzocht in hoeverre de verschillende vormen van bewijzen aan bod komen in de nieuwe (11^e) en oude (10^e) editie van ‘Moderne wiskunde’. Voor het tweede deel van deze deelvraag zijn de door de docenten gebruikte externe middelen bekeken. De leeractiviteiten van leerlingen vinden immers niet alleen maar plaats met behulp van methodeboeken, maar ook met ander materiaal dat door de docent wordt aangeboden. Op deze manier is geprobeerd een zo volledig mogelijk beeld te krijgen van de huidige en vorige situatie.

Vervolgens zijn er docenten geïnterviewd over hoe zij zich voorbereiden op het nieuwe hoofdstuk over redeneren en bewijzen. Hier is met name gelet op wat daarin veranderd is, hoe de opdrachten bij de andere theorie eruitzien en of er andere hulpmiddelen worden ingezet.

Daarnaast zijn er lessen van de docenten geobserveerd met behulp van een observatieschema. Zo is een beeld ontstaan over de gebruikte middelen in de lessen en hoe de docenten de stof overbrengen op de leerlingen. Met de interviews en lesobservaties samen is de derde deelvraag beantwoord.

De docenten die voor dit onderzoek zijn geobserveerd en geïnterviewd zijn werkzaam op twee middelbare scholen. Twee docenten werken op een middelbare school in het westen van het land en drie docenten op een middelbare school in het midden van het land. De vijf docenten geven les aan 5 vwo wiskunde B.

5.2 Methode tekstboek analyse

Pepin (2014) kwam tot de conclusie dat wiskundedocenten de methodeboeken niet strikt volgen. Zij volgen vaak de structuur van een methodeboek en maken daarnaast gebruik van andere materialen in hun lessen. Omdat ze de structuur van de methodeboeken volgen, is het belangrijk om deze goed te analyseren, om een beeld te krijgen van de wijzigingen op het terrein van redeneren en bewijzen. Voor dit onderzoek is een speciale tekstboekanalyse ontwikkeld, gebaseerd op literatuur over tekstboekanalyse van educatieve wiskundeboeken. Het kader dat Charalambous et al. (2010) opstelden is gebruikt als basis voor het ontwikkelen van het schema voor dit onderzoek.

In dit onderzoek is ook literatuur bestudeerd waarin tekstboekanalyses worden uitgevoerd die specifiek gaan over het leren redeneren en bewijzen in de meetkunde, zoals bijvoorbeeld de analyse van Otten et al. (2014), waarin zes verschillende methodeboeken over dit onderwerp onderzocht zijn. Zij hanteren verschillende termen die zeer bruikbaar zijn voor het analyseren van de methodeboeken in dit onderzoek. Gebaseerd op de schema's Charalambous et al. (2010) en Otten et al. (2014) is een schema ontwikkeld waarmee de methodeboeken van de methode ‘Moderne wiskunde’ voor 4, 5 en 6 vwo wiskunde B zijn geanalyseerd. Hier zijn zowel de methodeboeken van de 10^e editie, behorend bij het oude examenprogramma, als de methodeboeken van de 11^e editie, behorend bij het nieuwe

examenprogramma, onderzocht. De methodeboeken van 4 en 6 vwo zijn in dit onderzoek ook meegenomen om te achterhalen welke kennis de leerlingen al hebben in 5 vwo en naar welke kennis toe gebouwd wordt.

Op deze zes onderzochte methodeboeken is zowel een horizontale als een verticale analyse uitgevoerd, zoals gedefinieerd door Charalambous et al. (2010). In de horizontale analyse is de achtergrondinformatie verzameld en de globale structuur van de boeken onderzocht. Er is gekeken naar de auteurs en hun visie op hoe het boek gebruikt dient te worden en hoe het leren plaats zou moeten vinden. De verticale analyse is toegepast op de hoofdstukken die over redeneren en bewijzen gaan, te weten de volgende hoofdstukken:

10^e editie:

4 vwo hoofdstuk 5

5 vwo hoofdstuk 5 en 6

6 vwo hoofdstuk 3 en 4

11^e editie:

4 vwo hoofdstuk 5

5 vwo hoofdstuk 5 en 7

6 vwo hoofdstuk 6

De verticale analyse is opgesplitst in twee delen. Als eerste zijn de uitlegonderdelen in de methodeboeken bestudeerd. Dat betreft alle uitleggende tekst waarin informatie staat die gelezen moet worden door de leerlingen (en docenten), zoals uitlegblokken en uitgewerkte voorbeelden. Deze teksten bevatten wat het boek wil dat de leerlingen leren. Zo is achterhaald waar het boek de nadruk op legt.

Vervolgens zijn de leerlingactiviteiten bekeken. Dat zijn de opgaven in het boek, waarbij leerlingen één of meerdere wiskundige activiteiten moeten uitvoeren, zoals een vraag beantwoorden, een probleem oplossen, een bewijs leveren of een combinatie van deze drie. Zo is onderzocht in welke mate de leerlingen de onderwerpen volgens het boek moeten beheersen.

De focus is bewust niet alleen op de opgave gelegd, maar ook op de teksten en uitgewerkte voorbeelden die in het boek zijn te vinden. Beide onderdelen dragen namelijk bij aan de potentiële mogelijkheden die leerlingen hebben om te leren redeneren en bewijzen (Ottens et al. 2014).

Er is een aantal methodologische keuzes gemaakt met betrekking tot de tekstboekanalyse. Een methodeboek kan vanuit verschillende perspectieven geanalyseerd worden (Stylianides, 2014). Gezien het feit dat in dit onderzoek het beoogde doel achter de teksten en de opgaven wilde analyseren, is gekozen voor een wiskundig perspectief en niet voor een leerling-, docenten- of auteursperspectief. Daarnaast moest besloten worden of aanvullend materiaal, zoals docentenhandleidingen,

uitwerkingenboeken en digitaal materiaal, wel of niet zou worden meegenomen in de analyse (Stylianides, 2014). In dit onderzoek wordt het aanvullende materiaal van de methode niet standaard meegenomen in de horizontale en verticale analyse, omdat met behulp van de tekstboekanalyse onderzocht is welke mogelijkheden het methodeboek zelf biedt voor leerlingen om te leren redeneren en bewijzen en voor docenten om dit onderwerp te doceren. Omdat er sprake is van connectiviteit op macroniveau tussen het methodeboek en het aanvullend materiaal, zoals gedefinieerd in Gueudet, Pepin, Restrepo, Sebra en Trouche (2016), zal het aanvullende materiaal mogelijk een rol spelen bij het leren en doceren van redeneren en bewijzen. Om deze reden is het aanvullende materiaal bekeken waar dit zinvol was.

De methodeboeken zijn door twee personen onafhankelijk van elkaar geanalyseerd, door Kirsten Oosterom en mijzelf. Daarna zijn deze twee analyses met elkaar vergeleken, waarna de verschillen zijn besproken en in elkaar gevoegd.

Horizontale analyse

De horizontale analyse is uitgevoerd op de zes methodeboeken (vwo 4, 5 en 6, editie 10 en 11). De vragen zijn opgesplitst in de onderdelen ‘achtergrondinformatie’ en ‘structuur’. Net als in Pepin en Haggarty (2001) zijn ook de wiskundige en pedagogisch-didactische intenties van de schrijvers onderzocht. Dit om er achter te komen hoe de methodeboeken gebruikt dienen te worden, zowel door de docenten als de leerlingen.

Vragen voor het onderdeel achtergrondinformatie

- Wat is de titel van het boek?
- Voor welk niveau en welke jaarlaag is het boek gemaakt?
- Wat is het aantal boeken per reeks?
- Wie zijn de auteurs en wat is hun achtergrond?
- Wie is de uitgever en wat is het jaar van publicatie?
- Wat zijn de intenties van de auteurs?
 - Wat zijn de wiskundige intenties? Ligt de nadruk vooral op kennis of op vaardigheden?
 - Wat zijn de pedagogisch-didactische intenties? Spreekt het boek de leerling of de docent aan? Kunnen de leerlingen zelfstandig werken in het boek? Hoe wordt er hulp geboden aan de leerlingen?
- Wat zijn de bijbehorende materialen (zoals digitaal materiaal of een docentenhandleiding) en hoe dienen deze gebruikt te worden?

Vragen voor het onderdeel globale structuur

- Uit hoeveel hoofdstukken en paragrafen bestaat het boek?
- Wat is de structuur van de lessen in het boek en hoe zijn de pagina's van de lessen verdeeld over de verschillende onderdelen, zoals introductie, theorie en opgaven?
- Welke onderwerpen komen aan bod?
- Wat is de volgorde van de onderwerpen?

Verticale analyse van de uitleggende teksten

Na de horizontale analyse is de verticale analyse uitgevoerd op de uitleggende teksten. Fujita en Jones (2014) onderscheiden tien verschillende soorten tekstblokken. In dit onderzoek is een aantal van deze tekstblokken samengevoegd tot vier verschillen soorten uitleggende teksten: *theoretische tekst* (uitleg over een nieuwe procedure, formule of stelling), *gerelateerde tekst* (tekst gerelateerd aan een ander blok, bijvoorbeeld een tekstvlak met een conclusie of volgend op een leerlingactiviteit), *uitgewerkt voorbeeld* (voorbeeld dat stap voor stap is uitgewerkt) en *uitgewerkt voorbeeld met motivatie* (uitgewerkt voorbeeld met motivatie bij de stappen). Er is bijgehouden hoe vaak deze soorten uitleggende teksten voorkomen in de hoofdstukken.

Vervolgens is onderzocht wat volgens de methodeboeken een bewijs is en welke objecten in het boek een bewijs genoemd worden. Miyakawa (2012) beschrijft vier stappen om de bewijzen in een tekst te analyseren. Daarvan zijn de eerste twee stappen uitgevoerd, namelijk:

- (1) Identificeren en duidelijk krijgen wat 'bewijs' genoemd wordt.
- (2) Het identificeren van de belangrijkste kenmerken van dat bewijs.

De overige twee stappen gaan te ver voor dit onderzoek. De bewijzen die in het boek als voorbeeld worden gegeven zijn geanalyseerd en daarvan zijn de hoofdkenmerken beschreven. Dat heeft geholpen om te begrijpen welk aspect van bewijzen ervoor zorgt dat een object gezien wordt als een bewijs en dus hoe een leerling leert kijken naar een bewijs. De definitie en kenmerken van een bewijs die gevonden zijn in de methodeboeken zijn vergeleken met de definitie van Stylianides (2007) voor een bewijs in de schoolwiskunde (zie 6.2). Aan bovengenoemde twee stappen is nog een derde stap toegevoegd, namelijk:

- (3) Het identificeren van de stellingen die genoemd worden in de tekst.

Ook is onderzocht met wat voor soort argumenten deze stellingen worden verantwoord. Hierbij is, net als bij Thompson, Senk en Johnson (2012), een onderscheid gemaakt tussen deductieve en empirische argumenten. Het komt ook voor dat de argumenten ontbreken of dat deze aan de leerling overgelaten worden.

Otten et al. (2014) voegt hier nog de opties ‘schets’ en ‘verleden of toekomst’ aan toe. Met ‘schets’ wordt bedoeld dat de uitleggende tekst een schets bevat van een bewijs of de belangrijkste stap van een bewijs. Met ‘verleden of toekomst’ wordt bedoeld dat er verwezen wordt naar een vorige paragraaf of vorig hoofdstuk of verderop in of buiten het methodeboek (bijvoorbeeld het internet).

In totaal zijn aldus de volgende zes codes gebruikt bij het identificeren van de stellingen: *deductief argument*, *empirisch argument*, *argument ontbreekt*, *argument aan de leerling overgelaten*, *schets* en *interne of externe verwijzing*.

Verticale analyse van de leerlingactiviteiten

Ten derde is de verticale analyse uitgevoerd op de leerlingactiviteiten, zoals beschreven in de hoofdstukken. Hierin zijn alle opgaven die in de voorkennisparagrafen, de uitlegparagrafen en de testparagrafen staan onderzocht. De opgaven die voor extra oefening of als extra uitdaging in het boek opgenomen zijn, werden niet geanalyseerd. Het aantal opgaven dat gerelateerd is aan redeneren en bewijzen is geteld en op de volgende wijze onderverdeeld:

(1) Of in de opgave gevraagd wordt om een *deductief*, *empirisch* of *impliciet argument*:

- Bij een *deductief argument* wordt er in de opgave gevraagd naar een deductief argument of naar een logische ketting van argumenten.
- Bij een *empirisch argument* wordt gevraagd naar bevestigende voorbeelden.
- Bij een *impliciet argument* wordt in de opgave naar een redenering of bewijs gevraagd (bijvoorbeeld: ‘Bewijs dat ...’ of ‘Leid af dat ...’), maar staat niet expliciet vermeld wat de aard is van het argument waar om gevraagd wordt.

(2) Of de te bewijzen stelling (of ander statement) een *algemene stelling* of een *specifieke stelling* is:

- Algemeen wil zeggen: een algemene stelling die geldig en bruikbaar is in allerlei situaties.
- Specifiek wil zeggen: geldend voor één bepaalde situatie.

(3) Welke actie er van leerlingen verwacht wordt in de opgave. Hierin is onderscheid gemaakt in de volgende mogelijkheden, zoals in Otten et al. (2014): *een vermoeden maken*, *een vermoeden of stelling onderzoeken*, *een argument of bewijs evalueren of corrigeren*, *een tegenvoorbeeld vinden*, *een bewijs construeren* (‘Bewijs dat ...’, ‘Leid af dat ...’), *een rationale of niet-bewijs argument ontwikkelen* (‘Leg uit dat ...’ en ‘Rechtvaardig dat ...’, ‘Laat zien dat ...’), *schets van een bewijs geven of een bewijs construeren aan de hand van een gegeven schets*, en *anders* (dubbel gecodeerd).

Analyseschema

Met behulp van het bovenstaande is een analyseschema ontwikkeld. Tijdens de verticale analyse van de methodeboeken bleek het analyseschema nog niet volledig genoeg te zijn voor dit onderzoek. Daarom zijn enkele wijzigingen aangebracht en onderdelen toegevoegd. Bij de horizontale analyse was dit niet nodig.

Tijdens de analyse bleek dat het voor dit onderzoek belangrijk is dat de verschillende uitgewerkte voorbeelden anders ingedeeld worden. Het verschil maken tussen een uitgewerkt voorbeeld met of zonder motivatie bleek niet toereikend genoeg. Hierdoor is ervoor gekozen om te werken met de volgende codes: *voorbeeldbewijs zonder motivatie (Ub)*, *voorbeeldbewijs met motivatie (Ubm)*, *voorbeeldberekening (Ur)* en *voorbeeldconstructie (Uc)*.

Ook bleek er een belangrijke code te ontbreken bij het analyseren van de stellingen in het boek. De leerlingen leren namelijk dat een bewezen stelling niet nogmaals bewezen hoeft te worden, maar ze deze gewoon mogen gebruiken. Hierdoor komt het weleens voor dat een stelling niet bewezen wordt, omdat dit eerder al is gedaan. De stelling is dan wel degelijk bewezen. Om deze reden zijn de volgende codes gebruikt: *Bewijs door boek in een eerder hoofdstuk (Hb)*, *bewijs door leerling in een eerder hoofdstuk (Hl)* en *genoemd maar niet bewezen in een eerder hoofdstuk (Hg)*. Hierdoor is een beter inzicht verkregen in hoe het methodeboek omgaat met stellingen en het bewijzen daarvan.

In het oorspronkelijke schema onderscheidde drie soorten bewijsopgaven, namelijk met een deductief, empirisch of impliciet argument. Een bewijs met een empirisch argument bleek echter niet voor te komen in de boeken. Dat was achteraf ook te verwachten. Een empirisch argument alleen is niet genoeg om een bewijs te leveren. De categorie ‘bewijsopgave met empirisch argument’ is daarom komen te vervallen. Tijdens de analyse van hoofdstuk 5 ‘Bewijzen in de meetkunde’ uit het boek voor 5 vwo van de 10^e editie bleek dat leerlingen leren om te werken met indirecte bewijzen, namelijk met een tegenvoorbeeld, een bewijs uit het ongerijmde of een bewijs met gevalsonderscheiding. Deze indirecte bewijzen zijn belangrijk genoeg bevonden om deze categorieën op te nemen.

Daarnaast is ook de categorie ‘bewijsopgave met algebraïsch meetkundig argument’ toegevoegd. Tijdens de analyse van hoofdstuk 5 ‘Lijnen’ uit het boek voor 4 vwo van de 11^e editie bleek dat deze categorie een toegevoegde waarde biedt.

Bij het analyseren van de bewijsopgaven is ook nog onderscheid gemaakt in het soort stelling dat in de opgave door de leerlingen bewezen wordt. Daarvoor is onderscheid gemaakt in twee categorieën: *algemene stelling* en *specifieke stelling*. Bij het uitvoeren van de verticale analyse bleek dat in sommige

opgaven een algemene stelling bewezen wordt, maar niet in de meest zuivere vorm. Daarom is de categorie ‘quasi-algemene stelling’ toegevoegd. Dit is een stelling die niet specifiek en alleen maar voor één bepaalde opdracht van toepassing is, maar ook geen stelling die heel breed inzetbaar is. Er zijn dus een paar restricties van toepassing.

Ook bij de analyse van de redeneeropgaven vonden wijzigingen in de categorieën plaats. De oude categorieën bleken niet alleen betrekking te hebben op redeneeropgaven, maar ook op bewijsopgaven. Dat werkte verwarrend en daarom zijn de categorieën aangepast. Zo is de categorie ‘een bewijs construeren’ gewijzigd in ‘een deductief argument ontwikkelen’. Daarnaast zijn de categorieën ‘algebraïsch argument ontwikkelen’ en ‘empirisch argument ontwikkelen’ toegevoegd, waarvan de eerste op basis van de analyse van de methodeboeken van de 11^e editie. De categorie ‘*schets van een bewijs geven of een bewijs construeren aan de hand van een gegeven schets*’ is gewijzigd in ‘*schets van een bewijs geven of bedenken wat de volgende stap is*’. De oude categorie had namelijk ook betrekking op bewijsopgaven, wat niet de bedoeling was. Daarnaast bleek dat er in de verschillende boeken af en toe een opgave stond die bedoeld was om vooruit te denken over wat de volgende stap in een bewijs zou kunnen zijn. Omdat dit zeker redeneeropgaven zijn, moesten ook deze opgaven een plek krijgen binnen de categorieën. Op basis van hoofdstuk 6 ‘Meetkundige plaatsen’ uit het boek voor 5 vwo van de 10^e editie en hoofdstuk 4 ‘Tekenen en bewijzen’ uit het boek voor 6 vwo van de 10^e editie, is de categorie ‘redenering voor een constructie geven’ toegevoegd. In een aantal opgaven moeten leerlingen beredeneren waarom een bepaalde meetkundige constructie klopt.

Op basis van de boeken van de 11^e editie is ook de categorie ‘berekening met meetkundig argument’ toegevoegd. Leerlingen moeten in het nieuwe examenprogramma regelmatig algebraïsche berekeningen uitvoeren waarbij ze gebruik moeten maken van meetkundige stellingen.

Dit alles samen heeft geresulteerd in het definitieve analyseschema dat te vinden is in bijlage 1. Met behulp van dit schema zijn alle boeken en hoofdstukken geanalyseerd.

5.3 Methode lesobservaties en docenten interviews

Voor het beantwoorden van deelvraag twee: ‘*Hoe worden de begrippen ‘bewijs’ en ‘redeneren’ in de meetkunde gepresenteerd in lessen en lesmethoden behorend bij het oude en het nieuwe examenprogramma voor vwo wiskunde B en welke ‘middelen’ (o.a. taken, opdrachten, activiteiten en (digitale) middelen) worden hiervoor gebruikt?*’ en de derde deelvraag: ‘*Hoe bereiden docenten zich voor op het nieuwe hoofdstukken over redeneren en bewijzen en hoe doceren ze het?*’ is het belangrijk om te achterhalen hoe een docent zijn les geeft en voorbereidt. In dit onderzoek is ervoor gekozen om deze informatie op twee manieren te verkrijgen. Eerst zijn er lessen over bewijzen geobserveerd, vervolgens zijn de docenten die deze lessen gaven geïnterviewd. Met de observaties is een beter beeld

ontstaan van de activiteiten in de les. Er zijn in totaal tien lessen geobserveerd van vijf verschillende docenten. Deze lessen gaan over paragrafen 7.3 tot en met 7.6 van ‘Moderne wiskunde’ uit de 11^e editie van vwo 5. Door middel van het interview is gekeken naar de beweegredenen en intenties van de docent en is gevraagd naar de verschillen in de les die ze gaven toen ze de 10^e editie van ‘Moderne wiskunde’ gebruikten. De interviews vonden plaats gedurende dezelfde schoolperiode als de lessen.

Lesobservatie

Met de lesobservaties is gekeken naar de middelen die de docent inzet om de leerlingen het redeneren en bewijzen aan te leren. Ook is gekeken naar de inhoud van de les om erachter te komen welke keuzes de docent maakt met betrekking tot de inhoud. Voor dit onderzoek is vooral op de activiteiten van de docent gelet.

Voor het doceren van redeneren en bewijzen zijn in de literatuur een paar belangrijke componenten gevonden. Zo is het volgens Stylianides (2011) belangrijk dat docenten een goede kennis hebben van redeneren en bewijzen om veel voorkomende misconcepties bij leerlingen weg te kunnen nemen. Hiervoor is het belangrijk dat de docent dit begrip over redeneren en bewijzen overbrengt op de leerlingen. Mariotti en Balacheff (2008) geven aan dat een uitgewerkt voorbeeld kan helpen om de leerlingen meer inzicht te geven in de gedachtegangen achter de stappen in een bewijs. Hier is in de observaties dan ook rekening mee gehouden. Zoals eerder aangegeven speelt het methodeboek een grote rol in de lessen van de docenten. In de observaties is er dan ook op gelet welke rol het boek speelt in de les, om erachter te kunnen komen in hoeverre de inhoud van het boek leidend is in de lessen. Worden er bijvoorbeeld opdrachten uit het boek gebruikt? Of wordt het boek alleen als leidraad gebruikt? Ook is bij de observaties gekeken naar de extra middelen die de docent gebruikt om de leerlingen het redeneren en bewijzen te leren.

In samenwerking met Kirsten Oosterom is een lesobservatieschema opgesteld dat te vinden is in bijlage 2.

Interview

Volgens Stylianides en Ball (2008) hebben docenten een goede kennis van redeneren en bewijzen nodig om dit onderwerp goed op leerlingen over te kunnen brengen. Doordat het examenprogramma is aangepast, moeten docenten de hoofdstukken die zijn veranderd anders gaan doceren. Via interviews met de docenten is onderzocht wat zij anders zijn gaan doen dan in de lessen behorend tot het oude examenprogramma.

- Er is onderzocht wat de docenten weten van de veranderingen in het examenprogramma binnen het domein redeneren en bewijzen.
- Er is gevraagd wat de docent anders is gaan doen in zijn/haar voorbereidingen voor de lessen.
- Er is gevraagd naar de intenties van de docent; hoe willen zij dit nieuwe onderwerp overbrengen op de leerlingen en hoe denken zij dit te bereiken?

Hierop is een interviewleidraad ontwikkeld. Deze is te vinden in bijlage 3.

Uitwerking observatielessen en interviews

Een uitgeprinte lege versie van het lesobservatieschema was bij iedere (blok)uur enkelzijdig uitgeprint aanwezig. Tijdens de les werden de waarnemingen in het schema ingevuld. De grotere voorbeelden in de informatie op het bord werd op de lege achterkanten bijgehouden. Op deze wijze was er altijd genoeg plek om ervoor te zorgen dat alle informatie uit de les genoteerd kon worden.

Na elke les is het met de hand ingevulde formulier gedigitaliseerd. Hierdoor ontstond een goed beeld van de lessen in de praktijk, van het handelen van de docenten en wat ze de leerlingen als uitleg meegeven. Doordat de methodeboeken reeds waren geanalyseerd, konden de lessen geobserveerd worden met de inhoud van de boeken in het achterhoofd. Hierdoor viel het snel op welke onderdelen van het boek wel en welke onderdelen niet aan bod kwamen.

Na het zien van alle lessen van een bepaalde docent is deze geïnterviewd. Bij de interviews werd waar daar aanleiding toe was afgeweken van de interviewleidraad. Zo is er bij het houden van de interviews ook rekening gehouden met de lessen, bijvoorbeeld door te vragen naar situaties die zich in de lessen hebben voorgedaan. Zaken die opvielen zijn in het interview nog eens bevraagd om erachter te komen wat de beweegredenen van de docent waren. Op deze manier is een duidelijk beeld ontstaan van de keuzes van de docenten. Alle interviews zijn opgenomen en getranscribeerd in de vorm van vraag en antwoord.

6 Resultaten literatuuronderzoek

In dit hoofdstuk worden de resultaten beschreven van het literatuuronderzoek dat is uitgevoerd naar het belang van redeneren en bewijzen en het doceren en leren van redeneren en bewijzen binnen het schoolvak wiskunde op het vwo. Met dit literatuuronderzoek is antwoord verkregen op de deelvraag: *“Wat zegt de literatuur over hoe docenten het onderwerp redeneren en bewijzen kunnen doceren?”*.

Hiertoe is onderscheid gemaakt tussen een drie deelonderwerpen. Eerst is onderzocht wat er precies met curriculum bedoeld wordt, hoe het curriculum tot stand komt en hoe het curriculum tot uiting komt in de les. Deze kennis maakte het mogelijk rekening te houden met het curriculum, zoals te vinden is in methodeboeken en de daadwerkelijke praktijk in de klas. Vervolgens is onderzocht wat er bedoeld wordt met redeneren en bewijzen. Als laatste is onderzocht waar het redeneren en bewijzen aan kan bijdragen binnen het schoolvak wiskunde op het vwo en hoe het redeneren en bewijzen gedoceerd kan worden.

6.1 Wat is curriculum en hoe komt dit tot uiting in de les?

Het curriculum kent meerdere betekenissen. Stein, Remillard en Smith (2007) leggen het volgende accent: *“het curriculum gaat over het ‘wat’ van de lessen die gegeven moeten worden en niet over ‘hoe’ dit gedaan moet worden.”* Ook betogen de onderzoekers dat beleidsmakers het curriculum vooral zien als een kader met verwachtingen voor de instructie. Anderzijds blijken onderzoekers en beoefenaars van wiskundeonderwijs de term ‘curriculum’ vooral te gebruiken om te verwijzen naar de materiële middelen die ontworpen zijn voor de docenten in de les.

Van den Akker (2003) maakt onderscheid tussen drie verschillende soorten curriculum en geeft deze de volgende benamingen: beoogd curriculum, geïmplementeerd curriculum en gerealiseerd curriculum. Het eerste verwijst naar het beoogde curriculum dat te vinden is in overheidsdocumenten, materialen en richtlijnen. Dit curriculum moet vervolgens geïmplementeerd worden door de docenten in de verschillende scholen. Het resultaat daarvan wordt het geïmplementeerde curriculum genoemd. Het gerealiseerde curriculum tenslotte is wat er daadwerkelijk door de leerlingen wordt geleerd in de les.

In Nederland wordt het beoogd curriculum (het examenprogramma) vastgesteld door de minister van onderwijs. Dit examenprogramma beschrijft in hoofdlijnen wat de leerlingen van het voortgezet onderwijs moeten kunnen en kennen. Ook staat hierin beschreven wat er wél getoetst wordt op het centraal schriftelijk examen en wat niet. De educatieve uitgeverijen worden tijdig in dit proces betrokken, zodat zij ervoor kunnen zorgen dat er nieuw methode-materiaal komt die het herziene examenprogramma weerspiegelen. Dit methodemateriaal moet klaar zijn voordat het nieuwe examenprogramma van kracht kan gaan.

Thompson en Senk (2014) deden onderzoek naar hoe het beoogde curriculum tot uiting komt in de wiskundeles. De onderzoekers volgden twaalf docenten die lesgeven met dezelfde methodeboeken. Hieruit bleek dat docenten heel uiteenlopend doceren. Sommigen slaan onderwerpen over, anderen zoeken er extra hulpmiddelen bij vanuit externe (digitale) bronnen. De onderzoekers ontdekten dat minder dan de helft van de onderwerpen door iedere docent is behandeld. Ook hadden de docenten een andere visie op huiswerk. Dit resulteerde erin dat de ene docent meer huiswerk opgaf dan de ander, of juist makkelijke opdrachten of moeilijke opdrachten meegaf als huiswerk. Een aantal docenten vond het boek goed leesbaar voor leerlingen en was van mening dat de leerlingen het zelf voor de les al gelezen moesten hebben, terwijl andere docenten juist de les gebruikten voor de overdracht van theorie.

Thompson en Senk (2014) zagen ook dat het gebruik van digitale middelen erg verschilde per docent. Bij de methode die de docenten in dit onderzoek gebruikten was ook een arsenaal aan digitale hulpmiddelen aanwezig. Niet alle docenten gebruikten deze, omdat ze soms ook niet wisten wat ze hiermee aan moesten. Pepin (2014) geeft aan dat nieuwe (digitale) middelen zoals onder andere e-boeken zorgen voor nieuwe uitdagingen. De tweede generatie e-boeken bieden merkbare veranderingen en meerdere mogelijkheden tot interactie, personalisatie en verbetering van de inhoud. Ze schrijft ook dat de computerprogramma's die onderdeel uitmaken van de methodes de docenten de mogelijkheid geven om een selectie van materialen beschikbaar te stellen per leerling.

Kilpatrick (2009) omschrijft de verandering van het curriculum als een persoonlijke reis die wiskunde docenten moeten afleggen. Bij elke poging om het curriculum te veranderen, moeten de docenten betrokken zijn. Hij geeft ook aan dat het meeste van het curriculum en de verandering daarvan buiten het bereik van de beleidsmakers ligt. Hij doelt er hier op dat de docenten die het curriculum moeten overbrengen in de les, er kritischer tegenover zullen staan als zij niet overtuigd zijn van de beweegredenen achter de verandering.

Het curriculum staat niet zo vast als wellicht verwacht wordt. Hoewel er in Nederland duidelijke methodeboeken zijn, blijkt dat de invloed van de individuele docent een erg grote rol speelt in het leren van leerlingen; die heeft een duidelijke impact op het gerealiseerde curriculum.

6.2 Wat is bewijzen en redeneren

Volgens Balacheff (2008) hebben onderzoekers binnen het wiskundeonderwijs niet eenzelfde visie op bewijzen. Dit kan worden beschouwd als een verrijking binnen het vakgebied, maar Balacheff is er een voorstander van dat onderzoekers van wiskundeonderwijs meer op één manier over bewijzen gaan nadenken. Hij wil niet beweren dat er geen verschillen meer mogen zijn, maar ze moeten uitlegbaar en duidelijk zijn. Balacheff (2008) benadrukt ook dat het erg belangrijk is dat jonge onderzoekers binnen

het domein redeneren en bewijzen eerst zelf gaan uitzoeken wat zij de definitie van een bewijs vinden. Heinze et al. (2008) geven aan dat een bewijs in schoolboeken vaak een vaste vorm heeft. Ze omschrijven deze vorm als volgt: *“Er wordt uitgegaan van gegeven/eigenschap (X). Vervolgens is het de bedoeling dat de leerlingen een stelling (Y) hieruit moeten concluderen. Dit gaat door middel van, binnen de klas, geaccepteerde redeneringen. De vorm waarin dit gebeurt staat er los van”*.

Stylianides (2007) geeft aan dat het niet altijd duidelijk is wat ‘bewijzen’ betekent in de schoolwiskunde. Hij beweert dat het begrip van ‘bewijzen’ zelfs nog discutabel en onduidelijk is op het gebied van wiskunde.

Zelf hanteert Stylianides (2007) als definitie voor een bewijs in schoolwiskunde:

“Bewijs is een wiskundig argument, een samenhangende reeks van beweringen voor of tegen een wiskundige claim, met de volgende kenmerken: (1) Het gebruikt verklaringen die door de klasgemeenschap zijn geaccepteerd (een set van geaccepteerde verklaringen) die waar zijn en beschikbaar zonder verdere verklaring. (2) Het maakt gebruik van vormen van redeneren (argumentatiemethoden) die geldig en bekend zijn bij, of binnen het conceptuele bereik van, de klasgemeenschap. (3) Het wordt gecommuniceerd met uitdrukkingvormen (argumentatiemethoden, representaties) die geschikt en bekend zijn bij, of binnen het conceptuele bereik van, de klassengemeenschap”.

Heinze et al. (2008) noemen welke globale stappen er volgens hen in een bewijs zitten: (1) Wat zijn de gegevens? Welke eigenschappen zijn er bekend of kunnen er worden afgeleid? (2) De nodige transformatie organiseren om meer eigenschappen af te leiden uit eerder gevonden/gegeven eigenschappen. Zo maken ze ook onderscheid tussen twee typen bewijzen: éénstapsbewijzen en meerstapsbewijzen. Bij de eerste variant is het mogelijk om met één stap uit het gegeven (X) de conclusie (Y) af te leiden. Bij de tweede variant zijn daar meer stappen voor nodig. Deze stappen moeten vervolgens aan elkaar gekoppeld worden om een helder pad van (X) tot (Y) te krijgen. Deze stappen gebruiken ze ook om de moeilijkheid van een bewijs te bepalen. Zij classificeren een bewijs als moeilijker (ten opzichte van een ander bewijs) als deze meer stappen nodig heeft om tot de conclusie te komen.

Wiskundig redeneren wordt door Ball et al. (2002) gezien als een reeks praktijken en normen die collectief zijn, niet alleenstaand, en die diep zijn geworteld in de discipline. Wiskundig redeneren kan dienen als een onderzoeksinstrument voor het ontdekken en verkennen van nieuwe ideeën. Dit proces noemen ze de redenering van onderzoek. De onderzoekers vinden ook dat wiskundig redeneren centraal werkt bij het rechtvaardigen of bewijzen van wiskundige beweringen. Dit proces noemen ze de redenering van de rechtvaardiging. Dit laatste berust op twee grondslagen. Eén van deze grondslagen is een groeiend geheel van publieke kennis, met wiskundige ideeën, procedures, methodes en termen

die al eerder zijn gedefinieerd en bevestigd binnen een bepaalde redeneergemeenschap. De tweede grondslag is de wiskundige taal van symbolen, termen, notatie, definities en representatieregels voor het betekenisvol gebruik in het formuleren van beweringen en het netwerk van relaties die gebruikt worden om die te rechtvaardigen.

Er is geen eenduidig beeld van redeneren en bewijzen. De definities variëren subtiel van elkaar, maar de structuur en afspraken binnen een groep van beoefenaars zijn belangrijk, denk hierbij aan de afspraken binnen de klas over redeneren en bewijzen.

6.3 Wat is het belang van redeneren en bewijzen en hoe is dit aan leerlingen te leren?

Leerlingen leren betekenisvol als ze nieuwe kennis structureren en koppelen aan al bestaande kennis (Novak 2002). Volgens Novak bestaan er twee soorten van leren: *'rote learning'* en *'meaningful learning'*. Bij de eerste is nieuwe kennis willekeurig van aard, zonder connecties met bestaande kennis. Bij de tweede gaat het over kennis die nauwgezet is geïntegreerd met al bestaande kennis. Bij redeneren en bewijzen moeten leerlingen veel connecties maken. Ze moeten kennis aan elkaar koppelen waardoor *meaningful learning* zal ontstaan.

Hanna en Barbeau (2008) geven aan dat bewijzen meer betekenis hebben dan alleen maar verifiëren of een stelling waar of onwaar is. Het bezig zijn met een bewijs zorgt voor bredere kennis van dit onderwerp, die vervolgens breder toepasbaar is. Ze spreken hier over het voorbeeld van de abc-formule. Leerlingen die de formule kennen, zullen deze toepassen en als het even mee zit zal de leerling zijn of haar antwoorden controleren. Als een leerling weet waar de formule vandaan komt, dan kan de leerling de abc-formule koppelen aan een andere manier van oplossen, zoals kwadraat afsplitsen. Ook Mariotti en Balacheff (2008) en Ball et al. (2002) beweren dat bewijzen meer functies hebben dan alleen de waarheid testen. Volgens de onderzoekers zorgt dat voor nieuwe inzichten. Rav (1999) filosofeert echter over een computerprogramma 'PYTHIAGORA' die een stelling vraagt als input en vervolgens aangeeft of deze waar of onwaar is. Hij geeft aan dat dit een doodslag zou zijn voor de wiskunde. Bij het bewijzen gaat het er juist om dat we methodes en strategieën ontwikkelen voor het oplossen van problemen.

Lesseig, Hine, Na en Boardman (2019) hebben onderzoek gedaan naar hoe docenten in Australië, America en Zuid-Korea het doel van redeneren en bewijzen waarnemen. Ook hebben ze onderzocht welke kenmerken van een bewijs zij belangrijk vinden. Hieruit is gebleken dat de docenten uit het onderzoek bewijzen vooral zagen als een tool om te verifiëren of iets waar of onwaar is. De docenten waren het er ook over eens dat het geven van een aantal voorbeelden geen bewijs is.

Er zijn veel ideeën en gedachtegangen die niet zichtbaar zijn in een geschreven bewijs (Mariotti & Balacheff, 2008). Om bewijzen aan leerlingen te leren moeten deze ideeën en gedachtes zichtbaarder worden. Een manier om dit voor elkaar te krijgen is de heuristiek van een uitgewerkt voorbeeld. Dit kan als instrument worden gebruikt om de bewijsstructuur eigen te maken. Er wordt ook aangegeven dat het leerlingen kan helpen om de tussenstappen expliciet te maken als ze die zelf niet zien. Vervolgens kan de leerling met dit gegeven verder gaan en de volgende stap zelf construeren.

Redeneren en bewijzen komt vooral voor in de hogere leerjaren van het middelbaar onderwijs. Ball et al. (2002) pleiten voor een eerdere start. Ze geven aan dat voor veel leerlingen bewijzen een ritueel is zonder betekenis. Veel van de lessen van leerlingen uit lagere leerjaren gaan vooral over rekenkundige begrippen, berekeningen en algoritmes. Pas zodra de leerlingen in hogere leerjaren komen, moeten ze ineens bewijzen begrijpen, construeren en kunnen opschrijven. Deze bewijzen zijn over het algemeen in de Euclidische meetkunde. De onderzoekers beschouwen redeneren namelijk als een basisbekwaamheid binnen de wiskunde. Uit empirisch onderzoek is gebleken dat het mogelijk is om al op een jonge leeftijd (8- en 9-jarigen) te beginnen met redeneren (Ball et al. 2002).

Ook Brodahl en Wathne (2018) pleiten ervoor om eerder te beginnen met het leren van redeneren en bewijzen bij de leerlingen. Zij hebben een methode ontwikkeld waarbij de leerlingen een denkbeeldige dialoog tussen twee personen te zien krijgen. In die dialoog wordt de opdracht duidelijk gemaakt en een start gemaakt met het bewijs. De docenten uit het onderzoek geven aan dat de denkbeeldige dialoog een nuttige tool is om met redeneren en bewijzen bezig te zijn (Wathne & Brodahl, 2019). De docenten waren het er over eens dat het formuleren, uitleggen en reflecteren de grote voordelen waren.

Redeneren en bewijzen zorgt voor een geïntegreerde kennis die dieper gaat en connecties legt met andere kennis. Leerlingen worstelen vaak met het formele aspect van redeneren en bewijzen en kunnen erg geholpen worden met uitgewerkte voorbeelden en met tussenstappen.

7 Resultaten tekstboekanalyse

In dit hoofdstuk worden de resultaten van de uitgevoerde tekstboekanalyse beschreven. Het onderzoek verschaft inzicht in de plaats van redeneren en bewijzen in de methodeboeken. Met de bevindingen is antwoord verkregen op de vraag: *“Hoe worden de begrippen ‘bewijs’ en ‘redeneren’ in de meetkunde gepresenteerd in lessen en lesmethoden behorend bij het oude en het nieuwe examenprogramma voor vwo wiskunde B en welke ‘middelen’ (o.a. taken, opdrachten, activiteiten en (digitale) middelen) worden hiervoor gebruikt?”*.

Eerst is er gekeken naar hoe het begrip ‘bewijs’ wordt geïntroduceerd in de methodeboeken. Vervolgens is onderzocht in welke mate uitgewerkte voorbeelden van bewijzen worden gebruikt. Daarna kwam aan de orde hoe de leerlingen een bewijs moeten formuleren en noteren met de gegeven informatie uit de methodeboeken. Vervolgens is er gekeken naar de aard van de opgaven waarin leerlingen een bewijs moeten geven. Daarna is onderzocht wat de mate van sturing is die in de opgaven gegeven wordt om tot een bewijs te komen. Als laatste is er gekeken naar de diversiteit aan stellingen en eigenschappen die de leerlingen moeten kennen en kunnen gebruiken.

7.1 Hoe wordt het begrip ‘bewijs’ geïntroduceerd?

Redeneren en bewijzen maakt deel uit van het beoogde curriculum. Daarom moeten leerlingen leren wat redeneren en bewijzen is, zodat ze weten hoe zij een bewijsopgave aan moeten pakken. Om te kijken hoe het begrip ‘bewijs’ in de methodeboeken wordt geïntroduceerd, is gebruik gemaakt van de definitie van Stylianides (2007) die is besproken in hoofdstuk 6. Dit omdat deze uit drie handelbare onderdelen bestaat.

10^e editie

Bij de 10^e editie van het boek wordt meteen in 4 vwo al een definitie van een bewijs gegeven: *“Een bewijs is een juiste redenering waarmee je een vermoeden bevestigt”* (Bakker et al., 2011, p.138). Hier maakt het boek duidelijk dat het doel is om een vermoeden te bevestigen en dat de leerlingen hiervoor een redenering in elkaar moeten zetten die hiertoe zal leiden. Het boek is hier nog niet expliciet over het woord ‘juiste’. Het geeft, zonder hier expliciet aandacht aan te schenken, aan wat de algemene omgang met bewijzen is. Als een stelling eenmaal bewezen is, mag deze stelling gebruikt worden bij volgende bewijzen zonder deze opnieuw te bewijzen. Er is geen algemeen recept voor het opstellen van een bewijs. Elke bewering en conclusie moet verantwoord worden.

In het methodeboek van 5 vwo staat op pagina 138 een definitie van een indirect bewijs, waarvoor drie methodes gehanteerd kunnen worden:

“(1) Gevalsonderscheiding Bij gevalsonderscheiding laat je zien dat alle mogelijkheden op één na tot een tegenspraak leiden, (2) Bewijs uit het ongerijmde Bij een bewijs uit het ongerijmde neem je aan dat de bewering niet juist is. Uitgaande van de onjuistheid toon je daarna aan dat er een tegenstrijdigheid ontstaat met de gegevens en (3) Tegenvoorbeeld Als één voorbeeld is gevonden waaruit blijkt dat een eigenschap niet algemeen geldt, is daarmee de onjuistheid van die bewering aangetoond. Dit heet een tegenvoorbeeld”. (Bakker et al., 2012, p.138, 5 vwo 10^e editie).

De leerlingen krijgen ook duidelijk voorgeschreven hoe zij een bewijs moeten noteren: met implicatietekens en accolades. Ook dienen leerlingen op te schrijven waarom zij een conclusie mogen trekken. Dit moeten zij tussen haakjes noteren.

Waar de 10^e editie in het boek voor 4 vwo aangeeft dat er geen algemeen recept is voor een bewijs, laat het boek in 5 vwo wel zien dat er een manier is om bewijzen aan te pakken. De schrijvers verdelen het geven van een bewijs in drie stappen:

“(1) Verkennen: Maak een analysefiguur, dat is een tekening met de gegevens erin. Misschien zie je al hoe je bewijs eruit komt zien. Geef dan het bewijs. Zo niet, dan ga naar stap 2.

(2) Analyseren: Het analyseren bestaat uit drie onderdelen: Vooruitdenken: Probeer uit de gegevens conclusies te trekken om daarmee een volgende stap af te leiden. Terugdenken: Bedenk uit wat bewezen moet worden, wat de voorlaatste stap zou moeten zijn. Plan maken: Probeer een verband te leggen tussen de resultaten van het vooruitdenken en het terugdenken.

(3) Bewijs geven: Noteer het bewijs volgens het bewijsschema. Bij elke stap moet je een toelichting geven. Je verwijst naar een stelling door de titel van de stelling te nemen.” (Bakker et al., p. 142, 5 vwo 10^e editie).

Er wordt op deze pagina ook een ‘bewijsschema’ geïntroduceerd: (1) *Gegeven*, (2) *Te bewijzen* en (3) *Bewijs*. Onder het kopje ‘gegeven’ moeten de leerlingen de gegevens uit de opgave nog eens opschrijven. Vervolgens schrijven ze onder het kopje ‘te bewijzen’ hetgeen dat bewezen moet worden. Als laatste geven ze onder het kopje ‘bewijs’ het bewijs.

In 6 vwo krijgen de leerlingen voornamelijk extra stellingen die ze moeten bewijzen en dus later weer kunnen gebruiken in andere bewijzen. Ook krijgen ze nog een aantal voorbeelden, hier wordt verderop in dit onderzoek nog naar gekeken. In dit boek wordt verder niets nieuws meer over het begrip bewijs uitgelegd.

11^e editie

In de 11^e editie van het methodeboek wordt nergens uitgelegd wat een bewijs is. De schrijvers geven nergens een definitie van het begrip bewijs, en ze vertellen ook nergens hoe de leerlingen met bewijzen om moeten gaan. Het enige wat er in deze editie terug te vinden is, is dat je een bewijs kunt geven met behulp van een beredenering of een berekening. Zo staat er het volgende:

“In sommige opdrachten moet je meetkundig redeneren. Dat doe je bijvoorbeeld door met gelijkvormigheid te werken of door gebruik maken van stellingen. Als je in een redenering een stelling gebruikt, noem je de naam van die stelling. In een aantal gevallen wordt er een berekening gevraagd. Dan kun je gebruik maken van bijvoorbeeld gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, de sinusregel of de cosinusregel.” (Bakker et al., 2016, p.183).

Ze gebruiken het woord ‘bewijs’ echter wel bij sommige opdrachten (zie opdracht 22 in Bakker et al., 2016, p. 128). Vervolgens is wel in het uitwerkingenboek te vinden hoe leerlingen dit moeten aanpakken (zie uitwerkingen opdracht 22 in Bakker et al., 2016, p. 150). Hier is ook terug te vinden dat ze de stappen die eerder genoemd zijn, geheel loslaten. De uitwerkingen zijn hier in de vorm van: “als dit, dan dat en dat. Dus...”.

Er is een waarneembare verandering te zien in hoe de term ‘bewijs’ wordt geïntroduceerd. In de 10^e editie van *Moderne wiskunde* geven ze aan wat een bewijs is en verschillende manieren hoe iets bewezen kan worden. Daar wordt ook een structuur van uitwerken gegeven. In de 11^e editie van ‘*Moderne wiskunde*’ wordt geen definitie van ‘bewijs’ gegeven. Wel wordt het woord gebruikt in de opgaven. Er wordt ook niets gezegd over de structuur en notatie van een bewijs.

7.2 In welke mate worden er uitgewerkte voorbeelden van bewijzen gegeven?

Een manier om redeneren en bewijzen te leren is met behulp van uitgewerkte voorbeelden (Mariotti & Balacheff, 2008). Deze voorbeelden kunnen leerlingen de nodige tussenstappen en structuur die in een bewijs zitten laten zien. Hoe duidelijker het voorbeeld, des te beter de leerlingen het kunnen nadoen. Een motivatie waarom bepaalde keuzes en stappen worden genomen, zijn hierin erg belangrijk (Mariotti & Balacheff, 2008). Een leerling kan daardoor goed volgen wat er gedaan wordt en met welke reden. De leerling kan dan vervolgens proberen om dit zelf ook toe te passen en bewust keuzes te maken om opdrachten op te lossen.

10^e editie

In 4 vwo wordt in de voorbeelden veel aandacht besteed aan de structuur van een bewijs. De voorbeelden gaan uit van een probleem dat opgelost kan worden met de theorie die in de paragraaf is

behandeld (zie het voorbeeld in Bakker et al., 2011, p. 140). Daaronder wordt het probleem stap voor stap opgelost. Die stappen volgen elkaar op logische wijze op, maar er is nauwelijks tot geen motivatie te vinden waarom voor een bepaalde stap gekozen is.

In hoofdstuk 6 van 5 vwo is maar één voorbeeld terug te vinden. Dit is een voorbeeld over het geven van meetkundige plaatsen. De auteurs leggen daarin vooral de nadruk op de manier van opschrijven. De leerlingen zien hier hoe (en met welke tekens/symbolen) het geformuleerd moet worden (zie het voorbeeld in Bakker et al., 2012, p. 133).

In 6 vwo staan twee hoofdstukken over bewijzen. In hoofdstuk 3 worden geen voorbeelden gegeven. De leerlingen krijgen hier veel stellingen die ze moeten toepassen om de problemen in de opgaves op te lossen. In hoofdstuk 4 worden wel weer voorbeelden gegeven. Die zijn stap voor stap uitgewerkt en bij sommige stappen staat nog wat extra uitleg, maar dat is niet echt uitgebreid (zie het voorbeeld in Bakker et al., 2013, p. 89).

11^e editie

Ook in de 11^e editie van het boek staan uitgewerkte voorbeelden. Deze zijn vaak gekoppeld aan een stuk theorie of een aanpak om de theorie te verduidelijken. In de voorbeelden zijn voornamelijk berekeningen te vinden (zie **Fout! Verwijzingsbron niet gevonden.**). De leerling kan hier zien hoe de behandelde theorie ingezet kan worden om een opgave op te lossen. Zo komt direct na het stukje theorie over de sinusregel een voorbeeld waar een tweetal zijdes berekend moeten worden met behulp van de sinusregel. Dat bestaat nagenoeg alleen maar uit berekeningen (zie het voorbeeld in Bakker et al., 2016, p. 186). De motivatie waarom voor een bepaalde werkwijze of stap wordt gekozen ontbreekt.

Elke opgave staat ook uitgewerkt in het uitwerkingenboek. Hier is een fysiek boek van, maar ook een digitale versie. Daar kunnen de leerlingen alleen bij kunnen als de docent deze mogelijkheid in de digitale omgeving voor hen openstelt. Mocht een leerling niet uit de opgaves komen, zelfs niet met behulp van de voorbeelden, dan kan hij altijd nog het uitwerkingenboek erbij pakken en van de opgave een voorbeeld op maat maken. Hij kan bijvoorbeeld de opgave maken tot het punt waar hij/zij vastloopt en vervolgens de rest opzoeken in het uitwerkingenboek. Hij kan ook alleen die ene stap opzoeken waar hij op vast loopt en de rest weer zelf proberen te doen. Deze mogelijkheid geldt overigens voor beide edities en alle boeken die daarbij horen.

Beide edities geven voorbeelden in de hoofdstukken. Die zijn sterk gekoppeld aan de theorie en geven de structuur van de theorie weer. In beide edities is weinig motivatie in de voorbeelden te vinden. Door gebruik te maken van het uitwerkingenboek, kunnen leerlingen zorgen voor een voorbeeld op maat.

7.3 Op welke manier moeten bewijzen geformuleerd en genoteerd worden?

Zoals de definitie van Stylianides (2007) aangeeft, is de notatie (de manier van opschrijven) een deel van het bewijs. Hier dienen dan ook afspraken over gemaakt te worden. Er is uitgezocht in hoeverre het boek de methode hier aandacht aan schenkt en op welke wijze.

10^e editie

De 10^e editie van de methode geeft een expliciete structuur mee aan de leerlingen over hoe een bewijs opgeschreven moet worden. De leerlingen moeten eerst de gegevens opschrijven onder het kopje ‘Gegeven’, daarna wat er bewezen moet worden onder het kopje ‘Te bewijzen’. Als laatste moeten ze het bewijs achter het kopje ‘Bewijs’ schrijven. Nadat dit is uitgelegd, geven zij het voorbeeld te vinden op pagina 140 (Bakker et al., 2016).

Hier is te zien dat de schrijvers de opgegeven structuur toepassen. Na dit voorbeeld geven ze nog wat extra uitleg over de structuur en de tekens. Ook wordt uitgelegd hoe deze tekens gebruikt dienen te worden bij het geven van een bewijs. Zo staat er bijvoorbeeld:

“Hier is een implicatieteken \Rightarrow gebruikt. Links daarvan staat wat bekend is, rechts ervan de conclusie die uit de gegevens volgt. Tussen de haakjes kan een toelichting staan, vaak is dat een eerder bewezen stelling of hetgeen gegeven is.” (Bakker et al., 2011, p. 140)

Deze structuur wordt in de gehele editie aangehouden. Verschillende keren wordt hier nog eens de aandacht op gevestigd. Zo wordt in 5 vwo nog eens uitgelegd hoe een bewijs opgeschreven moet worden en hoe dit aangepakt kan worden. Daarbij noemen de schrijvers de volgende stappen: (1) *Verkennen*, (2) *Analyseren* en (3) *Bewijs geven*, die eerder in dit hoofdstuk verder zijn toegelicht.

11^e editie

In de 11^e editie van de methode wordt nagenoeg niets over de structuur van een bewijs gezegd. De uitgewerkte opgaven bevatten voornamelijk berekeningen (zie het voorbeeld in Bakker et al., 2016, p. 186). Bij het maken van deze berekeningen wordt een bepaalde natuurlijke structuur gebruikt. Ook hier beginnen de auteurs met de gegevens, gevolgd door de stappen richting het uitrekenen en tot slot het antwoord. Ze vestigen hier echter niet expliciet de aandacht op. Wat opvalt is dat het opschrijven van de gegeven gegevens maar half gebeurt; alleen de gegevens die nodig zijn worden overgenomen. Om erachter te komen welke van de gegevens nodig zijn en in welke volgorde ze gebruikt gaan worden, zijn echter meer denkstappen nodig. Zo wordt hier wel een analyse van het probleem gebruikt om inzichtelijk te krijgen hoe het probleem aangepakt kan worden, alleen wordt daar in de voorbeelden niet over gesproken (zie het voorbeeld in Bakker et al., 2016, p. 186). De schrijvers weten precies hoe ze te

werk moeten gaan en welke stappen ze moeten nemen en vooral ook welke stappen niet, maar de leerlingen worden niet in die kennis meegenomen.

Er bestaat een duidelijk verschil tussen de 10^e editie en de 11^e editie als het om de notatie gaat. In de 10^e editie wordt expliciet gezegd hoe de uitwerkingen opgeschreven moeten worden en welke symbolen de leerlingen daarvoor moeten gebruiken. In de 11^e editie wordt hier niet meer naar verwezen en wordt in de methode nergens gezegd hoe de uitwerkingen genoteerd moeten worden.

7.4 De aard van de opgaven waarin leerlingen een bewijs moeten geven

Niet elke bewijsopgave is hetzelfde. Daarom zijn de verschillende soorten bewijsopgave onderzocht. Er is gekeken naar wat er van de leerlingen wordt gevraagd en welk soort argument zij moeten aanvoeren om tot het juiste antwoord te komen. Daarvoor is onderscheid gemaakt tussen de volgende soorten argumenten: (1) *Bewijsopgave met deductief meetkundig argument*, (2) *Bewijsopgave met impliciet meetkundig argument*, (3) *Bewijsopgave met algebraïsch meetkundig argument*, (4) *Bewijsopgave met schets*, (5) *Bewijsopgave met tegenvoorbeeld*, (6) *Bewijs uit het ongerijmde* en (7) *Bewijsopgave met gevalsonderscheiding*. Deze verschillende argumenten zijn nodig om de opdrachten op te kunnen lossen. Zo wordt bij de ene opdracht gevraagd om een deductief meetkundig argument (zie opdracht 24 in Bakker et al., 2011, p. 140) en in hetzelfde hoofdstuk wordt ook gevraagd om een bewijs met algebraïsch meetkundig argument (zie opdracht 38e in Bakker et al., 2011, p. 145).

10^e editie

In de 10^e editie van het boek wordt leerlingen veelvuldig gevraagd om een bewijs te leveren. Deze bewijsopgaven bevatten over het algemeen deductieve (zie opdracht 24 in Bakker et al., 2011, p. 140) en impliciete (zie opdracht 30a in Bakker et al., 2011, p. 143) argumenten. Leerlingen moeten vaak een gegeven bevestigen.

De stellingen die de leerlingen moeten bewijzen zijn vaak specifiek gekoppeld aan die ene (of een paar) situatie(s) (zie **Fout! Verwijzingsbron niet gevonden.**). De gegevens spelen hier een belangrijke rol in hetgeen de leerlingen moeten bewijzen. Ook zijn er diverse stellingen die voor algemene gevallen gelden. Zo moeten de leerlingen bijvoorbeeld bewijzen dat de som van de hoeken van een vijfhoek 540° is. Er wordt hier geen eis aan de vijfhoek gesteld of een specifieke vijfhoek gegeven waarvoor de leerlingen het moeten narekenen.

11^e editie

In de 11^e editie van het boek bevatten de bewijsopgaven veel algebraïsche argumenten. In het 4 vwo boek en in hoofdstuk vijf van het 5 vwo boek zitten zelfs bijna alleen maar bewijsopgaven met een

algebraïsch argument (zie bijvoorbeeld opdracht 39 in Bakker et al., 2016, p. 132). In hoofdstuk 6 komen ook opgaves met een deductief argument voor. In 6 vwo zijn er weer voornamelijk algebraïsche argumenten nodig. De vraagstelling die veelvuldig terug te vinden is, is van het type: ‘Toon aan dat $PA = \sqrt{90}$ ’.

Hier valt op dat het woord ‘bewijs’ vaak is vervangen door ‘Toon aan dat’, ‘Laat zien dat’ of ‘leg uit dat’ (zie opdracht 39 in Bakker et al., 2016, p. 132).

De stellingen die de leerlingen in de 11^e editie van de methode moeten bewijzen zijn voornamelijk specifiek van aard. Opdracht 5 uit Bakker et al. (2011) op pagina 143 is hier een voorbeeld van. Ook moet een aantal algemene stellingen bewezen worden. De reden dat de stellingen voornamelijk specifiek zijn is, dat de leerlingen bij veel opdrachten iets moeten uitrekenen of algebraïsche stappen moeten maken. Hier is dan vaak een tekening bij gegeven met daarin veel specifieke informatie zoals zijdes, hoeken etc. Hierdoor gaat het meteen over een specifiek geval, namelijk het figuur dat daar staat. Op pagina 68 in Bakker et al. (2013) is een voorbeeld uit het vwo 6 boek van de 10^e editie te zien en op pagina 182 in Bakker et al. (2016) is een vergelijkbaar voorbeeld uit het vwo 5 boek van de 11^e editie. Beide opgaves zijn de eerste opgave die in de paragraaf over de stelling van Thales staan en waar de leerlingen de stelling moeten aantonen.

Bij de opgave uit de 10^e editie staan tussenstappen gegeven die ervoor zorgen dat de leerling met behulp van eerder aangetoonde stellingen de stelling van Thales kan bewijzen. In de 11^e editie doen ze dit op een andere manier. Ze maken de opgave inzichtelijker voor de leerlingen door er eerst getallen (in dit geval een hoek) aan te koppelen. Hierna moeten de leerlingen met behulp van eigenschappen hoek C berekenen en komen ze erachter dat de hoek 90° graden is. Pas hierna laten de schrijvers de getallen los en moeten de leerlingen eenzelfde berekening maken, maar dan met een hoek die α graden is en een hoek die β graden is.

De opgaves die de leerlingen moet maken bevatten in de 10^e editie veel meer algemene stellingen die breder inzetbaar zijn dan alleen bij die opdracht. Bij de 11^e editie zijn de stellingen in de opdrachten specifiek van aard. De leerlingen krijgen meer specifieke gegevens en de stellingen zijn daardoor vaak niet breed inzetbaar.

7.5 De mate van sturing die in opgaven gegeven wordt om tot een bewijs te komen

De bewijsopgaven kunnen verschillen in de mate van sturen die de opdracht de leerlingen biedt. Zo vinden leerlingen het lastiger om een opgave zonder hints of tussenstappen te maken (Heinze et al., 2008). Vaak geeft het boek zo’n hint in de vorm van een deelvraag, bijvoorbeeld door eerst te vragen welke hoeken gelijk zijn, waarna de leerlingen vervolgens iets moeten bewijzen waar ze dit bij gebruiken. Er is per opgave gekeken of er sprake is van een bewijsopgave met een *deductief, impliciet*

of *algebraïsch* argument of een bewijsopgave met *schets*, *tegenvoorbeeld*, *uit het ongerijmde* of met *gevalsonderscheiding*.

Om te weten welke mate van sturing er wordt gegeven bij de opgaven, zijn voornamelijk de eerste twee van belang. Bij een deductief argument moeten de leerlingen een keten van argumenten aan elkaar koppelen die in de opgave terug te vinden zijn. Bij een impliciet argument moeten de leerlingen zelf alle argumenten aan elkaar koppelen die niet voor zich spreken. Leerlingen moeten hier de stappen zelf bedenken.

10^e editie

In de 10^e editie van de methode zijn in alle boeken opdrachten gevonden waarbij de leerlingen een impliciet argument moeten opvoeren. In 4 vwo gaat het om 20 opdrachten waarbij de leerlingen een impliciet argument nodig hebben. In 5 vwo zijn dit er 33 (verdeeld over 2 hoofdstukken) en in 6 vwo 38 (verdeeld over twee hoofdstukken).

11^e editie

In de 11^e editie van de methode zijn aanzienlijk minder bewijsopgaven gevonden met een impliciet argument. In 4 vwo en 6 vwo zelfs helemaal geen. In 5 vwo zijn er drie van deze opdrachten gevonden, allemaal in hoofdstuk 7.

Veel opgaven zijn veranderd naar een algebraïsch argument, waar voornamelijk gegevens moeten worden doorgerekend. Er zijn in de 11^e editie 50 opdrachten te vinden waarvoor een algebraïsch argument nodig is. In de 10^e editie waren dit er acht. Een vergelijkbare verschuiving is ook waargenomen bij de redeneeropdrachten.

Gebruikmakend van éénstapsbewijzen en meerstapsbewijzen, zoals beschreven door Heinze et al. (2008), zijn de bewijsopdrachten makkelijker geworden in de 11^e editie. Er zijn minder bewijsopdrachten te vinden met een impliciet argument.

7.6 De diversiteit aan stellingen en eigenschappen die de leerlingen moet kennen

Bewijsopgaven hangen samen met stellingen en eigenschappen (Balacheff, 2008). Om iets te bewijzen gebruiken de leerlingen allerlei stellingen en de bijbehorende eigenschappen, zodat zij het gevraagde kunnen aantonen. Hoe meer stellingen de leerlingen moeten kennen en kunnen gebruiken, hoe lastiger het zal worden om te bepalen welke daarvan ze moeten gebruiken. Immers, je kunt uit meerdere stellingen en eigenschappen kiezen.

Er is een aanzienlijk verschil waargenomen tussen het aantal stellingen en eigenschappen die de leerlingen moeten gebruiken in de twee edities van het boek.

10^e editie

In de 10^e editie krijgen de leerlingen een heel scala aan eigenschappen en stellingen voorgeschoteld en moeten ze deze ook regelmatig toepassen. Zo staan er in 6 vwo, hoofdstuk 3 alleen al negen stellingen en eigenschappen tussen de opgaves door. Ze moeten de leerlingen onder andere de stelling van Thales bewijzen en staat deze ook nog eens gegeven (zie de stelling tussen de opdrachten in Bakker et al., 2013, p. 68). Ook zijn, zoals al eerder betoogd, meer bewijsopgaven algemeen van aard. Dit wil zeggen dat de eigenschappen die ze in een opgave bewijzen ook weer kunnen en mogen gebruiken bij volgende opgaven (zie opdracht 4 in Bakker et al., 2013, p. 68). De leerlingen moeten hier eerst de bewezen stelling van Thales toepassen om deze opdracht op te lossen.

11^e editie

In de 11^e editie is dit minder terug te vinden. Het aantal basisstellingen is erg afgenomen en ook zijn de bewijsopgaven meer specifiek van aard, waardoor ze niet ruim toepasbaar zijn (zie ook paragraaf 7.4). Waar de leerlingen in de 10^e editie alle eigenschappen van een trapezium, ruit, vlieger, parallellogram, rechthoek en vierkant moet kennen, is dit allemaal weggelaten in de 11^e editie.

Dit samen zorgt ervoor dat de leerlingen minder stellingen en eigenschappen kennen en dus ook minder verschillende stellingen en eigenschappen hoeven te gebruiken. Hierdoor zal een leerling eerder in de gaten hebben welke stelling of welke eigenschap hij/zij moet gebruiken en zal het voor de leerling eenvoudiger worden.

8 Resultaten lesobservaties en interviews

In dit hoofdstuk worden de resultaten beschreven van de lesobservaties en docenteninterviews. De lesobservaties en interviews zijn uitgevoerd bij vijf docenten die wiskunde B geven aan 5 vwo bovenbouw, verdeeld over twee middelbare scholen. In dit onderzoek worden ze docent 1, docent 2, docent 3, docent 4 en docent 5 genoemd. Met behulp van de lesobservaties en docenteninterviews is inzicht verkregen in de praktijk van redeneren en bewijzen en is een antwoord verkregen op de derde deelvraag: *“Hoe bereiden docenten zich voor op het nieuwe hoofdstukken over redeneren en bewijzen, en hoe doceren ze het?”* Er is naar een aantal verschillende factoren gekeken. Eerst is onderzocht hoe de docenten achter de wijzigingen in het curriculum zijn gekomen. Vervolgens is naar de mening van de docenten over deze veranderingen gevraagd. Daarna is onderzocht wat de docenten denken dat de leerdoelen van het hoofdstuk zijn en hoe ze daarmee omgaan. Daarna is onderzocht wat de gevolgen van de wijzigingen zijn voor de lessen die de docenten geven. Er is ook gekeken naar de materialen die de docenten in de lessen gebruiken, zowel uit de methode als daarbuiten. Tot slot is onderzocht wat de docenten als bewijs beschouwen.

8.1 Hoe zijn de docenten de wijzigingen te weten gekomen?

Docenten kwamen op verschillende wijzen te weten dat er een verandering aan zat te komen en wat deze inhoud. De docenten hadden van tevoren wel ergens gehoord dat er veranderingen aankwamen en om welke onderwerpen dat ging. Vooral over de ‘grote’ wijzigingen werd op verschillende fronten veel gesproken. De concrete inhoud van de wijzigingen kwamen ze voornamelijk te weten door het nieuwe boek door te kijken.

“Ik denk zodra ik wist dat ik een 5 vwo zou krijgen, want dat weet je natuurlijk altijd een paar weken voor de zomervakantie. Dat ik toen het boek erbij heb gepakt en ben gaan kijken wat er nu precies in stond. Want 5 vwo was voor mij sowieso nieuw en dat ik toen heb gezien dat die meetkunde zo anders was.”

Overigens werd er over de inhoud van de wijzigingen binnen hun vakgroep op school maar weinig gesproken. Docent 4 zei hierover:

Docent 2 was de wijzigingen via de wiskunde-brief te weten gekomen. Hij liet in het gesprek doorschemeren dat deze informatie niet erg veel diepgang bood. Dat blijkt uit de volgende opmerking:

“Dit vind ik wel een wazig stukje, dit redeneren en toepassen. Het was mij nooit helemaal duidelijk hoe het zou worden. Ik dacht echt dat bewijzen er helemaal uit zou gaan. Dus ik was

wel enigszins verbaasd om bepaalde stukjes er toch weer in te zien, zoals raaklijnen en Thales. Ik dacht dat we daar vanaf waren, maar blijkbaar niet.”

Docent 1 zei dat hij bij de nieuwe editie eerst zelf de sommen uitgebreid is gaan maken. Hij gaf aan dit met veel plezier te doen. Bij het maken van de opgaven kwam hij erachter wat de leerlingen, volgens hem, missen qua stof. Daarom maakte hij een aangepast programma voor zijn klas. Zo wil hij onder andere toch een koordenvierhoek aan zijn leerlingen leren. Overigens meende deze docent dat hij tot dusver (paragraaf 7.3 uit het methodeboek) nog geen echte veranderingen was tegengekomen.

Dit is niet bij alle docenten zo. Docent 3 miste voorkennis bij de leerlingen, maar beseftte dat dit waarschijnlijk kwam doordat het examenprogramma is gewijzigd. Ze zei:

“En dan beseft je van, ja, dat heeft natuurlijk wel een reden dat dit niet gebruikt wordt, omdat ze het gewoon niet hoeven te kennen.”

Een belangrijke factor waardoor sommige docenten weinig verandering merken, is de tijd. Als er voor een boek-gestuurde aanpak wordt gekozen, dan moet er genoeg tijd genomen worden om de veranderingen van tevoren goed uit te pluizen en niks over het hoofd te zien. Eén van de docenten gaf aan hier nog niet helemaal aan toe te zijn gekomen. Daardoor greep hij bij de paragraaf over Thales terug op de oude manier van lesgeven.

Omwille van de tijd namen de docenten de inhoud van de veranderingen voornamelijk via de methodeboeken tot zich. Ze waren zich wel bewust dat er iets ging veranderen binnen redeneren en bewijzen, maar ze wisten niet precies wat. Sommigen dachten dat redeneren en bewijzen er helemaal uit ging, anderen wisten alleen dat er iets ging veranderen. De docenten hebben zich daar verder niet op georiënteerd en kwamen het pas tegengekomen bij het voorbereiden van de lessen.

8.2 Mening over de veranderingen binnen redeneren en bewijzen

De geïnterviewde docenten vinden het niet erg dat het redeneren en bewijzen is veranderd. De oude bewijzen waren erg formeel en de docenten merkten dat de leerlingen er vaak op vastliepen. Naar hun mening passen de veranderingen goed in de overige wijzigingen van het examenprogramma. Toch blijven de meeste docenten veel van het redeneren en bewijzen uit de 10^e editie implementeren in de les.

Om deze reden vinden ze het dan ook niet erg dat het is veranderd. De nieuwe manier van redeneren en bewijzen is volgens de docenten beter te doen. Het ‘echte bewijzen’ is eruit gehaald en hierdoor is het voor de leerlingen makkelijker geworden. Docent 4 zei daar het volgende over:

“De wiskunde D leerlingen geven dat trouwens ook aan. Ik heb een aantal leerlingen met wiskunde D en als je het woord ‘bewijzen’ noemt dan worden ze boos, want die hebben de euclidische meetkunde wel gedaan en dat vonden ze niet echt leuk en wel moeilijk. En zij zeggen hiervan dat het goed te doen is.”

Een aantal docenten vond de nieuwe manier van redeneren en bewijzen goed passen binnen de laatste wijzigingen van de examenprogramma’s, namelijk steeds pragmatischere wiskunde. Docent 2 zei daarover:

“Het valt wel in de lijn van de pragmatische wiskunde. Vanwege het feit dat de examenprogramma’s ingekort zijn, vergeleken met voorheen. Je hebt de tijd niet meer om dingen volledig uit te pluizen.” (Docent 2)

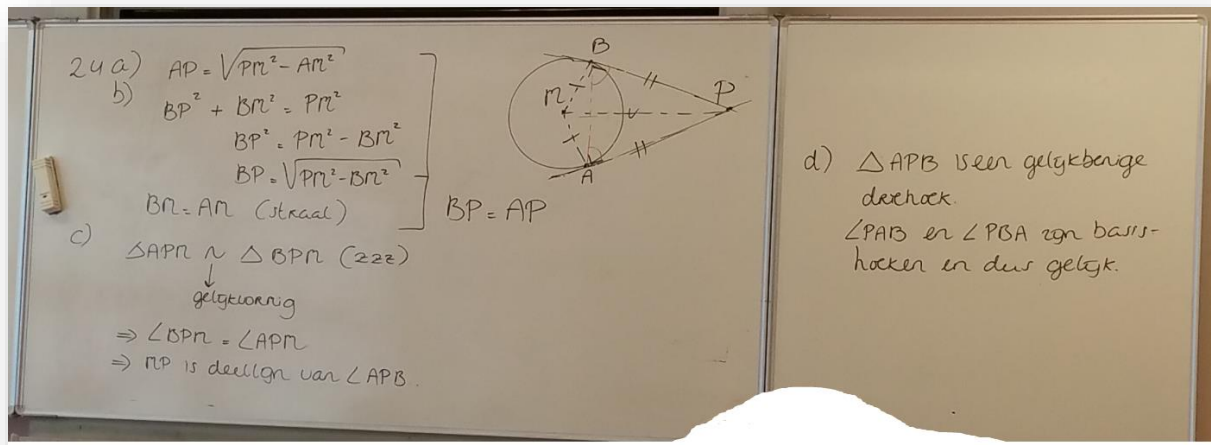
Hij gaf ook aan dat het wel heel jammer is voor leerlingen die een technische studie gaan doen. Het leren diep en logisch nadenken over een opgave en het ‘echt’ analyseren en noteren was een groot voordeel bij een technische studie. En dat zijn nou net de stappen die zijn weggelaten in het nieuwe curriculum.

Alle docenten vinden nog steeds de manier van opschrijven bij redeneren en bewijzen erg belangrijk. Voorheen bood de methode daar hulp, maar dit is nu wat meer losgelaten (zie 7.3). Alle docenten willen hun leerlingen toch graag deze houvast blijven aanbieden. Zo willen ze er voor zorgen dat ze deze kennis toch mee krijgen. Docent 5 zei hierover het volgende:

“Want bij de oude meetkunde moest altijd de stelling die je gebruikt tussen haakjes, dus dat heb ik gewoon gedaan, omdat ik de kinderen bewust wil maken ‘waarom geldt dit’. Uit mijn gewoonte van de afgelopen jaren en nu nog in de 6^e, moet dat erbij. Doe je dat niet, dan mis je punten. In hoeverre dat nog noodzakelijk is weet ik eigenlijk niet.”

De docent gaf later ook duidelijk aan dat als de methode het niet per se meer nodig acht, dat hij het dan toch blijft doen. Hij hoeft er dan alleen geen punten voor af te trekken bij de toetsen als de leerlingen het vergeten. Dit zorgt voor verwarring bij leerlingen, doordat het niet meer verplicht is. Maar docent 5 meent dat dit toch handig is voor de leerlingen.

Het viel op dat de docenten hier in de lessen niet strikt in zijn. Tijdens één van de lessen vroeg een leerling: *“Moeten we niet eerst bewijzen dat ze gelijkvormig zijn?”* Pas daarna schreef de docent alle benodigde tussenstappen op om dit aan te tonen (zie Figuur 1).



Figuur 1. Voorbeeldopgave door docent 3.

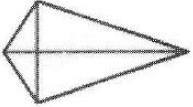
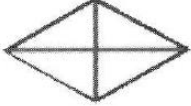

De docenten gaven aan dat ze blij zijn met de veranderingen. Het euclidisch redeneren en bewijzen werd als lastig beschouwd. De ervaring van de docenten tot nu toe leert dat het nieuwe analytisch redeneren en bewijzen beter te doen is voor de leerlingen. De docenten zijn het echter niet met alle veranderingen eens en willen de leerlingen meer houvast bieden dan de methode doet. Dit doen ze door vast te houden aan onderdelen van de euclidische meetkunde.

8.3 Wat zijn de leerdoelen van het hoofdstuk volgens de docenten en hoe gaan ze hiermee om?

De geïnterviewde docenten waren niet geheel op de hoogte van de veranderde leerdoelen. Hierdoor pasten de docenten de oude leerdoelen toe op de nieuwe stof. Tijdgebrek werd als grootste reden genoemd.

De manier van opschrijven, die de docenten nog steeds erg belangrijk vinden, zorgt voor verwarring bij de leerdoelen. De docenten zouden een deel van de manier van opschrijven terug willen zien in het nieuwe curriculum en leggen dit de leerlingen daarom nog uit. Docent 3 gaf aan dat ze weet dat de leerlingen geen gelijkvormigheid en congruentie hoeven aan te tonen en dit laatste zelfs niet hoeven te gebruiken, maar ze wil toch dat haar leerlingen dit wel doen. Omdat de leerlingen het niet in hun boek kunnen vinden, heeft ze er tijdens de lestijd voor vrijgemaakt om het hen te leren.

Docent 1 gaf aan veel 'gaten' in de stof te vinden in plaats van nieuwe leerdoelen in het aangepaste curriculum. Hij heeft daarom extra uitlegblaadjes (zie Figuur 2) voor de leerlingen gemaakt, met daarop eigenschappen en definities van allerlei figuren. Ook geeft de docent op dit stencil extra uitleg over de middenparallel.

<p><u>Eigenschappen Vlieger</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ twee paar aanliggende zijden zijn even lang ▶ een diagonaal is symmetrie as ▶ diagonalen delen elkaar loodrecht ▶ diagonalen delen elkaar middendoor ▶ hoeken tussen de zijden die niet even lang zijn, zijn even groot 	<p><u>Alternatieve definities Vlieger</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ Een vlieger is een vierhoek waarvan de diagonalen elkaar loodrecht snijden. ▶ Een vlieger is een vierhoek waarvan bij twee overstaande hoeken de aanliggende zijden even lang zijn. 	
<p>o</p> <p><u>Eigenschappen Ruit</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ alle zijden zijn even lang ▶ tegenoverliggende zijden zijn evenwijdig ▶ beide diagonalen zijn deellijn ▶ beide diagonalen zijn symmetrie assen ▶ diagonalen delen elkaar middendoor ▶ diagonalen delen elkaar loodrecht ▶ overstaande hoeken zijn even groot 	<p><u>Alternatieve definities Ruit</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ Een ruit is een vierhoek waarvan de diagonalen elkaar loodrecht middendoor delen. ▶ Een ruit is een vierhoek waarvan de deellijnen tevens de diagonalen zijn. ▶ Een ruit is een vierhoek met vier even lange zijden. ▶ Een ruit is een vierhoek waarvan beide diagonalen symmetrie-as zijn. 	
<p>o</p> <p><u>Eigenschappen Vierkant</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ de diagonalen zijn even lang ▶ de diagonalen delen elkaar middendoor ▶ de diagonalen staan loodrecht op elkaar ▶ alle diagonalen zijn symmetrie as ▶ alle zijden zijn even lang ▶ alle hoeken zijn rechte hoeken ▶ tegenoverliggende zijden zijn evenwijdig 	<p><u>Alternatieve definities Vierkant</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ Een vierkant is een vierhoek waarvan de diagonalen even lang zijn en elkaar loodrecht middendoor delen. ▶ Een vierkant is een vierhoek met vier rechte hoeken en vier even lange zijden 	

Figuur 2. Extra stencil van docent 1.

Docent 2 had halverwege het hoofdstuk nog eens goed door de syllabus en een pilot examen gekeken. Daardoor werden de leerdoelen voor hem duidelijker. Daarna had hij een les gependend aan deze leerdoelen. Zo zei hij onder andere tegen de leerlingen dat ze alleen maar hoeven te ‘herkennen’ en ‘gebruiken’. Zo zei de docent:

“Pythagoras kennen ze uit de onderbouw als een ‘stelling’ en dat ze dat dan ‘gewoon’ gaan toepassen zonder daar verder bij na te denken.”

Ook zei hij na het bekijken van de syllabus:

“Ze noemen het ook geen Thales in de syllabus. Ze hebben het over de eigenschappen. Er wordt niet gerefereerd aan de stelling. Nu geef ik aan dat ze dat formeel bewijzen niet hoeven te leren. Ze moeten alleen zien waarom iets is en vooral herkennen. Voorheen was dat niet zo, ze moesten toen standaard bewijzen geven, zoals het standaard bewijs van Thales. Toen legde ik veel meer de nadruk op de notatie.”

Docent 4 gaf in de les twee manieren van bewijzen aan: de analytische en de meetkundige. Dit was bij paragraaf 7.5 ‘Algebraïsch of meetkundig’ uit het methodeboek. Ze gaf in de les aan dat je bij een analytisch bewijs aan alle punten coördinaten toekent en je daarna vergelijkingen gaat opstellen, snijpunten gaat berekenen enzovoorts. En bij een meetkundig bewijs gaf ze aan dat dit niet nodig is.

Dat de docenten tot op zekere hoogte zien dat de leerdoelen zijn veranderd, blijkt uit wat docent 2 tegen de leerlingen zei:

“Als je het bewijs van de cosinusregel wilt weten, dan maak je opgave 7, 8 en 9. Als je daar geen zin in hebt en je wilt gewoon de regel leren toepassen, dan ga je naar opgave 10.”

Niet elke docent is even goed op de hoogte van de veranderde leerdoelen. Met enige regelmaat werd er nog bewust en onbewust teruggegrepen op oude leerdoelen. Zo werden er onder andere extra stencils gemaakt die de leerlingen moeten leren of krijgen ze extra uitleg die niet in het boek is terug te vinden. Een duidelijk lijstje van de leerdoelen en hoe deze zich verhouden tot de leerdoelen uit het vorige curriculum is dan ook niet bekend bij de docenten. Ook viel op dat de collega's hier onderling weinig over spreken. Een docent gaf aan dat ze dit bij wiskunde A wel hebben gedaan, omdat hier echt iets voor ontwikkeld moest worden of een hoofdstuk (statistiek) zelfs digitaal gedaan moest worden, maar voor wiskunde B was volgens de docenten de nood niet zo hoog. Hierdoor hebben docenten binnen dezelfde school een hele diverse aanpak.

8.4 De gevolgen voor de lessen

De wijzigingen in het curriculum hebben bij de docenten verschillende gevolgen voor de lessen. Sommige docenten gaven aan dit nieuwe hoofdstuk extra goed voor te bereiden. Een ander gaf aan dat de lessen er redelijk hetzelfde uitzien.

Redeneren en bewijzen is voor de docenten een lastig onderwerp om te doceren. Docent 3 bereidt een hoofdstuk over redeneren en bewijzen extra goed voor. Dat doet ze voor alle lessen, maar ze gaf met nadruk aan dat ze alle sommetjes uit de hoofdstukken over redeneren en bewijzen gezien moet hebben. Bij andere hoofdstukken is dat niet zo intensief is:

“Meetkunde moet ik echt wel voorbereiden, meer dan andere hoofdstukken. Ik moet wel zeggen dat ik al mijn lessen voorbereid, maar bij meetkunde moet ik echt wel even elke opdracht zien hoor. Ook voor mezelf om te weten welke aanpak ze gaan volgen of welke mogelijk is. Tegenover andere hoofdstukken. Als je dan de opdracht bekijkt zeg je oja zo, zo, zo.”

Docent 5 maakt alle 'lampjes'-opgaven. Dat zijn de wat lastigere opgaven in de paragrafen. Hij vindt het maken van toetsen en het voorbereiden van de lessen erg veel tijd kosten, maar dat hoort er nou eenmaal bij. Andere docenten gaven ook aan dat dit vooral het eerste jaar zo is. Een goede voorbereiding in het eerste jaar zorgt ervoor dat je daar in de jaren daarop gebruik van kunt maken. Wel kijken ze alles nog eens door en passen de voorbereidingen aan na eventuele vragen van leerlingen, of als ze erachter

komen dat een iets andere uitleg wellicht handiger is. Dit geldt niet alleen voor het onderwerp redeneren en bewijzen.

De lessen zelf zijn volgens de docenten niet zo heel veel veranderd. Ze laten de leerlingen nog op dezelfde wijze ‘puzzelen’ met de opdrachten, aldus docent 3. Zo gaf ze ook het volgende antwoord op de vraag hoe een les eruitzag van de 10^e editie in vergelijking met de 11^e editie: *“Eigenlijk hetzelfde met dit onderwerp. Want wat ik zeg: de theorie, dat is het probleem niet, het is echt het oefenen, het zien en hoe schrijf je het op.”* Wat haar betreft is de theorie en hoofdstukken over redeneren en bewijzen niet erg uitgebreid, maar heeft vooral de aanpak veel aandacht nodig. Zij behandelt dit door veel voorbeelden te geven op het bord. Dat doet ze vaak op aanvraag van de leerlingen. Ze blikt nog even terug op de vorige paragraaf en waar nodig behandelt ze een opgave op het bord.

Docent 4 vindt dat je na het maken van de opdrachten nog niet precies weet waar en hoe de leerlingen gaan vastlopen. Ze noemde dit een vorm van “trail and error”.

Wat opviel uit de interviews en het observeren van de lessen is dat docenten teren op oude kennis, zowel kennis over leerlingen en het doceren, als over het onderwerp. Hierdoor zijn de veranderingen in de lessen niet heel erg groot. Dit beaamden de docenten. Tijdens de observaties vonden inderdaad lesactiviteiten plaats die niet meer in het nieuwe curriculum zitten. Denk hierbij aan de eerder genoemde manier van opschrijven, die de docenten nog steeds belangrijk vinden.

Docenten moeten er veel tijd in steken om alles het eerste jaar op de rit te krijgen, maar gebruiken ook hiervoor kennis en vaardigheden van eerdere jaren. Zodra iets niet helemaal goed lijkt te lopen, dan passen ze de voorbereidingen aan en kunnen ze dit het jaar erop meteen oppakken. Docenten gaven ook aan dat ze redeneren en bewijzen een erg lastig onderwerp vinden om te doceren.

8.5 Materialen

Docenten weten dat er (digitale) middelen zijn die zij in de les kunnen inzetten en kunnen deze ook benoemen. De docenten vinden echter dat deze middelen geen meerwaarde bieden bij redeneren en bewijzen. Bij andere onderwerpen zetten ze deze middelen vaker in. Docenten ontwikkelen hun eigen materiaal om zo in te springen op de eerder genoemde gaten in de stof die zij ervaren. Als grote belemmering om op zoek te gaan naar middelen benoemden ze dat de tijd die dat kost er niet is.

De docenten weten een aantal hulpmiddelen te benoemen, zoals: Geogebra, Kahoot, Quizizz en uitlegfilmpjes door de methode geleverd. Zij gebruiken weleens zo’n extra middel bij het redeneren en bewijzen, maar dan vooral zodra het gaat over transformaties of echte leervragen. Zo zei docent 5 het volgende over gebruik van digitale middelen bij redeneren en bewijzen:

“Je hebt in de onderbouw ook wat uitlegfilmpjes bij de methode zitten. Daar wordt wel gebruik van gemaakt door collega’s. Ik gebruik soms bepaalde apps, ook niet heel veel, maar zoals Kahoot of Quizizz, zodat ze met hun mobiel meedoen. Ik geef nou les in de bovenbouw, dan haken ze af, dat werkt dan minder. Met dit onderwerp kan je dan niks.”

Wel hebben twee docenten van dezelfde school gezamenlijk werkbladen gemaakt. Daarop staan alle afbeeldingen van alle opdrachten uit het hoofdstuk. De docenten vinden het erg belangrijk dat de leerlingen figuren schetsen en daar de gegevens die in de opdracht staan in zetten. Omdat de leerlingen niet in het boek mogen tekenen, hebben zij dit op deze manier opgelost.

Twee andere docenten zeggen geen extra tools te gebruiken. Voor docent 2 lag dit aan de factor tijd. Hij gaf aan niet de tijd te hebben om te zoeken naar tools. Gedurende het gesprek gaf hij wel aan dat hij tijdens zijn uitleg over de stelling van Thales zich bedacht dat hij een Geogebra bestand heeft over de stelling van de 10^e editie. Hij zei dat deze eigenlijk prima te gebruiken was, maar dat hij er van tevoren niet bij heeft nagedacht.

Docent 1 zegt bezig te zijn met het digitaal vaardiger worden en tools tijdens zijn lessen inzet. Hij maakte tijdens de les gebruik van een PowerPoint met daarin de uitleg over het onderwerp. Ook had hij daarin afbeeldingen staan van sommen die hij had gemaakt met Geogebra. Later in de les liet hij de stelling van Thales zien via Geogebra in een figuur waar hij alle onderdelen kon bewegen en vergroten. Hierdoor konden de leerlingen zien dat het niet uitmaakt hoe groot de cirkel is, waar het punt *C* zich op de cirkel bevindt, de hoek is altijd 90°. Docent 1 gaf aan dat hij altijd op zoek is naar verschillende tools. Zo had hij ook een applet gevonden, waardoor hij de cosinusfunctie inzichtelijker kon maken. Hij vond ook dat de methode hier en daar wat dingen weg heeft gelaten die hij wel belangrijk vindt voor de leerlingen. Daarom heeft hij een stencil gemaakt met daarop extra informatie (zie Figuur 2).

Buiten het stencil van docent 1 gaf geen andere docent aan andere middelen aan te bieden dan in voorgaande jaren. Tijd speelt hier een belangrijke factor in. De methode biedt wel extra middelen met de komst van de nieuwe editie. Zo zitten er onder andere Geogebra toevoegingen in de digitale omgeving van de methode. Maar de docenten vinden dat de beschikbare middelen geen meerwaarde bieden bij redeneren en bewijzen.

Wat verder opviel, is dat docenten binnen één school kiezen voor een andere aanpak. Waar de ene docent gebruik maakt van digitale tools, doet de andere er niets mee.

8.6 Wat vinden de docenten een bewijs?

De docenten gaven aan dat de manier van opschrijven nog erg belangrijk vinden, net als het ‘puzzelen’. Hetgeen dat bewezen wordt, moet algemeen zijn. Een specifieke berekening valt daar wat hen betreft niet onder.

Volgens de docenten is een bewijs geen berekening. Zo zei docent 5: *“Als je de vlakke meetkunde gaat doen, dan maak je geen berekeningen, maar schrijf je een bewijs.”* Ook de overige docenten beschrijven een bewijs als een logische opeenvolging van argumenten die leiden tot het aantonen van een eigenschap. Hierbij vinden zij het ook belangrijk dat het een algemene eigenschap is. Een belangrijke stap hierin vinden zij het ‘aanmodderen’ of ‘puzzelen’. Hiermee bedoelen de docenten dat de leerlingen naar een gegeven of geschetst figuur kijken en hier zo veel mogelijk zaken opschrijven daaruit conclusies trekken.

Het maken van een tekening vinden docenten ook een belangrijk onderdeel van een bewijs. Voor sommige docenten is dat zelfs zo belangrijk dat ze de genoemde eigen werkbladen hebben gemaakt. De bedoeling van deze docenten is dat zo de drempel voor de leerlingen lager is om hier de gegevens in te zetten dan wanneer ze de schets zelf moeten maken. Docent 4 zei daarover:

“Ik heb zelf voor de leerlingen een werkblad gemaakt met echt alle figuren uit het hoofdstuk. Want ik merkte dat als ze gaan kijken welke hoeken gelijk zijn, dan willen ze gaan tekenen. Zo kunnen ze dit nu ook doen voor de opgaves die niet in het werkboek staan.”

Een andere belangrijke factor is volgens de docenten de manier van opschrijven. De docenten vinden dat niet alleen een belangrijk onderdeel van het bewijs, het is zelfs een vereiste. De manier van opschrijven had in de vorige editie een hoge prioriteit. Daar werd door de methode en door de docenten veel aandacht aan gespendeerd. Volgens docent 5 is het zelfs zo belangrijk, dat iemand het hele bewijs goed kon hebben, maar als de argumentatie bij iedere stap ontbrak, dan gaf hij de leerling nul punten.

De nieuwe editie heeft dit veel meer losgelaten, maar in de lessen kwam de manier van opschrijven nog veel aan de orde. Nu de docenten zien dat de methode dit meer loslaat, doen zij dit ook, maar een aantal aspecten blijft in hun lessen terugkomen. De stappen van ‘gegeven’, ‘te bewijzen’ en ‘het bewijs’ laten ze los. Wel blijven alle docenten de reden opschrijven waarom sommige uitspraken gedaan mogen worden. Ook gebruiken veel docenten in de uitleg nog de tekens die voorheen werden gebruikt, zoals accolades en implicatiepijlen. Als antwoord op de vraag of docent 5 de manier van opschrijven blijft gebruiken, ook als het boek dit loslaat, antwoordde hij: *“Ja, alleen hoef ik het niet meer fout te rekenen. Nu in de huidige 6^e moet ik dat wel en dan missen ze gewoon een punt.”*

Volgens de docenten bestaat een bewijs dus uit de volgende aspecten: de manier van opschrijven, de ketting van argumenten en het feit dat hetgeen je aan wil tonen een algemeen iets moet zijn. Hieronder valt dus het niet uitrekenen van een zijde met behulp van stellingen en eigenschappen. Vooral dit laatste is nu veel meer in de methode terug te vinden.

9 Conclusies

In dit onderzoek is gezocht naar een antwoord op de volgende onderzoeksvraag: *Op welke manieren gaan docenten om met redeneren en bewijzen in 5 vwo wiskunde B in de meetkunde in het nieuwe curriculum van 2015?* Het onderzoek is aan de hand van drie deelvragen uitgevoerd. Zo is literatuuronderzoek gedaan, en zijn de methodeboeken van de methode ‘Moderne wiskunde’ geanalyseerd. Ook zijn lessen geobserveerd van 5 vwo wiskunde B die over het onderwerp van het onderzoek gaan. Verder zijn vijf docenten geïnterviewd die deze lessen hebben verzorgd. Dit is gebeurd op twee verschillende scholen die gebruikmaken van de methode ‘Moderne wiskunde’. Hieronder wordt eerst besproken wat het curriculum is en hoe deze tot uiting komt in de les en wat de gevolgen van een wijziging hierin zijn. Vervolgens zal worden toegelicht wat als een bewijs gezien wordt. Daarna zal het gaan over de gevolgen voor de methodeboeken en de lessen in de praktijk.

Het curriculum gaat over de inhoud van de lessen die gegeven moeten worden en die getoetst zullen worden middels examens. Het biedt een kader met verwachtingen voor instructie en blijkt in de praktijk te verwijzen naar de materiele middelen die ontworpen zijn om de leerlingen goed voor te bereiden op de toetsing. Educatieve uitgeverijen worden betrokken in het proces van herschrijving van het curriculum, zodat zij ervoor kunnen zorgen dat er nieuw methodemateriaal komt die het herziene examenprogramma weerspiegelen. Uit de literatuur is gebleken dat het goed is om de docenten te betrekken bij de verandering van het examenprogramma, maar de geïnterviewde docenten zijn niet betrokken geweest bij de herschrijving van het wiskunde methodeboek *Moderne wiskunde* en gaven aan dat ze er tijdens het doornemen van het nieuwe boek pas achter kwamen welke inhoudelijke veranderingen hebben plaatsgevonden betreffende de hoofdstukken over redeneren en bewijzen.

Uit dit onderzoek is gebleken dat er geen eenduidige visie bestaat op bewijzen, alhoewel de betekenis van bewijzen subtiel verschilt in de theorie. Kort kan gezegd worden dat een bewijs een samenhangende reeks van beweringen is die vanuit de gegeven gegevens (X) via één of meerdere tussenstappen tot de conclusie (Y) leidt, binnen geaccepteerde redeneringen van de klasgemeenschap. In het boek *Moderne wiskunde* wordt in de 10e editie een bewijs beschreven als een juiste redenering waarmee een vermoeden bevestigd kan worden en volgt daarmee in grote lijnen de theorie. In de 10e editie schenken ze ook veel aandacht aan de manier van opschrijven en gebruiken ze binnen de klas geaccepteerde stellingen en eigenschappen. Daarmee is de definitie die in de 10e editie van *Moderne wiskunde* te vinden is, in overeenstemming met de definitie van Stylianides (2007). In de 11e editie van *Moderne wiskunde* is geen definitie van een bewijs te vinden. Ook worden er geen algemene omgangsnormen genoemd en zijn deze ook nergens impliciet terug te vinden. Volgens docenten is een bewijs geen berekening, maar een logische opeenvolging van argumenten die leiden tot het aantonen van een

(algemene) eigenschap, waarbij zoveel mogelijk zaken worden opgeschreven waarna een conclusie getrokken wordt. Dit komt veel overeen met de uitleg en voorbeelden uit de 10e editie van het methodeboek en komt overeen met een gedeelte van de literatuur. Er zijn dus waarneembare veranderingen te zien in hoe de term ‘bewijs’ wordt geïntroduceerd wanneer de twee edities van het methodeboek met elkaar worden vergeleken. Met name de manier van opschrijven had in de 10e editie hoge prioriteit, waar in de 11e editie weinig nadruk op wordt gelegd. De docenten geven aan dat ze de manier van opschrijven nog steeds erg belangrijk vinden. Ze vinden dit zo’n belangrijk onderdeel van een bewijs, dat ze aangeven dit nog steeds te blijven doen. Ook hierin zijn de docenten in overeenstemming met Stylianides (2007).

Een ander groot verschil tussen de twee edities van het methodeboek, is de verschillende soorten bewijsopgaven. Er is een duidelijke verschuiving gevonden naar meer algebraïsche bewijsopdrachten. Deze verandering heeft er ook voor gezorgd dat er minder algemene stellingen behandeld worden in het boek. De docenten vinden deze verandering niet erg. Ze gaven aan dat de bewijshoofdstukken die bij het oude examenprogramma hoorden lastig waren en merkten dat de leerlingen dat ook vonden. Vanuit dat opzicht omarmen ze de verandering. Docenten geven wel aan dat er een bepaalde manier van denken verloren gaat die bij bewijzen hoort. Dit is in overeenstemming met de literatuur. In de literatuur is terug te vinden dat bewijzen zorgt voor een diepere kennis over een bepaald onderwerp. De nieuwe editie van Moderne wiskunde biedt nog steeds mogelijkheden om te bewijzen, maar dit zijn er minder en minder expliciet. De verandering heeft er ook voor gezorgd dat er minder meerstapsbewijzen in de opdrachten te vinden zijn en de bewijsopdrachten makkelijker geworden (Heinze et al., 2008). Dit is in overeenstemming met de mening van de docenten.

Hoewel de docenten de veranderingen omarmen, blijkt uit de praktijk dat docenten veel vasthouden aan de manier van bewijzen die bij het oude examenprogramma hoort, maar wel (onbewust) in transitie zijn naar het nieuwe examenprogramma. Hierdoor houden ze vast aan de leerdoelen die bij het oude examenprogramma horen, maar zijn hier minder strikt in. In de praktijk is waargenomen dat dit voor verwarring zorgt bij de leerlingen. Het is merkbaar dat docenten hun draai nog moeten vinden, met het nieuwe examenprogramma en diens leerdoelen. De docenten zelf geven ook aan dat ze de oude leerdoelen voorlopig nog blijven gebruiken, ook al hebben de methodeboeken dit losgelaten. Docenten blijken ook weinig te veranderen in hun lessen. Ze blijven dit onderwerp op dezelfde wijze aanbieden en ze hebben tot nu toe weinig verandering gemerkt. Een aantal docenten wil zo graag vasthouden aan de oude leerdoelen dat ze zelf extra materiaal ontwikkelen om dit aan aanvullend te gebruiken. Toch geven docenten aan dat ze de lessen extra goed voorbereiden na een wijziging van het examenprogramma. Docenten maken hiervoor zelf de opdrachten die te vinden zijn in de nieuwe editie.

Geconcludeerd kan worden dat het beoogd curriculum niet overeenkomt met het curriculum dat geïmplementeerd wordt door docenten. Door tijdsgebrek en gebrek aan communicatie onder docenten over dit onderwerp, geven de docenten les middels het nieuwe methodeboek (11e editie) met de inhoud en leerdoelen uit de 10e editie in hun achterhoofd. Zij voegen dan ook elementen uit de 10e editie toe aan hun lessen, die niet meer bij het beoogd curriculum passen. Dit zorgt voor verwarring bij leerlingen. Hoewel het examenprogramma en daarmee ook de methodeboeken zijn aangepast, lukt het de docenten uit dit onderzoek niet om deze aanpassing volledig door te voeren in hun lessen. Het gerealiseerde curriculum komt dan ook niet (volledig) overeen met het beoogd curriculum. Docenten zouden eerder op de hoogte moeten zijn de veranderingen in de editie van het methodeboek en hun lessen hierop aan moeten passen. Betere communicatie en meer tijd om hierin te verdiepen lijkt noodzakelijk.

10 Literatuur

- Van den Akker, J. J., Kuiper, W., & Hameyer, U. (Eds.) (2003). *Curriculum landscapes and trends* (pp. 1-10). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bakker, H., Bogaard, A., Van den Bos, D., Doekes, W., Van der Linden, T., & Peereboom, H. (2012). *Moderne wiskunde 5 vwo B* (10e ed.). Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers.
- Bakker, H., Boon, B., Bos, D., Van Dijk, B., Doekes, W., Gietema, N., . . . Wallien, C. (2016). *Moderne wiskunde 4 vwo B* (11e ed.). Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers.
- Bakker, H., Boon, B., Bos, D., Van Dijk, B., Doekes, W., Gietema, N., . . . Wallien, C. (2016). *Moderne wiskunde 5 vwo B* (11e ed.). Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers.
- Bakker, H., Bos, D., Brouwer, C., Doekes, W., & Peereboom, H. (2013). *Moderne wiskunde 6 vwo B* (10e ed.). Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers.
- Bakker, H., Boon, B., Bos, D., Doekes, W., Peereboom, H., Van den Reek, K., . . . Wallien, C. (2017). *Moderne wiskunde 6 vwo B* (11e ed.). Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers.
- Bakker, H., Van Dijk, B., Doekes, W., Van der Linden, T., Peereboom, H., Roorda, G., . . . Sinkeldam, R. (2011). *Moderne wiskunde 4 vwo B* (10e ed.). Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers.
- Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM*, 40(3), 501-512.
- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2003). *The teaching of proof*. In L. Tatsien (Red.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (3, pp. 907-920). Beijing, China: Higher Education Press.
- Brodahl, C., & Wathne, U. (2018). *Imaginary dialogues—In-service teachers' steps towards mathematical argumentation in classroom discourse*. Geraadpleegd op 4 juni 2020, van https://uia.brage.unit.no/uia-xmlui/bitstream/handle/11250/2505081/2018-Brodahl+Wathne+JISTE_JISTE+vol+22+issue+1+p30-42.pdf?sequence=1
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151.
- College voor Toetsen en Examens. (z.d.). *Centrale examens vo*. Geraadpleegd op 29 mei 2020, van <https://www.cvte.nl/taken-cvte/centrale-examens-vo>
- Fujita, T., & Jones, K. (2014). Reasoning-and-proving in geometry in school mathematics textbooks in Japan. *International Journal of Educational Research*, 64, 81-91.
- Gueudet, G., Pepin, B., Restrepo, A., Sabra, H., & Trouche, L. (2016). E-textbooks and Connectivity: Proposing an Analytical Framework. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-20.
- Heinze, A., Cheng, Y. H., Ufer, S., Lin, F. L., & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: Teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM*, 40(3), 443-453.

- Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of mathematical knowledge. In G. Hanna, H.N. Jahnke & H. Pulte. (Eds.) *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 85-100).
- Kilpatrick, J. (2009). *The mathematics teacher and curriculum change*. Geraadpleegd op 14 april 2008, van <https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/3511/Kilpatrick2009The.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up*. Mathematics Learning Study Committee, Center for Education. Washington, DC: National Academy Press.
- Lesseig, K., Hine, G., Na, G. S., & Boardman, K. (2019). Perceptions on proof and the teaching of proof: A comparison across preservice secondary teachers in Australia, USA and Korea. *Mathematics Education Research Journal*, 31(4), 393-418.
- Mariotti, M. A., & Balacheff, N. (2008). *Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof*. Geraadpleegd op 18 november 2016, van <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s11858-008-0107-y.pdf>
- Miyakawa, T. (2012). Proof in geometry: a comparative analysis of French and Japanese textbooks. In *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 225-232
- Novak, J. D. (2002). Meaningful learning: The essential factor for conceptual change in limited or inappropriate propositional hierarchies leading to empowerment of learners. *Science Education*, 86(4), 548-571.
- Otten, S., Gilbertson, N. J., Males, L. M., & Clark, D. L. (2014). The mathematical nature of reasoning-and-proving opportunities in geometry textbooks. In L.D. English (Ed.), *Mathematical Thinking and Learning*, 16(1), 51-79.
- Pepin, B. (2014). Re-sourcing curriculum materials: in search of appropriate frameworks for researching the enacted mathematics curriculum. *ZDM*, 46(5), 837-842.
- Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33(5), 158-175.
- Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7(1), 5-41.
- Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 319-370). Geraadpleegd op 21 november 2016, van https://books.google.nl/books?id=B_onDwAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=nl&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 289-321.
- Stylianides, A. J. (2011). Towards a comprehensive knowledge package for teaching proof: a focus on the misconception that empirical arguments are proofs: original research. *Pythagoras*, 32(1), 1-10.
- Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(4), 307-332.

Stylianides, G. J. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. *International Journal of Educational Research*, 64, 63-70.

Thompson, D. R., & Senk, S. L. (2014). The same geometry textbook does not mean the same classroom enactment. *ZDM*, 46(5), 781-795.

Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 253-295.

Wathne, U., & Brodahl, C. (2019). Engaging Mathematical Reasoning-and-Proving: A Task, a Method, and a Taxonomy. *Journal of the International Society for Teacher Education*, 23(1), 6-17.

11 Bijlage

11.1 Bijlage 1. Definitieve horizontale analyse schema

Horizontale analyse		Naam boek:	
<u>Achtergrondinformatie</u>			
Titel			
Niveau en jaarlaag			
Aantal pagina's			
Namen van de auteurs en hun achtergrond			
Uitgever en jaar van publicatie			
Intenties van de auteurs		Wiskundige intenties:	Pedagogische intenties:
Bijbehorende materialen			
Globale structuur			
Aantal hoofdstukken			
Titels van de hoofdstukken			
Onderwerpen en volgorde			
Structuur van het boek en de verdeling van de pagina's over de verschillende onderdelen, zoals introductie, theorie en opgaven			
Verticale analyse			
<u>Uitleggende teksten</u>			
Wordt er in het hoofdstuk een definitie gegeven van het begrip 'bewijs'? Zo ja, wat is de definitie?			
Wat zijn de belangrijkste kenmerken van een bewijs volgens het hoofdstuk?			
Vergelijking met de definitie van een bewijs volgens Stylianides		<p><i>Definitie 'bewijs' van Stylianides (2007):</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. <i>It uses statements accepted by the classroom community (set of accepted statements) that are true and available without further justification;</i> 2. <i>It employs forms of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and</i> 3. <i>It is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the class room community.</i> 	
Totaal aantal tekstblokken	Aantal	Opmerkingen	

<i>waarvan:</i>		
• Theoretische tekst (T)		
• Gerelateerde tekst (G)		
• Uitgewerkt voorbeeld (Ub, Ubm, Ur, Uc)		Voorbeeldbewijs zonder motivatie (Ub): Voorbeeldbewijs met motivatie (Ubm): Voorbeeldberekening (Ur): Voorbeeldconstructie (Uc):
Welke stellingen worden genoemd/gebruikt? Wordt de stelling onderbouwd met een deductief (D) of een empirisch (E) argument? Wordt er geen argument gegeven (G) of wordt dat aan de leerling overgelaten (L)? Wordt er een schets (S) gegeven, is het bewijs in een eerder hoofdstuk bewezen door het boek of door de leerling of genoemd (Hb, Hl, Hg) of wordt er intern of extern verwezen (V)?		
<u>Leerlingactiviteiten</u>		
Totaal aantal opgaven	Aantal	Opmerkingen
Aantal opgaven gerelateerd aan redeneren en bewijzen	Aantal R: B:	Opmerkingen
<i>Waarvan:</i>		<i>Onderverdeling bewijsopgaven in soort bewijs:</i>
Bewijsopgave met deductief meetkundig argument		
Bewijsopgave met impliciet meetkundig argument		
Bewijsopgave met algebraïsch meetkundig argument		
Bewijsopgave met schets		
Bewijsopgave met tegenvoorbeeld		
Bewijs uit het ongerijmde		
Bewijsopgave met gevalsonderscheiding		
Anders		
		<i>Onderverdeling bewijsopgaven in soort stelling:</i>
Algemene stelling		
Specifieke stelling		

Quasi-algemene stelling		
		<i>Onderverdeling redeneeropgaven:</i>
Vermoeden maken		
Vermoeden of stelling onderzoeken (maar niet bewijzen of het wel/niet klopt)		
Argument of bewijs evalueren of corrigeren		
Deductief argument ontwikkelen		
Algebraïsch argument ontwikkelen		
Empirisch argument ontwikkelen		
Schets van een bewijs geven of bedenken wat de volgende stap is		
Berekening met meetkundig argument		
Redenering voor constructie geven		
Anders		

11.2 Bijlage 2. Lesobservatieschema

SCHEMA VOOR LESOBSERVATIE				5VWO H7 11^e editie		
Paragraaf:	Klas:	Docent:	Aantal:	Dag:	Datum:	Lesuur:
Globale lesindeling – (min) – (min) – (min) – (min) – (min) – (min) – (min)	Lesonderdeel Start van de les Afsluiting van de les					
Doel van de les	<i>Wordt het lesdoel aan de leerlingen bekend gemaakt? Zo ja, wat is het lesdoel?</i>					
Materialen	<i>Maakt de docent gebruik van een tekstboek en moeten de leerlingen dit ook doen? Zo ja, in welke mate?</i>					
	<i>Maakt de docent gebruik van andere (digitale) tools? Zo ja, hoe worden deze ingezet?</i>					
Wiskundige inhoud <ul style="list-style-type: none"> • Redeneren 	<i>Geeft de docent uitleg bij de begrippen vermoeden, bewijs en stelling en bij het wiskundig redeneren?</i> <i>Op welke manier en in welke mate schenkt de docent aandacht aan wiskundig redeneren en het bijbehorende denkproces? Dit kan in de kleinste dingen zijn als: ‘waarom is dit’</i>					

<ul style="list-style-type: none"> • Bewijzen • Notatie van een bewijs 	<p><i>Wordt het begrip 'bewijs' gedefinieerd tijdens de klassikale instructie of tijdens het uitvoeren van activiteiten? Welke stellingen en bewijzen komen er tijdens de les aan bod?</i></p> <p><i>Geeft de docent aan wat hij/zij/het boek vindt over de notatie van een bewijs? Zo ja, wat moet de notatie zijn?</i></p>
<p>Klassikale instructie</p> <p><u>Houding</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Houding van de docent • (Verwachte) houding en rol van de leerling <p><u>Wiskundige inhoud</u></p>	<p><i>Wat is de houding van de docent? Ziet de docent zichzelf als presentator, als mediator van de tekst in het tekstboek, als coach, of anders?</i></p> <p><i>Welke houdingen verwacht de docent van de leerlingen? Is de gevraagde houding duidelijk voor de leerlingen? Hoe zorgt de docent voor deze houding? Lijkt dit effect te hebben?</i></p> <p><i>Licht de docent de begrippen die hij gebruikt toe? Is de docent</i></p>

<ul style="list-style-type: none"> • Accuraatheid en volledigheid van de docent 	<p><i>accuraat in de notatie van argumenten en bewijzen en wijst hij leerlingen expliciet op deze notatie?</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> • Denkproces 	<p><i>Licht de docent zijn eigen denk- en redeneerproces hardop toe en neemt hij hier voldoende tijd voor? Stimuleert de docent de leerlingen het wiskundig redeneren bij de leerlingen? Hoe vaak en op welke manieren worden de leerlingen aan het denken gezet tijdens de klassikale instructie?</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> • Voorbeelden 	<p><i>Maakt de docent gebruik van voorbeelden? Zo ja, geeft de docent duidelijk aan waarom hij of zij bepaalde keuzes maakt? Welke rol spelen de leerlingen tijdens het geven van het voorbeeld?</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> • Misconcepties 	<p><i>Geeft de docent voorbeelden van een foute stap/een fout bewijs?</i></p>

<p>Zelfstandig werken</p> <ul style="list-style-type: none"> • Keuze activiteiten • Doel activiteiten • Inhoud activiteiten • Vragen, discussie en overleg 	<p><i>Wie kiest de opgaven uit: de leerling of de docent? Komen deze opgaven uit het boek? Komen de opgaven uit een andere bron? Wat mogen de leerlingen gebruiken bij het maken van de opgaven?</i></p> <p><i>Is het doel van de leerlingactiviteiten bij de leerlingen bekend? Ligt de nadruk op het redeneren en bewijzen, of juist niet?</i></p> <p><i>Wat is de inhoud en aard van de leerlingactiviteiten? Is er veel aandacht voor het ontwikkelen van vermoedens, argumenten en bewijzen? Is er aandacht voor het achterliggende redeneerproces?</i></p> <p><i>Hoe is de dynamiek tussen leerlingen onderling en tussen <u>leerlingen en de docent</u> tijdens het zelfstandig werken? Is er ruimte voor vragen?</i></p>

--	--

11.3 Bijlage 3. Vragen interview

1. Hoe lang geeft u al les?

2. Welke van onderstaande heeft u lesgegeven?
V4 10^e editie
V4 11^e editie
V5 10^e editie
V5 11^e editie
V6 10^e editie

3. Hoe vond u de les verlopen? Is hetgeen u wilde bereiken in de les ook gelukt en wat was dit?

4. Hoe veel wijzigingen heeft u in deze tijd al meegemaakt van het examenprogramma?

5. Hoe bent u de inhoud van de wijzigingen te weten gekomen? (conferentie, via een collega, boekje van de overheid of anders?)

6. Kunt u deze wijzigingen in eigen woorden verwoorden?

7. Welk verschil merkt u in de bewijs-hoofdstukken? En wat zijn voor u de gevolgen hiervan?

8. Welke invloed heeft dit voor uw lessen? Hoe gaat u om met deze veranderingen?

9. Als u de 10^e editie les heeft gegeven, hoe bereidde u toen uw lessen voor? En hoeveel tijd kostte dit u gemiddeld per les?

10. Hoe is dit nu in 5 vwo wiskunde B gegaan? En hoeveel tijd kost dit u gemiddeld per les?

11. Hoe ziet nu een gemiddelde les eruit?

12. Hoe was dit bij de 10^e editie?

13. Welke middelen gebruikte u bij de bewijs-hoofdstukken? En hoe heeft u deze ingezet? (digitale middelen of middelen van de methode zelf)

14. Welke middelen gebruikt u nu? En hoe zet u deze in? En hoe vertrouwd bent u om deze te gebruiken?