BACHELOR

Muziektheoretische ritmeanalyse
een wiskundig model

van Santvoort, Mike

Award date:
2018

Department of Mathematics and Computer Science

Muziektheoretische Ritmeanalyse

Een wiskundig Model
Bachelor Thesis

Mike van Santvoort
0955345

Begeleider:
H.J.M. (Hans) Sterk

Versie 1.0

Eindhoven, 3 juli 2018

Samenvatting

In dit verslag presenteren we een wiskundig model dat de muziektheorie achter ritme en maat beschrijft. Dit model beschrijft (ritmische) noten als een paar getallen (n, r). De paren getallen vormen een moduul over de ring van scalairen $\mathbb{Z}_2$. Het voordeel van deze formalisering is het feit dat de vele muzikale schrijfwijzen voor eenzelfde muzikale idee alle als hetzelfde paar getallen worden geformaliseerd. De ambiguïteit uit de gebruikelijke muzieknotatie is weg. Ten slotte beargumenteren we dat dit nieuwe model de muziektheorie beter beschrijft dan de op dit moment bekende formaliseringen van ritme.

Met dit moduul onderzoeken we hoe ritme als structuur opgebouwd kan worden. We beargumenteren hierin dat er vier categorieën (ritmische) noten zijn. Categorie I noten (basisnoten) zijn in dit systeem noten die te schrijven zijn als $(n, 1)$. De verbindingen van (al dan niet gepunteerde) basisnoten (categorie II) vormen een cyclisch (deel)moduul van (ritmische) noten, voortgebracht door een basisnoot (categorie I).

Vervolgens presenteren we maatsoorten als functionalen die de noten uit ons model afbeelden op louter hun relatieve duur. We zien dat met deze interpretatie alle maatsoorten equivalent aan elkaar zijn en hun werk even goed doen. We zien ook dat we via maatsoorten een ordening en norm op noten kunnen aanbrengen, en dat we maatsoorten, hoewel ze het niet zijn, kunnen zien als breuken bij de bepaling van de lengte van een maat.

Vervolgens beschouwen we de structuur van zogenaamde antimetrische figuren (categorie III en IV noten). We zien hierin dat niet alle antimetrische figuren even nuttig zijn. We beargumenteren dat zonder antimetrische nesting alle n-olen, waar n deelbaar is door 2, onnodig zijn in de muziek, aangezien we deze noten ook als puntering kunnen opschrijven. We beargumenteren mét antimetrische nesting dat alle n-olen, waar n twee gelijke priemfactoren in zich heeft, onnodig zijn in de muziek in de zin dat er een alternatieve schrijfwijze voor deze n-olen bestaat waarin zij niet als n-ool genoteerd hoeven te worden.

Ten slotte geven we van alle theoretische bevindingen in dit verslag toepassingen om bijvoorbeeld de muziekuitvoering, of muziekcompositiesoftware te versimpelen/verbeteren. De focus wordt in deze toepassingen vooral gelegd op de rol van de computer en zijn grote rekenkracht in vergelijking met "gewone" mensen. We eindigen het verslag met een kritische beschouwing van het uiteindelijke model in de context van de bestaande modellen en de gemodelleerde muziektheorie, we geven hier de voors en tegens van het model aan.

Voorwoord

In mijn bachelor thesis "Wiskundige Muziekanalyse" probeer ik mijn liefde voor wiskunde en muziek te combineren; ik probeer een brug te slaan tussen de exacte wereld van de wiskunde en de vrijere wereld van de muziek. Ik bespeel al sinds mijn 9e levensjaar slagwerk en ik heb het altijd al interessant gevonden te zoeken naar patronen en regelmatigheden in muziek en muziektheorie; zelfs in onderdelen van de theorie die in de praktijk niet of nauwelijks voorkomen. In deze zoektocht had ik altijd meer oog voor de theorie dan voor de praktijk. Soms leidde dit tot frustratie van mijn muziekdocenten, die de overtuiging hadden dat er niet nagedacht hoeft te worden over dingen die in de praktijk (nog) niet voorkomen. Met deze thesis laat ik in ieder geval zien dat ik het met die mening niet eens ben, en dat ik denk dat deze lijn van redenering de muziek als kunstvorm niet verder helpt: we kunnen pas nieuwe muzikale dingen proberen als het theoretisch raamwerk dat eraan ter grondslag ligt geen gaten meer heeft.

Het idee om muziektheorie met wiskunde te gaan onderzoeken, komt door twee overtuigingen. Enerzijds denk ik dat de algemene muziekleer[1], de tak van muziektheorie waar we ons in dit verslag mee bezig houden, zich door haar obsessie met regelmaat het best laat formaliseren door een wetenschap die ook gericht is op regelmaat: wiskunde. Anderzijds wilde ik wiskunde gebruiken, zodat ik het werk van bijvoorbeeld de wiskundige Euler kan voortzetten: hij is één van de wiskundigen die goed heeft nagedacht over een wiskundige formalisering van muziektheorie. Hij heeft hierin vooral tonen, toonladders en akkoorden bestudeert. Ik wilde zijn werk aanvullen door te kijken naar het andere facet van algemene muziekleer: ritme en maat.

Dit verslag had niet tot stand kunnen komen zonder de medewerking van een aantal (groepen) mensen die ik graag wil bedanken. Allereerst wil ik mijn medestudenten en vrienden bedanken die mijn verhalen over dit project en muziektheorie tot in den treuren hebben moeten aanhoren. Zonder tegen hen over het project aan te praten, zou ik mijn redeneringen over vele onderwerpen nooit rond hebben kunnen krijgen. In het bijzonder wil ik van deze mensen Joep van Wanrooij bedanken, een medeslagwerker, aangezien hij vaak met mij heeft nagedacht over de "muzikale logica" van mijn ideeën.

Vervolgens wil ik mijn muziekdocenten en dirigenten bedanken bij wie ik altijd langs kon gaan voor muzikaal-theoretisch advies, zelfs al waren mijn vragen niet heel praktisch. In het bijzonder wil ik Hans van de Moosdijk bedanken, die mij zijn conservatoriumreader "Fundamentele algemene muziekleer" heeft uitgeleend, waarmee ik een aantal gaten in mijn kennis heb kunnen opvullen, almede een aantal gaten in de muziektheorie zelf heb kunnen identificeren.

Dan wil ik nog mijn begeleider bedanken, Hans Sterk, die mij misschien wel het meest heeft geholpen gedurende dit project. Hij heeft mij misschien niet zo zeer geholpen bij het onderzoeken van de muziektheorie, maar hij heeft mij des te meer geholpen bij het opschrijven van mijn ideeën. Hij wist mij altijd vanuit mijn muzikaal-theoretische bubbel terug op de grond te zetten en mij in te laten zien dat mijn ideeën misschien niet allemaal zo "logisch" en "vanzelfsprekend" zijn als ik misschien denk. Zonder hem zou dit verslag nooit zijn huidige vorm gekregen.

[1] De tak van muziektheorie die zich bezighoudt met het systematisch onderzoeken en opschrijven van regels in (algemene, niet cultuur gebonden) muziek.

Ten slotte wil ik jou, de lezer, bedanken voor het feit dat je de tijd wilt nemen om mijn (soms niet heel praktische) muzikale ideeën door te lezen. Ik wens je veel leesplezier en hoop dat je het een en ander opsteekt van dit verslag. Ik hoop ook dat je aan het eind van dit verslag inziet, net als ik, dat wiskunde gebruiken om muziektheorie te beschrijven en te onderzoeken best nuttig kan zijn.

Juni 2018
Mike van Santvoort

Inhoudsopgave

Inhoudsopgave **vii**

Lijst van figuren **ix**

Lijst van tabellen **xiii**

1 Introductie **1**

2 Muziektheoretische achtergrond **4**
2.1 Noten en nootsymbolen . . . 4
2.2 De (relatieve) duur van noten . . . 6
2.3 Maat, metrum en metriek . . . 9
2.4 Antimetrische figuren . . . 11
2.5 Tempo en absolute tijdsduur . . . 13

3 Literatuuronderzoek **15**
3.1 De Pivot-Pulse . . . 15
3.2 Representatie van een ritme als een string symbolen . . . 16

4 Een wiskundige beschrijving van noten **21**
4.1 Het formaliseren van de nootstructuur . . . 22
4.2 Hoe leest een muzikant "gewone" ritmes? . . . 39
4.3 Toepassingen . . . 44

5 Maatsoorten als functionalen **47**
5.1 Wat zijn maatsoorten? . . . 48
5.2 Zijn alle maatsoorten equivalent aan elkaar? . . . 59
5.3 Toepassingen . . . 65

6 Antimetrische figuren als muziekuitbreiding **69**
6.1 Duolen en triolen: notationele last of muzikale goudmijn? . . . 70
6.2 Algemene antimetrische figuren: Definitie . . . 85
6.3 Algemene antimetrische figuren: Exploratie . . . 94
6.4 Oneindige nesting en limietverzamelingen . . . 105
6.5 Toepassingen . . . 110

7 Tempo, absolute duur, en afsluiting **114**
7.1 Absolute duur . . . 115
7.2 Een toepassing . . . 118
7.3 Terugkoppeling naar hoofdstuk 3 . . . 119
7.4 Discussie en ideeën voor vervolgonderzoek . . . 123

Bibliografie **127**

A Straight en Swing **129**
A.1 Op het rechte pad blijven: Straight 129
A.2 Een beetje loskomen: Swing 130
A.3 Het beste van beide wegen 131

B Partituur van het nummer "Mumbo's Mountain" **133**

Lijst van figuren

2.1 *Een schematisch overzicht van de behandelde nootregels; elementen staat in het groot benoemd met in de doos schuin eronder de mogelijke keuzes die in dat stadium voor de elementen te maken zijn.* 5
2.2 *De verschillende elementen van noten geïllustreerd.* 5
2.3 *De notenpiramide. Merk op dat iedere (basis)noot een macht van twee van iedere andere noot af staat. Wees ten slotte bewust van het feit dat de verbanden in principe nog verder worden voorgezet naar boven en onder in de notenpiramide. De brevis is bijvoorbeeld gelijk aan twee hele noten en twee tweeëndertigste noten duren even lang als één zestiende noot.* 7
2.4 *Visuele illustratie van punten en bogen in een partituur. Merk op dat we in deze passage in een 9/8-maat spelen. Wees door het gegeven voorbeeld gewaarschuwd dat het dus mogelijk is om puntering en verbindingsbogen te combineren.* 8
2.5 *Een notenvoorbeeld om het metrum van verschillende maten te illustreren. De kleine tekens boven op de nootlengtesymbolen geven het punt aan waarop er mogelijke theses of arses zitten.* 10
2.6 *Een kwartentiool na twee gewone kwartnoten.* 11
2.7 *Een ritmische passage met een begintempo en een tempowisseling.* 14

3.1 *Een muzikale passage met meerdere maatsoorten.* 16
3.2 *Het Clave-Son ritme* 17
3.3 *Het Clave-Son ritme opgeschreven in alleen maat zestiende noten. De noten geven waar de pulsen zitten, de rusten waar de stiltes zitten.* 17
3.4 *Het Clave-Son ritme gerepresenteerd als klok, waar de bellen de pulsen aangeven. Figuur duur Godfried T. Toussaint* 18
3.5 *Het maken van de wiskundige formalisering van het Clave-Son ritme stap voor stap. (1) tot en met (3) zijn herschrijvingen van hetzelfde Ritme. In (4) is de achtste noot als blokje gekozen en is het ritme in 16 blokjes opgedeeld, waarbij voor ieder blokje is aangegeven of er een puls of een rust is. In (6) en (7) is dit vervolgens op twee manieren geformaliseerd.* 19
3.6 *Een patroon met vier kwartnoten.* 20

4.1 *De nootvoorbeelden bij voorbeeld 4.1.1* 23
4.2 *De relatie tussen nootnummers en basisnoten.* 24
4.3 *Vijf manieren om hetzelfde op te schrijven.* 25
4.4 *Twee nootvoorbeelden uit de nieuw geconstrueerde verzameling noten uit voorbeeld 4.1.6* 32
4.5 *Drie voorbeelden van muzikale eigenschappen. De nootvoorbeelden (a) en (b) met hetzelfde nummer zijn herschrijvingen van hetzelfde muzikale idee.* 37
4.6 *De structuur van muzikale noten, zoals we deze gevonden hebben in dit hoofdstuk* . 44
4.7 *Een passage uit Chopin's Nocturne Opus 9 No. 2.* 45
4.8 *De nootsymbolen waarvan MuseScore aangeeft dat je ze kan invoegen.* 46

5.1 *Een lastig ritmisch patroontje bestaande uit verschillende nootvoorbeelden. Iedere rode noot geeft het begin van een nieuw nootvoorbeeld aan.* . . . 47
5.2 *Een voorbeeld van een 4/4-maat waar boven gebruikt worden om noten langer dan 4 tellen te laten duren. De halve noot wordt hier verbonden met de hele noot in de volgende maat om de puls nog langer te later duren dan de relatieve duur tot de nieuwe maat. Door de verdere verbinding met de hele noot in maat 3, wordt de relatieve duur van de originele halve noot zelfs verder vergroot over de maatstreep die maat 2 en 3 van elkaar scheidt.* . . . 50
5.3 *Het nootvoorbeeld gevonden in voorbeeld 5.1.4.* . . . 53
5.4 *De output van algoritme 1 in voorbeeld 5.1.5* . . . 58
5.5 *Een visuele representatie van het idee dat gebruikt wordt om een nieuwe totale ordening op te bouwen voor de noten (N) vanuit de reële getallen en zijn bekende ordening $>$ door lemma 5.2.1 toe te passen. Hoewel in er gegeven staat dat we vergelijkingen uitvoeren in de verzameling $\mathbb{R}$, moet het opgemerkt worden dat voor veel praktische gevallen de beschouwing van $\mathbb{Q}$ voldoende is. Alleen in eventuele abstracte uitbreidingen op noten zou $\mathbb{R}$ nodig zijn.* . . . 60
5.6 *Bij (1) een 2/2-maat gevuld met kwartnoten en bij (2) een 2/4-maat gevuld met kwartnoten. (1) wordt gevuld door 4 kwartnoten, (2) door 2 kwartnoten.* . . . 64
5.7 *Een 3/8-maat (1) en een 3/4-maat (2). In (a) is steeds de muzikale noot weergegeven die één maat "opvult" en in (b) is steeds het aantal achtste noten weergegeven dat de maat "opvult".* . . . 65
5.8 *Een drumpartij met twee maatsoorten en één raar opgeschreven noot.* . . . 66
5.9 *Een fijnere herschrijving van het notenvoorbeeld in figuur 5.8* . . . 67
5.10 *Dezelfde maat weergegeven in een 2/4-maat (1) en in een 2/2-maat (2).* . . . 68

6.1 *Een deel uit de (bewerkte) eerste viool partituur van het nummer "Lulu and Shaco's Quicky Encounter" uit het spel "League of Legends". Het nummer is gecomponeerd door Christian Linke en gearrangeerd door Andrés Soto. Gegeven is dat de maatsoort een 4/4-maat is.* . . . 69
6.2 *Het notenvoorbeeld bij voorbeeld 6.1.1.* . . . 71
6.3 *Het notenvoorbeeld behorende bij voorbeeld 6.1.4.* . . . 75
6.4 *De omweg die wij maken om $\mathcal{A}_3$ te definiëren.* . . . 76
6.5 *De dimensieweg: je kunt bovenin beginnen en wél een dimensie opschuiven naar beneden door met drie te vermenigvuldigen, maar terug kun je niet meer. Dit is de reden waarom $N_{(2)} \subset N_{(3)}$; van $N_{(3)}$ naar $N_{(2)}$ kan wel, maar andersom niet.* . . . 82
6.6 *De gevonden nootstructuur die we krijgen als we categorie II ritmische noten gaan antimetriseren (als triool).* . . . 83
6.7 *Een geneste triool: een triool geschreven in een triool.* . . . 84
6.8 *Een dubbel geneste halventriool.* . . . 84
6.9 *Een aantal equivalentie nootfiguren. Helemaal links zien we een duool genest in een triool. Daarnaast staat een triool, gevuld met enkelgepunteerde achtste noten. Ten slotte nog twee reguliere achtste noten. Negeer de kwartnoot aan het eind.* . . . 85
6.10 *Het maken van (een versie van) een kwintool. Bij (1) zien we de groep achtsten voor de vervanging, bij (2) de achtstenkwintool na de vervanging.* . . . 86
6.11 *Een aantal antimetrische figuren die een ieder exact de duur van één kwartnoot in beslag nemen.* . . . 90
6.12 *Een deel van een partituur waar sextolen zijn geschreven als paren triolen. Iedere keer als een paar van twee triolen genoteerd staat, had daar ook een sextool geschreven kunnen staan.* . . . 93
6.13 *De structuur die (het gevolg van) stelling 6.2.3 duidelijk maakt over algemene antimetrische figuren. Caveat: Omdat we in zeer theoretisch gebied zitten, waar muzikaal niet erg veel praktische toepassing in zit, kan het zijn dat latere nootvoorbeelden in deze figuur foutief door het computerprogramma zijn opgeschreven.* . . . 93

6.14 *Een illustratie van stelling 6.3.6. Boven staat een zuivere 45-ool genoteerd als "gewone" 45-ool en onder als een antimetrische nesting van triolen en kwintolen. Dit kan, aangezien* $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, *en aangezien* $\mathcal{A}_5 \circ \mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_3 \left(N_{(2)}\right) = N_{(45)}$. *Hoewel we natuurlijk liever beide figuren niet in het wild tegenkomen, zien we naar mijn mening liever de bovenste dan de onderste, dus is het misschien niet zo'n goed idee om n-olen (n oneven niet priem) helemaal uit het muzikale systeem te verbannen. Stelling 6.3.6 zegt wel dat dit zou kunnen.* 103
6.15 *De nootstructuur van (zuivere) antimetrische figuren, zoals deze in deze paragraaf ontdekt is. Caveat: niet alle mogelijke pijlen en blokjes zijn weergegeven omwille van de leesbaarheid van de figuur.* 104
6.16 *De intro van het "Victory" thema uit het spel Final Fantasy I.* 110
6.17 *Het herschreven intro van het "Victory" thema uit het spel Final Fantasy I.* 111
6.18 *Een dubbel geneste halventriool.* 111
6.19 *De standaard opties voor antimetrische figuren die MuseScore aanbiedt.* 112
6.20 *Het menu dat open gaat als je een ander (minder standaard) antimetrisch figuur wilt invoeren.* 113

7.1 *Een nootvoorbeeld in een 2/4-maat* 120
7.2 *Een tweede nootvoorbeeld in een 2/4-maat* 121
7.3 *Een lastig te formaliseren muzikale passage* 121
7.4 *Twee passages* 123

A.1 *Een deel van de partituur van het lied "Lost Woods". Dit lied leeft in qua noten in* $N_{(2)}$. 130
A.2 *De afgekapte/afgesloten dimensieweg, zoals wij deze in swingmuziek tegenkomen.* . 131
A.3 *Deel van de partituur van het nummer Wrong Enemy, observeer de aankondiging van het swing deel.* 131
A.4 *Een muzikale passage waar de muzikale leefruimte van* $N_{(3)}$ *volledig wordt benut door het gebruik van soms antimetrische figuren en soms niet.* 132

Lijst van tabellen

2.1 *Een overzicht van veelvoorkomende noot- en rustsymbolen met naam. De namen zijn in het Engels weergegeven, maar vormen een één op één correspondentie met de Nederlandse namen.* 6
2.2 *Voorbeelden van concrete antimetrische figuren. Weergegeven zijn de duool, triool, kwartool, kwintool en sextool. Natuurlijk kan na de gegeven voorbeelden het lijstje verder gaan met de septool et cetera. Helemaal rechts in de tabel staat de vervangingsregel weergegeven, voor triolen hebben wij bijvoorbeeld dat we altijd twee gelijkdurende noten door drie vervangen. In het midden staat hoe we een versie van achtste noten van dit antimetrische figuur in het wild kunnen tegenkomen.* 12

4.1 *Getal dat wordt gekoppeld aan enkel en dubbel gepunteerde noten bij de nieuwe, intuïtievere formalisering.* 30
4.2 *Getallenpaar dat wordt gekoppeld aan enkel en dubbel gepunteerde noten bij de formalisering uit definitie 4.1.2.* 31

Hoofdstuk 1

Introductie

Als kunstvorm neemt muziek een bijzondere positie in. Enerzijds is het een van de meest universeel toegankelijke en meest geliefde kunstvormen in de hedendaagse samenleving, maar anderzijds is het ook één van de meest abstracte kunstvormen die de mens heeft uitgevonden. Bij muziek kun je niet kijken naar een beeld dat werkelijk iets voorstelt; bij muziek moet je het voorgestelde zelf inbeelden. Bij iedere klank moet je zelf een beeld vormen, bij iedere klank overkom je zelf weer een horde om het geschetste beeld dat je tot nu toe hebt gemaakt kloppend te houden. Natuurlijk kunnen andere kunstvormen ook abstract zijn, maar muziek is anders omdat zij intrinsiek abstract is.

Muziek is een dynamische kunstvorm, dit betekent dat muziek in tegenstelling tot veel andere kunstvormen alleen ervaren kan worden door de tijd te nemen. Je kunt muziek alleen ervaren door een deel van jouw kostbare tijd op te offeren. Wanneer je deze tijd opoffert, begeef je jezelf dan ook in een abstracte kunstwereld waarin componisten geconditioneerd zijn om onbewust bepaalde regels aan te houden, en bepaalde axioma's mooi te vinden. Juist vanwege de aanwezigheid van deze regels en axioma's is het niet voldoende om muziek alleen als een kunstvorm te omschrijven, muziek is daarnaast namelijk nog veel meer; muziek is een door de tijd geëvolueerd wiskundig raamwerk met haar eigen regels en conventies. [21]

In de geschiedenis is het al eens geprobeerd dit raamwerk netjes uiteen te zetten. Veel aandacht is hierin uitgegaan naar het begrip toon. De nadruk hierbij lag op de beschrijving van de toon en het juist afstemmen van intervallen op elkaar, opdat de intervallen "juist" ervaren zouden worden. Wiskundige ideeën hierover reiken zo ver terug als de Pythagoreïsche stemming door (de discipelen van) Pythagoras. Ook is er hierop een uitbreiding gemaakt naar de harmonieleer, waar wiskundigen zoals Euler hebben geprobeerd structuur aan te brengen in de beschrijving en ervaring van harmonie. [22], [6], [21]

Hoewel er zeker het meeste werk in is gestoken, bestaat muziek echter niet alleen uit het facet "toon". Aangezien muziek een dynamische kunstvorm is, speelt ook het concept tijd een rol in de muziek. De rol van de tijd wordt in de muziek uitgedrukt in de tegenhanger van de toon: het ritme. Hoewel tonen door veel en grote wiskundigen onder de loep zijn genomen, is ritme voor lange tijd in de muziektheorie qua wiskundige beschrijving ondergeschoven gebleven. In deze thesis wensen wij hier verandering in te brengen door juist dit facet wiskundig onder de loep te nemen. [19]

In het bijzonder zijn we in dit verslag geïnteresseerd in het wiskundig beschrijven van individuele (ritmische) noten[1] binnen de muziek, aangezien hierin de basis van alle muziektheorie over ritme schuilt. Het wiskundig beschrijven van individuele noten is daarnaast ook nuttig voor praktische en theoretische doeleinden. Praktisch is het nuttig, omdat we met een wiskundige beschrijving

[1] waar alleen de duur een rol speelt en niet de toonhoogte.

van individuele noten op een meer systematische manier naar muziek kunnen kijken. Het nadeel hiervan is dat we het "gevoel" uit de kunst halen, maar het voordeel is dat **gecomputeriseerde toepassingen** van muziek zo gemakkelijker geprogrammeerd kunnen worden; deze gecomputeriseerde toepassingen vormen in dit verslag vaak de rode draad van het verhaal. Theoretisch is het ook nuttig, omdat musici tot dusver nog niet veel hebben nagedacht over nootconcepten die in de praktijk niet (veel) voorkomen. Qua muziektheorie heerst de consensus: "als het niet in de praktijk voorkomt, dan bestaat het niet." Een wiskundig raamwerk kan ervoor zorgen dat we wél over deze dingen kunnen nadenken, opdat we het theoretisch begrip van muziek weer een paar stapjes verder helpen. De theorie vormt vaak de motivatie in dit verslag.

Het doel van dit verslag is dus het opstellen van een wiskundig model dat de muziek(theorie) achter individuele ritmische noten beschrijft. Op deze manier hopen we ons steentje bij te dragen aan de volgende drie deelonderwerpen binnen de **ritmetheorie**:

1. We hopen met het model de theorie te kunnen beoordelen en te bewijzen dat dingen die we in de muziekbeleving als intuïtief voor lief nemen ook echt waar zijn.
2. We hopen met het model ontbrekende concepten in de muziektheorie aan te kunnen wijzen, of juist overbodige concepten uit de muziektheorie te kunnen verwijderen.
3. We hopen met het model de theorie te kunnen uitbreiden door te focussen op muziekconcepten die momenteel niet direct binnen de muziektheorie als "normaal" worden gezien.

De aanleiding van dit onderzoek en het model wordt hierin gegeven door punten (2) en (3), aangezien momenteel de theorie over **antimetrische figuren**[2] niet erg ver ontwikkeld is; boeken presenteren hierover doorgaans wel het globale idee, maar vullen de details niet in en richten zich vooral op de "veelvoorkomende" antimetrische figuren (en niet op de algemene). Als hoofdvraag willen we dit theoretische gat proberen te repareren. In relatief informele termen is de hoofdvraag gegeven door het volgende. [3], [12], [21]

"Hoe kunnen we de theorie over antimetrische figuren uitbreiden, aanvullen en beoordelen, opdat we een wiskundig raamwerk hebben om over antimetrische figuren in hun algemeenheid na te kunnen denken?"

Om deze vraag te kunnen beantwoorden dienen we een wiskundig model op te stellen dat basiselementen van het ritme beschrijft om zo richting het antwoord op de bovenstaande vraag te kunnen werken. Hiertoe bekijken we eerst een aantal bekende formalisaties in de literatuur (*hoofdstuk 3*). De volgende deelvragen zijn hiertoe interessant voor het literatuuronderzoek; de deelvragen zijn weer enigszins informeel gesteld.

I. Hoe zijn maatsoorten en ritmes al eens eerder gerepresenteerd?
II. Wat zijn de voor- en nadelen van deze representaties?
III. Zijn de representaties vooral praktisch of theoretisch van aard?
IV. Waar schieten deze representaties te kort?

Nadat we deze vragen hebben beantwoord, weten we wat er al gedaan is met betrekking tot ons onderwerp, en kunnen we ons model gaan opbouwen om de hoofdvraag te beantwoorden. Om vervolgens de hoofdvraag te beantwoorden, beantwoorden we de volgende deelvragen in het middenstuk van het verslag. Weer zijn de vragen relatief informeel gesteld.

I. Hoe kunnen we individuele noten wiskundig in hun algemeenheid beschrijven?
II. Hoe kunnen we structuur in deze objecten aanbrengen die bekende muziektheoretische bevindingen in tact laat?
III. Hoe staan deze wiskundige noten in connectie met de originele muzikale noten waar we mee gestart zijn?

[2] Wat dit zijn wordt toegelicht in *hoofdstuk 2*

IV. Hoe kunnen we vervolgens maatsoorten als wiskundige objecten beschrijven binnen de formalisering van de noten?

V. Hoe staan deze wiskundige maatsoorten in verband met de originele maatsoorten uit de muziektheorie?

VI. Welke structuur ontvangen maatsoorten van de noot?

VII. Wat kunnen we theoretisch over maatsoorten leren vanuit onze formalisering?

VIII. Kunnen we antimetrische figuren in ons wiskundig notensysteem formaliseren?

IX. Hoe staan deze wiskundige antimetrische figuren in relatie tot muzikale antimetrische figuren?

X. Kunnen we met onze wiskundige antimetrische figuren het begrip van muzikale antimetrische figuren uitbreiden?

XI. Kunnen we ten slotte met deze wiskundige antimetrische figuren de huidige theorie van muzikale antimetrische figuren becommentariëren?

Om de vragen te beantwoorden zullen we eerst een hoofdstuk besteden aan het uitleggen van de relevante muzikale concepten, zodat we duidelijk hebben wat we in dit verslag zullen beschouwen en zodat iedere lezer voldoende muziektheorie voor dit verslag achter de kiezen heeft (*hoofdstuk 2*).[3] Vervolgens zullen we een hoofdstuk gebruiken om de deelvragen voor het literatuuronderzoek uit te werken en te beantwoorden (*hoofdstuk 3*). Daarna zullen we op basis van onze bevindingen proberen waar nodig de bekende formalisering uit te breiden met betrekking tot de individuele noten, waarna we zullen controleren of deze formalisering voldoet aan de eerder gevonden theoretische eisen (*hoofdstuk 4*; deelvraag I t/m III). Dan beschouwen we in een nieuw hoofdstuk wat maatsoorten aan onze formalisering zullen toevoegen (*hoofdstuk 5*; deelvraag IV t/m VII). Ten slotte proberen we met de gemaakte formalisering de hoofdvraag van dit verslag te beantwoorden door naar antimetrische figuren te gaan kijken (*hoofdstuk 6*; deelvraag VIII t/m XI).

[3] Er is ook een woordenlijst ingevoegd waar van belangrijke begrippen een definitie is gegeven.

Hoofdstuk 2

Muziektheoretische achtergrond

In dit hoofdstuk zullen we de belangrijke muzikale concepten toelichten die belangrijk zijn voor het vervolg van het verslag. We zullen alleen aspecten toelichten met betrekking tot de ritmetheorie. We beginnen met het definiëren van noten, waarna we hun relatie zullen onderzoeken met betrekking tot maatsoorten. Alle theorie is gebaseerd op [3], [21], en [12]. Voordat we met de theoretische beschouwing beginnen, moet opgemerkt worden dat in de muziek men ritmes kan beschouwen onafhankelijk van toonhoogte, dus bij de notenvoorbeelden in dit en latere hoofdstukken zullen er soms ritmes genoteerd worden op één enkele lijn, waarmee het ritme inherent vastgelegd is, en soms zullen ritmes en toonhoogtes door elkaar gebruikt worden. Voor de lezer is het dan belangrijk te realiseren dat de toonhoogte er niet toe doet en we ons alleen concentreren op de ritmische tekens, ongeacht hoe hoog ze genoteerd zijn, alsof ze op een lijn geschreven zijn.

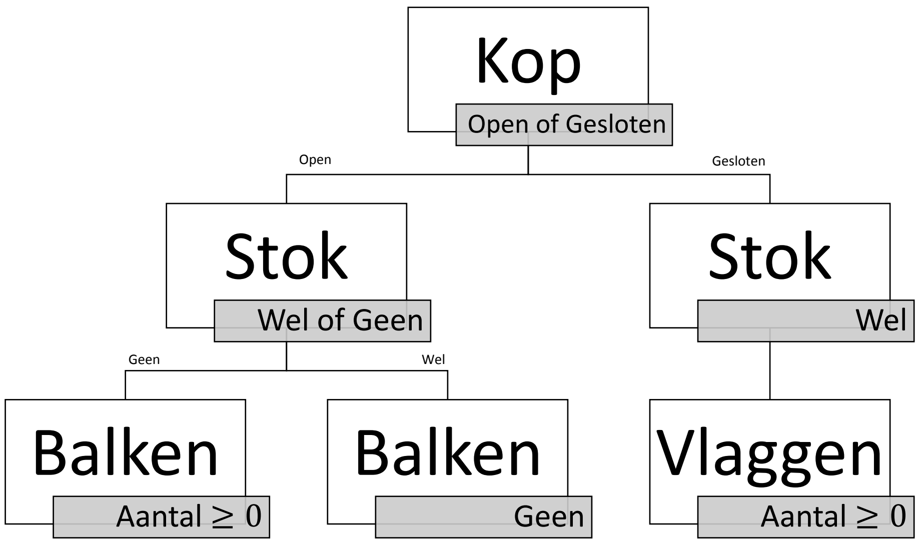
2.1 Noten en nootsymbolen

Met bovenstaande disclaimer uit de weg kunnen we ritmes (informeel) gaan beschouwen. In deze paragraaf zullen we (ritmische) noten introduceren, zoals het in de muziektheorie doorgaans gedaan wordt om ervoor te zorgen dat alle lezers op een basisniveau ritmes kunnen lezen. Om een ritme te noteren gebruiken we speciale symbolen waarmee we het ritme kunnen uitdrukken. Deze symbolen zijn systematisch opgebouwd om zo gemakkelijk iets te kunnen vertellen over hun tijdsduur. De symbolen zijn opgebouwd door gebruik te maken van een (combinatie) van vier elementen en dienen om de duur van een toon aan te geven.

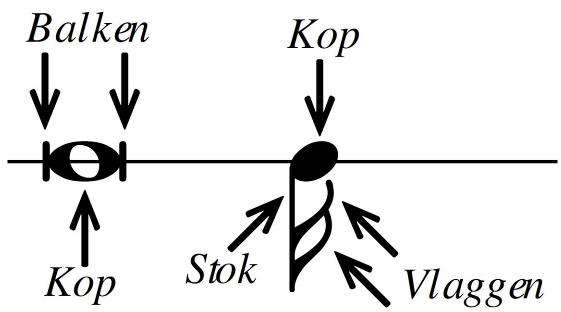
1. De kop: het bolletje (open of gesloten) dat men onderaan of bovenaan de noot vindt.
2. De stok: het verbindingsstuk dat kop en vlag(gen) van een noot met elkaar verbindt.
3. De vlag: een extensie aan de stok.
4. De balk: rechte strepen links en rechts van de kop.

Voor de ritmenotatie moet hierbij opgemerkt worden dat de kop van een noot open of gesloten moet zijn en altijd aanwezig is, dat een noot niet tegelijk zowel balken als vlaggen kan hebben, en dat het hebben van balken impliceert dat de noot geen stok heeft, maar wel een open kop. Ten slotte betekent het hebben van vlaggen dat de noot sowieso een stok heeft, alsmede dat de kop gesloten is. Een overzicht van deze regels is weergegeven in *figuur 2.1* en de symboolelementen zijn geïllustreerd is *figuur 2.2*.

Nu we weten hoe de objecten waar we mee te maken hebben eruit zien, is het tijd om ze een naam te geven. Namen van nootlengtes worden doorgaans met een breuk aangegeven. Zo heet de noot die geen stok en geen balken heeft de “hele noot”. Achtereenvolgens komen dan de “halve noot”,



Figuur 2.1: *Een schematisch overzicht van de behandelde nootregels; elementen staat in het groot benoemd met in de doos schuin eronder de mogelijke keuzes die in dat stadium voor de elementen te maken zijn.*



Figuur 2.2: *De verschillende elementen van noten geïllustreerd.*

Name note/rest	Symbol note	Symbol rest
Whole note	𝅝	𝄻
Half note	𝅗𝅥	𝄼
Quarter note	♩	𝄽
Eighth note	♪	𝄾
Sixteenth note	𝅘𝅥𝅯	𝄿

Tabel 2.1: *Een overzicht van veelvoorkomende noot- en rustsymbolen met naam. De namen zijn in het Engels weergegeven, maar vormen een één op één correspondentie met de Nederlandse namen.*

“kwartnoot”, “achtste noot” enzovoorts. De namen worden lastiger als we balken gaan toevoegen. De noot met één paar balken heet de “dubbele hele noot” of “brevis”, met twee balken vinden we de “vierdubbele hele noot” of longa, en met drie balken vinden we de “achtdubbele hele noot” ofwel de duplex longa. Dit patroon kan zich ook voortzetten, hoewel dit soort noten over het algemeen niet in partituren[1] te vinden zijn, en ze het meest worden aangeduid met hun triviale naam.

De noottekens die tot nu zijn toegelicht vertellen hoe lang een bepaalde puls moet klinken; ze geven de aanwezigheid van een klank aan. Natuurlijk moet men ook kunnen aangeven hoe lang er géén puls of klank klinkt, en dus hoe lang het stil is. Dit doen we met rustsymbolen. Ze krijgen dezelfde namen als nootsymbolen alleen in plaats van “noot” zetten we “rust” achter de naam. Een overzichtje van veelvoorkomende noot- en rustsymbolen is weergegeven in *figuur 2.1*.

Vooruitblik naar de wiskundige formalisering

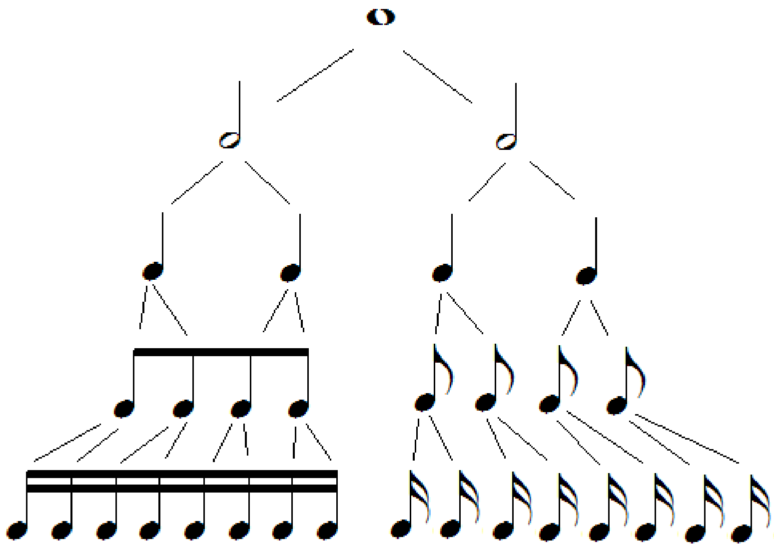
Het zal duidelijk zijn dat het lastig is om in de wiskundige formalisering steeds met deze symbolen te gaan werken; toch zou het fijn zijn als we steeds bij de wiskundige formalisering een terugkoppeling kunnen maken naar de ritmische symbolen behandeld in deze paragraaf, aangezien ritmisch altijd geredeneerd wordt vanuit deze symbolen. We zullen daarom in *hoofdstuk 4* het **nootnummer** definiëren als een getal dat een wiskundig geformaliseerde noot koppelt aan één van de nootsymbolen behandeld in deze paragraaf. De verzameling van nootsymbolen gedefinieerd in deze paragraaf zullen we daarnaast aangeven met N_b. Ten slotte zullen we rusten en noten met dezelfde formalisering behandelen.

2.2 De (relatieve) duur van noten

Nu we weten hoe noten eruit zien, gaan we bekijken hoe we deze symbolen moeten interpreteren. In *hoofdstuk 1* is het al benadrukt dat muziek een dynamische kunstvorm is, en in de interpretatie van de zojuist gedefiniëerde symbolen komt die dynamische dimensie het best naar boven. De verschillende nootsymbolen geven namelijk een tijdsduur aan.

In de muziektheorie maken we graag onderscheid tussen twee soorten tijd: de absolute tijdsduur en de relatieve tijdsduur van noten. De absolute tijdsduur van een noot is de duur van een

[1] Een uitgeschreven muziekstuk op papier of in een digitaal bestand.



Figuur 2.3: *De notenpiramide. Merk op dat iedere (basis)noot een macht van twee van iedere andere noot af staat. Wees ten slotte bewust van het feit dat de verbanden in principe nog verder worden voorgezet naar boven en onder in de notenpiramide. De brevis is bijvoorbeeld gelijk aan twee hele noten en twee tweeëndertigste noten duren even lang als één zestiende noot.*

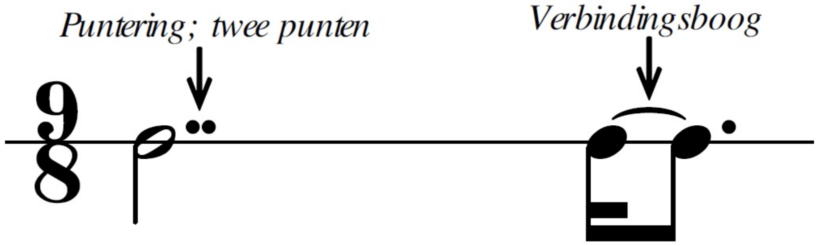
noot, bijvoorbeeld uitgedrukt in een eenheid die onveranderlijk is tussen muziekstukken, zoals de "seconde". Hoewel voor fysische doeleinden zo'n tijdseenheid heel handig kan zijn, is het voor muzikale doeleinden maar moeilijk werken met deze eenheden, omdat de duur dan vaak weergegeven moet worden met een lastig getal. Handiger is het dan om met relatieve tijdsduur te werken. De relatieve tijdsduur van een noot is namelijk de tijdsduur van een noot ten opzichte van andere noten. Het geeft niet aan hoe lang een noot werkelijk duurt, maar geeft wel aan hoe veel keer langer of korter de noot in kwestie duurt ten opzichte van een andere referentienoot.

Om met relatieve tijdsduur te werken, hebben we dus een vaste verhouding tussen alle noten nodig, én hebben we te alle tijden een referentienoot nodig die één keer de relatieve tijdseenheid weergeeft. De naam van de relatieve tijdseenheid in muziek is de "tel". De vaste verhouding tussen de noten die nodig is voor het maken een relatieve tijdseenheid is gebaseerd op machten van twee. De (basis) nootsymbolen staan altijd met elkaar in verband door een macht van twee. Het best wordt dit verband weergegeven door de notenpiramide[2]. De notenpiramide is weergegeven in *figuur 2.3*. [17]

Het tweede element om de relatieve tijdseenheid goed te definiëren, de referentienoot, wordt geleverd door de maatsoort. De maatsoort van een muziekstuk wordt weergegeven door twee getallen. Het bovenste getal geeft hierin aan hoeveel tellen er in een maat zitten en het onderste getal welke noot één tel duurt. Hoewel de maatsoort op een breuk lijkt, benadrukken veel musici dat het géén breuk is[3]. Het nut van het bovenste getal wordt later toegelicht. Met het onderste getal kunnen we gemakkelijk vinden welke noot nu dus één tel duurt, geïllustreerd door het onderstaande voorbeeld. Met *figuur 2.3* kunnen we vervolgens gemakkelijk de duur van alle andere ritmische noten vinden.

Voorbeeld 2.2.1 (Maatsoorten en relatieve duur)**.** Wanneer we spelen in een 4/4-maat, herkennen we dat we in een $4 \cdot 1/4$-maat spelen, ofwel weten we dat de 1/4-noot (kwartnoot) één tel duurt (en dat er vier tellen in een maat zijn). Wanneer we de notenpiramide raadplegen, zien we dat de hele noot even lang duurt als vier kwartnoten, dus weten we dat de hele noot vier tellen

[2]Visualisatiemethode voor het verband tussen basisnoten.
[3]Ten minste mijn theoriedocenten deden dit



Figuur 2.4: *Visuele illustratie van punten en bogen in een partituur. Merk op dat we in deze passage in een 9/8-maat spelen. Wees door het gegeven voorbeeld gewaarschuwd dat het dus mogelijk is om puntering en verbindingsbogen te combineren.*

duurt.

Nu we een goed beeld hebben van de (relatieve) duur van de basisnoten, wordt het tijd om ons ritmisch vocabulaire nog wat uit te breiden. In het vervolg van het project gaan we namelijk ook puntering en verbindingsbogen beschouwen als elementaire operaties op noten, aangezien dit twee veelvoorkomende muzikale principes zijn.

We beginnen bij de verbindingsboog. Deze boog kan twee noten met elkaar verbinden; de resulterende noot duurt even lang als de duur van de twee originele noten bij elkaar opgeteld. Een voorbeeld van een verbindingsboog is weergegeven in *figuur 2.4* en de duur van dit voorbeeld is toegelicht in onderstaand voorbeeld.

Naast verbindingsbogen kunnen we ook puntering toepassen. Puntering is niets anders dan het zetten van één of meerdere punten achter de originele noot. Qua duur halveert iedere punt die men toevoegt de originele duur van de noot en telt deze op bij de duur van de noot met één punt minder. Merk op dat de definitie van puntering dus recursief is. Een voorbeeld van puntering is ook opgenomen in *figuur 2.4* en de duur van dit voorbeeld is toegelicht in onderstaand voorbeeld.

Voorbeeld 2.2.2 (Duur van verbindingsbogen en puntering)**.** In *figuur 2.4* duurt de halve noot 4 tellen, aangezien volgens de maatsoort de achtste noot één tel duurt. Een halve noot met één punt duurt volgens de definitie vervolgens $4 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 4 + 2 = 6$ tellen. De halve noot met twee punten duurt dan volgens de recursieve definitie $4 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 4 + 2 + 1 = 7$ tellen. Op eenzelfde manier kunnen we voor de achtste noot met enkele puntering vinden dat hij $\frac{3}{2}$ tel duurt, en met eerder verworven theorie weten we ook dat de zestiende noot $\frac{1}{2}$ tel duurt. Hieruit volgt dus vanuit de definitie van de verbindingsboog dat de ritmische figuur met een verbindingsboog $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ tellen duurt. Merk op dat dit niet de enige manier is om een noot met twee tellen te maken, aangezien een kwartnoot hier hetzelfde zou bereiken.

Vooruitblik naar de wiskundige formalisering

In deze paragraaf hebben we vanuit *figuur 2.3* het belang van machten van twee gezien. Deze structuur die noten van nature meekrijgen vanuit deze figuur, biedt aanleiding om noten te formaliseren als een moduul in *hoofdstuk 4*. Ook hebben we door de verbindingsboog en puntering gezien dat het betekenis heeft om noten op te tellen of te vermenigvuldigen met breuken die een macht van twee als noemer hebben. We zullen later zien dat noten te formaliseren zijn als een moduul over $\mathbb{Z}_2$.

2.3 Maat, metrum en metriek

We hebben nu een basisidee over de werking van noten. We weten wat relatieve tijdsduur is en kunnen deze berekenen van een groot aantal noten die men in muzikale passages[4] tegenkomt. Nu breiden we onze kennis uit naar het onderdeel dat de klinkende pulsen ordent en hiermee daadwerkelijk ritmische kunst creëert: het metrum.

Allereerst hebben we hiervoor nog wat extra notatie nodig. Om muzikaal te weten wat de zich steeds herhalende metrische eenheden[5] zijn in een partituur, zetten we deze tussen twee horizontale strepen; de maatstrepen. De metrische eenheid tussen twee maatstrepen noemen we dus een maat. Het bovenste getal van de maatsoort geeft hier dan simpelweg aan hoe lang één maat duurt in onze metrische tijdseenheid, terwijl het onderste getal, zoals behandeld in *paragraaf 2.2*, aangeeft wat onze metrische tijdseenheid precies is: de noot die één tel duurt.

Vergelijk een maat met een versmaat in een gedicht. De maat zit net als een versmaat vol met kleine bouwblokjes, en in ieder bouwblokje worden er op een bepaalde regelmatige manier benadrukte en onbenadrukte pulsen afgewisseld. Waar deze blokjes voor het gedicht versvoeten zijn, zoals een jambe[6], zijn het voor een muzikale maat afwisselingen van eerst één beklemtoonde puls, de thesis van de groep, en dan een aantal onbeklemtoonde pulsen, de arses van de groep. Het metrische schema[7] is altijd opgebouwd in termen van de noot die één tel duurt: de telnoten[8].

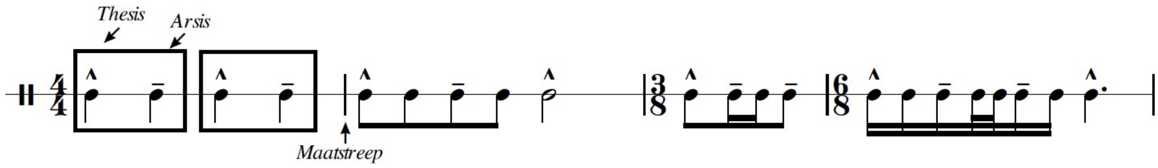
In een vierkwartsmaat bijvoorbeeld duurt de kwartnoot één tel, en vullen vier kwartnoten een maat. Ergo, als we een metrisch schema voor de vierkwartsmaat willen opstellen, delen we de vier kwartnoten die de maat vullen op in één of meerdere blokjes. In ieder blokje is vervolgens de eerste noot benadrukt (thesis) en de andere allemaal onbenadrukt (arsis). Zie *figuur 2.5*, de eerste maat, als voorbeeld. De vier kwartnoten zijn in twee blokjes opgedeeld, waarbij in ieder blokjes de eerste noot beklemtoond is en de andere onbeklemtoond. Dit vormt het metrische schema van de maatsoort en passen we vervolgens toe op alle nootvoorbeelden in dezelfde maatsoort (dit is gedaan in de rest van *figuur 2.5*).

Om aan te geven welke noten samen behoren tot één metrisch blokje verbinden we deze noten met een verbindingsbalken. Dit zijn de vlaggen van de noten veranderd in horizontale balken om zo noten behorende tot één groep met elkaar te verbinden. Een voorbeeld van dit soort balken is te zien in *figuur 2.4*, de rechter twee noten; aan de hand van het aantal balken kunnen we de precieze noot afleiden met *tabel 2.1*: je hakt namelijk de balken gewoon doormidden en je telt het aantal uitstulpingen dat iedere noot overhoudt.

Als we dit doen in *figuur 2.5* (rechter twee noten), zien we dat links in de figuur een zestiende noot staat, en rechts een achtste (met punt). Een notenvoorbeeld met daarin de zojuist behandelde elementen toegelicht, is weergegeven in *figuur 2.5*. In het voorbeeld is het standaardmetrum van de 4/4, 3/8, en 6/8-maat weergegeven. Merk uit de figuur op wat het precieze verschil tussen metrum en ritme is. Metrum vertelt waar de harde en zachte pulsen komen te liggen in een maat (negeer hierbij de concrete noteninvulling binnen de maat), en ritme is de invulling van dit metrum in een concreet notenvoorbeeld. We zien bijvoorbeeld in maat 2 en 4 in *figuur 2.5* dat de laatste arses van die maten in het metrum niet ingevuld kan worden door het ritme, er is namelijk geen noot in het ritme op de plek waar de laatste arsis in het metrum zou moeten vallen.

Binnen verschillende theses wordt ook nog een onderscheid gemaakt in het metrum. Als mensen zijn we geprogrammeerd om het begin van een maat te kunnen horen, omdat het de eerste thesis van de maat vaak iets sterker klinkt. Deze wordt daarom ook wel het aggogisch accent genoemd. Een andere thesis in een maat noemen we vervolgens het relatief zwaar maatdeel (RZM), en

[4]Een geschreven of klinkend onderdeel uit een muziekstuk van willekeurige grootte.
[5]In normale termen een maat; Objecten die een elementaire, zich herhalende metrische structuur hebben.
[6]Eerst een onbeklemtoonde lettergreep, dan een beklemtoonde lettergreep
[7]Welke en in welke volgorde de blokjes gekozen worden
[8]De noot de één tel duurt



Figuur 2.5: *Een notenvoorbeeld om het metrum van verschillende maten te illustreren. De kleine tekens boven op de nootlengtesymbolen geven het punt aan waarop er mogelijke theses of arses zitten.*

klinkt een beetje lichter dan het aggogisch accent, hoewel nog steeds benadrukt ten opzichte van de arses.

Nu we een beetje weten hoe het metrum van een muziekstuk werkt, gaan we het hebben over de maatsoortindeling. De maatsoortindeling vertelt ons hoe de verschillende blokjes van thesis en arses verdeeld zijn over de maat. In het algemeen kunnen we dit niet aflezen uit het maatsoortsymbool. Hiertoe kiezen sommige componisten ervoor om bij "rare" maatsoorten de indeling er expliciet bij te zetten. Dit doen ze door de grootte van de maatgroepen[9] (het aantal tellen dat de maatgroep omvat, er expliciet bij te zetten in het maatsoortteken door het bovenste getal van de maatsoort te schrijven als som van kleinere getallen. Ieder getal geeft dan de grootte van een maatgroep aan. Het moet hierbij opgemerkt worden dat groepen zonder arsis verboden zijn, en dus dat het bovenste getal van het maatsoortteken altijd groter dan 1 is.

Voorbeeld 2.3.1 (Maatsoortindeling)**.** Sommige maten vereisen geen toelichting bij hun indeling, aangezien de indeling van bijvoorbeeld een 2/4-, of 3/4-maat bij conventie vast staan.[10] (Waarom?) Een 2/4-maat is altijd ingedeeld als (TA), en een 3/4-maat als (TAA). Als men dit toch anders zou willen indelen hebben we muzikale theorie nodig die te ver reikt voor de doeleinden van dit project. Hierin geeft T de thesis, en A de arsis. De opvolgende string T's en A's moet opgevat worden als de functie van de verschillende telnoten in die respectievelijke volgorde.

Andere maatsoorten zijn meer ambigu in hun indeling, maar hebben een standaard indeling waar vrijwel nooit van wordt afgeweken. Voorbeelden hiervan zijn de 4/4-maat en de 6/8-maat. Ze worden ingedeeld als (TATA) en (TAATAA) respectievelijk. (Hoe zouden ze nog meer ingedeeld kunnen worden?)

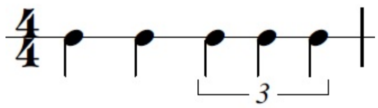
Tenslotte zijn er maatsoorten die altijd toelichting vereisen, aangezien zij niet vaak genoeg voorkomen om conventioneel een indeling te hebben. Voorbeelden zijn de 7/8 = (3+2+2)/8-maat die we in dit geval indelen als (TAATATA).

Naast de daadwerkelijke indeling van maatgroepen kan maatsoortindeling ook de groepering van verschillende maatsoorten betekenen in groepen met gelijke eigenschappen. Hier bestaan echter verschillende opvattingen over en hier is het punt waarop de theorie niet meer sluitend is.

We eindigen deze sectie met nog een notationele opmerking. Noten worden doorgaans op een notenbalk genoteerd. Een notenbalk heeft normaal gesproken vijf lijntjes om zo ook het andere muzikale facet, de toon, aan te kunnen geven. Omdat wij ons geen zorgen maken over de toon, noteren wij noten op maar één lijn in onze notenbalk. Dit is ook gedaan in *figuren 2.4* en *2.5*.

[9]Een metrumblokje; een andere naam voor een groepje van één thesis en een aantal arses.

[10]Doordat mensen muzikaal naar zware, geaccentueerde maatdelen toegetrokken zijn, is de eerste tel van een maat door conventie altijd een thesis.



Figuur 2.6: *Een kwartentiool na twee gewone kwartnoten.*

2.4 Antimetrische figuren

Nu we weten wat metrum is en nu we een basisidee hebben over noten en hun lengtes, kunnen we het gaan hebben over antimetrische figuren. We proberen dit muzikaal lastige concept duidelijk te maken aan de hand van een voorbeeld (zie *figuur 2.6*). In de figuur zien we dat we te maken hebben met een vierkwartsmaat, echter zien we in de vierkwartsmaat vijf kwartnoten zijn. Volgens de voorafgaande theorie zou dit niet mogen passen in een maat. Ook valt het ons op dat de laatste drie noten door een haak met elkaar verbonden zijn; op deze haak staat een drietje geschreven. Als we even goed kijken, zien we dat het groepje van drie noten na de twee normale kwartnoten twee tellen moet duren, aangezien de twee gewone kwartnoten ook al twee tellen in beslag nemen, en het totaal vier tellen moet duren (*paragraaf 2.2*). Iedere noot binnen het groepje van drie duurt dus 2/3 tel, en niet simpelweg één!

Het “rare” groepje van drie noten uit *figuur 2.6* noemen we een triool en dit is een voorbeeld van een antimetrisch figuur. In deze triool zijn twee kwartnoten vervangen door drie kwartnoten. We namen dus de (tijds)ruimte waar eerst twee kwartnoten stonden (2 tellen), gooiden de twee kwartnoten eruit, en zetten er drie kwartnoten voor in de plaats, daarom duurt iedere kwartnoot in de triool nu maar 2/3 tel; de totale duur van de drie kwartnoten moet immers nog steeds exact twee tellen zijn. Omdat het gemeen is om stiekem twee kwartnoten door drie te vervangen, moeten we de muzieklezer er natuurlijk wel op attenderen dat we dit hebben gedaan. Daarom zijn de noten met een haak verbonden en staat er een drietje boven.

In zijn algemeenheid zijn antimetrische figuren dus aaneengesloten noten die een relatief ongebruikelijke duur hebben per noot, aangezien zij ontstaan wanneer een componist ervoor kiest om een vast aantal noten van gelijke duur te verwijderen en te vervangen door een nieuw aantal vaste noten van gelijke duur, waarbij de notitie gemaakt moet worden dat zowel de totale groep noten voor als na de vervanging even lang moet duren. De veranderingen zijn vast, omdat bij muzikale wet vast staat hoeveel noten we bij ieder antimetrische figuur moeten vervangen; bij een triool vervangen wij bijvoorbeeld **altijd** twee dezelfde noten door drie dezelfde noten. Het moge opvallen dat het uitvoeren van zo'n operatie alleen nuttig is als de operatie een versnellende werking of vertragende werking heeft. We komen later deze paragraaf op deze begrippen terug.

Wanneer we de noten vervangen en er een antimetrisch figuur van maken, veranderen we hiermee de duur van de individuele noten, terwijl we de gebruikte naam en tekens voor de individuele noten gelijk houden. Om toch aan te geven dat we met een antimetrische figuur te maken hebben, zetten we boven de antimetrische figuur een getal dat op een of andere manier de notenvervanging die heeft plaatsgevonden weergeeft. Beschouw als extra voorbeeld maat 2 in *figuur 2.7* op pagina 14. In deze figuur staat voor de dubbele maatstreep in het vierkantje eerst een groepje van twee achtste noten (♪, links), waarna er direct een triool staat genoteerd van achtste noten (rechts). We noemen de individuele noten in beide figuren “achtste noten”, hoewel de noten in de figuur rechts alle korter van duur zijn dan links (rechts duren de achtste noten 1/3 tel, terwijl ze links 1/2 tel duren). Merk uit dit kleine voorbeeldje ook het nut van antimetrische figuren op: ze kunnen nieuwe, “exotische” relatieve tijdsduren introduceren, zoals 1/3 tel. Dit is in muzikale zin exotisch, aangezien het muzikale systeem slechts machten van twee hanteert.

Zoals eerder al kort aangestipt zijn er voor antimetrische figuren vaste regels: het staat bij wet vast voor een gegeven antimetrische figuur hoeveel noten je moet vervangen en hoeveel noten ervoor in de plaats komen. Er is steeds een vaste regel die stelt dat je n noten moet vervangen door m.

Naam	Voorbeeld uiterlijk	Vervanging
Duool	2	2 in plaats van 3
Triool	3	3 in plaats van 2
Kwartool	4	4 in plaats van 3
Kwintool	5	5 in plaats van 3 of 4
Sextool	6	6 in plaats van 4

Tabel 2.2: *Voorbeelden van concrete antimetrische figuren. Weergegeven zijn de duool, triool, kwartool, kwintool en sextool. Natuurlijk kan na de gegeven voorbeelden het lijstje verder gaan met de septool et cetera. Helemaal rechts in de tabel staat de vervangingsregel weergegeven, voor triolen hebben wij bijvoorbeeld dat we altijd twee gelijkdurende noten door drie vervangen. In het midden staat hoe we een versie van achtste noten van dit antimetrische figuur in het wild kunnen tegenkomen.*

De m is vervolgens ook het getal dat we boven de antimetrische figuur schrijven om lezers erop te attenderen dat we hier met een antimetrische figuur te maken hebben. Een lijstje met voorbeelden van concrete antimetrische figuren is gegeven in *tabel 2.2*. Een extra rekenvoorbeeld om het aantal tellen van een antimetrische figuur uit te rekenen, vinden we hieronder.

Voorbeeld 2.4.1 (Het aantal tellen van een kwartool)**.** We beschouwen een achtstenkwartool in een 6/8-maat. In *tabel 2.2* zien we dat we voor een achtstenkwartool drie achtste noten gaan vervangen door vier. In deze maatsoort duren drie achtste noten samen drie tellen. Dit betekent dat in de kwartool de vier achtste noten samen ook drie tellen zullen duren. Tenslotte vertelt dit feit ons dat één achtste noot in de kwartool dus 3/4 tel duurt.

Wat aan de kwintool uit de tabel moet opvallen is dat er, afhankelijk van de maatsoort, een verschil kan zijn in de grootte van de notengroep die vervangen dient te worden. Deze onduidelijkheid in vervangingslengte laat zich niet gemakkelijk wiskundig te formaliseren, dus doen we in de wiskundige formalisering van antimetrische figuren versimpelende aannames. Het moet ook toegegeven worden dat in dit verslag notationele moeilijkheden van antimetrische figuren genegeerd worden.[11]

Merk ten slotte op dat bijna alle antimetrische figuren een versnellende werking hebben. Dit houdt in dat de operatie die het antimetrische figuur vormt een figuur creëert dat muzikaal sneller aanvoelt dan het oude. De uitzondering hierop vormt de duool, omdat drie noten hier door twee wordt vervangen, voelt deze figuur trager dan het origineel, waardoor we de duool bestempelen als een figuur met vertragende werking.

Vooruitblik naar de wiskundige formalisering

Als we antimetrische figuren wiskundig gaan formaliseren, leggen allereerst de meeste focus op de duool en de triool, omdat deze antimetrische figuren praktisch het meest worden toegepast in de muziek en daar de muziektheorie het verst ontwikkeld is. Daarna gaan we ons focussen op de “hogere ” antimetrische figuren. Wanneer we dit doen, versimpelen we de hier behandelde theorie een beetje om de wiskunde behapbaar te houden. Het voordeel zal met deze versimpeling echter

[11] Neem als voorbeeld van zo’n moeilijkheid het feit dat men geen achtste triool mag noteren dat begint tussen twee tellen in.

wel zijn dat we antimetrische figuren in meer algemeenheid kunnen bekijken dan op dit moment vaak gedaan wordt. In de formalisatie hopen we te zien dat antimetrische figuren wiskundige objecten zijn die niet te zien zijn als veelvoud/som van elementen van $\mathbb{Z}_2$ waardoor we in bepaalde gevallen van antimetrische figuren zien dat ze letterlijk het moduul een beetje groter maken. Een centrale stelling in deze formalisering wordt ook dat p-olen[12] met p priem precies de antimetrische figuren zijn die iets "extra's" toevoegen aan de muziek.

2.5 Tempo en absolute tijdsduur

We eindigen onze beschouwing van de muziektheoretische concepten door nog een terugkoppeling te maken naar de werkelijkheid. In deze sectie bekijken we hoe relatieve tijdsduur en absolute tijdsduur aan elkaar gekoppeld zijn via het begrip tempo. Tempo is niets anders dan de absolute duur van noten in een muziekstuk.

Meestal geven we in muziek het tempo precies aan door vooraan het stuk een noot aan te geven, vervolgens een =-teken en daarna een getal. Deze notatie betekent dat de aangegeven noot het getal aantal keer in een minuut past. Deze notatie geeft dus een soort frequentie aan een bepaalde noot.

Natuurlijk is het mogelijk dat de maatsoort niet constant blijft gedurende een muziekstuk. Als de maatsoort wisselt bij een maatsoortwisseling ontstaat vervolgens de vraag wat men moet doen met betrekking tot het tempo, aangezien het soms onhandig is om dezelfde noot als temponoot[13] te houden. Om aan te geven of de temponoot wisselt, staat er bij een maatsoortwisseling vaak een klein notitie dat "noot = noot" leest. Dit impliceert dat de absolute duur van de linkse noot voor de wisseling even lang duurt als de rechtse noot na de wisseling.

Voorbeeld 2.5.1 (Tempo na en voor een maatsoortwisseling)**.** Bekijk *figuur 2.7* en neem aan dat in de 4/4-maat het tempo beschreven is door ♩ = 120. Dit impliceert dat er 120 kwartnoten per minuut voorkomen, en dus dat één kwartnoot $\frac{1}{2}$ seconde duurt. Na de maatsoortwisseling zijn er 120 enkelgepunteerde kwartnoten per minuut, en dus duurt een kwartnoot hier nog maar $\frac{1}{3}$ seconde.

Natuurlijk hoeft deze "moderne" manier om tempi aan te geven niet gebruikt te worden. Er zijn nog een aantal alternatieven die doorgaans ook toegepast worden. Als eerste kennen we de aanduiding beats per minute (BPM). Met deze notatiewijze wordt er gerefereerd naar een temponoot die niet expliciet genoemd wordt. De temponoot is (meestal) de telnoot voor enkelvoudige maatsoorten en samengesteld regelmatige maatsoorten waarbij de telnoot langzamer is dan de achtste noot, en de temponoot is de noot die één maatgroep omvat voor samengesteld regelmatige maatsoorten waarvan de telnoot een achtste noot is of sneller.[14] In plaats van BPM schrijft men ook wel Maelzels metronoom (MM).[15]

Voorbeeld 2.5.2 (Beats per minute)**.** De vierkwartsmaat in *figuur 2.7* zou een tempo hebben van 120 BPM, de kwartnoot is immers de temponoot (want de maatsoort is samengesteld regelmatig, maar de telnoot is langzamer dan de achtste noot). In de 9/8-maat is het tempo ook 120 BPM maar hier is is de gepunteerde achtste noot de temponoot, terwijl de achtste noot de telnoot is.

Het nare aan het gebruikt van BPM zal duidelijk zijn: de definitie van een "beat" is nogal wazig. Een exactere tempoaanduiding die niet nootgebonden is, is de aanduiding measures per minute (MPM). Zoals de naam doet vermoeden geeft deze notatie het aantal maten per minuut aan.

[12] Een antimetrische figuur waarin het nieuwe groepje uit p noten van dezelfde duur bestaat.
[13] De noot waarop de tempoaanduiding gebaseerd is.
[14] Voor de toelichting van deze termen, zie de woordenlijst.
[15] Naar Johann Nepomuk Maelzel, één van de uitvinders van de metronoom.

Figuur 2.7: *Een ritmische passage met een begintempo en een tempowisseling.*

Voorbeeld 2.5.3 (Measures per minute)**.** In *figuur 2.7* is het tempo van de vierkwartsmaat 30 MPM, aangezien ♩= 120 en aangezien er in één maat nu vier kwartnoten gaan. Het aantal maten per minuut is dus 120/4 = 30. Het tempo van de 9/8-maat 40 MPM, aangezien we door de aanduiding ♩= ♩. nu 120 keer een ♩. per minuut hebben. In één maat gaat nu driemaal ♩., dus we hebben 120/3 = 40 MPM.

Als afsluiting van deze sectie merken we op dat er nog één andere veelgebruikte methode is om tempi aan te geven. Hiertoe realiseren we ons dat muziek altijd een kunstvorm blijft waarbij tempo eigenlijk niet altijd een vast begrip is. Hiertoe geven componisten vaak ook tempi aan met een Italiaanse term die een indicatie moet geven van het tempo zonder deze vast te pinnen.[16] Dit soort tempoaanduidingen zullen wij in dit verslag volledig buiten beschouwing laten.

Hiermee is de muzikale voorkennis behandeld die relevant is voor het onderzoek wat in het vervolg gedaan zal worden. Met de zojuist behandelde muzikale voorkennis zouden eventuele nieuwe concepten in dit verslag beter te begrijpen moeten zijn met slechts een korte introductie of voetnoot, wanneer ze vereist zijn. In dit hoofdstuk zijn de verschillende elementen nog steeds zeer informeel en muzikaal gepresenteerd. Vanaf *hoofdstuk 4* zullen we deze muzikale informele definities proberen hard te maken. In het volgende hoofdstuk zullen als wat aan formalisering gaan doen als we beschouwen wat er al eerder is gedaan en waarom we dit onderzoek eigenlijk uitvoeren.

Vooruitblik naar wiskundige formalisering

In het laatste hoofdstuk zullen we ons om tempo bekommeren. We zullen in dit hoofdstuk slechts methodes presenteren om vanuit verschillende tempoaanduidingen, via onze wiskundige definities van noten, de absolute duur uit te rekenen verschillende noten.

[16] Zoals “allegro”, “presto”, of “lento”.

Hoofdstuk 3

Literatuuronderzoek

Nu de muziektheorie achter de rug is, gaan we in dit hoofdstuk de eerste aanzet maken naar de wiskunde door te bekijken hoe ritmes eerder in de wiskunde gerepresenteerd zijn. In deze beschouwing komen we er ook achter hoe zeer ritme achtergesteld is op tonen: er zijn slechts een handje vol methoden om ritmes als wiskunde te formaliseren. In dit verslag zullen we er twee uitlichten: de meestgebruikte methode en een minder gebruikelijke methode die soms toegepast wordt om elementen van het "Math-Rock" genre te analyseren.

3.1 De Pivot-Pulse

Herinner je onze beschouwing van tempoconcepten in *paragraaf 2.5*. We hebben in deze paragraaf aangegeven dat het lastig is voor een gegeven muziekstuk een regel te vinden die beschrijft wat de "beat" is. Herinner je:

- **Terugblik:** *De beat is een temponoot die niet expliciet genoemd wordt. Intuïtief is het vaak duidelijk wat de "beat", maar formeel zijn er geen makkelijke regels aan toe te kennen.*

De Pivot-Pulse techniek probeert op een formele manier de beat te beschrijven van een stuk met meerdere maatsoorten. De techniek pakt twee (of meer) maatsoorten en berekent het nootvoorbeeld dat gebruikt kan worden als (beat)referentie in beide maatsoorten. Deze techniek is uitermate geschikt voor het Math-Rock muziekgenre, omdat maatsoortwisselingen hier veelvoorkomend zijn. [14]

De techniek werkt voor twee maatsoorten als op een algoritmische manier als volgt:

1. Neem twee maatsoorten en sla de bovenste getallen en onderste getallen van de maatsoorten apart op.
2. Bepaal de grootste gemene deler van de bovenste twee getallen.
3. Bepaal het kleinst gemene veelvoud van de onderste twee getallen.
4. Neem de noot die correspondeert met de maatsoort gegeven door het getal in stap 2 boven het getal in stap 3.

We geven om dit algoritme toe te lichten één zuiver rekenvoorbeeld en één muzikaal voorbeeld. In het muzikale voorbeeld zal ook de meerwaarde van de techniek verder toegelicht worden.

Voorbeeld 3.1.1 (De Pivot-Pulse van een 4/4- en 13/16-maat)**.** We passen het algoritme toe om de Pivot-Pulse van een 4/4- en 13/16-maat te bepalen. (naar [14])

We slaan eert de bovenste getallen en de onderste getallen apart op. We hebben dus een setje met de twee bovenste getallen $\{4,\ 13\}$ en een setje met de twee onderste getallen $\{4,\ 16\}$. (stap 1)

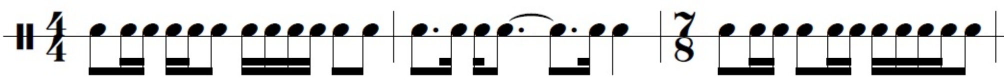
We bepalen $\text{ggd}(4, 13) = 1$ (stap 2) en $\text{kgv}(4, 16) = 16$ (stap 3). De Pivot-Pulse is dus gegeven door de noot die correspondeert met de 1/16-maat, ofwel de ziestiende noot (𝅘𝅥𝅯). (stap 4)

□

Voorbeeld 3.1.2 (De waarde van de Pivot-Pulse)**.** Kijk naar de passage in *figuur 3.1*. Dit is een passage met twee maatsoorten: de 4/4-maat en de 7/8-maat. Een drummer wil weten welke noot hij kan gebruiken om in beide maatsoorten te tellen. Om hierachter te komen, kan hij ervoor kiezen de Pivot-Pulse te bepalen. De Pivot-Pulse geeft namelijk altijd de een noot die gebruikt kan worden om in beide maatsoorten te tellen. Het is aan de lezer om te verifiëren dat de achtste noot (♪) de Pivot-Pulse van *figuur 3.1* is.

De drummer weet nu dus dat hij in beide maatsoorten kan tellen door achtste noten te gebruiken. Stel ten slotte dat hij het tempo van het nummer aan mede-muzikanten wil communiceren, dan kan hij ook de achtste noot als beat nemen die in beide maatsoorten werkt.

□



Figuur 3.1: *Een muzikale passage met meerdere maatsoorten.*

De voordelen van de Pivot-Pulse zullen duidelijk zijn: het is een hele praktische methode om voor muziekuitvoering een noot te vinden die in alle maatsoorten binnen een stuk als “referentie” gebruikt kan worden. Daarnaast wordt de Pivot-Pulse in het werk van *Brad Osborn* ook gebruikt voor theoretische doeleinden: hij gebruikt de Pivot-Pulse om maatsoorten/maatsoortwisselingen met dezelfde theoretische eigenschappen af te leiden. [14]

De nadelen van deze methode voor onze doeleinden zijn echter ook sterk: wij willen in onze wiskundige formalisering van muziektheorie nog een stapje lager starten dan *Osborn*. Hij is begonnen met een interessante formalisering van (eigenschappen) van maatsoorten via de Pivot-Pulse, maar wij willen bij de individuele noten beginnen en daar later de maatsoorten aan toevoegen.

- **Samenvatting:** *De Pivot-Pulse is een methode om een referentienoot uit meerdere maatsoorten te halen, waarmee in alle maatsoorten geteld kan worden. De Pivot-Pulse kan gebruikt worden om theoretische eigenschappen van maatsoorten en maatsoortwisselingen te categoriseren.*

3.2 Representatie van een ritme als een string symbolen

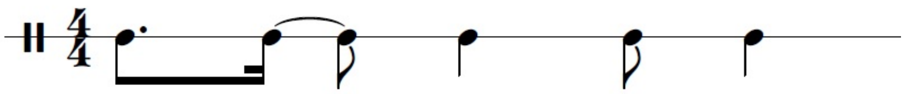
We beschouwen ten slotte de meestgebruikte representatie van ritme: representatie door een string symbolen. De precieze manier waarop de string tot stand komt en welke symbolen men in de string gebruikt, verschilt van auteur op auteur, maar het globale idee is het zelfde voor iedere invulling van deze methode. We zullen in deze sectie alle variaties kort aanhalen, en het globale idee weergeven. Tenslotte geven we de voordelen en nadelen van de methode.

Het idee van de methode is om een ritme te zien als ostinaat[1]. Dit ostinaat delen we op in kleine stukjes[2] en voor ieder klein stukje bepalen we of er geluid (een puls) te horen moet zijn, of niet.

[1]Een zich herhalend ritmisch patroon
[2]Die klein genoeg zijn, zodat er niet twee pulsen in hetzelfde stukje vallen

Kies twee symbolen. Wanneer er geluid te horen is, geven we dit aan met het ene symbool en wanneer dit niet gebeurt, geven we dit aan met het andere. Als paren symbolen worden doorgaan 1'en en 0'en gebruik, puntjes en kruisjes, of in extreme gevallen zelfs een klok waar door middel van bellen aangegeven wordt wanneer er een puls te horen is. [19], [8], [15], [20], [18]

In deze paragraaf gaan we op alle manieren het nootvoorbeeld in *figuur 3.2* proberen te formaliseren met deze techniek. We moeten hiertoe eerst de hele maat opdelen in kleine stukjes. Deze stukjes moeten wel klein genoeg zijn, zodat er niet twee pulsen in hetzelfde stukje vallen. Een opsplitsing in **vier** blokjes (kwartnoten) is bijvoorbeeld te grof: in het eerste blokje vallen dan twee pulsen.



Figuur 3.2: *Het Clave-Son ritme*

Het blijkt voldoende te zijn om de maat op te delen in zestien blokjes (zestiende noten). Vervolgens moeten we aangeven in welk blokje een puls zit, en in welke niet. Dit kunnen we doen door *figuur 3.2* te herschrijven in lauter zestiende noten. We vinden dan het notenvoorbeeld, gegeven in *figuur 3.3*. De noten geven de pulsen aan, de rusten de stiltes.

Figuur 3.3: *Het Clave-Son ritme opgeschreven in alleen maat zestiende noten. De noten geven waar de pulsen zitten, de rusten waar de stiltes zitten.*

De formalisering is nu bijna klaar: nu hoeven we alleen nog symbolen te kiezen om de pulsen en de rusten aan te geven. We kunnen bijvoorbeeld de pulsen aangeven met een 1 en de rusten met een 0. We vinden dan voor het Clave-Son ritme dat het geformaliseerd wordt door: [18], [19], [20]

$$1001001000101000$$

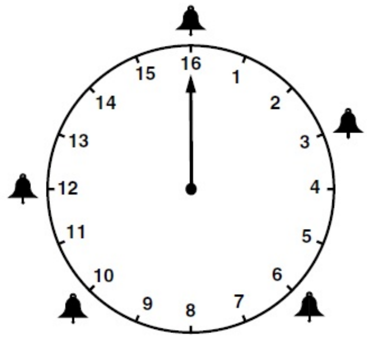
We kunnen natuurlijk andere symbolen gebruiken: kruisjes voor de pulsen en puntjes voor de rusten, dan krijgen we de formalisering, gegeven door: [15], [8], [19]

$$\times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \cdot \cdot$$

We kunnen ook een hele andere visualisatietechniek toepassen: een klok gebruiken en met bellen aangeven wanneer er een puls te horen is op de klok. Is er geen bel weergegeven, dan is er een rust. Een voorbeeld voor het Clave-Son ritme is weergegeven in *figuur 3.4*. [19], [14] (Figuur uit [19])

Samenvattend moet je dus om deze representatietechniek voor ritme toe te passen eerst een muzikaal ritmisch patroon kiezen. Vervolgens hak je dit patroon op in kleine vaste stukken waarvan je aangeeft of het stuk een puls is of een rust. Tenslotte kies je twee symbolen en geef je de pulsen aan met het ene symbool en de rusten met het andere. Een goede samenvatting van de techniek wordt gegeven door *Godfried T. Toussaint* in *figuur 3.5*. [19] (Figuur uit [19])

We kunnen ten slotte het Clave-Son ritme op nog één andere manier wiskundig weergeven. Deze methode is weergegeven op plaats (8) in *figuur 3.5*. Om te snappen wat hier gebeurt, kijken we



Figuur 3.4: *Het Clave-Son ritme gerepresenteerd als klok, waar de bellen de pulsen aangeven. Figuur duur Godfried T. Toussaint*

nogmaals naar (7) en tellen we hoe groot de groepjes van nullen en enen zijn:

$$\underbrace{100}_{3}\underbrace{100}_{3}\underbrace{1000}_{4}\underbrace{10}_{2}\underbrace{1000}_{4}.$$

We kunnen ook om schrijfruimte te besparen door in plaats van de de volledige strings nullen en enen steeds de groepgroottes op te schrijven. Voor het Clave-Son ritme is deze dus gegeven door: [19]

$$33424.$$

Hiermee is de huidige techniek voor wiskundige formalisering van ritme dus in al haar facetten behandeld. We geven nog een voorbeeld, waarna we de voordelen en nadelen behandelen.

Voorbeeld 3.2.1 (Een formalisering van een 7/8-maat)**.** Kijk nogmaals naar de 7/8-maat in *figuur 3.1*. Als we deze maat zouden willen formaliseren, merken we allereerst op dat de zestiende noot als kleinste blokje kiezen klein genoeg is (het is qua relatieve duur de kortste noot die we in het notenvoorbeeld tegen komen). Vervolgens gebruiken we een 1 voor de pulsen en een 0 voor de rusten. Het is aan de lezer om na te gaan dat het notenvoorbeeld ten slotte geformaliseerd kan worden door

$$10111011111110.$$

Als we het zouden formaliseren als een string waar de groepgroottes aangeven, zouden we de volgende formalisering krijgen:

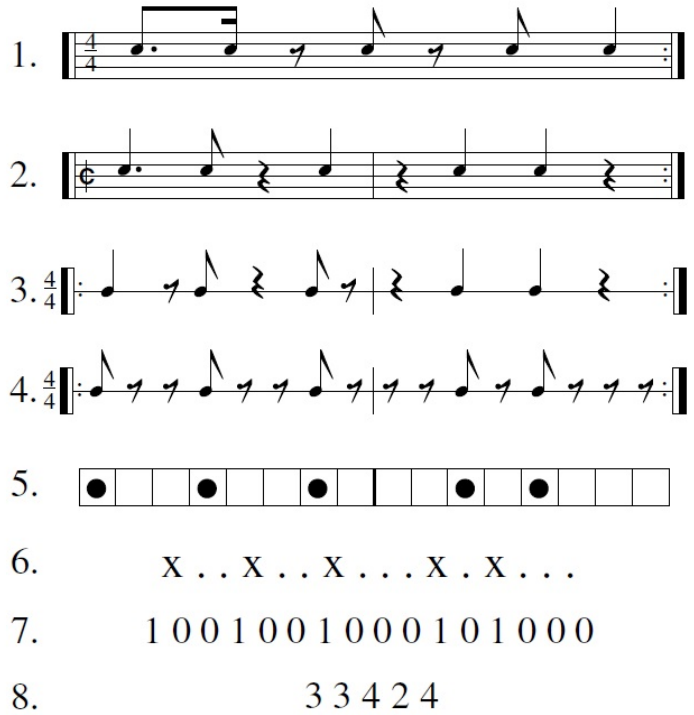
$$21121111112.$$

□

De voordelen deze manier van ritmes formaliseren zullen duidelijk zijn: in tegenstelling tot de Pivot-Pulse kunnen we deze methode ook voor noten toepassen. Daarnaast voelt de manier van formaliseren heel intuïtief aan[3], omdat het een zeer directe koppeling aan de noten in het ritme heeft. De manier van formaliseren is zeer praktisch van aard.

Voor onze doeleinden heeft ook deze manier van ritmeformalisering echter meer nadelen van voordelen. Het leidt enerzijds aan hetzelfde probleem als de Pivot-Pulse: hoewel de string symbolen de noten van een ritme nu wel goed representeren, gooit de methode alle informatie over de maatsoort weg. Wij willen het ook over de maatsoort kunnen hebben, dus mist deze manier van formaliseren voor ons iets.

[3]Ten minste voor mij.



Figuur 3.5: *Het maken van de wiskundige formalisering van het Clave-Son ritme stap voor stap. (1) tot en met (3) zijn herschrijvingen van hetzelfde Ritme. In (4) is de achtste noot als blokje gekozen en is het ritme in 16 blokjes opgedeeld, waarbij voor ieder blokje is aangegeven of er een puls of een rust is. In (6) en (7) is dit vervolgens op twee manieren geformaliseerd.*

Een ander nadeel is de ambiguïteit die bij deze representatiemethode de kop op steekt. Iedere persoon kan ervoor kiezen om een gegeven ritmisch nootvoorbeeld op een andere manier te formaliseren. We illustreren dit aan het simpelste voorbeeld dat we kunnen verzinnen: vier kwartnoten. Wij willen in dit verslag proberen een niet ambigue formalisering te maken (je mag hetzelfde nootvoorbeeld niet op meerdere manieren kunnen formaliseren), dus is deze methode ongeschikt.

Voorbeeld 3.2.2 (De formalisering kan voor iedereen anders zijn)**.** Beschouw het patroon van vier kwartnoten gegeven in *figuur 3.6*. Iemand wil dit patroon gaan formaliseren en kiest ervoor om kwartnoten als blokjes te kiezen (de kwartnoot is immers de kortste nootlengte die je tegenkomt). Het is aan de lezer na te gaan dat de bijbehorende wiskundige formalisering dan gegeven wordt door:

$$1111.$$

Iemand anders kiest ervoor om de achtste noten als blokjes te kiezen. Deze noten duren korter dan de kwartnoten, dus hiermee kun je (meestal) ook alle pulsen in een blokje vangen zonder dat er ergens meer dan één puls in een blokje zit. Het is aan de lezer na te gaan dat formalisering dan als volgt is weergegeven:

$$10101010.$$

We kunnen dus hetzelfde ritmische patroon op meerdere manieren formaliseren. Hier één manier, gebaseerd op de kwartnoot en één op de achtste noot.

□

Figuur 3.6: *Een patroon met vier kwartnoten.*

Het laatste belangrijke nadeel is dat de methode ook niet consistent is van muziekstuk op muziekstuk. Omdat je voor deze formalisering een noot moet kiezen als “kleinste blokje” waarmee je het muziekstuk ophakt, kan het voorkomen dat dit “kleinste blokje” anders is per muziekstuk. Wij willen een formalisering maken dit dit probleem niet heeft, wij willen dat ieder muziekstuk op dezelfde manier geformaliseerd kan worden.

In het zicht van al deze nadelen lijkt het voor onze doeleinden onmogelijk om de huidige, meest gebruikte formalisering voor ritmes over te nemen. Hiertoe gaan wij in het volgende hoofdstuk beginnen aan het ontwikkelen van een eigen raamwerk. Omdat het raamwerk gepresenteerd in deze paragraaf zo vaak toegepast wordt in de literatuur, zullen in *hoofdstuk 7* nog één keer naar dit raamwerk kijken in het licht van ons dan opgesteld raamwerk.

- **Samenvatting:** *We hebben in deze paragraaf laten zien hoe doorgaans een ritme wiskundig geformaliseerd wordt als een string van symbolen. Hoewel dit tegenwoordig de meestgebruikte methode is om (een) ritme wiskundig te formaliseren, hebben wij beargumenteerd dat deze methode voor onze doeleinden ongeschikt is.*

Hoofdstuk 4

Een wiskundige beschrijving van noten

Op dit punt kunnen we allemaal op variërend niveau noten lezen, in *hoofdstuk 2* hebben we namelijk allemaal gesleuteld aan ons begrip van de algemene muziekleer. Als we kijken naar de partituur in *bijlage B*, herkennen we waarschijnlijk allemaal ten minste een paar symbolen. Sommige mensen herkennen kwartnoten, andere enkelgepunteerde achtste noten, en weer andere zien een achtstentriool staan. Wat je ook ziet, je herkent deze symbolen omdat je er (in *hoofdstuk 2* of vroeger) op een muzikale manier kennis mee hebt gemaakt. Dat is wat musici doen: ze communiceren de theorie achter muziek via de aanname dat iedereen die erover wil leren naar muziek kan luisteren.

Echter, kijk nu nog eens naar *bijlage B*. Deze keer niet als iemand die al muzieksymbolen kan herkennen en lezen, maar als een computer: een mechanisme zonder gevoel dat muziek niet op dat gevoel kan leren. Opeens zien we moeilijkheden met de schrijfwijze die we voor muziek gebruiken: alle symbolen zien er totaal anders uit, sommige zitten aan elkaar vast, andere niet, soms staan er punten boven de noten, soms eronder. Als we dit systeem aan computers willen leren, moeten we alle symbolen, inclusief de oneindig mogelijke combinaties van deze symbolen, één voor één inscannen en de computer vertellen hoe we ieder symbooltje moeten interpreteren. Dit creëert natuurlijk wel menselijke werkgelegenheid, maar is tegelijk ook onbegonnen werk.

Om computers toch te leren "nadenken" met noten, moeten we van de lastige en uitgebreide symbolen in *bijlage B* af, en overstappen op een concept dat computers wel begrijpen: "computing" met getallen. We kunnen hiertoe de al vrij bekende methode gebruiken, geïntroduceerd in *hoofdstuk 3*. Deze methode heeft echter een groot nadeel: het ontwijkt het probleem. Deze formalisering geeft wel op een abstractere wijze de duur van noten aan, zodat computers deze duur kunnen afspelen, maar de methode zorgt niet voor muzikaal begrip. Per partituur is de formalisering naar een string nullen en enen anders, dus kan een computer hiermee geen "muzikale denkwijze" aanleren.

De taak is dus aan ons: wij gaan een formalisering van **individuele noten** ontwikkelen[1], waarmee een computer wel een muzikale denkwijze aanleert. Hiermee bedoelen we het volgende: we willen een systeem ontwikkelen, waarmee in iedere partituur noten op eenzelfde manier geformaliseerd wordt, zodat de formalisering niet verschillend hoeft te zijn van muziekstuk op muziekstuk. Daarnaast willen we dat een computer met de formalisering kan beoordelen of twee noten "verschillende schrijfwijzen zijn van dezelfde noot". De centrale kwestie in dit hoofdstuk is dus het volgende:

[1] We kijken dus niet naar "groepen" van noten.

"Hoe kunnen we voor computers muzieknoten als getallen formaliseren, zodat zij kunnen aanleren hoe er met noten gerekend hoort te worden?"

We behandelen de centrale kwestie in de volgende volgorde:

- *Paragraaf 4.1*: Hoe kunnen we noten als een (paar) getal(len) formaliseren?
- *Paragraaf 4.2*: Welke noten zijn het belangrijkst voor computers om te begrijpen?
- *Paragraaf 4.3*: Hoe kunnen we het in dit hoofdstuk gevormde systeem toepassen?

4.1 Het formaliseren van de nootstructuur

♫ Nootsymbolen uitkleden tot hun basis: het nootnummer

Kijk nog eens naar *bijlage B*. We hebben in de introductie van dit hoofdstuk gezegd dat het notenschrift best verwarrend kan zijn en veel verschillende symbolen gebruikt, maar als we goed kijken, zien we dat al deze moeilijkere symbolen zijn opgebouwd uit "makkelijkere" symbolen waar een boel versiering omheen getekend is. Als we al deze versiering weggooien, houden we de basis van de noot over: de **basisnoot**. We noemen vanaf nu noten zonder versiering ook **basisnoten**.

De symbolen die voor basisnoten gebruikt worden, ben je al eerder tegengekomen: het zijn de symbolen weergegeven in *tabel 2.1* in *paragraaf 2.1*. Het is belangrijk om in een gegeven nootvoorbeeld uit te kunnen vinden wat de basisnoot is en wat de "versiering" is. Soms is dit meteen duidelijk (eerste voorbeeld uit *voorbeeld 4.1.1*), en soms moeten we gebruik maken van onderstaande observatie:

- **Observatie:** *Gegeven een nootvoorbeeld is er altijd een (qua relatieve duur) langst durende basisnoot, die tegelijkertijd korter duurt dan of even lang is als dat gegeven nootvoorbeeld (qua relatieve duur).*[2]

De basisnoot die we zoeken bij een gegeven nootvoorbeeld, is de basisnoot met de eigenschap uit de observatie. Om deze basisnoot te vinden, voeren we het volgende stappenplan uit:

1. Kies een maatsoort.
2. Bepaal in deze maatsoort de relatieve duur van je nootvoorbeeld, noem deze d.
3. Kies een kandidaat basisnoot.
4. Controleer of de gekozen basisnoot qua relatieve duur korter dan of even lang duurt als d tellen. (Nee? terug naar stap 3)
5. Ga een cel omhoog in *tabel 2.1*.
6. Controleer of de relatieve duur van deze basisnoot groter is dan d. (Nee? terug naar stap 3)

We illustreren het stappenplan aan de hand van drie voorbeelden.

Voorbeeld 4.1.1 (Het vinden van de basisnoot)**.** We gaan uit drie nootvoorbeelden de basisnoot halen. Voor alle drie de voorbeelden kiezen we een 4/4-maat als referentie (stap 1). De drie nootvoorbeelden bij dit voorbeeld zijn weergegeven in *figuur 4.1*.

1. Een enkelgepunteerde kwartnoot

[2] Er is altijd een basisnoot die korter of even lang duurt dan/als de relatieve duur van een gegeven nootvoorbeeld, maar tegelijk langer duurt dan de helft van deze relatieve duur.

Soms is de basisnoot heel makkelijk te herkennen en zijn de versieringen duidelijk. Voor dit nootvoorbeeld is de punt de versiering en is de kwartnoot de bijbehorende basisnoot. Leg je vinger over de punt en je ziet hem verschijnen.

Als we netjes ons algoritme willen toepassen, merken we eerst op dat de enkelgepunteerde kwartnoot $3/2$ tel duurt (stap 2). Vervolgens kiezen we de kwartnoot als kandidaat (stap 3), merken op dat deze in een vierkwartsmaat 1 tel duurt, en dat $1 \leq 3/2$ (stap 4). Dan beschouwen we de halve noot (stap 5), merken op dat de halve noot 2 tellen duurt, en ten slotte dat $2 > 3/2$ (stap 6). De **kwartnoot** is dus de basisnoot bij dit nootvoorbeeld.

2. Een achtste noot verbonden met een zestiende.

In verbindingen van louter verschillende basisnoten is het ook nog vrij gemakkelijk om de basisnoot die correspondeert met de verbinding te vinden: zoek simpelweg naar de langst durende basisnoot in de verbinding; dit is tevens de basisnoot die correspondeert met de verbinding. Voor dit voorbeeld is dit de achtste noot.

Natuurlijk kunnen we dit ook formeel met ons algoritme uitvinden. We merken allereerst op dat het nootvoorbeeld $3/4$ tel duurt (stap 2). Nu gokken we dat de kwartnoot de basisnoot wordt (stap 3). Merk op dat de kwartnoot 1 tel duurt en dat $1 > 3/4$ (stap 4). Stap 4 mislukt, en dus gaan we terug naar stap 3.

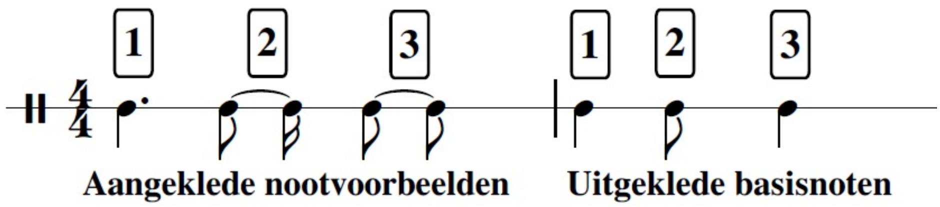
We gokken nu dat de zestiende noot de basisnoot is (stap 3). We merken op dat de zestiende noot $1/4$ tel duurt, en dat $1/4 \leq 3/4$ (stap 4). Vervolgens beschouwen we de achtste noot (stap 5), en merken op dat deze $1/2$ tel duurt, alsmede dat $1/2 < 3/4$ (stap 6). Stap 6 faalt nu, dus gaan we terug naar stap 3.

We gokken nu eindelijk dat de achtste noot de basisnoot is (stap 3), en zien dat de achtste noot $1/2$ tel duurt, alsmede dat $1/2 \leq 3/4$ (stap 4). We beschouwen dan de kwartnoot (stap 5), en merken op dat de kwartnoot 1 tel duurt, alsmede dat $1 > 3/4$. De test is geslaagd en de **achtste noot** is de corresponderende basisnoot.

3. Twee verbonden achtste noten

Verbindingen met ofwel gepunteerde noten, ofwel noten die meer dan één keer voorkomen, zijn lastig. Hier moet je gewoon via het algoritme bepalen wat de basisnoot is. Het is aan de lezer om te verifiëren dat in dit nootvoorbeeld de **kwartnoot** de corresponderende basisnoot is. Dit voelt misschien tegenintuïtief aan, maar het is constructief op te merken dat (3) een alternatieve schrijfwijze is van een losstaande kwartnoot, daarom is de kwartnoot ook de basisnoot.

□



Figuur 4.1: *De nootvoorbeelden bij voorbeeld 4.1.1*

We kunnen nu met ons algoritme gegeven een nootvoorbeeld de corresponderende basisnoot bepalen. De observatie vertelt ons daarnaast dat de basisnoot iets vertelt over de relatieve duur van een nootvoorbeeld: de basisnoot is de noot die de relatieve duur van een nootvoorbeeld van onderen het best benadert. Ken je de basisnoot, dan weet je welke “makkelijke” noot het moeilijke nootvoorbeeld het best benadert (van onder). Dit is waardevolle informatie voor praktische toepassingen; we willen dit graag meegeven aan de computer.

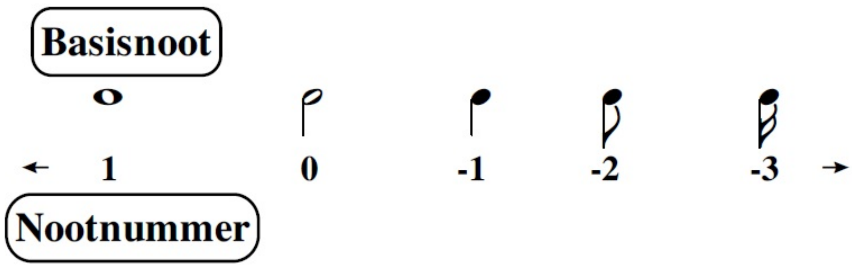
Om ervoor te zorgen dat de computer niet hoeft om te gaan met de rare symbooltjes van de basisnoten, is het handig om de symbolen van basisnoten om te zetten in getallen. Zo'n cijfer dat een basisnoot aangeeft, noemen we het **nootnummer**. De correspondentie die we tussen basisnoten en nootnummers maken, wordt vastgelegd in *figuur 4.2*. We kunnen ook een formele definitie geven:

Definitie 4.1.1 (Nootnummer)**.** Het nootnummer van een noot $x \in N_b$ is het getal $\phi(x) \in \mathbb{Z}$, waarvoor geldt dat

$$\operatorname{sgn}(\phi(x)) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \text{ geen stok heeft,} \\ -1 & \text{als } x \text{ een gesloten kop heeft,} \\ 0 & \text{als } x \text{ een halve noot is,} \end{cases}$$

en dat $|\phi(x)| - 1$ het aantal vlaggen of balkenparen van de noot is, als $\operatorname{sgn}(\phi(x)) \neq 0$.

□



Figuur 4.2: *De relatie tussen nootnummers en basisnoten.*

▶ **Samenvatting:** *Basisnoten zijn onversierde noten. Gegeven een nootvoorbeeld is de basisnoot die hoort bij dat nootvoorbeeld een noot uit tabel 2.1. Deze noot moet de relatieve duur van het nootvoorbeeld van onder zo goed mogelijk benaderen. Omdat we niet met muzieksymbolen willen werken, maar met getallen, koppelen we aan iedere basisnoot een nummer: het nootnummer.*

♫ Van basisnoot naar meer: het belang van machten van twee

Op dit punt kunnen aangekomen, kunnen we inmiddels van een nootvoorbeeld de corresponderende basisnoot bepalen. Nu is het tijd om te gaan onderzoeken hoe nootvoorbeelden zijn opgebouwd, opdat we de rekenstructuur van noten kunnen blootleggen. Het blijkt dat alle nootvoorbeelden kunnen opsplitsen in vier categorieën; elke categorie geeft aan hoe een gegeven nootvoorbeeld is ontstaan uit een basisnoot. De categorieën zijn: (*paragraaf 2.2* en *2.4*)

I. Basisnoten.

II. Verlengde basisnoten. (*paragraaf 2.2*)

III. Veranderde basisnoten (door antimetrisering). (*paragraaf 2.4*)

IV. Veranderde en verlengde basisnoten.

Categorie I noten kennen we al, dit zijn de noten in *tabel 2.1*. Categorie II noten gaan we in dit hoofdstuk verder onderzoeken. Categorie III noten en categorie IV noten bewaren we voor *hoofdstuk 6*. Herinner je dat we noten uit categorie II op twee manieren kunnen vormen:

1. Verbinding van noten.

2. Puntering van noten.

Het verbinden van noten stelt hierin een soort optelling voor: als ik de relatieve duur moet bepalen van twee verbonden basisnoten, dan moet ik van de afzonderlijke noten de duur bepalen en die duur vervolgens optellen. Het punteren stelt een soort vermenigvuldiging voor: om bijvoorbeeld de relatieve duur van een enkelgepunteerde basisnoot te vinden, berekenen we de duur van de basisnoot zonder punten, en tellen we de helft van deze duur er nogmaals bij op. We vermenigvuldigen dus de duur van de basisnoot met anderhalf.

Hoewel puntering zich goed laat uitleggen door een vermenigvuldiging, kunnen we puntering ook zien als een speciaal soort optelling. Als we een basisnoot éénmaal punteren, tellen we er eigenlijk de basisnoot bij op die de helft van de duur heeft. Bij twee punten tellen we zowel de basisnoot met de helft van de duur, als de basisnoot met een kwart van de duur erbij op. Voor iedere nieuwe punt tellen we een extra noot bij de originele basisnoot op. Dit vertelt ons ook meteen dat we nootvoorbeelden soms op verschillende manieren kunnen opschrijven. Puntering kunnen we bijvoorbeeld multiplicatief opschrijven door punten achter een basisnoot te zetten, maar ook additief door een basisnoot te verbinden met andere basisnoten, waarvan het nootnummer steeds met één afneemt. We geven een voorbeeld.

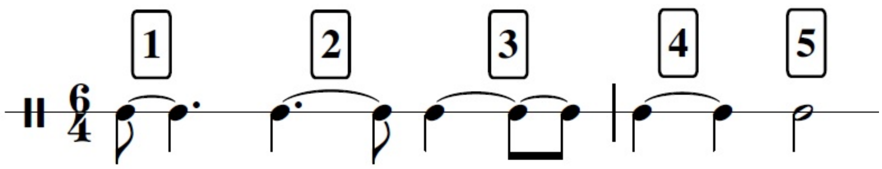
Voorbeeld 4.1.2 (We kunnen nootvoorbeelden op meerdere manieren opschrijven)**.** Dit voorbeeld heeft betrekking op *figuur 4.3* en dient ervoor om ons bewust te maken van het feit dat dezelfde nootvoorbeelden vaak op meerdere manieren opgeschreven kunnen worden.

In (1) staat een achtste noot verbonden/opgeteld met een enkelgepunteerde kwartnoot. We weten dat optellen commutatief is, dus maakt het niets uit als we de noten in deze verbinding andersom opschrijven. Soms is dit omwisselen zelfs handig, omdat we zo de langst durende noot in de verbinding vooraan kunnen zetten. We krijgen zo nootvoorbeeld (2).

In (2) merken we op dat een enkelgepunteerde kwartnoot gelijk is aan de kwartnoot opgeteld/verbonden met de noot die de helft van de duur van de kwartnoot heeft: de achtste noot. We kunnen dus de enkelgepunteerde kwartnoot best vervangen met een kwartnoot en een achtste noot. We krijgen zo nootvoorbeeld (3).[3]

Vanuit (3) merken we op de achtste noot de helft van de duur van de kwartnoot omvat. Twee achtste noten bij elkaar opgeteld duren dus even lang als een kwartnoot, dus mogen we deze twee achtste noten best vervangen door een kwartnoot. We vinden (4). De lezer wordt uitgenodigd om zelf de stap van (4) naar (5) te maken.

□



Figuur 4.3: *Vijf manieren om hetzelfde op te schrijven.*

We leren van *voorbeeld 4.1.2* de volgende drie dingen:

- **Observatie:** *Verbinden en optellen zijn hetzelfde.*
- **Observatie:** *We kunnen hetzelfde nootvoorbeeld vaak op meerdere manieren opschrijven.*

[3] In dit nootvoorbeeld zijn één verbindingsbalk gebruikt voor de achtste noten in plaats van één vlaggetje. Dit is equivalente notatie, en welke je in een situatie moet toepassen, hangt af van het metrum. Wij laten dit verschil in notatie buiten beschouwing.

- ▶ **Observatie:** *Punteren kan praktisch gezien worden als een vermenigvuldiging, maar theoretisch ook gewoon als een optelling/verbinding van basisnoten.*

Nu komt de crux van het verhaal: we willen de structuur van noten vinden, hiertoe proberen we vanuit categorie I in categorie II te raken. Met bovenstaande observaties zien we dat dit kan door simpelweg basisnoten bij elkaar op te tellen. Merk echter op wat dit voor de relatieve duren impliceert: basisnoten duren allemaal een (mogelijke negatieve) macht van twee aantal tellen, dus duren alle noten uit categorie II een aantal tellen dat gelijk is aan een som van machten van twee. De verzameling die al deze waarden bevat, is $\mathbb{Z}_2$. Hierbij definiëren we $\mathbb{Z}_2$ als de lokalisatie van $\mathbb{Z}$ te 2, ofwel

$$\mathbb{Z}_2 := \left\{ \frac{a}{2^b} \ \mid \ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \right\}.$$

Deze verzameling is dus best belangrijk voor noten. Deze observatie heeft een belangrijk gevolg:

- ▶ **Gevolg:** *Punteren is een vermenigvuldiging met een element uit $\mathbb{Z}_2$.*

We hebben nu gezien dat $\mathbb{Z}_2$ een belangrijke rol speelt in onze noten. Het gevolg van deze realisatie is dat we deze verzameling kunnen gaan gebruiken in de definitie van onze "wiskundige noten". Voordat we dit doen, willen nog weten met welke structuur we in $\mathbb{Z}_2$ te maken hebben.

Lemma 4.1.1 ($\mathbb{Z}_2$ is een ring)**.** *De structuur* $[\mathbb{Z}_2, +, -, 0, \cdot, 1]$[4]*, waarbij* $\mathbb{Z}_2 := \left\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \ \mid \ a \in \mathbb{Z} \ \wedge \ n \in \mathbb{N} \right\}$ *de lokalisatie van de ring $\mathbb{Z}$ te 2 is, is zelf ook weer een ring. [7]*

Bewijs. We merken allereerst op dat $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. We weten dat de structuur $[\mathbb{Q}, +, -, 0, \cdot, 1]$ een ring is, dus volstaat het om te laten zien dat we hier te maken hebben met een deelring.

Wanneer men in de definitie van $\mathbb{Z}_2$ kiest $a = 1$, en $n = 0$, dan volgt dat $\frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{Z}_2$. Neem vervolgens $a, b \in \mathbb{Z}$ vrij en $n, m \in \mathbb{N}$ vrij en merk op door zonder verlies van algemeenheid aan te nemen $n > m$:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2^n} - \frac{b}{2^m} &= \frac{a}{2^n} - \frac{b}{2^n \cdot 2^{m-n}}, \\ &= \frac{a}{2^n} - \frac{b \cdot 2^{n-m}}{2^n}, \\ &= \frac{a - b \cdot 2^{n-m}}{2^n}. \end{aligned}$$

Door vervolgens op te merken dat, aangezien $n > m$, geldt $2^{n-m} \in \mathbb{Z}$, volgt dat $\frac{a - b \cdot 2^{n-m}}{2^n} \in \mathbb{Z}_2$. Tenslotte beschouwen we het product van de twee vrij gekozen getallen en merken op:

$$\frac{a}{2^n} \cdot \frac{b}{2^m} = \frac{a \cdot b}{2^{n+m}} \in \mathbb{Z}_2.$$

Uit deze drie bevindingen volgt dat $\mathbb{Z}_2$ een deelring van $\mathbb{Q}$ is en dus dat het zelf ook een ring is.

Q.E.D.

- ▶ **Samenvatting:** *We zijn de structuur van noten gaan onderzoeken. We kenden al basisnoten (categorie I), en zijn gaan kijken hoe verlengde basisnoten ontstaan (categorie II). We hebben geleerd dat dit kan door puntering en verbinding. Verbinding stelt hierin een optelling voor en puntering een vermenigvuldiging. We hebben ten slotte gezien dat elementen van $\mathbb{Z}_2$ een belangrijke rol spelen in de omzetting van noten uit categorie I naar categorie II. Dit gaan we straks in de formalisering gebruiken.*

[4]Met $[V, \cdots]$ bedoelen we de structuur over de verzameling V met de gedefinieerde operaties aangegeven achter de komma.

✍ Alles komt samen: de definitie van ritmische noten

Na al bovenstaand muzikaal voorwerk, gaan we nu echt "wiskundige noten" maken. We gaan ze in dit verslag aanduiden met **ritmische noten**. Om de laatste puntjes op de i te zetten voor de definitie, herinneren we ons de volgende dingen:

- **Terugblik:** *Gegeven een nootvoorbeeld is de basisnoot die correspondeert met het nootvoorbeeld de basisnoot die het nootvoorbeeld qua duur van onder het beste benadert. De basisnoot geeft dus een benadering van het nootvoorbeeld.*
- **Terugblik:** *Verbinden is optellen.*
- **Terugblik:** *Punteren is vermenigvuldigen.*

Om ritmische noten te definiëren gaan we noten als een paar van twee getallen opschrijven, omdat een computer beter met getallenparen om kan gaan dan met symbooltjes. We willen dat dit getallenpaar het "gevoel" van het notenschrift in tact laat; dit betekent dat op twee niveaus naar de noten willen kunnen kijken:

1. We kunnen naar de globale vorm van een nootvoorbeeld kijken. Hiermee krijgen we een schatting van de duur. Deze manier van kijken komt overeen met het bepalen van de basisnoot, behorende bij een nootvoorbeeld, en deze basisnoot gebruiken als benadering van het nootvoorbeeld.
2. We kunnen naar de precieze invulling van het nootvoorbeeld kijken. Dan kijken we naar de basisnoot die bij een nootvoorbeeld hoort en al zijn versieringen.

We gaan de ritmische noten zó formaliseren dat je alleen naar het eerste getal hoeft te kijken om de basisnoot te vinden die correspondeert met de ritmische noot, het eerste getal wordt dus het **nootnummer** van de basisnoot die correspondeert met de ritmische noot. Wil je de precieze invulling van de noot? Kijk dan naar het eerste getal (de basisnoot) en vervolgens het tweede getal (de versiering). Hoe je die versiering precies moet interpreteren, leggen we later uit.

Naast het feit dat we noten als getallenpaar willen weergeven, willen we ook muzikale operaties met de noten kunnen doen. We willen op zijn minst noten kunnen verbinden en punteren (de operaties uit categorie II). Hiertoe geven we onze verzameling ritmische noten twee operaties mee: een plusoperatie $\oplus$, deze moet verbinden kunnen vangen, en een vermenigvuldigingsoperatie $\odot$, deze moet punteren kunnen vangen. We definiëren rimtische noten eerst, waarna we een zuiver rekenvoorbeeld geven met een beetje muzikale uitleg waarom optellen en verbinden hetzelfde zijn.

Definitie 4.1.2 (Ritmische noten)**.** De verzameling van ritmische noten N wordt gedefinieerd door de volgende **getallenparen**:[5]

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \;\wedge\; r \in (-2,-1] \cup [1,2) \subset \mathbb{R} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{4.1}$$

Een element uit deze verzameling, noemen we een ritmische noot. Op deze notenverzameling definiëren we een optelling, $\oplus$, gegeven door[6]

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} m \\ s \end{pmatrix} = \begin{cases} \left(\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor,\; \frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}}\right) & \text{als } \varrho \neq 0, \\ (0,0) & \text{als } \varrho = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

waarbij

$$\varrho = r \cdot 2^n + s \cdot 2^m. \tag{4.3}$$

[5] Naast de notatie $\binom{n}{r}$ zullen we, waar dit handiger is, ook de notatie (n, r) gebruiken. Voor de doeleinden van dit verslag zijn beide notaties equivalent aan elkaar.

[6] $\lfloor \cdot \rfloor$ geeft hier de entier-functie aan, ofwel het "afronden naar beneden".

Ten slotte definiëren we ook een scalaire vermenigvuldiging over deze verzameling, $\odot$, waarbij de scalairen liggen in de ring $\mathbb{Z}_2$.

$$c \odot \binom{n}{r} = \begin{cases} \left(n + \lfloor \log_2 |c \cdot r| \rfloor,\ \frac{c \cdot r}{2^{\lfloor \log_2 |c \cdot r| \rfloor}}\right) & \text{als } c \cdot r \neq 0, \\ (0,0) & \text{als } c \cdot r = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Het feit dat N gesloten is onder de zojuist gedefinieerde optelling en vermenigvuldiging wordt gevangen in *lemma 4.1.3* verderop.

□

Opmerking. In ons geval induceert de $\oplus$-operatie ook een corresponderen de $\ominus$-operatie. Deze operatie lijkt voor muziek niet heel waardevol, maar blijkt later in *paragraaf 5.1* toch heel nuttig te zijn. De $\ominus$-operatie is analoog aan de $\oplus$-operatie gegeven door:

$$\binom{n}{r} \ominus \binom{m}{s} = \begin{cases} \left(\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor,\ \frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}}\right) & \text{als } \varrho \neq 0, \\ (0,0) & \text{als } \varrho = 0, \end{cases}$$

echter nu geldt dat $\varrho = r \cdot 2^n - s \cdot 2^m$. Het is een goede oefening aan de lezer de $\ominus$-operatie af te leiden uit de $\oplus$-operatie.

Voorbeeld 4.1.3 (Nootoptelling en vermenigvuldiging)**.** Met de twee operaties uit *definitie 4.1.2* zullen één expliciete en uitgebreide berekening uitvoeren. Voor de vermenigvuldiging hebben we

$$\frac{3}{2} \odot \binom{-2}{1} = \begin{pmatrix} -2 + \lfloor \log_2 \left|\frac{3}{2} \cdot 1\right| \rfloor \\ \frac{\frac{3}{2}}{2^{\lfloor \log_2 \left|\frac{3}{2}\right| \rfloor}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Voor de optelling hebben we

$$\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \oplus \binom{-3}{1} = \begin{pmatrix} \lfloor \log_2 \left|\frac{1}{2}\right| \rfloor \\ \frac{\frac{1}{2}}{2^{\lfloor \log_2 |\frac{1}{2}| \rfloor}} \end{pmatrix} = \binom{-1}{1},$$

aangezien $\varrho = \frac{3}{2} \cdot 2^{-2} + 2^{-3} = 2 \cdot 2^{-2} = 2^{-1}$. Merk muzikaal op[7] dat links de ritmische noten staan die horen bij de enkelgepunteerde achtste noot, en bij de zestiende noot. Rechts staat de ritmische noot die hoort bij de kwartnoot.

Merk op dat de kwartnoot een herschrijving is van de enkelgepunteerde achtste noot, verbonden met de zestiende noot. Ergo, hiermee illustreerden we dat verbinden en optellen op een bepaalde manier hetzelfde zijn.

□

- ▶ **Observatie:** *De basisnoot die correspondeert met ritmische noot (n, r) heeft nootnummer n.*
- ▶ **Observatie:** *De belangrijke verzameling $\mathbb{Z}_2$ zit in onze definitie ingebakken. Punteren wordt gevangen door vermenigvuldiging met een element uit $\mathbb{Z}_2$, dus kiezen we deze ring als scalarring.*
- ▶ **Terminologie:** *We noemen noot $(0,0)$ "de stilte", omdat we later zullen zien dat dit de unieke noot is met een relatieve duur van 0; je hoort hem niet.*
- ▶ **Waarschuwing:** *Verwar een ritmische noot niet met binomiaalcoëfficienten. Een ritmische noot is een paar getallen.*

[7] In het geval van de enkelgepunteerde achtste noot weet je dit (nog) niet; neem het voor nu even aan en kom later terug om dit te verifiëren.

- **Observatie:** *De twee getallen in het getallenpaar staan los van elkaar. Als je weet dat $n = -1$, dan geeft dit geen informatie over r.*
- **Samenvatting:** *We hebben onze ritmische noten gedefinieerd als een paar getallen. Het eerste getal geeft het nootnummer van de basisnoot aan die correspondeert met de ritmische noot. Dit getal geeft is een snelle approximatie van de ritmische noot. Het onderste getal codeert de rest van de informatie: de verlenging van de basisnoot. Beide getallen staan los van elkaar.*

♫ Details invullen: de functie van het tweede getal

We weten nu wat het bovenste/linkse nummer in het getallenpaar het **nootnummer** weergeeft van de basisnoot die correspondeert met de ritmische noot. Nu willen we natuurlijk ook weten wat het onderste/rechtse getal betekent. We gaan dit getal de **duurfactor** van de ritmische noot noemen. Deze factor geeft de versiering van de basisnoot die hoort bij de ritmische noot aan en is nauw verbonden met de duur van de noot. Herinner je het volgende:

- **Terugblik:** *Zij een nootvoorbeeld gegeven. De basisnoot die correspondeert met dit nootvoorbeeld benadert de duur van het nootvoorbeeld het best van onder.*

Als we dus onder een maatsoort de relatieve duur van de basisnoot bepalen, hebben we een duur bepaald, namelijk de duur van de basisnoot. Laat deze duur d tellen zijn. Deze duur is (meestal) **korter** dan de werkelijke duur van de ritmische noot. Het onderste getal van de ritmische noot geeft vervolgens aan met welke factor je d nog moet vermenigvuldigen om de échte relatieve duur te krijgen: het is de **duurfactor**. De duurfactor vertelt dus hoe zwaar een basisnoot verlengd is. We lichten dit idee toe aan de hand van basisnoten en enkelgepunteerde noten.

Voorbeeld 4.1.4 (De duurfactor van basisnoten en enkelgepunteerde noten)**.** Dit voorbeeld heeft betrekking op de twee nootvoorbeelden, aangegeven met een (1), in *figuur 4.1*.

1. De kwartnoot

Kijk allereerst naar het rechtse nootvoorbeeld met een (1) en neem voor het gemak even aan dat we in een vierkwartsmaat spelen. Het is niet moeilijk na te gaan dat de basisnoot die correspondeert met de kwartnoot de kwartnoot zelf is. Ergo, voor de ritmische noot (n, r) die correspondeert met de kwartnoot geldt $n = -1$. Om r te vinden rekenen we eerst het aantal tellen van de basisnoot uit: 1 tel. Dan rekenen we het aantal tellen van het nootvoorbeeld uit[8]: wederom 1 tel. Om 1 tel "op te hogen" tot 1 tel, moet je vermenigvuldigen met 1, dus $r = 1$. We formaliseren de kwartnoot door $(-1, 1)$. Het is een oefening aan de lezer om zichzelf ervan te overtuigen dat alle basisnoten geformaliseerd worden als $(n, 1)$, waar n het nootnummer van de basisnoot is.

2. De enkelgepunteerde kwartnoot

We focussen ons nu op het linker nootvoorbeeld met een (1) en nemen weer de vierkwartsmaat als maatsoort. We weten hiervan al dat corresponderende basisnoot de kwartnoot is. Voor de formalisering (n, r) geldt dus $n = -1$. Om r te vinden rekenen we weer eerst de relatieve duur uit van de corresponderende basisnoot: 1 tel. Vervolgens berekenen we de relatieve duur van het hele nootvoorbeeld: 3/2 tel. Ten slotte merken we op dat we moeten vermenigvuldigen met 3/2 om 1 op te hogen tot 3/2. Er geldt dus $r = 3/2$. Samenvattend formaliseren we de enkelgepunteerde kwartnoot dus als $(-1, 3/2)$. Het is een oefening aan de lezer om zich ervan te overtuigen dat alle enkelgepunteerde noten geformaliseerd worden door $(n, 3/2)$, waar n het nootnummer is van de corresponderende basisnoot.

□

[8] Dit aantal tellen moet groter zijn of gelijk aan de zojuist berekende duur

Nu geven we twee voordelen van ritmische noten. De voordelen ontstaan uit de volgende observatie en terugblik:

- **Observatie:** *Als ritmische noot* (n, r) *krijgen alle basisnoten* $r = 1$. *Alle enkelgepunteerde noten krijgen* $r = 3/2$.
- **Terugblik:** *We kunnen hetzelfde nootvoorbeeld op verschillende manieren opschrijven.*

De observatie geeft het eerste voordeel: we hebben al gezien dat basisnoten en enkelgepunteerde noten alle onderling dezelfde waarde van r krijgen als ritmische noot (n, r) (basisnoot krijgt $r = 1$, enkelgepunteerde noot $r = 3/2$). Dit feit zorgt ervoor dat wij basisnoten en enkelgepunteerde noten gemakkelijk kunnen herkennen: we hoeven alleen maar naar de waarde van r te kijken en ons te herinneren welke waarde van r bij welk soort noot hoort. Dit idee generaliseert ook naar andere verzamelingen noten die op dezelfde manier zijn opgebouwd: alle noten uit zo'n verzameling krijgen als ritmische noot dezelfde waarde van r. De handigheid van dit feit wordt geïllustreerd in *voorbeeld 4.1.5*. Nog een extra voorbeeld van een verzameling noten die op dezelfde manier is opgebouwd, wordt gegeven in *voorbeeld 4.1.6*.

Het tweede voordeel ligt in de terugblik: we kunnen nootvoorbeelden die even lang duren op verschillende manieren opschrijven, maar omdat wij de formalisering van nootvoorbeelden als ritmische noot baseren op de relatieve duur, worden al deze verschillende nootvoorbeelden als dezelfde "ritmische noot" geformaliseerd. Ergo, je hebt de last niet meer dat er bijna oneindig veel schrijfwijzen in de muziek zijn voor hetzelfde muzikale idee; in ons systeem worden die verschillende schrijfwijzen toch als dezelfde ritmische noot geformaliseerd.

Voorbeeld 4.1.5 (Operaties op basisnoten zien er natuurlijk uit)**.** Beschouw in dit voorbeeld de alternatieve formalisering waarin we basisnoten koppelen aan machten van twee. We koppelen de noten nu als volgt: waar in *figuur 4.2* de noot wordt gekoppeld aan getal n, koppelen we nu dezelfde noot aan getal 2^n. De hele noot (𝅝) wordt zo gekoppeld aan 2, de halve noot (𝅗𝅥) aan 1, de kwartnoot (♩) aan 1/2 et cetera. Op deze formalisering kunnen we optelling en vermenigvuldiging van noten simpelweg definiëren als de "gewone" optelling en vermenigvuldiging van getallen. Dit is waarom voor veel lezers deze formalisering waarschijnlijk logischer aanvoelt.

Om vervolgens te laten zien dat deze formalisering nadelen heeft, beschouwen we de enkele en dubbele puntering. Hoewel we dit nooit echt wiskundig geformaliseerd hebben, herinneren we ons *paragraaf 2.2*. Hierin is verteld dat enkele puntering de noot met de helft van zijn oorspronkelijke duur verlengt (en dus in feite de noot "vermenigvuldigt" met 3/2), en dat vervolgens de dubbele puntering de noot nog verder verlengt met 1/4 van zijn originele duur (en dus in feite de noot "vermenigvuldigt" met 7/4). Om deze reden nemen we maar even aan dat een enkele puntering uitvoeren gelijk is aan het vermenigvuldigen van een basisnoot met 3/2, en een dubbele puntering een vermenigvuldiging is met 7/4. Merk ook op dat we bij de muzikale nootsymbolen met één oogopslag kunnen zien dat een noot enkel of dubbel gepunteerd is; we zien immers fysiek punten achter de basisnoot geschreven staan. Deze herkenbaarheid is een eigenschap die we graag zouden willen behouden.

	Formalisering zonder punt	*Enkele puntering*	*Dubbele puntering*
|𝅝|	4	6	7
𝅝	2	3	7/2
𝅗𝅥	1	3/2	7/4
♩	1/2	3/4	7/8

Tabel 4.1: *Getal dat wordt gekoppeld aan enkel en dubbel gepunteerde noten bij de nieuwe, intuïtievere formalisering.*

Wanneer we deze eigenschap bij de alternatieve formalisering checken, merken we op dat we het getal van de enkel gepunteerde noot kunnen vinden door $\frac{3}{2} \cdot 2^n$ uit te rekenen. Voor dubbel gepunteerde noten, dienen we $\frac{7}{4} \cdot 2^n$ uit te rekenen. Voor een aantal noten is in *tabel 4.1* het resultaat van de berekening weergegeven. Merk aan de gegeven voorbeelden op dat we niet echt in één oogopslag zouden kunnen zien dat een losse noot gepunteerd is (natuurlijk herkennen we wel een patroon, maar bij losse noten is dit patroon er niet om ons te helpen). We zouden het zelfs nog slechter kunnen zien als we alle breuken als kommagetal zouden opschrijven.

Wanneer we echter naar onze *definitie 4.1.2* kijken, kunnen we inzien dat er voor enkele puntering geldt dat $\frac{3}{2} \odot (n, 1) = (n, 3/2)$, en voor dubbele puntering dat $\frac{7}{4} \odot (n, 1) = (n, 7/4)$. Als we de duurfactor dus kennen, kunnen we bij deze formalisering wél in een oogopslag de punteringen herkennen (zie ook *tabel 4.2*). De eigenschap die we hier hebben laten zien, geldt voor meer muzikaal veelvoorkomende concepten, zoals hogere punteringen (meer dan twee punten achter de noot zetten) en antimetrisering (het veranderen van een noot in een antimetrische figuur). Juist omdat we deze elementaire operaties zo efficiënt kunnen herkennen in onze formalisering, is het preferabel deze "moeilijkere" formalisering te verkiezen boven de intuïtieve. Met dit voorbeeld zien we ook duidelijk het nut en de kracht van het getal r in het getallenpaar (n, r): het zorgt ervoor dat we muzikale operaties in een oogopslag kunnen spotten.

	Formalisering zonder punt	*Enkele puntering*	*Dubbele puntering*
𝅜	(2, 1)	(2, 3/2)	(2, 7/4)
𝅝	(1, 1)	(1, 3/2)	(1, 7/4)
𝅗𝅥	(0, 1)	(0, 3/2)	(0, 7/4)
𝅘𝅥	(-1, 1)	(-1, 3/2)	(-1, 7/4)

Tabel 4.2: *Getallenpaar dat wordt gekoppeld aan enkel en dubbel gepunteerde noten bij de formalisering uit definitie 4.1.2.*

□

Voorbeeld 4.1.6 (r voor een andere verzameling noten die op dezelfde manier zijn opgebouwd)**.** We gaan een in dit voorbeeld een verzameling noten creëren door middel van verbinding. We gaan van deze verzameling noten laten zien dat ook zij dezelfde waarde van r krijgen in hun formalisering als ritmische noot (n, r). We construeren de groep noten als volgt: beschouw de rij noten in *figuur 4.2*. We maken een verzameling noten door een noot uit deze rij willekeurig te pakken, en te verbinden met de noot twee plekken naar rechts in de rij. *Figuur 4.4* geeft een tweetal voorbeelden van noten uit deze verzameling. Het is aan de lezer na te gaan dat deze nootvoorbeelden inderdaad in de beschreven verzameling zitten.

We weten hoe we basisnoten moeten formaliseren, en we weten dat $\oplus$ in *definitie 4.1.2* het verbinden van noten weergeeft, dus kunnen we nootvoorbeelden (1) en (2) in *figuur 4.4* gemakkelijk formaliseren naar een ritmische noot door een optelling te doen van twee basisnoten. Voor nootvoorbeeld (1) vinden we dat de ritmische noot gegeven is door

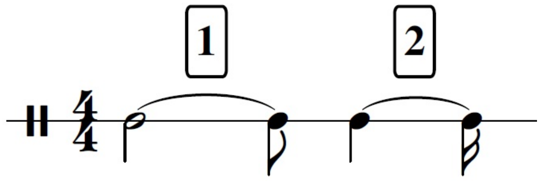
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/4 \end{pmatrix}.$$

Nootvoorbeeld (2) is gegeven door

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5/4 \end{pmatrix}.$$

We zien dus dat deze twee nootvoorbeelden uit een verzameling van noten, waar iedere noot op dezelfde manier is opgebouwd, dezelfde waarde r in hun ritmische noot (n, r) krijgen. Het is aan de lezer zich ervan te overtuigen dat alle noten uit de in dit voorbeeld beschreven verzameling $r = 5/4$ krijgen in hun formalisering.

□



Figuur 4.4: *Twee nootvoorbeelden uit de nieuw geconstrueerde verzameling noten uit voorbeeld 4.1.6*

We weten nu wat de r in een ritmische noot (n, r) inhoudt, en we weten wat de voordelen zijn. Ten slotte geven we weer waarom er moet gelden dat $1 \leq |r| < 2$. Hiertoe is het constructief om ons te herinneren:

- **Terugblik:** *Basisnoten liggen qua relatieve duur een macht van twee uit elkaar.*
- **Terugblik:** *Zij een nootvoorbeeld gegeven. De basisnoot die correspondeert met dit nootvoorbeeld benadert de duur van het nootvoorbeeld het best van onder.*

Stel nu dat het mogelijk zou zijn om een ritmische noot $(n, 2)$ te maken, dan zou dit betekenen dat we de relatieve duur van de basisnoot, die hoort bij deze ritmische noot, met 2 zouden moeten vermenigvuldigen om de échte relatieve duur van het nootvoorbeeld te krijgen. Echter, de relatieve duur van een basisnoot vermenigvuldigd met 2 is de relatieve duur van een nieuwe basisnoot! Dit zou betekenen dat de basisnoot die "correspondeert met de ritmische noot $(n, 2)$" niet de basisnoot is die de rimtische noot $(n, 2)$ qua relatieve duur van onder het best benadert. Als we het algoritme voor de bepaling van de basisnoot zouden loslaten op de noot $(n, 2)$, zou dit algoritme vastlopen in stap 6: de basisnoot die hoort bij dit nootvoorbeeld heeft helemaal geen nootnummer n. Een tegenspraak, dus is een ritmische noot $(n, 2)$ onmogelijk. De lezer wordt uitgenodigd eenzelfde redenering op te hangen en een tegenspraak te vinden voor ritmische noten $(0, 3/4)$ en $(0, 5/2)$.

- **Samenvatting:** *We hebben de rol van de duurfactor r in een ritmische noot* (n, r) *toegelicht. Dit is de factor waarmee je de duur van de basisnoot die hoort bij de ritmische noot moet vermenigvuldigen om de échte relatieve duur te krijgen. r geeft dus de factor aan waarmee de basisnoot verlengd/versierd is. Voordelen van deze formalisering zijn (1) dat verzamelingen gelijk opgebouwde noten dezelfde waarde van r krijgen en (2) dat er niet meerdere symbolen bestaan die hetzelfde muzikale idee weergeven. Er geldt* $1 \leq |r| < 2$*, aangezien er anders een tegenspraak is met het algoritme dat basisnoten bepaalt.*

✍ Wiskundig onderzoek: welke structuur hebben de ritmische noten?

Met *definitie 4.1.2* hebben we onze ritmische noten vastgelegd, we hebben daarnaast ook geleerd hoe we verschillende elementen uit deze definitie moeten interpreteren. Nu gaan we onderzoeken welke structuur deze definitie ons geeft. Om hier intuïtie voor te krijgen, doen we één observatie en herinneren we ons *lemma 4.1.1.*

- **Observatie:** *Ritmische noten zijn wiskundige objecten die we elkaar op kunnen tellen, maar niet met elkaar kunnen vermenigvuldigen; daar hebben we scalairen voor nodig.*
- **Terugblik:** *De scalairen komen uit een ring.*

De observatie zou ons doen vermoeden dat we met een soort vectorruimte te maken hebben, echter moeten de scalairen dan uit een lichaam komen. De scalairen komen uit een ring, dus hebben we waarschijnlijk te maken met een vectorruimte, waarin de scalairen niet altijd een multiplicatieve inverse hebben: een moduul. In de rest van deze sectie gaan we dit bewijzen. Als eerste moeten we ons zorgen gaan maken over de stilte. Dit element vormt overal in *definitie 4.1.2* de uitzondering en moest "los" gedefinieerd worden[9], dus willen we weten wanneer dit element precies verschijnt bij optelling, zodat we ons daar later in bewijzen minder zorgen over hoeven te maken.

Lemma 4.1.2. $\varrho = 0 \iff r = s = 0 \;\vee\; [r = -s \;\wedge\; n = m]\,.$

Bewijs. ($\Longrightarrow$) Neem zonder verlies van algemeenheid aan $n \geq m$, en stel verder dat geldt

$$\begin{aligned} r \cdot 2^n + s \cdot 2^m &= 0, \\ \Longrightarrow\; r \cdot 2^{n-m} + s &= 0. \end{aligned}$$

Stel nu dat geldt $n - m > 0$, en $r \neq 0$:

$$\Longrightarrow \quad |r \cdot 2^{n-m}| \geq 2.$$

Herinner nu volgens *definitie 4.1.2* dat $|s| < 2$:

$$\Longrightarrow\; r \cdot 2^{n-m} + s \neq 0. \;\lightning$$

Hieruit volgt nu dat $r = 0$ of $n = m$. Als $r = 0$ volgt

$$0 \cdot 2^{n-m} + s = 0 \quad\Longrightarrow\quad s = 0.$$

Ten slotte als $n = m$ volgt er

$$r \cdot 2^0 + s = 0 \quad\Longrightarrow\quad r = -s.$$

Q.E.D.

($\Longleftarrow$) Triviaal. Vul de eisen in (4.3) in en het resultaat volgt meteen.

Q.E.D.

Nu we weten wanneer de stilte na een optelling verschijnt, gaan we de eerste eigenschap bewijzen die N moet hebben, als hij een moduul wil zijn. Volgend lemma laat zien dat we na een optelling of vermenigvuldiging in onze verzameling N blijven, ofwel dat N gesloten is onder de gedefinieerde optelling $\oplus$ en vermenigvuldiging $\odot$.

Lemma 4.1.3. *Als $x = (n, r), y = (m, s) \in N$ en $c \in \mathbb{Z}_2$, dan volgt:*

I. $x \oplus y \in N$,

II. $c \odot x \in N$.

Bewijs. (I)
Neem twee noten $x, y \in N$ vrij, maar neem hierbij wel aan dat de conditie van *lemma 4.1.2* niet geldt. We weten dan in ieder geval dat $\varrho \neq 0$. Het optellen van x en y geeft dan:

$$x \oplus y = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} m \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor \\ \frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}} \end{pmatrix}.$$

Nu is het constructief op te merken dat altijd geldt $\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor \in \mathbb{Z}$, en dat altijd geldt

$$1 = \frac{|\varrho|}{|\varrho|} = \left| \frac{\varrho}{2^{\log_2 |\varrho|}} \right| \leq \left| \frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}} \right| < \left| \frac{\varrho}{2^{\log_2 |\varrho| - 1}} \right| = \left| \frac{\varrho}{\varrho/2} \right| = 2. \tag{4.5}$$

Er volgt hiermee dat $\frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}} \in (-2, -1] \cup [1, 2)$, waarmee volgt dat in deze situatie $\oplus$ goed gedefinieerd is. Voor de andere situaties verzekert *lemma 4.1.2* dat de operatie gesloten is. **Q.E.D.**

[9] Wij kozen voor $(0, 0)$ maar iedere representatie $(n, 0)$ had hiervoor gekozen kunnen worden. Men kan argumenteren dat de stilte eenzelfde soort probleemgeval is als de "oorsprong" voor het poolcoördinatensysteem: we kunnen de stilte zien als iedere met nul geschaalde noot net zoals we in poolcoördinaten de oorsprong kunnen zien als een punt met een willekeurige hoek, maar met straal nul.

(II)
Neem $c \in \mathbb{Z}_2$ vrij, aangenomen dat zij niet nul is, en neem een noot $x \in N$ vrij, aangenomen dat zijn iet de stilte is. Er volgt $c \cdot r \neq 0$ en dus dat

$$c \odot \binom{n}{r} = \binom{n + \lfloor \log_2 |c \cdot r| \rfloor}{\frac{c \cdot r}{2^{\lfloor \log_2 |c \cdot r| \rfloor}}}.$$

Met een analoge redenering als bij het geval ($\oplus$) volgt weer dat $n + \lfloor \log_2 |c \cdot r| \rfloor \in \mathbb{Z}$, en dat $\frac{c \cdot r}{2^{\lfloor \log_2 |c \cdot r| \rfloor}} \in (-2, -1] \cup [1, 2)$. Ergo, voor dit geval is het goed gedefinieerd. Als $c \cdot r = 0$, zullen we ook altijd een element van N na vermenigvuldiging krijgen, namelijk de stilte. Hiermee hebben we laten zien dat ($\odot$) ook een gesloten operatie is.

Q.E.D.

Met *lemma 4.1.3* kunnen we het beoogde doel van deze sectie waarmaken: bewijzen dat ritmische noten een moduul over $\mathbb{Z}_2$ vormen.

Stelling 4.1.4. *De structuur $[N, \oplus, \odot]$ is een moduul over $\mathbb{Z}_2$.*

Bewijs. We weten uit *lemma 4.1.3* al dat de operaties goed gedefinieerd zijn. We hoeven nu alleen de axioma's van een moduul nog maar af te lopen. [7] Voor alle axioma's doen we nog even de triviale observatie dat $c \cdot r = 0 \iff c = 0 \ \vee \ r = 0$. We geven deze observatie aan met (†).

I. $(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$.

Zij $x = (n, r) \in N$ en $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$. Voor deze axioma merken we allereerst op dat *definitie 4.1.2*, *lemma 4.1.2* en (†) samen impliceren dat aan eis (I) voldaan is als x de stilte is, en als $\alpha = 0 \ \vee \ \beta = 0$. We dienen het nu nog aan te tonen in de niet triviale gevallen, dus zij x ongelijk de stilte en $\alpha, \beta \neq 0$. Er volgt

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \odot x &= (\alpha + \beta) \odot \binom{n}{r}, \\ &= \binom{n + \lfloor \log_2 |(\alpha + \beta) \cdot r| \rfloor}{\frac{(\alpha+\beta) \cdot r}{2^{\lfloor \log_2 |(\alpha+\beta) \cdot r| \rfloor}}}.\end{aligned}$$

Voor de andere expressie volgt het volgende:

$$(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = \binom{n + \lfloor \log_2 |\alpha \cdot r| \rfloor}{\frac{\alpha r}{2^{\lfloor \log_2 |\alpha r| \rfloor}}} \oplus \binom{n + \lfloor \log_2 |\beta \cdot r| \rfloor}{\frac{\beta r}{2^{\lfloor \log_2 |\beta r| \rfloor}}}.$$

Wanneer we vervolgens de optelling uitvoeren, volgt er voor ϱ:

$$\varrho = \frac{\alpha r}{2^{\lfloor \log_2 |\alpha r| \rfloor}} \cdot 2^{n + \lfloor \log_2 |\alpha \cdot r| \rfloor} + \frac{\beta r}{2^{\lfloor \log_2 |\beta r| \rfloor}} \cdot 2^{n + \lfloor \log_2 |\beta \cdot r| \rfloor} = (\alpha r + \beta r) \cdot 2^n.$$

Wanneer we hierbij opmerken dat $\lfloor \log_2 |(\alpha r + \beta r) \cdot 2^n| \rfloor = n + \lfloor \log_2 |\alpha r + \beta r| \rfloor$, volgt er ten slotte

$$\begin{aligned}\binom{n + \lfloor \log_2 |\alpha \cdot r| \rfloor}{\frac{\alpha r}{2^{\lfloor \log_2 |\alpha r| \rfloor}}} \oplus \binom{n + \lfloor \log_2 |\beta \cdot r| \rfloor}{\frac{\beta r}{2^{\lfloor \log_2 |\beta r| \rfloor}}} &= \binom{\lfloor \log_2 |(\alpha r + \beta r) \cdot 2^n| \rfloor}{\frac{(\alpha+\beta) r \cdot 2^n}{2^{\lfloor \log_2 |(\alpha+\beta) r \cdot 2^n| \rfloor}}}, \\ &= \binom{n + \lfloor \log_2 |(\alpha + \beta) \cdot r| \rfloor}{\frac{(\alpha+\beta) \cdot r}{2^{\lfloor \log_2 |(\alpha+\beta) \cdot r| \rfloor}}}.\end{aligned}$$

Dus we zien dat conditie (I) geldt.

II. $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$

$x = (n, r), y = (m, s) \in N$ en $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. Weer merken we allereerst op dat *definitie 4.1.2*, *lemma 4.1.2* en (†) samen impliceren dat aan eis (II) voldaan is als x of y de stilte is, en als $\alpha = 0$. Voor de rest merken we allereerst op dat

$$\begin{aligned}\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot \left(\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ s \end{pmatrix} \right) &= \alpha \odot \begin{pmatrix} \lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor \\ \frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor + \lfloor \log_2 \left|\alpha \cdot \frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}} \right| \rfloor \\ \frac{\alpha \cdot \frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}}}{2^{\left\lfloor \log_2 \left| \alpha \cdot \frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}} \right| \right\rfloor}} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \lfloor \log_2 |\alpha \cdot \varrho| \rfloor \\ \frac{\alpha \cdot \varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\alpha \cdot \varrho| \rfloor}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Hierbij is ϱ hetzelfde als in (4.3). Anderzijds vinden we

$$(\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y) = \begin{pmatrix} n + \lfloor \log_2 |\alpha \cdot r| \rfloor \\ \frac{\alpha \cdot r}{2^{\lfloor \log_2 |\alpha \cdot r| \rfloor}} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} m + \lfloor \log_2 |\alpha \cdot s| \rfloor \\ \frac{\alpha \cdot s}{2^{\lfloor \log_2 |\alpha \cdot s| \rfloor}} \end{pmatrix}.$$

Voor deze optelling geldt nu

$$\tilde{\varrho} = \frac{\alpha \cdot s}{2^{\lfloor \log_2 |\alpha \cdot s| \rfloor}} \cdot 2^{m + \lfloor \log_2 |\alpha \cdot s| \rfloor} + \frac{\alpha \cdot r}{2^{\lfloor \log_2 |\alpha \cdot r| \rfloor}} \cdot 2^{n + \lfloor \log_2 |\alpha \cdot r| \rfloor} = \alpha \cdot (s \cdot 2^m + r \cdot 2^n) = \alpha \cdot \varrho.$$

Het feit dat (II) geldt volgt na deze opmerking direct door de definitie toe te passen en dit in te vullen.

III. $(\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$.

Zij $x = (n, r) \in N$ en $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$. De triviale gevallen weer negerend zien we allereerst dat

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot \beta) \odot x = (\alpha \cdot \beta) \odot x = (\alpha \cdot \beta) \odot \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}&, \\ = \begin{pmatrix} n + \lfloor \log_2 |(\alpha \cdot \beta) \cdot r| \rfloor \\ \frac{(\alpha \cdot \beta) \cdot r}{2^{\lfloor \log_2 |(\alpha \cdot \beta) \cdot r| \rfloor}} \end{pmatrix}&.\end{aligned}$$

Vervolgens geldt ook dat

$$\begin{aligned}\alpha \odot (\beta \odot x) &= \alpha \odot \begin{pmatrix} n + \lfloor \log_2 |\beta \cdot r| \rfloor \\ \frac{\beta r}{2^{\lfloor \log_2 |\beta r| \rfloor}} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} n + \lfloor \log_2 |\beta \cdot r| \rfloor + \lfloor \log_2 \left|\alpha \cdot \frac{\beta r}{2^{\lfloor \log_2 |\beta r| \rfloor}} \right| \rfloor \\ \frac{\alpha \beta r}{2^{\lfloor \log_2 |\beta r| \rfloor} \cdot 2^{\left\lfloor \log_2 \left| \alpha \frac{\beta r}{2^{\lfloor \log_2 \| \beta r| \rfloor}} \right| \right\rfloor}} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} n + \lfloor \log_2 |(\alpha \cdot \beta) \cdot r| \rfloor \\ \frac{(\alpha \cdot \beta) \cdot r}{2^{\lfloor \log_2 |(\alpha \cdot \beta) \cdot r| \rfloor}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Hieruit volgt dan dat ook aan dit axioma is voldaan.

IV. $1 \odot x = x$.

Zij $x = (n, r) \in N$. Triviale gevallen weer uitgesloten, vinden we met een directe berekening

$$1 \odot x = 1 \odot \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n + \lfloor \log_2 |r| \rfloor \\ \frac{r}{2^{\lfloor \log_2 |r| \rfloor}} \end{pmatrix}.$$

Nu merken we op dat volgens *definitie 4.1.2* er geldt dat $1 \leq |r| < 2$, en dus $\lfloor \log_2 |r| \rfloor = 0$. Waardoor volgt:

$$1 \odot x = \begin{pmatrix} n + 0 \\ \frac{r}{2^0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = x.$$

En hiermee is aan dit axioma ook voldaan.

V. $[N, \oplus]$ is een Abelse groep.

Het moge duidelijk zijn dat $\binom{0}{0}$ het neutrale element van deze groep vormt, en dat $\binom{n}{-r}$ de additieve inverse vormt van $\binom{n}{r}$, volgens *definitie 4.1.2* volgt. De commutativiteit van $\oplus$ volgt daarna uit de commutativiteit van $\cdot$ en $+$ bij de gewone getallen. Alleen rest on nu nog de associativiteit aan te tonen ten aanzien van $\oplus$. Merk op:

$$\left(\binom{n}{r} \oplus \binom{m}{s}\right) \oplus \binom{p}{q} = \binom{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}{\frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}}} \oplus \binom{p}{q}.$$

Hierbij geldt dat ϱ weer is gegeven als (4.3) volgens *definitie 4.1.2.* Voor de volgende optelling merken we op dat hierbij door de associativiteit van de gebruikelijke optelling de factor ϱ_0 wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
\varrho_0 &= \frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}} \cdot 2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor} + q \cdot 2^p, \\
&= \varrho + q \cdot 2^p, \\
&= (r \cdot 2^n + s \cdot 2^m) + q \cdot 2^p, \\
&= r \cdot 2^n + (s \cdot 2^m + q \cdot 2^p).
\end{aligned}$$

Wanneer we nu definiëren $\varrho_1 = s \cdot 2^m + q \cdot 2^p$, kunnen we ϱ_0 verder herschrijven tot

$$\varrho_0 = r \cdot 2^n + \frac{\varrho_1}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho_1| \rfloor}} \cdot 2^{\lfloor \log_2 |\varrho_1| \rfloor}$$

Met deze nieuwe herschrijving kunnen we, zonder de laatste oplossing expliciet uit te rekenen, argumenteren dat geldt

$$\binom{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}{\frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}}} \oplus \binom{p}{q} = \binom{n}{r} \oplus \binom{\lfloor \log_2 |\varrho_1| \rfloor}{\frac{\varrho_1}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho_1| \rfloor}}} = \binom{n}{r} \oplus \left(\binom{m}{s} \oplus \binom{p}{q}\right).$$

Hiermee hebben we laten zien dat de operatie $\oplus$ inderdaad associatief is, en dus dat we te maken hebben met een Abelse groep.

Axioma's (I) tot en met (V) samen laten zien dat we inderdaad te maken hebben met een moduul over $\mathbb{Z}_2$.

Q.E.D.

Opmerking. Het moet opgemerkt worden dat in het bewijs wat subtiliteiten zijn genegeerd met betrekking tot de stilte. Het is aan de lezer om de axioma's met betrekking tot de stilte na te gaan; *lemma 4.1.2* kan bij deze controle helpen.

- ▶ **Terminologie:** *Vanaf nu zullen we de optelling en vermenigvuldiging in ons moduul niet meer met $\oplus$ en $\odot$ aangeven, maar simpelweg met $+$ en $\cdot$.*
- ▶ **Samenvatting:** *We hebben laten zien dat ritmische noten een moduul over $\mathbb{Z}_2$ vormen.*

✍ Wiskundig onderzoek: eigenschappen van ritmische noten

We kennen de structuur van ritmische noten. Als afsluiter van deze paragraaf willen we te weten komen of er muzikale eigenschappen in deze structuur verborgen zitten. We geven eerst een voorbeeld waar we de muzikale eigenschappen introduceren, dan presenteren we de muzikale eigenschappen in hun algemeenheid, ten slotte bewijzen we de eigenschappen voor ritmische noten.

Voorbeeld 4.1.7 (Drie muzikale eigenschappen)**.** Dit voorbeeld heeft betrekking op *figuur 4.5* en dient ertoe drie muzikale eigenschappen toe te lichten die ook in ritmische noten zitten. Herinner dat we twee nootvoorbeelden hetzelfde of equivalent noemden als ze dezelfde relatieve duur hebben onder een maatsoort. We kiezen voor dit voorbeeld de 4/4-maat.

1. Twee verbonden kwartnoten

Met op dat iedere kwartnoot 1 tel duurt. Als we twee kwartnoten met elkaar verbinden (1a), krijgen we dus een nootvoorbeeld dat 2 tellen duurt. Merk op dat de halve noot ook 2 tellen duurt. Twee verbonden kwartnoten zijn dus equivalent aan een halve noot (1b). Merk op dat het nootnummer van de kwartnoot -1 is, merk op dat dit voor de halve noot 0 is. Het verbinden van twee basisnoten met een vast nootnummer creëert dus een nieuwe basisnoot, waarvan het nootnummer één hoger is.

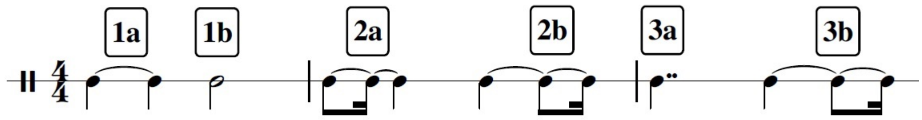
2. Een verbinding van drie noten

In (2a) zien we een verbinding van een achtste noot, dan een zestiende noot en ten slotte een kwartnoot. De relatieve duur hiervan is $1/2 + 1/4 + 1 = 7/4$ tel. In (2b) zien we een verbinding van een kwartnoot, dan een achtste noot en dan een zestiende noot. De relatieve duur hiervan is $1 + 1/2 + 1/4 = 7/4$ tel. Beide nootvoorbeelden zijn dus equivalent. Door de commutativiteit van de optelling zien we dat de verbindingsvolgorde niet uitmaakt in nootvoorbeelden.

3. Dubbele puntering

In (3a) zien we een dubbel gepunteerde kwartnoot. Dit betekent dat we voor de relatieve duur de duur van de kwartnoot pakken (1 tel), hierbij voor de eerste punt de helft van de duur optellen (1/2 tel), en ten slotte voor de tweede punt nog eens extra de helft van de duur erbij optellen (1/4 tel). Samen geeft dit dat (3a) 7/4 tel duurt. (3b) is hetzelfde als (2b) en duurt dus ook 7/4 tel. Merk op dat (3b) een verbinding is van drie noten, waarvan het nootnummer steeds met één afloopt. Een 2-puntering[10] is dus hetzelfde als een verbinding van 1 + 2 basisnoten, waarvan het nootnummer steeds met één afloopt.

□



Figuur 4.5: *Drie voorbeelden van muzikale eigenschappen. De nootvoorbeelden (a) en (b) met hetzelfde nummer zijn herschrijvingen van hetzelfde muzikale idee.*

- ▶ **Observatie:** *Het verbinden van twee dezelfde basisnoten geeft een nootvoorbeeld dat herschreven kan worden als één basisnoot, waarvan het nootnummer één hoger is.*
- ▶ **Observatie:** *Als we meerdere noten met elkaar verbinden, dan maakt de volgorde van verbinding niet uit.*
- ▶ **Observatie:** *Als we $m+1$ basisnoten met elkaar verbinden, waarvan het nootnummer steeds met één afloopt per verbinding, dan is dit hetzelfde als m punten achter de eerste, langst durende, basisnoot zetten.*

Lemma 4.1.5 (Muzikale eigenschappen in ritmische noten)**.** *Hieronder een aantal eigenschappen van de zojuist gedefinieerde ritmische noten en de daarop gedefinieerde operaties.*

1. $\forall_{1\leq|r|<2} : r \cdot \binom{n}{1} = \binom{n}{r}$, *met* $r \in \mathbb{Z}_2$,

[10] Een puntering van twee punten; dubbele puntering

2. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$,

3. $\sum_{i=1}^{n} \binom{p_i}{q_i} = \binom{\lfloor \log_2(\varrho) \rfloor}{\frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2(\varrho) \rfloor}}}$, *waarbij geldt* $\varrho = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot 2^{p_i}$,

4. *Zij* $n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots,\ n-m$ *een aflopende rij nootnummers, dan geldt* $\binom{n}{1} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-m}{1} = \binom{n}{2-(\frac{1}{2})^m} = \binom{n+1}{1} - \binom{n-m}{1}$.

Opmerking. De eerste eigenschap is geen muzikale eigenschap, maar een fijne rekenregel voor ritmische noten.

Bewijs. **(1)**
Via een directe berekening vinden we, wanneer we een r willekeurig kiezen waarvoor geldt $1 \leq |r| < 2$, dat

$$r \cdot \binom{n}{1} = \binom{n + \lfloor \log_2(r \cdot 1) \rfloor}{\frac{r \cdot 1}{2^{\lfloor \log_2(r \cdot 1) \rfloor}}} = \binom{n}{r}.$$

(2)
Via een directe berekening vinden we door op te merken dat per definitie $\lfloor \log_2(r) \rfloor = 0$ dat

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r} = \binom{\lfloor \log_2(2r \cdot 2^n) \rfloor}{\frac{2r \cdot 2^n}{2^{\lfloor \log_2(2r \cdot 2^n) \rfloor}}} = \binom{n + 1 + \lfloor \log_2(r) \rfloor}{\frac{r \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1+\lfloor \log_2(r) \rfloor}}} = \binom{n+1}{r}.$$

(3)
We bewijzen deze bewering met inductie. We hoeven hierin alleen de inductiestap te bewijzen, aangezien voor de 2-voudige som in de inductiebasis de bewering al per definitie waar is. Voor de inductiestap stellen we dat de $(n-1)$-voudige som te bepalen is als in de bewering en tellen we hier een n-de noot bij op. We voeren dus de volgende optelling uit:

$$\binom{\lfloor \log_2(\varrho_1) \rfloor}{\frac{\varrho_1}{2^{\lfloor \log_2(\varrho_1) \rfloor}}} + \binom{p_n}{q_n}.$$

Voor deze optelling geldt $\varrho_1 = \sum_{i=1}^{n-1} q_i \cdot 2^{p_i}$. Wanneer we de laatste optelling doen, geldt volgens de definitie dat de resulterende som gelijk is aan

$$\binom{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}{\frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}}},$$

waarbij geldt

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{\varrho_1}{2^{\lfloor \log_2(\varrho_1) \rfloor}} \cdot 2^{\lfloor \log_2(\varrho_1) \rfloor} + q_n \cdot 2^{p_n}, \\ &= \varrho_1 + q_n \cdot 2^{p_n}, \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} q_i \cdot 2^{p_i} + q_n \cdot 2^{p_n} = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot 2^{p_i}. \end{aligned}$$

Dit bewijst dat de eigenschap geldt.

(4)
Om dit te bewijzen passen we eerst eigenschap (3) toe om voor de som een ϱ te vinden van

$$\varrho = \sum_{i=0}^{m} 2^{n-i} = 2^n \cdot \sum_{i=0}^{m} 2^{-i} = \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right) \cdot 2^n.$$

Vervolgens merken we op dat

$$\lfloor \log_2(\varrho) \rfloor = \left\lfloor \log_2(2^n) + \log_2\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right)\right\rfloor = \left\lfloor n + \log_2\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right)\right\rfloor = n + \left\lfloor \log_2\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right)\right\rfloor.$$

Dan is het constructief in te zien dat

$$\forall_{m \in \mathbb{N}} : 1 \leq 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^m < 2.$$

Hierdoor volgt

$$n + \left\lfloor \log_2\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right)\right\rfloor = n.$$

Waardoor we ten slotte voor de optelling vinden dat deze gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} n \\ 2 - (\frac{1}{2})^m \end{pmatrix},$$

en hiermee ook deze laatste gewenste eigenschap bewezen is.

Q.E.D.

▶ **Samenvatting:** *Ritmische noten bezitten een aantal belangrijke muzikale eigenschappen.*

4.2 Hoe leest een muzikant "gewone" ritmes?

♫ De connectie tussen ritmische noten en nootcategorieën

We hebben nu ritmische noten, maar het instructief weer te herinneren waar we mee bezig zijn. We zijn noten aan het formaliseren als getallen, opdat een computer er beter mee om kan gaan. We hadden voor deze doeleinden noten opgesplitst in vier categorieën, en vervolgens een ritmische noot- en operatordefinitie gemaakt op basis van categorie I en II. Categorie II is een verruiming van categorie I door verbinding en puntering toe te staan op basisnoten.

Als we nu naar *definitie 4.1.2* kijken, zien we dat we in deze definitie nog veel meer ritmische noten gevangen hebben dan de "vertalingen" van categorie II noten. Er geldt dat $r \in \mathbb{R}$, terwijl we voor categorie II noten misschien zouden verwachten dat $r \in \mathbb{Z}_2$.[11] De verzameling ritmische noten is zo ruim gemaakt, omdat we nu nog niet echt over categorie III en IV noten hebben nagedacht, en dus nog niet weten hoe deze eruit zien. We willen deze categorieën echter wel alvast vangen in de definitie van ritmische noten.

Hoewel we dus nog niet echt nagedacht hebben over categorie III en IV noten, is het wel belangrijk het belang van categorie I en II noten in de praktijk te benadrukken. Kijk nog eens naar *bijlage B*. Bijna alle noten die we in de partituur in deze bijlage zien staan, vallen in categorie I of II. Alleen de drie triolen in de partituur vallen in categorie III en categorie IV is helemaal niet aanwezig. Het is dus belangrijk om te weten hoe categorie I en II noten er als ritmische noten uitzien, opdat een computer weet welke noten het "meest logisch" zijn om als eerste te bekijken in een analyse van een muziekstuk. De rest van deze paragraaf staat in het teken van het definiëren van de verzamelingen categorie I en II noten, en het onderzoeken hoe we de structuur van deze verzamelingen moeten interpreteren.

▶ **Samenvatting:** *We hebben het belang van categorie I en II noten aangegeven, en aangekondigd dat we de rest van deze paragraaf gaan weiden aan het onderzoeken van dit soort noten, aangezien deze muzikaal het meest voorkomen.*

[11] Deze verwachting blijkt te kloppen; zie *stelling 4.2.4*.

✍ Het definiëren van categorie I en II ritmische noten

We zijn er in *voorbeeld 4.1.6* onderdeel 1 al achter gekomen hoe basisnoten als ritmische noot geformaliseerd worden. De basisnoten vormen alle categorie I noten, dus rest het ons nu alleen nog de verzameling categorie I ritmische noten (N_b) formeel te definiëren aan de hand van de les die we in *voorbeeld 4.1.6* geleerd hebben.

- **Terugblik:** *Basisnoten krijgen als nootnummer simpelweg het nootnummer dat via definitie 4.1.1 aan hun toegekend wordt. Voor alle basisnoten geldt* $|r| = 1$.

Definitie 4.2.1 (Categorie I ritmische noten: basisnoten)**.** De verzameling basisnoten N_b is gegeven door

$$N_b := \left\{ \begin{pmatrix} n \\ \pm 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Vanuit basisnoten kunnen we gaan nadenken over puntering. Herinner je dat een puntering gezien kon worden als de vermenigvuldiging van een basisnoot met een getal. De vraag die echter nog steeds onbeantwoord is gebleven: welk getal? Om hierachter te komen gaan we in *voorbeeld 4.2.1* een aantal punteringen uitvoeren op de hele noot (als ritmische noot) met de regels van puntering, zoals aangeleerd in *paragraaf 2.2* voor muzikale noten. We hopen hiermee een regelmaat te vinden in de vermenigvuldigingsfactoren voor puntering, opdat we ze goed wiskundig kunnen definiëren.[12] Daarna gaan we gepunteerde noten formeel definiëren als uitbreiding op de basisnoten.

Voorbeeld 4.2.1 (Recursiviteit in puntering)**.** We beschouwen de hele noot (𝅝), als ritmische noot wordt hij weergegeven als $(0, 1)$. Wanneer we deze niet punteren, moge het duidelijk zijn dat $(0, 1) = 1 \cdot (0, 1)$ (𝅝 = 1· 𝅝), Wanneer we deze eenmaal punteren, weten we dat we de helft van de hele noot moeten pakken (halve noot) en deze moeten optellen bij de originele duur. Ergo, $(0, 3/2) = (0, 1) + (-1, 1) = 3/2 \cdot (0, 1)$ (𝅝. = 𝅝 + 𝅗𝅥 = 3/2· 𝅝). Als we nu de hele noot dubbel punteren (twee punten), kijken we weer naar de originele duur van de hele noot, nemen we daar één extra keer de helft ten opzichte van de enkele puntering (twee keer de helft; een kwart), en voegen dit (de kwartnoot) toe aan de duur van de vorige (enkel gepunteerde) hele noot. Ergo, $(0, 7/4) = (0, 1) + (-1, 1) + (-2, 1) = 7/4 \cdot (0, 1)$, (𝅝.. = 𝅝 + 𝅗𝅥 + ♩ = 7/4· 𝅝).

Nu kennen we het liedje wel een beetje: bij een drie dubbele puntering, kijken we weer naar de originele duur van de hele noot, nemen daar weer één keer extra de helft van ten opzichte van de dubbele puntering (drie keer de helft; een achtste), en voegen dit (de achtste noot) toe aan de vorige (dubbel gepunteerde) hele noot. Ergo, $(0, 15/8) = (0, 1) + (-1, 1) + (-2, 1) + (-3, 1) = 15/8 \cdot (0, 1)$, (𝅝... = 𝅝 + 𝅗𝅥 + ♩ + ♪ = 15/8· 𝅝).

Nu valt misschien bij de verschillende voorbeelden van meervoudige puntering iets interessants op: er lijkt een recursie in te zitten. Als we kijken naar het rijtje vermenigvuldigingsfactoren, krijgen we het volgende rijtje getallen $\{1,\ 3/2,\ 7/4,\ 15/8,\ ...\}$. Hierin zit een recursieve formule verborgen, namelijk $p_i = p_{i-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^i$, waar $p_0 = 1$. De opvallende recursie gaan we gebruiken om algemene punteringen te definiëren.

□

- **Observatie:** *In voorbeeld 4.2.1 is gebruik gemaakt van lemma 4.1.5.*
- **Observatie:** *In voorbeeld 4.2.1 komt de vermenigvuldigingsfactor van enkele puntering gelukkig overeen met de factor die we hebben zien optreden in voorbeeld 4.1.6.*

[12]Spoiler: We gaan een recursie ontdekken

Definitie 4.2.2 (Puntering als uitbreiding op N_b)**.** De unaire operatie $\bullet_i : N_b \to N$ voor $i \in \mathbb{N}$ heet een i-puntering[13]. Voor deze functie geldt, gegeven een $x \in N_b$ dat

$$\bullet_i(x) = p_i \cdot x,$$

waarbij de vermenigvuldigingsfactor p_i gegeven is door de recursieve betrekking

$$p_i = p_{i-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^i, \quad p_0 = 1.$$

De rij $\{\bullet_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ vormt de familie punteringsoperaties.

□

In *voorbeeld 4.2.1* maakten we duidelijk waarom bovenstaande definitie overeenstemt met de muziekleer, echter is de gegeven recursieve betrekking in de praktijk niet heel handig; we willen eigenlijk een directe formule gebruiken. De directe formule voor de recursieve betrekking in *definitie 4.2.2* wordt daarom door het volgende lemma gegeven.

Lemma 4.2.1. *De directe formule van de recursieve betrekking voor p_i is gegeven door*

$$p_i = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

Bewijs. We passen volledige inductie toe om de bewering te bewijzen. In de inductiebasis dienen we te bewijzen dat in onze directe formule inderdaad geldt dat $p_0 = 1$. Een directe berekening laat zien

$$p_0 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2 - 1 = 1.$$

We zien dus dat de inductiebasis klopt. Vervolgens nemen we in de inductiestap aan dat de inductiehypothese geldt voor een gegeven $i \in \mathbb{N}$. We laten door gebruikt te maken van de recursieve betrekking uit *definitie 4.2.2* zien dat dan volgt dat de inductiehypothese ook geldt voor $i + 1$. Met een directe berekening zien we dat

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i + \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}, \\ &\overset{\star}{=} 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}, \\ &= 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}, \\ &= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}. \end{aligned}$$

Bij ($\star$) hebben we de inductiehypothese gebruikt. We zien dus dat de inductiestap ook klopt, en dus dat de bewering juist is.

Q.E.D.

► **Observatie:** *Lemma 4.2.1 legt samen met lemma 4.1.5 (eigenschap 3) vast dat voor ritmische noten hetzelfde verband tussen punteren en verbinden bestaat als voor noten in de muziek.*

[13] i punten achter de noot zetten

Nu we een definitie hebben van puntering, en we weten wat basisnoten precies zijn, kunnen we ritmische noten van categorie II gaan definiëren. Herinner dat categorie II noten verbindingen zijn van basisnoten en gepunteerde (basis)noten. Herinner vervolgens dat voor ritmische noten verbinden als optellen opgevat moest worden. We kunnen dus verzameling categorie II ritmische noten ($N_{(2)}$) formaliseren als (eindige) sommen van (gepunteerde) basisnoten.

Definitie 4.2.3 (Categorie II rimtische noten: veelvoorkomende muzikale figuren)**.** We geven de verzameling categorie II ritmische noten aan met $N_{(2)}$. Deze verzameling is gedefinieerd door

$$N_{(2)} := \left\{ x \in N_b \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{m} \bullet_{n_i}(x_i), \;\; n_i \in \mathbb{N},\; x_i \in N_b \right\}.$$

□

Opmerking. Merk in het vervolg van deze paragraaf op dat de definitie van $N_{(2)}$ in essentie impliceert dat we voor het tweede getal in het getallenpaar (n, r) alleen elementen uit $\mathbb{Z}_2$ toestaan. We zouden dus kunnen stellen dat $N_{(2)}$ een soort lokalisatie van N te 2 is. Vandaar hebben we voor de suggestieve notatie $N_{(2)}$ gekozen. Een meer muzikale behandeling van deze verzameling is in *appendix A* te vinden.

- ▶ **Samenvatting:** *We hebben drie verzamelingen met speciale ritmische noten gedefinieerd: de categorie I noten (basisnoten), de gepunteerde noten, en de categorie II noten.*

✍ De structuur van $N_{(2)}$

We hebben nu een definitie van de verzameling categorie II noten. Dit zijn de noten waar onze muzikale computer straks het meest mee te maken krijgt. We kunnen in een computer natuurlijk heel de verzameling $N_{(2)}$ inbouwen, maar het zou makkelijker zijn als we met de plus- en keer-operatie (die we toch al moeten inbouwen) op een bepaalde manier $N_{(2)}$ zouden kunnen genereren, dan kan de computer het werk verder zelf doen. We herinneren ons het volgende:

- ▶ **Terugblik:** *Ritmische noten uit categorie II zijn de schrijven als som van (gepunteerde) basisnoten.*
- ▶ **Terugblik:** *Punteren is een bijzondere vorm van optellen.*

Met deze twee herinneringen kunnen we inzien dat het genereren van uit $N_{(2)}$ mogelijk is. We kunnen iedere noot uit $N_{(2)}$ schrijven als som basisnoten. $N_{(2)}$ dan dus voortgebracht worden door één enkele basisnoot. Dit gaan we als afsluiter van deze paragraaf bewijzen.

Het bewijs is straks berust op het feit dat we iedere $x \in N_{(2)}$ kunnen schrijven als lineaire combinatie van elementen uit N_b, en dat ieder element uit N_b gemakkelijk geschreven kan worden als product van een getal uit $\mathbb{Z}_2$ en een ander element uit N_b. Om het bewijs rond te krijgen, moeten we dus eerst bewijzen dat iedere gepunteerde noot geschreven kan worden als lineaire combinatie van elementen uit N_b (wat we stiekem al weten dat kan), en vervolgens dat ieder element uit N_b geschreven kan worden als ieder ander element uit N_b, vermenigvuldigd met een getal uit onze ring $\mathbb{Z}_2$ (wat we stiekem ook al weten). Deze twee beweringen worden hard gemaakt in de volgende twee lemma's, waarna we de stelling waar we naar uit zijn zullen bewijzen.

Lemma 4.2.2. *Iedere i-gepunteerde noot is te schrijven als som van elementen uit N_b.*

Bewijs. Zij $i \in \mathbb{N}$ en $x = \binom{n}{1} \in N_b$ willekeurig. Er geldt

$$\bullet_i(x) = \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^i\right) \cdot \binom{n}{1} = \binom{n}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^i}.$$

Bij het tweede is-teken is eigenschap (2) uit *lemma 4.1.5* gebruikt. Eigenschap (4) uit *lemma 4.1.5* bewijst vervolgens de bewering.

Q.E.D.

Lemma 4.2.3. $\forall_{x,y \backslash \{0\} \in N_b} \exists_{\alpha \in \mathbb{Z}_2} : x = \alpha y.$, *ofwel iedere basis noot te herschrijven als iedere andere basisnoot (die niet de stilte is) op een constante scalarvermenigvuldiging na.*

Bewijs. Zij $x = \binom{n}{1} \in N_b$ en $y = \binom{m}{1} \in N_b$ willekeurig. Neem nu $\alpha = 2^{n-m}$ en er volgt direct

$$2^{n-m} \cdot \binom{m}{1} = \binom{m + \lfloor \log_2 |2^{n-m}| \rfloor}{\frac{2^{n-m}}{2^{\lfloor \log_2 |2^{n-m}| \rfloor}}} = \binom{m+n-m}{\frac{2^{n-m}}{2^{n-m}}} = \binom{n}{1}.$$

Als x de stilte is, neemt men $\alpha = 0$ en vanwege *stelling 4.1.4* volgt de bewering.

Q.E.D.

Stelling 4.2.4. *Zij $n \in \mathbb{Z}$ willekeurig gegeven. Er geldt $N_{(2)} = \left\langle \binom{n}{1} \right\rangle_{\mathbb{Z}_2}$. Ergo, $N_{(2)}$ is gelijk aan het moduul over $\mathbb{Z}_2$ voortgebracht door een willekeurig element uit $N_b \backslash \{0\}$.*

Bewijs. ($\subseteq$)
Neem $x \in N_{(2)}$ willekeurig. We willen laten zien dat $x = \alpha \cdot \binom{n}{1} = \alpha y$, waarbij $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. Volgens *definitie 4.2.3* kunnen we in ieder geval x schrijven als

$$x = \sum_{i=1}^{m} \bullet_{k_i}(x_i),$$

waarbij $x_i \in N_b$. *Lemma 4.2.2* vertelt ons vervolgens dat we dit kunnen herschrijven als

$$x = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij}.$$

Om de binnenste som vervolgens onafhankelijk van i te maken, definiëren we $k = \max_i \{k_i\}$ en merken we op dat we de som altijd kunnen uitbreiden door er een aantal keer de stilte bij op te tellen zonder hierbij iets te veranderen (*stelling 4.1.4*). De som vereenvoudigt hierdoor tot

$$x = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} x_{ij},$$

waarbij geldt $x_{ij} \in N_b$. Wanneer we nu *lemma 4.2.3* toepassen, kunnen we deze expressie weer herschrijven tot

$$x = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} \cdot y,$$

waarbij $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_2$. Uit *lemma 4.1.1* volgt nu dat $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_2$, en deze inclusie is hiermee bewezen.

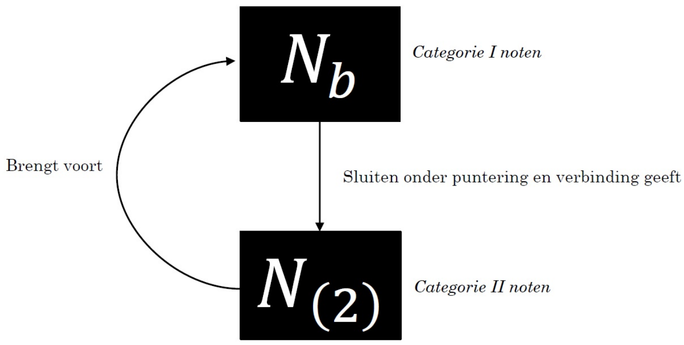
($\supseteq$)
Zij $\alpha = m \cdot 2^{-k}$ willekeurig gegeven, waarbij conform de definitie van $\mathbb{Z}_2$ geldt $m \in \mathbb{Z}$ en $k \in \mathbb{N}$. Een directe berekening geeft ons vervolgens

$$\alpha \cdot y = \alpha \cdot \binom{n}{1} = |m| \cdot \binom{n-k}{\operatorname{sgn}(m)} = \sum_{i=1}^{|m|} \binom{n-k}{\operatorname{sgn}(m)}.$$

Een lege som zou ons hier de stilte opleveren. Volgens *definitie 4.2.3* betekent dit dat $\alpha \cdot y \in N_{(2)}$. Dit bewijst tenslotte onze bewering.

Q.E.D.

We zien nu dat de verzameling waar muzikale passages zich het allermeest of focussen $N_{(2)}$ niets anders is dan het kleinste moduul voortgebracht door één van de noten uit N_b; de computer kan (als het basisnoten kent) gemakkelijk zelf categorie II ritmische noten produceren. We hebben in feite in deze paragraaf de structuur van muziek een beetje beter leren kennen. Schematisch is de structuur die we hebben gevonden weergegeven in *figuur 4.6*.



Figuur 4.6: *De structuur van muzikale noten, zoals we deze gevonden hebben in dit hoofdstuk*

Een gevolg van deze stelling, wat we in het volgende hoofdstuk zullen bewijzen, is dat $N_{(2)} \cong \mathbb{Z}_2$. Dit impliceert dat het spelen van een muzikale (ritmische) passage in het hoofd van de muzikant niets anders is dan het rekenen met machten van twee. De muzikant probeert bij het spelen van een passage uit te vinden hoe iedere noot voortgebracht wordt door de ene referentienoot die vastgesteld wordt door de maatsoort, dit rekenen is iets wat we ook een computer zouden kunnen laten doen. Een eerste beschouwing van het concept maatsoort zal worden gedaan in de volgende paragraaf. Een muzikaal geëngageerde lezer voelt misschien al aankomen dat in de basis de maatsoort het isomorfisme zal kunnen vormen tussen $N_{(2)}$ en $\mathbb{Z}_2$.

Conclusie. *We hebben een manier gevonden om muzikale noten wiskundig te representeren als paren zonder dat grote rekenkundige eigenschappen van noten verloren gaan, opdat computers beter met muziek om zouden kunnen gaan. De rekenstructuur van ritmische noten is gemodelleerd als een moduul over $\mathbb{Z}_2$. De formalisering van noten als (wiskundige) ritmische noten had een aantal voordelen over de muzikale notatie, de belangrijkste hiervan was dat ieder muzikaal idee geformaliseerd is als één ritmische noot. Het probleem dat men muzikale ideeën op bijna oneindig veel manieren kan opschrijven, is hiermee opgelost. Vervolgens zijn we meer gaan focussen op de structuur van muziek, met name van in de muziek veelvoorkomende categorie II noten. We hebben beargumenteerd dat categorie II noten altijd te zien zijn als som categorie I noten. Met dit feit stelde we ten slotte dat muziek lezen in haar basis niets anders is dan slim en snel rekenen met machten van twee.*

4.3 Toepassingen

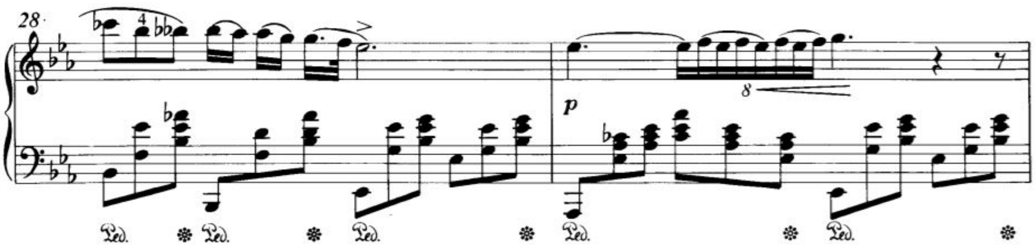
De theorie van het hoofdstuk is nu behandeld, dus is het leuk om eventjes weg te stappen van de theorie en drie toepassingen te noemen van ritmische noten. We benoemen één toepassing binnen de muziekuitvoering, één toepassing binnen de algemene muziekleer, en ten slotte één toepassing binnen het componeren.

- **Waarschuwing:** *Deze toepassingen gebruiken (niet heel stiekem) al categorie III ritmische noten. Deze concepten komen eigenlijk in hoofdstuk 6 aan bod, maar de toepassingen laten zich het beste toelichten aan de hand van categorie III noten, omdat deze "moeilijk" zijn.*

♫ Een snelle benadering maken voor een nootduur

- ▶ **Terugblik:** *De basisnoot die correspondeert met een ritmische noot, is de basisnoot die de duur van de ritmische noot van onder het best benadert.*

Stel je voor: je bent een pianist en je bent Nocturne Opus 9 No. 2 aan het spelen, gecomponeerd door Chopin. Opeens kom je de maten tegen, gegeven in *figuur 4.7*. Je schrikt even, want je ziet een octool staan.[14] Jij hebt geen idee hoe je die noten zou moeten spelen. Gelukkig is dit een solistisch werk, dus maakt het ook niet heel veel uit als je ietsjes vertraagt of versnelt; je wilt de noot ongeveer spelen zoals hij geschreven staat, maar niet precies.



Figuur 4.7: *Een passage uit Chopin's Nocturne Opus 9 No. 2.*

Je herinnert je dat de individuele noten in een zestiendeoctool als ritmische noot weergegeven worden door $(-4, 3/2)$, dus je weet dat de basisnoot met nootnummer -4 (tweeëndertigste noten) de octoolnoten qua duur van onder het beste benaderen. Ook weet je dat de basisnoten met nootnummer -3 (zestiende noten) dit van boven het beste doen. Ergo, je weet nu hoe je de octool ongeveer moet spelen: je speelt een tweeëndertigste noot en houdt die ietsje langer aan dan normaal, maar nog wel korter dan een zestiende noot.

Je kunt dus ritmische noten gebruiken om snel een benadering te vinden van moeilijke noten. Je kijkt gewoon naar het eerste getal van het getallenpaar en je ziet welke makkelijke noot een goede benadering is van de moeilijke noot, en houdt deze noot gewoon ietsje langer aan dan normaal.

♫ Vaststellen of twee nootvoorbeelden hetzelfde zijn

- ▶ **Terugblik:** *We kunnen een muzikaal idee vaak op meerdere manieren opschrijven.*
- ▶ **Terugblik:** *Ritmische noten geven alle muzikale ideeën maar op één manier weer.*

Stel je voor: jij en een andere muzikale vriend zitten te dineren en jullie hebben het over Chopin's Nocturne Opus 9 No. 2. Toevallig gaat het over de passage weergegeven in *figuur 4.7*, en toevallig gaat het zelfs weer over dezelfde octool. Je vriend vraagt zich af of iedere noot in de octool stiekem gewoon hetzelfde is als een enkelgepunteerde tweeëndertigste noot.

Jij weet gelukkig van ritmische noten af, en je herinnert je dat iedere noot uit de octool geformaliseerd wordt door $(-4, 3/2)$. Dan herinner je je *lemma 4.1.5* en weet dat dit gelijk is aan $3/2 \cdot (-4, 1)$. Ten slotte herinner je je *definitie 4.2.2* en je weet het zeker: je vriend heeft gelijk! Chopin had in plaats van de octool ook gewoon enkelgepunteerde tweeëndertigste noten kunnen schrijven.

Je kunt dus ritmische noten gebruiken om na te gaan of verschillende nootvoorbeelden hetzelfde muzikale idee weergeven, en dus even lang duren. Het feit dat dit werkt is berust op de twee terugblikken die aan het begin van de paragraaf zijn weergegeven. Je hoeft dus nooit meer met een vriend over muzieknotatie te ruzieën: je laat de computer aantonen wie er gelijk heeft.

[14]Antimetrisch figuur, waarin 6 noten door 8 zijn vervangen

✍ Het verbeteren van een compositieprogramma

- **Terugblik:** *Het nootnummer is een getal dat gekoppeld is aan een basisnoot.*

Stel je voor: je bent een compositie aan het maken in het (gratis) muzieknotatieprogramma MuseScore. MuseScore geeft een aantal vaste opties voor nootsymbolen die je kunt invoegen in jouw partituur. Deze vaste opties zijn weergegeven in *figuur 4.8*. Je ziet dat je de keus hebt uit een aantal basisnoten, enkele en dubbele puntering, en verbindingsbogen. Musescore kent wel meer symbolen, maar die zitten begraven in menu's. [13]

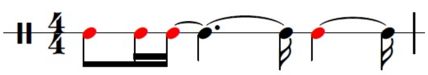
Figuur 4.8: *De nootsymbolen waarvan MuseScore aangeeft dat je ze kan invoegen.*

We kunnen met onze ritmische noten dit systeem verbeteren. Stel bijvoorbeeld dat je een basisnoot wilt die niet in het standaardpakket zit. Nu moet je graven in menu's om deze noot te vinden, echter zou MuseScore in de macro met standaardopties ook een button met tekst "anders" kunnen inbouwen. Als je op deze button klikt wordt aan je gevraagd het nootnummer in te voeren van de basisnoot die je wel wilt. Jij hoeft nu niet te zoeken in de menuutjes naar de gewenste noot, het programma doet dat voor je.

Hoofdstuk 5

Maatsoorten als functionalen

Stel je voor: je bent een drummer en je speelt met veel mensen samen in een orkest. Als drummer ben jij de motor van het orkest, als jij niet de noten netjes in de maat speelt, dan gaat niemand dat doen. Tijdens het spelen van een stuk kom je de ritmische passage tegen die is weergegeven in *figuur 5.1*. Jij bent de drummer, jij moet weten hoe je deze passage speelt. Je zou graag rustig aan het ritme willen rekenen om erachter te komen wat de relatieve duur ervan is, maar de maat komt er al aan: je moet nú een beslissing maken over de relatieve duur.



Figuur 5.1: *Een lastig ritmisch patroontje bestaande uit verschillende nootvoorbeelden. Iedere rode noot geeft het begin van een nieuw nootvoorbeeld aan.*

De hierboven beschreven situatie is pijnlijk herkenbaar voor drummers. Natuurlijk zijn ze wel goed in nootlengtes lezen, maar ook zij kunnen het niet altijd goed hebben. Het erge is dan wel dat ze toch vaak boze blikken uit het orkest krijgen, als ze een ritmische passage fout spelen. Misschien kunnen wij met wiskunde de drummer hier helpen: we hebben al ritmische noten die corresponderen met de nootvoorbeelden gegeven in *figuur 5.1*, we hoeven alleen nog maar een methode te verzinnen hoe we een computer snel de relatieve duur van de noten kunnen laten uitrekenen, gegeven een maatsoort. Praktisch gaan we ons dus bezighouden met de volgende kwestie:

"Hoe kunnen we computers, gegeven een maatsoort, snel en juist de relatieve duur van ritmische noten laten berekenen?"

Naast het praktisch belang van de formalisering van maatsoorten, is er ook theoretisch belang bij. Herinner dat wij in *hoofdstuk 4* onderdelen van onze formalisering intuïtief hebben uitgelegd aan de hand van de relatieve duur van noten, gegeven een willekeurige maatsoort. Als verschillende maatsoorten zich in onze formalisering wiskundig verschillend gedragen, dan zou dit helemaal niet hebben gemogen. Op zijn best hebben we dan een systeem ontwikkeld dat maatsoortafhankelijk is. We willen dus aantonen dat maatsoorten zich allemaal op dezelfde manier gedragen, zodat eigenschappen van ritmische noten in de ene maatsoort hetzelfde zijn als eigenschappen in de andere maatsoort. Alleen dan is het niet erg om een willekeurige maatsoort te kiezen bij de uitleg van *hoofdstuk 4*. We houden ons dus theoretisch bezig met de volgende kwestie:

"Zijn maatsoorten op een bepaalde manier equivalent aan elkaar?"

We tackelen de vragen in dit hoofdstuk in de volgende volgorde:

- *Paragraaf 5.1:* We zoeken het antwoord op de praktische vraag.
- *Paragraaf 5.2:* We zoeken het antwoord op de theoretische vraag.
- *Paragraaf 5.3:* We geven nog wat toepassingen van de theorie tot nu.

5.1 Wat zijn maatsoorten?

♫ Wiskundige maatsoorten: van ritmische noot naar relatieve duur

Zoals in *paragraaf 2.2* al aangegeven, zijn maatsoorten de muzikale tekens die enerzijds iets vertellen over het metrum en anderzijds over de relatieve duur van noten[1]. Een maatsoort wordt muzikaal weergegeven als een soort breuk: twee getallen op elkaar gestapeld. Het bovenste getal geeft in deze breuk het **aantal** tellen per maat, en het onderste getal welke noot 1 tel duurt. Als je weet welke noot 1 tel duurt, kun je ook de relatieve duur van andere nootvoorbeelden berekenen.

- **Observatie:** *Het bovenste getal zegt iets over het metrum, het onderste getal iets over de relatieve duur van nootvoorbeelden.*
- **Observatie:** *De twee getallen staan muzikaal los van elkaar.*

Herinner het praktische doel van de paragraaf: we willen relatieve duren van (ritmische) noten berekenen. Voor onze doeleinden is het dus voldoende om de informatie van het onderste getal wiskundig te formaliseren; het bovenste getal laten we (tenzij anders aangegeven) buiten beschouwing. Omdat we met het onderste getal van de maatsoort de relatieve duur van alle noten kunnen bepalen, gaan we maatsoorten als functionaal formaliseren die een ritmische noot afbeeldt op zijn relatieve duur.

Definitie 5.1.1 (Maatsoort)**.** Zij $n \in \mathbb{R}^+$. De bij n behorende maatsoort is de lineaire functionaal[2] $f_n : N \to \mathbb{R}$, vastgelegd door

$$f_n(m, r) = n \cdot r \cdot 2^{m-1}.$$

Hier is $(m, r) \in N$ (*definitie 4.1.2*). De verzameling maatsoorten geven we aan met $\mathcal{M}$.

□

Opmerking. Herinner dat we maatsoorten in de muziek aangeven met een breuk, zeg t/n. De parameter n in f_n stelt hier het onderste getal van de maatsoort voor. We laten n weg als de context volledig duidelijk is. Voor een 4/4-maat geldt bijvoorbeeld dat $n = 4$. Herinner dat voor onze doeleinden het bovenste getal van een muzikale maatsoort niet nodig is, dus is deze in de definitie weggelaten.

- **Observatie:** $f_n(m, r)$ *geeft de relatieve duur van ritmische noot* (m, r) *onder maatsoort* f_n.
- **Observatie:** *Er geldt dat* $f_n = n \cdot f_1$. *Ergo,* $f_m = \frac{m}{n} \cdot f_n$.

Voorbeeld 5.1.1 (3/4- en 7/8-maat geformaliseerd)**.** In dit voorbeeld geven we een indicatie waarom bovenstaande definitie met de muzikale theorie overeenkomt door te kijken naar de 3/4- en 7/8-maat. We weten dat de maatsoorten een relatieve duur aan noten toekennen. Neem nu $f_4 \in \mathcal{M}$ en $f_8 \in \mathcal{M}$. f_4 correspondeert met de 3/4-maat en f_8 met de 7/8-maat. Beschouw allereerst de kwartnoot.

[1]Ofwel het aantal tellen dat een noot duurt
[2]Het bewijs hiervan vinden we in het bewijs van *stelling 5.1.1*.

Herinner dat in een 3/4-maat de kwartnoot één tel duurt, en dus dat de we verwachten dat $f_4(-1,1) = 1$; $(-1,1)$ is immers de formalisering van de kwartnoot. Merk ook op dat in de 7/8-maat de achtste noot één tel duurt, en dus dat de kwartnoot twee tellen duurt. We verwachten nu dus $f_8(-1,1) = 2$.

Wanneer we nu het afbeeldingsvoorschrift volgen, zien we dat deze verwachting ook uitkomt:

$$f_4(-1,1) = 4 \cdot 1 \cdot 2^{-1-1} = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1,$$
$$f_8(-1,1) = 8 \cdot 1 \cdot 2^{-1-1} = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2.$$

De functionalen f_4 en f_8 beelden dus de kwartnoot juist af op zijn relatieve duur. We checken dit ten slotte ook voor de enkelgepunteerde halve noot; deze is geformaliseerd door $(0, 3/2)$. Ga zelf na dat we verwachten dat $f_4(0, 3/2) = 3$ en $f_8(0, 3/2) = 6$. Wanneer we het afbeeldingsvoorschrift gebruiken, vinden we gelukkig ook

$$f_4(0,3/2) = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^{-1-0} = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3,$$
$$f_8(0,3/2) = 8 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^{-1-0} = 8 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

□

- ▶ **Samenvatting:** *We hebben wiskundige maatsoorten gedefinieerd. We focussen alleen op maatsoorten als objecten die noten afbeelden op hun relatieve duur. Metrische overwegingen worden genegeerd.*

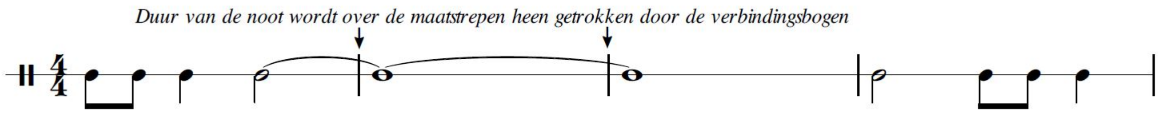
♫ Wiskundige maatsoorten in muzikaal opzicht: één probleem

We zien maatsoorten nu als functionalen die ritmische noten afbeelden op hun relatieve duur. Er is hier echter één muzikaal probleem: het bovenste getal geeft restricties op de nootsymbolen, en dus ritmische noten, die we mogen gebruiken. Neem *figuur 5.2* bijvoorbeeld: een 4/4-maat heeft per maat 4 tellen, dus een basisnoot van bijvoorbeeld 8 tellen (de brevis) kunnen we in zo'n maat niet opschrijven: het symbool van deze basisnoot "past niet in één maat". We willen echter wel kunnen zeggen hoe lang de brevis in een 4/4-maat zou moeten duren (8 tellen). Voor de oplossing van het probleem herinner je het volgende:

- ▶ **Terugblik:** *We kunnen equivalente nootvoorbeelden op verschillende manieren opschrijven.*
- ▶ **Terugblik:** *Equivalente nootvoorbeelden krijgen dezelfde ritmische noot.*

De eerste terugblik geeft ons een idee: we kunnen de brevis ook opschrijven als twee verbonden hele noten. De twee hele noten passen individueel wel in een maat, en verbindingsbogen mogen over maatstrepen heengetrokken worden (*figuur 5.2*). We kunnen dus stiekem de brevis wel opschrijven in een 4/4-maat. De tweede terugblik vertelt ons ten slotte dat het probleem is opgelost: door het muzikale nootvoorbeeld anders op te schrijven, hebben we de ritmische noot die erbij hoort niet veranderd. Het is dus "muzikaal toegestaan" om van de ritmische noot die hoort bij de brevis de relatieve duur uit te rekenen. We kunnen met een analoge redenering argumenteren dat het "muzikaal toegestaan" is om van alle ritmische noten de relatieve duur in welke maatsoort dan ook te bepalen. Een extra voorbeeld hiervan is gegeven in *voorbeeld 5.1.2*.

Voorbeeld 5.1.2 (De duur van een enkelgepunteerde hele noot in een 6/8-maat)**.** Beschouw de enkelgepunteerde hele noot. Als ritmische noot is hij geformaliseerd door $(1, 3/2)$. We willen weten wat de relatieve duur van deze ritmische noot in een 6/8-maat is, maar tegelijkertijd weten we ook dat een enkelgepunteerde hele noot als muzikaal symbool niet in een 6/8-maat kan verschijnen. Een probleem dus.



Figuur 5.2: *Een voorbeeld van een 4/4-maat waar boven gebruikt worden om noten langer dan 4 tellen te laten duren. De halve noot wordt hier verbonden met de hele noot in de volgende maat om de puls nog langer te later duren dan de relatieve duur tot de nieuwe maat. Door de verdere verbinding met de hele noot in maat 3, wordt de relatieve duur van de originele halve noot zelfs verder vergroot over de maatstreep die maat 2 en 3 van elkaar scheidt.*

Voor de oplossing herinneren we ons dat we in de muziek een hele noot met punt geschreven kan worden als twee verbonden enkelgepunteerde halve noten. Enkelgepunteerde halve noten komen wel voor in een 6/8-maat, dus is het "toegestaan" om van deze verbonden symbolen de relatieve duur uit te rekenen ($6 + 6 = 12$ tellen).

De enkelgepunteerde halve noot is als ritmische noot gegeven door $(0, 3/2)$. Met bovenstaande redenering is het "muzikaal toegestaan" om de relatieve duur te berekenen van de verbinden van twee van deze ritmische noten, ofwel van $(0, 3/2) + (0, 3/2) = (1, 3/2)$. Het is dus gewoon toegestaan om van $(1, 3/2)$ in een 6/8-maat de relatieve duur te bepalen.

□

- ▶ **Observatie:** *In iedere maatsoort mogen we van iedere ritmische noot de relatieve duur bepalen met het onderste getal van de "maatsoortbreuk".*
- ▶ **Samenvatting:** *We hebben een muzikaal probleem met betrekking tot maatsoorten heuristisch opgelost.*

✍ Eigenschappen van wiskundige maatsoorten

We gaan aantonen dat *definitie 5.1.1* rijmt met de muzikale definitie van maatsoorten uit *paragraaf 2.2* als methode om de relatieve duur van noten uit te rekenen. Om dit te doen bewijzen we drie dingen:

1. De maatsoortfunctionaal beeldt de "juiste" ritmische noot af op één tel; bijvoorbeeld de maatsoortfunctionaal die correspondeert met de 4/4-maat dient de ritmische kwartnoot $(-1, 1)$ op één tel af te beelden
2. De maatsoort beeldt twee verbonden/opgetelde ritmische noten af op de som van hun relatieve duren.[3]
3. De maatsoort beeldt het product van een getal en een ritmische noot af op de relatieve duur van de ritmische noot vermenigvuldigd met het getal.[4]

Als we onderdelen 2 en 3 willen bewijzen, willen we in feite aantonen dat alle maatsoorten een moduulhomomorfisme zijn van N naar $\mathbb{R}$. Dit zullen we als eerste bewijzen in *stelling 5.1.1*. Vervolgens bewijzen we onderdeel 1 in *lemma 5.1.2*.

Stelling 5.1.1. *Voor alle n is f_n een homomorfisme van moduul N naar $\mathbb{R}$, opgevat als $\mathbb{Z}_2$-moduul.*

[3]Hiervan hebben we al zó vaak gebruik gemaakt bij de ontwikkeling van intuïtie voor de wiskundige ideeën dat het wel erg jammer zou zijn als dit niet waar is.

[4]Deze eigenschap hebben we toegepast in *voorbeeld 4.2.1* om intuïtie voor puntering te ontwikkelen. Het zou ook erg jammer zijn als dit niet waar is.

Bewijs. We dienen te laten zien dat de twee gedefinieerde operaties behouden blijven onder f_n voor willekeurige n. Zij n nu dus willekeurig, maar vast. We laten allereerst zien dat de stilte altijd op nul wordt afgebeeld:

$$f_n(0,0) = n \cdot 0 \cdot 2^{-1} = 0. \tag{5.1}$$

Vervolgens zullen we nu laten zien dat de scalaire vermenigvuldigingsstructuur behouden blijft onder f_n. We willen in het bijzonder laten zien dat $f_n(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ voor willekeurige $c \in \mathbb{Z}_2$, en $x \in N$. We beschouwen eerst de situatie, waarin $c, x \neq 0$. Merk op

$$\begin{aligned} f_n(c \cdot x) &= f_n\left(m + \lfloor \log_2 |c \cdot r| \rfloor, \frac{c \cdot r}{2^{\lfloor \log_2 |c \cdot r| \rfloor}}\right), \\ &= n \cdot \frac{c \cdot r}{2^{\lfloor \log_2 |c \cdot r| \rfloor}} \cdot 2^{m + \lfloor \log_2 |c \cdot r| \rfloor - 1}, \\ &= n \cdot c \cdot r \cdot 2^{m-1} = c \cdot f_n(m, r) = c \cdot f_n(x). \end{aligned}$$

Voor de andere gevallen merken we eerst op dat uit *stelling 4.1.4* binnen ons moduul geldt dat $c \cdot \bar{0} = 0 \cdot x = 0 \cdot \bar{0} = \bar{0}$; $\bar{0}$ geeft hier de stilte aan. Uit (5.1) volgt vervolgens dat het ook voor deze gevallen goed zit. Ten slotte moeten we nog laten zien dat de optelling behouden blijft, ofwel dat $f_n(x + y) = f_n(x) + f_n(y)$. We beginnen de situatie te beschouwen waarin geen van de noten de stilte is, en waarin x en y niet elkaars additieve inverse zijn. Zij $x = \binom{m}{r}$ en $y = \binom{p}{s}$; zij verder ϱ weer gedefinieerd als in (4.3). In deze situatie vinden we

$$\begin{aligned} f_n(x + y) &= f_n\left(\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor, \frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}}\right), \\ &= n \cdot \frac{\varrho}{2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor}} \cdot 2^{\lfloor \log_2 |\varrho| \rfloor - 1}, \\ &= n \cdot \varrho \cdot 2^{-1}, \\ &= n \cdot (r \cdot 2^m + s \cdot 2^p) \cdot 2^{-1}, \\ &= n \cdot r \cdot 2^{m-1} + n \cdot s \cdot 2^{p-1} = f_n(x) + f_n(y). \end{aligned}$$

Als x en y elkaars additieve inverse zijn, merken we op dat we y kunnen schrijven als $-x$. Er volgt simpelweg $f_n(x + (-x)) = f_n(0) \overset{(5.1)}{=} 0 = f_n(x) - f_n(x) \overset{\star}{=} f_n(x) + f_n(-x)$. Bij ($\star$) is hierin gebruik gemaakt van het feit dat de scalaire vermenigvuldiging als behouden wordt onder f_n. Als ten slotte geldt dat x of y de stilte is, dan merken we op dat $x + 0 = 0 + x = x$ uit *stelling 4.1.4*. (5.1) laat dan zien dat de operatie ook voor dit geval behouden blijft. Hiermee hebben we alle gevallen afgedekt en blijft dus ook de optelling behouden onder f_n.

$\xRightarrow{n \text{ willekeurig}}$ f_n is een moduulhomomorfisme voor alle n.

Q.E.D.

- ▶ **Waarschuwing:** *De rest van deze sectie beschouwen we unieke muzikale maatsoorten t/n; het bovenste getal doet nu ook mee in de beschouwing van (wiskundige) maatsoort f_n en geeft aan hoeveel tellen er in één maat passen.*

Ons rest nu nog aan te tonen dat wiskundige maatsoorten dezelfde noten op één tel afbeelden als hun corresponderende muzikale maatsoorten. We hoeven dit alleen aan te tonen voor maatsoorten die in de muziek gebruikt worden. Voor deze maatsoorten kunnen we de n in f_n schrijven als: $n = 2^\nu$, waar $\nu \in \mathbb{Z}$.

Om dit aan te tonen, bewijzen we een muzikaal equivalente bewering: we gaan bewijzen dat de wiskundige maatsoort die correspondeert met de maatsoort t/n de hele noot, vermenigvuldigd met t/n, afbeeldt op t tellen. Om in te zien dat deze twee beweringen equivalent zijn, merk de volgende vier dingen op:

1. In de maatsoort t/n duurt de $1/n$-noot 1 tel; bijvoorbeeld in de 6/8-maat duurt de 1/8-noot (achtste noot) 1 tel.
2. De hele noot duurt vervolgens 2^ν tellen, waar ν het verschil is tussen 1 (het nootnummer van de hele noot) en het nootnummer van de $1/n$-noot; het nootnummer van een achtste noot is bijvoorbeeld -2, dus $\nu = 3$. Er geldt inderdaad dat de hele noot 2^3 tellen duurt.
3. Er geldt $n = 2^\nu$; Voor $\nu = 3$ geldt dat $8 = 2^3$.
4. Dus t/n keer de hele noot duurt $t/n \cdot n = t$ tellen; Er geldt bijvoorbeeld inderdaad dat $6/8 \cdot 8 = 6$, en dus dat 6/8 keer de hele noot 6 tellen duurt.

We illustreren deze vier opmerkingen ten slotte met nog een voorbeeld, waarna we bewijzen waar we op uit zijn. De lezer wordt uitgenodigd om de opmerkingen in meer gevallen na te gaan.

Voorbeeld 5.1.3. Beschouw de 4/4-maat. We weten in deze maatsoort dat de kwartnoot (1/4-noot) één tel duurt (opmerking 1). Vervolgens geldt er dat de kwartnoot nootnummer -1 heeft, en dus dat $\nu = 2$. Er geldt verder ook dat de hele noot 2^2 tellen duurt (opmerking 2).

Vervolgens merken we op dat inderdaad geldt $4 = 2^2$ (opmerking 3). Ten slotte merken we op dat inderdaad geldt dat $4/4 \cdot 4 = 4$ tellen, en dus dat 1 keer de hele noot inderdaad 4 tellen duurt (opmerking 4).

Conclusie: Het feit dat de kwartnoot in een 4/4-maat één tel duurt, is hetzelfde als het feit dat 4/4 keer de hele noot in een 4/4-maat 4 tellen duurt.

□

Lemma 5.1.2 (Maatsoorten beelden juist af)**.** *Zij $x = \frac{t}{n} \cdot \binom{1}{1}$. Voor een willekeurige maatsoort f_n geldt*

$$f_n(x) = t.$$

Bewijs. Merk allereerst op dat de (basis)definitie van een maatsoort, gesteld in *paragraaf 2.2*, stelt dat $t \in \mathbb{N}^+$, en $n = 2^\nu$ voor zekere $\nu \in \mathbb{Z}$.
$\implies \quad \frac{t}{n} \in \mathbb{Z}_2$.

We weten nu dat de vermenigvuldiging met $\frac{t}{n}$ gedefinieerd is. Vervolgens en ten slotte passen we simpelweg een directe berekening en *stelling 5.1.1* toe om te vinden dat

$$f(x) = \frac{t}{n} \cdot f(1,1) = \frac{t}{n} \cdot 1 \cdot n \cdot 2^{1-1} = t.$$

Q.E.D.

- ▶ **Samenvatting:** *We hebben aangetoond dat wiskundige maatsoorten ritmische noten op dezelfde relatieve duur afbeelden als muzikale maatsoorten dit met muzikale nootvoorbeelden doen.*

✍ Wiskundige maatsoorten als isomorfisme

- ▶ **Waarschuwing:** *We focussen ons in deze sectie alleen op wiskundige maatsoorten die zich laten vertalen naar een muzikale maatsoort. We bekijken alleen wiskundige maatsoorten f_n, waarvoor geldt dat n een macht van twee is.*

We weten nu dat onze wiskundige maatsoorten en de muzikale maatsoorten voor het berekenen van de relatieve duur van noten met elkaar in overeenstemming zijn, dus kan een computer met onze maatsoortfunctionaal voor de drummer uit de introductie gemakkelijk en snel de relatieve duur berekenen van het moeilijke nootvoorbeeld. Echter is er nog een keerzijde aan dit verhaal: zouden we de computer andersom hetzelfde kunnen laten doen?

Stel dat je een componist bent, en je weet precies hoe lang je een bepaalde noot wilt hebben, maar je weet niet hoe je deze duur muzikaal moet opschrijven. Is het dan mogelijk dat de computer dit werk voor je doet? Is het mogelijk dat jij een relatieve duur invoert, en het compositieprogramma vervolgens voor jou de juiste noten invoegt? We geven een voorbeeld van deze kwestie.

Voorbeeld 5.1.4 (Een componist in de problemen)**.** Een componist wil in een 6/8-maat een noot schrijven die 11/2 tel duurt, maar hij weet niet welke noot deze eigenschap heeft. Wij gaan de componist via de ritmische noten proberen te helpen. We kunnen dit doen door als maatsoort f_8 te nemen en te zoeken naar elementen in het volledig origineel $f_8^{-1}\left(\frac{11}{2}\right)$. Laat $(n, r) \in f_8^{-1}(11/2)$, dan vinden we

$$\begin{aligned} \tfrac{11}{2} &= 8r \cdot 2^{n-1}, \\ \tfrac{11}{8} &= r \cdot 2^n. \end{aligned}$$

We willen nu dat $1 \leq |r| < 2$ en $n \in \mathbb{Z}$. Neem $n = 0$ en aan beide eigenschappen is voldaan:

$$\begin{aligned} \tfrac{11}{8} &= r \cdot 2^0, \\ \tfrac{11}{8} &= r. \end{aligned}$$

De componist zoekt dus de ritmische noot $(0, 11/8)$. We herkennen de muzikale noot die bij deze ritmische noot hoort niet meteen. Wel weten we het volgende: vertaald naar muzikale noten zoekt de componist de halve noot (vanwege het aanwezige nootnummer $n = 0$), met een beetje extra ($r = 11/8 > 1$). Als we de ritmische halve noot verwijderen, vinden we

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 11/8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

We zien nu dat het "beetje extra" een enkelgepunteerde achtste noot is. De componist zoekt dus een halve noot, verbonden met een enkelgepunteerde achtste noot (of een alternatieve notatie hiervan).

De componist zoekt dus (bijvoorbeeld) het nootvoorbeeld weergegeven in *figuur 5.3*.

$\square$

Figuur 5.3: *Het nootvoorbeeld gevonden in voorbeeld 5.1.4.*

We gaan deze vraag tackelen in de rest van deze paragraaf voor categorie II noten[5], en in *hoofdstuk 6* voor categorie III en IV noten. We focussen ons hier alleen op categorie II noten, omdat dit de meest voorkomende noten zijn in het muzikale schrift. Als we relatieve duren willen koppelen aan ritmische noten, willen we de volgende dingen weten:

1. We willen weten wat de beeldverzameling is van categorie II ritmische noten onder een maatsoort.

[5]Noten die punteringen en verbindingen zijn van basisnoten.

2. We willen laten zien dat alle maatsoorten injectief zijn.

Voor onderdeel (1) herinneren ons voor categorie II uit *paragraaf 4.2* ritmische noten het volgende:

- ▶ **Terugblik:** *Computers kunnen alle ritmische noten uit $N_{(2)}$ genereren vanuit één basisnoot.*

Deze terugblik vertelt ons, aangezien *stelling 5.1.1* al geeft dat maatsoorten homomorfismen zijn, dat het beeld van $N_{(2)}$ onder een maatsoort f_n in een $\mathbb{Z}_2$-getallenmoduul ligt. Dit getallenmoduul wordt dan voortgebracht door relatieve duur een basisnoot, aangezien basisnoten de voortbrengers zijn van $N_{(2)}$. Ergo, het beeld van $N_{(2)}$ onder een maatsoort f_n ligt in een $\mathbb{Z}_2$-getallenmoduul voortgebracht door een macht van twee: $\mathbb{Z}_2$ zelf. We tonen dit in het volgende lemma aan.

Lemma 5.1.3. *Zij $n \in \mathbb{Z}_2^+$. Er geldt dat het beeld van $N_{(2)}$ onder f_n in $\mathbb{Z}_2$ ligt.*

Bewijs. Neem $x \in N_{(2)}$ willekeurig en $n \in \mathbb{Z}_2^+$ vast. We weten uit *stelling 4.2.4* dat er een getal $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ bestaat waarvoor geldt

$$x = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vervolgens geldt door gebruik te maken van *stelling 5.1.1* dat

$$f_n(x) = \alpha \cdot f(1,1) = n \cdot \alpha \cdot 1 \cdot 2^{1-1} = n \cdot \alpha.$$

Ten slotte bewijst de toepassing van *lemma 4.1.1* ons lemma.

Q.E.D.

Nu onderdeel (1) bevestigd is, rest ons nog onderdeel (2) aan te tonen. In onze situatie vertaalt dit naar het volgende: we willen laten zien dat iedere maatsoort f_n een isomorfisme is. Deze claim is iets sterker dan wat onderdeel (2) vereist (f_n moet nu ook surjectief zijn), maar het fijne is dat we met deze claim wel precies weten wat categorie II noten qua relatieve duren weergeven:

- ▶ **Gevolg:** *Categorie II noten zijn alle noten die muzikaal een relatieve duur hebben die in $\mathbb{Z}_2$ leeft.*

Stelling 5.1.4 (Isomorfisme tussen $N_{(2)}$ en $\mathbb{Z}_2$)**.** *Als $n = 2^\nu \in \mathbb{Z}_2^+$, $\nu \in \mathbb{Z}$, dan geldt dat de maatsoortfunctionaal $f_n|_{N_{(2)}}$ een isomorfisme is tussen $N_{(2)}$ en $\mathbb{Z}_2$, opgevat als $\mathbb{Z}_2$-moduul.*[6]

Bewijs. We moeten laten zien dat onder de gestelde eisen f_n een bijectief homomorfisme is. Neem $n \in \mathbb{Z}_2^+$ willekeurig. *Lemma 5.1.3* legt vast dat f_n afbeeldt in de juiste verzameling, en *stelling 5.1.1* dat het een homomorfisme is. Ons rest nog te bewijzen dat f_n bijectief is.

I. Injectiviteit

Neem aan dat voor zowel $x = \binom{m}{r}$ en $y = \binom{p}{s}$ geldt dat $f_n(x) = f_n(y)$, maar ook dat $x \neq y$. Allereerst gebruikmakende van *stelling 5.1.1* merken we op dat we dit kunnen herschrijven als $f_n(x + (-y)) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow n \cdot r \cdot 2^{m-1} + n \cdot s \cdot 2^{p-1} = 0, \\
&\xRightarrow{n \neq 0} r \cdot 2^m + s \cdot 2^p = 0, \\
&\xRightarrow{(4.3)} \varrho = 0, \\
&\xRightarrow{\textit{Lemma 4.1.2}} r = s = 0 \ \vee \ [r = -s \ \wedge \ p = m], \\
&\Longrightarrow x = y.
\end{aligned}$$

[6]Herhaaldelijk de notatie $f_n|_{N_{(2)}}$ gebruiken bij dit soort stellingen is maar ongemakkelijk. We zullen in het vervolg altijd f schrijven, maar $f|_X$ bedoelen als we zeggen dat "f het isomorfisme vormt tussen structuren X en Y".

II. Surjectiviteit

Zij $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ gegeven. Herschrijf allereerst n als

$$n = \frac{1}{2^{-\nu}}, \ \ \nu \in \mathbb{Z}.$$

Herschrijf vervolgens α als

$$\alpha = \frac{a}{2^b}, \ \ a \in \mathbb{Z}, \, b \in \mathbb{N}.$$

Definieer nu $\zeta = \max\{b, -\nu\}$. Er volgt dat we beide getallen weer kunnen herschrijven[7] tot

$$\begin{aligned} n &= \frac{2^\xi}{2^\zeta}, \ \ \xi = \nu + \zeta \in \mathbb{N}, \, \zeta \in \mathbb{N}, \\ \alpha &= \frac{\chi}{2^\zeta}, \ \ \chi = a \cdot 2^{\zeta - b} \in \mathbb{Z}, \, \zeta \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Het is instructief op te merken dat het volgende geldt voor χ door het toepassen van de ongelijkheden (4.5) dat

$$1 \leq \left| \frac{\chi}{2^{\lfloor \log_2(\chi) \rfloor}} \right| < 2.$$

Neem nu de volgende $x \in N$; het moge duidelijk zijn dat $x \in N$:

$$x = \begin{pmatrix} \lfloor \log_2(\chi) \rfloor + 1 - \xi \\ \frac{\chi}{2^{\lfloor \log_2(\chi) \rfloor}} \end{pmatrix}.$$

Er geldt vervolgens

$$f_n(x) = \frac{2^\xi}{2^\zeta} \cdot \frac{\chi}{2^{\lfloor \log_2(\chi) \rfloor}} \cdot 2^{\lfloor \log_2(\chi) \rfloor + 1 - \xi - 1} = \frac{\chi}{2^\zeta} = \alpha.$$

Hoewel we nu een noot hebben gevonden die onder de maatsoort afbeeldt op α, moeten we nog aantonen dat $x \in N_{(2)}$ ook geldt. Dit is niet moeilijk in te zien als we *definitie 4.1.2* letterlijk aflezen en opmerken dat geldt, aangezien $\chi \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_2$

$$\chi \cdot \begin{pmatrix} 1 - \xi \\ 1 \end{pmatrix} = x.$$

Stelling 4.2.4 vertelt ons ten slotte dat $x \in N_{(2)}$. Dit vertelt ons dat we met een surjectie te maken hebben, wat impliceert dat we een bijectie hebben en dat f_n inderdaad een isomorfisme vormt.

Q.E.D.

► **Samenvatting:** *We hebben ons gefocust op wiskundige maatsoorten die zich laten vertalen naar een muzikale maatsoort. We hebben van deze wiskundige maatsoorten aangetoond dat ze voor categorie II noten inverteerbaar zijn, waardoor we ook gegeven een relatieve duur de bijbehorende unieke categorie II ritmische noot kunnen vinden. Als extraatje vonden we dat categorie II noten ook getypeerd kunnen worden als noten met een relatieve duur uit* $\mathbb{Z}_2$.

Een oplettende lezer zal het opgevallen zijn dat alle stellingen tot hier onafhankelijk geformuleerd konden worden ten opzichte van de precieze maatsoortkeus. Dit geeft ons hoop voor de volgende paragraaf: misschien zijn maatsoorten inderdaad op een of andere manier equivalent aan elkaar.

[7] Dit herschrijven doen we, zodat we n en α met elkaar in relatie kunnen brengen.

Voordat we dit onderzoeken, behandelen we nog één belangrijke kwestie voor deze paragraaf. We weten door *stelling 5.1.4* dat er een bijectie is tussen de verzameling mogelijke relatieve duren van ritmische noten ($\mathbb{Z}_2$) en de notenverzameling ($N_{(2)}$), maar hoe moet een computer vervolgens de ritmische noten terugvertalen naar muzikale noten?

♫ Van ritmische noten terug naar muzikale noten

Om ritmische noten terug te vertalen naar muzikale noten laten we ons leiden door de ideeën uit *voorbeeld 5.1.4*. De moeilijkheden aan het terugvertalen van ritmische noot naar muzikale noot moge duidelijk zijn:

- **Terugblik:** *Er zijn meerdere notaties voor hetzelfde muzikale idee*
- **Terugblik:** *De ritmische noten zorgen ervoor dat er slechts één representatie is per muzikaal idee.*

De twee terugblikken stellen dat het onmogelijk is om bij een ritmische noot een unieke muzikale noot te vinden. We zullen een aanname moeten maken, opdat we ten minste één muzikale noot kunnen vinden die bij een gegeven ritmische noot hoort. De volgende aanname blijkt voldoende te zijn om een algoritme op te zetten:

- **Aanname:** *We nemen aan dat bij iedere basisnoot (N_b) een unieke muzikale noot hoort. Deze muzikale noot is de noot die correspondeert met het nootnummer van de basisnoot.*

We nemen dus aan bij de ritmische noot $(n, 1)$ de muzikale noot met nootnummer n moet horen. Bij $(-1, 1)$ moet dus de muzikale kwartnoot horen. Het is aan de lezer om na te gaan dat dit echt een aanname is en geen vanzelfsprekend feit. Om dit na te gaan, is het voldoende om te controleren dat een achtste noot verbonden met een achtste noot zich laat formaliseren door $(-1, 1)$. Ergo, we hebben dus een twee muzikale noot gevonden die zich laat formaliseren tot een ritmische basisnoot.

Met deze aanname kunnen we ons algoritme opstellen. In dit algoritme zal eindelijk het nut van de $-$ operatie naar voren komen voor ritmische noten. Het idee van het algoritme is als volgt: we willen een gegeven ritmische noot als som basisnoten gaan schrijven. Als we dit kunnen doen, dan is er onder onze aanname een unieke muzikale noot per basisnoot in de som. Om ten slotte de muzikale noot te vinden die bij de som basisnoten hoort, hoeven we alleen nog maar alle gevonden (basis)noten te verbinden; verbinden stelt immers de $+$ operatie voor.

Om een gegeven ritmische noot als som basisnoten te schrijven, gebruiken we de $-$ operatie. Herinner je allereerst het volgende:

- **Terugblik:** *De ritmische noot $(n, 1)$ is de basisnoot die de ritmische noot (n, r) het best van onder benadert. (zie het begin van paragraaf 4.1)*
- **Terugblik:** *De "+"-operatie op N induceert een "$-$"-operatie.*

Gegeven een ritmische noot (n, r) rekenen we nu uit:

$$\binom{n}{r} - \binom{n}{1} = \binom{m}{s}.$$

Uit de terugblik weten we nu drie dingen over de ontstane noot (m, s):

1. $s \geq 0$,
2. $m < n$,
3. $(m, s) + (n, 1) = (n, r)$.

Als we dit proces nu voortzetten met (m, s), vinden we een steeds langere string basisnoten (met kleiner wordende rest) die dezelfde noot voorstelt als (n, r):

Input: De ritmische noot $(n, r) \in N_{(2)} \backslash \{(0, 0)\}$, die we als som basisnoten willen schrijven.
Output: De basisnoten $(n_1, 1)$ tot en met $(n_k, 1)$ die gesommeerd (n, r) opleveren.

`/* Wiskundige deel: schrijf de ritmische noot als een som (ritmische) basisnoten. */`
Zij $(p, q) \leftarrow (n, r)$;
Zij $i \leftarrow 0$;
while $q \neq 0$ **do**
  Verhoog $i \leftarrow i + 1$;
  Zij $n_i \leftarrow p$;
  Vervang $(p, q) \leftarrow (p, q) - (p, 1)$;
end
`/* Muzikale deel: vertaal de som (ritmische) basisnoten naar een verbinding muzikale basisnoten. */`
Vertaal ritmische basisnoot $(n_1, 1)$ naar muzikale basisnoot en noem deze m_1;
Zij $s \leftarrow m_1$;
Zij $j \leftarrow 1$;
for $j \leq i$ **do**
  Verhoog $j \leftarrow j + 1$;
  Vertaal ritmische basisnoot $(n_j, 1)$ naar muzikale basisnoot en noem deze m_j;
  Verbind muzikale noot s met muzikale noot m_j, en noem de ontstane muzikale noot weer s;
end

Algorithm 1: Het schrijven van $(n, r) \in N_{(2)}$ als verbinding van muzikale basisnoten.

We geven een voorbeeld van het algoritme in actie.

Voorbeeld 5.1.5 (Het terugvertalen van de ritmische noot $(0, 11/8)$)**.** Om $(0, 11/8)$ als som van basisnoten te schrijven, voeren we het wiskundige deel van het algoritme uit. We doen dit in dit voorbeeld iets minder formeel dan het algoritme voorschrijft, omwille van duidelijkheid. We bepalen eerst:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 11/8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lfloor \log_2 |3/8| \rfloor \\ \frac{3/8}{2^{\lfloor \log_2 |3/8| \rfloor}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3/8}{2^{-2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

De $3/8$ verschijnt, omdat $\varrho = 11/8 \cdot 2^0 - 1 \cdot 2^0 = 3/8$. We onthouden nu het nootnummer $n_1 = 0$ en merken op dat $3/2 \neq 0$. We gaan dus verder met de volgende bepaling:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We onthouden nu het nootnummer $n_2 = -2$ en merken op dat $1 \neq 0$. We gaan dus verder met de volgende bepaling:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

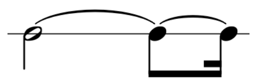
We onthouden nu het nootnummer $n_3 = -3$, merken op dat $0 = 0$, en stoppen dus met het wiskundig deel van het algoritme. Met de onthouden nootnummers hebben we nu de $(0, 11/8)$ ontbonden als de volgende som basisnoten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 11/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nu moeten we het muzikale deel van het algoritme nog uitvoeren. Dit deel lijkt veel lastiger dan het in werkelijkheid is. In feite doen we het volgende:

1. We merken op dat bij $(0, 1)$ onder onze aanname de unieke noot 𝅗𝅥 hoort.
2. We merken op dat bij $(-2, 1)$ onder onze aanname de unieke noot ♪ hoort.
3. We merken op dat bij $(-3, 1)$ onder onze aanname de unieke noot 𝅘𝅥𝅯 hoort.
4. We verbinden de gevonden noten om de uiteindelijke muzikale noot in *figuur 5.4* te vinden.[8]

□



Figuur 5.4: *De output van algoritme 1 in voorbeeld 5.1.5*

We eindigen deze paragraaf met een paar slotopmerkingen over het algoritme.

Waarom werkt het algoritme?

We weten het antwoord op deze vraag al grotendeels. Het muzikale deel van het algoritme werkt door de aanname die we in deze sectie hebben gedaan, en het feit dat verbinden in de muzikale wereld equivalent is aan het optellen in onze wiskundige wereld.

Het wiskundige deel van het algoritme werkt in theorie, omdat de $-$ operatie de inverse van de $+$ is. De vraag bestaat echter nog waarom het wiskundige deel van het algoritme in eindige tijd geklaard is. Het antwoord van deze vraag ligt in *stelling 4.2.4*.

We nemen aan dat de inputnoot een element van $N_{(2)}$ is. We weten dat noten uit deze verzameling te schrijven zijn als een **eindige** som basisnoten. Steeds trekken we in stap 7 van het algoritme de basisnoot af die de noot (p, q) het best van onder benadert. Omdat we ten slotte iteratief steeds de basisnoot aftrekken die (het residu van) de ritmische noot (na de vorige aftrekking) het best van onder benadert én omdat de ritmische noot door *stelling 4.2.4* te schrijven moet zijn als een eindige som basisnoten, moet het aftrekproces een keer termineren.

Kunnen we een (muzikaal) beter algoritme krijgen?

Het antwoord op deze vraag is "ja" en de reden hiervoor is al in *voorbeeld 5.1.5* te vinden. In de output van het algoritme staat een achtste noot verbonden met een zestiende noot. We weten uit de muziektheorie dat dit equivalent is aan een enkelgepunteerde achtste noot. We zouden het algoritme dus nog kunnen verbeteren door in te bouwen dat het rekening houdt met dit theoretisch feit. Het is een leuke oefening voor de lezer om dit zelf eens te proberen. (*Hint: je kunt een extra aanname doen en de aanpassing in het wiskundige deel maken, óf zonder extra aanname een aanpassing in het muzikale deel doen. Als je voor het tweede kiest, moet het algoritme iets nieuws gaan doen als er nootnummers zijn die maar één van elkaar verschillen.*)

► **Samenvatting:** *We hebben een algoritme opgesteld dat onder één aanname een ritmische noot (uit $N_{(2)}$) kan omzetten in een muzikale noot.*

[8] Je vraagt je misschien af waar we de verbindingsbalken in deze figuur vandaan halen, en waarom we de laatste twee noten niet gewoon met vlaggen opschrijven. We doen dit omwille van de muziektheorie. Vanwege de muziektheorie mag in dit geval de schrijfwijze met vlaggen niet, echter omdat de precieze reden hierachter met metrum te maken heeft, gaan wij hier in dit verslag niet dieper op in.

5.2 Zijn alle maatsoorten equivalent aan elkaar?

✍ Een ordening op ritmische noten

Waar de vorige paragraaf praktisch van aard was, zal deze een meer theoretische rol aannemen. We willen in deze paragraaf twee dingen gaan doen:

1. We willen wat eigenschappen van ritmische noten extraheren uit maatsoorten.
2. We willen aantonen dat alle maatsoorten equivalent aan elkaar zijn en equivalente eigenschappen induceren.

We beginnen met onderdeel (1) door te kijken of we een ordening op ritmische noten uit de maatsoorten kunnen halen. Als we deze ordening kunnen vinden, betekent het namelijk dat het in muziektermen zin heeft om te spreken van "langere" of "grotere" (ritmische) noten. Intuïtief is het bestaan van een ordening ook logisch, aangezien we ook bij het vullen van maten spreken van "te grote" noten als ze niet meer in de maat passen (herinner onze discussie aan het begin van *paragraaf 5.1*). Deze laatste muziekuitspraak geeft ons het idee om de ordening voor noten als volgt te construeren: een ritmische noot is groter dan een andere ritmische noot als haar relatieve duur groter is.

Om deze relatie echt hard te maken, zullen we eerst *stelling 5.1.1* een klein beetje moeten uitbreiden. Merk aan het zeer korte bewijs op dat het onderstaande lemma stiekem een gevolg is van *stelling 5.1.1* en *5.1.4*.

Lemma 5.2.1. *Voor alle $n \in \mathbb{R}^+$ geldt dat f_n een monomorfisme is van moduul N naar $\mathbb{R}$, opgevat als getallenmoduul over $\mathbb{Z}_2$.*

Bewijs. Stelling 5.1.1 geeft ons al dat f_n altijd een homomorfisme is, en de injectiviteit volgt direct door $n \in \mathbb{R}^+$ willekeurig te nemen en letterlijk onderdeel **(I)** van het bewijs van *stelling 5.1.4* te reproduceren, opmerkende dat we in dat onderdeel de originele eis ($n \in \mathbb{Z}_2^+$) nergens gebruiken.
Q.E.D.

Observeer met *lemma 5.2.1* nu het volgende:

- **Observatie:** *De reële getallen hebben al een ordening.*
- **Observatie:** *Voor ieder reëel getal is er maximaal maar één noot die erop afbeeldt onder f_n.*

Met deze observaties kunnen we met maatsoorten een ordening op ritmische noten maken. Het idee hierachter is dat de ritmische noten N de ordening van $\mathbb{R}$ gaan stelen. Het idee is geschetst in *figuur 5.5*. Merk op dat we in onze definitie eisen dat f_n voor alle n een embedding is van N, die totaal geordend wordt door f_n, naar een deelverzameling van $\mathbb{R}$ die al een totale ordening heeft. Na de definitie geven we een voorbeeld van de ordening op basisnoten. [4]

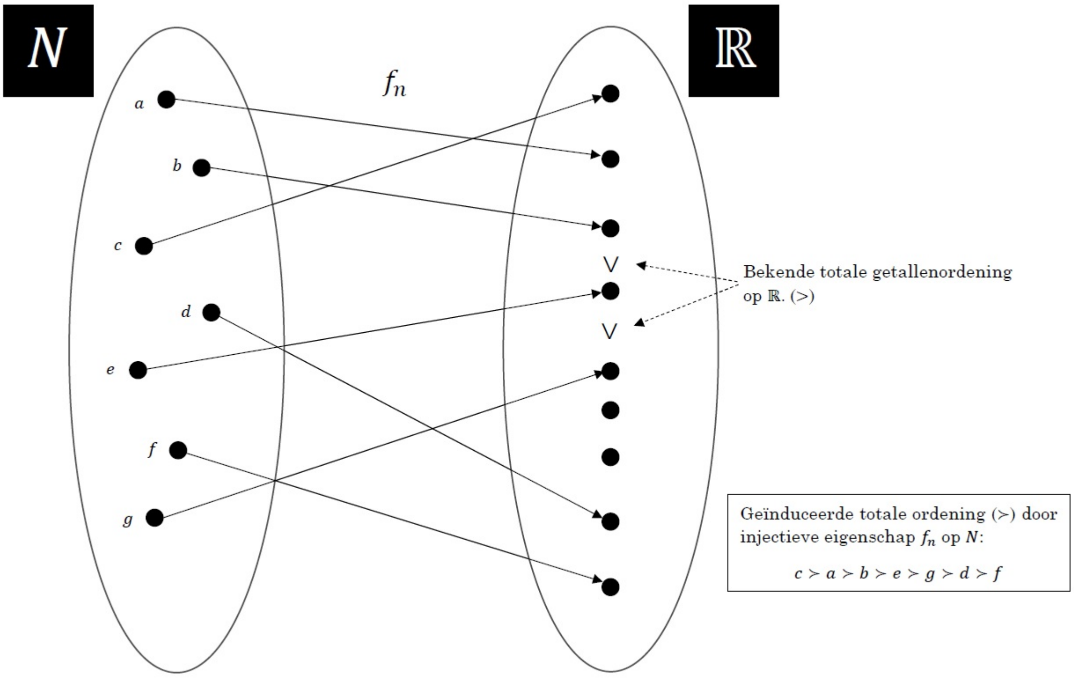
Definitie 5.2.1 (Ordening op noten)**.** Zij $x, y \in N$ en zij $f_n \in \mathcal{M}$. We zeggen dat x een grotere noot is dan y (notatie: $x \succ y$) als $f_n(x) > f_n(y)$. Dit is onafhankelijk van de gekozen f_n, aangezien geldt dat $f_n = n \cdot f_1$ en $n \in \mathbb{R}^+$.

□

Voorbeeld 5.2.1 (De ordeningsrelatie $\succ$)**.** Voor basisnoten is de ordening, gedefinieerd door *definitie 5.2.1*, als volgt gegeven:

⋯ ≻ 𝅝 ≻ 𝅗𝅥 ≻ ♩ ≻ ♪ ≻ 𝅘𝅥𝅯 ≻ 𝅘𝅥𝅰 ≻ ⋯

□



Figuur 5.5: *Een visuele representatie van het idee dat gebruikt wordt om een nieuwe totale ordening op te bouwen voor de noten (N) vanuit de reële getallen en zijn bekende ordening $>$ door lemma 5.2.1 toe te passen. Hoewel in er gegeven staat dat we vergelijkingen uitvoeren in de verzameling $\mathbb{R}$, moet het opgemerkt worden dat voor veel praktische gevallen de beschouwing van $\mathbb{Q}$ voldoende is. Alleen in eventuele abstracte uitbreidingen op noten zou $\mathbb{R}$ nodig zijn.*

We hebben met *definitie 5.2.1* niet alleen gewerkt aan doelstelling (1), maar ook doelstelling (2) van deze paragraaf, aangezien met betrekking tot de ordening alle maatsoorten een equivalente keuze vormen.

- **Samenvatting:** *We hebben een ordening op ritmische noten gemaakt uit maatsoorten. We hebben ook laten zien dat alle maatsoorten dezelfde ordening induceren.*

✍ Een norm op ritmische noten dankzij maatsoorten

We hebben nu met betrekking tot doelstelling (1) van deze paragraaf een ordening op ritmische noten gemaakt, maar we kunnen meer krijgen. Het zou bijvoorbeeld ook fijn zijn als we een norm op ritmische noten konden maken die ons vertelt hoe ver ze uit elkaar liggen. Als toepassing zou je hiermee bijvoorbeeld kunnen bepalen hoeveel twee nootvoorbeelden op elkaar lijken.

Om een norm op ritmische noten te maken, gebruiken we weer de maatsoorten. De maatsoorten rekenen immers de relatieve duur van ritmische noten uit, en het voelt intuïtief logisch dat twee ritmische noten "ver uit elkaar liggen" als de ene noot een veel grotere of kleinere relatieve duur heeft dan de andere. We definiëren de norm op ritmische noten dus als de absolute waarde van de relatieve duur van de noot:

Definitie 5.2.2 (Ritmische nootnorm)**.** Zij $f_n \in \mathcal{M}$ en $x \in N$. De f_n-nootnorm is gedefinieerd door

$$\|x\|_{f_n} = |f_n(x)|.$$

□

We tonen ten slotte nog aan dat *definitie 5.2.2* echt een norm is op de nootverzameling N. Dit zal geen grote uitdaging zijn, aangezien we gretig gebruik kunnen maken van het feit dat $|\cdot|$ een norm op de reële getallen vormt, alsmede van *lemma 5.2.1*.

Lemma 5.2.2. *De ritmische nootnorm is een norm op het moduul N.*

Bewijs. We lopen de axioma's voor een norm af en bewijzen dat *definitie 5.2.2* hiermee in overeenstemming is. We nemen allereerst $f_n \in \mathcal{M}$ willekeurig.

I. $\|\cdot\|_{f_n}$ is reëelwaardig, positief, en eindig.

Herinner dat $f_n : N \to \mathbb{R}$, dus voor alle $x \in N$ geldt dat $f_n(x) \in \mathbb{R}$, wat impliceert dat de getallennorm van $f_n(x)$ ook reëelwaardig is. De positiviteit en begrensdheid volgt uit het feit dat $|\cdot|$ een norm is.

II. $\|x\|_{f_n} \iff x = (0,0)$.

Herinner dat f_n injectief uit *lemma 5.2.1*. Herinner ook de lineariteit van f_n uit *stelling 5.1.1*. Samen impliceren deze dingen dat $\mathcal{N}(f_n) = \{(0,0)\}$. Dit, alsmede het feit dat $|\cdot|$ een norm is, bewijzen dit axioma.

III. $\|\alpha \cdot x\|_{f_n} = |\alpha| \cdot \|x\|_{f_n}$.

Toepassing van *stelling 5.1.1* (behoud van vermenigvuldiging) en het feit dat $|\cdot|$ een norm is geeft direct

$$\|\alpha \cdot x\|_{f_n} = |f_n(\alpha \cdot x)| = |\alpha \cdot f_n(x)| = |\alpha| \cdot |f_n(x)| = |\alpha| \cdot \|x\|_{f_n}.$$

IV. De driehoeksongelijkheid geldt

Toepassing van *stelling 5.1.1* (behoud van optelling) en het feit dat $|\cdot|$ een norm is geeft direct

$$\|x+y\|_{f_n} = |f_n(x+y)| = |f_n(x)+f_n(y)| \leq |f_n(x)| + |f_n(y)| = \|x\|_{f_n} + \|y\|_{f_n}.$$

Hiermee zien we dat aan alle axioma's voldaan is.

Q.E.D.

✍ Alle maatsoorten zijn equivalent

Nu we via doelstelling (1) een norm op noten hebben, kunnen we ons onderzoek naar doelstelling (2) afsluiten. Deze sectie gaat vaststellen dat alle maatsoorten equivalent aan elkaar zijn als norm. Het intuïtieve idee achter deze stelling is het feit dat $f_n = n \cdot f_1$. Omdat de norm is gebaseerd op de afbeelding van een ritmische noot onder een maatsoort, kunnen we hieruit concluderen dat alle maatsoorten equivalent zijn. Je zou misschien denken dat normequivalentie gratis komt, maar herinner je

▶ **Terugblik:** *Ritmische noten vormen een moduul.*

Normaal gesproken, als we noten hadden geformaliseerd als vectorruimte, zou deze eigenschap inderdaad gratis komen (in een eindig dimensionale vectorruimte zijn alle normen equivalent aan elkaar), maar aangezien wij zo nodig wilden kiezen voor een moduul, komt deze eigenschap helaas niet gratis. Gelukkig komt het wel bijna gratis.

Lemma 5.2.3. *Alle nootnormen zijn equivalent aan elkaar.*

Bewijs. We gaan dit laten zien met een directe berekening. We gebruiken hierbij de observatie dat $f_k = k \cdot f_1$. Zij allereerst $f_k, f_l \in \mathcal{M}$ willekeurig gegeven. We willen laten zien dat er een α is waarvoor geldt $\alpha \cdot \|x\|_{f_l} = \|x\|_{f_k}$. We nemen $(n,r) \in N$ willekeurig en een simpele berekening laat zien:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \|(n,r)\|_{f_l} &= \|(n,r)\|_{f_k}, \\ \alpha \cdot |f_l(n,r)| &= |f_k(n,r)|, \\ \alpha \cdot |l \cdot f_1(n,r)| &= |k \cdot f_1(n,r)|, \\ \alpha \cdot l &\overset{\star}{=} k, \\ \alpha &\overset{*}{=} \frac{k}{l}. \end{aligned}$$

Hier hebben we bij zowel $\star$ als $*$ gebruik gemaakt van het feit dat verschillende vermenigvuldigingsfactoren net gelijk aan nul zijn. Merk ook op dat, door het feit dat, per definitie, $k, l \in \mathbb{R}^+$, volgt dat $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Hiermee is het lemma bewezen.

Q.E.D.

▶ **Terminologie:** *We zullen het getal α uit bovenstaand bewijs de **vergelijkingsfactor van maatsoort f_k ten opzichte van maatsoort f_l** gaan noemen.*

▶ **Observatie:** *De factor die een maatsoort f_l omzet in maatsoort f_k is gegeven door k/l.*

Lemma 5.2.3 biedt ons in feite het formele bewijs waar we naar zochten: alle maatsoorten zijn op dit niveau van abstractie in zekere zin gelijk. Op het basisniveau van simpelweg het koppelen van een (relatieve) tijdsduur aan noten, maakt het eigenlijk niet uit welke maatsoort we hiervoor toepassen.

▶ **Samenvatting:** *Alle maatsoorten zijn equivalent aan elkaar. Wil je maatsoort f_l omzetten in f_k, vermenigvuldig dan met k/l.*

♫ Van geïnduceerde maatsoortnorm naar een muzikale paradox

Doel (2) van deze paragraaf is bereikt. De rest van deze paragraaf zal in het teken staan van het verder onderzoeken van doel (1). We hopen nog een norm te krijgen voor maatsoorten uit *definitie 5.2.2*, aangezien het fijn is om de "grootte" van een maat te kunnen bepalen. Herinner je het volgende

- ▶ **Terugblik:** *De ritmische nootnorm is gegeven door de absolute waarde van de afbeelding van een ritmische noot x onder een maatsoort f_n.*

De wiskunde zou ons normaal gesproken doorverwijzen naar de geïnduceerde operatornorm om een norm op onze maatsoortfunctionalen te bepalen. Deze zou zijn gegeven door

$$\|f_n\|_m = \sup_{x\in N}\left\{\frac{|f_n(x)|}{\|x\|_{f_m}}\right\} = \sup_{x\in N}\left\{\frac{n\cdot|f_1(x)|}{|f_m(x)|}\right\} = \sup_{x\in N}\left\{\frac{n\cdot|f_1(x)|}{m\cdot|f_1(x)|}\right\} = \frac{n}{m},$$

echter zijn er twee met problemen deze "standaard" operatornorm:

1. De geïnduceerde operatornorm is gedefinieerd voor vectorruimten; wij werken niet in een vectorruimte maar in een moduul.
2. Muzikaal doet de geïnduceerde operatornorm iets tegenintuïtiefs.

In de rest van deze sectie gaan we probleem 2 gebruiken om te beargumenteren dat we deze operatornorm niet willen gebruiken. In de volgende sectie gaan we proberen een meer intuïtieve operatornorm te construeren.

Observeer het volgende:

- ▶ **Observatie:** *De geïnduceerde maatsoortnorm baseert de grootte van een maatsoort op het aantal tellen dat iedere ritmische noot in die maatsoort krijgt.*

Het bovenstaande gevolg laat zien dat we een relatief simpele beschrijving hebben van de operatornorm van de verschillende maatsoorten: de vergelijkingsfactor. Deze simpele beschrijving zorgt ervoor dat we gemakkelijk de grootte van maatsoorten met elkaar kunnen vergelijken. Hier ontstaat echter ook een groot muzikaal probleem: de geïnduceerde maatsoortoperatornorm voelt niet intuïtief aan. Dit lichten we toe met het onderstaand paradoxale voorbeeld.

Voorbeeld 5.2.2 (Een maatsoortenparadox door de geïnduceerde maatsoortnorm)**.** Beschouw de maatsoorten f_2 en f_4 uit $\mathcal{M}$. Hierbij koppelen we f_2 aan de 2/2-maat en f_4 aan de 2/4-maat. Neem f_1 als maatsoort voor de ritmische nootnorm. Het zojuist bewezen gevolg van *lemma 5.2.3* vertelt ons dat voor de geïnduceerde maatsoort norm geldt dat

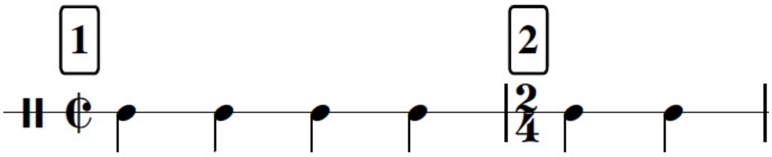
$$2 = \|f_2\| < \|f_4\| = 4.$$

Natuurlijk hangen deze getallen van de keus van de ritmische nootnorm af, maar het is aan de lezer aan te tonen dat voor alle keuzes van ritmische nootnorm zal gelden dat $\|f_2\| < \|f_4\|$.

Beschouw vervolgens *figuur 5.6*. Je ziet dat we muzikaal gezien een 2/2-maat met meer kwartnoten kunnen vullen dan een 2/4-maat. Intuïtief zou je dus zeggen dat de 2/2-maat, ofwel f_2, groter zou moeten zijn dan de 2/4-maat, ofwel f_4. Echter zegt de geïnduceerde maatsoortnorm, die de grootte van de wiskundige maatsoorten zou moeten bepalen, dat f_4 groter is dan f_2. Dit gaat tegen de intuïtie in. We worden dus als methode om de grootte van maatsoorten te berekenen niet heel vrolijk van de geïnduceerde operatornorm.

□

- ▶ **Samenvatting:** *We hebben de geïnduceerde operatornorm overwogen als norm op maatsoorten, echter leverde dit een paradox op.*



Figuur 5.6: *Bij (1) een 2/2-maat gevuld met kwartnoten en bij (2) een 2/4-maat gevuld met kwartnoten. (1) wordt gevuld door 4 kwartnoten, (2) door 2 kwartnoten.*

♫ Van begrip voor de paradox naar een betere "maatsoortnorm"

Intuïtief voelt de paradox die we zojuist hebben gezien raar aan, maar wiskundig is hij te verklaren. Herinner je hiertoe:

- **Terugblik:** *De geïnduceerde maatsoortnorm baseert de grootte van een maatsoort op het aantal tellen dat iedere ritmische noot in die maatsoort krijgt.*

Een maatsoort f is volgens de geïnduceerde operatornorm groter dan een andere maatsoort g als dezelfde ritmische noot in maatsoort f een langere relatieve duur krijgt toegewezen dan in maatsoort g. Merk op dat dit precies tegenovergesteld is aan wat wij intuïtief aanvoelen als een "grotere maat": wij baseren de grootte van een maat op het aantal gelijke ritmische noten die in een maat passen, voordat de maat "vol" zit (en dus het aantal tellen in de maat bereikt is).

Ons intuïtieve idee bij een maatsoortgrootte staat lijnrecht tegenover wat de geïnduceerde maatsoortnorm doet: voor onze begrippen is het nadelig als dezelfde ritmische noot een groter aantal tellen krijgt van de maatsoort; bij een vast aantal tellen in de maat passen er dan minder van dit soort ritmische noten in een maat. De maat wordt kleiner. Juist voor de geïnduceerde maatsoortnorm wordt de maatsoort dan juist groter. We lichten dit idee toe met een voorbeeld.

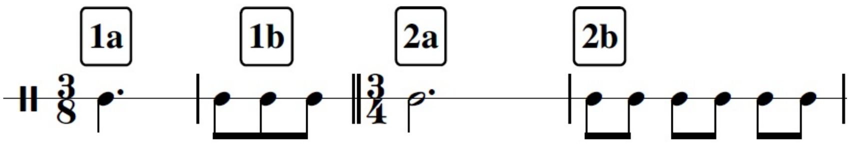
Voorbeeld 5.2.3 (Intuïtieve maatsoortgrootte en geïnduceerde maatsoortnorm vergeleken)**.** Dit voorbeeld heeft betrekking op het nootvoorbeeld in *figuur 5.7* en dient ertoe het interpretatief verschil aan te geven tussen de geïnduceerde maatsoortnorm die we al netjes gedefinieerd hebben, en de intuïtieve maatsoortgrootte die we graag willen. We beschouwen de 3/4- en 3/8-maat.

Allereerst beschouwen we de geïnduceerde maatsoort. Herinner je dat f_4 correspondeert met een 3/4-maat en dat f_8 correspondeert met een 3/8-maat. We nemen als referentie voor de ritmische nootnorm de maatsoort f_1. Het is aan de lezer aan te tonen dat $\|f_4\| = 4$ en $\|f_8\| = 8$. Het feit dat de 3/8-maat als groter wordt bestempeld als de 3/4-maat is te verklaren aan het feit dat de achtste noot in een 3/8-maat langer duurt dan in een 3/4-maat: de lezer kan gemakkelijk verifiëren dan $f_4(-2, 1) = 1/2$ en $f_8(-2, 1) = 1$. Een grotere relatieve duur voor een vaste ritmische noot impliceert dus een grotere maat.

Beschouw nu ons intuïtieve idee bij de grootte van een maatsoort: aan figuur (1b) en (2b) is te zien dat intuïtief de 3/4-maat groter is dan de 3/8-maat, aangezien er meer achtste noten in een 3/4-maat passen dan in een 3/8-maat. Het feit dat de 3/4-maat als groter wordt bestempeld dan de 3/8-maat is ook te verklaren via de relatieve duur van de achtste noot. In beide maten zitten drie tellen, echter duurt de achtste noot in de 3/8-maat langer dan in de 3/4-maat, dus passen er om die reden minder achtste noten in de 3/8-maat dan in de 3/4-maat. Daarom is de 3/8-maat intuïtief kleiner dan de 3/4-maat. Een grotere relatieve duur voor een vaste ritmische noot impliceert dus een kleinere maat.

□

Nu we de verschillen tussen de geïnduceerde maatsoortnorm en de intuïtieve maatsoortgrootte kennen, kunnen we een afgewogen keuze maken welke we als maatsoortgrootte willen gebruiken. In dit verslag kiezen wij voor een formalisering van de intuïtieve variant. Om te snappen wat de



Figuur 5.7: *Een 3/8-maat (1) en een 3/4-maat (2). In (a) is steeds de muzikale noot weergegeven die één maat "opvult" en in (b) is steeds het aantal achtste noten weergegeven dat de maat "opvult".*

formalisering van de intuïtieve maatsoortgrootte hoopt te vangen, kijk nogmaals naar *figuur 5.7*, maar nu naar de (a) maten. Observeer de volgende dingen:

- **Observatie:** *Intuïtief is de 3/4-maat groter dan de 3/8-maat.*
- **Observatie:** *Volgens onze ritmische nootordening geldt voor de formalisering van de enkelgepunteerde kwartnoot* $(-1, 3/2)$ *en enkelgepunteerde halve noot* $(0, 3/2)$ *dat* $(0, 3/2) \succ (-1, 3/2)$.
- **Observatie:** *Voor de "grotere maat" is de ritmische noot die de hele maat opvult (en dus 3 tellen duurt) een grotere noot volgens definitie 5.2.1.*

We kunnen de drie observaties gebruiken om de intuïtieve maatsoortgrootte formeel te maken. Gegeven twee maatsoorten f en g, geldt dat f een grotere maatsoort is dan g als de ritmische noot die een maat in maatsoort f opvult groter is dan de ritmische noot die een maat in maatsoort g opvult.

- **Terugblik:** *Zij een muzikale maatsoort* t/n *gegeven. De (ritmische) noot* $x \in N$ *die een maat uit maatsoort* t/n *opvult, is gegeven door* $t/n \cdot (1, 1)$.

Uit deze terugblik zien we dat de noot die een maatsoort opvult, gegeven is door een hele noot, vermenigvuldigd met een factor t/n. Er geldt dus dat de maatsoort t/n groter is, als t/n als breuk groter is. Hiermee hebben we dus de eis voor een intuïtief "grotere" maat(soort) gevonden:

- **Observatie:** *Gegeven een muzikale maatsoort* t_1/n_1 *geldt dat deze maatsoort "groter" is dan een andere muzikale maatsoort* t_2/n_2 *als voor de breuken geldt dat* $t_1/n_1 > t_2/n_2$.

Conclusie. *We hebben in dit hoofdstuk een wiskundige blik geworpen op maatsoorten. Qua theorie hebben de maatsoort gedefinieerd als een functionaal die noten op getallen afbeeldt. We hebben laten zien dat deze afbeelding een monomorfisme is, en in bijzondere gevallen zelfs een isomorfisme. Qua toepassing hebben we maatsoorten gebruikt om de noten in het gareel te krijgen door er een ordening op te forceren via de reële getallen. Ook hebben we een norm op noten weten te definiëren met maatsoorten, waarmee we hard konden maken dat op dit niveau van abstractie alle maatsoorten in zeker zin gelijk aan elkaar zijn en dat de keus voor een maatsoort over een andere slechts een arbitraire is. Ten slotte hebben we gezien dat soms een maatsoort zien als breuk toch best handig kan zijn om de grootte van een maatsoort aan te geven (terwijl een maatsoort natuurlijk geen breuk is). Dit laatste onderdeel heeft ons een belangrijke algemene wiskundige les geleerd: als strikt gezien x ongelijk aan y is, kan het soms nog wel handig zijn om x en y even stiekem wél als gelijk te zien!*

5.3 Toepassingen

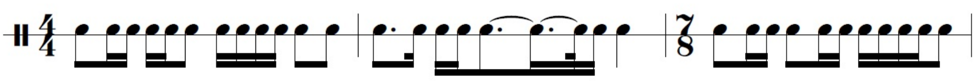
We hebben weer even voldoende harde muziektheorie en wiskunde gedaan. Laten we weer gaan kijken wat voor soort dingen we met de huidige theorie zouden kunnen. Net als in *paragraaf 4.3* geven we drie toepassingen. Eén toepassing zal weer in de muziekuitvoering liggen, en twee in de techniek van/voor het componeren van muziekstukken.

♫ Noten lezen en maatsoorten schatten

- ▶ **Terugblik:** *Definitie 5.1.1 kan de relatieve duur van een muzikaal notenvoorbeeld snel uitrekenen*
- ▶ **Terugblik:** *Wil je een schatting van de grootte van een maat? Kijk naar de "maatsoortbreuk".*

We kijken weer even naar de drummer van de introductie. Hij speelt nu een snare-drum partij en in deze partij komt hij het nootvoorbeeld tegen, weergegeven in *figuur 5.8.* Twee dingen vallen voor de drummer op:

1. Hij moet twee maatsoorten uitvoeren. De "standaard" 4/4-maat en een voor hem onbekende 7/8-maat.
2. Hij moet een nootvoorbeeld uitvoeren dat er vervelend uitziet: een enkelgepunteerde achtste noot, verbonden met een enkelgepunteerde zestiende noot, verbonden met een tweeëndertigste noot.



Figuur 5.8: *Een drumpartij met twee maatsoorten en één raar opgeschreven noot.*

Ad (1)
De drummer heeft nog nooit een 7/8-maat gespeeld, en hij vraagt zich af of de maten in deze maatsoort langer of korter gespeeld moeten worden dan de maten in de 4/4-maat. De drummer herinnert zich gelukkig dat de maatsoortbreuken een indicatie geven van de lengte van de maten in de maatsoort. De drummer observeert dan dat $4/4 = 1 > 7/8$, en dus dat de 7/8-maat per maat korter duurt dan de 4/4-maat.

De drummer kan zelfs nog een stapje verder in deze redenering gaan. De drummer is ook bekend met de 3/4-maat, en observeert dat $3/4 < 7/8 < 1 = 4/4$. Hij weet nu dus dat iedere maat in een 7/8-maat qua duur precies tussen de 4/4-maat en 3/4-maat in zitten. Met deze informatie heeft hij een idee gekregen over het gevoel dat hij moet hebben bij de 7/8-maat, en kan hij deze maat met een gerust hart spelen.

Ad (2)
Dat ene rare nootvoorbeeld in de 4/4-maat jaagt de drummer wel angst aan: hoe lang moet je dit uitvoeren? Gelukkig heeft de drummer deze partituur op een tablet in laten lezen door een programmaatje dat de rekenstructuur heeft aangeleerd uit dit hoofdstuk. De tablet herkent dat er een enkelgepunteerde achtste noot, een enkelgepunteerde zestiende noot en een tweeëndertigste noot met elkaar verbonden zijn. Als ritmische noot weet de tablet dat dit gegeven is door:

$$\binom{-2}{3/2} + \binom{-3}{3/2} + \binom{-4}{1} = \binom{-1}{3/2}.$$

De tablet weet nu niet alleen dat dit rare nootvoorbeeld equivalent is aan de enkelgepunteerde kwartnoot, maar ook dat de relatieve duur hiervan in een vierkwartsmaat gegeven is door:

$$f_4(-1, 3/2) = 4 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot 2^{-1-1} = \tfrac{3}{2} \text{ tel.}$$

De tablet beeldt de zojuist gevonden relatieve duur af op de PDF van het muziekstuk en de drummer hoeft zich geen zorgen meer te maken: hij weet nu precies wat de relatieve duur is en kan deze uitvoeren.

We kunnen dus met de rekentechnieken ontworpen in deze paragraaf niet alleen ten alle tijden een schatting maken van de lengte van een maat (in een maatsoort), maar we kunnen ook de precieze relatieve duur bepalen van moeilijke nootvoorbeelden.

✍ Het (nogmaals) verbeteren van een compositieprogramma

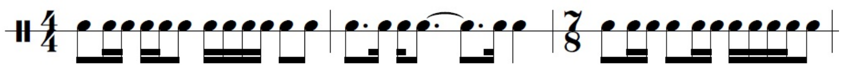
▶ **Terugblik:** *Elke maatsoort is een bijectie tussen $N_{(2)}$ en $\mathbb{Z}_2$.*

Kijk nogmaals naar *figuur 5.8*, maar deze keer als de componist van dit werk. Het is in dit notenvoorbeeld duidelijk te zien dat de componist geen idee had hoe hij het muzikale idee dat hij had, moest opschrijven. Waarschijnlijk wist hij alleen dat hij bij die rare verbinding van noten iets wilde dat 3/2 tel duurt, maar niet wist wat hij ervoor moest opschrijven.

We kunnen met onze wiskundige machinerie een compositieprogramma verbeteren door het compositieprogramma dit soort componist te laten helpen. Aangezien iedere maatsoort een bijectie tussen $N_{(2)}$ en $\mathbb{Z}_2$ is, kunnen we de inverse van iedere maatsoort in het compositieprogramma inbouwen.

Wanneer de inverse is ingebouwd, hoeft de componist alleen maar in te voeren dat hij een noot wil die 3/2 tel duurt. Het compositieprogramma bepaalt vervolgens dat de componist de ritmische noot $(-1, 3/2)$ nodig heeft en vertaalt deze ritmische noot terug naar een muzieknoot (enkelgepunteerde kwartnoot) die de het programma vervolgens invoert. Dit is nog geen ideale muzikale weergave van wat de componist wil, maar het is in ieder geval beter dan wat de componist zelf produceerde in *figuur 5.8*.

Als we dit idee een beetje slim programmameren, zouden we ervoor kunnen zorgen dat het compositieprogramma ook nog eens de ritmische noot terugvertaald naar een "slim" notenvoorbeeld. Zo zou in het ideale geval het compositieprogramma ervoor zorgen dat dat *figuur 5.8* wordt herschreven tot *figuur 5.9*.



Figuur 5.9: *Een fijnere herschrijving van het notenvoorbeeld in figuur 5.8*

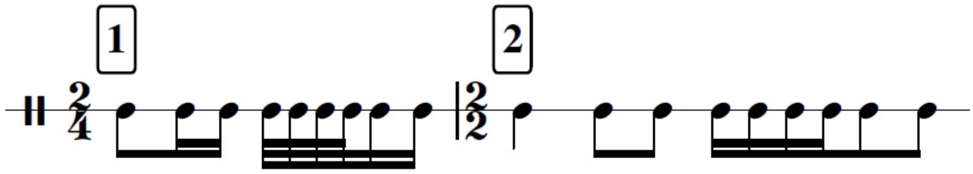
We hebben in ieder geval gezien dat we onze wiskundige machinerie kunnen gebruiken om compositieprogramma's te verbeteren: met onze machinerie is het mogelijk voor de componist om een relatieve duur in te voeren, waarna het programma zelf een notenvoorbeeld opschrijft met de gevraagde relatieve duur.

✍ Het converteren van twee maatsoorten na elkaar

▶ **Terugblik:** *De vergelijkingsfactor van maatsoort f_k ten opzichte van f_l is gegeven door k/l.*

Stel je voor: je bent een componist en je hebt de passage geschreven die in *figuur 5.10* onderdeel (1) is weergegeven. Je hebt je muzikale idee zo logisch mogelijk proberen op te schrijven, maar merkt dat de passage niet heel vriendelijk oogt. Je hebt de passage in een 2/4-maat geschreven en je herinnert je uit de muziektheorie dat een 2/2-maat gebruikt kan worden om drukke ritmische figuren er "rustiger" uit te laten zien (zie *figuur 5.10* onderdeel (2)). Je besluit dus de 2/4-maat om te zetten in een 2/2-maat.

Theoretisch is deze omzetting heel makkelijk: deel gewoon alle ritmische noten die corresponderen met het nootvoorbeeld door 2 en je nieuwe passage is er; de vergelijkingsfactor tussen wiskundige



Figuur 5.10: *Dezelfde maat weergegeven in een 2/4-maat (1) en in een 2/2-maat (2).*

maatsoort f_2 ten opzichte van f_4 is immers $2/4 = 1/2$. Praktisch is het echter minder feest: het (standaard) compositieprogramma kan niet rekenen, dus moet jij alles met de hand doen.

Een compositieprogramma voorzien van de rekentechnieken besproken in dit hoofdstuk zou het de omzetting van 2/4- naar 2/2-maat wél automatisch kunnen doen. Dit programma formaliseert de muzikale noten simpelweg (ook) als ritmische noten, en voert de beschreven operatie zelf uit, en vertaalt de nieuwe ritmische noten terug naar muzikale noten. De componist hoeft geen kostbare tijd besteden aan zelf de omzetting doen!

Hoofdstuk 6

Antimetrische figuren als muziekuitbreiding

In de voorafgaande hoofdstukken hebben we nagedacht over de formalisering van muzikale noten, alsmede hun vertaling naar relatieve duur. In deze vertaling hebben we gefocust op muzikale/ritmische noten van categorie I en II. Voor veel musici liggen de moeilijkheden echter bij categorie III en IV noten: de noten die op één af andere manier iets te maken hebben met antimetrische figuren.

De moeilijkheden die musici ervaren met antimetrische figuren zitten verborgen in hun doel. We zijn in de muziek gewend dat noten steeds een relatieve duur d hebben, waarvoor geldt dat $d \in \mathbb{Z}_2$. Antimetrische figuren, daarentegen, zijn opeenvolgingen van m (dezelfde) noten in de tijd van n. Iedere (individuele) noot van deze m kan hierdoor een relatieve duur krijgen die niet per se meer een element van $\mathbb{Z}_2$ is. Het doel van antimetrische figuren is dus het creëren van "onnatuurlijke" relatieve duren (die geen element van $\mathbb{Z}_2$ zijn).

Neem als voorbeeld de partituur weergegeven in *figuur 6.1* en stel je voor dat jij de solo viool (bovenste regel) moet uitvoeren. Een solopartij is vaak een zeer geavanceerde partij vol met lastige melodische en ritmische elementen die alleen een virtuoos kan uitvoeren. Deze solopartij laat zich kenmerken door veel zestiende triolen.

Figuur 6.1: *Een deel uit de (bewerkte) eerste viool partituur van het nummer "Lulu and Shaco's Quicky Encounter" uit het spel "League of Legends". Het nummer is gecomponeerd door Christian Linke en gearrangeerd door Andrés Soto. Gegeven is dat de maatsoort een 4/4-maat is.*

Je denkt nu misschien dat deze solopartij ritmisch niet heel moeilijk is; je kunt waarschijnlijk de relatieve duur van de noten in de zestiendentriool bepalen (1/6 tel per noot). Toch moet je je niet in de moeilijkheidsgraad vergissen: we hebben in de voorafgaande hoofdstukken gezien dat musici getraind zijn in het denken in $\mathbb{Z}_2$. Triolen dwingen de muzikant om uit deze "comfort zone" te stappen en na te denken over relatieve duren buiten $\mathbb{Z}_2$. Het moet hierbij opgemerkt worden dat de drie noten uit een triool samen (per definitie) wel een relatieve duur uit $\mathbb{Z}_2$ hebben.[1] De individuele noten in een triool hoeven zo'n relatieve duur niet te hebben; net als in de rest van het verslag focussen we dus weer of het formaliseren van individuele noten (uit een triool of ander antimetrisch figuur).

Het feit dat triolen (en andere antimetrische figuren) lastig uit te voeren zijn, maakt het van praktisch belang dat we ook dit soort noten kunnen formaliseren. We kunnen met de formalisering bijvoorbeeld de solist uit *figuur 6.1* helpen bij het nadenken over de triolen in zijn solopartij. Daarnaast kan het hem/haar ook helpen bij het nadenken over antimetrische figuren in andere stukken, onafhankelijk in welke hoedanigheid ze voorkomen.

Het feit dat triolen (en andere antimetrische figuren) muzikaal de verzameling $\mathbb{Z}_2$ lijken uit te breiden, maakt het van theoretisch belang dat we dit soort noten kunnen formaliseren. Door de formalisering te maken, kunnen we enerzijds kijken óf een antimetrisch figuur iets aan de (ritmische) noten toevoegt (en niet gewoon een andere schrijfwijze voor een al bekend notenvoorbeeld blijkt te zijn), en kunnen we anderzijds kijken wat een antimetrisch figuur precies toevoegt.

Al met al gaan we in dit hoofdstuk dus kijken naar categorie III en IV noten. We beschouwen de theoretische en praktische kwesties in dit hoofdstuk in de volgende stappen:

- *Paragraaf 6.1:* Een beschouwing van alleen duolen en triolen.
- *Paragraaf 6.2:* Vanuit de theorie over duolen en triolen naar een definitie van algemene antimetrische figuren.
- *Paragraaf 6.3:* Een beschouwing van antimetrische figuren in zijn algemeenheid.
- *Paragraaf 6.4:* Een beschouwing van de theorie achter antimetrische nesting.[2]
- *Paragraaf 6.5:* Een aantal toepassingen bij de theorie van dit hoofdstuk.

6.1 Duolen en triolen: notationele last of muzikale goudmijn?

In deze sectie gaan we kijken naar duolen en triolen. Een beschouwing van deze specifieke antimetrische figuren is enerzijds nuttig, aangezien dit de meest voorkomende antimetrische figuren in de muziek zijn. Anderzijds is het nuttig, aangezien we door deze voorbeelden van antimetrische figuren te onderzoeken een goed opstapje krijgen naar het onderzoeken van algemene antimetrische figuren in *paragraaf 6.2*.

We zullen in deze paragraaf eerst duolen behandelen en dan triolen. In de behandeling van een antimetrisch figuur focussen we ons eerst op de praktijk: het uitbreiden van muzikale rekenmachine. Vervolgens focussen we ons op de theorie. We kijken hier of we via duolen en triolen categorie II noten kunnen omzetten in categorie III (of IV) noten en niet simpelweg in categorie II vast blijven zitten.

♫ Duolen: van muzikaal concept naar formele definitie

Herinner je uit *paragraaf 2.4* het volgende over duolen:

[1] De drie noten uit een achtstentriool bijvoorbeeld duren per definitie even lang als twee "normale" achtste noten. De twee "normale" achtste noten hebben samen een duur uit $\mathbb{Z}_2$, de drie noten in de triool dus ook.

[2] Het schrijven van antimetrische figuren in antimetrische figuren.

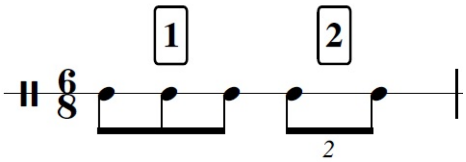
- **Terugblik:** *Antimetrisering*[3] *is het vervangen van een aantal even lange noten door meer of minder even lange noten.*
- **Terugblik:** *Om in de muziek een duool te vormen pak je een groep van 3 gelijke noten, en vervang je deze door 2 gelijke noten.*
- **Terugblik:** *De relatieve duur van de groep vóór een antimetrisering is even lang als de relatieve duur van de groep noten ná de antimetrisering.*

Ergo, als een groep van drie dezelfde noten x tellen duurt, dan duurt iedere individuele noot uit die groep $x/3$ tellen. Na vorming van de duool hebben we een groep van twee dezelfde noten die x tellen duurt. Iedere noot uit de duool duurt dus $x/2$ tellen. We geven een voorbeeld.

Voorbeeld 6.1.1 (Achtstenduool in een 6/8-maat)**.** Dit voorbeeld dient ertoe om de abstracte berekening van de relatieve duur van noten uit een duool toe te lichten. Beschouw het notenvoorbeeld in *figuur 6.2*. We zien hierin een groep van drie achtste noten (1) en een groep van twee achtste noten in een achtstenduool (2). Het getal twee bovenop de achtstenduool geeft aan dat we hier niet te maken hebben met twee "normale" achtsten, maar met twee achtsten die even lang duren als een ander aantal "normale" achtste noten (in dit geval 3). Als we een achtstenduool maken, kunnen we zeggen dat (1) de situatie vóór de antimetrisering is: een groep van drie achtste noten. (2) is vervolgens de situatie ná de antimetrisering: een groep van twee achtste noten.

We hebben hier te maken met een 6/8-maat. Het is aan de lezer om na te gaan dat (1) in totaal 3 tellen duurt. Het is vervolgens niet moeilijk in te zien dat iedere individuele uit nootvoorbeeld (1) dus $3/3 = 1$ tel duurt. In (2) duurt na de antimetrisering het groepje van twee achtste noten nog steeds 3 tellen, dus duurt iedere individuele noot in de duool 3/2 tel. De ratio van relatieve duur tussen individuele noten uit (2) en individuele noten uit (1) is vast: 3/2. Het is aan de lezer zich ervan te overtuigen dat deze ratio hetzelfde is, onafhankelijk van de groep (drie dezelfde) noten waarmee we in (1) starten.

□



Figuur 6.2: *Het notenvoorbeeld bij voorbeeld 6.1.1.*

- **Observatie:** *De relatieve duur van individuele noten na en voor antimetrisering (tot duool) heeft een vaste ratio: 3/2.*

Stel dat we een operatie hadden, $\mathcal{A}_2$, die van een basisnoot[4] de corresponderende ritmische noot zou construeren die na antimetrisering (tot duool) verschijnt, dan zouden we uit de observatie verwachten dat $\mathcal{A}_2(x) = 3/2 \cdot x$ voor alle $x \in N$. Intuïtief hebben we hier gelijk in: het antimetriseren van een (aantal) noten vermenigvuldigt hun relatieve duur met een factor; we zouden dus zeggen dat een antimetriseringsoperatie (zoals $\mathcal{A}_2$) via een vermenigvuldiging te definiëren is.

Formeel hebben hier echter niet altijd gelijk in. We kunnen niet garanderen dat de vermenigvuldigingsfactor altijd in $\mathbb{Z}_2$ ligt. Als de vermenigvuldigingsfactor hier niet in ligt, dan mogen we formeel een ritmische noot $x \in N$ niet vermenigvuldigen met deze factor. We proberen de definitie van $\mathcal{A}_2$ dus te vinden via een "moeilijkere" weg die hopelijk in zijn algemeenheid beter werkt. Met bovenstaande observatie volgt ook:

$$\frac{f(\mathcal{A}_2(x))}{f(x)} = \frac{3}{2}.$$

[3]Het omvormen van één of meer noten tot een antimetrische figuur (eigen begrip).
[4]In de definitie later generaliseren we dit naar alle ritmische noten.

Hierbij is $f \in \mathcal{M}$ en $x \in N\backslash\{0\}$ willekeurig. Met wat eenvoudige manipulatie kunnen we een descriptie vinden van $\mathcal{A}_2$ voor willekeurige $x \in N$ (die overeenkomt met de intuïtie). We gebruiken in deze herschrijving twee belangrijke terugblikken en een observatie uit de functionaalanalyse. [11]

- **Terugblik:** *Iedere $f \in \mathcal{M}$ is een inverteerbare lineaire functionaal. (Stelling 5.1.1 en lemma 5.2.1)*
- **Observatie:** *De inverse van een inverteerbare lineaire functionaal is ook een lineaire functionaal.*
- **Terugblik:** *3/2 is een element van $\mathbb{Z}_2$.*

$$\begin{aligned} f(\mathcal{A}_2(x)) &= \tfrac{3}{2} \cdot f(x), \\ f^{-1}(f(\mathcal{A}_2(x))) &= f^{-1}\left(\tfrac{3}{2} \cdot f(x)\right), \\ \mathcal{A}_2(x) &= \tfrac{3}{2} \cdot f^{-1}(f(x)), \\ \mathcal{A}_2(x) &= \tfrac{3}{2} \cdot x. \end{aligned}$$

Voor de rest van deze paragraaf geven we deze afleiding aan met (♠). We observeren uit (♠) het volgende:

- **Observatie:** *We kunnen de operatie die duolen maakt uit ritmische noten $x \in N$ door middel van een vermenigvuldiging met 3/2 definiëren.*

Definitie 6.1.1 (Ritmische duoolnoten)**.** Zij $x \in N$. De operatie $\mathcal{A}_2 : N \to N$, die ritmische duoolnoten $\mathcal{A}_2(x)$ maakt, is gegeven door

$$\mathcal{A}_2(x) = \frac{3}{2} \cdot x$$

□

- **Observatie:** *Muzikaal bestaan duolen altijd uit twee noten. Onze definitie beschrijft steeds één van de twee noten uit een duool, omdat wij het over* ***individuele*** *noten hebben.*
- **Waarschuwing:** *Wij nemen (dus) aan dat ritmische noten uit een antimetrisch figuur "los" kunnen voorkomen; ze hoeven niet per se in een groep te staan.*
- **Observatie:** *Wij hebben stiekem het concept antimetrische figuur uitgebreid. Wij zeggen dat $\mathcal{A}_2$ op alle ritmische noten uit N kan werken, terwijl een musicus zou stellen dat het alleen op noten uit N_b kan werken.*

We eindigen deze sectie met een zuiver rekenvoorbeeld, waarin we onze generalisatie van antimetrische figuren testen tegen de intuïtie uit de werkelijkheid.

Voorbeeld 6.1.2 (Een enkelgepunteerde kwartenduool in een 9/8-maat)**.** We beschouwen enkelgepunteerde kwarten in een 9/8-maat. Het is aan de lezer aan te tonen dat in een 9/8-maat een enkelgunteerde kwartnoot 3 tellen duurt. Samen duren drie enkelgepunteerde kwartnoten dus de volle negen tellen. De definitie in *paragraaf 2.4* volgend, zegt nu, wanneer we van deze drie enkelgepunteerde kwartnoten een duool proberen te maken, dat twee noten de volle 9 tellen moeten opvullen. Ergo, iedere noot in deze abstracte duool zou $4\frac{1}{2}$ tel moeten duren.

Wanneer we er onze formalisering op naslaan, nemen we de maatsoort $f_8 \in \mathcal{M}$. Verder weten we dat de enkelgepunteerde kwartnoot is gegeven door $x = (-1, 3/2)$. *Definitie 6.1.1* volgend, vertelt nu dat de corresponderende duoolnoot gegeven zou moeten worden door[5]

$$\mathcal{A}_2(-1, 3/2) = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9/8 \end{pmatrix}.$$

Het uitrekenen van de relatieve duur van deze nieuwe noot onder maatsoort f_8 geeft ten slotte inderdaad

$$f_8(0, 9/8) = 8 \cdot \frac{9}{8} \cdot 2^{-1-0} = 4\tfrac{1}{2}.$$

Ergo, de generalisatie van de duool voldoet in dit geval aan de intuïtie.

□

- ► **Samenvatting:** *We hebben individuele noten uit een duool geformaliseerd door een vermenigvuldiging van ritmische noten met* 3/2.

✍ Duolen, we kunnen best zonder

- ► **Terugblik:** *In de muziek duurt het groepje van twee noten na antimetrisering even lang als het groepje van drie noten voor antimetrisering.*

Op dit punt hebben we de praktijkkwestie voor duolen behandeld. We hebben duolen aan onze muzikale rekenstructuur toegevoegd. Nu gaan we het hebben over de theoretische eigenschappen van duolen. Het doel hierin is aan te tonen dat $\mathcal{A}_2$ toepassen op een element uit $N_{(2)}$ geen nieuwe ritmische noot buiten $N_{(2)}$ oplevert. Ergo, het antimetriseren van categorie II noten als duool levert geen nieuwe noten op; duolen zijn extra notatie voor reeds bekende noten, en kunnen dus best uit het muzikale systeem verwijderd worden.

Om dit aan te tonen, geven we eerst een voorbeeld van de beoogde eigenschap, dan bewijzen we twee (bijna triviale) eigenschappen, en ten slotte tonen we aan dat duolen notationele ballast vormen. De twee triviale eigenschappen die we gaan bewijzen, zijn:

1. De (muzikale) terugblik geldt ook voor de ritmische duoolnoten. (noten $\mathcal{A}_2(x)$ uit *definitie 6.1.1*)
2. $\mathcal{A}_2|_{N_b}$ is dezelfde operatie als enkele puntering.

Voorbeeld 6.1.3 (Duolen voegen niets nieuws toe)**.** Het doel van dit voorbeeld is anekdotisch aantonen dat duolen notationele ballast zijn. Hiertoe beschouwen we de kwartnoot $(-1, 1)$. Als we hiervan de bijpassende noot in een duool construeren, vinden we

$$\mathcal{A}_2(-1, 1) = (-1, 3/2).$$

Herken de ontstane ritmische noot als een enkelgepunteerde kwartnoot. Ergo, het omvormen van een kwartnoot tot een noot uit een kwartenduool is hetzelfde als de kwartnoot simpelweg enkel punteren. Duolen zijn in dit geval extra muzikale notatie voor een reeds bekend muzikaal concept.

□

Lemma 6.1.1. *Er geldt voor alle* $f \in \mathcal{M}$ *en voor alle* $x \in N$ *dat* $2 \cdot f(\mathcal{A}_2(x)) = 3 \cdot f(x)$.

Bewijs. Lees afleiding (♠) van achter naar voren en het te bewijzen komt vanzelf naar voren. **Q.E.D.**

Gevolg. *Er geldt* $\mathcal{A}_2|_{N_b} = \bullet_1$.

[5] Met $\mathcal{A}_2(-1, 3/2)$ bedoelen we $\mathcal{A}_2(x)$, waarbij $x = (-1, 3/2)$. Formeel zouden we eigenlijk moeten schrijven als $\mathcal{A}_2((-1, 3/2))$, maar in dit verslag zullen we slechts enkele haakjes gebruiken.

Bewijs. We weten uit *definitie 4.2.2* dat $\bullet_1 : N_b \to N$, gegeven door $\bullet_1(x) = \frac{3}{2} \cdot x$. Vervolgens vinden we direct, opmerkende dat $\mathcal{A}_2|_{N_b} : N_b \to N$, vanuit *definitie 6.1.1* dat zij overeenkomt met *definitie 4.2.2*.

Q.E.D.

Voor de rest van deze sectie staan we stil bij een bijzondere eigenschap van duolen. De argumentatie is gebaseerd op de volgende twee terugblikken:

- **Terugblik:** *De factor die gebruikt wordt om duolen te maken, 3/2, ligt in* $\mathbb{Z}_2$.
- **Observatie:** *Noten antimetriseren tot duool is hetzelfde als de noot enkel punteren. Ofwel, voor* $x \in N_b$ *geldt dat* $\mathcal{A}_2(x) = \bullet_1(x)$.

De hele reden waarom afleiding (♠) werkte, is omdat 3/2 toevallig in $\mathbb{Z}_2$ ligt. Bij deze fijne eigenschap binnen de formalisering ligt ook de duool zijn muzikale zwakte. Het bovenstaande gevolg stelt dat voor basisnoten het creëren van een duool overeenkomt met het enkelpunteren van de noot. Deze eigenschap impliceert dat duolen in zekere zin overbodig zijn, aangezien de duolen muzikaal niets nieuws aan ons systeem toevoegen met betrekking tot relatieve duur; het zijn herschrijvingen van enkelgepunteerde noten.

Om deze bewering wiskundig extra kracht bij te zetten, observeren we het volgende:

- **Observatie:** *Categorie III (en IV) noten worden door antimetrisering gevormd uit categorie I (en bij extensie II) noten.*

We merken op dat $N_{(2)}$ de verzameling categorie II ritmische noten (*definitie 4.2.3*) is. Als zou gelden dat $N_{(2)}$ gesloten is onder $\mathcal{A}_2$, dan hebben we laten zien dat $\mathcal{A}_2$ eigenlijk geen nieuwe categorie III noten produceert; we kunnen duolen schrijven als categorie II noten. Ergo, we hebben dan aangetoond dat duolen alleen notationele ballast met zich meebrengen.

Stelling 6.1.2 (Duolen zijn notationele ballast)**.** *$N_{(2)}$ is gesloten onder $\mathcal{A}_2$.*

Bewijs. Zij $x \in N_{(2)}$ gegeven. *Stelling 4.2.4* volgt dat we x kunnen schrijven als

$$x = \alpha \cdot y,$$

waarbij $y \in N_b$ en $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. Er volgt nu uit *definitie 6.1.1* dat

$$\mathcal{A}_2(x) = \frac{3}{2} \cdot \alpha \cdot y,$$

Merk nu op dat uit *lemma 4.1.1* volgt dat $\beta = \frac{3}{2} \cdot \alpha \in \mathbb{Z}_2$. Ergo, we kunnen schrijven

$$\mathcal{A}_2(x) = \beta \cdot y.$$

Dit impliceert ten slotte dat $\mathcal{A}_2(x) \in N_{(2)}$, wat de stelling bewijst.

Q.E.D.

- **Samenvatting:** *Het blijkt dat duolen uit categorie II noten slechts categorie II noten kunnen produceren en geen categorie III (of IV) noten. Hierdoor blijken duolen slechts notationele ballast te zijn.*

♫ Triolen: van muzikaal concept naar formele definitie

Duolen zijn vanuit een wiskundig standpunt niet heel erg interessant. We hopen nu dat triolen dan een muzikaal goudmijntje vormen en ons wel tot de categorie III (of IV) noten kunnen brengen vanuit categorie II. Om tot de definitie van triolen te komen, denken we weer terug aan *paragraaf 2.4* en observeren we:

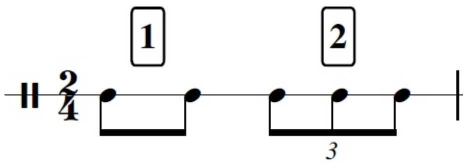
- ▶ **Terugblik:** *Om een triool te maken, vervangen we een groep van twee dezelfde noten door een groep van drie dezelfde noten.*
- ▶ **Terugblik:** *De relatieve duur van de groep voor de antimetrisering moet even lang zijn als de relatieve duur van de groep na de antimetrisering.*

Ergo, als een groep van twee noten x tellen duurt dan duren na antimetrisering drie noten x tellen. Voor de vervanging duurt iedere noot dus $x/2$ tellen, en na de vervanging $x/3$ tellen. Net als bij duolen geven we een voorbeeld.

Voorbeeld 6.1.4 (Een achtstentriool in een 2/4-maat)**.** Dit voorbeeld dient ertoe om de abstracte berekening van de relatieve duur van noten uit een triool toe te lichten. Beschouw het notenvoorbeeld in *figuur 6.3*. We zien hierin een groep van twee achtste noten (1) en een groep van drie achtste noten in een achtstentriool (2). Analoog aan het getal 2 op een duool, geeft het getal 3 op de triool aan dat dit niet opgevat moet worden als drie "normale" achtsten, maar als drie achtsten die even lang duren als een groter of kleiner aantal "normale achtsten" (in dit geval 2). Als we een achtstentriool maken, kunnen we zeggen dat (1) de situatie vóór de antimetrisering is: een groep van twee achtste noten. (2) is vervolgens de situatie ná de antimetrisering: een groep van drie achtste noten.

We hebben hier te maken met een 2/4-maat. Het is aan de lezer om na te gaan dat (1) in totaal 1 tel duurt. Het is vervolgens niet moeilijk in te zien dat iedere individuele noot uit nootvoorbeeld (1) dus 1/2 tel duurt. In (2) duurt na de antimetrisering het groepje van drie achtste noten nog steeds 1 tel, dus duurt iedere individuele noot in de triool 1/3 tel. De ratio van relatieve duur tussen individuele noten uit (2) en individuele noten uit (1) is vast: $(1/3)/(1/2) = 2/3$. Het is aan de lezer zich ervan te overtuigen dat deze ratio hetzelfde is, onafhankelijk van de groep (twee dezelfde) noten waarmee we in (1) starten.

□



Figuur 6.3: *Het notenvoorbeeld behorende bij voorbeeld 6.1.4.*

- ▶ **Observatie:** *De relatieve duur van individuele noten na en voor antimetrisering (tot triool) heeft een vaste ratio: 2/3.*

Analoog aan de formele introductie van de duool, zouden we weer willen dat er een operatie $\mathcal{A}_3$ was die van een "normale" noot de corresponderende noot in een triool zou maken. Intuïtief willen door de observatie deze operatie definiëren als de vermenigvuldiging van een ritmische noot met 2/3. Nu kunnen we echter niet blind op onze intuïtie afgaan: $2/3 \notin \mathbb{Z}_2$, dus vermenigvuldigen met dit getal mag (in het moduul N) niet.

We hopen nu dat het nemen van de "moeilijkere" weg zijn vruchten af zal werpen. We zien uit de observatie weer voor $f \in \mathcal{M}$ en $x \in N\backslash\{0\}$ willekeurig dat

$$\frac{f(\mathcal{A}_3(x))}{f(x)} = \frac{2}{3},$$

Nu kunnen we echter niet simpelweg (♠) nadoen en denken dat we zo een gemakkelijke descriptie kunnen vinden van een triool, we hebben hiervoor namelijk een groot probleem:

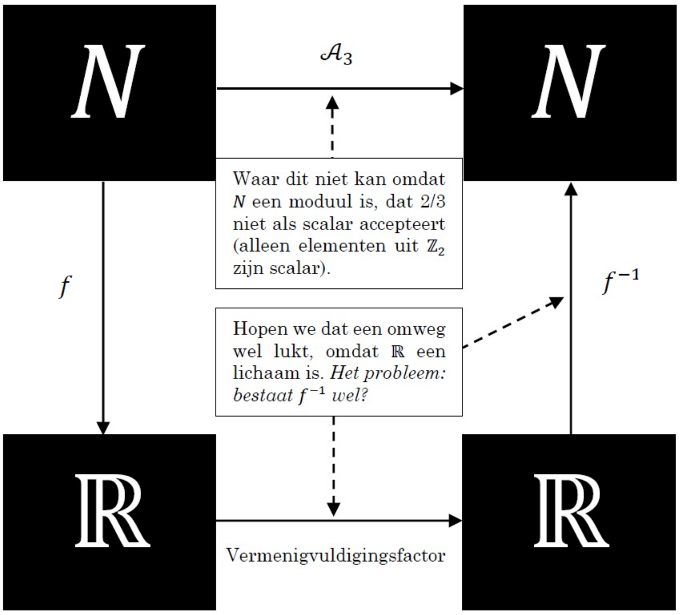
- ▶ **Observatie:** *Nu geldt dat $2/3 \notin \mathbb{Z}_2$; de situatie is niet zo makkelijk als bij duolen.*

Aangezien $2/3 \notin \mathbb{Z}_2$, zouden we de redenering van (♠) nog maar kunnen voortzetten tot de volgende regel:

$$f(\mathcal{A}_3(x)) = \tfrac{2}{3} \cdot f(x). \tag{6.1}$$

Vervolgens is er de hoop dat we in (6.1) f^{-1} aan beide kanten kunnen nemen om zo een expliciete descriptie van $\mathcal{A}_3$ los te peuteren. Hier is echter geen garantie toe, aangezien *lemma 5.2.1* alleen injectiviteit voor f garandeert en niet per se surjectiviteit. We moeten dus allereerst aantonen dat er voor iedere $f \in \mathcal{M}$ en alle $x \in N$ een uniek volledig origineel $y \in N$ bestaat van de relatieve duur $\frac{2}{3} \cdot f(x)$.

We bewijzen dit in onderstaande stelling. Voor de stelling geven we eerst een voorbeeld om te laten zien dat de inverse in ieder geval in sommige situaties te vinden is. Ten slotte is in *figuur 6.4* weergegeven hoe we voor triolen proberen $\mathcal{A}_3$, de operator die een noot afbeeldt op zijn trioolnoot, te definiëren.



Figuur 6.4: *De omweg die wij maken om $\mathcal{A}_3$ te definiëren.*

Voorbeeld 6.1.5 (De achtstentriool in een 4/4-maat)**.** Zij $f_4 \in \mathcal{M}$. Als we de methodiek van *figuur 6.4* proberen toe te passen om een "definitie" van de achtstentriool te vinden, dan merken we op dat moet gelden dat

$$f_4(\mathcal{A}_3(-2,1)) = \frac{2}{3} \cdot f_4(-2,1) = \frac{1}{3}.$$

Lemma 5.2.1 vertelt ons ten minste dat moet gelden $y = \mathcal{A}_3(-2,1)$, als we een y vinden waarvoor geldt $f(y) = 1/3$. Merk ten slotte op dat geldt dat $y = (-3, 4/3)$ voldoet, aangezien

$$f_4(-3, 4/3) = \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot 2^{-1-3} = \frac{1}{3}.$$

Er moet dus gelden $\mathcal{A}_3(-2,1) = (-3, 4/3)$. Soms, voor wat het waard is, kunnen we met de methodiek van *figuur 6.4* onze trioolnoten vinden.

□

Stelling 6.1.3. *Zij $f \in \mathcal{M}$ willekeurig. De inverse $y \in N$ onder f van de relatieve duur $\frac{2}{3} \cdot f(x)$ bestaat voor alle $x \in N$ en is onafhankelijk van de keus van f. Ergo, voor iedere $x \in N$ vast is $y \in N$ de unieke ritmische noot, waarvoor geldt dat $f(y) = \frac{2}{3} \cdot f(x)$. Deze y is onafhankelijk van de keus van $f \in \mathcal{M}$.*

Bewijs. Zij $x = (m, r) \in N$ willekeurig, zij ook $f_n \in \mathcal{M}$ willekeurig. We weten dat geldt

$$f_n(m, r) = r \cdot n \cdot 2^{m-1}.$$

We zoeken nu een noot $y = (p, q) \in N$, waarvoor geldt

$$f_n(p, q) = \frac{2}{3} \cdot r \cdot n \cdot 2^{m-1}.$$

We merken allereerst op dat we ook $(p, q) = (0, 0)$ kunnen kiezen, als $(m, r) = (0, 0)$. We controleren vervolgens nog of voor alle andere gevallen de volgende keuzes voor p en q, die voor nu even uit de lucht komen vallen, kloppen:

$$\begin{aligned} p &= m + \left\lfloor \log_2 \left(\tfrac{2}{3} \cdot r \right) \right\rfloor, \\ q &= \frac{\frac{2}{3} \cdot r}{2^{\left\lfloor \log_2 \left(\frac{2}{3} \cdot r \right) \right\rfloor}}. \end{aligned}$$

Allereerst merken we hiertoe op dat inderdaad geldt, vanwege *lemma 4.1.3* (ongelijkheid 4.5 geldt ook als $c \notin \mathbb{Z}_2$), dat $p \in \mathbb{Z}$ en $1 \leq |q| < 2$. Bij deze keuze voor (p, q) hebben we dus inderdaad met noten te maken. Ten slotte hoeven we alleen nog maar te controleren of dit onder f_n afbeeldt op de juiste relatieve duur. We vinden

$$f_n(p, q) = \frac{\frac{2}{3} \cdot r}{2^{\left\lfloor \log_2 \left(\frac{2}{3} \cdot r \right) \right\rfloor}} \cdot n \cdot 2^{m + \left\lfloor \log_2 \left(\frac{2}{3} \cdot r \right) \right\rfloor - 1} = \frac{2}{3} \cdot r \cdot n \cdot 2^{m-1}.$$

Lemma 5.2.1 vertelt ons ten slotte dat deze keus voor (p, q) de unieke keuze is waarmee we de gewenste relatieve duur kunnen krijgen, dus geldt dat de geponeerde (p, q) de inverse is van $\frac{2}{3} \cdot f_n(x)$, en dus dat deze bestaat. Merk ook op, aangezien we f_n willekeurig hebben gekozen, dat de inverse onafhankelijk van de maatsoortkeuze is.

Q.E.D.

Opmerking. In bovenstaand bewijs kwam de keus voor $(p, q) \in N$ uit de lucht vallen. De keus voor p en q is ontstaan door net te doen alsof naïef vermenigvuldigen van de noot (m, r) met $2/3$ gewoon mogelijk is. Je kunt dus ritmische trioolnoten altijd vinden door even te vergeten dat we in een moduul werken en naïef te vermenigvuldigen met $2/3$. (Je kunt de vermenigvuldiging uit *definitie 4.1.2* immers ook blind toepassen van scalairen buiten $\mathbb{Z}_2$)

- ▶ **Observatie:** *De inverse $y \in N$ onder f van de relatieve duur $2/3 \cdot f(x) \in \mathbb{R}$ bestaat altijd en is onafhankelijk van de keus van $f \in \mathcal{M}$. We kunnen dus links en rechts in vergelijking (6.1) f^{-1} nemen.*

Stelling 6.1.3 geeft ons nu een uitweg om triolen te definiëren vanwege de observatie.

Definitie 6.1.2 (Ritmische trioolnoten)**.** Zij $f \in \mathcal{M}$ willekeurig. De afbeelding $\mathcal{A}_3 : N \to N$, die de corresponderende ritmische trioolnoot $\mathcal{A}_3(x)$ bij een noot $x \in N$ is maakt, gegeven door

$$\mathcal{A}_3(x) = f^{-1} \left(\tfrac{2}{3} \cdot f(x) \right).$$

□

- ▶ **Terminologie:** *We noemen het getal $2/3$ in bovenstaande definitie de* ***antimetrische omzettingsfactor*** *(voor triolen).*

- **Observatie:** *We hadden ook de operatie $\mathcal{A}_2$ kunnen definiëren door $\mathcal{A}_2(x) = f^{-1}\left(\frac{3}{2} \cdot f(x)\right)$. Deze definitie is equivalent aan de gegeven definitie 6.1.1, aangezien 3/2 tot onze scalairen behoort, en we deze dus uit de inverseafbeelding mogen halen, waardoor volgt dat $f^{-1}(f(x))$ verdwijnt en de ons bekende definitie verschijnt.*

- **Observatie:** *Drie ritmische trioolnoten na elkaar zouden corresponderen met een "echte" muzikale triool.*

- **Samenvatting:** *We hebben de ritmische trioolnoten gedefinieerd met een omweggetje langs de beoogde relatieve duur (figuur 6.4). We hebben ook gezien dat je gewoon naïef kunt vermenigvuldigen met 2/3 om een ritmische trioolnoot te vinden, hoewel dit strikt genomen niet zou mogen.*

✍ Triolen, we kunnen niet zonder

- **Terugblik:** *Duolen zijn overbodig; ze vormen een nieuwe schrijfwijze voor al bekende nootvoorbeelden. In andere woorden, $N_{(2)}$ is gesloten onder $\mathcal{A}_2$.*

We hebben al gezien dat muzieknotatie best kan overleven zonder de duolen: een antimetrisering die een duool maakt, doet immers hetzelfde als een enkele puntering. Nu gaan we controleren of dit voor triolen anders ligt. We gaan kijken of het antimetriseren (als triool) van ritmische categorie II noten nieuwe ritmische noten oplevert: categorie III (en IV) noten.

Voor triolen pakken we deze controle iets systematischer aan dan voor duolen[6]. We introduceren en definiëren allereerst het concept **zuivere triolen**. Zuivere triolen ontstaan wanneer we een categorie II ritmische noot pakken, en deze antimetriseren (als triool). Het concept vertaalt naar de triolen die we (in pragmatische gevallen) in de muziek kunnen tegenkomen. We geven eerst een voorbeeld en dan een definitie.

Voorbeeld 6.1.6 (Zuivere triolen)**.** Dit voorbeeld dient ertoe om de lezer een gevoel te geven voor zuivere triolen. Dit voorbeeld heeft betrekking op *figuur 6.1* en *bijlage B*. Allereerst behandelen we zuivere triolen in hun abstractie en dan in relatie tot muziek.

1. Abstracte voorbeelden van zuivere triolen

Abstracte zuivere triolen zijn ritmische noten die zijn ontstaan door de antimetrisering van elementen uit $N_{(2)}$. Een aantal voorbeelden van zuivere triolen in abstracto zijn dus

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3(-2,1) &= (-3,4/3),\\
\mathcal{A}_3(-3,1) &= (-4,4/3),\\
\mathcal{A}_3(1,3/2) &= (1,1),\\
\mathcal{A}_3(0,9/8) &= (-1,3/2).
\end{aligned}$$

Het is aan de lezer te bewijzen dat de gelijkheden inderdaad gelden door naïef met 2/3 te vermenigvuldigen.[7] Het is ook aan de lezer te bewijzen dat de ritmische noten achter het is-teken inderdaad zuivere triolen zijn door te laten zien dat de ritmische noten voor het is-teken in $N_{(2)}$ zitten. Merk iets bijzonders op bij de laatste twee voorbeeldjes: deze zuivere triolen behoren ook tot $N_{(2)}$!

2. Muzikale voorbeelden van zuivere triolen

Bekijk allereerst *figuur 6.1* opnieuw aan het begin van dit hoofdstuk. We zien in dit voorbeeld zestiendentriolen staan. Triolen die in praktische situaties in de muziek voorkomen (zoals de

[6] Aangezien onze helderziende blik ons vertelt dat we met triolen wel échte categorie III noten zullen vinden.

[7] Zoals in de opmerking na *stelling 6.1.3* aangegeven, kun je de gelijkheden zelf narekenen door naïef met 2/3 te vermenigvuldigen. Het mag eigenlijk niet, maar we kunnen best *definitie 4.1.2* volgen en doen alsof het mag.

triolen in *figuur 6.1*), zijn zuivere triolen. Om dit voor de triolen uit *figuur 6.1* in te zien, merk op dat de **zestiendentriool** is ontstaan door de antimetrisering van (een groep van twee) **zestiende noten**. Een zestiendentriool is opgebouwd uit drie noten, ieder van deze drie noten wordt nu geformaliseerd door $\mathcal{A}_3(-3,1) = (-4, 4/3)$.

Een nog steeds sceptische lezer wordt uitgenodigd om zelf te berekenen dat in een 4/4-maat één noot uit een zestiendentriool 1/6 tel duurt, en om vervolgens op te merken dat:

$$f_4\,(-4, 4/3) = \tfrac{4}{3} \cdot 4 \cdot 2^{-1-4} = \tfrac{1}{6}.$$

Bekijk vervolgens de partituur in *bijlage B*. Het is een goede oefening voor de lezer om na te gaan dat de (achtsten)triolen uit deze partituur ook zuivere triolen zijn door na te gaan dat ze geformaliseerd worden door $\mathcal{A}_3(-2,1) = (-3, 4/3)$.

□

Definitie 6.1.3 (Zuivere triolen)**.** De verzameling zuivere triolen, $N_{(3)}$, is gegeven door

$$N_{(3)} = \mathcal{A}_3\left(N_{(2)}\right).$$

□

Opmerking. We hadden ook de verzameling zuivere duolen kunnen definiëren door $\mathcal{A}_2\left(N_{(2)}\right)$. Hiermee kunnen we inzien (door *stelling 6.1.2*) dat duolen notationele ballast vormen, aangezien $\mathcal{A}_2\left(N_{(2)}\right) = N_{(2)}$. Er is dus al notatie in de muziek om (zuivere) duolen te noteren; duolen zijn in zekere zin overbodig.

Van het voorbeeld en de definitie leren we het volgende:

- **Observatie:** *De zuivere triolen lijken noten buiten $N_{(2)}$ te bevatten, namelijk noten van de vorm (n, r), waar r een breuk is met (naast machten van 2) een enkele priemfactor 3 in de noemer.*
- **Observatie:** *De volgende rij inclusies lijkt te gelden: $N_{(3)} \supset N_{(2)} \supset N_b$.*

Als afsluiter van deze sectie gaan we bovenstaande observaties formeel bewijzen. De onderste bewijzen we direct en de bovenste bewijzen we door aan te tonen dat $N_{(3)} \cong \mathbb{Z}_2\left\langle \frac{1}{3} \right\rangle$.[8] Hierbij definiëren we $\mathbb{Z}_2\left\langle \frac{1}{3} \right\rangle$ als

$$\mathbb{Z}_2\left\langle \tfrac{1}{3} \right\rangle := \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \exists_{\alpha,\, \beta \in \mathbb{Z}_2} : x = \alpha + \beta \cdot \tfrac{1}{3} \right\}.$$

Voordat we de observaties bewijzen, bewijzen we twee lemma's die ons leven makkelijker zullen maken.

Lemma 6.1.4. *$\mathcal{A}_3$ is een $\mathbb{Z}_2$-lineaire operator.*

Bewijs. We merken uit *stelling 5.1.1* op dat $f \in \mathcal{M}$ lineair is, waaruit volgt dat f^{-1} ook lineair is. Zij $x \in N$ en $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ willekeurig gegeven. We vinden dan met betrekking tot het product:[11]

$$\mathcal{A}_3(\alpha \cdot x) \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}\left(\tfrac{2}{3} \cdot f(\alpha \cdot x)\right) = f^{-1}\left(\tfrac{2}{3} \cdot \alpha \cdot f(x)\right) = \alpha \cdot f^{-1}\left(\tfrac{2}{3} \cdot f(x)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cdot \mathcal{A}_3(x).$$

Zij nu ook $y \in N$ gegeven. Met een analoge redenering vinden we dan ook met betrekking tot de optelling:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3(x+y) &\stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}\left(\tfrac{2}{3} \cdot f(x+y)\right) = f^{-1}\left(\tfrac{2}{3} \cdot (f(x) + f(y))\right), \\ &= f^{-1}\left(\tfrac{2}{3} \cdot f(x) + \tfrac{2}{3} \cdot f(y)\right) = f^{-1}\left(\tfrac{2}{3} \cdot f(x)\right) + f^{-1}\left(\tfrac{2}{3} \cdot f(y)\right) = \mathcal{A}_3(x) + \mathcal{A}_3(y).\end{aligned}$$

[8] Met $\mathbb{Z}_2\left\langle \frac{1}{3} \right\rangle$ bedoelen we in dit verslag het $\mathbb{Z}_2$-moduul dat ontstaat als we 1/3 aan $\mathbb{Z}_2$ toevoegen. Ergo, $1/9 \notin \mathbb{Z}_2\left\langle \frac{1}{3} \right\rangle$, maar wel $5/6 = 1/2 + 1/3 \in \mathbb{Z}_2\left\langle \frac{1}{3} \right\rangle$.

Uit deze twee redeneringen volgt dat $\mathcal{A}_3$ lineair is.

Q.E.D.

Lemma 6.1.5. *Zij $n \in \mathbb{Z}$ willekeurig. Er geldt $N_{(3)} = \left\langle \binom{n}{4/3} \right\rangle_{\mathbb{Z}_2}$. Ofwel $N_{(3)}$ is het deelmoduul van N, voortgebracht door $\binom{n}{4/3}$.*

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{Z}$ willekeurig gegeven. Herinner uit *stelling 4.2.4* dat

$$N_{(2)} = \left\langle \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Vervolgens geldt door *lemma 6.1.4* dat

$$N_{(3)} = \mathcal{A}_3\left(N_{(2)}\right) = \langle \mathcal{A}_3(n+1,1) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} n \\ 4/3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Q.E.D.

Stelling 6.1.6. *De volgende twee beweringen zijn waar:*

I. $N_{(2)} \subset N_{(3)}$,

II. $N_{(2)} \cup N_{(3)} = N_{(3)} \cong \mathbb{Z}_2 \left\langle \frac{1}{3} \right\rangle$ *als moduul.*

Bewijs. **(I)**
Neem $(0, 4/3)$ als voortbrenger van $N_{(3)}$ (*lemma 6.1.5*). Merk vervolgens op

$$\frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in N_{(2)} \cap N_{(3)}. \tag{6.2}$$

Stelling 4.2.4 vertelt ons vervolgens dat $(1,1)$ een voortbrenger is van $N_{(2)}$. We kunnen dus de voortbrenger van $N_{(3)}$ gebruiken om alle elementen van $N_{(2)}$ te genereren. Dit impliceert $N_{(3)} \subseteq N_{(2)}$. We laten ten slotte zien dat $N_{(3)} \neq N_{(2)}$. Stel dat dit wel zo is, dan zou op zijn minst moeten gelden dat $(0, 4/3) \in N_{(2)}$. We kiezen $(0,1)$ zonder verlies van algemeenheid als voortbrenger van $N_{(2)}$.[9]

$$\Longrightarrow \exists_{\alpha \in \mathbb{Z}_2} : \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Aangezien het nootnummer van beide noten gelijk is en $4/3$ positief is, moet gelden dat $1 \leq \alpha < 2$. *Lemma 4.1.5* vertelt tenslotte dat

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \\ \Longrightarrow \quad \alpha &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Merk ten slotte op dat $4/3 \notin \mathbb{Z}_2$. ↯

$$\Longrightarrow N_{(2)} \subset N_{(3)}.$$

(II)
Nu moeten we nog laten zien dat we met een isomorfisme hebben te maken als we $\frac{1}{3}$ toevoegen aan $\mathbb{Z}_2$; we gaan als isomorfisme weer een maatsoortfunctionaal gebruiken. Twee dingen krijgen we hiervan al cadeau:

[9] Dit is zonder verlies van algemeenheid, aangezien we iedere andere voortbrengen toch hadden kunnen omschrijven naar deze.

1. *Stelling 5.1.1* vertelt dat we een maatsoortfunctie $f \in \mathcal{M}$ altijd als homomorfisme kunnen gebruiken.
2. *Lemma 5.2.1* vertelt ons vervolgens dat dit homomorfisme ook injectief is.

We dienen dus alleen surjectiviteit nog te bewijzen.[10] Kies een $\alpha \in \mathbb{Z}_2\left\langle \frac{1}{3} \right\rangle$ willekeurig en herschrijf deze als volgt:

$$\alpha = \beta + \tfrac{1}{3} \cdot \gamma, \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_2.$$

We nemen nu een maatsoort f_1 (waar de hele noot dus één tel duurt). En merken het volgende op voor de noten $(1,1)$ en $(-1, 4/3)$:

$$f_1(1,1) = 1 \cdot 1 \cdot 2^{-1+1} = 1,$$
$$f_1(1,4/3) = 1 \cdot \tfrac{4}{3} \cdot 2^{-1-1} = \tfrac{1}{3}.$$

Beschouw nu de noot

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Toepassing van *stelling 5.1.1* geeft dat volgt

$$f_1(p,q) = \beta \cdot f_1(1,1) + \gamma \cdot f_1(1,4/3) = \beta + \tfrac{1}{3} \cdot \gamma = \alpha.$$

Hieruit volgt dat f_1 surjectief is, en samen met *lemma 5.2.1* volgt de bijectiviteit. We hebben dus inderdaad (samen met I) dat $N_{(3)} \cong \mathbb{Z}_2\left\langle \frac{1}{3} \right\rangle$.

Q.E.D.

Opmerking. Hoewel we in onderdeel (II) van het bewijs de maatsoort f_1 hebben toegepast, merken we op dat in principe alle maatsoorten hier gebruikt hadden kunnen worden, aangezien geldt dat $f_n = n \cdot f_1$.

Met het bewijs van *stelling 6.1.6* is het doel van deze sectie bereikt. We hebben laten zien dat zuivere triolen écht categorie III noten zijn. Voor de theoretische beeldvorming observeren we nog het volgende uit de zojuist bewezen lemma's/stelling:

- **Observatie:** *$N_{(3)}$ brengt $N_{(2)}$ voort, maar $N_{(2)}$ kan $N_{(3)}$ niet voortbrengen.*

Om deze observatie te verklaren, herinneren we ons het volgende:

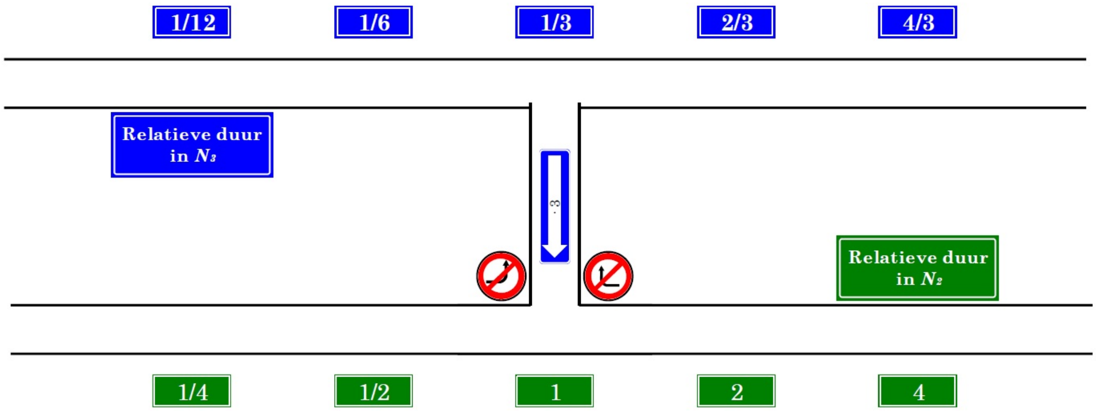
- **Terugblik:** *$N_{(3)}$ bevat noten buiten $N_{(2)}$, namelijk noten van de vorm (n,r), waar r een breuk is met naast (eventuele) priemfactoren 2 een priemfactor 3 in de noemer.*
- **Terugblik:** *$N_{(2)}$ bevat noten van de vorm (n,r), waar r een breuk is met slechts machten van 2 in de noemer.*

We kunnen nu inzien dat vanuit $N_{(2)}$ voortgebracht kan worden door $N_{(3)}$: we kunnen de priemfactor 3 in de noemer van noten uit $N_{(3)}$ altijd verwijderen door met 3 te vermenigvuldigen, want $3 \in \mathbb{Z}_2$. We kunnen nu ook inzien waarom we vanuit $N_{(2)}$ niet in $N_{(3)}$ kunnen raken: om de priemfactor 3 in noemer van noten te krijgen, zou men moeten vermenigvuldigen met $1/3$, maar $1/3 \notin \mathbb{Z}_2$, dus dat mag niet. Het idee wordt geïllustreerd in *figuur 6.5*. De nootstructuur die we in deze sectie hebben gevonden, wordt ten slotte weergegeven in *figuur 6.6*. Het wordt de lezer sterk aangeraden te kijken hoe deze structuur rijmt met de structuur gevonden in *paragraaf 4.2* (*figuur 4.6*) voor louter categorie I en II noten.

- **Samenvatting:** *We hebben gezien dat het antimetriseren van categorie II ritmische noten (als triolen) nieuwe noten creëert.*[11] *De verzameling van zuivere triolen ($N_{(3)}$) die dan ontstaat, staat parallel aan de antimetrische figuren die we "in het wild" in muziek kunnen tegenkomen en bevat ritmische noten (n,r), waarin r een breuk is met (naast machten van twee) een priemfactor 3 in de noemer.*

[10] We bedoelen hier de surjectiviteit van $f_1|_{N_{(3)}} : N_{(3)} \to \mathbb{Z}_2\langle 1/3 \rangle$. f_1 moet immers het isomorfisme tussen $N_{(3)}$ en $\mathbb{Z}_2\langle 1/3 \rangle$ vormen. We hadden afgesproken dan gewoon f_1 te schrijven voor compactheid.

[11] En niet zoals duolen slechts nieuwe categorie II noten oplevert.



Figuur 6.5: *De dimensieweg: je kunt bovenin beginnen en wél een dimensie opschuiven naar beneden door met drie te vermenigvuldigen, maar terug kun je niet meer. Dit is de reden waarom* $N_{(2)} \subset N_{(3)}$*; van* $N_{(3)}$ *naar* $N_{(2)}$ *kan wel, maar andersom niet.*

♫ Een introductie tot antimetrische nesting

Om deze paragraaf af te sluiten, introduceren we nog op een redelijk informele wijze het concept antimetrische nesting. Enerzijds doen we dit, omdat in *paragraaf 6.3* dit lastige concept centraal staat en we hier een (relatief makkelijke) introductie kunnen leveren. Anderzijds doen we dit, omdat een leuke eigenschap van duolen en triolen schuil gaat in hun antimetrische nesting.

- **Terugblik:** *Een triool ontstaat door een groep van twee dezelfde noten door een groep drie dezelfde noten te vervangen. De groep voor en na de vervanging hebben dezelfde relatieve duur.*
- **Observatie:** *Een triool bestaat uit drie gelijke noten.*
- **Observatie:** *We kunnen (dus) twee van de drie (gelijke) noten uit een triool pakken en hiermee een nieuwe triool maken.*

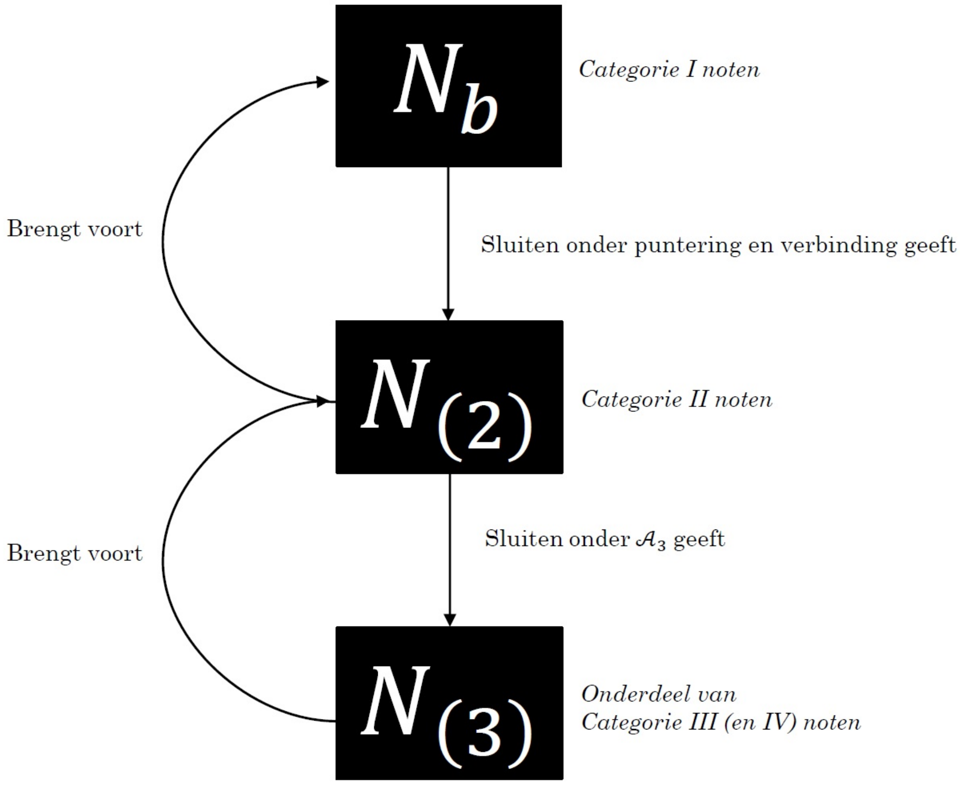
Antimetrische nesting is het idee dat we antimetrische figuren in antimetrische figuren gaan opschrijven. Neem als voorbeeld *figuur 6.7*. We zien in deze figuur twee triolen staan; een buitenste en een binnenste triool. De buitenste triool is ontstaan door twee kwartnoten te vervangen door drie. De binnenste is ontstaan door vervolgens twee kwartnoten in de buitenste triool te pakken, en deze te vervangen door drie.

Gezien als ritmische noot antimetriseren we de kwartnoot dus in feite twee keer. Voor de buitenste triool één keer, en voor de binnenste één keer. Om vervolgens de ritmische noot te vinden die correspondeert met de noten in de binnenste triool, dienen we dus $\mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_3$ los te laten op een kwartnoot. We werken dit uit in onderstaand voorbeeld.

Voorbeeld 6.1.7 (Een geneste triool)**.** Dit voorbeeld heeft betrekking op *figuur 6.7* en dient ertoe antimetrische nesting toe te lichten. Op een muzikaal niveau kunnen we (in de 4/4-maat) bepalen wat de relatieve duur van de binnenste triool in deze figuur moet zijn. De lezer gaat allereerst zelf na dat in de buitenste triool iedere individuele noot 2/3 tel moet duren.

Vervolgens pakken we voor de binnenste triool een groep van twee noten uit de buitenste triool. Deze groep duurt $2 \cdot 2/3 = 4/3$ tel. Deze groep van twee noten wordt vervangen door drie noten. Deze drie noten vormen de binnenste triool. De duur van deze drie noten moet nog steeds 4/3 tel zijn. Iedere individuele noot uit de binnenste triool duurt dus $1/3 \cdot 4/3 = 4/9$ tel.

Als we dit gaan formaliseren als ritmische noot, merken we eerst op dat voor de buitenste ritmische



Figuur 6.6: *De gevonden nootstructuur die we krijgen als we categorie II ritmische noten gaan antimetriseren (als triool).*

trioolnoot geldt:

$$\mathcal{A}_3(-1,1) = (-2, 4/3).$$

Vervolgens moeten we deze ritmische noot nóg een keer antimetriseren om de individuele noten uit de binnenste triool te krijgen. We vinden

$$\mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_3(-1,1) = \mathcal{A}_3(-2,4/3) = \begin{pmatrix} -2 + \lfloor \log_2(2/3 \cdot 4/3) \rfloor \\ \frac{2/3 \cdot 4/3}{2^{\lfloor \log_2(2/3 \cdot 4/3) \rfloor}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 16/9 \end{pmatrix}.$$

Ten slotte, als we f_4 nemen, zien we inderdaad dat voor de gevonden ritmische noot het juiste aantal tellen verschijnt:

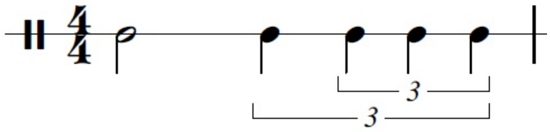
$$f_4(-3, 16/9) = 4 \cdot \tfrac{16}{9} \cdot 2^{-1-3} = \tfrac{4}{9}.$$

We kunnen dus geneste ritmische triolen maken door herhaaldelijk $\mathcal{A}_3$ uit te voeren. Het is een goede oefening aan de lezer om voor de beeldvorming zelf te gaan nadenken over de muzikale betekenis en de wiskundige formalisering van het nootvoorbeeld in *figuur 6.8*.

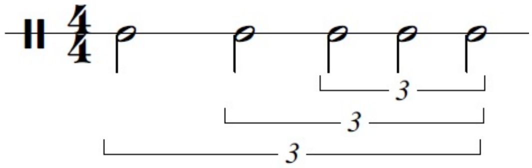
□

Nu we geneste antimetrische figuren een beetje beter begrijpen, kunnen we het hebben over de leuke eigenschap van geneste triolen en duolen. We observeren het volgende:

- **Observatie:** *De antimetrische omzettingsfactor voor duolen 3/2 en voor triolen is 2/3. Er geldt* $3/2 \cdot 2/3 = 1$.



Figuur 6.7: *Een geneste triool: een triool geschreven in een triool.*



Figuur 6.8: *Een dubbel geneste halventriool.*

Door deze observatie ontstaat het vermoeden dat het maken van een antimetrische nesting van een duool en een triool hetzelfde is als niets doen. Als je eerst een ritmische noot antimetriseert als duool en dan de ontstane ritmische noot als triool, dan krijg je je originele noot weer terug. Eerst een triool maken en dan een duool levert hetzelfde resultaat. We bewijzen deze leuke eigenschap in onderstaand lemma, we eindigen deze paragraaf met een voorbeeld van deze eigenschap.

Lemma 6.1.7 (Duolen en triolen zijn elkaars inverse)**.** *Er geldt voor alle $x \in N$ dat $\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_3(x) = \mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_2(x) = x$.*

Bewijs. We kunnen dit snel met een directe berekening laten zien, gebruikmakend van het feit dat f^{-1} lineair is, en *definitie 6.1.1* en *6.1.2*. We vinden

$$\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_3(x) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{3}{2} \cdot f^{-1}\left(\tfrac{2}{3} \cdot f(x)\right) = f^{-1}\left(\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot f(x)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_2(x) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Q.E.D.

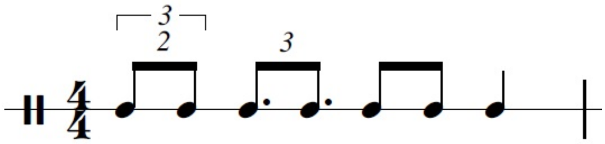
Voorbeeld 6.1.8 (Duool en triool zijn elkaars inverse)**.** Om in te zien dat duool en triool elkaars inverse zijn, beschouwen we *figuur 6.9*. We gaan aantonen dat de drie muzikale figuurtjes met twee noten allemaal even lang duren. We nummeren ze van links naar rechts. In ons systeem zijn de individuele noten in deze figuren geformaliseerd door

1. $\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_3(-2, 1)$,
2. $\frac{3}{2} \cdot \mathcal{A}_3(-2, 1)$,
3. $(-2, 1)$.

Uit *definitie 6.1.1* volgt direct dat (1) en (2) hierboven aan elkaar gelijk zijn (dit is ook gebruikt in het bewijs van *lemma 6.1.7*). Om in te zien dat (1) en (3) aan elkaar gelijk zijn, kunnen we de volgende directe berekening uitvoeren:

$$\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_3(-2, 1) = \mathcal{A}_2(-3, 4/3) = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Om op een intuïtieve manier in te zien dat alle figuurtjes aan elkaar gelijk zijn, merken voor de gelijkheid van (1) en (2) op dat *stelling 6.1.2* laat zien dat het maken van een duool hetzelfde is als enkel punteren. Voor de gelijkheid van (1) en (3) merken we op dat we bij triolen twee noten veranderen in drie, en dat we vervolgens bij de geneste duool de drie noten weer in twee veranderen. Uiteindelijk hebben we dus eigenlijk niets gedaan.



Figuur 6.9: *Een aantal equivalentie nootfiguren. Helemaal links zien we een duool genest in een triool. Daarnaast staat een triool, gevuld met enkelgepunteerde achtste noten. Ten slotte nog twee reguliere achtste noten. Negeer de kwartnoot aan het eind.*

□

- **Samenvatting:** *We hebben alvast een beginnetje gemaakt aan het begrip antimetrische nesting. Dit beginnetjes was vooral rekenkundig van aard. We hebben ten slotte antimetrische nesting gebruikt om een leuke eigenschap van duolen en triolen te bewijzen:* $\mathcal{A}_3$ *en* $\mathcal{A}_2$ *zijn elkaars inverse.*

6.2 Algemene antimetrische figuren: Definitie

In de vorige paragraaf hebben we gekeken naar duolen en triolen. We willen de ideeën die we hebben opgedaan over deze antimetrische figuren graag uitbreiden naar algemene antimetrische figuren, daarvoor hebben we echter een definitie van deze figuren nodig. Deze paragraaf hoopt deze definitie te kunnen leveren.

♫ De antimetrische omzettingsfactor

Herinner je uit de behandeling van duolen en triolen het volgende:

- **Terugblik:** *Zij* $n \in \{2,\ 3\}$. *De ratio* $f(\mathcal{A}_n(x))/f(x)$ *is constant voor alle* $f \in \mathcal{M}$ *en alle* $x \in N\backslash\{0\}$.
- **Terugblik:** *Deze constante ratio heet de antimetrische omzettingsfactor.*

We willen voor algemene antimetrische figuren, net als bij duolen en triolen, een operatie definiëren die van basisnoten[12] de noten uit een antimetrische figuur maakt. We nomen deze operatie voor een n-ool[13] $\mathcal{A}_n$, in analogie met duolen (2-olen; $\mathcal{A}_2$) en triolen (3-olen; $\mathcal{A}_3$).

We hebben bij de definitie van $\mathcal{A}_2$ en $\mathcal{A}_3$ gezien dat de antimetrische omzettingsfactor een belangrijke rol speelt. We willen deze factor dus kunnen bepalen voor willekeurige antimetrische figuren om daarmee later $\mathcal{A}_n$ te definiëren. Omdat deze factor vast is voor alle maatsoorten en (ritmische) noten, kunnen we deze factor voor een n-ool algoritmisch als volgt bepalen:

1. Kies een maatsoort en een basisnoot.
2. Bepaal de relatieve duur van de basisnoot in de gekozen maatsoort en noem deze α.
3. Construeer de n-ool met een (zo klein mogelijke) groep van de gekozen basisnoot (eventueel met een compositieprogramma).
4. Bepaal de relatieve duur van één noot uit het ontstane antimetrische figuur en noem deze β.

[12] Of bij extensie algemene ritmische noten.

[13] Een antimetrische figuur, bestaande uit n (gelijke) noten (eigen begrip). We maken in dit verslag dus onderscheid tussen de operatie die antimetrische figuren maakt (antimetrisering) en de antimetrische figuren die na antimetrisering ontstaan (n-olen).

5. De antimetrische omzettingsfactor is nu gegeven door β/α.

Equivalent kunnen we ook het volgende kortere algoritme uitvoeren dat gebaseerd is op *tabel 2.2* op pagina 12 in *paragraaf 2.4*:

1. Lees uit *tabel 2.2* op pagina 12 de vervanging af die plaats vindt.
2. Noem het eerste getal van de vervanging α, en het twee in β.
3. De antimetrische omzettingsfactor is nu gegeven door β/α.

We geven van beide algoritmen hieronder een voorbeeld.

Voorbeeld 6.2.1 (Antimetrische omzettingsfactor voor kwintolen)**.** Dit voorbeeld dient ervoor om van de twee algoritmen om de antimetrische omzettingsfactor te bepalen een voorbeeld te geven. *Figuur 6.10* hoort bij dit voorbeeld.

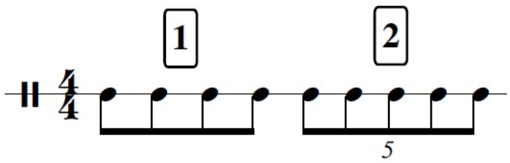
1. Het "lange" algoritme

We kiezen de 4/4-maat en beschouwen de achtste noot in deze maatsoort (stap 1). We merken vervolgens op dat de achtste noot 1/2 tel duurt in een 4/4-maat, ergo $\alpha = 1/2$ (stap 2). We laten vervolgens MuseScore een kwintool maken (of we doen het zelf) (stap 3). Dan zien we in (2) dat vijf noten in de kwintool samen 2 tellen duren, iedere noot van de kwintool duurt dus 2/5 tel, ergo $\beta = 2/5$ (stap 4). Er geldt ten slotte dat de omzettingsfactor gegeven is door 4/5 (stap 5).

2. Het "korte" algoritme

We lezen uit *tabel 2.2* op pagina 12 af dat een kwintool 5 noten heeft in plaats van 4 (stap 1).[14] Er geldt dus $\alpha = 5$ en $\beta = 4$ (stap 2). Ten slotte volgt dat de omzettingsfactor gegeven is door 4/5 (stap 3). Het is een opdracht aan de lezer om de antimetrische omzettingsfactor voor de triool (2/3) met beide algoritmen af te leiden.

□



Figuur 6.10: *Het maken van (een versie van) een kwintool. Bij (1) zien we de groep achtsten voor de vervanging, bij (2) de achtstenkwintool na de vervanging.*

An sich is het bepalen van de antimetrische omzettingsfactor met een redelijk makkelijk algoritme te doen, echter ontstaat er een groot probleem via het voorbeeld en *tabel 2.2*:

- ▶ **Observatie:** *Sommige antimetrische figuren, bijvoorbeeld de kwintool, hebben meerdere antimetrische omzettingsfactoren (afhankelijk van de maatsoort).*

Het bestaan van meerdere omzettingsfactoren voor hetzelfde antimetrisch figuur is problematisch, aangezien we in de formalisering hiervan dan veel gevallen moeten onderscheiden. We willen liever geen gevallen onderscheiden, dus we maken hier een simplificatie op de theorie. We zetten de maatsoort waarop we de antimetrische omzettingsfactor baseren vast, waardoor de omzettingsfactor voor ieder antimetrisch figuur uniek is. Als maatsoort waarop we de factor baseren, nemen we de 4/4-maat, omdat dit bij uitstek de meestvoorkomende maatsoort is. We nemen het volgende aan, en geven deze aanname in het vervolg met (♣) aan.

[14] Voor deze maatsoort kozen we de vervanging 5 in plaats van 4. In bijvoorbeeld een 6/8-maat zou de vervanging 5 in plaats van 3 optreden, dan zou de omzettingsfactor 3/5 worden. De reden waarom de omzettingsfactoren per maatsoort (kunnen) verschillen is muziektheoretisch van aard en ligt geworteld in metrische overwegingen. Voor dit verslag gaan deze overwegingen te diep.

- ▶ **Waarschuwing:** *Voor alle antimetrische figuren baseren we de antimetrische omzettingsfactor op de 4/4-maat.*
- ▶ **Samenvatting:** *We hebben het belang van de antimetrische omzettingsfactor aangegeven voor de definitie van algemene antimetrische figuren. We hebben hierbij een belangrijke aanname gedaan (♣).*

✍ De definitie van algemene antimetrische figuren: Eerste aanzet

Nu we een beter begrip van de antimetrische omzettingsfactor hebben, willen we een definitie van n-olen construeren. Intuïtief zouden we weer om de noot uit het antimetrische figuur te vinden, simpelweg met de omzettingsfactor willen vermenigvuldigen. Merk echter op:

- ▶ **Observatie:** *De antimetrische omzettingsfactor van een n-ool is (eventueel per definitie) een element van $\mathbb{Q}^+$, maar niet per se van $\mathbb{Z}_2^+$.*
- ▶ **Terugblik:** *We moesten triolen via een omweg definiëren, omdat de antimetrische omzettingsfactor voor triolen geen element van $\mathbb{Z}_2$ was.*

We kunnen dus geen zekerheid bieden dat de antimetrische omzettingsfactoren tot onze scalairen behoren. Derhalve kunnen we niet garanderen dat we met de antimetrische omzettingsfactoren zullen mogen vermenigvuldigen. Ergo, nemen we het zekere voor het onzekere en definiëren algemene antimetrische figuren via de "omweg" die we ook voor triolen gebruikte hebben (*figuur 6.4*).

Als we echter n-olen willen definiëren net zoals we dat bij triolen deden, moeten we aantonen dat de inverse van $\alpha \cdot f(x)$ bestaat voor alle $x \in N$, $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ en $f \in \mathcal{M}$, analoog aan *stelling 6.1.3*.

Stelling 6.2.1. *Zij $f \in \mathcal{M}$ willekeurig. De inverse van $\frac{m}{n} \cdot f(x)$, waarbij $m, n \in \mathbb{N}^+$ en $m \leq n$, bestaat voor alle $x \in N$ en is onafhankelijk van de keus van f.*

Bewijs. Zij $m, n \in \mathbb{N}^+$ willekeurig, zij ook $x = (r_1, r_2) \in N$ willekeurig, zij ten slotte ook $f_t \in \mathcal{M}$ willekeurig. We weten dat geldt

$$f_t(r_1, r_2) = r_2 \cdot t \cdot 2^{r_1 - 1}.$$

We zoeken nu een noot $y = (p, q) \in N$, waarvoor geldt

$$f_t(p, q) = \frac{m}{n} \cdot r_2 \cdot t \cdot 2^{r_1 - 1}.$$

We merken allereerst op dat we ook $(p, q) = (0, 0)$ kunnen kiezen, als $(r_1, r_2) = (0, 0)$. We controleren vervolgens nog of voor alle andere gevallen of de volgende keuzes voor p en q kloppen:

$$p = r_1 + \left\lfloor \log_2 \left(\tfrac{m}{n} \cdot r_2 \right) \right\rfloor,$$
$$q = \frac{\frac{m}{n} \cdot r_2}{2^{\left\lfloor \log_2 \left(\frac{m}{n} \cdot r_2 \right) \right\rfloor}}.$$

Allereerst merken we hiertoe op dat inderdaad geldt, vanwege *lemma 4.1.3* (ongelijkheid 4.5 geldt ook als $c \notin \mathbb{Z}_2$), dat $p \in \mathbb{Z}$ en $1 \leq |q| < 2$. Bij deze keuze voor (p, q) hebben we dus inderdaad met noten te maken. Ten slotte hoeven we alleen nog maar te controleren of dit onder f_t afbeeldt op de juiste relatieve duur. We vinden

$$f_t(p, q) = \frac{\frac{m}{n} \cdot r_2}{2^{\left\lfloor \log_2 \left(\frac{m}{n} \cdot r_2 \right) \right\rfloor}} \cdot t \cdot 2^{r_1 + \left\lfloor \log_2 \left(\frac{m}{n} \cdot r_2 \right) \right\rfloor - 1} = \frac{m}{n} \cdot r_2 \cdot t \cdot 2^{r_1 - 1}.$$

Lemma 5.2.1 vertelt ons ten slotte dat deze keus voor (p, q) de unieke keuze is waarmee we de gewenste relatieve duur kunnen krijgen (de injectiviteit van f_t ligt al vast), dus geldt dat de geponeerde (p, q) de inverse is van $\frac{m}{n} \cdot f_t(x)$, en dus dat deze bestaat. Merk ook op, aangezien we f_t willekeurig hebben gekozen, dat de inverse onafhankelijk van de maatsoortkeuze is.

Q.E.D.

Opmerking. Men kan de stelling nog verder generaliseren door te stellen dat de inverse van $\alpha \cdot f(x)$ altijd bestaat en onafhankelijk is van f voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Het bewijs van deze stelling gaat weer analoog gaan aan het bewijs hierboven. We hebben deze stelling echter niet bewezen, omdat in ons verhaal bovenstaande versie van de stelling voldoende is.

Voordat we de eerste (incomplete) definitie van n-olen geven, observeren we nog één ding uit *voorbeeld 6.1.1*, *6.1.4* en *6.2.1*. De lezer is van harte uitgenodigd om deze observatie voor meer voorbeelden na te gaan.[15]

- **Observatie:** *De antimetrische omzettingfactor van een n-ool is een breuk, waarvan de noemer n is.*

Definitie 6.2.1 (n-ool - Eerste aanzet)**.** Zij $f \in \mathcal{M}$ willekeurig. De afbeelding $\mathcal{A}_n : N \to N$ maakt van een ritmsiche noot $x \in N$ de corresponderende ritmische noot $\mathcal{A}_n(x)$ uit een n-ool. Deze is gegeven door

$$\mathcal{A}_n(x) = f^{-1}\left(\tfrac{m}{n} \cdot f(x)\right),$$

waarbij de breuk $\frac{m}{n}$ de antimetrische omzettingsfactor van de n-ool is.

□

- **Observatie:** *Op het moment is (♣) nog niet gebruikt.*
- **Samenvatting:** *We hebben een eerste aanzet gemaakt naar de definitie van algemene antimetrische figuren. We hebben onze hoofdaanname (♣) nog niet gebruikt.*

✍ Sommige antimetrische figuren zijn niet zo revolutionair (deel 1)

We gaan ons weer focussen op zuivere antimetrische figuren, herinner je het volgende:

- **Terugblik:** *Zuivere antimetrische figuren zijn de antimetrische figuren die uit ritmische categorie II noten (onder $\mathcal{A}_n$) ontstaan.*
- **Terugblik:** *Zuivere antimetrische figuren laten zich vertalen naar de antimetrische figuren die "in het wild" in de muziek voorkomen.*

We kunnen dus zuivere n-olen op een soortgelijke manier definiëren als we dit bij zuivere triolen hebben gedaan in *definitie 6.1.3*.

Definitie 6.2.2 (Zuivere n-olen)**.** Zij $n \geq 2$. De verzameling zuivere n-olen is gedefinieerd door

$$N_{(n)} = \mathcal{A}_n\left(N_{(2)}\right)$$

□

Herinner je nu het volgende:

- **Terugblik:** *Zuivere duolen bleken alle in $N_{(2)}$ te liggen en vormen dus een alternatieve schrijfwijze voor nootvoorbeelden die we ook met basisnoten, punten en bogen kunnen schrijven.*

We zouden er graag achter willen komen welke antimetrische figuren zich gedragen, zoals de duolen. We willen graag weten welke zuivere n-olen geen "nieuwe ritmische noten" toevoegen, en dus een alternatieve schrijfwijze zijn van basisnoten, punten en bogen. Met *definitie 6.2.1* kunnen we de eerste n-olen vinden waarvoor dit het geval is.

[15] Een heuristische reden voor deze observatie is het feit dat een n-ool altijd een vast aantal noten vervangt door n noten.

Lemma 6.2.2 (Onnodige antimetrische figuren 1)**.** *Zij $n \in \mathbb{N}^+$. Voor alle $x \in N_{(2)}$ geldt dat er een $y \in N_{(2)}$ is waarvoor geldt dat $y = \mathcal{A}_{2^n}(x)$. In andere woorden, er geldt*

$$\mathcal{A}_{2^n}\left(N_{(2)}\right) \subseteq N_{(2)}.$$

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{N}^+$ willekeurig gegeven, zij ook $x \in N_{(2)}$ willekeurig gegeven. Er geldt volgens *definitie 6.2.1* dat er een $m \leq 2^n$ bestaat, waarvoor geldt dat

$$\mathcal{A}_{2^n}(x) = f^{-1}\left(\tfrac{m}{2^n} \cdot f(x)\right).$$

Merk nu op dat geldt $\frac{m}{2^n} \in \mathbb{Z}_2$. Een simpele herschrijving, gebruikmakend van *stelling 5.1.1*, geeft ons ten slotte

$$f^{-1}\left(\tfrac{m}{2^n} \cdot f(x)\right) = f^{-1}\left(f\left(\tfrac{m}{2^n} \cdot x\right)\right) = \tfrac{m}{2^n} \cdot x \in N_{(2)},$$

waarbij de laatste claim volgt uit *stelling 4.2.4*.

Q.E.D.

- **Observatie:** *Lemma 6.2.2 impliceert stelling 6.1.2 op pagina 74.*

We weten nu dus dat we alle 2^n-olen ook kunnen schrijven als verbinding van (al dan niet gepunteerde) basisnoten. We geven van dit idee als afsluiting van deze sectie voor kwartolen nog een voorbeeld.

Voorbeeld 6.2.2 (Een kwartool als puntering)**.** We gaan inzien dat kwartolen hetzelfde doen als enkele puntering. Allereerst is het aan de lezer om uit *tabel 2.2* te concluderen dat de antimetrische omzettingsfactor voor kwartolen gelijk is aan 3/4. Beschouw nu een achtste noot in een 6/8-maat (f_8). We gaan laten zien dat een achtste noot in een achtstenkwartool gelijk is (qua duur) aan een enkelgepunteerde zestiende noot. Herinner dat we een achtste noot formaliseerde als $(-2, 1)$ en een zestiende als $(-3, 1)$. Een directe berekening laat ons zien:

$$\bullet_1(-3,1) = \tfrac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{A}_4(-2,1) = f^{-1}\left(\tfrac{3}{4} \cdot f(-2,1)\right) = \tfrac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

□

- **Samenvatting:** *We hebben zuivere n-olen op eenzelfde manier gedefinieerd als de zuivere triolen. Verder geldt dat alle 2^n-olen op een bepaalde manier notationele ballast vormen: ze zijn simpelweg een alternatieve schrijfwijze voor een gegeven verbinding van (al dan niet gepunteerde) basisnoten.*

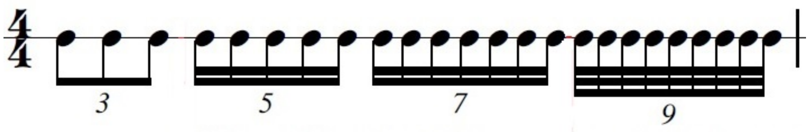
♫ De definitie van algemene antimetrische figuren

In deze sectie gaan we met aanname (♣) algemene antimetrische figuren definiëren. We hoeven hiertoe alleen nog maar de antimetrische omzettingsfactor van alle antimetrische figuren in een 4/4-maat te bepalen. Herinner je hiertoe eerst het volgende:

- **Terugblik:** *Van een n-ool is de antimetrische omzettingsfactor een breuk m/n; we dienen alleen m nog maar te bepalen.*
- **Terugblik:** 2^n*-olen hoeven niet meer geformaliseerd te worden; deze groep vormt toch alleen maar notationele ballast.*

Om de omzettingsfactor van alle n-olen te bepalen (n geen macht van 2), observeren we voor de vierkwartsmaat het volgende:

- **Observatie:** *We kunnen alle n-olen (waar n geen macht van 2 is) vormen door een groep noten te vervangen die in totaal 1 tel duurt (ofwel even lang als een kwartnoot duurt).*



Figuur 6.11: *Een aantal antimetrische figuren die een ieder exact de duur van één kwartnoot in beslag nemen.*

In *figuur 6.11* is van een aantal n-olen weergegeven hoe zij eruit zien als ze in totaal 1 tel duren. Onze taak is het nu om in deze figuur een patroon te vinden, waarmee we de antimetrische omzettingsfactor kunnen bepalen voor alle n-olen. Observeer voor *figuur 6.11* ten slotte nog het volgende:

- **Observatie:** *Alle 2^n-olen zijn in figuur 6.11 overgeslagen.*

De sleutel voor het vinden van het patroon is het **soort** basisnoot dat voor ieder antimetrisch figuur gebruikt wordt. Observeer het volgende en herinner je het volgende:

- **Observatie:** *Iedere keer als er een 2^n-ool zou moeten komen in figuur 6.11, wisselt het soort basisnoot dat gebruikt wordt voor de antimetrische figuren. De basisnoot na de wisseling heeft een nootnummer dat één lager is ten opzichte van de basisnoot voor de wissel.*

- **Terugblik:** *Alle antimetrische figuren moeten een versnellende werking hebben (behalve de duool).*

- **Terugblik:** *Bij een antimetrisering is het soort noot dat gebruikt is voor de antimetrisering hetzelfde als na de antimetrisering. Ergo, als een groep basisnoten gaat vervangen om een antimetrisch figuur te maken, moet dat antimetrisch figuur ook uit basisnoten bestaan.*

Het idee om in zijn algemeenheid de antimetrische omzettingsfactor te bepalen kan nu op basis van vier regels:

1. Ieder antimetrisch figuur moet versnellend zijn, dus moeten we bij antimetrisering minder noten weghalen dan ze creëren. Dit impliceert dat de antimetrische omzettingsfactor een breuk m/n is waarbij geldt $m < n$.

2. We moeten basisnoten gebruiken voor de antimetrisering, omdat er in de antimetrische figuren in *figuur 6.11* louter basisnoten zitten. We mogen dus niet aannemen dat er (bijvoorbeeld) gepunteerde noten vervangen zijn bij het maken van een antimetrisch figuur uit *figuur 6.11*; alleen basisnoten kunnen vervangen zijn.

3. Je moet minimaal twee noten vervangen bij antimetrisering.

4. Als je een n-ool maakt, moet het aantal noten dat je vervangt zo dicht mogelijk bij n liggen, zodat de verandering van de relatieve duur bij antimetrisering minimaal is.

In het licht van regel (1) en (2) zijn de opties voor de triool maar gelimiteerd: hij moet minder dan drie basisnoten vervangen, dus twee of één. Regel (3) geeft de doorslag: een triool vervangt 2 noten door drie. Twee achtsten passen in één kwartnoot, dus we vinden een achtstentriool.

Bij de kwintool wordt het vervolgens lastiger kiezen, regel (1) en (3) zegt dat hier vier, drie of twee basisnoten vervangen moeten worden. We kunnen een kwartnoot niet opdelen in drie basisnoten (regel 2), dus de keus gaat tussen twee of vier basisnoten vervangen. We kiezen uiteindelijk voor vier (zestiende noten vervangen), aangezien 4 het dichtste ligt bij 5 (regel 4). Een kwintool heeft dus vijf noten in plaats van vier.

Bij de septool kunnen we weer kiezen uit 2, 3, 4, 5 of 6 basisnoten vervangen door zeven (vanwege regel 1 en 3). We kunnen een kwartnoot slechts opsplitsen in 2 of 4 basisnoten, dus deze opties blijven over (regel 2). Hier kiezen we weer voor het vervangen van vier basisnoten, omdat 4 het dichtst bij 7 ligt (regel 4). Een septool heeft dus 7 noten in plaats van 4.

Bij de nonolen is het patroon duidelijk. We kunnen we kiezen uit een vervanging van twee, vier of acht noten (vanwege regel 1 en 2), we kunnen een kwartnoot immers ook opsplitsen in tweeëndertigste noten. We kiezen hier voor de vervanging van acht, omdat 8 het dichts bij 9 ligt (regel 4). Een nonool heeft dus 9 noten in plaats van 8.

Afgaande op bovenstaande analyse poneren we nu het rijtje antimetrische omzettingsfactoren voor de 3-ool, 5-ool, 6-ool, 7-ool en 9-ool. Dit rijtje is gegeven door (2/3, 4/5, 4/6, 4/7, 8/9, ...). De lezer wordt uitgenodigd met het "korte" algoritme dit rijtje omzettingsfactoren op juistheid te controleren. In het rijtje staat bij iedere omzettingsfactor in de noemer dus steeds de n die geassocieerd wordt met de n-ool. In de teller staat **de grootste macht van twee die nog net kleiner is dan** n. Dit bovenste getal is dus altijd gegeven door $2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}$. De kogel is door de kerk, we kunnen een algemeen antimetrisch figuur nu goed definiëren.

Definitie 6.2.3 (n-ool)**.** Zij $f \in \mathcal{M}$ willekeurig. $\mathcal{A}_n : N \to N$ is de operatie die van een $x \in N$, de bijpassende noot uit de n-ool $\mathcal{A}_n(x)$ maakt. Deze is gegeven door

$$\mathcal{A}_n(x) = f^{-1}\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}}{n} \cdot f(x)\right).$$

□

Opmerking. Stelling 6.2.1 vertelt dat er niet per se iets mis is met deze definitie. Merk ook op dat de gegeven definitie in overeenstemming is met de al bekende definitie voor de triool (3-ool) (*definitie 6.1.2*), aangezien als $n = 3$ de antimetrische omzettingsfactor gelijk is aan 2/3.

- **Samenvatting:** *We hebben in deze sectie een expliciete expressie van de antimetrische omzettingsfactor afgeleid. Hiermee hebben we algemene antimetrische figuren gedefinieerd.*

✍ Sommige antimetrische figuren zijn niet zo revolutionair (deel 2)

We focussen ons weer op zuivere antimetrische figuren (*definitie 6.2.2*). Herinner je het volgende:

- **Terugblik:** *Zuivere 2^n-olen beelden categorie II ritmische noten op categorie II ritmische noten af.*
- **Terugblik:** *Zuivere antimetrische figuren die géén "nieuwe" (categorie III of IV) noten uit categorie II ritmische noten kunnen vormen, zijn in zekere zin overbodig.*

Het doel van deze sectie is om nog meer n-olen te extraheren die op eenzelfde manier "overbodig" zijn als de 2^n-olen. Deze extra overbodige n-olen blijken een overeenkomst te hebben: n heeft een priemfactor twee in zich. De volgende stelling legt de nieuwe overbodige n-olen vast. De reden waarom dit soort antimetrische figuren overbodig zijn, wordt in de volgende paragraaf uitgelegd.

Stelling 6.2.3 (Onnodige antimetrische figuren 2)**.** *Zij $n \in \mathbb{N}^+$ met de eigenschap dat 2 een deler is van n. Er geldt dat voor alle $x \in N_{(2)}$ er een $y \in N_{(2)}$ bestaat waarvoor geldt dat $\mathcal{A}_n(x) = \mathcal{A}_{\frac{n}{2}}(y)$. In andere woorden, er geldt*

$$N_{(n)} \subseteq N_{\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{N}^+$ deelbaar door twee gegeven, zij ook $x \in N_{(2)}$ willekeurig gegeven. Er kunnen nu twee situaties optreden: ofwel n is een macht van twee, dan bewijst *lemma 6.2.2* de stelling, ofwel n is geen macht van twee. Als n geen macht van twee is, vertelt *definitie 6.2.3* ons dat

$$\mathcal{A}_n(x) = f^{-1}\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}}{n} \cdot f(x)\right).$$

We manipuleren onderstaande expressie nu, opdat we een $y \in N_{(2)}$ met de eigenschap dat

$$\mathcal{A}_n(x) = \mathcal{A}_{\frac{n}{2}}(y) = f^{-1}\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(n/2) \rfloor}}{n/2} \cdot f(y)\right).$$

We laten zijn dat $x = y$. Merk op:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\frac{n}{2}}(y) &= f^{-1}\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(n/2) \rfloor}}{n/2} \cdot f(y)\right), \\ &= f^{-1}\left(\frac{2 \cdot 2^{\lfloor \log_2(n)-1 \rfloor}}{n} \cdot f(y)\right), \\ &= f^{-1}\left(\frac{2 \cdot 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor - 1}}{n} \cdot f(y)\right), \\ &= f^{-1}\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}}{n} \cdot f(x)\right) = \mathcal{A}_n(y). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Opmerking. Het resultaat dat we $x = y$ konden kiezen is niet heel choquerend, aangezien in de aanloop naar *definitie 6.2.3* al zagen dat de antimetrische omzettingsfactor van de triool (3-ool) gelijk is aan de omzettingsfactor van de sextool (6-ool) ($2/3 = 4/6$). We hebben ook nog het volgende gevolg:

Gevolg. *Als $n \in \mathbb{N}^+$ géén macht van twee is, geldt er $N_{(n)} = N_{(\frac{n}{2})}$.*

- **Observatie:** *Stelling 6.2.3 vertelt ons dat we n-olen, waar in n een priemfactor 2 zit, altijd kunnen schrijven als $n/2$-olen. In extensie zouden door een inductieargument alle n-olen kunnen schrijven als m-olen, waarbij m géén priemfactoren 2 heeft, maar verder dezelfde priemfactoren als n.*

Deze observatie heeft (ten minste in eigen ervaring) een goede toepassing in geschreven muziek. Het zegt bijvoorbeeld dat je sextolen (6-olen) ook kunt noteren als triolen (3-olen). In geschreven muziek wordt om deze reden ook in plaats van zestiende sextolen vaak gekozen voor paren van twee zestiende triolen. Om deze claim wat te versterken met anekdotisch bewijs, hebben we in *figuur 6.12* een deel van de partituur weergegeven van het nummer *One Winged Angel* uit het spel *Final Fantasy VII*, gecomponeerd door *Nobuo Uematsu*[16] en uitgebracht door het bedrijf *Square Enix.* [1]

We eindigen deze paragraaf met een voorbeeld over de bijzondere structuur die door *stelling 6.2.3* de muziek in is geslopen.

Voorbeeld 6.2.3 (Structuurimplicatie door *stelling 6.2.3*)**.** Het gevolg van de zojuist bewezen stelling doet ook een interessante uitspraak over de structuur van antimetrische figuren. Iedere keer als je de relatieve duur van de individuele (ritmische) noten in een n-ool door 2 deelt, creëer je een nieuw antimetrisch figuur, een $2n$-ool. Dit is geïllustreerd in *figuur 6.13*. Wees waakzaam op de subtiliteiten in deze nootvoorbeelden.

Wat nog interessant is aan deze structuur, is het feit dat de notenpiramide die we helemaal in het begin in *paragraaf 2.2* in *figuur 2.3* hebben gezien eigenlijk hier ook weer verschijnt bij antimetrische

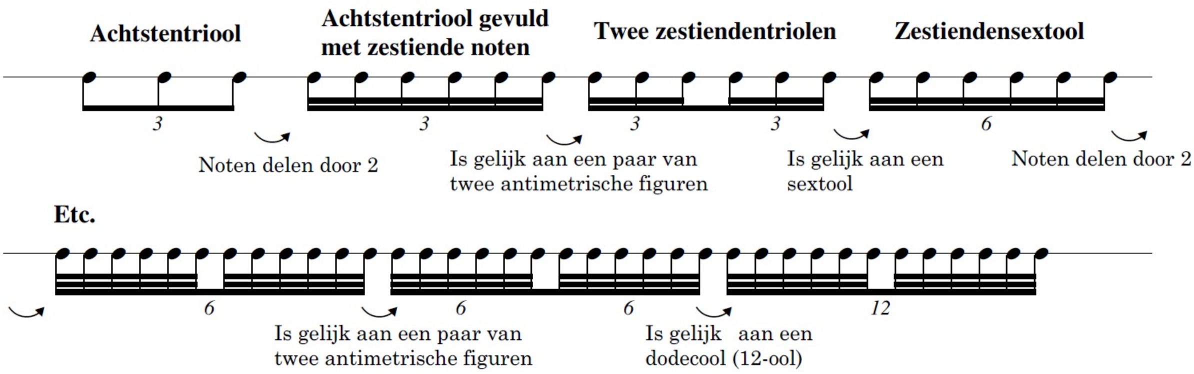
[16] Gratis beschikbaar gesteld door de website `http://www.ninsheetmusic.org/`, gearrangeerd door *Commander6* (lid van de site).

Figuur 6.12: *Een deel van een partituur waar sextolen zijn geschreven als paren triolen. Iedere keer als een paar van twee triolen genoteerd staat, had daar ook een sextool geschreven kunnen staan.*

figuren. Ga je met betrekking tot de basisnoten één stap naar beneden in de notenpiramide, dan passen er twee keer zo veel van deze basisnoten in het antimetrische figuur.

Hetzelfde gedrag kan men ook bij andere muzikale concepten herkennen. Neem enkele puntering bijvoorbeeld: een enkelgepunteerde kwartnoot duurt twee keer zo lang als een enkelgepunteerde achtste noot. Eén stap omhoog qua basisnoot in de notenpiramide impliceert een twee keer zo lange relatieve duur. Samenvattend: **de structuur van de notenpiramide komt overal in de muziek terug.**

□



Figuur 6.13: *De structuur die (het gevolg van) stelling 6.2.3 duidelijk maakt over algemene antimetrische figuren. Caveat: Omdat we in zeer theoretisch gebied zitten, waar muzikaal niet erg veel praktische toepassing in zit, kan het zijn dat latere nootvoorbeelden in deze figuur foutief door het computerprogramma zijn opgeschreven.*

- **Observatie:** *De structuur van basisnoten, te zien in de notenpiramide, verschijnt ook bij zuivere antimetrische figuren. (Ook verschijnt deze structuur op meer plekken, bijvoorbeeld bij punteringen)*
- **Samenvatting:** *We hebben weer een aantal (zuivere) antimetrische figuren als "overbodig" bestempeld. n-olen, waarbij je n kunt delen door 2, zijn overbodig.*[17]

[17] Dit blijken de enige "overbodige" antimetrische figuren te zijn als we antimetrische nesting niet toestaan.

6.3 Algemene antimetrische figuren: Exploratie

In deze sectie gaan we, nu we een goede definitie van antimetrische figuren hebben, deze groep bijzondere muzikale objecten verder onderzoeken. In het bijzonder gaan we kijken naar de rol van priemgetallen in zuivere antimetrische figuren. We doen dit in twee stapjes:

1. Eerst kijken we naar algemene antimetrische figuren, waarbij we antimetrische nesting **niet** toestaan. We mogen dus slechts één keer een operatie $\mathcal{A}_n$ loslaten op een $x \in N_{(2)}$.
2. Dan kijken we naar antimetrische nesting. We mogen dan vaker achter elkaar een operatie $\mathcal{A}_n$ loslaten op een $x \in N_{(2)}$.

► **Waarschuwing:** *We beschouwen in deze paragraaf alleen de zuivere n-olen, aangezien dit de antimetrische figuren zijn die in de muziek ook "in het wild" voorkomen.*

✍ Bijna alle zuivere n-olen voegen iets aan categorie II toe

► **Terugblik:** *Zuivere n-olen, waarbij n een macht van 2 is, voegen niets toe aan de categorie II noten.*

We hebben al gezien dat zuivere n-olen, waar n een macht van 2 is, niets toevoegen aan de categorie II noten. Dit gaf ons aanleiding om deze antimetrische figuren te bestempelen als notationele ballast; ze vormen alternatieve schrijfwijzen van noten waar we al notatie voor hebben.

In deze sectie gaan we laten zien dat alle andere zuivere n-olen, die we nog niet verworpen hebben, in ieder geval iets toevoegen aan de categorie II noten. Deze n-olen breiden $N_{(2)}$ wél uit met categorie III noten. In het bijzonder gaan we gegeneraliseerde versies bewijzen van *lemma 6.1.4*, *lemma 6.1.5* en *stelling 6.1.6*. De bewijzen van deze generaliseringen zullen ongeveer analoog verlopen aan de bewijzen van de respectievelijke stellingen voor triolen. Nadat we de gegeneraliseerde stellingen bewezen hebben, kunnen we de relatie gaan onderzoeken tussen antimetrische figuren en priemgetallen.

Lemma 6.3.1. *Voor alle $n \in \mathbb{N}^+$ geldt dat $\mathcal{A}_n$ een $\mathbb{Z}_2$-lineaire operator is.*

Bewijs. Bewijs verloopt compleet analoog aan het bewijs van *lemma 6.1.4*.

Q.E.D.

Lemma 6.3.2. *Zij $n \in \mathbb{Z}$ en $m \in \mathbb{N}^+$ met de eigenschap dat $2 \nmid m$. Er geldt dat*[18]

$$N_{(m)} = \left\langle \left(\frac{n}{\frac{2^{\lceil \log_2(m) \rceil}}{m}} \right) \right\rangle_{\mathbb{Z}_2}.$$

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{Z}$ en $m \in \mathbb{N}$ willekeurig gegeven (2 géén deler van m). Merk allereerst op dat geldt

$$\mathcal{A}_m(n+1,1) = \left(\frac{n}{\frac{2^{\lceil \log_2(m) \rceil}}{m}} \right),$$

aangezien door constructie in *stelling 6.2.1* we weten dat $\mathcal{A}_m(n+1,1) = (p,q)$, waar voor p en q

[18] $\lceil \cdot \rceil$ is de ceiling functie; afronden naar boven.

geldt dat

$$\begin{aligned}
p &= n+1+\left\lfloor \log_2\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(m)\rfloor}}{m}\right)\right\rfloor = n+1+\left\lfloor \log_2\left(2^{\lfloor \log_2(m)\rfloor}\right) - \log_2(m)\right\rfloor,\\
&= n+1+\lfloor \lfloor \log_2(m)\rfloor - \log_2(m)\rfloor = n+1-1,\\
&= n,\\
q &= \frac{\frac{2^{\lfloor \log_2(m)\rfloor}}{m}}{2^{\left\lfloor \log_2\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(m)\rfloor}}{m}\right)\right\rfloor}} \overset{\star}{=} \frac{2^{\lfloor \log_2(m)\rfloor}}{m}\cdot 2 = \frac{2^{\lfloor \log_2(m)\rfloor+1}}{m},\\
&\overset{*}{=} \frac{2^{\lceil \log_2(m)\rceil}}{m}.
\end{aligned}$$

We hebben in deze bepaling bij ($\star$) gebruik gemaakt van de berekening voor p en bij ($*$) van het feit dat $\log_2(m) \notin \mathbb{Z}$, aangezien $2 \nmid m$.

Herinner je nu uit *stelling 4.2.4* dat

$$N_{(2)} = \left\langle \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Ten slotte geldt door *lemma 6.3.1* dat

$$N_{(m)} = \mathcal{A}_m\left(N_{(2)}\right) = \langle \mathcal{A}_m(n+1,1)\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} n \\ \frac{2^{\lceil \log_2(m)\rceil}}{m} \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Q.E.D.

Stelling 6.3.3. *Zij $n \in \mathbb{N}^+$ oneven. De volgende beweringen zijn waar:*

I. $N_{(2)} \subset N_{(n)}$,

II. $N_{(n)} \cong \mathbb{Z}_2\langle 1/n\rangle$ *als moduul.*

Bewijs. **(I)**
Neem $\left(0, \frac{2^{\lceil \log_2(n)\rceil}}{n}\right)$ als voortbrenger van $N_{(n)}$ (*lemma 6.1.5*). Merk vervolgens op

$$\frac{n}{2^{\lfloor \log_2(n)\rfloor}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2^{\lceil \log_2(n)\rceil}}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in N_{(2)} \cap N_{(n)},$$

aangezien volgens *definitie 6.2.3* geldt voor willekeurige $f \in \mathcal{M}$ dat

$$\frac{n}{2^{\lfloor \log_2(n)\rfloor}} \cdot f^{-1}\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(n)\rfloor}}{n}\cdot f(1,1)\right) = f^{-1}\left(\frac{n}{2^{\lfloor \log_2(n)\rfloor}}\cdot\frac{2^{\lfloor \log_2(n)\rfloor}}{n}\cdot f(1,1)\right) = f^{-1}(f(1,1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Stelling 4.2.4 vertelt ons vervolgens dat $(1,1)$ een voortbrenger is van $N_{(2)}$. We kunnen dus de voortbrenger van $N_{(n)}$ gebruiken om alle elementen van $N_{(2)}$ te genereren. Dit impliceert $N_{(n)} \subseteq N_{(2)}$. We laten ten slotte zien dat $N_{(n)} \neq N_{(2)}$. Stel dat dit wel zo is, dan zou op zijn minst moeten gelden dat $\left(0, \frac{2^{\lceil \log_2(n)\rceil}}{n}\right) \in N_{(2)}$. We kiezen $(0,1)$ zonder verlies van algemeenheid als voortbrenger van $N_{(2)}$.[19]

$$\Longrightarrow \exists_{\alpha\in\mathbb{Z}_2} : \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2^{\lceil \log_2(n)\rceil}}{n} \end{pmatrix}.$$

[19] Dit is zonder verlies van algemeenheid, aangezien we iedere andere voortbrengen toch hadden kunnen omschrijven naar deze.

Aangezien het nootnummer van beide noten gelijk is en $\frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n}$ positief is, moet gelden dat $1 \leq \alpha < 2$. *Lemma 4.1.5* vertelt tenslotte dat

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n} \end{pmatrix}, \\ \implies \quad \alpha &= \frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n}. \end{aligned}$$

Merk ten slotte op dat $2 \nmid n$, en dus dat $\frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n} \notin \mathbb{Z}_2$. ↯

$$\implies N_{(2)} \subset N_{(n)}.$$

(II)
Nu moeten we nog laten zien dat we met een isomorfisme hebben te maken als we $\mathbb{Z}_2 \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ gebruiken; we gaan als isomorfisme weer een maatsoortfunctionaal gebruiken. Twee dingen krijgen we hiervan al cadeau:

1. *Stelling 5.1.1* vertelt dat we een maatsoortfunctie $f \in \mathcal{M}$ altijd als homomorfisme kunnen gebruiken.
2. *Lemma 5.2.1* vertelt ons vervolgens dat dit homomorfisme ook injectief is.

We dienen dus alleen surjectiviteit nog te bewijzen. Kies een $\alpha \in \mathbb{Z}_2 \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ willekeurig en herschrijf deze als volgt:

$$\alpha = \beta + \tfrac{1}{n} \cdot \gamma, \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_2.$$

We nemen nu een maatsoort f_1 (waar de hele noot dus één tel duurt).

$$\begin{aligned} f_1(1,1) &= 1 \cdot 1 \cdot 2^{-1+1} = 1, \\ f_1\left(\left\lceil \log_2\left(\tfrac{1}{n}\right) \right\rceil, \frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n} \right) &= 1 \cdot \frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n} \cdot 2^{-1+\lceil -\log_2(n) \rceil} = \frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n} \cdot 2^{-1-\lfloor \log_2(n) \rfloor}, \\ &\overset{\star}{=} \frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n} \cdot 2^{-1-\lceil \log_2(n) \rceil+1} = \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Hier hebben we bij ($\star$) het feit gebruikt dat 2 geen deler van n is. Beschouw nu de noot

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{n}\right) \right\rceil \\ \frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n} \end{pmatrix}.$$

Toepassing van *stelling 5.1.1* geeft dat volgt

$$f_1(p,q) = \beta \cdot f_1(1,1) + \gamma \cdot f_1\left(\left\lceil \log_2\left(\tfrac{1}{n}\right) \right\rceil, \frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n} \right) = \beta + \tfrac{1}{n} \cdot \gamma = \alpha.$$

Hieruit volgt dat f_1 surjectief is, en samen met *lemma 5.2.1* volgt de bijectiviteit. We hebben dus inderdaad (samen met I) dat $N_{(n)} \cong \mathbb{Z}_2 \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$.

Q.E.D.

Met *stelling 6.3.4* onderdeel I hebben we gezien dat alle zuivere n-olen, waar n oneven is, de verzameling $N_{(2)}$ uitbreidt met nieuwe categorie III (en IV) noten. Om de rol van priemgetallen hierin te ontdekken, merken we uit onderdeel II op:

- **Observatie:** $N_{(n)}$ *bevat alle noten die een relatieve duur hebben die te schrijven is als* $\alpha \cdot 1/n$, *waar* $n \in \mathbb{Z}_2$.[20]

[20] Intuïtief zou je kunnen stellen dat we hebben aangetoond dat $N_{(n)} = 1/n \cdot N_{(2)}$, hoewel formeel dit iets te kort door de bocht is.

We concluderen uit de observatie dat de n-ool alle priemfactoren van n toevoegt aan $\mathbb{Z}_2$. Hiermee kunnen we verklaren waarom andere n-olen uit *paragraaf 6.2*, waar n wél deelbaar is door 2, maar geen macht van 2, als nutteloos beschouwd werden. Observeer hiertoe:

- **Observatie:** *De getallen in $\mathbb{Z}_2$ kunnen in hun noemers alle mogelijke machten van 2 bevatten.*

Stel nu dat we een zuivere n-ool tegenkomen, waarbij n deelbaar is door 2. We kunnen dan n schrijven als $2m$ voor een $m \in \mathbb{N}$. De relatieve duren die noten uit $N_{(n)}$ kunnen hebben, zijn vervolgens te schrijven als $\alpha \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\alpha \cdot 1/m = \beta \cdot 1/m$, waar $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$. Merk echter op dat alle relatieve duren die we met zuivere m-olen kunnen maken ook te schrijven zijn als $\beta \cdot 1/m$, waar $\beta \in \mathbb{Z}_2$. We kunnen dus n-olen net zo goed opschrijven als m-olen, waardoor n-olen in zekere zin muzikaal overbodig zijn.

- **Samenvatting:** *We hebben laten zien dat alle zuivere n-olen, waar n oneven is, de verzameling categorie II noten uitbreiden.*

✍ Meer priemfactoren betekent een grotere verzameling

- **Terugblik:** $N_{(2)} \subset N_{(n)}$ *als n oneven is.*
- **Terugblik:** *Als n deelbaar door 2 is, kunnen we n-olen schrijven als $n/2$-olen.*
- **Waarschuwing:** *Antimetrisch nesten is nog niet toegestaan.*

We hebben gezien dat alle n-olen, waar n oneven is, in ieder geval iets aan categorie II noten toevoegen. Het volgende wat we bewijzen, is dat $N_{(m)} \subset N_{(n)}$ als n dezelfde en meer priemfactoren (ongelijk 2) heeft als/dan m.

Deze stelling verzekert dat we (in dit geval) n-olen niet kunnen schrijven als m-olen, waardoor n-olen een nuttige toevoeging aan ons muzieksysteem vormen ten opzichte van m-olen. We verzekeren hiermee dat we niet in eenzelfde situatie zitten als in de tweede terugblik. We geven eerst een voorbeeld, waarna we de stelling bewijzen.

Voorbeeld 6.3.1 (9-olen, daar zit meer in dan 3-olen)**.** In dit voorbeeld laten we zien we met een zuivere 9-ool een relatieve duur kunnen vormen, die met alleen zuivere triolen onmogelijk is. In ons voorbeeld gebruiken we de vierkwartsmaat als uitgangspunt. Merk allereerst op dat een tweeëndertigstennonool (9-ool) gegeven is door

$$\mathcal{A}_9(-4, 1) = \begin{pmatrix} -5 \\ 16/9 \end{pmatrix}.$$

De relatieve duur van deze noot is gelijk aan

$$f(-5, 16/9) = 4 \cdot \tfrac{16}{9} \cdot 2^{-1-5} = \tfrac{1}{9}.$$

We vragen ons nu af of we deze relatieve door ook met slechts zuivere triolen kunnen vormen. Herinner uit *lemma 6.1.5* dat de zuivere triolen worden voortgebracht door één noot, zeg $(-3, 4/3)$, dus kunnen we ook alle mogelijke relatieve duren met deze noot vinden. Alle mogelijke relatieve zijn door de lineariteit van f (*stelling 5.1.1*) namelijk gegeven door

$$\alpha \cdot f(-3, 4/3) = \alpha \cdot 4 \cdot \tfrac{4}{3} \cdot 2^{-1-3} = \tfrac{1}{3}\alpha,$$

waar $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. Een simpele berekening geeft dat dan moet gelden

$$\alpha = \tfrac{1}{3},$$

maar $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}_2$, dus kunnen nonolen (9-olen) weldegelijk relatieve duren produceren die voor triolen onmogelijk zijn.

□

Stelling 6.3.4. *Zij $n \in \mathbb{N}^+$ oneven. Zij daarnaast de priemfactorisatie van n gegeven door*

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i.$$

Stel verder dat $m = p_{k+1} \cdot n$, waarbij p_{k+1} een priemgetal is ongelijk aan 2. Er geldt dan dat

$$N_{(n)} \subset N_{(m)}.$$

Bewijs. Merk allereerst op dat zowel $N_{(n)}$ als $N_{(m)}$ worden voortgebracht door één element uit N. *Lemma 6.3.2* vertelt ons vervolgens dat de voortbrengers van de twee verzamelingen als volgt gegeven zijn (we zetten het nootnummer voor het gemak op 1):

$$\begin{aligned} N_{(n)} &= \left\langle \left(\frac{1}{\frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n}} \right) \right\rangle_{\mathbb{Z}_2}, \\ N_{(m)} &= \left\langle \left(\frac{1}{\frac{2^{\lceil \log_2(m) \rceil}}{m}} \right) \right\rangle_{\mathbb{Z}_2}. \end{aligned}$$

Merk op dat geldt $p_{k+1} \cdot 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - \lceil \log_2(m) \rceil} \in \mathbb{Z}_2$. Vervolgens bepalen we

$$p_{k+1} \cdot 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - \lceil \log_2(m) \rceil} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2^{\lceil \log_2(m) \rceil}}{m}} \right).$$

Hiertoe merken we allereerst op dat uit het feit dat n en m bijna dezelfde priemfactoren hebben volgt dat

$$p_{k+1} \cdot 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - \lceil \log_2(m) \rceil} \cdot \frac{2^{\lceil \log_2(m) \rceil}}{m} = \frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n}.$$

We weten al uit *lemma 6.3.2* dat dit getal positief is en tussen 1 en 2 in ligt. Ergo, er volgt

$$p_{k+1} \cdot 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - \lceil \log_2(m) \rceil} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2^{\lceil \log_2(m) \rceil}}{m}} \right) = \left(\frac{1}{\frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n}} \right).$$

We kunnen dus met de voortbrenger van $N_{(m)}$ de voortbrenger van $N_{(n)}$ produceren, dus geldt er dat $N_{(n)} \subseteq N_{(m)}$. Om vervolgens te laten zien dat $N_{(n)} \neq N_{(m)}$, gaan we laten zien dat $N_{(n)}$ niet de voortbrenger van $N_{(m)}$ kan produceren. Het volstaat om dit te laten zien voor de in dit bewijs gegeven voortbrenger van $N_{(n)}$ en $N_{(m)}$.[21] Stel dat we wel met de voortbrenger van $N_{(n)}$ de voortbrenger van $N_{(m)}$ kunnen produceren, dan volgt

$$\exists_{\alpha \in \mathbb{Z}_2} : \left(\frac{1}{\frac{2^{\lceil \log_2(m) \rceil}}{m}} \right) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n}} \right).$$

We laten ons inspireren door *voorbeeld 6.3.1* en kiezen $f_1 \in \mathcal{M}$ als maatsoort. Als de gelijkheid voor de noten geldt, kunnen we α ook via de relatieve duur vinden. We rekenen dus de relatieve duur van beide zeiden van het is-teken uit en gebruiken dit om α te vinden. Gebruikmakend van de lineariteit van f_1 (*stelling 5.1.1*) volgt dat

$$\begin{aligned} \frac{2^{\lceil \log_2(m) \rceil}}{m} &= \alpha \cdot \frac{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}{n}, \\ \alpha &= \frac{1}{p_{k+1}} \cdot 2^{\lceil \log_2(m) \rceil - \lceil \log_2(n) \rceil}. \end{aligned}$$

[21] Dit is voldoende, aangezien we gemakkelijk iedere voortbrenger naar een andere kunnen omschrijven.

Aangezien $p_{k+1} \neq 2$, geldt dat $\alpha \notin \mathbb{Z}_2$. ↯

$\implies N_{(n)} \subset N_{(m)}$.

Q.E.D.

Met *stelling 6.3.4* zien we dat het toevoegen van priemfactoren, ongelijk 2, aan de n in $N_{(n)}$ nuttig is. De resulterende verzameling noten wordt er echt groter van. Als gevolg kunnen we deze stelling natuurlijk iteratief toepassen: als we één priemgetal toevoegen, wordt de verzameling noten groter, als we nog een priemgetal toevoegen, wordt de verzameling natuurlijk nog groter. Meer priemgetallen toevoegen maakt dus de verzameling als maar groter. Formeel kunnen we het gevolg als volgt formuleren.

- **Gevolg:** *Zij $n, m \in \mathbb{N}$ met de eigenschap dat 2 geen deler van één van beide is. Stel vervolgens dat geldt* $\gcd(n, m) = n$. *Er volgt dan dat $N_{(n)} \subset N_{(m)}$.*
- **Samenvatting:** *We hebben laten zien dat er zuivere n-olen zijn die niet te schrijven zijn als zuivere m-olen, gegeven dat n dezelfde priemfactoren als m heeft en meer. Hierbij hebben we aangenomen dat antimetrische nesting niet toegestaan is. We hebben hiermee dus aangetoond dat alle zuivere n-olen, waar n oneven is, in het muzieksysteem een nuttige toevoeging zijn, gegeven dat we antimetrische nesting niet toestaan is.*

✍ Antimetrische nesting toestaan: meer zuivere n-olen zijn notationele ballast

Vanaf nu staan we antimetrische nesting weer toe. We hebben het over zuivere antimetrische figuren, dus geven we allereerst een definitie van geneste zuivere antimetrische figuren.

Definitie 6.3.1 (Genest zuiver antimetrisch figuur)**.** Een genest zuiver antimetrisch figuur is gegeven door

$$\mathcal{A}_{n_1} \circ \cdots \circ \mathcal{A}_{n_i}(x),$$

waar $x \in N_{(2)}$, $2 \nmid n_i$ voor alle i en $i \geq 2$.

□

Opmerking. De eis $x \in N_{(2)}$ is aanwezig, omdat we anders geen zuiver antimetrisch figuur vormen. Twee mag geen deler van n_i zijn, vanwege *stelling 6.2.3*. i is groter dan twee, omdat we ander geen geneste maar een normaal zuiver antimetrisch figuur vormen.

We weten al het volgende over antimetrische figuren (en dus ook over het antimetrisch nesten):

- **Terugblik:** $N_{(n)}$ *voegt de priemfactoren van n toe aan de noemers van $\mathbb{Z}_2$.*

Met deze terugblik krijgen we een idee: stel dat we een antimetrisch figuur uit $N_{(9)}$ willen maken, dan merken we op dat $9 = 3 \cdot 3$. We willen in feite dus twee keer $1/3$ toevoegen aan $\mathbb{Z}_2$ om $N_{(9)}$ te vormen. We weten dat, gegeven een noot uit $N_{(2)}$, $\mathcal{A}_3$ één keer $1/3$ kan toevoegen aan $\mathbb{Z}_2$. Als we dus $\mathcal{A}_3$ tweemaal na elkaar toepassen, ofwel antimetrisch nesten, kunnen we zo hetzelfde doen als $\mathcal{A}_9$.

- **Observatie:** *We kunnen n-olen schrijven als een nesting van a-olen en b-olen als $a \cdot b = n$.*

Hoewel we dus weten dat het toevoegen van priemfactoren nuttig is (als antimetrische nesting niet is toegestaan), betekent dit niet dat we geen zuivere antimetrische figuren meer als notationele ballast kunnen bestempelen. We hebben nu antimetrische nesting tot onze beschikking en dat verandert de zaak.

Dit zou het volgende betekenen: stel we beschouwen een zuivere n-ool waarbij n géén priemgetal is, dan heeft n op zijn minst twee factoren, zeg $a \cdot b = n$. We zouden dan de n-ool alsnog kunnen produceren uit een a-ool en een b-ool door met een geschikte $x \in N_{(2)}$ de volgende antimetrische nesting uit te voeren: $\mathcal{A}_a \circ \mathcal{A}_b(x)$. We geven eerst twee voorbeelden van dit idee, waarna we de redenering met een aantal stellingen formeel gaan maken.

Voorbeeld 6.3.2 (De 9-ool, daar zit toch evenveel in als in de 3-ool)**.** We beschouwen weer de tweeëndertigstennonool (9-ool). We weten nog van *voorbeeld 6.3.1* dat deze gegeven is door

$$\mathcal{A}_9(-4, 1) = \begin{pmatrix} -5 \\ 16/9 \end{pmatrix}.$$

Het vermoeden is dat we met een geneste triool deze noot ook kunnen vinden. We proberen een triool in een triool, aangezien $3^2 = 9$. Merk vervolgens op voor de noot $(-3, 1) \in N_b$ dat

$$\mathcal{A}_3(-3, 1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

en ten slotte dat

$$\mathcal{A}_3(-4, 4/3) = \begin{pmatrix} -5 \\ 16/9 \end{pmatrix}.$$

We zien dus dat we de nonool inderdaad met een geneste triool kunnen produceren, namelijk

$$\mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_3(-3, 1) = \begin{pmatrix} -5 \\ 16/9 \end{pmatrix} = \mathcal{A}_9(-4, 1).$$

□

Voorbeeld 6.3.3 (Een zuivere 105-ool is een nesting van zijn priemfactoren)**.** In dit voorbeeld voeren we het idee van *voorbeeld 6.3.2* door naar een extremere situatie. Beschouw de (uitermate theoretische) zuivere 105-ool. Voor elke halve noot in zo'n 105-ool geldt dat zij gegeven is door

$$\mathcal{A}_{105}(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 128/105 \end{pmatrix}.$$

Nu merken we op dat $3 \cdot 5 \cdot 7$ de priemfactorisatie is van 105, waardoor we vermoeden dat we deze 105-ool kunnen vormen door een nesting van een zuivere triool, kwintool en septool. Beschouw de basisnoot $(1, 1)$ en merk op

$$\mathcal{A}_7 \circ \mathcal{A}_5 \circ \mathcal{A}_3(1, 1) = \mathcal{A}_7 \circ \mathcal{A}_5(0, 4/3) = \mathcal{A}_7(0, 16/15) = \begin{pmatrix} -1 \\ 128/105 \end{pmatrix} = \mathcal{A}_{105}(0, 1).$$

□

Lemma 6.3.5. *Voor alle $n, m \in \mathbb{N}^+$ oneven geldt voor alle $x \in N$ dat*

$$\mathcal{A}_n \circ \mathcal{A}_m(x) = \mathcal{A}_m \circ \mathcal{A}_n(x).$$

Ergo, de operatie $\circ$ is commutatief.

Bewijs. Zij $n, m \in \mathbb{N}^+$ oneven en $x \in N$ willekeurig gegeven. Kies daarnaast een willekeurige maatsoort $f \in \mathcal{M}$ (*stelling 6.2.1* stelt dat de keus er niet toe doet). Het direct manipuleren van *definitie 6.2.3* geeft ons

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_m \circ \mathcal{A}_n(x) &\overset{\text{def}}{=} f^{-1}\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(m)\rfloor}}{m} \cdot f\left(f^{-1}\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(n)\rfloor}}{n} \cdot f(x)\right)\right)\right), \\
&= f^{-1}\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(m)\rfloor}}{m} \cdot \frac{2^{\lfloor \log_2(n)\rfloor}}{n} \cdot f(x)\right), \\
&\overset{\star}{=} f^{-1}\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(n)\rfloor}}{n} \cdot \frac{2^{\lfloor \log_2(m)\rfloor}}{m} \cdot f(x)\right), \\
&= f^{-1}\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(n)\rfloor}}{n} \cdot f\left(f^{-1}\left(\frac{2^{\lfloor \log_2(m)\rfloor}}{m} \cdot f(x)\right)\right)\right) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A}_n \circ \mathcal{A}_m(x).
\end{aligned}$$

Bij ($\star$) gebruikten we de commutativiteit van de gewone vermenigvuldiging.

Q.E.D.

Opmerking. Dit lemma is belangrijk, omdat de operatie '$\cdot$' (vermenigvuldigen) zelf ook commutatief is, en we willen dat de gelijkheid in *stelling 6.3.6* geldt onafhankelijk van de keus van de factorisatie.

Stelling 6.3.6. *Zij $n \in \mathbb{N}^+$ oneven. Stel dat n te factoriseren is als $n = m_1 \cdot m_2$, waar $m_1 \neq 1$ en $m_2 \neq 1$. Er geldt dan dat er een moduul-automorfisme $\psi : N_{(2)} \to N_{(2)}$ bestaat met de eigenschap dat voor alle $x \in \mathbb{N}_{(2)}$ geldt dat*

$$\mathcal{A}_{m_1} \circ \mathcal{A}_{m_2}(x) = \mathcal{A}_n\left(\psi(x)\right).$$

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{N}^+$ gegeven met factorisartie $n = m_1 \cdot m_2$, waar $m_1 \neq 1$ en $m_2 \neq 1$. We merken allereerst op dat er machten van twee α, β, γ bestaan met de eigenschap dat de antimetrische omzettingfactoren van de n-ool, m_1-ool en m_2-ool gegeven zijn door $\frac{\alpha}{n}$, $\frac{\beta}{m_1}$ en $\frac{\gamma}{m_2}$ respectievelijk. Neem nu een $x \in N_{(2)}$ willekeurig en merk met *definitie 6.2.3* en de manipulatie in het bewijs van *lemma 6.3.5* op dat voor willekeurige $f \in \mathcal{M}$ geldt dat

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{m_1} \circ \mathcal{A}_{m_2}(x) &= f^{-1}\left(\frac{\beta}{m_1} \cdot \frac{\gamma}{m_2} \cdot f(x)\right), \\
&\overset{*}{=} f^{-1}\left(\frac{\beta \cdot \gamma}{n} \cdot f(x)\right), \\
&= f^{-1}\left(\frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{n} \cdot f(x)\right), \\
&\overset{\star}{=} f^{-1}\left(\frac{\alpha}{n} \cdot f\left(\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha} \cdot x\right)\right) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A}_n\left(\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha} \cdot x\right).
\end{aligned}$$

We hebben hier bij ($*$) het feit gebruikt dat $n = m_1 \cdot m_2$ en bij ($\star$) dat f lineair is (*stelling 5.1.1*) en het feit dat $\xi := \frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha} \in \mathbb{Z}_2$. Het is constructief op te merken dat ook ξ een macht van twee is. Definieer nu $\psi : N_{(2)} \to N_{(2)}$ als volgt

$$\psi(x) = \xi \cdot x.$$

Aangezien $\xi \in \mathbb{Z}_2$, en dus tot de moduulscalairen behoort, volgt dat ψ in ieder geval een endomorfisme is. De bijectiviteit van ψ volgt uit het feit dat ξ een macht van twee is, en dus de volgende twee observaties gelden

1. ξ verhoogt alleen het nootnummer van een noot uit $N_{(2)}$.
2. $\xi^{-1} \in \mathbb{Z}_2$.

De surjectiviteit wordt vastgelegd door observatie 1, aangezien voor een willekeurig element $y \in N_b$ geldt dat $\xi \cdot y \in N_b$. *Stelling 4.2.4* zegt ten slotte dat dit een voortbrenger van $N_{(2)}$ is, wat impliceert dat we samen met het feit dat ψ een endomorfisme is alle noten uit $N_{(2)}$ kunnen bereiken. De injectiviteit volgt uit observatie 2, aangezien we hiermee kunnen stellen dat $\psi^{-1} : N_{(2)} \to N_{(2)}$ gegeven is door

$$\psi^{-1}(x) = \tfrac{1}{\xi} \cdot x.$$

Al met al zien we dat ψ inderdaad een automorfisme is met de eigenschap dat $\mathcal{A}_{m_1} \circ \mathcal{A}_{m_2}(x) = \mathcal{A}_n\left(\psi(x)\right)$.

Q.E.D.

Stelling 6.3.6 vertelt ons nu waar we achteraan zaten. Net als zeer specifiek in *voorbeelden 6.3.2* en *6.3.3* te zien kunnen we een zuivere n-ool, waar n een niet triviale priemfactorisatie heeft ook produceren door zuivere p_i-olen, waar p_i een priemfactor van n is, te nesten. Muzikaal bekent dit dat we nog meer antimetrische figuren als “nutteloos” kunnen bestempelen als we antimetrische nesting toestaan: alle n-olen, waar n **niet** priem is, zijn notationele ballast in het muzieksysteem. Concreet heeft *stelling 6.3.6* de volgende gevolgen.

Gevolg (door *definitie 6.2.2*)**.** *Zij $n, m \in \mathbb{N}^+$ oneven en ongelijk aan één. Er geldt*

$$\mathcal{A}_n \circ \mathcal{A}_m\left(N_{(2)}\right) = N_{(n \cdot m)}.$$

Gevolg (door inductie)**.** *Zij $n \in \mathbb{N}^+$ oneven met priemfactorisatie*

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i,$$

dan volgt dat er een automorfisme $\psi : N_{(2)} \to N_{(2)}$ bestaat met de eigenschap dat voor alle $x \in N_{(2)}$

$$\mathcal{A}_{p_1} \circ \cdots \circ \mathcal{A}_{p_k}(x) = \mathcal{A}_n(\psi(x)).$$

Gevolg (door *lemma 6.3.5*)**.** *Zij de situatiebeschrijving hetzelfde als in het vorige gevolg hierboven. Zij $\pi : \{1, 2, ..., k\} \to \{1, 2, ..., k\}$ tevens een permutatie. Er volgt voor alle $x \in N_{(2)}$ dat*

$$\mathcal{A}_{p_1} \circ \cdots \circ \mathcal{A}_{p_k}(x) = \mathcal{A}_{p_{\pi(1)}} \circ \cdots \circ \mathcal{A}_{p_{\pi(k)}}(x).$$

Gevolg (door *stelling 6.3.3*)**.** *Zij de situatiebeschrijving weer als hierboven. Er geldt*

$$\mathcal{A}_{p_1} \circ \cdots \circ \mathcal{A}_{p_k}\left(N_{(2)}\right) \cong \mathbb{Z}_2\left\langle \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \right\rangle. \tag{6.3}$$

- ▶ **Samenvatting:** *Als we antimetrische nesting toestaan, kunnen we alle zuivere n-olen, waar n niet priem is, construeren door een aantal zuivere p-olen, waar p wél priem is, te nesten. Alle n-olen, waar n niet priem is, zijn in zekere zin ook notationele ballast.*

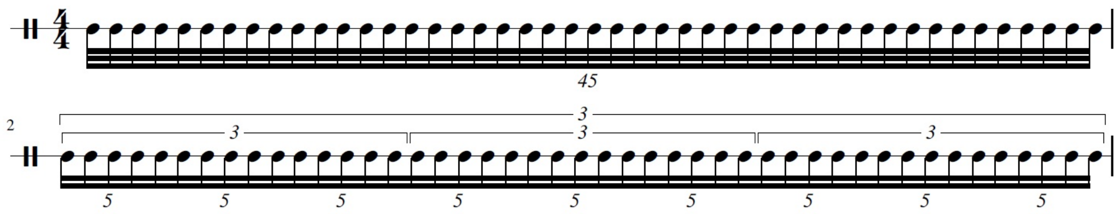
♫ Slotopmerkingen bij deze paragraaf

We zijn nu bijna klaar met de algemene beschouwing van antimetrische figuren, we hebben immers gezien welke antimetrische figuren écht belangrijk zijn in de muziek: de p-olen waar p een priemgetal is. Het laatste gevolg doet ons echter nog één maal de nieuwsgierigheid opborrelen over een interessante theoretische eigenschap van antimetrische figuren. Merk hiertoe op:

- ▶ **Terugblik:** *Een p-ool waar p priem is, voegt het getal $1/p$ één keer toe aan $\mathbb{Z}_2$.*
- ▶ **Observatie:** *$\mathbb{Z}_2$ kunnen we zien als $\mathbb{Z}$, waar we oneindig vaak $1/2$ aan toegevoegd hebben.*

Stel dat het op een of andere manier mogelijk is om oneindig vaak een antimetrische nesting uit te voeren, dan kunnen we (bij antimetrische nesting met een zuivere p-ool) oneindig vaak $1/p$ aan $\mathbb{Z}_2$ toevoegen, waardoor we in principe een nieuwe localisatie van $\mathbb{Z}$ kunnen krijgen: $\mathbb{Z}_{2p}$. Dit wordt onze interesse in de volgende en laatste theoretische paragraaf.

Hoewel we nu hebben gezien dat alle zuivere n-olen (n oneven en niet priem) op een bepaalde manier notationele ballast vormen, moeten we wel opmerken dat we deze n-olen beter niet uit het muzikale systeem kunnen gooien, zoals we wel beargumenteerd hebben voor even n-olen, waar n deelbaar is daar 2. De reden hiervoor wordt het best geïllustreerd door *figuur 6.14*. Hierin staat boven een "gewone" zuivere 45-ool en onder een 45-ool als geneste combinatie van triolen en kwintolen. boven is al moeilijk te bevatten, laat staan onder!

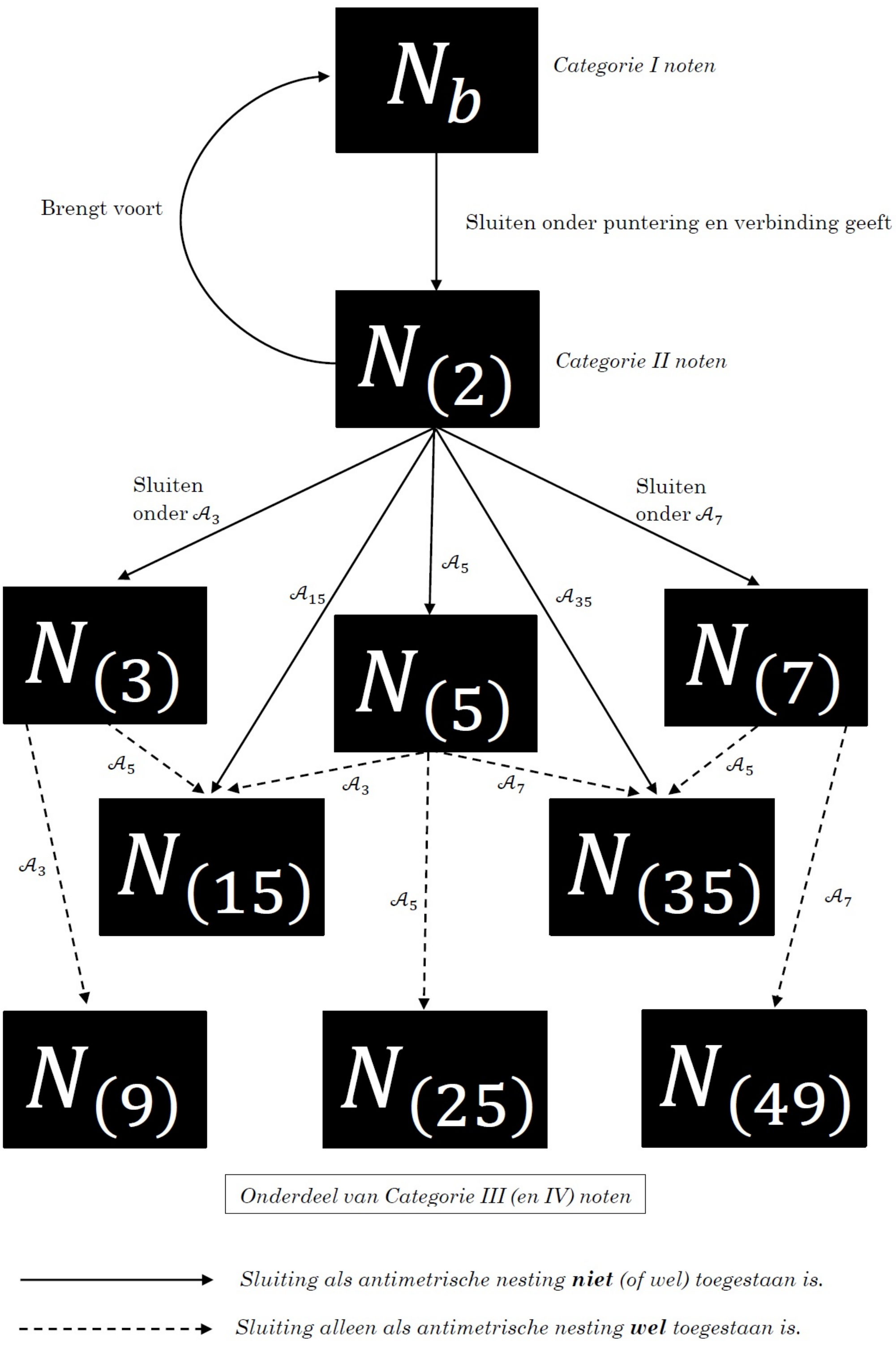


Figuur 6.14: *Een illustratie van stelling 6.3.6. Boven staat een zuivere 45-ool genoteerd als "gewone" 45-ool en onder als een antimetrische nesting van triolen en kwintolen. Dit kan, aangezien* $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, *en aangezien* $\mathcal{A}_5 \circ \mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_3 \left(N_{(2)}\right) = N_{(45)}$. *Hoewel we natuurlijk liever beide figuren niet in het wild tegenkomen, zien we naar mijn mening liever de bovenste dan de onderste, dus is het misschien niet zo'n goed idee om n-olen (n oneven niet priem) helemaal uit het muzikale systeem te verbannen. Stelling 6.3.6 zegt wel dat dit zou kunnen.*

Ten slotte merken we op dat we weer iets meer weten over de structuur van antimetrische figuren. We hebben in feite met de stellingen uit deze paragraaf *figuur 6.6* weer een beetje uitgebreid. We hebben de volgende dingen over de structuur van antimetrische figuren geleerd:

1. Vanuit $N_{(2)}$ kunnen zonder antimetrische nesting alle "nuttige" verzamelingen $N_{(n)}$, met n oneven, voortgebracht worden door sluiting onder $\mathcal{A}_n$.
2. Wanneer antimetrische nesting wordt toegestaan kunnen we $N_{(p \cdot q)}$ voortbrengen vanuit $N_{(p)}$ door sluiting onder $\mathcal{A}_q$.
3. Alle $N_{(n)}$ met n oneven zijn categorie III of IV noten.
4. Alle $N_{(n)}$ met n oneven kunnen $N_{(2)}$ voortbrengen.
5. $N_{(p \cdot q)}$ kan $N_{(p)}$ en $N_{(q)}$ voortbrengen.

Visueel zijn deze bevindingen weergegeven in *figuur 6.15*. Het is voor de lezer goed om deze figuur weer te vergelijken met de gevonden structuur in *figuur 6.6* en *4.6*.



Figuur 6.15: *De nootstructuur van (zuivere) antimetrische figuren, zoals deze in deze paragraaf ontdekt is. Caveat: niet alle mogelijke pijlen en blokjes zijn weergegeven omwille van de leesbaarheid van de figuur.*

6.4 Oneindige nesting en limietverzamelingen

♫ Definitie: Het n-voudig antimetrisch nesten van een zuivere p-ool

- **Terugblik:** *$N_{(p)}$ met p priem voegt één maal $1/p$ toe aan $\mathbb{Z}_2$. $N_{(p)}$* heeft relatieve duren die te schrijven zijn als $r \cdot 1/p$ met $r \in \mathbb{Z}_2$.
- **Waarschuwing:** *Nog steeds behandelen we louter zuivere antimetrische figuren en staan we antimetrische nesting toe.*

Iedere keer als we antimetrisch nesten met zuivere een p-ool, voegen we aan de mogelijke relatieve duren van $N_{(2)}$ - $\mathbb{Z}_2$ - $1/p$ toe. Formeel staat dit beschreven in vergelijking (6.3). Hoe vaker we dus antimetrisch nesten, hoe meer machten van $1/p$ we toevoegen.

- **Observatie:** *$\mathbb{Z}_{2p}$ bevat getallen met alle mogelijke machten van 2 en p in de noemer.*

De verzameling van mogelijke relatieve duren na het n-voudig antimetrisch nesten met een zuivere p-ool[22] komt zo steeds dichter bij $\mathbb{Z}_{2p}$. Deze verzameling heeft immers naast alle machten van 2 ook alle machten van p in de noemers van de relatieve duren staan. Iedere keer als men dus één maal zuiver antimetrisch nest met een p-ool, voegt men één extra macht van $1/p$ toe aan $\mathbb{Z}_2$, en dus komt men dichter bij $\mathbb{Z}_{2p}$.

In deze paragraaf gaan we dit idee hard maken. We gaan aantonen dat oneindig vaak (zuiver) antimetrisch nesten van $N_{(2)}$ met een p-ool en localisatie van $\mathbb{Z}$ te $2p$ oplevert. We definiëren hiertoe eerst wat een n-voudige antimetrische nesting is van een zuivere p-ool.

Definitie 6.4.1 (Een n-voudige antimetrische nesting van een zuivere p-ool)**.** Zij $x \in N_{(2)}$. De n-voudige antimetrische nesting van de zuivere p-ool, waar p priem is, met noten x is gedefinieerd door

$$\underbrace{\mathcal{A}_p \circ \cdots \circ \mathcal{A}_p}_{n \text{ keer}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_p^n(x).$$

Op eenzelfde manier definiëren we de verzameling zuivere n-voudig geneste p-olen door

$$\underbrace{\mathcal{A}_p \circ \cdots \circ \mathcal{A}_p}_{n \text{ keer}}\left(N_{(2)}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right).$$

□

Opmerking. We krijgen door de gevolgen van *stelling 6.3.6* al de volgende relaties cadeau. Er geldt dat $\mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right) = N_{(p^n)} \cong \mathbb{Z}_2\left\langle \frac{1}{p^n}\right\rangle$.

- **Samenvatting:** *We hebben de globale ideeën van deze paragraaf weergegeven en gedefinieerd is hoe we in deze paragraaf het n keer nesten van een zuivere p-ool weergeven.*

✍ Oneindig vaak antimetrisch nesten geeft een limietverzameling

- **Observatie:** *Vaker een antimetrische nesting met een p-ool uitvoeren op $N_{(2)}$ maakt de verzameling mogelijke relatieve duren alleen maar groter.*

Om nu aan te tonen dat in de limiet $\mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right)$ een lokalisatie oplevert (onder een maatsoort) van $\mathbb{Z}$ te $2p$, gaan we in het bewijs gebruik maken van de observatie: voor ieder gegeven element $a \in \mathbb{Z}_{2p}$ bestaat er een $n^* \in \mathbb{N}$, waarvoor voor alle $n \geq n^*$ geldt dat er element in $\mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right)$ zit, waarvan de relatieve duur a is.

[22] Het n keer antimetrisch nesten van een element van $N_{(2)}$, waarbij in de nesting alleen p-olen worden gecreëerd.

Allereerst willen we aantonen dat er een limietverzameling bestaat, waarna we onder een maatsoortfunctie f gaan bepalen wat deze limietverzameling betekent voor de relatieve duur. We definiëren eerst de beoogde limietverzameling, daarna geven we een voorbeeld van het soort redenering dat we gaan doen, en ten slotte bewijzen we dat de verzamelingenlimiet optreedt. [16]

Definitie 6.4.2 (Antimetrische limietverzamelingen)**.** Zij p een priemgetal. De p-ool limietverzameling, $N_p \subset N$,[23] is gegeven door

$$N_p := \left\{ x \in N \;\middle|\; \exists_{\alpha \in \mathbb{Z}_2,\, \beta \in \mathbb{N},\, \gamma \in \mathbb{Z}} : \; x = \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \cdot p^{-\beta} \end{pmatrix} \right\}$$

□

Voorbeeld 6.4.1 (Het vinden van een zuivere geneste triool die $2^{159}/3^{100}$ tellen duurt in een vierkwartsmaat)**.** Stel we willen om één of andere reden een noot vinden die $2^{159}/3^{100}$ tellen duurt in een vierkwartsmaat. We weten, aangezien $1 < 2^{159}/3^{100} < 2$, het feit dat $(-1, 1)$ één tel duurt, en de lineariteit van f, dat de gezochte noot $x \in N$ gegeven is door

$$x = \frac{2^{159}}{3^{100}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2^{159}}{3^{100}} \end{pmatrix}.$$

We willen echter ook weten wat voor soort noot dit is. We gokken, vanwege de factor 3^{100} in de noemer van relatieve duur, dat we hier te maken hebben met een 100-voudig geneste zuivere triool (*definitie 6.4.1*). Om dit aan te tonen merken we op dat

$$\mathcal{A}_3^{100}\left(N_{(2)}\right) = N_{(3^{100})} \cong \mathbb{Z}_2 \left\langle \tfrac{1}{3^{100}} \right\rangle,$$

waar f het isomorfisme vormt. Aangezien $2^{159}/3^{100} \in \mathbb{Z}_2 \left\langle \frac{1}{3^{100}} \right\rangle$, volgt dat de gevonden noot inderdaad een 100-voudig geneste zuivere triool is.

□

Stelling 6.4.1. *Zij p een priemgetal ongelijk aan 2. Er geldt in de discrete topologie dat*[24]

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right) = N_p.$$

Bewijs. We moeten volgens de definitie van de verzamelingenlimiet aantonen dat [16]

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right) = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right) = N_p, \tag{6.4}$$

waarbij deze limieten gedefinieerd zijn door [16]

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right) := \left\{ x \in N \;\mid\; \exists_{\text{deelrij } \mathcal{A}_p^{n_k}\left(N_{(2)}\right)} \forall_{k \in \mathbb{N}^+} : x \in \mathcal{A}_p^{n_k}\left(N_{(2)}\right) \right\}, \tag{6.5}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right) := \left\{ x \in N \;\mid\; \exists_{n_0(x) \in \mathbb{N}^+} \forall_{n \geq n_0} : x \in \mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right) \right\}. \tag{6.6}$$

We merken op dat de verzameling, gegeven door (6.6), ook wordt gekarakteriseerd door de $x \in N$, waarvoor geldt dat $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right)}(x) = 1$.[25] Als verder voor alle $x \in N$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right)}(x)$ bestaat, dan weten we dat (6.5) gelijk is aan (6.6).[26]

[23] Merk de afwezigheid van de haken op; er is een verschil tussen $N_{(p)}$ en N_p

[24] Wij gebruiken de maattheoretische definitie om tot dit resultaat te bereiken. Aangezien we te te maken hebben met een strikt stijgende rij verzamelingen in (6.7), konden we dit resultaat ook via de algebra bewijzen via het concept "direct limiet". [7]

[25] $\mathbf{1}_{\mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right)}$ is hier de indicatorfunctie voor de gebeurtenis $x \in \mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right)$.

[26] Het kan dan niet voorkomen dat er $x \in N$ is, waarbij er oneindig veel $n \in \mathbb{N}$ te vinden zijn, waarvoor geldt dat $x \in \mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right)$, alsmede oneindig veel $n \in \mathbb{N}$ te vinden zijn, waarvoor geldt dat $x \notin \mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right)$.

Om de verzamelingenlimiet nu aan te tonen, splitsen we naar aanleiding van voorafgaande analyse het werk op in twee stappen:

I. We tonen aan dat voor alle $x \in N_p$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right)}(x) = 1$.

II. We tonen aan dat voor alle $x \notin N_p$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right)}(x) = 0$.

(I)
We gaan deze limiet formeel aantonen door te laten zien dat

$$\forall_{x\in N_p} \exists_{n^*\in\mathbb{N}} \forall_{n\geq n^*} : x \in \mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right).$$

Dit is namelijk equivalent aan het aan de statement dat de $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right)}(x) = 1$ voor alle $x \in N_p$.

Zij p ongelijk 2 willekeurig gegeven, en zij verder $x \in N_p$ willekeurig gegeven. Schrijf x allereerst op als

$$x = \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \cdot p^{-\beta} \end{pmatrix}.$$

Kies vervolgens $n^* = \beta$. Voor alle $n \geq \beta$ volgt er nu door *stelling 6.3.4*, aangezien $2 \nmid p^n$, de inclusie

$$\mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right) \overset{\star}{=} N_{(p^n)} \supset N_{(p^{n-1})} \supset \cdots \supset N_{(p^\beta)} \overset{\star}{=} \mathcal{A}_p^\beta\left(N_{(2)}\right). \tag{6.7}$$

Hier hebben we bij $(\star)$ een van de gevolgen van *stelling 6.3.6* toegepast. We zien dus dat het volstaat aan te tonen dat $x \in N_{(p^\beta)}$. We gaan vervolgens, aangezien $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, α herschrijven als

$$\alpha = 2^{\lceil \log_2(p^\beta)\rceil} \cdot \frac{\alpha}{2^{\lceil \log_2(p^\beta)\rceil}},$$

waardoor volgt dat er een $\zeta \in \mathbb{Z}$ bestaat met de eigenschap

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \cdot p^{-\beta} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2^{\lceil \log_2(p^\beta)\rceil}} \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ \frac{2^{\lceil \log_2(p^\beta)\rceil}}{p^\beta} \end{pmatrix}.$$

Merk nu op dat geldt

$$\frac{\alpha}{2^{\lceil \log_2(p^\beta)\rceil}} \in \mathbb{Z}_2 \implies \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \cdot p^{-\beta} \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} \zeta \\ \frac{2^{\lceil \log_2(p^\beta)\rceil}}{p^\beta} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}_2} \overset{*}{=} N_{(p^\beta)},$$

waar we bij $(*)$ gebruik hebben gemaakt van *lemma 6.3.2*. Al met al bewijst dit de gewenste limiet.

(II)
Om dit aan te tonen, bewijzen we de sterkere bewering dat

$$x \notin N_p \implies \forall_{n\in\mathbb{N}} : x \notin N_{(p^n)} = \mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right).$$

Zij nu $x = (m, r) \in N \backslash N_p$ willekeurig gegeven en stel dat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ bestaat, waarvoor geldt dat $x \in N_{(p^{n_0})}$. Het bewijs van *stelling 6.3.3* zegt ons vervolgens dat we voor de maatsoort $f_1 \in \mathcal{M}$ moeten vinden dat $f_1(x) \in \mathbb{Z}_2\left\langle \frac{1}{p^{n_0}} \right\rangle$. We vinden dus dat er een $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ bestaat waarvoor geldt dat

$$f_1(m, r) = r \cdot 2^m = \alpha \cdot \tfrac{1}{p^{n_0}}.$$

Met deze observatie, en de opmerking dat $\tilde{\alpha} = \alpha \cdot 2^{-m} \in \mathbb{Z}_2$, volgt echter dat

$$r = \tilde{\alpha} \cdot \tfrac{1}{p^{n_0}}.$$

Hieruit concluderen we dat we $x = (m, r) \in N \backslash N_p$ kunnen schrijven als

$$x = \begin{pmatrix} m \\ \tilde{\alpha} \cdot p^{-n_0} \end{pmatrix}.$$

Dit betekent ten slotte dat $x \in N_p$. $\lightning$

Hiermee is de het tweede onderdeel ook bewezen en concluderen we dat de gewenste verzamelingenlimiet geldt.

Q.E.D.

Opmerking. Merk met deze stelling op dat we hier een stap hebben gemaakt, die muzikaal niet meteen toepassingen ziet, maar wel uit de wiskunde volgt. We hebben dus met wiskunde een stap kunnen maken die louter binnen muziektheorie niet voor te stellen is.

- **Samenvatting:** *We hebben de antimetrische limietverzamelingen gedefinieerd. Dit zijn de verzamelingen n voudige nestingen zuivere p-olen ($\mathcal{A}_p^n\left(N_{(2)}\right)$) naartoe convergeren. We hebben daarna deze convergentie aangetoond.*

✍ De relatieve duren van N_p zijn isomorf met $\mathbb{Z}_{2p}$

Nu we de gewenste verzamelingenlimiet aangetoond hebben, willen we gaan aantonen dat onder een maatsoortfunctionaal $f \in \mathcal{M}$ inderdaad geldt dat we voor de relatieve duren te maken hebben met $\mathbb{Z}_{2p}$. Concreet willen we aantonen dat $N_p \cong \mathbb{Z}_{2p}$. Hiertoe tonen we eerst aan dat N_p gesloten is, waarna we de hoofdclaim bewijzen.

Lemma 6.4.2. *Er geldt dat N_p gesloten is als moduul voor alle priemgetallen p ongelijk aan 2.*

Bewijs. Zij p priem vrij gegeven. Stel $x \in N_p$, we moeten allereerst laten zien dat voor willekeurige $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ er geldt dat $\alpha \cdot x \in N_p$. Merk allereerst uit het bewijs van *stelling 6.4.1* op dat er voor x een $n \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor geldt dat $x \in N_{(p^n)}$. We weten dat $N_{(p^n)}$ gesloten, dus volgt $\alpha \cdot x \in N_{(p^n)}$, wat impliceert dat $\alpha \cdot x \in N_p$.

Ten slotte moeten we ook nog aantonen dat voor $x, y \in N_p$ ook geldt dat $x + y \in N_p$. We kunnen hier een analoge redenering ophangen als voor het scalair product, gebruikmakend van de eigenschap in (6.7). Voor x en y geldt dat er een n_x en een n_y respectievelijk, waarvoor geldt dat $x \in N_{(p_x^n)}$ en $y \in N_{\left(p_y^n\right)}$. Zij $n := \max\{n_x, n_y\}$ en er geldt dat $x, y \in N_{(p^n)}$. Van deze verzameling weten we dat hij gesloten is, waardoor geldt dat $x + y \in N_{(p^n)}$. Hieruit volgt ook dat $x + y \in N_p$. Ergo N_p is gesloten.

Q.E.D.

Stelling 6.4.3. *Er geldt voor alle p priem, ongelijk aan 2, dat $N_p \cong \mathbb{Z}_{2p}$, waar we $\mathbb{Z}_{2p}$ opvatten als moduul over $\mathbb{Z}_2$.*

Bewijs. Net als in de vele andere bewijzen die isomorfismen moesten aantonen, merken we allereerst op dat we door de geslotenheid van N_p (*lemma 6.4.2*) op dat we dankzij *lemma 5.2.1* iedere maatsoort $f \in \mathcal{M}$ kunnen gebruiken als injectief homomorfisme tussen N_p en $\mathbb{Z}_{2p}$, neem dus zo'n $f \in \mathcal{M}$ willekeurig. We moeten nog twee onderdelen formeel aantonen:[27]

[27] Eén hiervan had eigenlijk al aangetoond moeten zijn op dit punt

I. Het beeld van f onder N_p is inderdaad $\mathbb{Z}_{2p}$.

II. f is surjectief

We tonen eerst (I) aan, dan (II).

(I)
Neem $x \in N_p$ willekeurig. We herinneren ons weer dat er een $n \in \mathbb{N}$ is, waarvoor geldt dat $x \in N_{(p^n)}$. Herinner dan uit *stelling 6.3.3* dat dit impliceert dat $f(x) \in \mathbb{Z}_2 \left\langle \frac{1}{p^n} \right\rangle$. Merk nu op dat geldt $\mathbb{Z}_2 \left\langle \frac{1}{p^n} \right\rangle \subset \mathbb{Z}_{2p}$, wat impliceert $f(x) \in \mathbb{Z}_{2p}$, dus het beeld van f onder N_p is inderdaad $\mathbb{Z}_{2p}$.

(II)
Dit bewijs zal vrij analoog verlopen aan het bewijs van onderdeel (I). Voor de surjectiviteit nemen we een getal $\alpha \in \mathbb{Z}_{2p}$ willekeurig, en merken op, aangezien we $\mathbb{Z}_{2p}$ als moduul over $\mathbb{Z}_2$ opvatten, dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat, waarvoor geldt dat $\alpha \in \mathbb{Z}_2 \left\langle \frac{1}{p^n} \right\rangle$. Uit *stelling 6.3.3* weten we dat er en $x \in N_{(p^n)}$ is, waarvoor geldt dat $f(x) = \alpha$. Uit het bewijs van *stelling 6.4.1* weten we dat nu ook geldt $x \in N_p$, waardoor de surjectiviteit vastgelegd is. Hiermee is ook bewezen dat $N_p \cong \mathbb{Z}_{2p}$.

Q.E.D.

Met *stelling 6.4.3* hebben we antwoord gegeven op de door ons beoogde vraag: als we oneindig vaak een zuiver antimetrisch figuur blijven nesten, kunnen we voor de relatieve duren van de ontstane noten een uitgebreidere lokalisatie creëren.

Als iemand een oneindige nesting van zuivere p-olen maakt, heeft men voor de relatieve duren van deze noten een grotere lokalisatie gecreëerd; niet een lokalisatie van $\mathbb{Z}$ te twee, maar een lokalisatie van $\mathbb{Z}$ te $2p$. In het oneindige is antimetrische figuren nesten dus een methode om de lokalisatie $\mathbb{Z}_2$ uit te breiden naar een grotere lokalisatie.

Hiermee is de exploratie van antimetrische figuren tot een einde gekomen. We eindigen met een conclusie, waarin we de theoretische hoogtepunten weergeven die we over (theoretische) antimetrische figuren geleerd hebben.

Conclusie. *We hebben in dit hoofdstuk op een zeer theoretische manier gekeken naar antimetrische figuren. Allereerst alleen naar duolen en triolen. Hier hebben we gezien dat "normale" (zuivere) triolen echt iets nieuws toevoegen aan de muzikale mogelijkheden (zij voegden het priemgetal 3 toe), terwijl duolen een beetje tegenvielen: deze figuren waren ook te vangen als punteringen. Op basis van deze bevindingen zijn we gaan onderzoeken welke algemene antimetrische figuren muzikaal iets nieuws toevoegen, en welke dit niet deden. We hebben hierin gezien dat n-olen, waarbij n even is eigenlijk alleen extra notatie zijn, zonder dat het iets toevoegt. We hebben voor deze antimetrische figuren zelfs beargumenteerd dat het zelfs handig kan zijn om hen uit het muzikale systeem te gooien.*

Vervolgens hebben we van alle andere n-olen aangetoond dat ze wel iets nieuws toevoegen (namelijk hun priemfactoren). Toen, echter, zijn we naar antimetrische nesting gaan kijken. Wanneer men deze operatie toestaat in het muzikale systeem, hebben we laten zien dat dan slechts de p-olen met p oneven priem de antimetrische figuren zijn die muzikaal écht iets toevoegen. Hoewel dit resultaat natuurlijk theoretisch waardevol is, hebben we ook beargumenteerd dat in dit geval alle n-olen, waar n geen priem is, weggooien de leesbaarheid van de muziek niet ten goede zal komen. Ten slotte zijn we gaan kijken naar wat er gebeurt als we het idee van antimetrische nesting naar zijn logische climax brengen: wat als we een oneindig geneste p-ool konden maken? We hebben gezien dat dit ervoor zorgt dat qua relatieve duur we in een hele nieuwe wereld terecht komen: een lokalisatie van $\mathbb{Z}$ *te* $2p$ *en niet slechts te 2.*

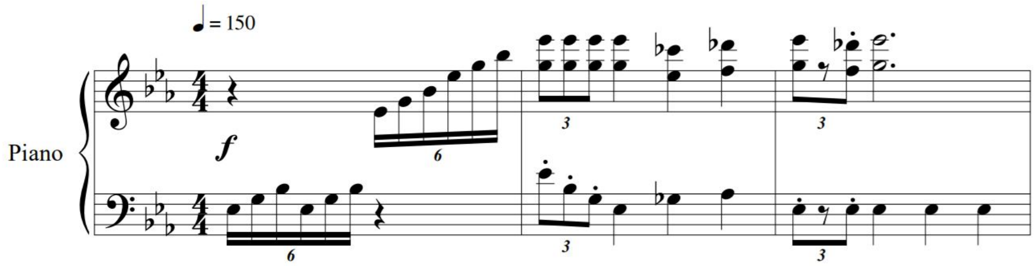
6.5 Toepassingen

We hebben weer voldoende theorie gedaan. In deze paragraaf geven we weer een aantal toepassingen van wat we hebben gezien, sommige van deze toepassingen zijn al licht aangehaald in de hoofdtekst in de voorafgaande paragrafen. We geven een toepassing met betrekking tot muzieknotatie, en twee toepassingen met betrekking tot het verbeteren van compositieprogramma's.

♫ Het versimpelen van muzieknotatie

- ▶ **Terugblik:** *Sommige antimetrische figuren zijn nutteloos in de zin dat ze te schrijven zijn als andere (vaak makkelijkere) antimetrische figuren of als categorie II noten.*

Kijk naar onderstaand intro van het *Victory Theme* uit het spel *Final Fantasy I*, uitgebracht door het spelbedrijf *Square*, gecomponeerd door *Nobuo Uematsu.*[28] [1]



Figuur 6.16: *De intro van het "Victory" thema uit het spel Final Fantasy I.*

Stel je nu voor dat je een pianostudent bent die dit nummer voor het eerst moet spelen. Waarschijnlijk heb je op dit punt wel al over triolen geleerd, maar niet over sextolen. Juist omdat je nog niet over sextolen hebt geleerd, leg je misschien het oefenen van dit stuk neer totdat je wel over sextolen hebt geleerd. Je kunt nu dus een stuk niet oefenen, terwijl je dat wel graag zou willen.

Het oneerlijke voor de pianostudent: er is helemaal geen reden om dit stuk niet te oefenen! De student is bekend met triolen, dus kan hij sextolen ook spelen, aangezien sextolen geschreven kunnen worden als triolen (*stelling 6.2.3*). Deze sextolen herschrijven als triolen zou in dit geval zelfs beter passen bij de andere triolen in dit muziekvoorbeeld.

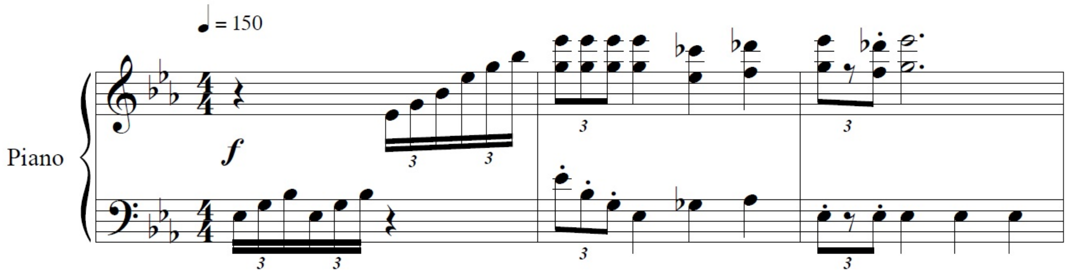
We kunnen dus met de theorie die we onderzocht hebben muzieknotatie versimpelen, zodat musici minder verschillende schrijfwijzen uit hun hoofd hoeven te leren. De manier waarop de muzieknotatie versimpeld kan worden is door de soorten antimetrische figuren weg te gooien die we in dit hoofdstuk als "nutteloos" hebben bestempeld.[29] We kunnen *figuur 6.16* herschrijven tot:

✍ Het afspelen van antimetrische nestingen

- ▶ **Terugblik:** *Antimetrische nesting is het schrijven van antimetrische figuren in andere antimetrische figuren.*
- ▶ **Terugblik:** *We kunnen antimetrische nestingen formaliseren als het herhaaldelijk uitvoeren van de operatie $\mathcal{A}_n$.*

[28] Arrangement gratis beschikbaar gesteld door `http://www.ninsheetmusic.org`. Arrangement gemaakt door Yug Guy (lid van de site).

[29] Zoals de 6-ool omdat 6 deelbaar is door 2.



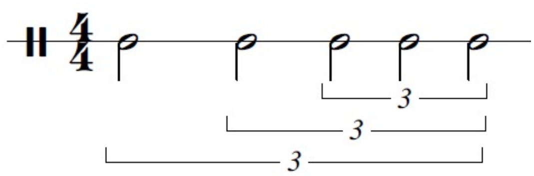
Figuur 6.17: *Het herschreven intro van het "Victory" thema uit het spel Final Fantasy I.*

▶ **Waarschuwing:** *Voor deze toepassing is eigenlijk ook theorie uit paragraaf 7.1 nodig.*

We zijn op dit punt bekend met antimetrische nesting. Antimetrische nesting is een gevolg van de muziektheorie over antimetrische figuren, maar is niet iets wat in de praktijk vaak gebruikt wordt. Compositieprogramma's, zoals MuseScore, kunnen vaak antimetrische nestingen wel opschrijven, maar niet afspelen. Dit komt, omdat het programma nooit ingevoerd heeft gekregen wat de relatieve duur van dit soort dingen is.

Als we MuseScore zuiden upgraden met de rekenstrucuur van ritmische noten, dan zou MuseScore deze noten wel kunnen afspelen, juist omdat antimetrische nesting een gevolg is van de theorie over antimetrische figuren. Stel bijvoorbeeld dat MuseScore passage in *figuur 6.18* zou willen afspelen, dan herkent hij:

1. Een vierkwartsmaat, geformaliseerd door $f_4 \in \mathcal{M}$.
2. Halve noten, geformaliseerd door $(0, 1) \in N_{(2)}$.
3. Een normale triool, geformaliseerd door $\mathcal{A}_3$.
4. Een enkel geneste triool, geformaliseerd door $\mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_3$.
5. Een dubbel geneste triool, geformaliseerd door $\mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_3$.



Figuur 6.18: *Een dubbel geneste halventriool.*

Als MuseScore nu de relatieve duur wil weten van de eerste halve noot, herkent hij dat deze in slechts één triool staat geschreven. Daarom weet hij dat de halve noot onderdeel is van een normale triool, en berekent dus $f_4\left(\mathcal{A}_3(0, 1)\right) = 4/3$ tel.

Als MuseScore de relatieve duur wil weten van de tweede halve noot, herkent hij dat deze in twee triolen geschreven staat, en dus onderdeel is van een enkel geneste triool. Daarom berekent hij voor de relatieve duur $f_4\left(\mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_3(0, 1)\right) = 8/9$ tel.

Als Musescore ten slotte de relatieve duur wil weten van de laatste drie halve noten, herkent hij dat deze in drie triolen geschreven staan. Daarom weet hij dat de halve noten onderdeel vormen van een dubbel geneste halventriool, en berekent dus dat de relatieve duur van iedere individuele halve noot gelijk is aan $f_4\left(\mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_3(0, 1)\right) = 16/27$ tel.

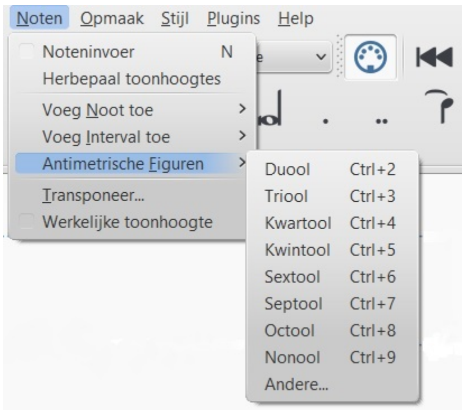
Met onze theorie kan MuseScore dus zelf de relatieve duur van geneste antimetrische figuren bepalen, mocht een componist zo wild zijn deze te gebruiken. Musescore kan vervolgens (met de theorie uit *paragraaf 7.1*) de relatieve duur van de noten omrekenen naar de absolute duur en het notenvoorbeeld dan afspelen.

We kunnen dus met onze rekenstructuur compositieprogramma's nog verder verbeten, waardoor ze fragmenten kunnen afspelen die voorheen onmogelijk waren, waardoor componisten hun creativiteit nog verder kunnen doorvoeren.

✍ Minder verantwoordelijkheid bij componisten

- **Terugblik:** *We hebben de antimetrische omzettingsfactor bepaald voor algemene n-olen in een 4/4-maat.*

We gaan compositieprogramma's[30] nog op één manier ietsje verbeteren. Componisten krijgen (natuurlijk) de optie om antimetrische figuren in compositieprogramma's in te voeren, maar niet alle compositieprogramma's bieden alle antimetrische figuren aan. Neem als voorbeeld weer MuseScore. Als je een (standaard) antimetrische figuur wilt invullen, heb je de volgende opties:



Figuur 6.19: *De standaard opties voor antimetrische figuren die MuseScore aanbiedt.*

Als je nu een n-ool wilt creëren, waarbij n groter dan 9 is, kun je nog op de knop "andere" klikken. Je krijgt dan het volgende menu:

In dit menu wordt aan de gebruiker gevraagd de verhouding van het antimetrisch figuur in te voeren.[31] Hierin zit echter een probleem: ik kan iedere breuk invoeren die ik wil, zelfs als de muziektheorie de breuk in kwestie niet toe zou staan!

Wij kunnen dit probleem oplossen. We hebben immers de antimetrische omzettingfactoren bepaald van algemene antimetrische figuren in een vierkwartsmaat. We kunnen MuseScore dus nog een beetje verbeteren door in MuseScore te coderen dat de "verhouding" van antimetrische figuren altijd gegeven wordt door

$$\frac{n}{2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}}$$

in een vierkwartsmaat. Hierdoor halen we de verantwoordelijkheid om de factor (voor de vierkwartsmaat) theoretisch juist in te voeren weg van de componist, waardoor de componist zich kan focussen op zijn creativiteit. MuseScore regelt de theoretische details.

[30] In ieder geval MuseScore

[31] Deze verhouding is $1/x$, waar x onze antimetrische omzettingsfactor is.

Figuur 6.20: *Het menu dat open gaat als je een ander (minder standaard) antimetrisch figuur wilt invoeren.*

Hoofdstuk 7

Tempo, absolute duur, en afsluiting

Stel je voor, je bent een jurylid op een muziekconcours en jij moet een kandidaat beoordelen die het stuk uitvoert dat gegeven is in *bijlage B*. Een van de onderdelen waar je de kandidaat op moet beoordelen, is zijn technische uitvoering. Je vindt dat de kandidaat zijn stuk redelijk netjes speelt, maar denkt ook dat hij de techniek makkelijker voor zichzelf maakt door het nummer te langzaam uit te voeren.

Je wilt dus controleren of het nummer door de kandidaat op tempo wordt gespeeld, maar hoe doe je dat? Je weet dat het tempo gegeven is door ♩ = 184, wat redelijk snel is, maar je kunt zo snel geen techniek verzinnen om het tempo van de kandidaat te controleren. In je muzikaal-wiskundige toolbox zitten op dit moment de formaliseringen van noten als ritmische noten, en de omzetting van ritmische noten in hun relatieve duur door (wiskundige maatsoorten). Je wilt hierbij nog één extra techniek die de relatieve duur kan omzetten naar absolute duur.

Qua wiskunde is dit waar we ons in dit hoofdstuk mee gaan bezighouden. De wiskundige hoofdvraag van dit hoofdstuk wordt:

"Hoe kunnen we met een formule relatieve duur in absolute duur omzetten?"

Naast deze wiskundige hoofdvraag, gebruiken we dit hoofdstuk ook nog om het verslag af te sluiten. Na alle formaliseringen die we hebben gedaan, wordt het tijd om weer even terug te kijken naar *hoofdstuk 3* en de voor- en nadelen te benoemen van onze wiskundige formalisering van ritme ten opzichte van de in dat hoofdstuk behandelde formaliseringsmethoden; hebben we onze doelen bereikt?

Ten slotte zullen we nog wat extra kritiek geven op onze formalisering van ritme en ideeën geven voor vervolgonderzoek. Concreet zullen we deze onderdelen in onderstaande volgorde behandelen:

- *Paragraaf 7.1:* Het laatste stuk theorie, een formalisering van absolute duur vanuit een praktisch oogpunt.
- *Paragraaf 7.2:* Een toepassing.
- *Paragraaf 7.3:* Een beschouwing van onze wiskundige formalisering ten opzichte van de al bekende formaliseringen.
- *Paragraaf 7.4:* Discussie en ideeën voor vervolgonderzoek.

7.1 Absolute duur

♫ Van relatieve duur naar absolute duur

Allereerst gaan we proberen de absolute duur[1] te bepalen van noten in een "gebruikelijke" tempoaanduiding, zoals ♩ = 180. Herinner je hiertoe:

- **Terugblik:** *We geven een tempo aan door op te schrijven "noot n = x". Noot n komt dan x keer per minuut voor.*

Uit de terugblik zien we dat de tempoaanduiding ♩ = 180 aangeeft dat de kwartnoot 180 keer per minuut voorkomt. We zien dus dat deze "gebruikelijke" tempoaanduiding de frequentie van een noot aangeeft. De frequentie kunnen we vervolgens omrekenen naar seconden.

- **Terminologie:** *We gaan de "gebruikelijke" tempoaanduiding de* ***exacte tempoaanduiding*** *noemen.*
- **Observatie:** *De exacte tempoaanduiding geeft de frequentie van een noot aan.*

Om de frequentie naar seconden om te rekenen, hebben we eerst wat extra terminologie nodig. De exacte tempoaanduiding wordt genoteerd als "noot $n = x$". We gaan n de **temponoot** noemen en x het **tempogetal**. We willen nu dit tempogetal x van noot n omzetten naar een absolute duur.

Om dit te doen, herinneren we ons dat je de frequentie van noot n per minuut (x) kan omzetten naar het aantal minuten dat noot n duurt door $1/x$ uit te rekenen. Vervolgens kunnen we dit omrekenen naar seconden door te vermenigvuldigen met 60. De absolute duur T van noot n wordt dan gegeven door

$$T = \frac{60}{x}.$$

- **Terugblik:** *Gegeven een muzikale maatsoort t/n kunnen we de relatieve duur van een ritmische noot bepalen door maatsoortfunctionaal f_n te gebruiken.*

We kunnen nu van één specifieke (ritmische) noot de absolute duur uitrekenen, namelijk van de (formalisering van) noot n. Echter willen we de absolute duur kunnen bepalen van alle ritmische noten. Om dit te doen, kijken we naar de relatieve duur van de noten.

We hebben eerder in *hoofdstuk 2* gezien dat de relatieve duur van een noot een afspiegeling is van de absolute duur. Hiermee bedoelen we dat de absolute duur bijvoorbeeld twee keer zo lang moet zijn, als de relatieve duur van een noot twee keer zo lang is ten opzichte van een andere noot. We geven van dit idee een voorbeeld.

Voorbeeld 7.1.1 (Absolute en relatieve duur hebben een recht evenredig verband)**.** Dit voorbeeld dient er toe om de bewustwording aan te wakkeren van het feit dat absolute en relatieve duur een recht evenredig verband hebben en de rol van maatsoorten hierin toe te lichten. Stel dat een kwartnoot in een vierkwartsmaat een halve seconde duurt, en stel dat we vervolgens de absolute duur van de enkelgepunteerde achtste noot willen weten.

We merken om deze absolute duur te bepalen op dat de kwartnoot in een vierkwartsmaat één tel duurt, en dat de enkelgepunteerde achtste noot 3/4 tel duurt. We verwachten dus dat de absolute duur van een enkelgepunteerde achtste noot $\frac{3}{4}/1 = 3/4$ keer zo groot is als de absolute duur van de kwartnoot. De absolute duur van een enkelgepunteerde achtste noot is dus $1/2 \cdot 3/4 = 3/8$ seconde.

Met onze formalisering van ritme kunnen we dit ook bepalen. We formaliseren de kwartnoot als ritmische noot n en de achtste noot punt als ritmische noot m. Vervolgens kunnen we de ratio

[1]De duur van noten in seconden.

van relatieve duren bepalen door $f_4(m)/f_4(n)$ uit te rekenen. Ten slotte is de absolute duur van ritmische noot m dus gegeven door

$$T = 1 \cdot \frac{f_4(m)}{f_4(n)} = \frac{f_4(-2, 3/2)}{f_4(-1, 1)} = \frac{4 \cdot 3/2 \cdot 2^{-1-2}}{4 \cdot 1 \cdot 2^{-1-1}} = 3/8.$$

Hier komt dus inderdaad 3/8 seconde uit.

□

Uit bovenstaand voorbeeld leren we het volgende:

- **Observatie:** *We kunnen de absolute duur van een willekeurige (ritmische) noot m uitrekenen door de absolute duur van de (ritmische) temponoot n te bepalen, en deze te vermenigvuldigen met de ratio tussen de relatieve duur van noot m en n.*

Concreet bepalen we dus de absolute duur van een willekeurige noot als volgt:

1. Formaliseer de temponoot als ritmische noot n.
2. Formaliseer de noot waarvan je de absolute duur wilt weten als ritmische noot m.
3. Kies een (willekeurige) maatsoort.
4. Bepaal de volgende ratio van relatieve duren: duur van noot m, gedeeld door de duur van noot n.
5. Vermenigvuldig het antwoord met $60/x$, waar x het tempogetal is.

We kunnen ten slotte nu met bovenstaand algoritme een "absolute duur functie" opstellen die van een ritmische noot de absolute duur uitrekent, gegeven het temponummer en de (ritmische) temponoot.

Resultaat 7.1.1 (Absolute duur bij de exacte tempoaanduiding)**.** *Zij $n \in N$ de ritmische noot die correspondeert met de temponoot van een gegeven tempo. Zij α het temponummer. De absolute duur van $T_{n,\alpha}(m)$ van een ritmische noot $m \in N$ is gegeven door*

$$T_{n,\alpha}(m) = \frac{60 \cdot f_k(m)}{\alpha \cdot f_k(n)}.$$

Hier is $f_k \in \mathcal{M}$ een willekeurige maatsoort.

□

Opmerking. We mogen een willekeurige maatsoort kiezen, omdat $f_k = k \cdot f_1$. Daarnaast laten we de parameters α en n weg uit $T_{\alpha,n}$ als deze door de context duidelijk zijn.

Voorbeeld 7.1.2 (Een rekenvoorbeeld met absolute duur)**.** Stel we willen de absolute duur weten van een zestiende noot uit de partituur in *bijlage B*. We merken dan op dat de temponoot (kwartnoot) geformaliseerd wordt door $(-1, 1)$ en dat het temponummer 184 is. De zestiende noot wordt geformaliseerd door $(-3, 1)$. Voor de absolute duur van de zestiende noot geldt dan:

$$T(-3, 1) = \frac{60 \cdot f_4(-3, 1)}{184 \cdot f_4(-1, 1)} = \frac{60 \cdot 1/4}{184 \cdot 1} \approx 0.082 \text{ seconde.}$$

□

- **Samenvatting:** *We hebben een functie gemaakt, waarmee men de absolute duur van ritmische noten kan berekenen gegeven een exacte tempoaanduiding.*

♫ Het bereken van de absolute duur bij een MPM tempoaanduiding.

Vervolgens proberen we de absolute duur te bepalen van noten wanneer het tempo is aangegeven in MPM. Hiertoe herinneren we ons:

- **Terugblik:** *In een maatsoort t/n heeft één maat t tellen.*
- **Terugblik:** *Een tempoaanduiding van x MPM betekent dat er x maten in een minuut klinken. (Zie hoofdstuk 3 paragraaf 2.5)*

We zien dat x MPM betekent dat er x maten per minuut klinken. Dit betekent dat we moeken weten met welke muzikale maatsoort t/n we te maken hebben om te weten hoe lang (in tellen) een maat duurt. Als we dit weten, zien we dat één maat t tellen heeft. Er klinken dus $t \cdot x$ tellen per minuut. Hieruit kunnen we concluderen dat één tel de volgende duur T heeft in seconden:

$$T = \frac{60}{t \cdot x}$$

Ten slotte, om nu nog de absolute duur van een willekeurige ritmische noot te bepalen, hoeven we alleen nog maar te weten hoeveel tellen deze noot duurt. We weten immers hoe lang één tel in seconden duurt, dus vermenigvuldigen we met de relatieve duur van de noot om te weten hoeveel seconden de noot duurt. Formeel kunnen we de absolute duur van een noot in een MPM tempoaanduiding als volgt weergegeven.

Resultaat 7.1.2 (De absolute duur van een noot in MPM tempoaanduiding)**.** *Zij de muziekale maatsoort t/n gegeven, en zij het tempo gegeven als α MPM, dan is de absolute duur (in seconden) $T_{\alpha,t/n}(m)$ van een ritmische noot $m \in N$ gegeven door*

$$T_{\alpha,\, t/n}(m) = \frac{60 \cdot f_n(m)}{t \cdot \alpha}$$

□

Opmerking. Weer laten we de parameters α en t/n weg uit $T_{\alpha,\, t/n}$ als ze duidelijk zijn uit de context.

- **Waarschuwing:** *Hoewel de keus van de maatsoort in definitie 7.1.1 arbitrair was, is dat in definitie 7.1.2 niet.*
- **Observatie:** *Het gedrag van T in definitie 7.1.2 met betrekking tot de parameter α is het zelfde als het gedrag van T in definitie 7.1.1 met betrekking tot de parameter α.*

Voorbeeld 7.1.3 (Een rekenvoorbeeld met MPM)**.** Stel nu dat we de absolute duur willen weten van een enkelgepunteerde achtste noot in een 4/4-maat, waarin het tempo 20 MPM is, dan merken we simpelweg op dat de achtste noot als ritmische noot geformaliseerd wordt door $(-2, 3/2)$ en bepalen:

$$T(-2, 3/2) = \frac{60 \cdot f_4(-2, 3/2)}{4 \cdot 20} = \frac{60 \cdot 4 \cdot 3/2 \cdot 2^{-1-2}}{4 \cdot 20} = \frac{60 \cdot 3/4}{4 \cdot 20} = 0.5625 \text{ seconde.}$$

□

- **Samenvatting:** *We hebben geleerd hoe we de absolute duur kunnen bepalen van noten als het tempo genoteerd is in MPM.*

♫ Andere tempoaanduidingen kunnen we (nog) niet formaliseren

In *paragraaf 2.5* hebben we vier verschillende tempoaanduidingen geïntroduceerd. Twee hiervan hebben we vertaald naar de taal van de ritmische noten, en twee ervan nog niet. Als afsluiter van deze paragraaf gaan we nog kort beargumenteren waarom we de twee laatste twee manieren om tempo aan te geven (nog) niet kunnen formaliseren. Herinner je hiertoe:

- **Terugblik:** *We hebben nog de tempoaanduiding met een Italiaanse tempoterm, en de tempoaanduiding als BPM.*
- **Terugblik:** *De Italiaanse tempotermen geven geen concreet tempo, maar een suggestie voor het tempo.*
- **Terugblik:** *De "beat" in BPM was gekoppeld aan het metrum van een gegeven maatsoort.*

In de tweede terugblik is weergegeven waarom we de Italiaanse tempotermen nooit wiskundig zullen kunnen formaliseren. Ze geven geen concreet tempo zoals de exacte tempoaanduiding en het aantal MPM. Ze geven slechts een suggestie van het tempo. Als aan het begin van het stuk "allegro" staat geschreven, weet ik dat de componist een snel tempo bedoelt, maar weet ik niet hoe snel hij *precies* bedoelt. Een Italiaanse tempoterm is altijd open voor interpretatie, wat impliceert dat we er geen harde wiskundige regels aan kunnen toekennen.

De derde terugblik vertelt ons waarom het onmogelijk is het aantal BPM te formaliseren voor ons. Wij hebben in dit verslag het metrum van een muziekstuk genegeerd en ons volledig gefocust op individuele noten. De "beat" van een stuk is intrinsiek gekoppeld aan het metrum, dus zouden we dit metrum geformaliseerd moeten hebben om de beat in ons systeem accuraat te kunnen weergeven. Ik denk persoonlijk dat het mogelijk is om BPM wel te formaliseren, als metrische overwegingen in het systeem zijn meegenomen.

- **Samenvatting:** *We hebben weergegeven waarom we (op dit moment) de overige tempoaanduidingen niet kunnen formaliseren.*

7.2 Een toepassing

In de vorige paragraaf hebben we voor onze doeleinden het verhaal rond gemaakt. We hebben nog geleerd hoe we de absolute duur van individuele noten kunnen berekenen. In deze paragraaf geven we nog één toepassing die aansluit bij de introductie van dit hoofdstuk; daarmee sluiten we ons theoretisch onderzoek af.

♫ Controleren of iemand (ongeveer) in het juiste tempo speelt

Stel nu dat je weer het jurylid bent uit de introductie. Je bent nu iets bekender met het formaliseren van het tempo en je wilt bepalen of de kandidaat de partituur uit *bijlage B* in een juist tempo uitvoert. Hiertoe gebruik je de stopwatch op je mobiel en meet de tijdsduur van één maat van de kandidaat op. Deze tijdsduur blijkt $1,5$ seconde te zijn.

Je kan uit de partituur aflezen dat de kandidaat een 4/4-maat speelt, dus weet je dat de door jou opgenomen tijd 4 tellen was. Verder weet je dat het tempo de kwartnoot als temponoot gebruikt. In een vierkwartsmaat duurt deze 1 tel. Je kiest dus $f_4 \in \mathcal{M}$, noemt de noot die de hele maat opvult m, en noemt de kwartnoot n. Je weet nu in de formule van *definitie 7.1.1* al dat

- $f_4(m) = 4$,
- $f_4(n) = 1$,
- $T_{4,\alpha}(m) = 1,5$

Je substitueert ten slotte de bekende waarden in de formule in *definitie 7.1.1* om te vinden dat:

$$1,5 = \frac{60 \cdot 4}{\alpha},$$
$$\alpha = 160.$$

De kandidaat speelt dus een tempo van ♩ = 160, wat meer dan 20 lager is dan het gewenste tempo ♩ = 184. De kandidaat speelt dus dusdanig veel langzamer dat het uitvoeren van het stuk qua techniek makkelijker wordt. Jij als jurylid moet hier dus punten voor aftrekken.

Wij als wiskundigen hebben gezien dat we met onze formaliseren het tempo van uitgevoerd werk kunnen bepalen met louter informatie over de partituur en een stopwatch. We kunnen dus met onze formalisering redelijk makkelijk bepalen of men het goede tempo aanhoudt.

7.3 Terugkoppeling naar hoofdstuk 3

Met de laatste regel uit de vorige paragraaf hebben we een eind gemaakt aan het opzetten van ons wiskundige model voor de beschrijving van het facet ritme uit de muziektheorie. In deze paragraaf pakken we onze formalisering als geheel en vergelijken we het nog één keer met de bestaande formalisering uit *hoofdstuk 3, paragraaf 3.2* (De bekende formalisering, formaliseerde een ritme als een string van nullen en enen). Het doel van deze vergelijking is het becommentariëren van onze formalisering in het licht van de bestaande: we hopen te laten zien dat de formalisering uit dit verslag voor theoretische doeleinden verkozen dient te worden boven de bestaande formalisering, maar dat voor praktische doeleinden de keus moeilijker is: Onze formalisering brengt op praktisch vlak een aantal vervelende nadelen met zich mee.

✍ Een theoretische vergelijking

In *hoofdstuk 3, paragraaf 3.2* hebben we een aantal theoretische nadelen benoemd van het bestaande model. In deze sectie laten we zien dat het door ons opgestelde model minder tot geen last van deze nadelen heeft.

- ▶ **Observatie:** *We kunnen een nootvoorbeeld, bestaande uit meerdere individuele noten, in ons model formaliseren als een lijst ritmische noten. (Zie voorbeeld 7.3.1)*

We beginnen bij het **weggooien van informatie**. Het bestaande model formaliseert noten als een string 1'en en 0'en. Deze string representeert vervolgens het onderliggende notenschrift. Het probleem van deze formalisering: het gooit veel informatie weg. Enerzijds gooit deze representatie alle informatie over de maatsoort weg, waardoor een musicus (of computer) met deze representatie geen relatieve duur van noten kan uitrekenen. Anderzijds gooit deze representatie alle informatie over het tempo weg. Hierdoor kan een uitvoerend musicus (of computer) niet eens inschatten hoe snel alle noten uitgevoerd moeten worden. De string 1'en en 0'en geeft dus wel globaal het ritme weer, maar praktisch kan een musicus het niet uitvoeren.

Ons model heeft dit probleem niet. Strikt genomen hebben we slechts individuele noten geformaliseerd, maar we zouden ook een muziekstuk kunnen formaliseren als lijst ritmische noten (zie *voorbeeld 7.3.1*). Als we dit zouden doen, kunnen we informatie over het tempo en de maatsoort meegeven aan de musicus (of computer) door een functie $f_n \in \mathcal{M}$ mee te geven, alsmede een temponoot en -nummer. De verloren informatie uit het bekende model kan in ons model gewoon nog meegegeven worden.

Vervolgens behandelen we het probleem dat **gelijke ritmes verschillend geformaliseerd kunnen worden**. We hebben gezien dat het bestaande model een klein "tijdsinterval" kiest, en vervolgens per tijdsinterval checkt of er een puls te horen is in het interval of niet. Is er een puls, dan krijgt dit tijdsinterval het getal 1 toegewezen; is er geen puls, dan krijgt het een 0. Een probleem hiermee is dat de keuze van het kleinste tijdsinterval niet uniek is. Ik kan een ander tijdsinterval kiezen dan jij en hiermee hetzelfde ritme op verschillende manieren formaliseren.

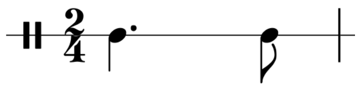
De ritmische noten hebben dit probleem niet, aangezien zij niet gebaseerd zijn op het idee van een kleinste tijdsschaal; ritmische noten zijn gebaseerd op muzikale noten. Gegeven een muzikaal notenvoorbeeld staan de noten die erin gebruikt worden vast, dus de ritmische noten staan vast. De kleinte tijdschaal waarin een musicus "denkt", echter, staat niet vast, en dus staat de string 1'en en 0'en niet vast. Ter illustratie geven we een voorbeeld.

Voorbeeld 7.3.1 (Een nootvoorbeeld uit een 2/4-maat)**.** Beschouw het notenvoorbeeld in *figuur 7.1*. Als we dit notenvoorbeeld met ons model zouden willen formaliseren, zodat de computer ermee kan rekenen, merken we op dat we te maken zullen hebben met een string van twee ritmische noten. De eerste noot in deze string zal de enkelgepunteerde kwartnoot zijn $(-1, 3/2)$ en de tweede een achtste noot $(-2, 0)$. In ons model moeten we dit nootvoorbeeld dus formaliseren als $\{(-1, 3/2),\ (-2, 0)\}$.

Als we dit nootvoorbeeld echter in het bekende model willen formaliseren, moeten we nog een kleinste tijdsschaal kiezen. We kunnen hiervoor bijvoorbeeld de achtste noot kiezen. Als we de achtste noot kiezen, vinden we de formalisering 1001. Iemand anders kan de zestiende noot als kleinste tijdsschaal kiezen. Dan vinden we de formalisering 10000010.

We zien dus dat dit nootvoorbeeld uniek door ons model wordt geformaliseerd, terwijl het bestaande model er geen unieke representatie voor kan vinden.

□



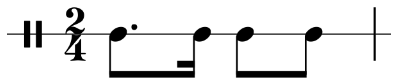
Figuur 7.1: *Een nootvoorbeeld in een 2/4-maat*

Dan kijken we naar het probleem dat **fundamenteel verschillende ritmes soms gelijk geformaliseerd kunnen worden**. We hebben als gezien dat het bestaande model gelijke ritmes verschillend kan weergeven, maar helaas is het tegenovergestelde ook waar. De bekende formalisering dwingt de gebruiker een kleinste tijdsschaal te kiezen die klein genoeg is, opdat er in ieder tijdsinterval maximaal één puls valt. Het kan dus voorkomen dat deze tijdsschaal niet hetzelfde is in twee verschillende muziekstukken. Als de tijdschaal in twee muziekstukken niet hetzelfde is, kan dit ervoor zorgen dat verschillende nootvoorbeelden gelijk worden geformaliseerd. Ons model heeft hier geen last van, omdat wij de formalisering baseren op de noten zelf en niet op een kleinste tijdsschaal. We illustreren dit weer met een voorbeeld.

Voorbeeld 7.3.2 (Een tweede nootvoorbeeld in een 2/4-maat)**.** Beschouw het nootvoorbeeld in *figuur 7.1* en *7.2*. Focus je in *figuur 7.2* alleen op de eerste tel. Stel je voor dat beide passages uit een ander stuk komen. In onze formalisering is het al bekend dat de passage uit *figuur 7.1* geformaliseerd wordt door $\{(-1, 3/2),\ (-2, 0)\}$. Het is vervolgens door de lezer gemakkelijk na te gaan dat we de eerste tel uit *figuur 7.2* formaliseren door $\{(-2, 3/2),\ (-3, 0)\}$. Beide nootvoorbeelden zijn verschillend dus in onze formalisering zijn de gebruikte ritmische noten ook verschillend.

Als we deze nootvoorbeelden echter in het bekende model willen formaliseren, merken we op dat het voor *figuur 7.1* "logisch" is om de achtste noot als kleinste tijdsschaal te kiezen, omdat dit de kortste noot is die we zien. We vinden daarom de formalisering 1001. Voor *figuur 7.2* is het "logisch" om de zestiende noot te kiezen, omdat dit de kortste noot is in deze figuur. Voor de eerste tel uit deze figuur vinden we dan de formalisering 1001, hetzelfde dus als in de andere figuur. Verschillende nootvoorbeelden krijgen in het oude model dus dezelfde representatie.

□



Figuur 7.2: *Een tweede nootvoorbeeld in een 2/4-maat*

Het laatste nadeel dat we aanhalen voor het al bekende model is dat **er veel muziektheoretische kennis voor geëist is**. In dit verslag heb je misschien de impressie gekregen dat juist voor ons model veel parate muziektheoretische kennis nodig is, maar voor de toepassing van ons model is minimale theoretische kennis vereist. Dit is het geval, omdat wij de muziektheorie in ons model geweven hebben; ons model doet muziektheoretische observaties voor de gebruiker. De gebruiker moet deze zelf doen in de toepassing van het bekende model. We geven weer een voorbeeld.

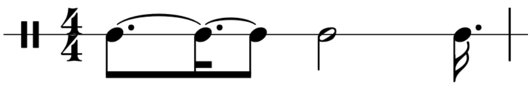
Voorbeeld 7.3.3 (Een lastig te formaliseren passage)**.** Beschouw het nootvoorbeeld in *figuur 7.3*. Stel je wilt dit formaliseren in de bekende formalisering dan moet er al een grote hoeveelheid muzikale kennis in je zitten. Je moet bijvoorbeeld weten dat je de tweeëndertigste noot moet kiezen als tijdsschaal (of iets kleiners), omdat de aanwezige enkelgepunteerde zestiende noot de duur heeft van een zestiende noot **plus een tweeëndertigste**. Vervolgens zul je ook het lastige eerste nootje (met alle verbindingsbogen) moeten formaliseren. Hiertoe zul je zelf moeten uitrekenen hoeveel tweeëndertigste noten er in deze noot passen (het zijn er 13), aangenomen dat je de theoretische kennis hebt om dit te doen, aangenomen dat je al weet dat verbindingen geen nieuwe pulsen veroorzaken. Na al die moeite kom je uiteindelijk op de volgende formalisering:

$$10000000000001000000000000000100.$$

Als je dit wilt formaliseren als een string van drie ritmische noten kom je er makkelijker vanaf. Als we bijvoorbeeld de eerste muzikale noot als ritmische noot formaliseren, hoeft de gebruiker alleen de formaliseringen van de basisnoten te kennen. Om gepunteerde noten te maken, weet de gebruiker namelijk dat er een operatie is die dit kan. Om noten te verbinden weet de gebruiker dat hij/zij de $\oplus$ operatie kan gebruiken. Ten slotte weet de gebruiker dat er formules zijn om al deze operaties uit te voeren. De gebruiker kan dus zonder muzikale kennis, gebruikmakend van de verschillende formules, de volgende formalisering vinden van de eerste noot:

$$\bullet_1(-2,1) + \bullet_1(-3,1) + (-2,1) = (-1,5/8).$$

Door de definities en formules kan de gebruiker van ons model dus zonder al te veel muzikale kennis zelf komen tot de volgende formalisering: $\{(-1,5/8), (0,1), (-3,3/2)\}$. Onze formalisering vereist dus minder muzikale kennis.



Figuur 7.3: *Een lastig te formaliseren muzikale passage*

We hebben gezien dat ons model veel van de problemen van het bekende model uit *hoofdstuk 3* oplost. Dit hoeft echter niet te betekenen dat ons model geen nieuwe nadelen ten opzichte van het bekende model meer creëert. Dit beschouwen we in de volgende sectie.

- ▶ **Samenvatting:** *We hebben in deze sectie laten zien dat ons model veel nadelen van het bekende model uit hoofdstuk 3 oplost.*

♫ Een praktische vergelijking

Theoretisch hebben we gezien dat ons model op een aantal vlakken boven het bekende model uitstijgt. Nu gaan we echter naar wat praktische overwegingen kijken. We focussen hierin op de belangen van een uitvoerend musicus. We laten zien dat op het praktische vlak ons model wat te wensen overlaat.

Het grootste probleem heeft te maken met de **manier waarop mensen muziek lezen**. Mensen lezen muziek op eenzelfde manier als de manier waarop we tekst lezen. We lezen de individuele noten niet, maar we lezen meerdere nootvoorbeelden tegelijk door naar de globale vorm te kijken. We fixeren onze ogen op verschillende punten van de pagina en verwerken dan alle informatie die we op dat punt kunnen vinden in één keer, voordat we onze ogen naar het volgende punt bewegen. [9]

Deze manier van muziek lezen zou voor mensen vragen op een model, waarbij je aan de globale vorm van de representatie ook direct informatie verleent over het notenvoorbeeld vaar de formalisering van afstamt. Het moge duidelijk zijn dat de bekende representatie deze fijne eigenschap heeft. In een gegeven muziekstuk zal de formalisering “10” twee keer zo kort duren als “1000”. Een lezer hoeft alleen te kijken naar de globale lengte van de string met enen en nullen en hij weet ongeveer hoe lang het notenvoorbeeld duurt.

Onze muzikale formalisering heeft dit geluk echter niet. Onze paren getallen geven in hun vorm geen informatie over de lengte van de noten. Een lezer zou de paren individueel moeten analyseren om erachter te komen welk notenvoorbeeld door de paren getallen bedoeld wordt. De “natuurlijke” manier waarom mensen noten lezen kan bij ons model niet toegepast worden, maar bij het bekende model wel.

In het verlengde hiervan ligt het probleem dat **onze formalisering minder intuïtief aanvoelt en (dus) meer rekenkracht vereist**. Gegeven een string nullen en enen voelt het voor een lezer heel natuurlijk aan hoe deze uitgevoerd moet worden. Een string wordt fysiek twee keer zo lang, als de noot twee keer zo lang uitgevoerd moet worden. De lengte van de string en de tijd die het uitvoeren kost hebben een recht evenredig verband ten opzicht van elkaar. Dit voelt voor een lezer heel intuïtief aan, waardoor hij/zij minder hoeft na te denken over hetgeen genoteerd staat.

Ons model verliest deze intuïtie enigszins. Een lezer zou bij ons model een lijst van paren getallen voorgeschoteld krijgen. Ieder paar getallen kan in principe iedere mogelijke relatieve duur hebben. A priori kan een lezer dus niet een globaal idee over de relatieve duur krijgen. De lezer wordt dus gedwongen, naast het verwerken van de informatie in de string, uit te rekenen wat de verschillende strings precies betekenen qua relatieve duur. Dit maakt het uitvoeren van de paren getallen in real time lastig tot onmogelijk.

Het laatste belangrijke nadeel ten opzichte van het bekende model is **de aanpassingsvriendelijkheid die het bekende model bezit**. In de praktijk is er altijd een noot die we kunnen gebruiken als tijdsschaal (hoe klein deze dan ook mag zijn). Als we met deze kleinste noot een stuk geformaliseerd hebben en vervolgens een kleine aanpassing willen doen, kunnen we dit vaak vlug doen door een 0 in een 1 te veranderen of andersom. Willen we dit in onze formalisering doen, dan moeten we de ritmische noten opzoeken waar de verandering in de buurt plaatsvindt, en kijken hoe deze ritmische noten veranderen in het licht van muzikale verandering. Onze notatie is dus (zeer) gevoelig voor kleine veranderingen, en de bekende notatie is dit niet, waardoor we in de bekende notatie makkelijker kunnen zien wanneer twee nootvoorbeelden op elkaar lijken. We geven een voorbeeld.

Voorbeeld 7.3.4 (Twee nootvoorbeelden geformaliseerd)**.** Beschouw de twee nootvoorbeelden in *figuur 7.4* en merk op dat ze in uitvoering op elkaar lijken: (2) wordt hetzelfde uitgevoerd als (1) met uitzondering van twee extra pulsen die nu ook gespeeld moeten worden. Stel je ook voor dat deze twee nootvoorbeelden in hetzelfde stuk zouden voorkomen. Als we (1) en (2) zouden willen formaliseren met de bekende formalisering, merken we op dat we de zestiende noot als kleinste tijdseenheid moeten kiezen.[2] Wanneer we deze keus maken, worden de passages als volgt geformaliseerd:

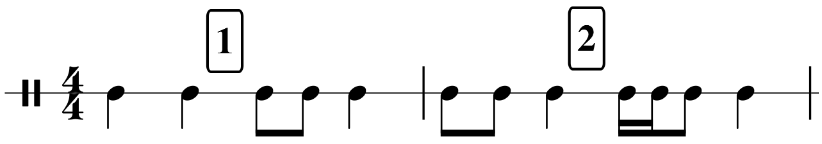
$$\begin{aligned} (1): &\quad 1000100010101000, \\ (2): &\quad 1010100011101000. \end{aligned}$$

We zien in de formalisering duidelijk naar voren komen dat de passages ongeveer hetzelfde worden uitgevoerd. De 1'en vallen op precies dezelfde plekken in (1) en (2), echter heeft (2) twee 1'en meer. Als we dezelfde twee passages als ritmische noten willen formaliseren, vinden we het volgende:

$$\begin{aligned} (1): &\quad \{(-1,1),\ (-1,1),\ (-2,1),\ (-2,1),\ (-1,1)\}, \\ (2): &\quad \{(-2,1),\ (-2,1),\ (-1,1),\ (-3,1),\ (-3,1),\ (-2,1),\ (-1,1)\}. \end{aligned}$$

Merk bij deze formalisering op dat (2) niet meer lijkt op (1), omdat de ritmische noten gevoeliger zijn voor verandering. Hierdoor is minder makkelijk te zien dat passages (1) en (2) qua uitvoering best op elkaar lijken, waardoor onze formalisering minder gebruikersvriendelijk is.

□



Figuur 7.4: *Twee passages*

Al met al hebben we gezien dat voor praktische doeleinden (de uitvoering) ons model minder makkelijk te hanteren is dan het bekende model. De voordelen van ons algebraïsch model zit geankerd in de structuur die we onze noten hebben gegeven, waardoor muzikaal theoretische concepten zich makkelijk laten vertalen naar onze wiskundige noten. De nadelen zitten hem echter ook in deze structuur, omdat door de structuur ervoor heeft gezorgd dat de representatie van noten abstracter moet. Deze extra laag abstractie zorgt ervoor dat voor musici ons model voor ritme moeilijker te hanteren is in de praktijk.

- ▶ **Samenvatting:** *Voor de praktijk (muziekuitvoering) is het bekende model makkelijker te hanteren dan ons model.*

7.4 Discussie en ideeën voor vervolgonderzoek

Als afsluiter van deze thesis kijken we terug naar onze wiskundige formalisering in zijn algemeenheid en geven we een aantal punten waar we modeltechnisch vraagtekens bij kunnen zetten. Vervolgens geven we nog een aantal ideeën voor vervolgonderzoek waarmee een geactiveerde lezer eventueel ons werk hier mee kan voortzetten.

✍ Discussiepunten

Allereerst behandelen we (naast de muzikale discussie hierboven) een aantal punten waar we wiskundig misschien niet de handigste weg in zijn geslagen. Het eerste punt dat we aanhalen is

[2] Omdat we anders passage (2) niet kunnen formaliseren. Herinner dat deze passages in hetzelfde stuk voorkomen.

het feit dat we onze ritmische noten geformaliseerd hebben als (volledig) moduul. Doordat we dit gedaan hebben, hebben we twee dingen veroorzaakt waar we in de loop van het verslag meer last van hebben gekregen dan geluk.

1. De scalairen komen uit een ring, dus gegeven een scalar α bestaat α^{-1} niet altijd.
2. Alle noten $n \in N$ hebben een additieve inverse $-n$. Ook is er een neutraal element $0 \in N$ (de stilte).

Van eigenschap (1) hebben we tijdens het definiëren van antimetrische figuren last gekregen. Doordat niet alle scalairen een multiplicatieve inverse hebben, moesten we veel antimetrische figuren via een “omweg” definiëren; we konden antimetriseren niet simpelweg zien als de vermenigvuldiging van een noot met een getal. Intuïtief is antimetrisering echter wel de vermenigvuldiging van een noot met een getal.

Een extra punt waardoor eigenschap (1) dubieus lijkt, is de opmerking na *stelling 6.1.3*. Hier stellen we namelijk dat we ritmische noten die horen bij triolen kunnen vinden door “naïef” ritmische noten te vermenigvuldigen met 2/3, wetende dat dit eigenlijk niet mag. Door deze opmerking en het feit dat *definitie 4.1.2* ook werkt als de scalairen uit (bijvoorbeeld) het lichaam $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{R}$ komen, kan men beargumenteren dat we van N ook een vectorruimte hadden kunnen maken. Als we dit hadden gedaan, hadden we in *hoofdstuk 6* minder moeilijkheden gehand, en konden we antimetrische figuren wél altijd als vermenigvuldiging formaliseren.

Een verdediging voor het feit dat we N als moduul hebben gemaakt, is het feit dat we hierdoor formeel onderscheid konden maken tussen categorie II en III noten. Als de scalairen uit een lichaam kwamen, zou een categorie II noot ook categorie III noten kunnen voortbrengen (door bijvoorbeeld een vermenigvuldiging met 2/3). Dit zou impliceren dat we categorie II en III noten wiskundig op hetzelfde voetstuk zouden plaatsen, terwijl muzikaal categorie III noten fundamenteel anders aanvoelen dan categorie II noten. Doordat we N tot moduul hebben gemaakt, hebben we ervoor gezorgd dat dit muzikaal-theoretische onderscheid tussen categorie II en III noten wiskundig ook behouden blijft; het moduul-model respecteert de muzikale structuur meer dan een eventueel vectorruimte-model.

Het probleem met eigenschap (2) zit verstopt in het feit dat we gedurende dit hele verslag bijna niet gepraat hebben over “negatieve noten”. Muziek wordt positief in de tijd ervaren, waardoor negatieve noten, die qua duur terug uit in de tijd gaan, een muzikaal vreemd concept vormen. Eén keer bleek het nuttig te zijn om over “negatieve noten” te praten om de muzikale noten terug te vinden die bij gegeven ritmische noten horen (*voorbeeld 5.1.4*), maar veel vaker kwamen ze niet aan bod. Verder hebben we gezien dat in veel bewijzen het neutraal element van N voor extra moeilijkheden zorgde (zie bijvoorbeeld het bewijs van *stelling 4.1.4*). Een kritische lezer kan zich vervolgens afvragen of het om deze reden niet verstandiger was geweest om ritmische noten te definiëren als een soort halfmoduul over $\mathbb{Z}_2^+$.

Het volgende discussiepunt is het feit dat we in onze vertaling naar wiskunde veel muzikale concepten ruimer hebben gemaakt dan ze eigenlijk zijn. Een voorbeeld hiervan is de definitie van een maatsoort in *definitie 5.1.1* of de definitie van een ritmisch noot in *definitie 4.1.2*. Enerzijds is het goed dat we de definities ruimer hebben gemaakt dan de muzikale werkelijkheid, omdat dit ons zo gereedschap geeft om na te denken over muzikale concepten die praktisch nog niet vaak zijn toegepast[3]. Anderzijds is het kwalijk dat we dit hebben gedaan, omdat we zo de wiskunde lastiger hebben gemaakt dan muzikaal nodig, en de lezer in een muziekverslag lastig hebben gevallen met intrinsiek amuzikale concepten. [5]

Ten slotte en in het verlengde hiervan halen we nog een laatste discussiepunt aan. Vanaf *paragraaf 6.3* hebben we een groot deel van onze studie gewijd aan het behandelen van antimetrische nesting. Het moge nogmaals opgemerkt worden dat antimetrische nesting een zeer theoretisch

[3]Denk aan Conlon Nancarrow’s studie No. 33: een canon waar de ritmische ratio tussen de stemmen $2 : \sqrt{2}$ is, of denk aan het muzikale concept “irrationele maatsoorten”.

concept is, dat muzikaal niet erg ingeburgerd is. Theoretisch en notationeel is het mogelijk om dit soort antimetrische figuren aan te halen onder de aanname dat metriek een secundaire rol speelt, maar praktisch zullen we ze, vanwege metrische overwegingen, niet in het wild zien. Om deze reden is het dubieus dat we zo veel aandacht aan deze muzikale figuren besteed hebben, aangezien zelfs al in de muziektheorie zelf vraagtekens gezet kunnen worden bij deze figuren.

▶ **Samenvatting:** *We hebben een aantal modelmatige vraagtekens gezet bij onze methodiek.*

♫ Ideeën voor vervolgonderzoek

We sluiten dit verslag af door nog wat ideeën te geven waarmee iemand na ons verder zou kunnen gaan met het wiskundig onderzoeken van muziektheorie. Drie ideeën zijn in willekeurige volgorde weergegeven.

Metrum en muziektheorie

Dit verslag richtte zich vooral op de wiskundige formalisering van individuelen noten. We hebben ons niet echt beziggehouden met muzikale passages. Dit is echter wel een onderdeel waar een vervolgonderzoek op kan ingaan. Muziek ontstaat pas als we individuele noten achter elkaar gaan zetten, en wanneer we dit doen, begint in het ritmische domein metrum een rol te spelen. De hoofdvraag waar iemand zich mee bezig kan gaan houden, is de volgende:

"Hoe kunnen we het muziektheoretisch model van ritmische noten uitbreiden, opdat metrische overwegingen uit de muziektheorie ook in het model worden meegenomen?"

Een interessant deelprobleem dat bij deze hoofdvraag de kop opsteekt, is het indelen van maatsoorten op basis van metrische eigenschappen. Dit is namelijk een onderdeel van de muziektheorie waar nog geen consensus over bereikt is. Verschillende bronnen houden in de maatsoortindeling verschillende definities aan. [3], [**?**], [12]

Combinatie van het tonale model en het ritmische model

Wij hebben ons in dit verslag gefocust op louter het ritmische aspect van muziektheorie. De aanleiding hiervoor is het feit dat meer mensen al eens hebben nagedacht over wiskundige formalisering van tonen. Het kan een leuke oefening zijn om dit model over ritmetheorie te combineren met een van de bestaande modellen die de tonale theorie probeert te beschrijven. De hoofdvraag in zo'n onderzoek zou zijn: [22]

"Hoe kunnen we wiskundige modellen voor de ritmetheorie en de tonale theorie op een nuttige manier combineren, opdat we gehele muziekstukken op een wiskundige manier kunnen beschrijven (en eventueel gemakkelijk operaties op deze stukken kunnen uitvoeren)?"

Implementatie van ritmische noten en machine-learning

We hebben in dit verslag vaak gesproken over eventuele gecomputeriseerde toepassingen van ons model voor ritme. Nooit echter hebben we deze ideeën ook echt geprogrammeerd.[4] Een geïnteresseerde informaticus kan proberen de ideeën van ons model in een programmaatje te zetten om te kijken of de verwachte voordelen ook echt uitkomen. De hoofdvraag van zo'n onderzoek zou zijn:

[4] Wij hebben meer gefocust op de theoretische meerwaarde van de resultaten in plaats van de praktische.

"Hoe kunnen we een compositieprogramma ontwerpen die de structuur van ritmische noten gebruikt voor het automatiseren van verschillende compositieprocessen (zoals maatsoortwisseling)?"

Een eventueel leuk extraatje bij deze vraag zou een onderzoek kunnen zijn naar machine-learning en het componeren van muziek. Google is momenteel bezig een computer te "leren" componeren (project Magenta); nog geen denderende resultaten zijn hierin geboekt. Ikzelf denk dat ritmische noten de ritmische structuur van muziek beter weergeven dan de bekende methoden, en daarom denk ik dat computers via machine learning beter in staat zullen zijn om autonoom ritmes te componeren als de trainingsset van muziekstukken wordt aangeboden in de "taal" van ritmische noten. In zo'n vervolgonderzoek is het mogelijk om deze hypothese ook te onderzoeken.[2]

□

Hiermee is er een eind gekomen aan onze exploratie van muziektheorie in wiskundig perspectief. Ik hoop dat ik je met dit verslag heb weten te interesseren voor muziektheorie, voor wiskunde of voor de combinatie van de twee. Ik hoop ook dat ik je iets heb kunnen leren, zij het over muziektheorie, zij het over wiskunde. Ten slotte hoop ik dat ik je heb kunnen prikkelen om zelf verder onderzoek te doen naar de wiskundige formalisering van muziektheorie, aangezien dit (volgens mij) een facet van muziek is waar nog veel winst te boeken valt.

Hartelijk bedankt voor het lezen van mijn verslag!

Mike van Santvoort
Eindhoven, 2018

Bibliografie

[1] Ninsheetmusic. website. Geraadpleegd 25 april 2018 op `http://www.ninsheetmusic.org/`. 92, 110, 129, 133

[2] Google AI. Magenta. Website. Geraadpleegd 23 juni 2018 op `https://magenta.tensorflow.org/`. 126

[3] ArtEZ hogeschool voor de kunsten, Arnhem. *Reader elementaire muziektheorie*. 2, 4, 125

[4] en H.A. Priestley B.A. Davey. *Introduction to Lattices and Order*, chapter Maps between ordered sets, pages 23–25. Cambridge University Press, New York, 2^{nd} edition, 2002. 59

[5] Clifton Callender. Performing the irrational: Paul ushers arrangement of nancarrows study no. 33, canon $2:\sqrt{2}$, 2012. Geraadpleegd 3 juni 2018 op `http://conlonnancarrow.org/symposium/papers/callender/irrational.html`. 124

[6] Jan van de Craats. *De juiste toon*. Epsilon uitgaven, 2003. 1

[7] M.F. Atiyah en I.G. Mcdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969. 26, 34, 106

[8] Rachel W. Hall en Paul Klingsberg. Antisymmetric rhythms and tiling canons. *The Mathematical Association of America*, (10):887 – 896, december 2006. Monthly 113. 17

[9] Veronica Kinsler en R.H.S. Carpenter. Saccadic eye movements while reading music. *Pergamon*, 35(10):1047–1058, 1995. 122

[10] HowMusicWorks.org. Meter and rhythm: Straight and swing timing. website. Geraadpleegd 25 april 2018 op `http://www.howmusicworks.org/510/Meter-and-Rhythm/Straight-and-Swing-Timing`. 129

[11] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*, chapter 2.6, pages 82–89. John Wiley & Sons, New York, 1978. 72, 79

[12] Steven G. Laitz. *The Complete Musician*, chapter 1, pages 19–35. Oxford University Press, 3^{rd} edition, 2012. 2, 4, 125

[13] MuseScore. *MuseScore Handbook*, 2.0 edition. `https://musescore.org`, gedownload op 10 mei 2018. 46

[14] Brad Osborn. *Beats That Commute: Algebraic and Kinesthetic Models for Math-Rock Grooves*. Newfound Press, 2010. pp. 43-69. 15, 16, 17

[15] Adam Rentsch. *Mathematical Investigations into Rhythm*. PhD thesis, La Trobe University, n.a. 17

[16] Sidney I. Resnick. *A Probability Path*, chapter 1.3 - 1.4, pages 6–10. Birkhäuser, Boston, 1998. 106

[17] Josef Stoeckl. Notenpyramide. Online, oktober 2017. Creative Commons licentie: naamsvermelding en gelijk delen; figuur niet aangepast. 7

[18] Godfried T. Toussaint. Algorithmic, geometric, and combinatorial problems in computational music theory. 17

[19] Godfried T. Toussaint. The geometry of musical rhythm. In *Japanese Conference on Discrete and Computational Geometry*, pages 198–212. Springer, 2004. 1, 17, 18

[20] Godfried T. Toussaint et al. The euclidean algorithm generates traditional musical rhythms. 17

[21] Theo Willemsen. *Algemene Muziekleer*. Spectrum, 2011. 1, 2, 4

[22] Marek Zabka. Algebra of harmony: Transformations of just consonances. *Mathematics and Computation in Music*, 2017. 1, 125

Bijlage A

Straight en Swing

In deze appendix maken we een kort uitstapje naar concrete muziek. In *paragraaf 4.2* van de hoofdtekst is in *definitie 4.2.3* de verzameling $N_{(2)}$ geïntroduceerd. Hiervan is gezegd dat het de "gebruikelijke noten" voorstelt. Een leek is misschien met deze zin en het ene gegeven voorbeeldje overtuigd dat dit waar is, echter voor de musicus is het interessant om te kijken naar het soort liedjes waarin alleen de verzameling $N_{(2)}$ een rol speelt. Vervolgens hebben we ook nog een andere zeer belangrijke verzameling geïntroduceerd in *paragraaf 6.1*: $N_{(3)}$. Dit zouden de (zuivere) trioolnoten moeten voorstellen. Ook hier is het fijn om even in een uitstapje naar muzikale voorbeelden te kijken waar we met deze concrete verzameling te maken krijgen. We sluiten af door nog een keer goed naar de "dimensieweg" uit *figuur 6.5* en daarop een concreet muzikaal verschijnsel toe te passen: swingmuziek. In deze paragraaf niet veel wiskunde, maar vooral muzikale toelichting bij in de hoofdtekst behandelde concepten. (Partituren in deze paragraaf te danken aan Ninsheetmusic [1], theorie aangepast vanuit [10])

A.1 Op het rechte pad blijven: Straight

Als er in een stuk **straight** (recht) gespeeld wordt, betekent dit dat de gebruikte nootwaarden in nootverdelingen altijd even ver uit elkaar liggen; twee dezelfde nootlengtes hebben een tijdsverhouding $1 : 1$ ten opzichte van elkaar. Dit betekent dat bijvoorbeeld twee achtste noten altijd even ver uit elkaar liggen. Aangezien de afstand tussen dezelfde nootwaarden altijd even groot is, kunnen we de lengte van alle figuren die optreden modelleren met getallen uit $\mathbb{Z}_2$. Iedere basisnootlengte voegt een macht van twee toe, en aangezien alle nootlengtes zelf ook even lang duren (een verhouding $1 : 1$ hebben), kunnen we alle natuurlijke getallen vermenigvuldigen met een gegeven macht van twee en zo nog steeds een noot overhouden. We hebben gezien dat $\mathbb{Z}_2 \cong N_{(2)}$, dus kunnen de noten geformaliseerd worden met elementen uit deze verzameling.

De grote caveat die bij dit soort noten gemaakt moet worden, is dat noten als triolen door binnen deze verzameling uitgesloten zijn. Zij hebben namelijk geen simpele $\mathbb{Z}_2$-verhouding ten opzichte van de basisnoten. Alle elementen van $N_{(2)}$ hebben dit wel. De verzameling $N_{(2)}$ legt dus juist die noten vast, die we tegen komen als we aannemen dat een stuk straight is gespeeld. Om terug te koppelen naar *figuur 6.5*, blijft een straight stuk dus op de volledige onderste rijbaan van we weg; je zult in dit soort stukken geen auto's op de bovenste rijbaan zien rijden.

Omdat $N_{(2)}$ alleen "straight noten" bevat, zullen we in deze verzameling alleen maar nootlengtes tegenkomen die uit te drukken zijn als sommen van basisnoten, want daar zit die intrinsieke $1 : 1$ verhouding in gecodeerd. Dit betekent dat de enige elementen die we in $N_{(2)}$ kunnen aantreffen, de gepunteerde noten (vastgelegd door *lemma 4.1.5*) en verbindingen van gepunteerde noten en basisnoten (verbinden is optellen) zijn. Om deze woorden meer muzikaal te maken, nodig ik de lezer

Figuur A.1: *Een deel van de partituur van het lied "Lost Woods". Dit lied leeft in qua noten in* $N_{(2)}$.

uit om te luisteren naar het nummer *The Lost Woods* uit het spel *The Legend of Zelda: Ocarina of Time*, gecomponeerd door *Koji Kondo* en uitgebracht door het Japanse spelbedrijf *Nintendo.* Het horen dat het nummer straight is, zal niet moeilijk zijn. Om de woorden meer kracht bij te zetten, is verder in *figuur A.1* (een deel van) de partituur van het nummer weergegeven[1]. Merk op dat we in dit straight nummer inderdaad alleen basisnoten, punteringen en verbindingen zien: het nummer leeft in $N_{(2)}$.

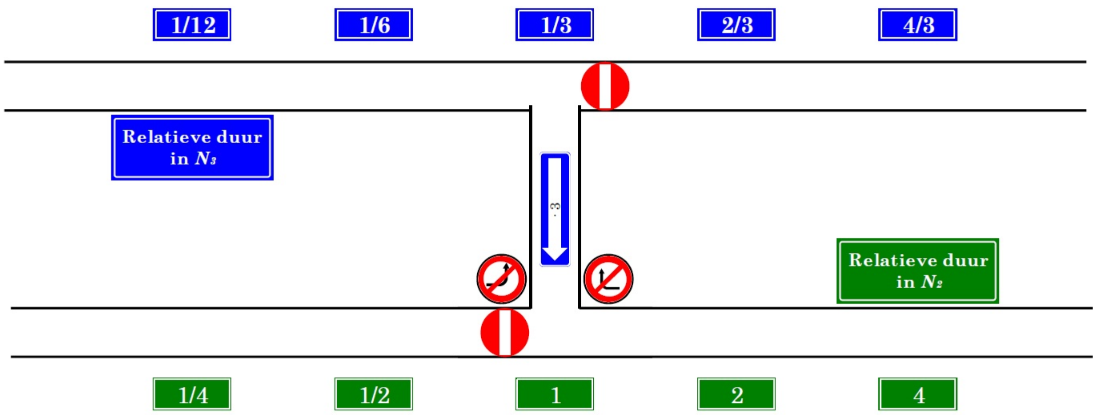
A.2 Een beetje loskomen: Swing

Hoewel straight een wiskundig fijne muziekstijl is, wil men soms iets anders. Soms wil men muziek die iets dynamischer aanvoelt, muziek die iets meer springt. Voor dit soort mensen is er muziek in **swing**. Swingmuziek pakt de basisaanname van de 1 : 1 verhouding tussen noten en maakt deze aanname iets vrijer. Bij swingmuziek worden alle noten die in de muzikale ordening (*definitie 5.2.1*) groter zijn dan de telnoot nog wel als "straight" opgevat, maar kleinere noten krijgen een iets andere muzikale verhouding ten opzichte van elkaar. Twee van deze noten krijgen namelijk in swingmuziek een tijdsverhouding 2 : 1 ten opzichte van elkaar.

Je ziet hier vast hoe de triolen uit $N_{(3)}$ een rol gaan spelen: voor de "kleinere noten" betekent de verhouding 2 : 1 dat ze uitgevoerd dienen te worden, alsof ze in een triool geschreven staan. In een 4/4-maat in swing worden twee achtste noten bijvoorbeeld uitgevoerd alsof ze in een achtstentriool geschreven staan; in deze achtstentriool voer je dan alleen de eerste en laatste achtste uit. Merk op dat de duur van de eerste achtste dan twee keer zo lang is dan de laatste en aan de verhoudingseis in swing voldaan is.

Als we weer kijken naar de dimensieweg in *figuur 6.5*, merken we op dat swing een rare muziekstijl

[1] Gratis beschikbaar gesteld door de website `http://www.ninsheetmusic.org/`, gearrangeerd door *The Deku Trombonist* (lid van de site).



Figuur A.2: *De afgekapte/afgesloten dimensieweg, zoals wij deze in swingmuziek tegenkomen.*

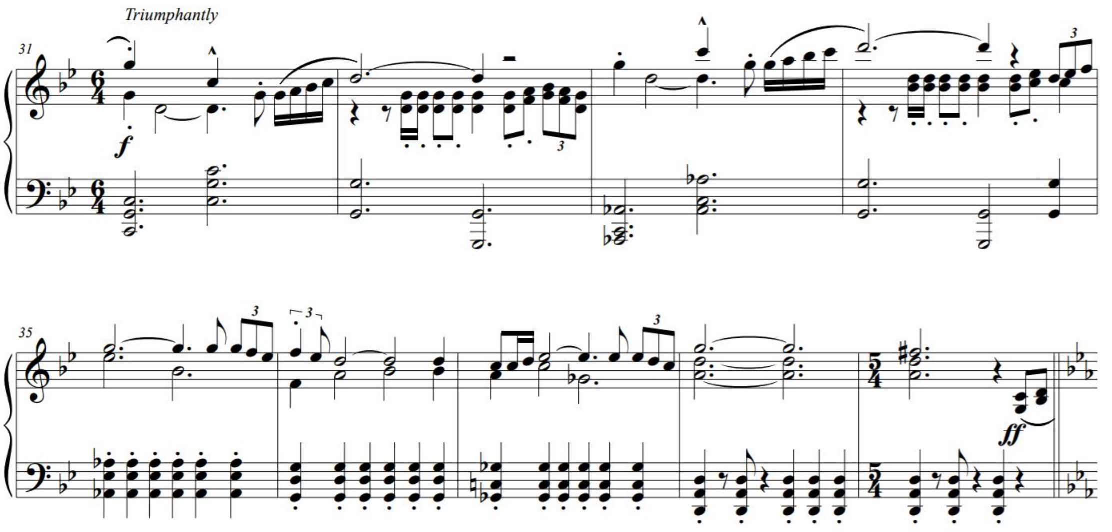
Figuur A.3: *Deel van de partituur van het nummer Wrong Enemy, observeer de aankondiging van het swing deel.*

is. In essentie zijn in deze muziekstijl delen van de dimensieweg afgesloten. Noten groter dan de telnoot "moeten" straight uitgevoerd worden, dus vanaf de telnoot is voor grotere noten de weg $N_{(3)}$ afgesloten. Echter, voor noten kleiner dan de telnoot is juist de $N_{(2)}$ weg afgesloten, want die noten hebben niet meer de verhouding 1 : 1. Deze moeten in swing uitgevoerd worden en leven op $N_{(3)}$. De afgesloten dimensieweg is geïllustreerd in *figuur A.2*. Om de hierboven gemaakte triolenclaim weer kracht bij te zetten, nodig ik de lezer uit te luisteren naar het nummer *Wrong Enemy!* uit het spel *Undertale*, gecomponeerd door *Toby Fox*. Het nummer bestaat uit twee delen: het eerste deel is straight en het tweede in swing. Hieronder in *figuur A.3* is één regel van het arrangement weergegeven waarin het swing deel geïntroduceerd wordt[2]. Merk op dat de arrangeur de swing introduceert door de "nieuwe" achtste noten te definiëren als trioolnoten; $N_{(3)}$ is verschenen.

A.3 Het beste van beide wegen

Hoewel straight en swing een mooie theoretische kijk bieden in de onderdelen van ons raamwerk waar in specifieke nummers voor gekozen kan worden, is de realiteit natuurlijk dat de componist volledig vrij is te kiezen welke noten hij/zij wil toepassen. Veel nummers rijden op statische momenten over de $N_{(2)}$ in *figuur 6.5*, terwijl er op dynamischere momenten gekozen wordt voor voor een ritje op de $N_{(3)}$. Muzikaal betekent dit niets anders dan dat een componist de kunstzinnige vrijheid heeft om triolen toe toe voegen, wanneer hij het element 1/3 aan $\mathbb{Z}_2$ wil toevoegen, en de 1/3 weer te verwijderen, mocht de muziek hierdoor te dynamisch worden.

[2]Gratis beschikbaar gesteld door de website `http://www.ninsheetmusic.org/`, gearrangeerd door *mastersuperfan* (lid van de site).



Figuur A.4: *Een muzikale passage waar de muzikale leefruimte van $N_{(3)}$ volledig wordt benut door het gebruik van soms antimetrische figuren en soms niet.*

Het moet wel opgemerkt worden dat juist die toevoeging van een nieuwe "priembreuk" aan ons muzikale vocabulaire ervoor zorgt dat een stuk net iets meer dynamische leefruimte heeft. Om dit muzikale idee tot leven te wekken, nodig ik de luisteraar uit om te luisteren naar het nummer *Hyrule Castle* uit het spel *The Legend of Zelda: Breath of the Wild*, gecomponeerd door *Manaka Kataoka* en uitgebracht door *Nintendo*. Weer is hieronder een deel van het arrangement weergegeven in *figuur A.4*.[3] Merk op dat de componist in dit onderdeel van het nummer de dynamische leefruimte van het nummer goed benut door eerst "straight" zestienden en achtsten in de melodie te gebruiken (uit $N_{(2)}$), en daarna "swing" triolen (uit $N_{(3)}$).

[3]Gratis beschikbaar gesteld door de website `http://www.ninsheetmusic.org/`, gearrangeerd door *Olimar12345* (lid van de site).

Bijlage B

Partituur van het nummer "Mumbo's Mountain"

In deze appendix is op de volgende bladzijde de eerste pagina van het arrangement van het lied "Mumbo's Mountain" weergegeven. Dit nummer is gecomponeerd door Grand Kirkhope, en gratis beschikbaar gesteld door de website `www.ninsheetmusic.org`. [1]

"Mumbo's Mountain"

Banjo-Kazooie

Composed by Grant Kirkhope

Arranged by The Deku Trombonist

Woordenlijst

N De verzameling ritmische noten. Dit zijn de vertalingen van muzikale noten naar wiskunde in mijn model. Het zijn paren van twee getallen. Zie *definitie 4.1.2*. 27

N_b De verzameling basisnoten. Basisnoten zijn de (wiskundige vertalingen van de) noten die we in de notenpiramide tegenkomen. Zie *definitie 4.2.1*. 40

$N_{(2)}$ De verzameling "normale" ritmische noten. Deze noten corresponderen met verbonden en gepunteerde basisnoten. Zie *definitie 4.2.3*. 42

$N_{(n)}$ De verzameling zuivere n-olen. Dit zijn de n-olen die we krijgen als we alle noten uit $N_{(2)}$ antimetriseren tot n-ool. $N_{(n)} = \mathcal{A}_n\left(N_{(2)}\right)$. 92

N_p De antimetrische limietverzameling die ontstaat als we toestaan de verzameling $N_{(2)}$ oneindig vaak antimetrisch te nesten tot p-ool. Zie *definitie 6.4.2*. 106

$\mathbb{Z}_2$ De lokalisatie van $\mathbb{Z}$ bij het getal 2. $\mathbb{Z}_2 := \left\{\frac{a}{2^b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\right\}$. 26

$\mathbb{Z}_2\langle 1/n\rangle$ De ring $\mathbb{Z}_2$ die we sluiten onder het getal $1/n$. $\mathbb{Z}_2\langle 1/n\rangle := \{r \cdot 1/n \in \mathbb{Q} \mid r \in \mathbb{Z}_2\}$. 95

$\mathcal{A}_n$ De operatie die de antimetrisering van ritmische noten tot n-ool uitvoert. Intuïtief is deze operatie te zien als een vermenigvuldiging met de antimetrische omzettingsfactor. Zie *definitie 6.2.3*. 85

$\mathcal{M}$ De verzamelingen van alle maatsoortfunctionalen binnen ons model. Zie *definitie 5.1.1*. 48

absolute tijdsduur De tijdsduur (van noten) in een goedgedefiniëerde, fysieke tijdseenheid (zoals seconden). Tijdseenheden van dit soort tijdsduur zijn vast en zullen niet verschillen per muziekfragment . 6, 13

aggogisch accent Eerste thesis van een maat. 9

antimetrisch figuur Ritmische figuren die een vast aantal gelijke noten vervangt door een ander vast aantal gelijke noten om zo de relatieve duur van individuele noten te veranderen. 11

arsis Onbeklemtoond element van een metrische groep; nooit het eerste element. 9, 10

balk Onderdeel van een (ritmische) noot: verticale strepen links en rechts van de kop. Hoe meer paren balken, hoe langer de noot duurt. Komt in moderne partituren niet vaak meer voor. Alternatieve notatiewijzen bestaan. 4, 24

BPM Een tempoaanduiding. x BPM betekent dat er x beats in één minuut zullen plaatsvinden. Voor enkelvoudige maatsoorten is (doorgaans) de temponoot gelijk aan de telnoot, en voor samengestelde regelmatige maatsoorten is de temponoot vaak gelijk aan de noot die één metrische groep omvat. Voor onregelmatige maatsoorten wordt deze notatie (in het algemeen) niet toegepast. 13

brevis Triviale naam voor de dubbele hele noot; duurt twee keer zo lang als de hele noot. 6, 7

categorie I noot Een basisnoot. 24

categorie II noot Verbindingen en punteringen van basisnoten. 24

categorie III noot Antimetriseringen van (louter) basisnoten. 24

categorie IV noot Verbindingen, en punteringen van categorie III noten. 24

duool antimetrische figuur waar drie noten van gelijke duur zijn vervangen door twee. 12

duplex longa Triviale naam voor de achtdubbele hele noot; duurt acht keer zo lang als de hele noot. 6

dynamische kunstvorm Een kunstvorm die men moet ervaren door de tijd heen. 1, 6

harmonie De manier waarop meerdere tonen samenklinken. 1

interval Twee gelijk (harmonisch-) of direct achterelkaar klinkende (melodisch-) tonen. 1

kop Onderdeel van een (ritmische) noot: ronde open of ingekleurde cirkel. Noten met een open kop duren langer dan met een gesloten kop. 4

kwartool antimetrische figuur waar drie noten van gelijke duur zijn vervangen door vier. 12

kwintool antimetrische figuur waar drie of vier noten van gelijke duur zijn vervangen door vijf. 12

longa Triviale naam voor de vierdubbele hele noot; duurt vier keer zo lang als de hele noot. 6

maat Kortste metrische eenheid in een muziekstuk. Wordt omkaderd door twee maatstrepen. 7, 9

maatgroep Andere naam voor een groepje van één thesis en een aantal arses. 10, 13

maatsoort Manier waarop het metrum in een muziekstuk gegeven wordt. Wordt vaak weergegeven aan het begin van een muziekstuk als een breuk, waarin het bovenste getal het aantal vaste pulsen in de maat aangeeft, en het onderste getal de (ritmische) noot aanwijst die één puls moet omvatten qua duur. 2–4, 7, 9, 10, 13

maatsoortindeling De manier waarop verschillende maatsoorten gegroepeerd worden in groepen met gelijke eigenschappen, of de manier hoe maatgroepen in een maat verschijnen.. 10

maatsoortwisseling Een wisseling tussen twee maatsoorten; wordt vaak voorafgegaan door een dubbele maatstreep. 13

maatstreep Verticale lijnen die een maat afbakenen. 9, 136

metrum De (regelmatige) afwisseling van beklemtoonde en onbeklemtoonde muzikale pulsen. 9

MM Een tempoaanduiding equivalent aan BPM. 13

MPM Een tempoaanduiding die het aantal maten per minuut aangeeft. 13

noot *(Voor onze doeleinden)* de muzikale tekens die ritme beschrijven. 2–9, 24

notenbalk De horizontale lijnen waar we noten op of tussen noteren in een partituur. 10

notenpiramide Visualisatiemethode voor de intrinsieke verhoudingen tussen de verschillende (basis)noten.. 7

ostinaat Een zich herhalend ritmisch patroon. 16

partituur Een uitgeschreven muziekstuk. 6, 8

passage Naam voor een gespeelde muzikale figuur.. 8, 9

puntering Het zetten van één of meerdere punten achter noten. Iedere punt halveert de originele duur van de noot, en telt deze op bij de duur van de noot met één punt minder. 8

Pythagoreïsche stemming Manier om intervallen op elkaar af te stemmen door twee intervallen (kwint en octaaf) een vaste verhouding te geven. 1

relatieve tijdsduur De tijdsduur (van noten) in een muziekstuk ten opzichte van andere muzikale elementen. Tijdseenheden van dit soort tijdsduur (zoals de "tel") zijn niet vast en kunnen verschillen per muziekfragment. 6, 7, 9, 13

ritme Het in de tijd opeenvolgen van geluidspulsen op een systematische manier. 1, 2, 4, 9

rust Een stille noot; een symbool dat de duur van een stilte aangeeft. 6

RZM Theses die geen aggogisch accent zijn binnen een maat. 9

septool antimetrische figuur waar vier of zes noten van gelijke duur zijn vervangen door zeven. 12

sextool antimetrische figuur waar vier noten van gelijke duur zijn vervangen door zes. 12

stok Onderdeel van een (ritmische) noot: rechte streep in het midden van de noot die kop en (eventuele) vlaggen met elkaar verbindt. Noten met stokken duren korter dan noten zonder stokken. 4

tel De name van de relatieve tijdseenheid in de muziek.. 7, 9

telnoot De noot de één tel duurt. 9, 10, 13

tempo Absolute snelheid van de noten in de muziek. 13, 14

temponoot De noot waarnaar gerefereerd wordt in de tempoaanduiding. 13

thesis Beklemtoonde element van een metrische groep; altijd het eerste element. 9

toon Een geluidsklank met vaste frequentie. 1, 10

triool antimetrische figuur waar twee noten van gelijke duur zijn vervangen door drie. 11, 12

verbindingsbalk Nootonderdeel dat de vlag vervangt om aan te geven dat twee noten tot dezelfde metrische groep behoren. Het aantal verbindingsbalken komt altijd overeen met het aantal vlaggen dat de noot zou moeten krijgen. 9

verbindingsboog Een boog die men tussen twee noten kan noteren om ze met elkaar te verbinden. De resulterende noot omvat nu slechts één puls die een even lange duur heeft als de duur van de individuele, ongebonden noten bij elkaar opgeteld.. 8

versnellende werking Een operatie die de muziek het gevoel geeft sneller te verlopen. 11, 12

vertragende werking Een operatie die de muziek het gevoel geeft langzamer te verlopen. 11, 12

vlag Onderdeel van een (ritmische) noot: uitsteeksels bovenin of onderin de noot aan de stok. Hoe meer vlaggen, hoe korter de noot. 4, 9, 24