BACHELOR

Polling systemen

Baars, B.

Award date:
2012

Polling Systemen

Bjorn Baars (0715297)
Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde & Informatica
Begeleider: O.J. Boxma

6 juli 2012

Samenvatting

In dit verslag geef ik een uitbreiding van het aantal gevallen waarin de relatie voor polling systemen die wordt gegeven in Stelling 1 uit [5] kan worden toegepast. In eerste instantie heb ik een literatuuronderzoek gedaan en daarvan samenvattingen gemaakt. Vervolgens ben ik met behulp van een alternatief bewijs voor Stelling 1 uit [5] naar een aantal gevallen gaan kijken. Deze gevallen zijn polling systemen met batch bediening; polling systemen met batch aankomsten; polling systemen met meerdere bediendes; polling systemen met non-preemptive prioriteit; en polling systemen met verschillende prioriteitsniveaus.
Uiteindelijk bleek dat in bepaalde gevallen bij meerdere bediendes (zoals onafhankelijk opererende bediendes) en bij non-preemptive prioriteit de relatie nog steeds exact gold als in Stelling 1 uit [5]. Bij polling systemen met batch aankomsten of batch bediening en meerdere prioriteitsniveaus, kreeg ik niet exact dezelfde relatie als in Stelling 1 uit [5], maar wel een variant hierop. Voor een aantal gevallen met meerdere bediendes (zoals bij afhankelijk opererende bediendes) waren er gevallen waarin Stelling 1 uit [5] niet meer geldt. Dit is niet bewezen, maar wel wordt beredeneerd waarom het waarschijnlijk is dat deze relatie niet meer geldt.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

In de stochastiek literatuur zijn diverse soorten wachtrijsystemen. Eén van deze systemen is het zogenoemde polling systeem. Dit systeem bestaat globaal uit een aantal wachtrijen, die zijn aangesloten op één of meerdere bediendes. In de praktijk zijn er vele voorbeelden te noemen waarin polling systemen een belangrijke rol spelen. Voorbeelden hiervan zijn kruispunten in het verkeer, data verkeer in netwerken en nog veel meer.
In de eerste studies naar polling systemen, en dan in het bijzonder naar de rijlengtes, is al veel onderzoek gedaan. Echter, de onderzoeken waren dan voornamelijk gericht op het vinden van kansgenererende functies op een bekend moment, zoals bij het begin of het eind van een bediening. Pas sinds kort, in Boxma [5], is voor een specifiek aantal gevallen aangetoond dat een relatie bestaat tussen deze functies en de kansgenererende functie van de wachtrijlengtes op een willekeurig moment. Het hoofddoel van dit verslag is het aantal gevallen waarin deze relatie geldt uit te breiden.

In dit verslag zal ik in het eerste deel mijn literatuuronderzoek toelichten. Er zijn een aantal artikelen geweest die ik ter voorbereiding heb gelezen en in Hoofdstukken 2 tot en met 6 zal ik samenvattingen geven van de artikelen [3, 2, 7, 9, 5], in deze volgorde.
In het tweede deel zal ik mijn eigen onderzoek verslaan. Ik begin met een algemene modelbeschrijving die ik in het verdere verslag grotendeels aanhoudt. Het bewijs dat in Boxma [5] werd gegeven, was niet makkelijk te gebruiken om de relatie te veralgemeniseren. Daarom zal ik in Hoofdstuk 8 een alternatief bewijs geven hiervoor.
Vervolgens zal ik in Hoofdstukken 9 tot en met 13 een aantal gevallen geven waarvoor ik heb onderzocht of deze relatie nog steeds geldt. In chronologische volgorde zijn de onderzochte gevallen: een polling systeem met batch bediening; een polling systeem met batch aankomsten; een polling systeem

met meerdere bediendes; een polling systeem met non-preemptive prioriteit; en een polling systeem met verschillende prioriteitsniveaus.

Deel I

Literatuurstudie

Hoofdstuk 2

Samenvatting van Stochastic Performance Modelling [3]

2.1 Introductie

In de wachtrijtheorie kan gebruik gemaakt worden van verschillende soorten wachtrijsystemen. In Hoofdstuk 5 van Boxma [3] wordt het M/G/1 systeem besproken. Dit is een wachtrijsysteem met een Poisson aankomstproces, algemeen verdeelde bedieningstijden en één bediende. De aankomstintervallen en bedieningstijden zijn onderling onafhankelijk. In Boxma [3] worden verschillende prestatiematen bekeken.

2.2 Gemiddelde Waarde Aanpak

De gemiddelde wachttijd en de gemiddelde wachtrijlengte van het systeem kunnen worden bekeken met behulp van de Gemiddelde Waarde Aanpak. Als we hierbij gebruik maken van PASTA, dan krijgen we:

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[L^q]\mathbb{E}[B] + \rho\mathbb{E}[R]. \tag{2.1}$$

Hierin is W een stochast die de wachttijd aangeeft, L^q is een stochast die het aantal klanten in de rij aangeeft, B een stochast die de bedieningstijd aangeeft, λ de aankomstintensiteit, $\rho := \lambda\mathbb{E}[B]$ is de intensiteit van het verkeer en R is een stochast die aangeeft hoeveel tijd de huidige bediening nog bezig is. Als we dan vervolgens Little's Law toepassen op de rij, dan krijgen we:

$$\mathbb{E}[L^q] = \lambda\mathbb{E}[W]. \tag{2.2}$$

Als we deze relaties combineren dan krijgen we:

$$\mathbb{E}[W] = \frac{\rho\mathbb{E}[R]}{1-\rho}. \tag{2.3}$$

In Boxma [3] wordt dan ook nog aangetoond dat $\mathbb{E}[R] = \frac{\mathbb{E}[B^2]}{2\mathbb{E}[B]}$.

2.3 'Busy Period'

De 'Busy Period' is de tijd die de server ook daadwerkelijk onafgebroken bezig is. Dit is net als de gemiddelde wachttijd een goede prestatiemaat. In het vervolg zullen we deze stochast met P aanduiden. In Boxma [3] wordt het volgende aangetoond:

$$\mathbb{E}[P] = \frac{\mathbb{E}[B]}{1-\rho}. \tag{2.4}$$

Dit gebeurt op twee verschillende manieren. De eerste methode maakt er gebruik van dat de server een fractie ρ van de tijd actief is en maakt vervolgens gebruik van het feit dat de tussenaankomsttijden geheugenloos zijn. De tweede methode zegt dat de 'Busy Period' bestaat uit de eerste bediening plus het werk dat in die periode binnenkomt. Vervolgens merkt men op dat de laatste van de twee termen verwachting $\rho\mathbb{E}[P]$ heeft, waardoor men op Formule (2.4) uitkomt.

2.4 De Wachtrij Verdeling

Laat $X_{a,n}$ het aantal klanten zijn dat de n^{e} gearriveerde klant ziet en $X_{d,n}$ het aantal klanten dat de n^{e} vertrekkende klant achter zich laat. $X(t)$ is het aantal klanten dat in het systeem zit op tijdstip t. Vervolgens hebben X_a, X_d en X de bijbehorende evenwichtsverdelingen. We kunnen dan de volgende vergelijking opstellen:

$$X_{d,n+1} = \begin{cases} X_{d,n} - 1 + A_{n+1}, & \text{als } X_{d,n} > 0 \\ A_{n+1}, & \text{als } X_{d,n} = 0 \end{cases}. \tag{2.5}$$

Hierin is A_n het aantal arriverende klanten tijdens de bediening van klant n. Aangezien de waardes alleen afhangen van de vorige waarde, kan men zeggen dat dit een Markovketen is. De transitiekansen zijn dan als volgt:

$$p_{0j} = \mathbb{P}(A_n = j) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}b(t)dt. \tag{2.6}$$

Hierbij gaan we ervan uit dat b(t), de dichtheid van de bedieningstijd, bestaat. Voor $i = 1, 2, ...$ en $j = 0, 1, ..., i-2$ geldt dat $p_{ij} = 0$ en voor $i = 1, 2, ...$ en $j = i-1, i, ...$ geldt dat:

$$p_{ij} = \mathbb{P}(A_n = j - i + 1) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} b(t) dt. \tag{2.7}$$

Gewapend met deze kennis over de overgangskansen van de Markovketen $\{X_{d,n}, n = 1, 2, ...\}$ kan de evenwichtsverdeling ervan worden gevonden. Er geldt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_d = j) z^j = \frac{(1-\rho)(1-z)A(z)}{A(z) - z}, \tag{2.8}$$

met $A(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n = j) z^j$.

Hoofdstuk 3

Samenvatting Polling Systems [2]

Een polling systeem is een wachtrijsysteem bestaande uit een aantal wachtrijen en doorgaans één server, met de eigenschap dat de server successievelijk alle wachtrijen in een bepaalde volgorde bedient. In Borst [2] wordt verteld wat de belangrijkste exacte resultaten zijn voor polling systemen; hij geeft daarbij speciale pseudo-behoudswetten voor de wachttijd- en wachtrijverdelingen. Er zijn verschillende soorten strategieën die een polling systeem definiëren. De meest belangrijke zijn als volgt:

1. routering strategie: in welke volgorde bezoekt S de verschillende wachtrijen?

2. bedieningsstrategie: hoeveel klanten moet S bij een rij bedienen?

3. bedieningsvolgorde: in welke volgorde bedient S bij een rij de klanten?

In het algemeen geldt ook de volgende stabiliteitsconditie: $\rho + \max_{i=1,..,n} \lambda_i R/\gamma_i < 1$. Hierin geldt dat R de gemiddelde totale omschakeltijd is in één cycle, λ_i de aankomstintensiteit van klanten bij rij Q_i, $\rho := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{E}B_i$, met B_i de stochastische bedieningstijd bij rij $i, i = 1, ..., N$ en γ_i het quotiënt van het aantal bezoeken van de bediende aan Q_i en het aantal klanten dat gemiddeld wordt bediend per cyclus. Voor het geval van gated en van uitputtende bediening hebben we de zwakkere conditie $\rho < 1$ als voldoende conditie.

3.1 Pseudo-Behoudswetten

Er is een prominente rol weggelegd voor pseudo-behoudenswetten voor de wachttijd. Een pseudo-behoudswet is een uitdrukking in de vorm $\sum_{i=1}^{n} \rho_i \mathbb{E} W_i$ van gemiddelde wachttijden bij de rijen $i = 1, ..., n$, met W_i de wachttijd bij rij $i = 1, ..., N$. Vaak is het namelijk lastig om te bepalen wat de individuele gemiddelde wachttijden zijn, maar is het makkelijk af te leiden wat deze gewogen som is. Het belangrijkste hierin is het gebruik van werk decompositie, conservatie en wachtrij decompositie. In het vervolg gaan we ervan uit dat we een systeem hebben met een enkele rij en één server, met tussendoor perioden waarin de server niets doet. Deze perioden komen overeen met de omschakelmomenten van het polling systeem. Als we gebruik maken van concepten uit de theorie van vertakkingsprocessen, dan krijgen we onder milde aannames:

$$N \stackrel{d}{=} N_{M/G/1} + N_I. \tag{3.1}$$

Hierin staat N voor de lengte van de rij op een willekeurig moment, $N_{M/G/1}$ voor de wachtrijlengte op een willekeurig moment in het corresponderende $M/G/1$ systeem, N_I voor de wachtrijlengte op een willekeurig moment in een interval waarin de bediende niet actief is. We nemen verder aan dat $N_{begin}^{(k)}$ en $N_{end}^{(k)}$ de rijlengte is aan het begin en eind van het k^e interval, waarin de bediende niet actief is. Zonder index (k) gaat het om dezelfde verdeling, maar dan in de evenwichtstoestand. We krijgen dan de volgende formule:

$$\mathbb{E}(z^{N_I}) = \frac{\mathbb{E}(z^{N_{begin}}) - \mathbb{E}(z^{N_{end}})}{(1-z)[\mathbb{E}N_{end} - \mathbb{E}N_{begin}]}. \tag{3.2}$$

Deze formule geldt niet in het algemeen voor het polling systeem, maar het geldt alleen voor de rijen in isolatie. Dit komt doordat de bedieningstijden onafhankelijk moeten zijn van de bedieningsvolgorde. We kunnen ook de volgende **werk** decompositie krijgen:

$$V \stackrel{d}{=} V_{M/G/1} + V_I. \tag{3.3}$$

Hier hebben de indices dezelfde betekenis als hiervoor en is V de hoeveelheid werk op een willekeurig moment. Als we hiervan de verwachtingen nemen en de Brumelle en Pollaczek-Khintchine formules toepassen, krijgen we:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i \mathbb{E} W_i = \rho \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^{(2)}}{2(1-\rho)} + \mathbb{E} V_I, \tag{3.4}$$

met $\rho_i := \lambda_i \mathbb{E} B_i$ en $b_i^{(2)}$ het tweede moment van B_i. Voor strikt cyclische polling hebben Boxma & Groenendijk [4] een uitdrukking voor $\mathbb{E} V_I$ afgeleid.

Als we dit in bovenstaande formule substitueren, dan krijgen we:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i \mathbb{E} W_i = \rho \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^{(2)}}{2(1-\rho)} + \rho \frac{s^{(2)}}{2s} + \frac{s}{2(1-\rho)}[\rho^2 - \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2] + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E} Z_{ii}. \quad (3.5)$$

Hier staat Z_{ii} voor de hoeveelheid werk die wordt achtergelaten bij rij Q_i na een bezoek beëindiging en $s^{(2)}$ voor het tweede moment van S, de totale omschakeltijd in één cyclus. Alleen $\mathbb{E} Z_{ii}$ hangt af van de bedieningsstrategie.

Hoofdstuk 4

Samenvatting van Eisenberg [7]

Allereerst zullen we een aantal verdelingen definiëren. Met $\mathbf{N}$ noteren we een stochastische variabele die het aantal klanten in de rijen $Q_1, ..., Q_n$ representeert. We hebben dan de volgende stochasten:
$L_i(t, N)$:= aantal bedieningsaanvangen in Q_i in $(0, t)$ met $\mathbf{N} = N$
$M_i(t, n)$:= aantal bedieningsbeëindigingen in Q_i in $(0, t)$ met $\mathbf{N} = N$
$F_i(t, n)$:= aantal bezoeksaanvangen in Q_i in $(0, t)$ met $\mathbf{N} = N$
$G_i(t, n)$:= aantal bezoeksbeëindigingen in Q_i in $(0, t)$ met $\mathbf{N} = N$
Eisenberg maakt nu gebruik van de volgende observatie: als een bezoek begint of bediening eindigt, dan eindigt gelijk een bezoek of begint een bediening. Hieruit volgt:

$$F_i(t, N) + M_i(t, n) = L_i(t, n) + G_i(t, n). \tag{4.1}$$

We hebben de volgende evenwichtskansen:
$L_i(N) = \mathbb{P}(\mathbf{N} = N,\ S \text{ is bij } Q_i \mid \text{bedieningsaanvang})$
$M_i(N) = \mathbb{P}(\mathbf{N} = N,\ S \text{ is bij } Q_i \mid \text{bedieningsbeëindiging})$
$F_i(N) = \mathbb{P}(\mathbf{N} = N \mid \text{bezoek aanvang in } Q_i)$
$G_i(N) = \mathbb{P}(\mathbf{N} = N \mid \text{bezoek beëindiging in } Q_i)$
Als $t \to \infty$, dan kunnen deze vier evenwichtskansen aan elkaar worden gerelateerd door de volgende vergelijking:

$$\gamma_i F(N) + M_i(N) = L_i(N) + \gamma_i G_i(N). \tag{4.2}$$

Hierin is γ_i het quotient van het aantal bezoeken van de bediende aan Q_i en het aantal klanten dat gemiddeld wordt bediend per cyclus. Per cyclus wordt Q_i éénmaal bezocht ($i = 1, ..., n$) en worden gemiddeld $\lambda \mathbb{E} C$ klanten bediend. Hieruit volgt dat γ_i onafhankelijk is van i en dat de γ_i dus allemaal aan elkaar gelijk zijn. Derhalve geldt $\gamma := \gamma_i = \frac{1}{\lambda \mathbb{E} C}, i = 1, ..., n$, met $\lambda := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$. We kunnen vervolgens (4.2) omschrijven naar kansgenererende functies:

$$\gamma F_i(z) + M_i(z) = L_i(z) + \gamma G_i(z), \tag{4.3}$$

met $z = (z_1, ..., z_N)$. Eisenberg merkt dan vervolgens op dat de volgende relatie bestaat:

$$M_i(z) = L_i(z)\beta_i(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(1 - z_j))/z_i. \tag{4.4}$$

Dan volgt uit (4.3) en (4.4) dat:

$$M_i(z) = \frac{\gamma\beta_i(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(1 - z_j))}{z_i - \beta_i(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(1 - z_j))}[F_i(z) - G_i(z)]. \tag{4.5}$$

Vervolgens nemen we $z = (1, ..., 1, y, 1, ..., 1)$, met y op plek i. Als we dan $M_i(z)$ delen door de kans λ_i/λ dat een willekeurige bedieningsbeëindiging in Q_i is, dan krijgen we de kansgenererende functie in Q_i bij een directe bedieningsbeëindiging in Q_i. Een standaard op en neer cross-argument, gecombineerd met PASTA, laat zien dat de wachtrijlengte verdeling in Q_i gelijk is bij de bedieningsbeëindiging, aankomsten van klanten en in evenwichtstoestand. Met $\mathbf{N}_i$ de lengte van de wachtrij in Q_i in evenwichtstoestand en met X_i en Y_i de rijlengtes in Q_i in evenwichtstoestand bij respectievelijk het begin en het eind van een bezoek aan die rij, krijgen we voor $|y| \leq 1$:

$$\mathbb{E}(y^{\mathbf{N}_i}) = \frac{\lambda}{\lambda_i}\frac{\gamma\beta_i(\lambda_i(1 - y))}{y - \beta_i(\lambda_i(1 - y))}[\mathbb{E}(y^{X_i}) - \mathbb{E}(y^{Y_i})]. \tag{4.6}$$

Hierbij dient opgemerkt te worden dat $\frac{1}{\gamma} = \lambda\mathbb{E}(C)$, waarbij $\mathbb{E}(C)$ de gemiddelde tijd is die een server doet over één cyclus. We kunnen nu (4.7) opschrijven, aangezien S een gemiddelde tijd van $\rho_i\mathbb{E}C$ in Q_i verblijft.

$$\mathbb{E}X_i - \mathbb{E}Y_i = \lambda_i(1 - \rho_i)\mathbb{E}C = \frac{\lambda_i(1 - \rho_i)}{\lambda\gamma}. \tag{4.7}$$

Uit (4.6) en (4.7) volgt dan:

$$\mathbb{E}(y^{N_i}) = \frac{(1 - \rho_i)(1 - y)\beta_i(\lambda_i(1 - y))}{\beta_i(\lambda_i(1 - y)) - y}\frac{\mathbb{E}(y^{Y_i}) - \mathbb{E}(y^{X_i})}{(1 - y)(\mathbb{E}X_i - \mathbb{E}Y_i)}. \tag{4.8}$$

De eerste breuk hierin is de kansgenererende functie van wachtrijlengte verdeling, in een bijbehorende geïsoleerde $M/G/1$ rij van Q_i. Hierin is de aankomst intensiteit gelijk aan λ_i en heeft de bedieningstijd verdeling Laplace-Stieltjes transformatie $\beta_i(\cdot)$. Voor de tweede term merken we op dat Y_i ook gelijk is aan de lengte van de wachtrij aan het begin van een intervisit periode en dat X_i de lengte van de wachtrij is aan het eind van zo'n periode. Als we dan de stochast $N_{i|I}$ introduceren, met als verdeling de wachtrijlengte verdeling op een willekeurig moment in een periode tussen twee bezoeken, dan krijgen we tezamen met Lemma 2.2.1 uit Borst [2]:

$$\mathbb{E}(y^{N_{i|I}}) = \frac{\mathbb{E}(y^{Y_i}) - \mathbb{E}(y^{X_i})}{(1-y)(\mathbb{E}X_i - \mathbb{E}Y_i)}. \tag{4.9}$$

Vervolgens geven (4.8) en (4.9) de Fuhrman-Cooper wachtrij decompositie:

$$\mathbb{E}(y^{N_i}) = \mathbb{E}(y^{N_{i|M/G/1}})\mathbb{E}(y^{N_{i|I}}). \tag{4.10}$$

Merk op dat (4.10 overeenkomt met Formule (3.1). De Laplace-Stieltjes transformatie van de wachttijd in Q_i volgt uit (4.10), als we aannemen dat we een FCFS bedieningsstrategie hanteren. We definiëren de volgende stochasten:
W_i := de wachttijd van een willekeurige klant in rij i,
$W_{i|M/G/1}$:= de wachttijd van een type i klant in de bijbehorende geïsoleerde $M/G/1$ rij van Q_i. Als we de verdelingsvorm van Little's Law gebruiken, dan krijgen we:

$$\mathbb{E}(e^{-\omega W_i}) = \mathbb{E}(e^{-\omega W_{i|M/G/1}})\mathbb{E}((1-\omega/\lambda_i)^{N_{i|I}}). \tag{4.11}$$

Hoofdstuk 5

Samenvatting van Takine et al. [9]

5.1 Modelbeschrijving en Notatie

We nemen aan dat we een wachtrijsysteem met één server hebben met K verschillende bezoekersklassen. De bedieningsvolgorde die we gebruiken is FIFO. Klanten van klasse i komen aan volgens een Poisson Proces met intensiteit $\lambda_i, i \in \{1, ..., K\}$. Ze hebben allemaal een stochastische bedieningstijd B_i met verdeling $B_i(\cdot)$ en Laplace-Stieltjes Transformatie $\beta_i(\cdot)$. De totale aankomstintensiteit is gelijk aan $\lambda := \sum_{i=1}^{K} \lambda_i$. De werkdrukte wordt gedefinieerd als $\rho_i = \lambda_i \mathbb{E}[B_i]$ en de totale werkdrukte $\rho = \sum_{i=1}^{K} \rho_i$. De buffer heeft verder een oneindige lengte. Als we aannemen dat $\rho < 1$, dan bestaan de limietverdelingen van prestatiematen als wachtrijlengte en wachttijd. Vanwege de Poisson aankomsten, hebben alle klassen een gelijke wachttijd verdeling, $W(\cdot)$ met wachttijd W. We hebben de stochastische vector $(X_1, ..., X_K)$ die aangeeft hoeveel klanten er aan het wachten zijn in de evenwichtstoestand. De stochastische vector $(Y_1, ..., Y_K)$ geeft aan hoeveel klanten er in het systeem zijn in de evenwichtstoestand. Merk op dat deze X_i en Y_i anders zijn gedefinieerd dan in Hoofdstuk 4.

5.2 Wachtrijlengte Verdeling

We definiëren allereerst $L := \sum_{i=1}^{K} \lambda_i(1 - z_i)$ met $|z_i| \leq 1, i \in \{1, ..., K\}$. De volgende formule wordt dan bewezen:

$$\mathbb{E}[z_1^{Y_1} ... z_K^{Y_K}] = (1 - \rho) \frac{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i (1 - z_i) \beta_i\{L\}}{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i [\beta_i\{L\} - z_i]}. \tag{5.1}$$

Er worden twee verschillende bewijzen gegeven voor (5.1). Bij beide bewijzen gebruiken we dat als het totaal aantal klanten $X = n$, dan is $(X_1, ..., X_K)$ multinomiaal verdeeld met parameters $(n, \frac{\lambda_1}{\lambda}, ..., \frac{\lambda_K}{\lambda})$. We krijgen dan $\mathbb{E}[z_1^{X_1}...z_K^{X_K}] = \mathbb{E}[(1-\frac{L}{\lambda})^X]$. Als we gebruik maken van de verdelingsvorm van Little's Law en de Pollaczek-Khintchine formule voor de Laplace-Stieltjes Tranformatie van de wachttijd, krijgen we:

$$\mathbb{E}[z_1^{X_1}...z_K^{X_K}] = \mathbb{E}[e^{-LW}] = (1-\rho)\frac{L}{\sum_{i=1}^K \lambda_i[\beta(L) - z_i]} \tag{5.2}$$

Bewijs 1. Het eerste bewijs is gebaseerd op de tijd die een klant die in bediening is al bezig is. We noteren hierbij $W_{A,i}$ als de wachttijd van type i klanten in de evenwichtstoestand. We kunnen dan hetzelfde argument gebruiken als in (5.2), zodat we het volgende resultaat krijgen:

$$\mathbb{E}[z_1^{Y_1}...z_K^{X_K}] = (1-\rho) + \sum_{i=1}^K \rho_i z_i \mathbb{E}[e^{-LW_{A,i}}]. \tag{5.3}$$

We merken dan op dat $W_{A,i}$ gelijk is aan de som van de wachttijd in de evenwichtstoestand en het gepasseerde deel van de bediening van een type i klant.

$$\mathbb{E}[z_1^{Y_1}...z_K^{Y_K}] = (1-\rho) + \sum_{i=1}^K \rho_i z_i \mathbb{E}[e^{-LW}]\frac{1-\beta_i(L)}{L\mathbb{E}B_i}. \tag{5.4}$$

Als we dan een substitutie doen van (5.2) in (5.4), dan krijgen we hetgeen bewezen dient te worden.

■

Bewijs 2. Het tweede bewijs is gebaseerd op de relatie tussen lengtes van wachtrijen en aantal wachtende klanten op verschillende momenten. We kunnen (5.1) herschrijven met behulp van (5.2):

$$\mathbb{E}[z_1^{Y_1}...z_K^{Y_K}] = \mathbb{E}[z_1^{X_1}...z_K^{X_K}]\frac{\sum_{i=1}^K \lambda_i(1-z_i)\beta_i(L)}{L}. \tag{5.5}$$

In het vervolg van dit stuk bedoelen we met A de gebeurtenis dat een klant aankomt, met D de gebeurtenis dat een klant vertrekt en met ST de gebeurtenis dat een bediening net begonnen is. Als dit specifiek voor Q_i is dan wordt dat aangegeven met de desbetreffende index. Een schets van het bewijs is als volgt:

$$\mathbb{E}[z_1^{X_1}...z_K^{X_K}] = \mathbb{E}[z_1^{X_1}...z_K^{X_K} \mid A] = \mathbb{E}[z_1^{X_k}...z_K^{X_K} \mid D] =$$

$$\mathbb{E}[z_1^{X_1}...z_K^{X_K} \mid ST] = \mathbb{E}[z_1^{X_1}...z_K^{X_K} \mid ST_i]. \tag{5.6}$$

De eerste stap volgt uit PASTA. Voor de tweede stap wordt eerst gekeken naar de som van de rijlengtes. Hierop wordt Burke's-level crossing argument gebruikt. Als dan vervolgens het multinomiale argument wordt gebruikt op de vector, kunnen we deze stap nemen. De derde stap volgt uit het feit dat een vertrek samenvalt met een bedieningsaanvang. De laatste stap volgt omdat alle rijen dezelfde wachttijd verdeling hebben en alle wachtende klanten na het begin van een bediening van rij i, zijn aangekomen tijdens de wachttijd van een klasse i klant. We merken tot slot nog op dat $\mathbb{E}[z_1^{Y_1}...z_K^{Y_K} \mid D_i] = \beta_i(L)\mathbb{E}[z_1^{X_1}...z_K^{X_K} \mid ST_i]$. Als we dan beide kanten met L vermenigvuldigen en PASTA gebruiken, hoeft alleen nog het volgende bewezen te worden:

$$\sum_{i=1}^{K} \lambda_i(1-z_i)\mathbb{E}[z_1^{Y_1}...z_K^{X_K} \mid A_i] = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i(1-z_i)\mathbb{E}[z_1^{Y_1}...z_K^{X_K} \mid D_i]. \tag{5.7}$$

Als we de termen $j_m < 0$ negeren, dan volgt uit (5.7):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \mathbb{P}(Y_1 = j_1, ..., Y_i = j_i, ..., Y_K = j_K \mid A_i) - \\
&\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \mathbb{P}(Y_1 = j_1, ..., Y_i = j_i - 1, ..., Y_K = j_K \mid A_i) = \\
&\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \mathbb{P}(Y_1 = j_1, ..., Y_i = j_i, ..., Y_K = j_K \mid D_i) - \\
&\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \mathbb{P}(Y_1 = j_1, ..., Y_i = j_i - 1, ..., Y_K = j_K \mid D_i).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

■

Deze balansvergelijking volgt uit de balans tussen het aantal vertrekken en aankomsten die de toestand $(j_1, ..., j_N)$ ingaan en verlaten.

Hoofdstuk 6

Samenvatting van Kosinski et al. [5]

Het artikel [5] van Kosinski et al. is gewijd aan rijlengte- en wachttijdverdelingen in cyclische polling systemen. Het voornaamste resultaat van [5] is een exacte uitdrukking van de gezamenlijke werklastverdeling op een willekeurig tijdstip in de evenwichtstoestand. Zij $\zeta(z)$ de kansgenererende functie van die verdeling met $z = (z_1, ..., z_N)$. Volgens Stelling 1 van [5] geldt:

$$\zeta(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i) M_i(z)}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i)}. \tag{6.1}$$

We beperken ons in deze paragraaf tot het geval dat de switchovertijden niet nul zijn. Stelling 2.1 uit [5] blijkt ook te gelden als de switchover tijden wel gelijk aan nul zijn. Allereerst worden enige vergelijkingen afgeleid die nodig zijn om (6.1) te bewijzen. Hierbij gebruiken we allereerst Formule (4.4). We definiëren $\Sigma(z) := L = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i)$ en $\tilde{B}_i$ als de LST van de bedieningstijd bij rij $i, i = 1, ..., n$. We kunnen dan aantonen dat:

$$M_i(z) = L_i(z) \frac{\tilde{B}_i(z)}{z_i}. \tag{6.2}$$

Uit (4.4) en (6.2) volgt:

$$L_i(z) = \frac{\gamma_i z_i}{z_i - \tilde{B}_i(\Sigma(z))} (F_i(z) - G_i(z)). \tag{6.3}$$

We kunnen ook nog F_{i+1} en G_i aan elkaar relateren. Voor het geval met en zonder omschakeltijd krijgen we respectievelijk:

$$F_{i+1}(z) = G_i(z) \tilde{S}_i(\Sigma(z)), \; i = 1, ..., N, \tag{6.4}$$

$$F_{i+1}(z) = G_i(z),\ i = 1, ..., N. \tag{6.5}$$

Hierin is $\tilde{S}_i$ de LST van de verdeling van de omschakeltijd, $S_i(\cdot)$. Wanneer het systeem leeg is bij het begin van een bezoek aan Q_1, dan is het volgende bezoek aan Q_1 niet voordat een klant gearriveerd is. Daarom geldt het volgende:

$$F_1(z) = G_N(z) - F_1(0)(1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{\lambda} z_i) = G_N(z) - \frac{F_1(0)}{\lambda}\Sigma(z). \tag{6.6}$$

Stelling 1 uit [5] zegt dat als we een polling system hebben zoals omschreven is in Sectie 2.1 van [5] en $\zeta(z)$ de kansgenererende functie is van de samengestelde rijlengte verdeling op een willekeurig moment in de evenwichtstoestand, dan geldt:

$$\zeta(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i) M_i(z)}{\Sigma(z)}. \tag{6.7}$$

Het bewijs hiervan gaat als volgt. We nemen $X_i(\cdot)$ en $Y_i(\cdot)$ de respectievelijke kansgenererende functies van de samengestelde rijlengte verdeling gedurende een bezoek en een switchover periode tussen Q_i en Q_{i+1}. Met de stochastische middelwaarde stelling krijgen we:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\mathbb{E}C} \sum_{i=1}^{N} (\frac{b_i}{\gamma_i} X_i(z) + s_i Y_i(z)), \tag{6.8}$$

met $b_i := \mathbb{E}B_i$ en $s_i := \mathbb{E}S_i$. Verder geldt voor elke $i, i = 1, ..., N$:

$$X_i(z) = L_i(z) B_i^{past}(\Sigma(z)) = L_i(z) \frac{1 - \tilde{B}_i(\Sigma(z))}{\Sigma(z) b_i} = \frac{\gamma_i}{b_i} \frac{z_i (F_i(z) - G_i(z))}{z_i - \tilde{B}_i(\Sigma(z))} \frac{1 - \tilde{B}_i(\Sigma(z))}{\Sigma(z)}. \tag{6.9}$$

$$Y_i(z) = G_i(z) \tilde{S}_i^{past}(\Sigma(z)) = G_i(z) \frac{1 - \tilde{S}_i(\Sigma(z))}{\Sigma(z) s_i} = \frac{1}{s_i} \frac{G_i(z) - F_{i+1}(z)}{\Sigma(z)}. \tag{6.10}$$

Het superscript *past* geeft aan dat het gaat om het gedeelte dat al afgerond is. Bij (6.9) en (6.10) gebruiken we respectievelijk (6.3) en (6.4). Als we vervolgens (6.8) tot en met (6.10) combineren, krijgen we:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\mathbb{E}C} \sum_{i=1}^{N} (\frac{F_i(z) - G_i(z)}{\Sigma(z)} \frac{z_i (1 - \tilde{B}_i(\Sigma(z)))}{z_i - \tilde{B}_i(\Sigma(z))} + \frac{G_i(z) - F_{i+1}(z)}{\Sigma(z)}). \tag{6.11}$$

We kunnen dan (6.11) vervolgens omschrijven tot (6.7) met behulp van (6.2) en (6.3) en met de observatie dat $\sum_{i=1}^{N} \frac{G_i(z) - F_{i+1}(z)}{\Sigma(z)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{G_i(z) - F_i(z)}{\Sigma(z)}$.

Deel II

Eigen Onderzoek

Hoofdstuk 7

Modelbeschrijving

In het vervolg van dit verslag zullen we uitgaan van de volgende modelbeschrijving en notatie:

We gaan ervan uit dat we een polling system hebben met 1 server en N rijen. Deze rijen worden aangeduid met Q_i, met $i = 1, ...N$. We nemen aan dat de aankomsten bij de verschillende rijen onafhankelijke Poisson Processen zijn met parameter $\lambda_i, i = 1, ..., n$. We geven met $B_i(\cdot)$ de verdeling van de bedieningstijden bij rij i aan met gemiddelde b_i en LST $\beta_i(\cdot)$. Verder geldt dat $\zeta(\cdot)$ de kansgenererende functie geeft van de samengestelde rijlengte verdeling. Met N_i geven we het aantal klanten in rij i aan. $\rho := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i b_i$ en C is de tijd die de server doet over één cycle. Met A_i en D_i wordt respectievelijk aangegeven dat er net een aankomst of vertrek heeft plaatsgevonden bij $Q_i, i = 1, ..., N$. Met $F_i(\cdot)$ en $G_i(\cdot)$ worden de kansgenererende functies aangeduid van de samengestelde wachrijlengte verdeling respectievelijk bij het begin van een bezoek en het eind van een bezoek. Met $M_i(\cdot)$ wordt de kansgenererende functies aangeduid van de samengestelde wachrijlengte verdeling bij een bedieningsbeëindiging. Verder nemen we aan dat de gebruikelijke onafhankelijkheidsaannames voor het inputproces gelden.

Hoofdstuk 8

Alternatief Bewijs van Stelling 1 uit [5]

In Boxma [5] wordt de volgende stelling gegeven:

Stelling 1: Voor een algemeen polling systeem zoals gegeven in Sectie 2 van [5], geldt:

$$\zeta(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i) M_i(z)}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i)}. \tag{8.1}$$

Bewijs: Allereerst merken we op dat de een soortgelijke balansvergelijking als Formule (5.8) geldt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | A_i) + \\
&\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | D_i) = \\
&\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i + 1, ..., N_N = j_N | D_i) + \\
&\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - 1, ..., N_N = j_N | A_i).
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Hierin staan aan de linkerkant de mogelijkheden met de daarbij behorende kansen dat het systeem de toestand $(j_1, ..., j_i, ..., j_N)$ verlaat. Dit kan door een aankomst in Q_i of dat net na een vertrek in $Q_i, i = 1, ..., N$ de rij in toestand $(j_1, ..., j_i - 1, ..., j_N)$ wordt achtergelaten. Deze aankomst of dit vertrek gebeurt met intensiteit λ_i. Men zou verwachten dat bij de vertrekken dit met intensiteit $1/\mathbb{E}B_i$ zou gebeuren. Echter, we kijken in $\mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N|D_i)$ niet naar de fractie van de tijd, maar naar de fractie van het aantal aankomsten of vertrekken. Er zijn gemiddeld λ_i aankomsten of vertrekken per tijdseenheid. Aan de rechterkant van het gelijkteken staan de mogelijkheden om de toestand $(j_1, ..., j_i, ..., j_N)$ in te gaan. Dit kan door een aankomst in rij Q_i in de toestand $(j_1, ..., j_i - 1, ..., j_N)$ of een vertrek uit rij Q_i in de toestand $(j_1, ..., j_i + 1, ..., j_N)$, ook met intensiteit λ_i. Als we dit herschrijven dan krijgen we:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N|A_i) - \\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - 1, ..., N_N = j_N|A_i) = \\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N|D_i) - \\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - 1, ..., N_N = j_N|D_i).\end{aligned} \tag{8.3}$$

Vanwege PASTA kunnen we aan de linkerkant de voorwaardelijkheid van gebeurtenis A_i weghalen. Als we dan de kansgenererende functies nemen, dan krijgen we:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \zeta(z) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i z_i \zeta(z) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i M_i(z) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i z_i M_i(z).$$

Als we de sommen dan bij elkaar voegen en beide kanten delen door L, dan krijgen we:

$$\zeta(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i) M_i(z)}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i)}.$$

$\blacksquare$

Hoofdstuk 9

Batch Bediening

In ons polling systeem van de voorgaande hoofdstukken hebben we telkens aangenomen dat slechts één klant tegelijkertijd bij een rij wordt geholpen. Er zijn echter ook polling modellen waarin de klanten in één batch tegelijk worden bediend. In Van der Wal [6] worden deze modellen bekeken. In het bijzonder wordt er gekeken naar de gevallen van polling strategieën met (lokale en globale) gating en uitputtende bediening. Ik ga hier verder kijken of in deze gevallen nog steeds Formule (8.1) geldt. Hierbij dient opgemerkt te worden dat we aannemen dat B_i niet afhankelijk is van de batchgrootte. Allereerst zal ik kijken naar het geval dat de grootte van de batch deterministisch is. In de praktijk zal dit echter niet vaak voorkomen. Daarom zal ik daarna ook naar het geval kijken dat de grootte van de batch stochastisch is.

9.1 Deterministisch Aantal Bediende Klanten

We nemen aan dat in een rij k klanten tegelijk in één batch worden bediend. In dit geval houdt dat in dat we de volgende balansvergelijkingen krijgen:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | A_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{k} \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - k, ..., N_N = j_N | D_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{k} \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | D_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - 1, ..., N_N = j_N | A_i). \tag{9.1}$$

We hebben nu dat de fractie van de vertrekken niet meer gelijk is aan λ_i, maar aan $\frac{\lambda_i}{k}$. Als we dit op dezelfde manier herschrijven als in Hoofdstuk 8, dan krijgen we de volgende balansvergelijkingen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | A_i) - \\
&\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{k} \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - 1, ..., N_N = j_N | A_i) = \\
&\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{k} \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | D_i) - \\
&\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - k, ..., N_N = j_N | D_i).
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Analoog aan het alternatieve bewijs van stelling 1 uit [5] kan dan worden afgeleid dat in het geval van batch bediening met een vast aantal bediende klanten we de volgende formule krijgen voor de samengestelde wachtrijverdeling:

$$\zeta(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{k}(1 - z_i^k) M_i(z)}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i)}. \tag{9.3}$$

Hoewel deze formule niet dezelfde is als in stelling 1, heeft deze wel dezelfde kenmerken en kan het ook goed toegepast worden.

9.2 Stochastisch Aantal Bediende Klanten

In de praktijk weet men vaak niet hoeveel klanten tegelijk worden bediend in een batch bediening, maar heeft deze stochastische variabele, K_i, een verdeling $K_i(\cdot)$. Hoe deze stochast is verdeeld komen we later terug. Als we weten dat K_i een verdeling heeft, dan kunnen we wederom de balansvergelijkingen opstellen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | A_i) + \\
&\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{\mathbb{E}K_i} \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - K_i, ..., N_N = j_N | D_i) =
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{\mathbb{E}K_i} \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | D_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - 1, ..., N_N = j_N | A_i). \tag{9.4}$$

We hebben nu dat de fractie van de vertrekken niet meer gemiddeld λ_i is. De verwachting is dat gemiddeld $\frac{\lambda_i}{\mathbb{E}K_i}$ vertrekken per tijdseenheid zullen zijn. Dit is echter onderwerp voor verdere studie. In het vervolg zullen we wel aannemen dat deze intensiteit $\frac{\lambda_i}{\mathbb{E}K_i}$. In deze balansvergelijkingen is het vervelend dat we niet zeker weten hoe groot K_i is. Echter, we kunnen wel gebruik maken van conditionele kansen. Hieruit volgt dat we (9.4) kunnen omschrijven tot:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | A_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k_i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\mathbb{E}K_i} \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - k_i, ..., N_N = j_N | D_i) p_{k_i,i} =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{\mathbb{E}K_i} \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | D_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - 1, ..., N_N = j_N | A_i). \tag{9.5}$$

Hierin geldt $p_{k_i,i} := \mathbb{P}(K_i = k_i)$, de kans dat k_i klanten tegelijk worden bediend in rij $Q_i, i = 1, ..., N$. Voor de bedieningsstrategieën die gegeven worden in Van der Wal [6], zijn de kansen voor $p_{k_i,i}$ makkelijk te bepalen. We kunnen de balansvergelijkingen in (9.5) weer uitdrukken in een kansgenererende functie. We krijgen dan de volgende formule voor de samengestelde wachtrijverdeling:

$$\zeta(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - p_i(z_i)) M_i(z)}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i)}, \tag{9.6}$$

met $p_(\cdot)$ de kansgenererende functie van $p_{k_i,i}$. In de volgende paragrafen zullen we aangeven wat de kansen $p_{k_i,i}$ zijn voor uitputtende bediening, lokale gating en voor globale gating. Daarnaast zullen we voor deze uitputtende bediening en lokale gating ook aangeven hoe de kansgenererende functie $M_i(z)$ kan worden bepaald.

9.2.1 Uitputtende Bediening

Bij batch bediening bedoelen we met uitputtende bediening het volgende. Als een bediende bij Q_i aankomt, dan bedient deze alle klanten die op dat moment aanwezig zijn in één batch. Als de bediende klaar is met deze batch en er zijn geen klanten meer in het systeem, dan gaat deze verder naar de volgende rij. Als er wel weer klanten in het systeem zijn bijgekomen, dan worden deze klanten opnieuw in één batch bediend. Dit gaat door totdat geen klanten meer aanwezig zijn in de rij en de bediende naar de volgende rij gaat.

We zullen nu allereerst bepalen wat de kansen $p_{k_i,i}$ zijn. Deze kans geeft aan wat de kans is dat k_i klanten tegelijk de batch ingaan. Dit betekent dat aan het begin van een bediening k_i klanten aanwezig moeten zijn in het systeem. Dit kan in het geval van uitputtende bediening op twee manieren. De eerste manier is dat de bediende net klaar is met de vorige batch bij de rij en dat weer k_i klanten in de rij zijn ($k_i \geq 1$). De kans dat dit gebeurt, is de kans dat tijdens de bediening k_i klanten zijn aangekomen. Vanwege de aanname dat het aankomstproces een Poisson proces is, weten we dat deze kans gelijk is aan $\mathbb{P}(N_i(B_i) = k_i)$ voor $k_i \geq 1$, met $N_i(B_i)$ het aantal klanten dat in rij $Q_i, i = 1, ..., N$ is aangekomen tijdens de bediening in rij Q_i.
De tweede manier waarop k_i klanten tegelijk bediend worden, is dat geen klanten aanwezig waren in het systeem op het moment dat de bediende klaar is met de bediening (deze kans is gelijk aan $\mathbb{P}(N_i(B_i) = 0)$). Vervolgens komen in de rest van de cyclus k_i klanten aan in rij Q_i. De kans dat dit gebeurt, vanwege een Poisson aankomstproces, is $\mathbb{P}(N_i(C - B_i) = k_i)$, met $N_i(C - B_i)$ het aantal klanten dat in rij $Q_i, i = 1, ..., N$ is aangekomen in de tijd dat de bediende niet in rij Q_i was. Hieruit volgt :

$$\mathbb{P}(K_i = k_i) = \mathbb{P}(N_i(B_i) = k_i)I_{\{k_i \geq 1\}} + \mathbb{P}(N_i(B_i) = 0) \times \mathbb{P}(N_i(C - B_i) = k_i). \tag{9.7}$$

Hierin is $I_{\{.\}}$ de indicatorfunctie.

Vervolgens moeten we hier de kansgenererende functie, $p_i(\cdot)$ van bepalen. We moeten hiervoor bepalen wat $\mathbb{E}z^{K_i}$ is. Als we dit uitschrijven, dan krijgen we $\sum_{k_i=0}^{\infty} z_i^{k_i}\mathbb{P}(K_i = k_i) = \sum_{k_i=0}^{\infty} z^{k_i}(\mathbb{P}(N_i(B_i) = k_i)I_{\{k_i \geq 1\}} + \mathbb{P}(N_i(B_i) = 0) \times \mathbb{P}(N_i(C - B_i) = k_i))$. We zullen nu eerst naar het eerste gedeelte, $\sum_{k_i=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_i(B_i) = k_i)I_{\{k_i \geq 1\}}z_i^{k_i}$, kijken. Dit gaan we allereerst omschrijven: $\sum_{k_i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbb{P}(N_i(b_i) = k_i)dB_i(b_i)$. Hierin kunnen we de integraal en de som omwisselen. Op die manier krijgen we: $\int_0^{\infty}(\exp(-\lambda_i b_i(1 - z_i)) - \exp(-\lambda_i b_i))dB_i(b_i)$. Hierin herkennen we twee Laplace-Stieltjes transformaties van B_i. We krijgen voor dit deel dan $\tilde{B}_i(\lambda_i(1 - z_i)) - \tilde{B}_i(\lambda_i)$.

Voor het tweede deel bepalen we allereerst $\mathbb{P}(N_i(B_i) = 0)$. Dit doen we met behulp van voorwaardelijke kansen. Hiervoor krijgen we dan $\int_0^\infty \exp(-\lambda_i b_i) dB_i(b_i) = \tilde{B}_i(\lambda_i)$. Vervolgens moeten we nog $\sum_{k_i=0}^\infty z_i^{k_i} \mathbb{P}(N_i(C - B_i) = k_i)$ bepalen. We kunnen hier geen voorwaardelijke verwachtingen nemen, omdat afhankelijkheid bestaat tussen C en B_i. Het is immers zo dat $C = \sum_{i=1}^N (B_i + S_i)$. Dit is een nog op te lossen probleem. Hierbij zou gebruik gemaakt kunnen worden van studies naar intervisit tijden. We zullen hier aannemen dat de kansgenererende functie voor de intervisit tijd wordt gegeven door $\tilde{I}_i(\cdot)$. Uit de combinatie van deze kansgenererende functies krijgen we:

$$p_i(z_i) = \tilde{B}_i(\lambda_i(1 - z_i)) - \tilde{B}_i(\lambda_i) + \tilde{B}_i(\lambda_i)\tilde{I}_i(z_i), \tag{9.8}$$

in het geval van uitputtende bediening.

In Van der Wal [6] wordt ook een methode afgeleid om $G_i(z)$ te bepalen. Ze maken hierbij gebruik van de zogenoemde "bewegingswetten" om de volgende recursie af te leiden:

$$\begin{aligned} G_{i+1}(z) = {} & G_i(z_1, ..., z_{i-1}, 1, z_{i+1}, ..., z_N)\phi_i(L_i)\tilde{S}_i(L) \\ & + G_i(z_1, ..., z_{i-1}, 0, z_{i+1}, ..., z_N)(1 - \phi_i(L_i))\tilde{S}_i(L). \end{aligned} \tag{9.9}$$

Hierin is $L_i := L - \lambda_i(1 - z_i)$ en $\phi_i(\cdot)$ de LST van een niet-nul bezoektijd aan Q_i. Vervolgens kan men met behulp van Eisenberg [7] hieruit $M_i(z)$ bepalen.

9.2.2 Lokale Gating

Lokale gating in batch bediening houdt in dat bij aankomst van de bediende bij rij $Q_i, i = 1, ..., N$ alleen de klanten worden bediend die op dat moment aanwezig zijn in de rij. Vervolgens worden deze klanten tegelijk in één batch bediend.

We zullen wederom eerst de kans $p_{k_i,i}$ bepalen. We weten dat de klanten die door de bediende worden bediend allemaal zijn aangekomen nadat de vorige keer de bediende is begonnen in die rij. Dat betekent dat klanten een volledige cyclus de tijd hebben gehad om aan te komen in deze rij. Aangezien het aankomstproces een Poisson Proces is, betekent dit dat $p_{k_i,i} = \mathbb{P}(N_i(C) = k_i)$ Vervolgens moeten we hier weer de kansgenererende functie van bepalen. Dit doen we wederom met behulp van een voorwaardelijke kans. Dan volgt: $\mathbb{E}z_i^{K_i} = \mathbb{E}[\mathbb{E}(z_i^{N_i(c)} | C \in (c, c + dc_i))]$. Als we dit uitschrijven, krijgen we:

$$p_i(z_i) = \int_0^\infty \exp(-\lambda_i(1 - z_i)c) dC(c) = \tilde{C}(\lambda_i(1 - z_i)). \tag{9.10}$$

In Van der Wal [6] wordt voor lokale gating een methode afgeleid om $G_i(z)$ te bepalen. Net als bij de uitputtende bediening, wordt er gebruik gemaakt van "bewegingswetten" om een recursie af te leiden:

$$\begin{aligned} G_{i+1}(z) = G_i(z_1, ..., z_{i-1}, 1, z_{i+1}, ..., z_n)\tilde{B}_i(L)\tilde{S}_i(L) \\ + G_i(z_1, ..., z_{i-1}, 0, z_{i+1})(1 - \tilde{B}(L))\tilde{S}_i. \end{aligned} \tag{9.11}$$

Men kan dan wederom met behulp van Eisenberg [7] bepalen wat $M_i(z)$ is.

9.2.3 Globale Gating

Globale gating in batch bediening lijkt erg veel op de lokale variant. Echter, het verschil is dat in plaats van het moment dat een server bij een rij aankomt gekeken wordt naar het aantal klanten dat in de rij staan, gebeurt dat nu op het moment dat de server aankomt bij Q_1.

Net als voor de voorgaande strategieën zullen we eerst de kans $p_{k_i,i}$ bepalen. Deze is gelijk aan de kans voor lokale gating. Dit komt, doordat de tijd die de bediende doet over één cyclus onafhankelijk is van de rij waar naar wordt gekeken. Dit betekent, dat $p_{k_i,i} = p_{k_i,j}$ voor alle $i, j = 1, ..., N$. Dit geldt in het bijzonder voor $j = 1$. Dan volgt dat voor globale gating geldt $p_{k_i,i} = \mathbb{P}(N_i(C) = k_i)$, met kansgenererende functie:

$$p_i(z_i) = \tilde{C}(\lambda_i(1 - z_i)). \tag{9.12}$$

Hoofdstuk 10

Batch Aankomsten

Naast het geval dat klanten in een batch bediend worden, kunnen klanten ook in een batch aankomen. In dit hoofdstuk gaan we kijken of Formule (8.1), of een variant hierop, nog steeds geldt.

10.1 Deterministische Aankomstgroepsgrootte

Om dit probleem goed te begrijpen, gaan we eerst kijken naar het geval dat het aantal klanten dat aankomt constant is, met constante u. We krijgen in dit geval de volgende balansvergelijkingen:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | A_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i u \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - 1, ..., N_N = j_N | D_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i u \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | D_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - u, ..., N_N = j_N | A_i). \tag{10.1}$$

We hebben hier te maken met gemiddeld $\lambda_i u$ aankomsten als we de toestand $(j_1, ..., j_N)$ willen binnengaan. Dit gebeurt alleen als de toestand waarvan we binnenkomen gelijk is aan $(j_1, ..., j_i - u, ..., j_N)$. Met behulp van bovenstaande balansvergelijkingen kunnen we dan op een soortgelijke manier als in Hoofdstuk 8 bepalen wat de kansgenererende functie is van het aantal klanten in het systeem op een willekeurig moment. Dit wordt gegeven door:

$$\zeta(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i) M_i(z)}{\sum_{i=1}^{N} u\lambda_i (1 - z_i^u)}. \tag{10.2}$$

10.2 Stochastische Aankomstgroepsgrootte

Vaak gebeurt het dat de grootte van de groep die aankomt niet constant is, maar stochastisch is. Laten we aannemen dat de grootte van de groep die aankomt in $Q_i, i = 1, ..., N$ stochast U_i heeft. Het aankomstproces dat we dan hebben, is een mixed Poisson Proces. De balansvergelijkingen die hierbij horen zijn, om dezelfde reden als in Sectie 10.1, de volgende:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | A_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{E}U_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - 1, ..., N_N = j_N | D_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{E}U_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | D_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - U_i, ..., N_N = j_N | A_i). \tag{10.3}$$

Het gemiddelde aantal aankomsten in Q_i is nu gelijk aan $\lambda_i \mathbb{E}U$. We kunnen nu niet direct hieruit de kansgenererende functie bepalen. Echter, we kunnen dat wel met behulp van conditionele kansen. We krijgen dan de volgende balansvergelijkingen:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | A_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{E}U_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i - 1, ..., N_N = j_N | D_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{E}U_i \mathbb{P}(N_1 = j_1, ..., N_i = j_i, ..., N_N = j_N | D_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{u_i=0}^{\infty}\lambda_i\mathbb{P}(N_1=j_1,...,N_i=j_i-u_i,...,N_N=j_N|A_i)q_{u_i,i}, \tag{10.4}$$

met $q_{u_i,i}=\mathbb{P}(U_i=u_i)$, de kans dat u_i klanten tegelijk aankomen bij rij Q_i. De kansgenererende functie van deze verzameling balansvergelijkingen is als volgt:

$$\zeta(z)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(1-z_i)M_i(z)}{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\frac{(1-g_i(z))}{\mathbb{E}U_i}}, \tag{10.5}$$

met $g_i(z)$ de kansgenererende functie van het aantal aankomsten in één batch in rij $Q_i, i=1,...,N$.

Zoals te zien is, zijn de formules die gevonden zijn in dit hoofdstuk niet gelijk aan Formule (8.1). Echter, we hebben wel een variant op die formule gevonden, die nog steeds goed te gebruiken is. Men weet vaak namelijk wat $g_i(z)$ is, zodat Formule (10.5) even complex is als Formule (8.1)

Hoofdstuk 11

Meerdere Bediendes

In het voorgaande hebben we telkens aangenomen dat we maar één server hebben in ons polling systeem. Maar wat nou als we meerdere servers hebben, om specifiek te zijn K? Is er dan nog steeds een simpele formule zoals hierboven te bedenken die het aantal klanten in steady-state op een willekeurig moment kan beschrijven? We onderscheiden allereerst twee gevallen: (i) de servers werken onafhankelijk van elkaar; (ii) de servers werken afhankelijk van elkaar.

11.1 Onafhankelijke Bediendes

Allereerst behandelen we het geval waarin de bediendes onafhankelijk van elkaar werken. Er zijn verschillende strategieën voor deze bediendes om te bedienen. Een keuze die bijvoorbeeld gemaakt dient te worden, is het geval dat twee bediendes bij dezelfde rij aankomen. De keuze die dan dient gemaakt te worden is, of de bediendes allebei aan dezelfde rij gaan werken, of dat één van de bediendes doorgaat naar de volgende rij. In de meeste gevallen maakt dit niet uit. Als we kijken naar de balansvergelijkingen die we hebben geformuleerd in Hoofdstuk 8, dan zien we dat deze nog steeds gelden in dit geval. De kansen gegeven een aankomst blijven hetzelfde, omdat dit onafhankelijk is van het aantal bediendes. Dit hangt alleen af van de aankomstprocessen. Deze processen blijven Poisson aankomstprocessen, waardoor er niets verandert hiervoor. Voor de kansen gegeven een vertrek moeten we stilstaan bij het feit of het mogelijk is dat in meerdere rijen tegelijk een vertrek mogelijk is. Als de bediendes een continue verdeling hebben voor het bedienen, dan is het gelijk duidelijk dat het niet mogelijk is dat er meerdere vertrekken tegelijk plaatsvinden.

Als de bediendes met een constante tijd bedienen, die niet gelijk aan elkaar hoeven te zijn, is de kans dat er tegelijk een vertrek plaatsvindt in meerdere bediendes in de meeste gevallen gelijk aan nul. Het geval waarin het mis gaat, is het geval dat de omschakeltijd constant is (deze mag gelijk zijn aan 0). Het kan dan voorkomen dat in twee rijen er precies één klant is. Twee bediendes gaan dan elk naar één van de twee klanten toe. Laten we aannemen dat deze tijden respectievelijk gelijk zijn aan c_1 en c_2. Vervolgens worden deze klanten bediend met een constante bedieningstijd, zeg k_1 en k_2. Als de constanten zo zijn dat $c_1 + k_1 = c_2 + k_2$, dan verlaten de twee klanten tegelijk het systeem. In dit geval geldt dat de balansvergelijkingen uit Hoofdstuk 8 niet meer gelden. Dit hoeft echter nog niet gelijk te betekenen dat Stelling 1 niet meer geldt. Hier zal ik in Sectie 11.3 op terugkomen.
Als de omschakeltijden een continue verdeling hebben, dan volgt dat de kans dat meerdere vertrekken tegelijk plaastvinden gelijk is aan nul. In dit geval hebben we dat de kans dat twee bediendes tegelijk beginnen aan een bediening gelijk is aan nul, vanwege de continue verdeling van de omschakeltijden. Vervolgens betekent dit, dat de kans dat twee bediendes tegelijk klaar zijn, en dus twee vertrekken tegelijk plaatsvinden, gelijk is aan nul.
In het geval van bediendes die onafhankelijk van elkaar de klanten bedienen kunnen we dus zeggen dat de balansvergelijkingen uit Hoofdstuk 8 nog steeds gelden bij meerdere bediendes. Verder in het bewijs dat hierboven is gegeven, gebruiken we niet meer hoeveel bediendes we hebben, dus kunnen we zeggen dat Stelling 1 uit [5] nog steeds geldt in dit geval.

11.2 Afhankelijke Bediendes

In het geval van bediendes die afhankelijk van elkaar werken, moeten we eerst een onderscheid van gevallen maken: (i) er zijn minstens twee bediendes die met een constante bediening de klanten bedienen; (ii) er is één of geen bediende die met een constante bediening de klanten bedient.

11.2.1 Minstens Twee Bediendes met Constante Bediening

Als er minstens twee bediendes zijn met constante bediening, dan is er niets meer te zeggen over het aantal vertrekken dat tegelijk plaats vindt. Ik zal met twee verschillende afhankelijkheden aantonen dat er gevallen zijn waarbij de balansvergelijkingen nog steeds gelden, en ook gevallen waarbij dat niet het geval is. Het volgende voorbeeld laat dit zien.

Voorbeeld
We nemen aan dat we K bediendes hebben en N rijen ($K < N$), waarbij alle bediendes bij alle rijen dezelfde constante bedieningstijd hebben en geen omschakeltijd. De K bediendes hebben de volgende afhankelijkheid: ze gaan pas naar de volgende rij als alle bediendes klaar zijn met het bedienen van de rij waarin zij zitten. Dan betekent dit dat ze tegelijkertijd beginnen aan de volgende rij. Als er in alle rijen een klant is, dan volgt dat al deze K klanten tegelijkertijd het systeem zullen verlaten. Het kan ook zijn dat één of meerdere van de rijen waar de bediendes aankomen al leeg is. In dat geval vertrekken minder dan K klanten uit het systeem. Hieruit blijkt dat de balansvergelijkingen zoals gegeven in Hoofdstuk 8 in dit geval niet gelden. In het geval dat er omschakeltijden zijn, die gelijk zijn aan elkaar kunnen ook meerdere vertrekken plaatsvinden. Als de omschakeltijden stochastisch en onafhankelijk verdeeld zijn, dan geldt dat de kans dat twee bediendes tegelijk beginnen nul is, en dus ook de kans dat twee vertrekken tegelijk plaatsvinden. In dat geval gelden de balansvergelijkingen nog steeds en ook Formule (8.1). Als de omschakeltijden allemaal ongelijk zijn, dan is de kans dat meerdere vertrekken tegelijk plaatsvinden nul, omdat alle bediendes dezelfde bedieningstijd hebben.

Met het voorgaande voorbeeld heb ik proberen aan te tonen dat veel factoren een rol spelen als meerdere bediendes bedienen met constante bediening. In dit geval kunnen we dus niet in het algemeen zeggen of Formule (8.1) geldt.

11.2.2 Hooguit Eén Bediende met Constante Bediening

Als de bediendes afhankelijk van elkaar opereren, en hooguit één bediende met een constante bediening bedient, dan geldt dat de kans dat meerdere vertrekken tegelijk plaatsvinden gelijk is aan nul. We gaan hier dan wel ervan uit dat de bediendes de klanten niet vasthouden totdat alle bedieningen klaar zijn. Als we namelijk geen bediendes hebben die een constante bedieningstijd hebben, dan is de kans dat twee bedieningen even lang duren gelijk aan nul, doordat de verdeling van de bediening continu is.

In het geval één van de bediendes constante bedieningstijden heeft, kunnen we een soortgelijk argument gebruiken. Door de continue verdeling van de overige bedieningstijden, krijgen we dat deze bediendes niet tegelijk kunnen eindigen als de bediende met constante tijd. Stel dat de bediende met een constante bedieningstijd dit doet met constante c en dat deze bediende

k tijdseenheden later is begonnen (dit mag kleiner dan nul zijn, in dat geval is deze bediening eerder begonnen). We hebben dan een kans op twee vertrekken die tegelijk plaatsvinden, als er een $i, i = 1, ..., N$ is zodanig dat $\mathbb{P}(B_i = c + k)$. Echter, wederom door de continue verdeling van B_i, is deze kans gelijk aan nul. We hebben dan dat de balansvergelijkingen als gegeven in Hoofdstuk 8 gelden, en dat Formule (8.1) daardoor geldt.

11.3 Meerdere Vertrekken

Zoals we hebben gezien, geldt dat bij sommige gevallen als we meerdere bediendes hebben, meerdere vertrekken tegelijk kunnen plaatsvinden. In dit geval geldt dat we niet meer gebruik kunnen maken van het alternatieve bewijs zoals gegeven in Hoofdstuk 8, omdat de balansvergelijkingen niet meer gelden. Dit hoeft alleen niet gelijk te betekenen dat Stelling 1 niet meer geldt. Als meerdere vertrekken tegelijk plaatsvinden, hebben we iets dat erg lijkt op het geval van batch bediening. Bij batch bediening krijgen we namelijk dat tegelijk een groep klanten het systeem verlaat. Het verschil is echter, dat we bij batch bediening weten dat dit in dezelfde rij gebeurt. Bij meerdere bediendes hoeven de vertrekken echter niet in dezelfde rij plaats te vinden. De verwachting is daarom dat Stelling 1 niet meer geldt als meerdere vertrekken tegelijk plaatsvinden.

Hoofdstuk 12

Non-Preemptive Prioriteitsmodellen

In de voorgaande hoofdstukken zijn we telkens uitgegaan van cyclische polling. Er zijn echter ook modellen, waarin met prioriteit wordt gewerkt. Een voorbeeld van een dergelijk model is een non-preemptive prioriteitsmodel.

In Lee [8] wordt gekeken naar een non-preemptive prioriteit wachtrijsysteem. Dit houdt in dat men N verschillende wachtrijen heeft met elk een eigen prioriteit. In het eerste gedeelte zullen we ervan uitgaan dat $N = 2$. Q_1 krijgt klanten binnen met hoge prioriteit en Q_2 krijgt klanten binnen met een lage prioriteit. De klanten in Q_1 worden vervolgens bediend meet een uitputten bedieningsstrategie. De klanten uit Q_2 worden bediend volgens een l-gelimiteerde strategie. Deze laatste strategie houdt dat hooguit l klanten worden bediend in rij Q_2, voordat de bediende omschakelt naar Q_1.

Allereerst zullen we kijken of de balansvergelijkingen van Hoofdstuk 8 nog steeds gelden voor een non-preemptive prioriteitsmodel. Het aankomstproces in $Q_i, i = 1, 2$ is nog steeds een Poisson Proces. De fractie van de aankomsten in het systeem is nog steeds λ_i. Hierdoor verandert niets aan de kansen dat men de toestand (j_1, j_2) binnenkomt of uitgaat, gegeven dat net een aankomst heeft plaatsgevonden. De fractie van het aantal vertrekken is nog steeds Q_i. Aangezien we een bediende hebben die slechts één klant tegelijk bedient, hebben we dat de kansen gegeven een vertrek gelijk zijn, zoals gegeven in Hoofdstuk 8. Deze argumenten gelden nog steeds voor als $N > 2$. Hieruit volgt dat voor een algemeen non-preemptive prioriteitsmodel, we nog steeds hebben dat Stelling 1 geldt.

In Lee [8] geeft men een afleiding om de kansgenererende functie te bepalen in het geval van twee rijen in evenwichtstoestand. Hij kijkt naar een discrete tijd, drie-dimensionale Markovketen. De eerste twee dimensies zijn voor het aantal klanten in rij $Q_i, i = 1, 2$, net na een vertrek van een klant. Verder is de derde dimensie een hulpstochast, die gelijk is aan het aantal vertrokken klanten uit rij twee, na de laatste omschakeling (merk op dat dit gelijk is aan nul als de bediende in rij één is). Vervolgens bepaalt hij de kansgenererende functies $M_1(z_1, z_2)$ en $M_{2,j}(z_1, z_2)$, waarin $M_{2,j}$ de kansgenererende functie is van het aantal klanten in het systeem, na vertrek van een klant in rij Q_2, gegeven dat sinds de laatste omschakeling j klanten uit rij Q_2 zijn vertrokken. Hieruit volgt uiteindelijk de volgende relaties:

$$M_1(z_1, z_2) = \frac{\tilde{B}_1(L)}{z_1}\{(1-\rho)\frac{\lambda_1}{\lambda} + M_1(z) - M_1(0, z_2)$$

$$+ \sum_{j=1}^{l-1}(M_{2,j}(z1, 0) - M_{2,j}(0, 0)) + M_{2,l}(z) - M_{2,l}(0, z_2).\}$$

$$M_{2,j}(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{\tilde{B}_2(L)}{z_2}(M_{2,j-1}(z) - M_{2,j-1}(z_1, 0)) & \text{als } 2 \geq j \geq l, \\ \\ \frac{\tilde{B}_2(L)}{z_2}((1-\rho)\frac{\lambda_2}{\lambda}z_2 + M_1(0, z_2) - \\ M_1(0, 0) + M_{2,l}(0, z_2) - p_{2,l}(0, 0)) & \text{als } j = 1. \end{cases} \tag{12.1}$$

Uiteindelijk kunnen we het samen met Stelling 1 gebruiken om $\zeta(z)$ te bepalen.

Hoofdstuk 13

Prioriteitsmodellen met Verschillende Niveaus

In het voorgaande hebben we telkens de aanname gemaakt dat de bediening in een rij FCFS is, de klant die als eerste aankomt wordt als eerste bediend. Er zijn echter ook modellen, zoals gegeven in Boon [1], die klanten bij aankomst ook een prioriteit geven. Elke rij heeft P_i prioriteiten. In Boon [1] wordt gekeken naar drie verschillende strategieën: lokale gating, uitputtende bediening en globale gating.

Allereerst kijken we of de balansvergelijkingen uit Hoofdstuk 8 nog steeds gelden. Allereerst introduceren we λ_{i,p_i}, de aankomstintensiteit voor een type i klant met prioriteit p. Duidelijk is dat $\lambda_i = \sum_{p_i}^{P_i} \lambda_{i,p_i}$. Dit verandert dat de fractie van de aankomsten en vertrekken niet meer λ_i zijn, maar λ_{i,p_i}. Verder krijgen we de volgende balansvergelijkingen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\sum_{p_i=1}^{P_i} \lambda_{i,p_i}\mathbb{P}(N_{1,1} = j_{1,1}, ..., N_{1,P_1} = j_{1,P_1}, ..., \\
&, ..., N_{N,1} = j_{N,1}, ..., N_{i,p_i} = j_{i,p_i}, ..., N_{N,P_N}|A_{i,p_i}) \\
&+\sum_{i=1}^{N}\sum_{p_i=1}^{P_i} \lambda_{i,p_i}\mathbb{P}(N_{1,1} = j_{1,1}, ..., N_{1,P_1} = j_{1,P_1}, ..., \\
&, ..., N_{N,1} = j_{N,1}, ..., N_{i,p_i} = j_{i,p_i} - 1, ..., N_{N,P_N}|D_{i,p_i}) \\
&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{p_i=1}^{P_i} \lambda_{i,p_i}\mathbb{P}(N_{1,1} = j_{1,1}, ..., N_{1,P_1} = j_{1,P_1}, ..., \\
&, ..., N_{N,1} = j_{N,1}, ..., N_{i,p_i} = j_{i,p_i}, ..., N_{N,P_N}|D_{i,p_i})
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{p_i=1}^{P_i}\lambda_{i,p_i}\mathbb{P}(N_{1,1}=j_{1,1},...,N_{1,P_1}=j_{1,P_1},...,$$

$$,...,N_{N,1}=j_{N,1},...,N_{i,p_i}=j_{i,p_i}-1,...,N_{N,P_N}|A_{i,p_i}). \tag{13.1}$$

Hierin is N_{i,p_i} het aantal klanten in rij $Q_i, i = 1,...,N$ met prioriteit $p_i = 1,...,P_i$. Als we $z = (z_{1,1},...,z_{1,P_1},...,z_{N,1},...,z_{N,P_N})$ nemen, volgt door het volgen van het alternatieve bewijs uit Hoofdstuk 8 de volgende relatie tussen de kansgenererende functies:

$$\zeta(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{p_i=1}^{P_i}\lambda_{i,p_i}(1-z_{i,p_i})M_i^{(p)}(z)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{p_i=1}^{P_i}\lambda_{i,p_i}(1-z_{i,p_i})}. \tag{13.2}$$

Hierin staat $M_i^{(p)}(z)$ voor de kansgenererende functie van de samengestelde wachtrijlengte na een vertrek van een klant in $Q_i, i = 1,...,N$ in het prioriteitsmodel met verschillende niveaus.

Vervolgens zullen we kijken naar de kansgenererende functie van het aantal klanten net na een vertrek, zoals wordt afgeleid in Boon [1]. Dit gebeurt alleen voor lokale gating en uitputtende bediening. Het blijkt dat voor beide gevallen de afleiding hetzelfde gaat.

In Boon [1] wordt de volgende formule bewezen:

$$F_i^{(p)}(z) = F_i(\frac{1}{\lambda_1}\sum_{p_1}^{P_1}\lambda_{1,p_1}z_{1,p_1},...,\frac{1}{\lambda_N}\sum_{p_N}^{P_N}\lambda_{N,p_N}z_{N,p_n}). \tag{13.3}$$

Hierin is $F_i^{(p)}(\cdot)$ de kansgenererende functie van de samengestelde wachtrijlengte verdeling na een bezoeksaanvang in rij $Q_i, i = 1,...N$ in het prioriteitsmodel met verschillende niveaus. Een schets van het bewijs gaat als volgt. Allereerst wordt de stochast X_{i,j,p_j}, het aantal klanten met prioriteit p_j in Q_j bij een bezoeksaanvang aan Q_i en $X_{i,j} := \sum_{p_j}^{P_j} X_{i,j,p_j}$. Met deze stochasten en een multinomiaal argument voor $\mathbb{P}(X_{i,j,1} = n_1,...,X_{i,j,P_j} = n_{P_j}|X_{i,j} = n)$, wordt deze formule aangetoond.
Met behulp van Eisenberg [7] kan men vervolgens $M_i^{(p)}(z)$ bepalen.

Hoofdstuk 14

Conclusie

In mijn literatuuronderzoek heb ik allereerst gekeken naar een algemeen M/G/1 systeem. Vervolgens heb ik gekeken naar een analyse van een algemeen cyclisch polling systeem in [2], waarna ik afleidingen heb gezien om op bepaalde momenten in de tijd relaties te vinden voor de wachtrijlengteverdeling [7]. Vervolgens heb ik een enkele wachtrij bekeken met FCFS prioriteit en tussentijden in Takine [9]. Gewapend met deze achtergrond, heb ik toen gekeken naar de relatie voor de verschillende kansgenererende functies zoals gegeven in Boxma [5]. Deze relatie wordt als volgt gegeven:

$$\zeta(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i) M_i(z)}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1 - z_i)}.$$

Het bewijs dat hiervoor gegeven werd in [5], was niet erg bruikbaar voor het veralgemeniseren van de gevallen waarin deze relatie geldt. Daarom heb ik een alternatief bewijs gegeven met behulp van de balansvergelijkingen in het systeem. Met deze afleiding kon ik daardoor bepalen dat in sommige gevallen van polling systemen met meerdere bediendes deze stelling nog geldt, en in andere gevallen van polling systemen met meerdere bediendes niet. In sommige onderzochte gevallen, polling systemen met batch bediening, met batch aankomsten, met non-preemptive prioriteit en meerdere prioriteitsniveaus, heb ik een variant gevonden voor Formule (8.1).

Voor vervolgonderzoeken zijn er nog vele verschillende type van polling systemen die onderzocht kunnen worden. Er zijn bijvoorbeeld systemen waarin de klanten die bediend zijn met een bepaalde kans weer in een andere rij terechtkomen. Voor deze polling systemen zou het ook nog goed mogelijk kunnen zijn dat (een variant van) Formule (8.1) geldt. Verder zou gekeken kunnen worden naar het bepalen van $M_i(z)$ in de verschillende gevallen. Voor een aantal polling systemen met bepaalde strategieën heb ik die in dit verslag al gegeven, echter er zijn nog vele andere strategieën te bedenken waarvoor $M_i(z)$ nog niet expliciet is bepaald. Ook zou het interessant zijn algemene polling systemen te bekijken.

Bibliografie

[1] Adan, I.J.B.F., Boon, M.A.A., Boxma, O.J. (2010). A polling model with multiple priority levels. *Performance Evaluation* **67**, 468-484.

[2] Borst, S.C. (2008). Polling Systems. Lecture Notes, 1-20.

[3] Boxma, O.J. (2008). Stochastic Performance Modelling. Lecture Notes, 37-43.

[4] Boxma, O.J., Groenendijk, W.P. (1987). Pseudo-conservation laws in cyclic service systems. *J. Appl. Prob.* **24**, 949-964.

[5] Boxma, O.J., Kella, O., Kosinski, K.M. (2011). Queue lengths and workloads in polling systems. *Oper. Res. Let.* **39**, 401-405.

[6] Boxma, O.J., Wal, J. van der, Yechiali, U. (2008). Polling with batch service. *Stochastic Models* **24**, 604-625.

[7] Eisenberg, M. (1972). Queues with periodic service and changeover times. *Oper. Res. Let.* **20**, 440-451.

[8] Lee, D.-S. (1995). A generalized non-preemptive priority queue. INFOCOM'95, 354-358.

[9] Takine, T., Boxma, O.J. (2003). The M/G/1 FIFO queue with several customer classes. *Queueing Systems* **45**, 185-189.