

BACHELOR

Wachttijden bij verkeerslichten

van Wijk, A.C.C.

Award date:
2006

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Wachttijden bij verkeerslichten

Verslag Bachelorproject

A.C.C. van Wijk

Technische Universiteit Eindhoven

Technische Wiskunde

Januari 2006

Samenvatting

Er is onderzoek gedaan naar de verwachte wachttijden van voertuigen bij een kruising met verkeerslichten. Eerst worden drie benaderingsformules uit de literatuur besproken en vergeleken. Dit is gedaan voor vaste rood- en groentijden. Daarna wordt gekeken naar een wegversmalling met verkeerslichten, waarbij de groentijd afhangt van het aantal voertuigen dat staat te wachten. De wachttijden voor twee strategieën hierbij zijn met elkaar vergeleken.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	2
2	Formules uit de literatuur	3
2.1	Inleiding	3
2.2	Model en notatie	3
2.2.1	Rood en groen	3
2.2.2	Fixed Cycle control	4
2.2.3	Aankomst en vertrek	4
2.2.4	Vertraging	4
2.2.5	Stabiliteit	4
2.3	Overzicht notatie	5
2.4	Bepalen vertraging	5
2.5	Vloeistofmodel	5
2.6	Webster	8
2.6.1	Formule	8
2.6.2	M/D/1 wachtrij	8
2.7	Newell	9
2.8	Miller	10
2.8.1	Vertraging tijdens roodfase	10
2.8.2	Vertraging tijdens groenfase	10
2.8.3	Evenwichtstoestand	13
2.9	Vergelijking	14
2.9.1	Formules	14
2.9.2	Begin roodfase	15
3	Onderzoek wegversmalling	17
3.1	Model	17
3.1.1	Aankomst en vertrek	17
3.1.2	Fully Actuated control	18
3.1.3	Switch-over tijden	18
3.1.4	Situatie lege wachtrijen	18
3.2	Polling System	19
3.2.1	Beschrijving	19
3.2.2	Situatie lege wachtrijen	19
3.2.3	Stabiliteit	20
3.3	Wachttijden	20
3.3.1	Blijf switchen	20
3.3.2	Stay green	24
3.3.3	Vergelijking	26
A	Simulatie	28
A.1	Toelichting simulatie	28
A.2	Resultaten	28
B	Bepalen π_i	31

Hoofdstuk 1

Inleiding

Op veel drukke kruisingen staan verkeerslichten. Deze zorgen ervoor dat het verkeer veilig en snel de kruising kan passeren. Factoren als de verkeersdrukke en de afstelling van de verkeerslichten zijn van invloed op de wachttijd die voertuigen ondervinden. Voor de afstelling zijn verschillende mogelijkheden. Een belangrijk aspect is hoe lang de lichten op rood en groen staan. Bovendien kan de groentijd afhangen van het aantal voertuigen dat voor het verkeerslicht staat te wachten.

In dit verslag is gekeken naar de verwachte wachttijd van voertuigen die de kruising passeren. Dit is zowel gedaan voor het geval dat de rood- en groentijden vastliggen alsook voor het geval dat deze afhangen van de wachtrijlengte. Er is uitgegaan van wat hierover al in de literatuur bekend is.

Dit verslag is als volgt opgebouwd. In het eerste hoofdstuk is onderzoek gedaan naar drie in de literatuur bekende benaderingsformules voor de verwachte wachttijd. Deze formules gelden voor een situatie waarbij de rood- en groentijden niet afhangen van het aantal voertuigen dat voor de verkeerslichten staat te wachten. Allereerst wordt het model beschreven, vervolgens worden de drie formules elk toegelicht en tot slot worden ze kort vergeleken, zowel met elkaar als met de resultaten van een simulatie.

In het tweede hoofdstuk wordt gekeken naar verkeerslichten geplaatst bij een wegversmalling. Hierbij hangt de groentijd af van het aantal wachtende voertuigen: het verkeerslicht blijft groen totdat de wachtrij helemaal leeg is. Ook hier zal eerst het model beschreven worden, waarna een modellering hiervan als een zogenaamd *polling system* volgt. Daarna worden twee strategieën voor de afstelling van de verkeerslichten besproken. Voor beide wordt gekeken naar de verwachte wachttijd. In een eenvoudig geval worden deze vervolgens met elkaar vergeleken.

Hoofdstuk 2

Formules uit de literatuur

2.1 Inleiding

Er zullen in dit hoofdstuk drie in de literatuur bekende formules worden besproken die een benadering geven voor de vertraging van voertuigen bij een kruising met verkeerslichten. Achtereenvolgens komen de formules van Webster[12], Newell[8] en Miller[7] aan bod. Dit zijn drie benaderingen, omdat het niet mogelijk is een exacte formule in gesloten vorm te geven voor de vertraging. Voor het vinden van de vertraging bestaat wel een methode, maar hierin dient een aantal nulpunten numeriek bepaald te worden, zie [4]. Vandaar dat er wordt gekeken naar formules die een benadering geven voor de vertraging.

Allereerst zal het model dat bekeken is, worden besproken en zal de notatie worden gegeven. Daarna wordt toegelicht hoe de vertraging van een voertuig bepaald kan worden. Hierna wordt het zogenaamde vloeistofmodel besproken, een model waarin verkeer wordt gezien als een stromende vloeistof. Dit idee wordt in alle drie de formules toegepast. Vervolgens worden de formules elk afzonderlijk toegelicht. Er wordt uitgelegd hoe de formules zijn afgeleid en welke benaderingen er worden gedaan. Tot slot volgt kort een vergelijking van de drie formules, waarbij de formules ook worden vergeleken met de resultaten van een simulatie.

2.2 Model en notatie

Uitgegaan wordt van een kruising met verkeerslichten, waarbij er verkeer uit verschillende richtingen aankomt.

2.2.1 Rood en groen

In de praktijk kan een verkeerslicht op groen, geel, vaak oranje genoemd, of rood staan. Als het groen is, rijden de voertuigen door. Gedurende de periode dat het geel is, zullen er aanvankelijk nog één of enkele voertuigen doorrijden. Vervolgens stoppen de voertuigen en vormen een wachtrij, die gedurende de periode dat het licht op rood staat verder zal groeien. Zodra het weer groen is, zal het korte tijd duren voordat het eerste voertuig weer vertrekt.

Deze hele cyclus wordt gemodelleerd als een afwisseling van zogenaamde *effectieve groenfasen* en *effectieve roodfasen*. Door alleen te kijken naar rood- en groenfasen, hoeft geen rekening gehouden te worden met de periode dat het geel is. Het gedeelte van deze periode dat er voertuigen doorrijden, valt onder de effectieve groenfase; het gedeelte vanaf het moment dat de voertuigen stoppen valt onder de effectieve roodfase. Daarnaast valt onder de roodfase ook het korte stukje tijd dat het verkeerslicht al wel op groen staat, maar er nog geen voertuigen vertrekken. In het vervolg van dit verslag zullen de termen groenfase en roodfase voor effectieve groenfase respectievelijk effectieve roodfase gebruikt worden wanneer dit geen verwarring oplevert.

2.2.2 Fixed Cycle control

Er zijn verschillende manieren mogelijk voor de afstelling van de groen- en roodfase van de verkeerslichten op een kruising. Er is hier gekozen voor zogenaamde ‘Fixed Cycle control’. Dat houdt in dat de duur van de effectieve groen- en roodfasen constant is en dat de wijze waarop de verschillende richtingen groen en rood krijgen, een vaste cyclus is. Als wordt gekeken naar één richting van de kruising, dan houdt dit in dat deze richting steeds afwisselend een effectieve groenfase en een effectieve roodfase heeft, waarbij de duur van beide constant is, aangegeven met respectievelijk g en r en ook wel groentijd en roodtijd genoemd. Samen vormen deze fasen een cyclus. De duur hiervan, ook wel cyclustijd, wordt aangegeven met c , waarbij dus geldt $c = g + r$. Daarnaast geeft λ de fractie van de cyclustijd aan dat tot een effectieve groenfase behoort, dus $\lambda = g/c$.

Een andere mogelijkheid is om de duur van de rood- en groenfase af te laten hangen van de verkeerssituatie op dat moment. Daarbij hangt de duur van de fasen samen met het aantal voertuigen dat in elk van de wachtrijen staat. Hiervoor worden in de praktijk meetlussen gebruikt die in de weg liggen. Deze methode staat bekend als ‘Fully Actuated control’. Hier wordt in dit hoofdstuk dus niet naar gekeken: er wordt hier gewerkt met Fixed Cycle control.

2.2.3 Aankomst en vertrek

De voertuigen uit een richting arriveren met identiek verdeelde en onderling onafhankelijke tussen-aankomsttijden met gemiddelde $1/q$. De aankomstintensiteit is dus q voertuigen per tijdseenheid. Daarnaast geeft I de ratio van de variantie ten opzichte van het gemiddelde van het aantal aankomsten. De variantie dient hierbij eindig te zijn. Als de stochast X het aantal aankomsten telt, dan geldt dus $I = \text{Var}[X]/\mathbb{E}[X]$. In het speciale geval dat het aankomstproces een Poisson proces is, geldt $I = 1$.

De arriverende voertuigen sluiten achteraan in de wachtrij van de betreffende richting. De wachtrij heeft een oneindige capaciteit. Met $Q(t)$ wordt het aantal voertuigen in de wachtrij aangegeven op tijdstip t . Gedurende een effectieve groenfase vertrekken de voertuigen één voor één uit de wachtrij, met een constante tussenvertrektijd $1/s$. Zolang er voertuigen in de wachtrij staan, is de vertrekintensiteit dus s voertuigen per tijdseenheid. Gedurende een roodfase vinden er geen vertrekken plaats.

Met x wordt de zogenaamde bezettingsgraad aangeduid: $x = q/(\lambda s)$. Dit geeft de ratio van de daadwerkelijke doorstroming ten opzichte van de maximaal mogelijke doorstroming.

2.2.4 Vertraging

Een veelgebruikt criterium om de kwaliteit van de afstelling van verkeerslichten te bepalen, is de verwachte vertraging per voertuig. Onder vertraging wordt verstaan de extra tijd die het een voertuig kost om de kruising met de verkeerslichten over te komen ten opzichte van de situatie dat een voertuig de kruising over zou gaan zonder verkeerslichten en zonder ander verkeer. De vertraging komt daarmee overeen met de wachttijd bij het verkeerslicht.

De verwachte vertraging per voertuig wordt aangeduid met d . Daarnaast geven d_c , d_r en d_g de totale vertraging tijdens respectievelijk een cyclus, een effectieve roodfase en een effectieve groenfase. Er geldt $d_c = d_r + d_g$.

2.2.5 Stabiliteit

Om te zorgen voor stabiliteit, moet gelden $qc < sg$: het gemiddelde aantal aankomsten per cyclus moet kleiner zijn dan het aantal mogelijke vertrekken gedurende de groenfase. Deze voorwaarde kan ook geschreven worden als $q < \lambda s$ ofwel $x < 1$.

2.3 Overzicht notatie

Een overzicht van de in dit verslag gebruikte notatie:

d	verwachte vertraging per voertuig,
d_c	verwachte vertraging per cyclus, $d_c = d_g + d_r$,
d_g	verwachte vertraging per effectieve groenfase,
d_r	verwachte vertraging per effectieve roodfase,
c	duur cyclus, $c = g + r$,
g	duur effectieve groenfase,
r	duur effectieve roodfase,
λ	fractie van de cyclusduur behorende tot een effectieve groenfase, $\lambda = g/c$,
q	aankomstintensiteit,
s	vertrekintensiteit indien er een wachtrij is,
x	bezettingsgraad, $x = q/(\lambda s)$,
I	ratio van de variantie ten opzichte van het gemiddelde van het aantal aankomsten, $I = \text{Var}[X]/\mathbb{E}[X]$ als X de stochast is die het aantal aankomsten telt,
$Q(t)$	aantal voertuigen in de wachtrij op tijdstip t .

2.4 Bepalen vertraging

Een manier om de vertraging te bepalen is gebruik te maken van een diagram van de wachtrij. Het aantal voertuigen in de wachtrij wordt daarbij uitgezet tegen de tijd. In figuur 2.1 is hiervan een voorbeeld gegeven. Hierin zijn de aankomsten en vertrekken van de voertuigen te herkennen. Merk op dat de lengte van de wachtrij alleen kan toenemen gedurende de roodfase en het deel van de groenfase dat er al een wachtrij is. Voertuigen die gedurende een groenfase aankomen wanneer de wachtrij leeg is, kunnen direct doorrijden en lopen dus geen vertraging op.

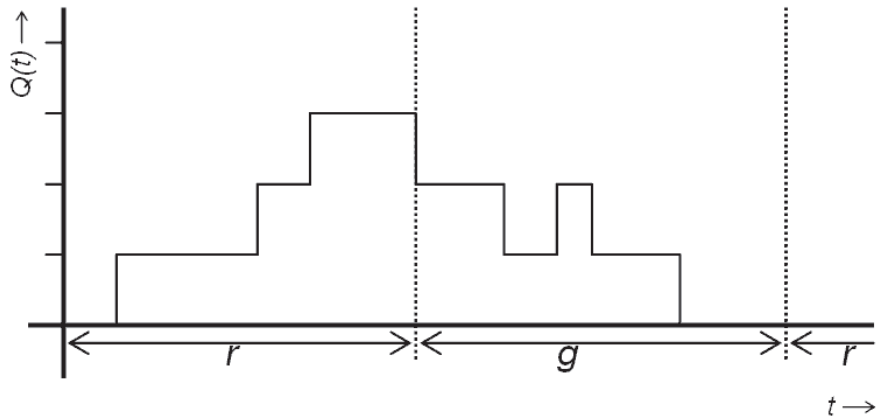
Aan de hand van figuur 2.2 zal toegelicht worden hoe uit de grafiek de vertraging bepaald kan worden. In de grafiek is verticaal het aantal voertuigen in de wachtrij uitgezet en horizontaal de tijd. Met pijltjes zijn boven de grafiek de aankomsten van de voertuigen aangegeven. In dit geval zijn dat er 4. De pijltjes onder de grafiek zijn de vertrekken. De vertraging van een voertuig is het verschil in tijd tussen het tijdstip van aankomst en het tijdstip van vertrek. Wanneer deze tijdstippen bekend zijn, kan de vertraging zo bepaald worden.

De vertraging kan ook op een andere manier bepaald worden. De vertraging van een voertuig komt in waarde namelijk overeen met de grootte van een bepaald oppervlak onder de grafiek. De vertraging van voertuig 1 komt overeen met de grootte van het gearceerde oppervlak 1. Dit is namelijk de vertraging van voertuig 1 maal hoogte 1. Hetzelfde geldt voor voertuig 2, al bestaat het oppervlak hierbij uit twee delen. Ook dit oppervlak is in lengte gelijk aan de vertraging en heeft overal hoogte 1. Ook voor de andere voertuigen is dit het geval. Samen vullen al deze oppervlakken het gehele oppervlak onder de grafiek.

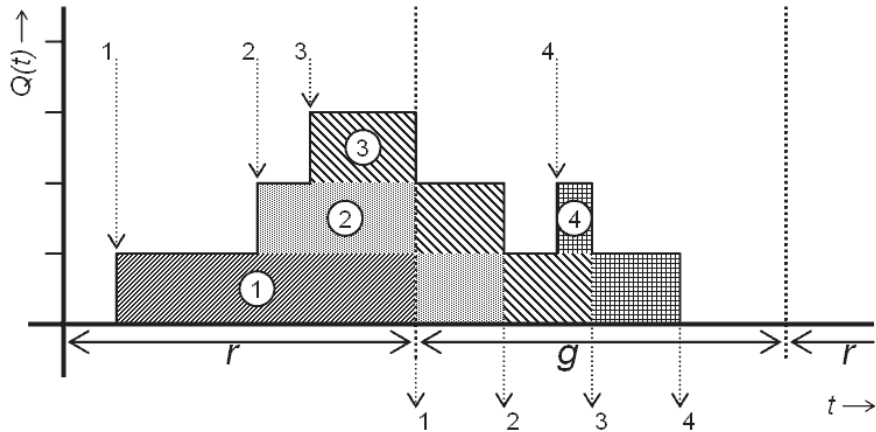
Het volgt hieruit dat de totale oppervlakte onder de grafiek gelijk is aan de som van de vertraging van alle voertuigen, ook wel de totale vertraging genoemd. Voor het bepalen van de totale vertraging is het dus voldoende om de oppervlakte onder de grafiek te bepalen. Dit kan bijvoorbeeld gedaan worden voor één cyclus. De verwachte vertraging per voertuig volgt door de totale vertraging te delen door het aantal aankomsten van voertuigen.

2.5 Vloeistofmodel

Een eerste benadering voor de wachttijd kan gemaakt worden aan de hand van een zogenaamd vloeistofmodel. Hierin wordt het aankomende en vertrekkende verkeer gezien als een stromende



Figuur 2.1: Het aantal voertuigen in de wachtrij uitgezet tegen de tijd.

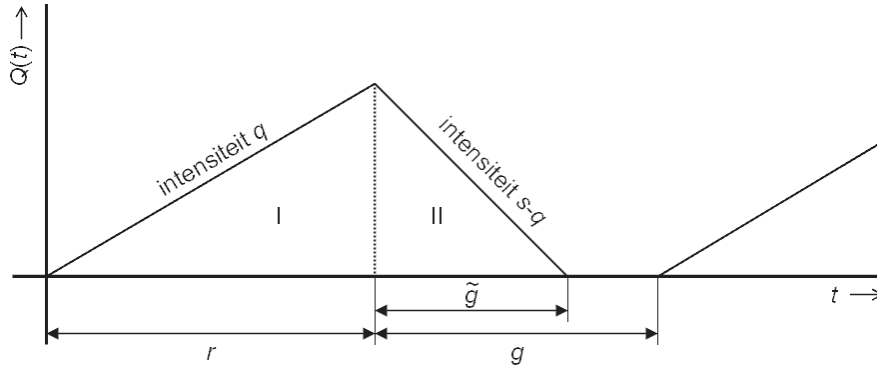


Figuur 2.2: De totale vertraging is gelijk aan de oppervlakte onder de grafiek.

vloeistof. Er ontstaat zo een continu model, waarin de vloeistof met intensiteit q aankomt. Gedurende de roodfase wordt de vloeistof ingedamd. De wachtrij kan hierbij gezien worden als een reservoir waarin het vloeistofniveau gedurende deze periode toeneemt. Tijdens de groenfase mag de vloeistof verder stromen en wel met intensiteit s . De afname uit het reservoir gebeurt daardoor met intensiteit $s - q$, zolang er hierin vloeistof aanwezig is. Zodra het reservoir leeg is, kan de aankomende vloeistof direct doorstromen.

Ook hier geldt dat voor de stabiliteit van het systeem wordt geëist $qc < sg$. De totale hoeveelheid ingedamde vloeistof gedurende een roodfase is rq . Dit moet kleiner zijn dan de totale hoeveelheid vloeistof die gedurende een groenfase kan wegstromen naast de vloeistof die al met intensiteit q direct doorstroomt. Dit is $g(s - q)$. Uit $rq < g(s - q)$ volgt direct $qc < sg$. Omdat hier sprake is van een deterministisch model zal gelijkheid ook volstaan. Doordat er geen rekening wordt gehouden met de random aankomsten, onderschat deze benadering de werkelijke vertraging.

In figuur 2.3 is dit model weergegeven. Merk op dat het verticaal uitgezette aantal voertuigen hierin dus continu is. Dit kan gezien worden als het vloeistofniveau in het reservoir. In de figuur staan de roodfase r en de groenfase g aangegeven, alsmede \tilde{g} . Dit is de tijd nodig tijdens een groenfase om het vloeistofreservoir te legen ofwel de tijd nodig om alle voertuigen uit de wachtrij te laten vertrekken.



Figuur 2.3: Vertraging in het vloeistofmodel.

Door nu de oppervlakte onder de grafiek te bepalen, kan de verwachte vertraging per voertuig berekend worden. Hiervoor worden de oppervlakten van de twee in de figuur aangegeven driehoeken berekend.

Driehoek I heeft basis r , de duur van de effectieve roodfase. Omdat gedurende deze tijd er met intensiteit q verkeer arriveert, is de hoogte van de driehoek rq . Daarmee geldt Opp I = $\frac{1}{2}r^2q$. Driehoek II heeft hoogte rq . Nu neemt de wachtrij met intensiteit $s - q$ af, zodat voor de basis \tilde{g} van deze driehoek geldt $\tilde{g} = \frac{rq}{s-q}$. Daarmee geldt Opp II = $\frac{r^2q^2}{2(s-q)}$.

De totale oppervlakte onder de grafiek is de som van deze twee oppervlakten. Merk op dat er per cyclus cq voertuigen arriveren. De verwachte vertraging per voertuig in het vloeistofmodel, d_v , is daarom:

$$\begin{aligned}
 d_v &= \frac{\text{opp}}{cq} = \frac{\frac{1}{2}r^2q + \frac{r^2q^2}{2(s-q)}}{cq} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}r^2s}{c(s-q)} \\
 &= \frac{r^2}{2c(1-q/s)} \\
 &= \frac{c(1-\lambda)^2}{2(1-\lambda x)}. \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

Hierbij is gebruikt dat $x = \frac{q}{\lambda s}$ en $\lambda = \frac{q}{c}$ zodat $1 - \frac{q}{s} = 1 - \lambda x$ en $\frac{r^2}{c} = c(1 - \lambda)^2$.

Deze benadering komt in alle drie de verderop besproken formules terug, zij het soms in een iets andere vorm geschreven. De laatste vorm is zoals deze voorkomt in de formule van Webster en de één na laatste is de vorm van Newell.

2.6 Webster

2.6.1 Formule

In Webster[12] wordt de volgende formule als benadering voor de verwachte vertraging per voertuig gegeven:

$$d = \frac{c(1-\lambda)^2}{2(1-\lambda x)} + \frac{x^2}{2q(1-x)} - 0.65\left(\frac{c}{q^2}\right)^{\frac{1}{3}} x^{(2+5\lambda)}. \quad (2.2)$$

De eerste twee termen hebben een theoretische betekenis. De eerste term herkennen is de benadering met het vloeistofmodel, zie formule (2.1). In de tweede term wordt er ook rekening mee gehouden dat de aankomsten random zijn. Hiervoor wordt uitgegaan van een M/D/1 wachtrij. Deze term zal hierna verder toegelicht worden.

De derde term is puur empirisch. Deze geeft een correctie voor de eerste twee termen. Webster heeft een aantal simulaties uitgevoerd. De resultaten hiervan heeft hij vergeleken met de waarden van de formule slechts bestaande uit de eerste twee termen. Vervolgens heeft hij een uitdrukking gefit op de verschillen hiertussen. Dit is de derde term. Door de toevoeging hiervan neemt de nauwkeurigheid van de benadering toe. Volgens Webster zal deze term doorgaans zo'n 5 tot 15 % zijn van de waarde van de eerste twee termen.

2.6.2 M/D/1 wachtrij

Bij de tweede term van formule (2.2), te weten $\frac{x^2}{2q(1-x)}$, wordt er zoals gezegd rekening gehouden met de random aankomsten van de voertuigen. Webster gaat er hierbij vanuit dat de aankomsten volgens een Poisson proces plaatsvinden. Dat houdt in dat de tussenaankomsttijden exponentieel verdeeld zijn met parameter q en onderling onafhankelijk zijn.

De groen-rood cyclus bij een verkeerslicht kan gezien worden als een periode g gedurende welke bedieningen plaatsvinden gevolgd door een periode r dat er geen bedieningen plaatsvinden. De bediening vinden dan plaats gedurende een fractie λ van de tijd en de bedieningstijden zijn daarbij constant $1/s$.

Dit systeem kan benaderd worden door een systeem waarin de bedieningen voortdurend plaatsvinden, maar dan met de langere bedieningstijden, namelijk $1/(\lambda s)$. Zodoende ontstaat een M/D/1 wachtrij, waarbij de tussenaankomsttijden exponentieel verdeeld zijn met parameter q . In [1] wordt voor de algemenere M/G/1 wachtrij de volgende formule gegeven, in de hier gebruikte notatie:

$$\mathbb{E}[W] = \frac{x}{1-x} \frac{\mathbb{E}[B^2]}{2 \mathbb{E}[B]}.$$

Hierin staat W voor de wachttijd en B voor de bedieningstijden. Deze laatste zijn in dit geval constant, zodat $\mathbb{E}[B] = 1/(\lambda s)$ en $\mathbb{E}[B^2] = 1/(\lambda s)^2$. Verder is $x = q/(\lambda s)$ zodat:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W] &= \frac{x}{1-x} \frac{1}{2\lambda s} \\ &= \frac{x^2}{2q(1-x)}. \end{aligned}$$

Dit is de tweede term van de formule van Webster.

2.7 Newell

Newell[8] geeft ook een benadering voor de verwachte vertraging per voertuig. In de hier gebruikte notatie is deze:

$$d = \frac{r^2}{2c(1 - q/s)} + \frac{I}{2s} \left(\lambda - \frac{q}{s} \right)^{-1}. \quad (2.3)$$

De eerste term hierin is, net als bij Webster, de benadering met het vloeistofmodel. Deze term is te vinden in de afleiding van formule (2.1). Dit is de eerste benadering van Newell. Vervolgens houdt hij er ook rekening mee dat de aankomsten niet deterministisch zijn. Vanwege de fluctuaties die daarom in de aankomsten zitten, kan het gebeuren dat voertuigen meer dan een volledige cyclusduur moeten wachten. Dit zal met name gebeuren wanneer de bezettingsgraad x richting de waarde 1 gaat, immers $\lambda - \frac{q}{s} = \lambda(1 - x)$. Hierdoor neemt de verwachte wachttijd toe.

Bij de afleiding van deze formule wordt verondersteld dat op $t = 0$ een roodfase begint. Er staan dan $Q(0)$ voertuigen in de wachtrij.

Om de totale verwachte vertraging per cyclus d_c te bepalen, kan de wachtrij worden voorgesteld als een Last Come First Served wachtrij. De totale vertraging hangt immers niet af van de volgorde waarin voertuigen vertrekken. De $Q(0)$ voertuigen die aan het begin van de roodfase al in de wachtrij staan, moeten wachten totdat alle later aangekomen voertuigen vertrokken zijn. Deze later aangekomen voertuigen ondervinden dezelfde vertraging als wanneer zij in een systeem aan zouden komen waarvoor geldt $Q(0) = 0$. Voor deze vertraging geeft het vloeistofmodel een benadering. De oorspronkelijke $Q(0)$ voertuigen in de wachtrij zullen een gehele of bijna gehele cyclus moeten wachten totdat zij kunnen vertrekken. Het duurt immers een groot deel van de groentijd voordat alle nieuw aangekomen voertuigen vertrokken zijn, wanneer x in de buurt van de 1 komt. Dit geeft voor de totale verwachte vertraging tijdens een cyclus:

$$d_c \approx \frac{qr^2}{2(1 - q/s)} + c \mathbb{E}[Q(0)]. \quad (2.4)$$

Nu rest nog het vinden van een benadering voor $\mathbb{E}[Q(0)]$. Newell doet dit aan de hand van de verdelingsfunctie van $Q(0)$, te weten $F_{Q(0)}(z) = \mathbb{P}[Q(0) \leq z]$. Hij geeft hiervoor de benadering:

$$F_{Q(0)}(z) \approx 1 - e^{-Bz},$$

waarin

$$B \approx \frac{2s}{Iq} \left(\lambda - \frac{q}{s} \right).$$

Hieruit volgt

$$\mathbb{E}[Q(0)] = B^{-1} \approx \frac{Iq}{2s} \left(\lambda - \frac{q}{s} \right)^{-1}. \quad (2.5)$$

Dit invullen in formule (2.4) en delen door het verwachte aantal aankomsten gedurende een cyclus cq , geeft Newells benaderingsformule voor de verwachte vertraging van een voertuig, formule (2.3).

2.8 Miller

Miller[7] geeft als benadering voor de verwachte vertraging per voertuig:

$$d = \frac{1 - \lambda}{2(s - q)} \left(\frac{s(2x - 1)}{q(1 - x)} I + s(c - g) + I - 1 + \frac{q}{s} \right). \quad (2.6)$$

Miller bepaalt de verwachte vertraging in een roodfase en die in een groenfase. De som hiervan is de totale verwachte vertraging.

Laat de stochast Q_r^x het aantal voertuigen aan het begin van de x^e roodfase en laat $q_r^x = \mathbb{E}[Q_r^x]$. Veronderstel dat de wachtrij zich in de evenwichtstoestand bevindt. Een nodige voorwaarde voor het bestaan hiervan is $qc < sg$: het gemiddelde aantal aankomsten per cyclus moet kleiner zijn dan het aantal mogelijke vertrekken gedurende de groenfase. Laat de stochast Q_r het aantal voertuigen zijn aan het begin van een roodfase in de evenwichtstoestand, en laat $q_r = \mathbb{E}[Q_r]$. Analoog hieraan stellen Q_g^x , q_g^x , Q_g en q_g hetzelfde voor aan het begin van een groenfase.

Laat verder de stochast K het aantal vertrekken gedurende een groenfase aangeven totdat de wachtrij voor het eerst leeg is.

2.8.1 Vertraging tijdens roodfase

Met $Q(t)$ wordt het aantal voertuigen in de wachtrij op tijdstip t aangegeven. Laat $t = 0$ het begin van een roodfase zijn, dan is $Q(t)$ het aantal voertuigen in de wachtrij op tijdstip t na het begin van een roodfase. Laat dit de x^e roodfase zijn, die volgt op de x^e groenfase. Een roodfase duurt $r = c - g$. Dan is de totale vertraging tijdens deze roodfase:

$$\int_0^{c-g} Q(t) dt.$$

Stel dat er Q_r^x voertuigen in de wachtrij stonden aan het begin van deze roodfase, dus op $t = 0$. Dit is tevens het einde van de x^e groenfase. De verwachting van het aantal voertuigen in de wachtrij op tijdstip t tijdens de roodfase is dan $\mathbb{E}[Q(t) | Q_r^x] = Q_r^x + qt$, $0 \leq t \leq c - g$, omdat de voertuigen met intensiteit q arriveren. Voor de verwachte vertraging gedurende deze roodfase gegeven dat $Q(0) = Q_r^x$, geldt dan:

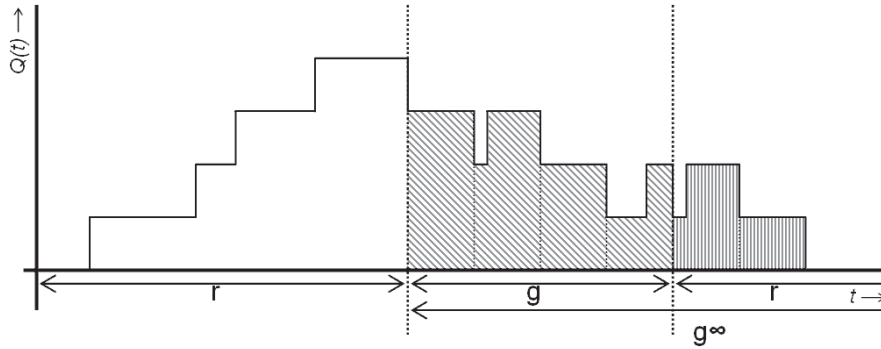
$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^{c-g} Q(t) dt \mid Q_r^x \right] &= \int_0^{c-g} \mathbb{E}[Q(t) \mid Q_r^x] dt \\ &= \int_0^{c-g} (Q_r^x + qt) dt \\ &= (c - g) \left(Q_r^x + \frac{1}{2} q(c - g) \right). \end{aligned}$$

Laat nu q_r^x het verwachte aantal voertuigen aan het begin van de x^e roodfase zijn, dus $q_r^x = \mathbb{E}[Q_r^x]$. Dan is de verwachte vertraging gedurende de x^e roodfase $(c - g)(q_r^x + \frac{1}{2} q(c - g))$. Met $q_r = \mathbb{E}[Q_r]$ geldt dan voor de verwachte vertraging tijdens een willekeurige roodfase in de evenwichtstoestand:

$$d_r = (c - g) \left(q_r + \frac{1}{2} q(c - g) \right). \quad (2.7)$$

2.8.2 Vertraging tijdens groenfase

Voor het bepalen van de vertraging tijdens een groenfase wordt er eerst vanuit gegaan dat een groenfase oneindig lang duurt. De totale vertraging wordt nu bepaald tot het moment dat de wachtrij voor het eerst leeg is. Vervolgens wordt hiervan afgetrokken de vertraging die opgelopen wordt nadat de groenfase afgelopen zou zijn. Dit geeft de totale vertraging tijdens de werkelijke duur van een groenfase.



Figuur 2.4: De bepaling van de verwachte vertraging gedurende een groenfase.

Dit is weergegeven in figuur 2.4. Stel dat de groenfase oneindig lang duurt. De wachtrij zal dan, vanwege de stabiliteitsvoorwaarde, op een gegeven moment leeg raken. Met g^∞ wordt deze oneindige groenfase in de figuur aangegeven. De totale vertraging tijdens deze groenfase is dan de oppervlakte van beide gearceerde stukken. Echter, de groenfase is maar eindig lang met duur g . De vertraging gedurende deze eindige groenfase kan gevonden worden door van de vertraging gedurende g^∞ het deel af te trekken dat ondervonden wordt wanneer het feitelijk al weer rood is. In de figuur is de gezochte vertraging gedurende de groenfase dus het diagonaal gearceerde oppervlak. Dit is het verschil van het totaal gearceerde oppervlak en het verticaal gearceerde oppervlak. Deze twee laatstgenoemde oppervlakken zullen apart bepaald worden.

Zodra een groenfase begint, vertrekken er voertuigen uit de wachtrij totdat deze leeg is. De tijdstippen waarop er een voertuig vertrekt, worden t_1, t_2, \dots genoemd. Een vertrek vindt steeds plaats een tijd $\frac{1}{s}$ na het vorige vertrek. De vertraging tussen t_i en t_{i+1} zal nu bepaald worden. Definieer hiervoor $Q(t_i)$: het aantal voertuigen in de wachtrij onmiddellijk na het i^e vertrek. De lengte van de wachtrij direct voor tijdstip t_{i+1} is dan $Q(t_{i+1}) + 1$, mits $Q(t_i) \neq 0$. De vertraging gedurende het interval van t_i tot t_{i+1} wordt nu bij benadering gegeven door:

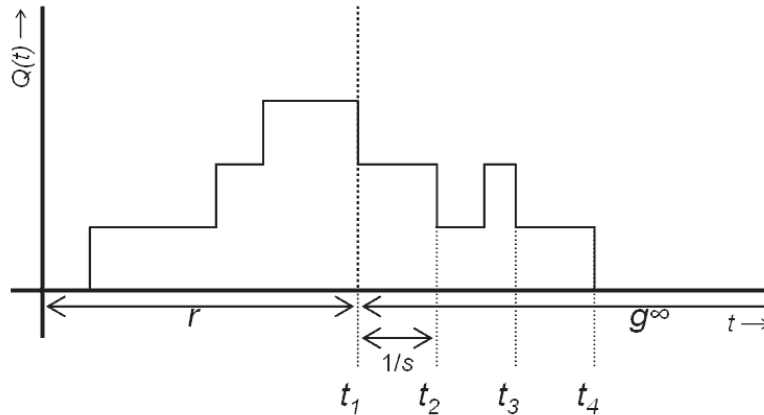
$$\frac{Q(t_i) + Q(t_{i+1}) + 1}{2s}.$$

Dit is de oppervlakte onder de grafiek in de gegeven perioden, zie figuur 2.5. Als er geen aankomsten plaatsvinden in het interval t_i tot t_{i+1} , geeft zowel $Q(t_i)$ als $Q(t_{i+1}) + 1$ de hoogte van de grafiek aan. Omdat de lengte van het interval $1/s$ is, geeft de gegeven uitdrukking dan exact de oppervlakte onder de grafiek. Als er wel één of meerdere aankomsten in het interval plaatsvinden, dan geeft de uitdrukking de verwachte oppervlakte aan, omdat $Q(t_i) + Q(t_{i+1}) + 1$ dan de verwachte gemiddelde hoogte is. Deze benadering is exact wanneer de kansdichtheid van het tijdstip van aankomst uniform over het interval verdeeld is. Dit is het geval wanneer er sprake is van een Poisson aankomstproces, zie [9]. Voor overige aankomstverdelingen geeft deze formule volgens Miller een goede benadering voor de vertraging.

Stel nu dat de groenfase oneindig lang duurt. Laat K de stochast zijn die het aantal vertrekken aangeeft dat plaatsvindt gedurende de groenfase totdat de wachtrij voor het eerst leeg is. Laat k de realisatie van K zijn, die dit aantal vertrekken tijdens de x^e groenfase aangeeft. Dan is op tijdstip t_k de wachtrij voor het eerst leeg. De vertraging gedurende de x^e groenfase is dan te benaderen met:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{Q(t_i) + Q(t_{i+1}) + 1}{2s}.$$

Met Q_g^x wordt het aantal voertuigen in de wachtrij aan het begin van de x^e groenfase aangegeven.



Figuur 2.5: Vertrekken van voertuigen gedurende de groenfase.

Dan geldt bij benadering voor het verwachte aantal voertuigen in de wachtrij op tijdstip t_i :

$$\mathbb{E}[Q(t_i) | Q_g^x] = Q_g^x - i + \frac{t_i - t_1}{t_{k-1} - t_1} (k - Q_g^x),$$

$$i = 1, 2, \dots, k-1; 1 < Q_g^x \leq k.$$

Dit is namelijk het aantal voertuigen dat zich aan het begin van de groenfase in de wachtrij bevond, Q_g^x , minus het aantal op tijdstip t_i reeds vertrokken voertuigen, i , plus een fractie van het aantal aankomsten. Het totale aantal aankomsten gedurende het interval t_1 tot t_{k-1} is gelijk aan $k - Q_g^x$. Van dit interval is een fractie $\frac{t_i - t_1}{t_{k-1} - t_1}$ al verstreken op t_i .

De verwachte vertraging tijdens een groenfase is nu bij benadering:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k-1} \frac{Q(t_i) + Q(t_{i+1}) + 1}{2s} \mid Q_g^x\right] \approx (\frac{1}{2}kQ_g^x + \frac{1}{2}k - Q_g^x)/s, \quad (2.8)$$

waarin de benadering $(k-1)^2 \approx k(k-2)$ is gebruikt. Deze formule hangt alleen nog af van k en Q_g^x en gaat uit van een oneindige groenfase.

Miller geeft aan dat volgens Winsten[13] voor de verwachting van K geldt:

$$\mathbb{E}[K] = \frac{Q_g^x - 1}{1 - q/s} + 1.$$

Dit geldt exact in het geval van een Poisson aankomstproces, maar zou voor willekeurige aankomstverdeling een benadering zijn, waarin de fout klein is als $s \gg q$. Als deze verwachting op de plaats van k in formule (2.8) wordt ingevuld, geeft dit:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k-1} \frac{Q(t_i) + Q(t_{i+1}) + 1}{2s} \mid Q_g^x\right] \approx \frac{(Q_g^x - 1)(Q_g^x + q/s)}{2(s - q)}. \quad (2.9)$$

Dit is een benadering voor de verwachte vertraging in de $(x+1)^e$ groenfase, als die oneindig lang zou duren.

Er is tot nu toe uitgegaan van een oneindige groenfase. Een gedeelte van de vertraging hierin wordt echter ondervonden als de groenfase eigenlijk al is afgelopen. Op dat moment staan er Q_r^{x+1} voertuigen in de wachtrij, zodat de verwachte vertraging voor deze voertuigen bij benadering wordt gegeven door:

$$\frac{(Q_r^{x+1} - 1)(Q_r^{x+1} + q/s)}{2(s - q)}. \quad (2.10)$$

Dit is formule (2.9) met daarin Q_g^x vervangen door Q_r^{x+1} . Het enige verschil is immers het aantal voertuigen dat aan het begin van de fase staat te wachten.

Door nu het verschil te nemen van de twee uitdrukkingen, formule (2.9) en formule (2.10), en hiervan de verwachting te nemen, wordt de totale verwachting gedurende de x^e , eindige, groenfase gevonden:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{(Q_g^x - 1)(Q_g^x + q/s)}{2(s - q)} - \frac{(Q_r^{x+1} - 1)(Q_r^{x+1} + q/s)}{2(s - q)} \right] \\ = \frac{\mathbb{E}[(Q_g^x)^2 - (Q_r^{x+1})^2] - (1 - q/s) \mathbb{E}[Q_g^x - Q_r^{x+1}]}{2(s - q)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.8.3 Evenwichtstoestand

Veronderstel dat de wachtrij zich in een evenwichtstoestand bevindt. In de evenwichtstoestand geldt $\mathbb{E}[Q_r^x] = \mathbb{E}[Q_r^{x+1}] = q_r$ en $\mathbb{E}[(Q_r^x)^2] = \mathbb{E}[(Q_r^{x+1})^2]$. Laat de stochast A_r^x het aantal aankomsten gedurende de x^e roodfase zijn, dan: $Q_g^x = Q_r^x + A_r^x$. Voor het verwachte aantal aankomsten geldt $\mathbb{E}[A_r^x] = q(c - g)$. Verder geldt er nu:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Q_g^x)^2] &= \mathbb{E}[(Q_r^x + A_r^x)^2] \\ &= \mathbb{E}[(Q_r^x)^2 + 2Q_r^x A_r^x + (A_r^x)^2] \\ &= \mathbb{E}[(Q_r^x)^2] + 2q(c - g) q_r + q^2(c - g)^2 + q(c - g)I, \end{aligned} \quad (2.12)$$

waarin I de ratio is van de variantie ten opzichte van het gemiddelde van het aantal aankomsten. Verder is hierin gebruikt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(A_r^x)^2] &= (\mathbb{E}[A_r^x])^2 + \text{Var}[A_r^x] \\ &= q^2(c - g)^2 + \mathbb{E}[A_r^x]I \\ &= q^2(c - g)^2 + q(c - g)I. \end{aligned}$$

Invulling van formule (2.12) in formule (2.11) geeft nu voor de totale verwachting van de vertraging gedurende een groenfase in de evenwichtstoestand:

$$d_g = \frac{q(c - g)}{2(s - q)} \left(2q_r + q(c - g) + I - 1 + \frac{q}{s} \right) \quad (2.13)$$

De totale verwachte vertraging per cyclus, d_c , is de som van verwachte vertraging in een roodfase d_r , formule (2.7) en die in een groenfase d_g , formule (2.13). Dit geeft:

$$\begin{aligned} d_c &= d_r + d_g \\ &= (g - q) \left(q_r + \frac{1}{2} q(c - g) \right) + \frac{q(c - g)}{2(s - q)} \left(2q_r + q(c - g) + I - 1 + \frac{q}{s} \right) \\ &= \frac{q(c - g)}{2(s - q)} \left(\frac{2s}{q} q_r + s(c - g) + I - 1 + \frac{q}{s} \right). \end{aligned}$$

Delen door qc , het verwachte aantal aankomsten per cyclus, geeft de verwachte vertraging per voertuig:

$$d = \frac{1 - g/c}{2(s - q)} \left(\frac{2s}{q} q_r + s(c - g) + I - 1 + \frac{q}{s} \right).$$

Nu rest nog een uitdrukking te vinden voor q_r , de verwachting van het aantal voertuigen in de wachtrij aan het begin van een roodfase in de evenwichtstoestand. Miller komt hiervoor met:

$$q_r \approx \frac{2x-1}{2(1-x)}I \quad \text{met } x = \frac{qc}{sg}. \quad (2.14)$$

Indien $x \leq \frac{1}{2}$ dient $q_r = 0$ genomen te worden.

Dit invullen voor de verwachte vertraging per voertuig geeft de uiteindelijke formule voor de verwachte vertraging per voertuig:

$$d = \frac{1-g/c}{2(s-q)} \left(\frac{s(2x-1)}{q(1-x)}I + s(c-g) + I - 1 + \frac{q}{s} \right).$$

2.9 Vergelijking

2.9.1 Formules

Er zijn drie verschillende benaderingen besproken voor de verwachte vertraging van een voertuig bij een kruising met verkeerslichten.

$$\text{Webster:} \quad d = \frac{c(1-\lambda)^2}{2(1-\lambda x)} + \frac{x^2}{2q(1-x)} - 0.65 \left(\frac{c}{q^2} \right)^{\frac{1}{3}} x^{(2+5\lambda)}.$$

$$\text{Newell:} \quad d = \frac{r^2}{2c(1-q/s)} + \frac{I}{2s} \left(\lambda - \frac{q}{s} \right)^{-1}.$$

$$\text{Miller:} \quad d = \frac{1-\lambda}{2(s-q)} \left(\frac{s(2x-1)}{q(1-x)}I + s(c-g) + I - 1 + \frac{q}{s} \right).$$

Al deze drie formules maken gebruik van de benadering met het vloeistofmodel, besproken in sectie 2.5. Bij Webster en Newell is dit direct te herkennen, namelijk de eerste term, bij Miller volgt dit na het wegwerken van de haakjes.

De drie formules zullen hier kort vergeleken worden, zowel met elkaar als met de resultaten van een simulatie. Voor een uitgebreidere vergelijking wordt verwezen naar [3].

Er wordt vanuit gegaan dat het aankomstproces een Poisson proces is, zodat geldt

$$I = \frac{\text{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]} = 1,$$

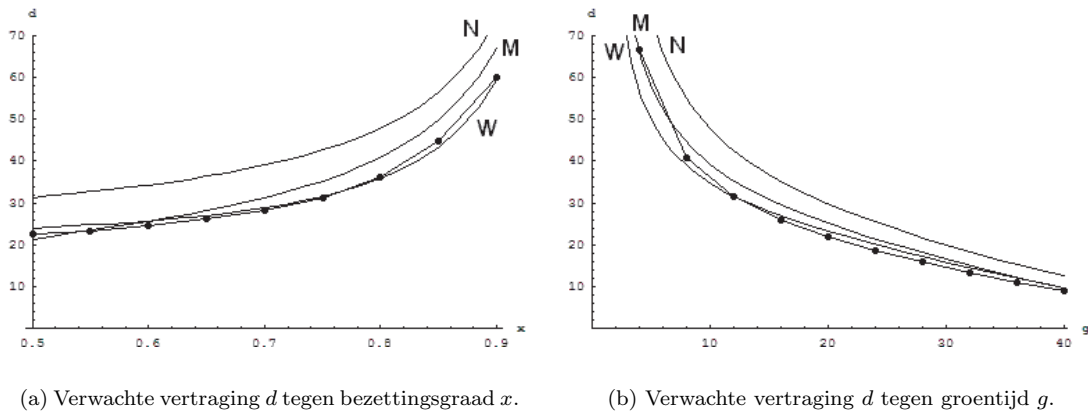
waarin de stochast X het aantal aankomsten telt.

Hiermee vereenvoudigt Millers formule tot

$$d = \frac{1-\lambda}{2(s-q)} \left(\frac{s(2x-1)}{q(1-x)} + s(c-g) + \frac{q}{s} \right).$$

Nu wordt de verwachte vertraging d uitgezet tegen de bezettingsgraad x . Dit is weergegeven in figuur 2.6(a). De bezettingsgraad x loopt hierbij van 0.5 tot 0.9. Voor de cyclustijd c , de groentijd g en de vertrekintensiteit s zijn de waarden $c = 60$ seconde, $g = 12$ seconde en $s = \frac{1}{2}$ per seconde genomen. Dit laatste houdt in dat een vertrek van een voertuig gemiddeld 2 seconde kost. In de grafiek zijn ook de waarden van d uitgezet die met behulp van een simulatie zijn gevonden. De simulatie is gedaan voor een aantal waarden van x en hiertussen zijn de waarden van d lineair geïnterpoleerd. Voor een verdere beschrijving van de gebruikte simulatie, wordt verwezen naar bijlage A.

In de grafiek is te zien dat er redelijk grote verschillen zitten in de verwachte vertraging die elk van de formules oplevert. Newells formule levert duidelijk de grootste verwachte vertraging. De



Figuur 2.6: Vergelijking van de drie formules voor de verwachte vertraging van een voertuig (W=Webster, N=Newell, M=Miller, punten: waarden simulatie).

resultaten van de simulatie stemmen het meest overeen met Websters formule. Dit valt wellicht te verklaren met het feit dat Webster een term in zijn formule heeft die puur en alleen is gebaseerd op het laten overeenstemmen van de formule met de resultaten van een simulatie die hij zelf heeft opgesteld. Verder valt op dat de resultaten van de simulatie duidelijk kleiner zijn dan de waarden van de formule van Newell, en voor ongeveer $x > 0.7$ ook duidelijk kleiner dan de waarden van Miller.

Als de verwachte vertraging d uitgezet wordt tegen de groentijd g , ontstaat figuur 2.6(b). Ook hier zijn de resultaten van de simulatie weergegeven. Er is gekozen voor een vaste cyclusduur, $c = 60$ seconde en een bezettingsgraad van $x = 0.75$. De groentijd loopt nu van 0 tot 40 seconde. Omdat de cyclusduur en de bezettingsgraad vast zijn, betekent een langere groentijd dus een grotere aankomstintensiteit.

Uit de grafiek blijkt dat ondanks een grotere aankomstintensiteit de verwachte vertraging toch kleiner wordt als g toeneemt. Verder blijkt uit de grafiek duidelijk dat de verschillen tussen de formules redelijk groot zijn, vooral bij een korte groenfase. Wederom geeft Newells formule de grootste verwachte vertraging en Websters formule de kleinste. De resultaten van de simulatie zijn nu vanaf $g \approx 15$ seconde kleiner dan elk van de formules. Ook nu stemmen de simulatieresultaten het meest overeen met Webster, hoewel vanaf $g \approx 25$ seconde de verschillen tussen Millers en Websters formule klein zijn.

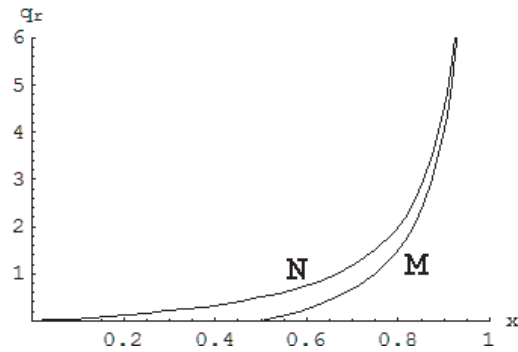
Merk op dat voor een kruising met verkeer uit vier richtingen de groentijd kleiner of gelijk aan een kwart van de cyclusduur zal zijn, als het verkeer uit alle richtingen met dezelfde aankomstintensiteit arriveert. In dit geval zou dan $g \leq 15$ seconde.

2.9.2 Begin roodfase

Zowel Newell als Miller geven een benadering voor het verwachte aantal voertuigen dat aan het begin van een roodfase in de wachtrij staat. Beiden gebruiken dit in hun formule voor de vertraging, zodat een deel van de verschillen hierin terug te voeren is op deze benadering.

Het verwachte aantal voertuigen in de wachtrij aan het begin roodfase in de evenwichtstoestand is q_r . Newell geeft hiervoor de benadering, zie formule (2.5):

$$q_r \approx \frac{Iq}{2s} \left(\lambda - \frac{q}{s} \right)^{-1},$$



Figuur 2.7: Het verwachte aantal voertuigen in de wachtrij aan het begin van een roodfase q_r tegen de bezettingsgraad x (N=Newell, M=Miller).

wat kan worden herschreven tot:

$$q_r \approx \frac{x}{2(1-x)} I.$$

Miller gebruikt de benadering, zie formule (2.14) en de opmerking daarbij:

$$q_r \approx \begin{cases} \frac{2x-1}{2(1-x)} I & \text{als } x > \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{als } x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wanneer deze formules in een grafiek worden uitgezet, ontstaat figuur 2.7. Hieruit blijkt ook dat Newells q_r in alle gevallen groter is dan Millers q_r . Dit verschil verklaart een deel van de verschillen tussen de formules voor de verwachte vertraging voor een voertuig.

Hoofdstuk 3

Onderzoek wegversmalling

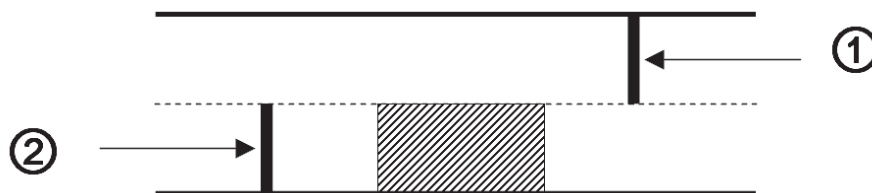
In dit hoofdstuk zal onderzoek gedaan worden naar de wachttijden bij een wegversmalling waarbij verkeerslichten zijn geplaatst. Bij deze wegversmalling wordt uitgegaan van een tweebaans weg, waarbij over een beperkt deel één van de rijstroken niet beschikbaar is. Het verkeer uit beide richtingen moet hier over de ene resterende strook. Aan beide zijden zijn hierbij verkeerslichten geplaatst. Deze laten het verkeer uit elk van de richtingen afwisselend door. Een dergelijke wegversmalling kan voorkomen bij verkeerswerkzaamheden. Ook een smalle brug kan als zo'n wegversmalling worden gezien. Deze situatie staat grafisch weergegeven in figuur 3.1.

Allereerst zal het model van deze wegversmalling worden besproken. Daarna zal de modellering als een zogenaamd Polling System uitgelegd worden. Er zal blijken dat er verschillende strategieën zijn voor de bediening van de verkeerslichten indien bij beide verkeerslichten geen voertuigen staan. Vervolgens worden er daarom voor twee mogelijke strategieën onderzocht. Hiervoor worden uitdrukkingen voor de verwachte wachttijd bekeken. Tot slot worden de wachttijden bij deze twee strategieën in een eenvoudig geval met elkaar vergeleken.

3.1 Model

3.1.1 Aankomst en vertrek

Het verkeer komt aan uit twee richtingen, genummerd 1 en 2. Er zijn twee wachtrijen, bij elk van de verkeerslichten één. Deze worden aangegeven met Q_1 en Q_2 . De voertuigen arriveren volgens een Poisson proces bij deze verkeerslichten, met parameter λ_i voor $i = 1, 2$. De vertrekken van de voertuigen zijn deterministisch en duren $\frac{1}{\mu_i}$ voor $i = 1, 2$. De bezettingsgraad wordt aangegeven met ρ_1 en ρ_2 , waarvoor geldt $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ voor $i = 1, 2$. Verder wordt genoteerd $\rho = \rho_1 + \rho_2$.



Figuur 3.1: Wegversmalling.

3.1.2 Fully Actuated control

De situatie bij deze wegversmalling is feitelijk gelijk aan een kruising waarbij verkeer uit slechts twee richtingen aankomt. Indien er wordt uitgegaan van Fixed Cycle control (zie sectie 2.2.2) zijn de benaderingen voor de verwachte wachttijden uit hoofdstuk 2 dan ook nog steeds geldig. Er zal in dit hoofdstuk worden gekeken wat de invloed is van een andere strategie voor de bediening van de verkeerslichten. Dit staat bekend als Fully Actuated control. Hierbij heeft de situatie in de wachtrijen invloed op de groentijden. Er wordt hierbij gekozen voor zogenaamde Exhaustive Service. Dit houdt in dat een verkeerslicht zodra het eenmaal op groen is gesprongen, groen blijft totdat alle voertuigen uit de wachtrij zijn. Zodra dit gebeurt en deze wachtrij dus leeg is, wordt dit verkeerslicht rood en zal, na een korte tijd, het andere verkeerslicht groen krijgen.

3.1.3 Switch-over tijden

Er moet altijd een bepaalde hoeveelheid tijd zitten tussen het moment waarop de ene richting rood krijgt en het moment waarop de andere richting groen krijgt. Dit wordt de *switch-over tijd* genoemd. Deze tijd is nodig om te zorgen dat alle voertuigen van het stuk rijstrook gelegen naast de wegversmalling af zijn, alvorens er voertuigen van de andere kant komen. Met s_2 zal de switch-over tijd van richting 1 naar richting 2 worden aangegeven, met s_1 die van richting 2 naar richting 1. Beide worden constant verondersteld, en $s = s_1 + s_2$. De switch-over tijden zullen in de praktijk grotendeels afhangen van de lengte van de wegversmalling en de snelheid van de voertuigen.

3.1.4 Situatie lege wachtrijen

Het kan voorkomen dat bij het ene verkeerslicht de wachtrij juist leeg raakt, terwijl er ook bij het andere verkeerslicht geen voertuigen in de wachtrij staan. Er zijn verschillende mogelijkheden hoe de verkeerslichten in dit geval te laten werken. Een aantal van deze mogelijkheden zijn:

- Blijf switchen
Beide verkeerslichten blijven om beurten groen krijgen, alleen is de groentijd gelijk aan 0 indien er geen voertuigen in de betreffende wachtrij staan.
- Stay green
Het verkeerslicht dat op groen staat, blijft op groen staan.
- All red
Beide verkeerslichten worden op rood gezet.
- Main stream green
De richting met de grootste aankomstintensiteit λ_i krijgt groen.

Deze strategieën zullen verder toegelicht worden in de modellering als Polling System. Voor de eerste twee genoemde mogelijkheden zullen daarna de verwachte wachttijden besproken worden.

3.2 Polling System

3.2.1 Beschrijving

De wegversmalling kan gemodelleerd worden als een zogenaamd Polling System, zie [11]. Bij een polling system zijn er een aantal wachtrijen, zeg Q_1 tot Q_n , die door één server S bediend worden. Deze server kan slechts één wachtrij tegelijkertijd bedienen. Daarom werkt de server afwisselend aan de verschillende wachtrijen. Het van de ene naar de andere wachtrij overschakelen wordt switchen genoemd.

In het geval van de wegversmalling zijn er twee wachtrijen, Q_1 en Q_2 , zie figuur 3.2. Het werken van de server aan een van de wachtrijen kan nu gezien worden als het op groen staan van het verkeerslicht bij deze wachtrij. Dan mogen er immers voertuigen vertrekken hetgeen overeenkomt met bedieningen van klanten in een wachtrij. De periode dat de server switcht van de ene naar de andere wachtrij is de periode dat beide kanten rood licht hebben. Omdat er uit wordt gegaan van exhaustive service, werkt de server aan een wachtrij totdat deze leeg is, alvorens hij naar de andere wachtrij switcht. Verder wordt voor de wachtrijen aangenomen dat ze een oneindige capaciteit hebben.

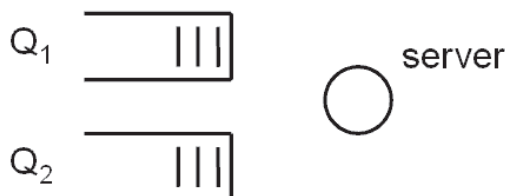
3.2.2 Situatie lege wachtrijen

De verschillende mogelijkheden waarop de verkeerslichten reageren op de situatie waarin beide wachtrijen leeg zijn, komt tot uiting in hoe de server op zo'n moment switcht.

Bij 'blijf switchen' blijft, zoals de naam al aangeeft, de server tussen de wachtrijen switchen. Wanneer de wachtrij waar hij aankomt leeg is, switcht hij direct weer terug naar de andere. De groentijd bij deze wachtrij is dan 0. Hoewel dit een voor de hand liggende en bovendien wiskundig de eenvoudigste strategie is, is het in dit geval met verkeerslichten niet zo'n verstandige keuze. De server is dan namelijk voortdurend aan het switchen. Wanneer nu het eerste voertuig arriveert, zal deze in verwachting nog de helft van de totale switch-over tijd in een cyclus moeten wachten, alvorens groen te krijgen. Het systeem kan echter al gedurende enige tijd leeg zijn, waardoor de switch-over tijd feitelijk niet meer nodig was geweest. Dit betekent dat de wachttijd van dit voertuig alsook van de voertuigen die binnen korte tijd hierna arriveren, veel groter is dan nodig was geweest.

In het geval 'stay green' blijft de server bij de wachtrij staan welke hij het laatste heeft bediend. Hij bedient dan geen klanten. Dit wordt ook wel een 'dormant server' genoemd, zie [2]. Wanneer het eerste voertuig bij de andere wachtrij aankomt, zal de server hier naartoe switchen.

Bij 'all red' krijgen beide wachtrijen rood, wat inhoudt dat de server aan geen van beide wachtrijen meer werkt. Pas zodra er weer een voertuig aankomt, gaat de server naar één van beide wachtrijen. In het geval dit de wachtrij betreft waar hij het laatste heeft gewerkt, zou dit geen switch-over tijd kosten. Wanneer het de andere rij betreft, zou dit alleen nog het resterende deel van de switch-over tijd kosten.



Figuur 3.2: Modellerings van de wegversmalling als polling system.

In het geval ‘main stream green’ switcht de server naar de wachtrij met de grootste aankomstintensiteit, indien hij hier nog niet was.

3.2.3 Stabiliteit

In Borst[2] wordt als nodige en voldoende voorwaarde voor de stabiliteit van een polling system gegeven:

$$\rho + \max_{i=1, \dots, n} \frac{\lambda_i s}{M_i} < 1. \quad (3.1)$$

Hierin is M_i het gemiddelde aantal type i klanten dat gedurende een cyclus bediend zou worden als er een oneindig aantal type i klanten in de wachtrij zou staan aan het begin van de cyclus. In het geval van exhaustive service is M_i oneindig, zodat de tweede term in formule (3.1) gelijk is aan 0 en de stabiliteitsvoorwaarde reduceert tot $\rho < 1$. Ook in het geval er dat er geen switch-over tijden zijn, $s = 0$, is de tweede term gelijk aan 0 en is de stabiliteitsvoorwaarde $\rho < 1$.

3.3 Wachttijden

3.3.1 Blijf switchen

Voor het geval ‘blijf switchen’ wordt nu de verwachte wachttijd bepaald voor beide wachtrijen. Dit wordt gedaan met behulp van de Mean Value Approach. Deze aanpak levert een stelsel vergelijkingen op, waaruit de verwachte wachttijd wordt opgelost. Het gevonden resultaat wordt vervolgens vergeleken met in de literatuur bekende formules voor de wachttijd in deze situatie.

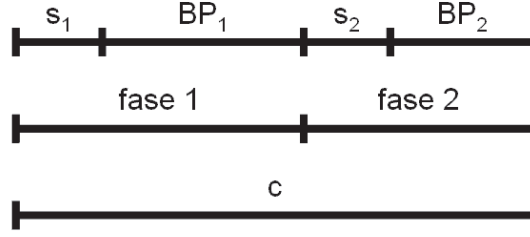
Notatie

De volgende notatie zal gebruikt worden:

C	cyclustijd,
BP_i	busy period server bij wachtrij Q_i ,
s_i	switch-over tijd server naar wachtrij Q_i ,
λ_i	aankomstintensiteit type i klanten,
μ_i	vertrekintensiteit type i klanten,
ρ_i	bezettingsgraad type i klanten,
L_i	aantal type i klanten in de wachtrij op een willekeurig moment,
$L_{i,j}$	aantal type i klanten in de wachtrij tijdens de periode s_j en BP_j ,
W_i	wachttijd type i klant,
X_i	resterende type i fase,
T_i	resterende tijd totdat de server weer aan wachtrij Q_i gaat werken.

Afleiden formules

Een cyclus van de server ziet er dan uit als in figuur 3.3. Hierin switcht de server eerst naar wachtrij Q_1 , hetgeen de hoeveelheid tijd s_1 duurt. Vervolgens werkt de server aan wachtrij Q_1 gedurende de tijd BP_1 , de busy period. Zodra er geen klanten meer in deze wachtrij staan, switcht de server naar wachtrij Q_2 , wat s_2 duurt. De server verwerkt nu klanten uit wachtrij Q_2 gedurende BP_2 . Wanneer er in deze wachtrij geen klanten meer staan is de cyclus rond en switcht de server weer naar Q_1 . Voor de cyclustijd C geldt zo $\mathbb{E}[C] = s_1 + \mathbb{E}[BP_1] + s_2 + \mathbb{E}[BP_2]$. Fase i bestaat uit het switchen naar wachtrij Q_i , te weten s_i , en een busy period BP_i .



Figuur 3.3: Een cyclus van de server.

Eerst worden de vergelijkingen opgesteld die in de evenwichtstoestand gelden voor wachtrij Q_1 . Voor wachtrij Q_2 gelden analoge formules. Voor de bezettingsgraad ρ_1 van Q_1 geldt $\rho_1 = \lambda_1/\mu_1$, maar ook $\rho_1 = \mathbb{E}[BP_1]/\mathbb{E}[C]$. Voor de verwachte wachttijd $\mathbb{E}[W_1]$ geldt:

$$\mathbb{E}[W_1] = \mathbb{E}[T_1] + \mathbb{E}[L_1] \frac{1}{\mu_1} + \rho_1 \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_1}.$$

Het duurt $\mathbb{E}[T_1]$ voordat de server wachtrij Q_1 gaat bedienen. Daarna moet de type 1 klant de bediening van $\mathbb{E}[L_1]$ klanten voor hem in de wachtrij afwachten. Daarnaast is met kans ρ_1 de server al in wachtrij Q_1 bezig met de bediening van een klant en moet er een resterende bedieningstijd van gemiddeld $\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_1}$ gewacht worden.

Met de formule van Little volgt $\mathbb{E}[L_1] = \lambda_1 \mathbb{E}[W_1]$. Verder geldt voor $\mathbb{E}[L_1]$ ook:

$$\mathbb{E}[L_1] = \frac{s_1 + \mathbb{E}[BP_1]}{\mathbb{E}[C]} \mathbb{E}[L_{1,1}] + \frac{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]}{\mathbb{E}[C]} \mathbb{E}[L_{1,2}].$$

Gedurende de fractie $\frac{s_1 + \mathbb{E}[BP_1]}{\mathbb{E}[C]}$ van de tijd bevindt het systeem zich in fase 1 en dan zijn er in verwachting $\mathbb{E}[L_{1,1}]$ type 1 klanten in het de wachtrij. Evenzo geldt dat gedurende de fractie $\frac{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]}{\mathbb{E}[C]}$ van de tijd het systeem zich in fase 2 bevindt en dan bevinden zich $\mathbb{E}[L_{1,2}]$ type 1 klanten in de wachtrij.

Voor $\mathbb{E}[L_{1,2}]$ geldt $\mathbb{E}[L_{1,2}] = \lambda_1 \mathbb{E}[X_2]$. Vanwege de exhaustive service is wachtrij Q_1 leeg aan het einde van fase 1. Van fase 2 is al een bepaalde periode verstreken, gedurende welke type 1 klanten met intensiteit λ_1 zijn aangekomen. De verwachte verstreken periode van fase is gelijk aan de verwachte resterende periode van fase 2, $\mathbb{E}[X_2]$. Het moment waarop gekeken wordt ligt namelijk uniform verdeeld over het interval van fase 2, zie [9]. Dit geeft dat er $\lambda_1 \mathbb{E}[X_2]$ type 1 klanten zich in het systeem bevinden tijdens een type 2 fase.

Over $\mathbb{E}[X_2]$, de verwachte resterende type 2 fase, kan het volgende gezegd worden. Er zijn $\mathbb{E}[L_{2,2}]$ type 2 klanten in de wachtrij tijdens een type 2 fase. Iedere klant in de wachtrij zorgt voor een eigen busy period van duur $\frac{1/\mu_2}{1-\rho_2}$. Daarnaast bevindt het systeem zich een fractie $\frac{s_2}{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]}$ van de tijd in een switch-over interval naar wachtrij Q_2 . De verwachte resterende switch-over tijd is dan $\frac{1}{2} s_2$. Gedurende deze tijd kunnen er echter ook nog type 2 klanten arriveren. Deze klanten arriveren met intensiteit λ_2 en zorgen elk voor een busy period van $\frac{1/\mu_2}{1-\rho_2}$. Hierdoor neemt de busy period van wachtrij Q_2 dus toe met $\lambda_2 \frac{s_2}{2} \frac{1/\mu_2}{1-\rho_2}$. Als tijdens een willekeurig moment tijdens een busy period van wachtrij Q_2 gekeken wordt, veroorzaakt de klant in bediening nog een verwachte resterende busy period van $\frac{1/(2\mu_2)}{1-\rho_2}$. Dit geeft voor $\mathbb{E}[X_2]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_2] &= \mathbb{E}[L_{2,2}] \frac{1/\mu_2}{1-\rho_2} + \frac{s_2}{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]} \left(\frac{s_2}{2} + \lambda_2 \frac{s_2}{2} \frac{1/\mu_2}{1-\rho_2} \right) \\
&\quad + \frac{1/(2\mu_2)}{1-\rho_2} \frac{\mathbb{E}[BP_2]}{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]} \\
&= \mathbb{E}[L_{2,2}] \frac{1/\mu_2}{1-\rho_2} + \frac{s_2}{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]} \frac{s_2}{2(1-\rho_2)} + \frac{1/(2\mu_2)}{1-\rho_2} \frac{\mathbb{E}[BP_2]}{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]}.
\end{aligned}$$

Voor het bepalen van $\mathbb{E}[T_1]$, de verwachte resterende tijd totdat de server weer aan wachtrij Q_1 gaat werken, worden de verschillende mogelijkheden beschouwd die zich voordoen als er op een willekeurig moment naar het systeem wordt gekeken. Merk op dat wanneer op een willekeurig moment gedurende de switch-over tijd s_1 naar het systeem wordt gekeken, de kansverdeling van dit moment uniform verdeeld is over het interval s_1 . De verwachte resterende switch-over tijd is daarom $\frac{1}{2}s_1$ en dit is tevens de resterende tijd totdat de server weer aan wachtrij Q_1 gaat werken. Als tijdens BP_1 wordt gekeken, is deze resterende tijd uiteraard 0. Wordt tijdens s_2 of BP_2 gekeken, dan duurt het nog een tijd $\mathbb{E}[X_2] + s_1$ voordat weer aan wachtrij Q_1 gewerkt gaat worden. Dit geeft voor $\mathbb{E}[T_1]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_1] &= \frac{s_1}{\mathbb{E}[C]} \frac{1}{2} s_1 + \frac{\mathbb{E}[BP_1]}{\mathbb{E}[C]} 0 + \frac{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]}{\mathbb{E}[C]} (\mathbb{E}[X_2] + s_1) \\
&= \frac{s_1^2}{2\mathbb{E}[C]} + \frac{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]}{\mathbb{E}[C]} (\mathbb{E}[X_2] + s_1).
\end{aligned}$$

Stelsel vergelijkingen

Dit alles geeft nu het volgende stelsel vergelijkingen. In totaal zijn er 17 onbekenden, te weten:

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{E}[C] & \\
\rho_1 & \rho_2 \\
\mathbb{E}[BP_1] & \mathbb{E}[BP_2] \\
\mathbb{E}[L_1] & \mathbb{E}[L_2] \\
\mathbb{E}[L_{1,1}] & \mathbb{E}[L_{1,2}] \\
\mathbb{E}[L_{2,1}] & \mathbb{E}[L_{2,2}] \\
\mathbb{E}[W_1] & \mathbb{E}[W_2] \\
\mathbb{E}[X_1] & \mathbb{E}[X_2] \\
\mathbb{E}[T_1] & \mathbb{E}[T_2]
\end{array}$$

Gegeven zijn de 6 variabelen:

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1 & \lambda_2 \\
\mu_1 & \mu_2 \\
s_1 & s_2
\end{array}$$

Verder wordt genoteerd $\rho = \rho_1 + \rho_2$ en $s = s_1 + s_2$.

In totaal zijn er 17 vergelijkingen. Met 5 hiervan zijn direct $\mathbb{E}[C]$, ρ_1 , ρ_2 , $\mathbb{E}[BP_1]$ en $\mathbb{E}[BP_2]$ uit te drukken in bekenden. Uit de vergelijkingen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C] &= s_1 + \mathbb{E}[BP_1] + s_2 + \mathbb{E}[BP_2], \\
\rho_1 &= \frac{\mathbb{E}[BP_1]}{\mathbb{E}[C]}, & \rho_2 &= \frac{\mathbb{E}[BP_2]}{\mathbb{E}[C]}, \\
\rho_1 &= \frac{\lambda_1}{\mu_1}, & \rho_2 &= \frac{\lambda_2}{\mu_2},
\end{aligned}$$

volgt namelijk $\mathbb{E}[C] = \frac{s_1 + s_2}{1 - \rho_1 - \rho_2} = \frac{s}{1 - \rho}$ en daarmee $\mathbb{E}[BP_i] = \rho_i \frac{s}{1 - \rho}$.

Dit laat nog 12 vergelijking over:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_1] &= \mathbb{E}[T_1] + \mathbb{E}[L_1] \frac{1}{\mu_1} + \rho_1 \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_1} \\
\mathbb{E}[W_2] &= \mathbb{E}[T_2] + \mathbb{E}[L_2] \frac{1}{\mu_2} + \rho_2 \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_2} \\
\mathbb{E}[L_1] &= \lambda_1 \mathbb{E}[W_1] \\
\mathbb{E}[L_2] &= \lambda_2 \mathbb{E}[W_2] \\
\mathbb{E}[L_1] &= \frac{s_1 + \mathbb{E}[BP_1]}{\mathbb{E}[C]} \mathbb{E}[L_{1,1}] + \frac{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]}{\mathbb{E}[C]} \mathbb{E}[L_{1,2}] \\
\mathbb{E}[L_2] &= \frac{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]}{\mathbb{E}[C]} \mathbb{E}[L_{2,2}] + \frac{s_1 + \mathbb{E}[BP_1]}{\mathbb{E}[C]} \mathbb{E}[L_{2,1}] \\
\mathbb{E}[L_{1,2}] &= \lambda_1 \mathbb{E}[X_2] \\
\mathbb{E}[L_{2,1}] &= \lambda_2 \mathbb{E}[X_1] \\
\mathbb{E}[X_1] &= \mathbb{E}[L_{2,2}] \frac{1/\mu_2}{1-\rho_2} + \frac{s_2}{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]} \frac{s_2}{2(1-\rho_2)} + \frac{1/(2\mu_2)}{1-\rho_2} \frac{\mathbb{E}[BP_2]}{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]}, \\
\mathbb{E}[X_2] &= \mathbb{E}[L_{1,1}] \frac{1/\mu_1}{1-\rho_1} + \frac{s_1}{s_1 + \mathbb{E}[BP_1]} \frac{s_1}{2(1-\rho_1)} + \frac{1/(2\mu_1)}{1-\rho_1} \frac{\mathbb{E}[BP_1]}{s_1 + \mathbb{E}[BP_1]}, \\
\mathbb{E}[T_1] &= \frac{s_1^2}{2\mathbb{E}[C]} + \frac{s_2 + \mathbb{E}[BP_2]}{\mathbb{E}[C]} (\mathbb{E}[X_2] + s_1), \\
\mathbb{E}[T_2] &= \frac{s_2^2}{2\mathbb{E}[C]} + \frac{s_1 + \mathbb{E}[BP_1]}{\mathbb{E}[C]} (\mathbb{E}[X_1] + s_2).
\end{aligned}$$

Door het oplossen van het stelsel is een uitdrukking te vinden voor $\mathbb{E}[W_i]$. Voor $\mathbb{E}[W_1]$ is deze:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_1] &= \frac{s_1(\rho_1 - 2)}{2\rho_1} + \frac{s(s_1\mu_1\rho_1 - \rho_1)}{2\mu_1(\rho_1^2 - 3\rho_1 + 1)(\rho_2 s_1 - s_1 - s_2\rho_1)} \\
&\quad - \frac{s(\rho_1 - 1)((2 - \rho_1)\rho_1^3 + s_1\mu_1(\rho_1 - 1)(3(\rho_1 - 2)\rho_1 + 2))}{2\mu_1\rho_1((\rho_1 - 3)\rho_1 + 1)(\rho_1(2\rho_1 - 3)s_2 + s_2 + s_1(\rho_1^2 - (\rho_2 + 2)\rho_1 + 1))}. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Voor $\mathbb{E}[W_2]$ geldt eenzelfde formule.

Literatuur

In de literatuur zijn ook formules te vinden voor de wachttijden in het hier bekeken polling systeem. Twee hiervan zullen bekeken worden, te weten een van Eisenberg en een van Sykes. De eerst genoemde geldt voor algemene bedienings- en switch-over tijden. Laat hiervoor de stochast S_i de bedieningstijd van een type i klant zijn en laat de stochast C_i de switch-over tijd naar wachtrij Q_i zijn.

Eisenberg[6] geeft, geschreven in de in dit verslag gebruikte notatie:

$$\mathbb{E}[W_1] = (1 - \rho) \frac{\mathbb{E}[V_1^2]}{2s(1 - \rho_1)} + \frac{\lambda_1 \mathbb{E}[S_1^2]}{2(1 - \rho_1)},$$

waarin

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V_1^2] &= \frac{2\rho_1\rho_2(\rho_2s_1 + (1 - \rho_1)s_2)^2 + s(\rho_2^2\lambda_1\mathbb{E}[S_1^2] + (1 - \rho_1)^2\lambda_2\mathbb{E}[S_2^2])}{(1 - \rho)^2(1 - \rho + 2\rho_1\rho_2)} \\
&+ \frac{2s_1s_2(1 - \rho_1)\rho_2 + \rho_2^2\mathbb{E}[S_1^2] + (1 - \rho_1)^2\mathbb{E}[S_2^2]}{(1 - \rho)(1 - \rho + 2\rho_1\rho_2)} \\
&+ \frac{2s_1(\rho_2s_1 + (1 - \rho_1)s_2)}{1 - \rho} + \mathbb{E}[C_1^2].
\end{aligned}$$

Hierin is $\mathbb{E}[S_i^2]$ het tweede moment van de bedieningstijden in wachtrij Q_i en $\mathbb{E}[C_i^2]$ het tweede moment van de switch-over tijden naar wachtrij Q_i . In het geval van deterministische bedienings- en switch-over tijden geldt $\mathbb{E}[S_i^2] = \frac{1}{\mu_i^2}$ en $\mathbb{E}[C_i^2] = s_i^2$. Daarnaast is $s_i = \mathbb{E}[C_i]$.

Sykes[10] geeft voor constante switch-over tijden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_1] &= \frac{(\rho_2/\mu_2)(1 - \rho_1)^2 + (\rho_1/\mu_1)\rho_2^2}{2(1 - \rho_1)(1 - \rho)(1 - \rho + 2\rho_1\rho_2)} \\
&+ \frac{\rho_1}{2\mu_1(1 - \rho_1)} + \frac{s(1 - \rho_1)}{2(1 - \rho)}. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Wanneer formule (3.2) vergeleken wordt met de twee hierboven genoemde formules, dan blijken deze, in het geval van deterministische bedienings- en switch-over tijden, overeen te stemmen. Het voordeel van de formule van Eisenberg is dat deze ook geldt voor meer algemeen verdeelde bedienings- en switch-over tijden. Overigens geeft Sykes in zijn artikel daarvoor ook een formule. Een voordeel van de hier gegeven formule van Sykes, formule (3.3), is dat deze qua uitdrukking beduidend korter is dan formule (3.2).

3.3.2 Stay green

Bij de ‘stay green’-strategie blijft het verkeerslicht dat op groen stond, op groen staan indien er zich in beide wachtrijen geen voertuigen bevinden. De server wordt in zo’n geval *idle* genoemd. Voor de wachttijden wordt een zogenaamde ‘pseudo conservation law’ opgesteld. Hierin wordt de aanpak van Borst[2] gevolgd.

Voor de wachttijden in een systeem zonder switch-over tijden geldt:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i \mathbb{E}[W_i] = \rho \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{1}{\mu_i^2}}{2(1 - \rho)}. \tag{3.4}$$

Hierin is $\sum_{i=1}^n \rho_i \mathbb{E}[W_i]$ de totale hoeveelheid werk in het systeem op een willekeurig moment. Deze hangt niet af van de wijze waarop de klanten bediend worden. Formule (3.4) wordt daarom ook wel een ‘conservation law’ genoemd. Wanneer er wel switch-over tijden zijn, zal $\sum_{i=1}^n \rho_i \mathbb{E}[W_i]$ wél afhangen van de wijze waarin de server de wachtrijen bediend. Voor dit geval is een ‘pseudo conservation law’ op te stellen.

De cyclus van het bedienen van beide wachtrijen en het switchen is bij ‘stay green’ praktisch dezelfde als die in het ‘blijf switchen’-geval. Onder een busy period BP_i wordt nu echter ook verstaan de tijd dat de server bij wachtrij Q_i staat maar niet aan het werk is. Met V_i wordt de totale tijd gedurende een cyclus aangegeven dat de server werkt aan Q_i . De switch-over tijden blijven onveranderd.

De volgende notatie zal, naast de notatie gegeven in 3.3.1, gebruikt worden:

- V_i de totale tijd dat de server werkt aan wachtrij Q_i gedurende een cyclus,
- I_i de totale tijd dat de server idle is bij wachtrij Q_i gedurende een cyclus,
- π_i de fractie van de tijd dat de server idle is bij wachtrij Q_i .

Noteer $\pi = \pi_1 + \pi_2$, de fractie van de tijd dat de server idle is. Verder is $\rho = \rho_1 + \rho_2$ de fractie van de tijd dat de server aan het werk is. Hieruit volgt dat $1 - \rho - \pi$ de fractie van de tijd is dat de server aan het switchen is. Aangezien de totale tijd per cyclus dat de server switcht $s = s_1 + s_2$ is, geldt dus $s = (1 - \rho - \pi)\mathbb{E}[C]$. Hiermee is de verwachte cyclusduur:

$$\mathbb{E}[C] = \frac{s}{1 - \rho - \pi}.$$

Verder geldt:

$$\mathbb{E}[V_i] = \rho_i \mathbb{E}[C] = \frac{\rho_i s}{1 - \rho - \pi}, \quad (3.5)$$

$$\mathbb{E}[I_i] = \pi_i \mathbb{E}[C] = \frac{\pi_i s}{1 - \rho - \pi}. \quad (3.6)$$

Teneinde een ‘pseudo conservation law’ op te stellen zal er nu gekeken worden naar de gewogen som van de wachttijden: $\sum_{i=1}^2 \rho_i \mathbb{E}[W_i]$. Dit is de totale hoeveelheid werk in het systeem op een willekeurig moment in de tijd. Deze kan volgens Borst geschreven worden als:

$$\sum_{i=1}^2 \rho_i \mathbb{E}[W_i] = \rho \frac{\lambda_1 \frac{1}{\mu_1^2} + \lambda_2 \frac{1}{\mu_2^2}}{2(1 - \rho)} + \mathbb{E}[Y].$$

De eerste term hierin is de totale hoeveelheid werk voor een systeem zonder switch-over tijden. De server is daarbij altijd aan het werk, mits er zich werk in het systeem bevindt. Deze term volgt uit het invullen van formule (3.4). In de tweede term geeft de stochast Y de totale hoeveelheid werk in het systeem aan op een willekeurig moment in een interval waarin de server niet aan het werk is. Dit kan een switch-over interval zijn of een interval waarin de server idle is. De tweede term is dan de verwachting hiervan.

Laat Y_i nu de totale hoeveelheid werk in het systeem zijn tijdens een switch-over interval waarin de server naar wachtrij Q_i switcht. Noteer met I de totale hoeveelheid tijd dat de server idle is gedurende een cyclus, $I = I_1 + I_2$, dan geeft dit $\mathbb{E}[I] = \mathbb{E}[I_1] + \mathbb{E}[I_2]$. Een willekeurig moment in een interval waarin de server niet aan het werk is, valt met kans $\frac{s_i}{s + \mathbb{E}[I]}$ in een switch-over naar wachtrij Q_i en met kans $\frac{\mathbb{E}[I]}{s + \mathbb{E}[I]}$ in een interval waarin de server idle is. In dit laatste geval is er geen werk in het systeem, anders zou de server immers niet idle zijn. In het eerste geval is er in verwachting een hoeveelheid $\mathbb{E}[Y_i]$ werk in het systeem. De som nemen over $i = 1, 2$ geeft dan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \frac{\mathbb{E}[I]}{s + \mathbb{E}[I]} 0 + \sum_{i=1}^2 \frac{s_i}{s + \mathbb{E}[I]} \mathbb{E}[Y_i] \\ &= \frac{s_1 \mathbb{E}[Y_1] + s_2 \mathbb{E}[Y_2]}{s + \mathbb{E}[I]}. \end{aligned}$$

Voor $\mathbb{E}[Y_i]$ kan geschreven worden:

$$\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[Z_i] + \frac{1}{2} \rho s_i.$$

Hierin is Z_i de totale hoeveelheid werk in het systeem aan het begin van de switch-over naar wachtrij Q_i . Het tweede deel van de formule geeft de totale hoeveelheid werk aan dat gearriveerd is vanaf het begin van de switch-over. Beschouw hiervoor de situatie dat er op een willekeurig moment in een switch-over interval naar het systeem wordt gekeken. De verwachte tijd dat het

switch-over interval dan al heeft geduurd is $\frac{1}{2}s_i$. Omdat er een hoeveel werk ρ per tijdseenheid arriveert, is de totale hoeveelheid werk dan toegenomen met $\frac{1}{2}\rho s_i$.

Nu is Z_1 , de totale hoeveelheid werk in het systeem aan het begin van de switch-over naar wachtrij Q_1 , gelijk aan de hoeveelheid werk die gedurende de intervallen s_2 en BP_2 bij wachtrij Q_1 is gearriveerd. De hoeveelheid werk bij wachtrij Q_2 is immers 0, anders zou de server niet switchen. Dus $\mathbb{E}[Z_1] = \rho_1(s_2 + \mathbb{E}[BP_2])$. Gebruik makend van formule (3.5) en formule (3.6) kan dit nu geschreven worden als:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_1] &= \rho_1(s_2 + \mathbb{E}[BP_2]) \\ &= \rho_1(s_2 + \mathbb{E}[V_2] + \mathbb{E}[I_2]) \\ &= \rho_1 s_2 + \rho_1 s \frac{\rho_2 + \pi_2}{1 - \rho - \pi}.\end{aligned}$$

Voor $\mathbb{E}[Z_2]$ geldt eenzelfde formule.

Substitueren van de formules geeft nu de volgende pseudo conservation law:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^2 \rho_i \mathbb{E}[W_i] &= \rho \frac{\rho_1/\mu_1 + \rho_2/\mu_2}{2(1-\rho)} + \frac{s}{2(1-\rho)}(\rho^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2) \\ &+ \rho \frac{1-\rho-\pi}{1-\rho} \frac{s}{2} + \frac{1}{1-\rho}(s_1\rho_2\pi_1 + s_2\rho_1\pi_2).\end{aligned}\quad (3.7)$$

Hierbij is gebruikt dat geldt:

$$\frac{s}{s + \mathbb{E}[I]} = \frac{1 - \rho - \pi}{1 - \rho}.$$

3.3.3 Vergelijking

Voor de strategieën ‘blijf switchen’ en ‘stay green’ zijn nu uitdrukkingen met betrekking tot de verwachte wachttijd bekend. Deze twee strategieën zullen nu in een eenvoudige situatie met elkaar vergeleken worden.

Uitgegaan wordt van een wegversmalling waarbij de aankomstintensiteit aan beide kanten gelijk is, dus $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. Daarnaast zijn de vertrekintensiteiten gelijk, $\mu_1 = \mu_2 =: \mu$, zodat volgt $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}\rho$. Daarnaast wordt genomen $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}s$, hetgeen voor een wegversmalling geen onrealistische keuze. Dit geeft $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}\pi$ voor ‘stay green’.

Voor ‘blijf switchen’ is een directe uitdrukking voor $\mathbb{E}[W_i]$ beschikbaar, bijvoorbeeld formule (3.3). Vanwege de symmetrie geldt $\mathbb{E}[W_1] = \mathbb{E}[W_2]$. Noteer voor de verwachte wachttijd in één van de wachtrijen $\mathbb{E}[W_{bs}]$, dan wordt deze:

$$\mathbb{E}[W_{bs}] = \frac{\frac{1}{2}\rho(1 - \frac{1}{2}\rho)^2 + (\frac{\rho}{2})^3}{2\mu(1 - \frac{1}{2}\rho)(1 - \rho)(1 - \rho + \frac{1}{2}\rho^2)} + \frac{\rho}{2\mu(2 - \rho)} + \frac{s(2 - \rho)}{4(1 - \rho)}.\quad (3.8)$$

Vanwege de symmetrie in de hierboven gekozen situatie kan nu ook zo’n formule voor het geval ‘stay green’ gevonden worden. Uit formule (3.7) volgt, met de notatie $\mathbb{E}[W_{sg}] := \mathbb{E}[W_1] = \mathbb{E}[W_2]$:

$$(\rho_1 + \rho_2) \mathbb{E}[W_{sg}] = \rho^2 \frac{1}{2\mu(1 - \rho)} + \rho^2 \frac{s}{4(1 - \rho)} + \rho \frac{1 - \rho - \pi}{1 - \rho} \frac{s}{2} + \rho \frac{\pi s}{4(1 - \rho)},$$

zodat, gebruik makend van $\rho = \rho_1 + \rho_2$, direct volgt:

$$\mathbb{E}[W_{sg}] = \frac{\rho}{2\mu(1 - \rho)} + \frac{\rho s}{4(1 - \rho)} + \frac{1 - \rho - \pi}{1 - \rho} \frac{s}{2} + \frac{\pi s}{4(1 - \rho)}.\quad (3.9)$$

In deze formule is alleen π nog onbekend. Eisenberg[5] beschrijft hoe deze numeriek bepaald kan worden, zie bijlage B.

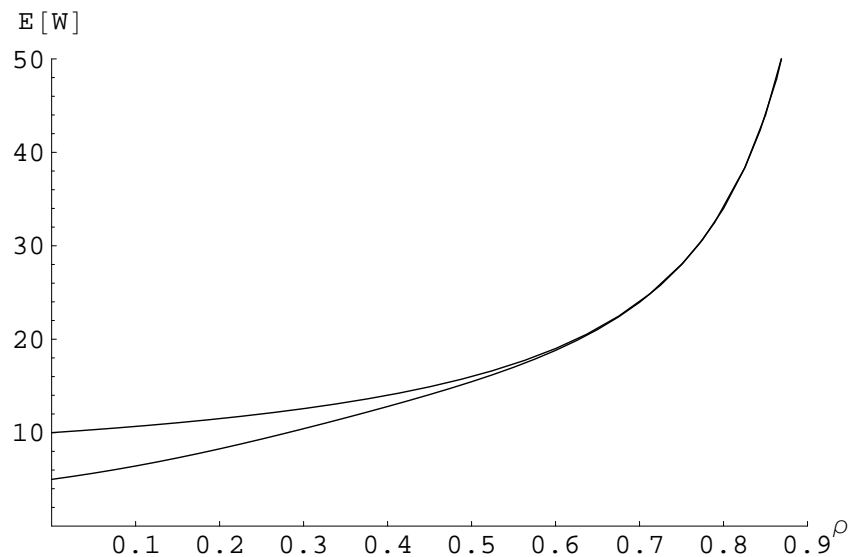
Merk op dat $\mathbb{E}[W_{bs}]$ ook uit formule (3.9) volgt. Voor het geval ‘blijf switchen’ kan namelijk dezelfde afleiding als in sectie 3.3.2 gevolgd worden. Dit geeft dat de pseudo conservation law uit formule (3.7) ook voor dit geval geldt, waar formule (3.9) uit volgt. In dit geval geldt echter $\pi_1 = \pi_2 = 0$ omdat de server nooit bij één van de wachtrijen idle kan zijn. Bij deze strategie switch de server immers direct als er geen werk meer in een wachtrij is. Dit levert in dit geval op:

$$\mathbb{E}[W_{bs}] = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)} + \frac{\rho s}{4(1-\rho)} + \frac{s}{2}.$$

Deze formule komt overeen met formule (3.8). Het voordeel is dat deze formule eenvoudiger oogt, maar het nadeel is dat deze afleiding alleen toegepast kan worden als het systeem symmetrisch is.

Om de strategieën te vergelijken, zijn voor verschillende waarden van de bezettingsgraad ρ bij de keuze $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$ per seconde en $s_1 = s_2 = 10$ seconde de verwachte wachttijden uitgezet, zie figuur 3.4.

Uit de grafiek blijkt dat ‘stay green’ een kleinere verwachte wachttijd geeft dan ‘blijf switchen’, zeker voor kleine waarden van ρ . Dit is ook te verwachten, zoals in sectie 3.2.2 aangegeven. Voor ρ is de buurt van 0 geldt zelfs dat de verwachte wachttijd bijna twee keer zo groot is. Voor grotere ρ neemt het verschil tussen de strategieën af. Vanaf $\rho \approx 0.6$ is het verschil bijna nihil.



Figuur 3.4: De verwachte wachttijd bij ‘Blijf Switchen’ (bovenste) en ‘Stay Green’ (onderste) uitgezet tegen de bezettingsgraad ρ .

Bijlage A

Simulatie

In sectie 2.9 is bij het vergelijken van de benaderingsformules gebruik gemaakt van de resultaten van een simulatie. Deze simulatie zal hier besproken worden. Eerst zal worden toegelicht hoe de simulatie is opgezet en daarna zullen de resultaten ervan gepresenteerd worden. Voor de simulatie is gebruik gemaakt van *Mathematica*, versie 5.2.

A.1 Toelichting simulatie

De situatie die gesimuleerd wordt, is beschreven in sectie 2.2. Er wordt gekeken naar de verwachte vertraging van voertuigen in één van de aankomstrichtingen van de kruising. Omdat het verkeer hier volgens een Poisson proces arriveert, zijn de tussenaankomsttijden van de voertuigen exponentieel verdeeld. Voor de simulatie wordt daarom allereerst een lijst gegenereerd met de aankomsttijden van de voertuigen, zie de eerste kolom van tabel A.1. In deze tabel is een realisatie van de simulatie weergegeven. Hiervoor zijn de parameters $c = 60$, $g = 12$, $s = \frac{1}{2}$ en $x = 0.75$. Er worden aankomsttijden voor voertuigen gegenereerd tot de volgende aankomsttijd groter is dan een vooraf ingestelde maximumtijd t_{max} . Voor de gegeven realisatie geldt $t_{max} = 240$ seconde.

Vervolgens wordt bepaald op welk moment ieder voertuig vertrekt bij het verkeerslicht. Voertuigen mogen alleen vertrekken gedurende een groenfase en een tijd $\frac{1}{s} = 2$ na het vorige vertrek. De simulatie begint met een roodfase. In de hierop volgende groenfase vinden de eerste vertrekken van de voertuigen plaats, mits deze in de wachtrij aanwezig. In de tweede kolom van de tabel zijn de vertrektijden weergegeven. Merk op dat alle vertrekken inderdaad plaatsvinden tijdens een groenfase, welke in dit geval zijn $[48, 60)$, $[108, 120)$, $[168, 180)$, $[228, 240)$.

Hierna wordt van elk voertuig de vertraging bepaald. Dit is het verschil van de vertrektijd en de aankomsttijd, de laatste kolom uit de tabel. Tot slot wordt hieruit de verwachte vertraging bepaald.

Opgemerkt wordt dat de hier gegeven realisatie met name dient om het idee achter de simulatie duidelijk te maken. Onder andere door het bijhouden van de totale vertraging als lopende som, in plaats van het voor ieder voertuig te berekenen en later te sommeren, is de werkelijk gebruikte simulatie sneller gemaakt.

A.2 Resultaten

De resultaten van de simulaties die gedaan zijn voor het opstellen van figuur 2.6(a) en figuur 2.6(b) zijn weergegeven in respectievelijk tabel A.2 en tabel A.3. In de tabellen zijn tevens de waarden gegeven die de benaderingsformules van Webster, Miller en Newell voor deze gevallen geven. In de eerste tabel is de bezettingsgraad x gevarieerd van 0.5 tot 0.9 met stappen van 0.05. Dit is gedaan bij de cyclustijd $c = 60$ seconde, de groentijd $g = 12$ seconde en de vertrekintensiteit $s = \frac{1}{2}$ per seconde. In de tweede tabel is de bezettingsgraad $x = 0.75$ constant en wordt de groentijd g bij de vaste cyclustijd $c = 60$ seconde gevarieerd, van $g = 4$ tot $g = 40$ seconde, met stappen

<i>Aankomst</i>	<i>Vertrek</i>	<i>Vertraging</i>
33.0919	48.	14.9081
109.741	109.741	0.
118.63	118.63	0.
122.701	168.	45.2993
123.759	170.	46.2414
133.003	172.	38.9975
146.169	174.	27.8315
147.264	176.	28.7359
209.33	228.	18.6705
217.78	230.	12.2204
230.278	232.	1.72159
236.818	236.818	0.
Gem.:		19.5522

Tabel A.1: Realisatie van de simulatie.

van 4 seconde. Op deze manier is de groentijd een geheel veelvoud van de duur van een vertrek van een voertuig. Om de simulatietijd acceptabel te houden is gekozen voor $t_{max} = 7.884 \cdot 10^6$ seconde, hetgeen overeenkomt met een periode van drie maanden. De simulatie start met een leeg systeem aan het begin van een roodfase. Om deze beginsituatie minder van invloed te laten zijn op de resultaten, worden de vertragingen van de eerste 2000 voertuigen niet meegenomen bij de bepaling van de verwachte vertraging. Te verwachten is namelijk dat de vertraging van de eerste voertuigen kleiner zal zijn dan het gemiddelde.

x	<i>Simulatie</i>	<i>Webster</i>	<i>Miller</i>	<i>Newell</i>
0.50	22.58	23.99	21.42	31.33
0.55	23.39	24.76	23.49	32.68
0.60	24.43	25.73	25.72	34.32
0.65	26.17	27.03	28.25	36.35
0.70	28.13	28.85	31.32	38.99
0.75	31.25	31.55	35.28	42.59
0.80	36.06	35.84	40.87	47.86
0.85	44.64	43.38	49.76	56.47
0.90	59.94	59.18	66.95	73.41

Tabel A.2: Resultaten simulatie voor variërende x .

g	<i>Simulatie</i>	<i>Webster</i>	<i>Miller</i>	<i>Newell</i>
4	66.70	57.30	66.86	87.51
8	40.86	38.83	44.39	55.04
12	31.40	31.55	35.28	42.59
16	26.00	26.89	29.52	35.17
20	21.92	23.23	25.11	29.78
24	18.69	20.08	21.40	25.43
28	15.97	17.22	18.10	21.70
32	13.38	14.57	15.09	18.39
36	11.06	12.09	12.29	15.39
40	8.963	9.784	9.667	12.67

Tabel A.3: Resultaten simulatie voor variërende g .

Bijlage B

Bepalen π_i

In het geval ‘stay green’ kan het voorkomen dat de server gedurende een bepaalde tijd idle is bij een wachtrij. De fractie van de tijd dat de server idle is bij wachtrij Q_i wordt aangeduid met π_i . In Eisenberg[5] staat beschreven hoe de waarde van π_i bepaald kan worden voor het systeem dat in sectie 3.3.2 is bekeken, namelijk met twee wachtrijen en de ‘stay green’ strategie. Deze numerieke bepaling zal hier uitgevoerd worden in het geval van een symmetrisch systeem, zoals dat in sectie 3.3.3 beschreven staat. Vanwege de symmetrie geldt hiervoor $\pi_1 = \pi_2$, zodat het volstaat één van beide, bijvoorbeeld π_1 , te bepalen.

Eisenberg maakt gebruik van de Laplace Stieltjes getransformeerde van de kansverdeling van de bedieningstijden $\tilde{B}(u)$ en die van de kansverdeling van de switch-over tijden $\tilde{S}(u)$. In het hier bekeken zijn deze:

$$\begin{aligned}\tilde{B}(u) &= e^{-u/\mu}, \\ \tilde{S}(u) &= e^{-\frac{1}{2}us}.\end{aligned}$$

Gebruik makend van deze laatste wordt gedefinieerd:

$$U(y, z) = \tilde{S}(2\lambda - \lambda y - \lambda z).$$

Laat nu $z = z_0$ en $y = y_0$ willekeurig gekozen zijn, met $0 \leq |y|, |z| \leq 1$ dan wordt voor $i = 1, 2, \dots$ de rij z_i en de rij y_i gedefinieerd door:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= \tilde{B}(\lambda - \lambda z_i), \\ z_{i+1} &= \tilde{B}(\lambda - \lambda y_i).\end{aligned}$$

Merk op dat y_{2n} en z_{2n+1} functies zijn van y en y_{2n+1} en z_{2n} functies van z voor $n = 0, 1, \dots$. Omwille van de leesbaarheid wordt geschreven:

$$\begin{aligned}U_i &= U(y_{i+1}, z_i), \\ V_i &= U(y_i, z_{i+1}).\end{aligned}$$

Eisenberg geeft voor π_1 :

$$\pi_1 = \frac{1 - \rho}{2 + \lambda s(\sigma^1(1) - \frac{1}{2})},$$

waarin

$$\sigma^1(1) = \frac{1 - \beta_1(0) - \gamma_1(0)}{\alpha_1(0)}$$

en

$$\begin{aligned}\alpha_1(z) &= \prod_{n=0}^{\infty} U_{2n} V_{2n+1}, \\ \beta_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{n=0}^{k-1} U_{2n} V_{2n+1} \right) \left(\frac{1}{2} y_{2k+1} + U_{2k} V_{2k+1} \left(\frac{1}{2} z_{2k+2} - 1 \right) \right), \\ \gamma_1(z) &= U_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{n=0}^{k-1} V_{2n+1} U_{2n+2} \right) \left(\left(\frac{1}{2} y_{2k+1} - 1 \right) + \frac{1}{2} z_{2k+2} \right).\end{aligned}$$

Nu kan π_1 dan bepaald worden door eerst voor $i = 1, 2, \dots, n_{max}$ de rij y_{2i-1} en de rij z_{2i} te bepalen voor zekere waarde van n_{max} groot genoeg, en vervolgens $\alpha_1(0)$, $\beta_1(0)$ en $\gamma_1(0)$ uit te rekenen waarbij het oneindige product respectievelijk de oneindige sommen slechts lopen tot $n_{max} - 1$.

Dit kan gedaan worden voor bijvoorbeeld de keuze $\lambda = 0.075$, $\mu = \frac{1}{2}$ en $s = 10$. Dan volgt $\rho = 0.3$. Dit geeft als waarden van y_{2i-1} en z_{2i} voor $z = 0$ en $n_{max} = 5$ de eerste kolom van de hieronder gegeven tabel. Hierin geeft 1. aan dat de waarde minder dan $5 \cdot 10^{-7}$ van 1 verschilt. Uit deze waarden volgen voor U_{2i-2} en V_{2i-1} de waarden gegeven in de tweede kolom.

z_0	=	0	U_0	=	0.647347
y_1	=	0.84034	V_1	=	0.932146
z_2	=	0.972285	U_2	=	0.987852
y_3	=	0.995123	V_3	=	0.997851
z_4	=	0.99914	U_4	=	0.999621
y_5	=	0.999848	V_5	=	0.999933
z_6	=	0.999973	U_6	=	0.999988
y_7	=	0.999995	V_7	=	0.999998
z_8	=	0.999999	U_8	=	1.
y_9	=	1.	V_9	=	1.
z_{10}	=	1.			

Hieruit volgen $\alpha_1(0) = 0.594537$, $\beta_1(0) = 0.112757$ en $\gamma_1(0) = -0.0624131$ hetgeen geeft $\sigma_1(1) = 1.5973$ en $\pi_1 = 0.247965$. De server is in dit geval dus ongeveer een kwart van de tijd idle bij wachtrij 1.

Wanneer dit gedaan wordt voor verschillende waarden van n_{max} geeft dit tabel B.1. Hieruit blijkt dat de waarde van π_1 snel convergeert. Zelfs wanneer ρ groter wordt, treedt er snel convergentie op. Laat hiervoor n_{max}^* de kleinste waarde van n_{max} zijn, waarvoor geldt dat het absolute verschil tussen π_1 bepaald met n_{max} en bepaald met $n_{max} + 1$ kleiner is dan $5 \cdot 10^{-7}$. In tabel B.2 is n_{max}^* gegeven voor verschillende waarden van ρ . Gebaseerd op deze n_{max}^* is er voor het bepalen van de waarden die in figuur 3.4 zijn uitgezet, gebruikt $n_{max} = 20$. Verder zijn er voor deze figuur stapjes van 0.025 gebruikt voor ρ . Tabel B.2 geeft de waarden uit deze figuur voor een aantal waarden van ρ .

n_{max}	$\alpha(0)$	$\beta_1(0)$	$\gamma_1(0)$	$\sigma_1(1)$	π_1
0	1	0	0	1	0.294737
1	0.603422	0.110097	-0.0606484	1.57527	0.249425
2	0.594811	0.112675	-0.0623583	1.59661	0.248011
3	0.594545	0.112755	-0.0624114	1.59728	0.247967
4	0.594537	0.112757	-0.0624131	1.59730	0.247965
5	0.594537	0.112757	-0.0624131	1.59730	0.247965

Tabel B.1: Numerieke bepaling van π_1 voor toenemende waarde van n_{max} .

ρ	n_{max}^*	π	$\mathbb{E}[W_{sg}]$	$\mathbb{E}[W_{bs}]$
0.0	1	1.00	5.00	10
0.1	2	0.76	6.43	10.67
0.2	3	0.52	8.27	11.5
0.3	4	0.30	10.42	12.57
0.4	5	0.14	12.80	14
0.5	6	0.055	15.45	16
0.6	7	0.016	18.80	19
0.7	9	0.0030	23.95	24
0.8	12	$3.0 \cdot 10^{-4}$	33.99	34
0.9	17	$4.1 \cdot 10^{-6}$	64.00	64

Tabel B.2: Waarden van n_{max}^* , van π en van de verwachte vertraging bij ‘Stay Green’ en ‘Blijf Switchen’ bij verschillende waarden van ρ .

Literatuur

- [1] I. Adan en J. Resing, *Queueing Theory*, Dictaat Wachtrijtheorie, Technische Universiteit Eindhoven, 2001.
- [2] S.C. Borst, *Polling Systems*, Proefschrift, Tilburg, 1994.
- [3] M.S. van den Broek, *Traffic signals: optimizing and analyzing traffic control systems*, Afstudeerverslag Technische Universiteit Eindhoven, 2004.
- [4] J.N. Darroch, *On the traffic-light queue*, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 35, No. 1 (Mar., 1964), pp. 380-388.
- [5] M. Eisenberg, *Two Queues with Changeover Times*, Operations Research, Vol. 19, No. 2. (Mar. - Apr., 1971), pp. 386-401.
- [6] M. Eisenberg, *Queues with Periodic Service and Changeover Time*, Operations Research, Vol. 20, No. 2 (Mar., 1972), pp. 440-451.
- [7] A.J. Miller, *Settings for Fixed-Cycle Traffic Signals*, Operational Research Quarterly 14 (1963), pp. 373-386.
- [8] G.F. Newell, *Approximation Methods for Queues with Application to the Fixed-Cycle traffic Light*, SIAM Review, Vol. 7, No. 2. (Apr., 1965), pp. 223-240.
- [9] S.M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Harcourt Academic Press, Seventh Edition, 2000.
- [10] J.S. Sykes, *Simplified Analysis of an Alternating-Priority Queuing Model with Setup Times*, Operations Research, Vol. 18, No. 6 (Nov., 1970), pp. 1182-1192.
- [11] H. Takagi, *Analysis of polling systems*, MIT Press, London, 1986.
- [12] F.V. Webster, *Traffic signal settings*, Road Research Technical Paper No. 39, Her Majesty's Stationery Office, London, reprint 1961.
- [13] C.B. Winsten, M. Beckmann en C.B. McGuire, *Studies in the Economics of Transportation*, Yale University Press, 1956.