

## BACHELOR

### Effectieve vergelijkingen voor twee-fase stroming in poreuze media

Evers, J.H.M.

*Award date:*  
2009

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

# Effectieve vergelijking bij het winnen van olie

Technische Universiteit Eindhoven  
Bacheloropleiding Technische Wiskunde  
J.H.M. Evers (0617056), juni 2009

## Probleem

Een gangbare methode om olie te winnen, is het inspuiten van water, om zo de olie uit het olieveld te ‘verdrijven’. Als je de stroming van de olie bij dit proces wil beschrijven, moet je een aantal vergelijkingen (zogenaamde differentiaalvergelijkingen) oplossen, die afhangen van de opbouw van de bodem waarin het olieveld zich bevindt. Aangezien een olieveld erg groot is, zijn de eigenschappen van de bodem waarschijnlijk niet overal hetzelfde: het reservoir bestaat uit verschillende gebieden, waarbinnen de structuur wel min of meer hetzelfde is.

Stel nu dat je een olieveld bekijkt, dat bestaat uit een aantal lagen, zodat binnen elke laag de bodem dezelfde eigenschappen heeft. Daar waar de ene laag overgaat in de andere, bevindt zich een grensvlak. De voor dit probleem relevante eigenschappen van de bodem veranderen plotseling als zo’n grensvlak gepasseerd wordt. Men zou nu voor ieder van deze lagen apart, kunnen proberen de benodigde vergelijkingen op te lossen, en de gevonden resultaten (voor elk laagje een aparte oplossing) ‘aan elkaar’ kunnen ‘knopen’ door op elk grensvlak van twee aardlagen bepaalde voorwaarden toe te passen. Dit lijkt een voor de hand liggende methode, maar het wordt al snel een hele hoop rekenwerk als er ettelijke duizenden verschillende lagen zijn.

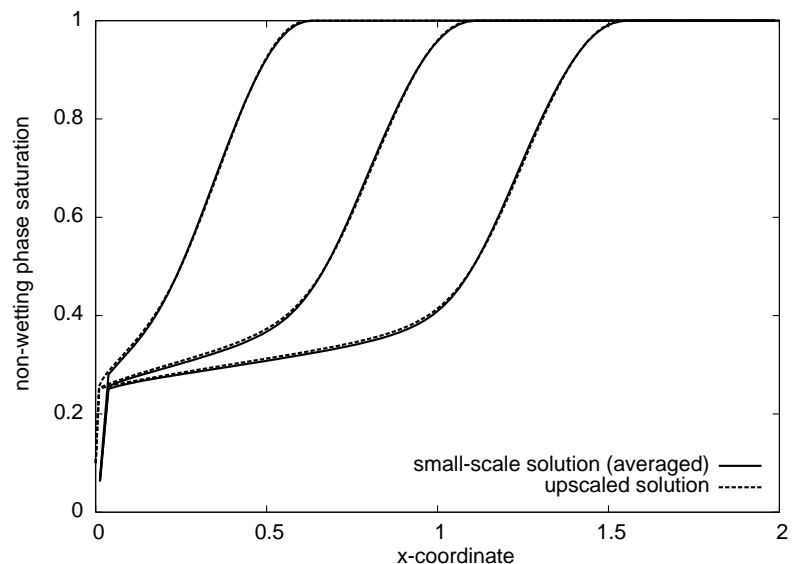
## Oplossing

Je kunt een hoop rekenwerk besparen door, als het ware, het originele oliereservoir (met zijn vele laagjes) te vervangen door één ‘gemiddelde’ laag, die qua eigenschappen representatief is voor het oorspronkelijke veld. Hiervoor wordt een wiskundige techniek gebruikt die ‘homogenisatie’ heet, en die een ‘effectieve vergelijking’, of het ‘opgeschaalde model’ oplevert. Vanwege het ontbreken van plotselinge overgangen tussen lagen in dit nieuwe model, kan in één keer een oplossing van deze vergelijking worden gevonden, die dan geldt in het hele olieveld. Dit bespaart tijd en/of moeite.

## Resultaten

Hoe goed dit opgeschaalde model is, kun je nagaan door de stroming van olie door het veld te berekenen (met een computerprogramma). Het resultaat hiervan is in de figuur weergegeven, voor een stroming in een soort horizontale buis, waarin verschillende laagjes achter elkaar zijn geplaatst. Vandaar dat de plaats in de buis met maar één coördinaat  $x$  kan worden aangegeven. Deze  $x$  is ‘dimensieloos’; dat houdt (kort door de bocht) in dat de eenheid niet van belang is. Hetzelfde geldt voor de hoeveelheid olie, die op de verticale as is uitgezet (deze heet daar *non-wetting phase saturation*). Dit is een getal tussen 0 (geen olie) en 1 (vol olie). In de figuur is de hoeveelheid olie uitgezet tegen de plaats in de ‘oliebuis’: eerst voor het model waarin alle verschillende laagjes voorkomen (de zwarte lijn in de grafiek), en daarna met behulp van de effectieve vergelijking (de stippellijn). Dit is voor drie verschillende (dimensieloze) tijdstippen gedaan: links  $t = 0.2$ , midden  $t = 0.5$  en rechts  $t = 0.8$ .

In de grafiek is te zien dat bijvoorbeeld bij  $x = 0.5$  er eerst veel olie is, daarna ‘komt’ het steile deel van de grafiek ‘voorbij’, waardoor de hoeveelheid olie snel afneemt. Dan blijft er nog wel een rest olie achter; deze kan niet gewonnen worden. Je ziet ook dat de zwarte lijn en de stippellijn goed overeenkomen. Met homogenisatie kun je de oorspronkelijke situatie dus goed benaderen.



Technische Universiteit Eindhoven  
Faculteit Wiskunde en Informatica

Bachelorproject:

**Effectieve vergelijkingen voor  
twee-fase stroming in poreuze media**

25 juni 2009

J.H.M. Evers (0617056)  
Begeleider: dr. I.S. Pop

## Samenvatting

In dit verslag wordt beschreven hoe homogenisatie kan worden toegepast op een heterogeen medium waaruit men olie wil winnen. Er wordt een één-dimensionaal model gebruikt dat bestaat uit twee verschillende soorten laagjes (grof en fijn). Deze laagjes zijn van gelijke dikte en afwisselend achter elkaar geplaatst, zodanig dat de grensvlakken loodrecht op de stromingsrichting staan.

Homogenisatie levert een effectieve vergelijking. Deze kan worden beschouwd als de vergelijking die een situatie beschrijft, waarin de olievezadiging wordt gemiddeld over twee aangrenzende lagen (één fijne en één grove), en waarbij wordt verondersteld dat het olie-veld uit 'oneindig veel' laagjes bestaat.

De kwaliteit van de verkregen resultaten wordt onderzocht met behulp van numerieke methoden.

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Voorwoord</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Inleiding</b>	<b>5</b>
2.1	Probleem . . . . .	5
2.2	Aanpak en doelstellingen . . . . .	5
2.3	Opbouw van dit verslag . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Analytische werkwijze: homogenisatie en effectieve vergelijkingen</b>	<b>7</b>
3.1	Basisidee van het hier gebruikte model . . . . .	7
3.2	Uitbreiding: groter aantal laagafhankelijke parameters . . . . .	7
3.2.1	Verschil met het originele model . . . . .	7
3.2.2	Basisvergelijkingen en -voorwaarden . . . . .	8
3.2.3	Interface tussen grof en fijn medium . . . . .	10
3.2.4	Periodiek systeem . . . . .	12
3.2.5	Asymptotische expansie voor de flux . . . . .	13
3.2.6	Asymptotische expansie voor de capillairdruk . . . . .	14
3.2.7	Nulde-orde term van de flux . . . . .	14
3.2.8	Nulde-orde term van de verzadiging . . . . .	17
3.2.9	Eerste-orde term van de flux . . . . .	17
3.2.10	Continuïteit van de eerste-orde term van de capillairdruk . . . . .	17
3.2.11	Effectieve vergelijking . . . . .	18
3.2.12	Notatie . . . . .	21
3.3	Verdere uitbreiding . . . . .	21
3.3.1	Basisvergelijkingen en -voorwaarden . . . . .	21
3.3.2	Afleiding van de effectieve vergelijking . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Numerieke oplossing</b>	<b>25</b>
4.1	Methode . . . . .	25
4.1.1	Numeriek oplossen van de oorspronkelijke vergelijking . . . . .	25
4.1.2	Numeriek oplossen van de effectieve vergelijking . . . . .	28
4.2	Berekeningen en resultaten . . . . .	29
4.2.1	Oscillerend gedrag . . . . .	30
4.2.2	Resultaten voor originele en effectieve vergelijking . . . . .	30
4.3	Aanpassing van de methode voor de oorspronkelijke vergelijking . . . . .	31
4.4	Resultaten . . . . .	34
4.4.1	Oscillerend gedrag . . . . .	34
4.4.2	Resultaten voor originele en effectieve vergelijking . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Conclusie</b>	<b>37</b>

# 1 Voorwoord

In dit verslag heb ik mijn werkzaamheden in het kader van het bachelorproject vastgelegd. Bij de keuze van het onderwerp, stond voor mij meteen al vast dat dit uit de richting 'toegepaste analyse' zou moeten komen. Dit is min of meer logisch, aangezien ik ook de minor 'Applied Physics' gevolgd heb (met keuzevak 'Fysische Transportverschijnselen'), en volgend collegejaar mijn weg in die richting wil vervolgen, met de master 'Computational Science and Engineering'.

Via de door CASA gemaakte inventarisatie van beschikbare projecten ben ik bij Sorin Pop terecht gekomen, die mij heeft begeleid op weg naar dit eindverslag. In dit verslag is beschreven hoe ik aan de hand van literatuur een 'effectieve vergelijking' heb afgeleid voor de stroming van olie door een (bijzonder geval van een) reservoir dat niet overal dezelfde eigenschappen heeft. Met behulp van numerieke methoden is de kwaliteit van de oplossing van deze vergelijking getoetst.

Hoewel dat misschien wat sentimenteel is bij een project van beperkte omvang, zoals dit, wil ik toch mijn begeleider Sorin Pop bedanken voor zijn hulp en enthousiasme, en voor de vrijheid die ik heb gekregen. Nooit kreeg ik het idee met iets bezig te zijn, dat voor hem triviaal of onbelangrijk was.

Joep Evers  
juni 2009

## 2 Inleiding

In de moderne wereld neemt olie een centrale plaats in. Het bezit van olievelden geeft landen, bijna als vanzelfsprekend, een prominente plaats op het wereldtoneel, daar de rest van de wereld afhankelijk is van olie. Anderzijds neemt de wereldwijde voorraad fossiele brandstoffen snel in omvang af, door de toenemende consumptie. Het efficiënt en zo volledig mogelijk 'leegmaken' van olievelden is voor exploitanten dan ook zeer belangrijk.

### 2.1 Probleem

Een gangbare methode om olie te winnen, is het injecteren van water, om zo de olie te 'verdrijven'. Dit proces kan men modelleren met behulp van differentiaalvergelijkingen, waarvan de parameters onder meer afhankelijk zijn van de opbouw van de bodem (doorlatendheid, korrelgrootte etcetera). Aangezien een olieveld erg groot is, zijn de eigenschappen van de bodem waarschijnlijk niet overal hetzelfde. Het reservoir waarin zich olie bevindt, bestaat uit verschillende gebieden, waarbinnen de structuur min of meer homogeen is.

Stel nu dat je een olieveld bekijkt, dat bestaat uit een aantal homogene lagen. Daar waar de ene laag overgaat in de andere, bevindt zich dan een grensvlak. De overgang tussen lagen verloopt dus niet geleidelijk, maar abrupt: bepaalde karakteristieke eigenschappen van de bodem veranderen plotseling als zo'n grensvlak gepasseerd wordt. Men zou nu voor ieder van deze lagen apart, kunnen proberen de benodigde vergelijkingen (exact of numeriek) op te lossen, en de gevonden resultaten kunnen combineren door op elk grensvlak van twee aardlagen zekere randvoorwaarden toe te passen. Dit lijkt een voor de hand liggende methode, maar het wordt al snel een enorm karwei als er ettelijke duizenden verschillende lagen zijn.

De vraag is, hoe men, als het ware, het heterogene oliereservoir zou kunnen vervangen door één homogene, 'gemiddelde' laag, die qua eigenschappen representatief is voor het oorspronkelijke veld. Vanwege het ontbreken van interfaces tussen lagen binnen het veld, is het onderzoeken van de stroming in dit nieuwe model een veel minder tijdrovende zaak.

### 2.2 Aanpak en doelstellingen

Een aantal artikelen die specifiek gaan over de hierboven beschreven situatie, liggen aan de basis van hetgeen in de rest van dit verslag wordt behandeld. Het gaat hier met name om [2], en om [3], waarin de methode van [2] is verbeterd.

Eenzijds zijn deze artikelen gebruikt voor literatuurstudie over dit onderwerp. Anderzijds dienden ze als uitgangspunt voor eigen uitbreidingen en verder onderzoek. De beschrijving van dit eigen werk en de daarbij relevante onderdelen uit de literatuurstudie zijn geïntegreerd in één geheel in de rest van dit verslag.

Naast de theoretische aanpak naar aanleiding van de genoemde artikelen, worden numerieke methoden gebruikt. Het doel hiervan is tweeledig. Op de eerste plaats kan op deze manier de overeenkomst tussen de originele situatie en de gemodelleerde 'gemiddelde' situatie worden onderzocht. Aan de andere kant is het een doel op zich: het opdoen van ervaring met computerberekeningen.

### 2.3 Opbouw van dit verslag

De tweedeling tussen de analytische afleiding van de effectieve vergelijkingen enerzijds, en de toetsing van de resultaten met behulp van numerieke methoden anderzijds, is ook in dit verslag aanwezig.

In sectie 3 wordt de homogenisatie-procedure uit [2] en [3] vanaf de basis beschreven, met daarin verwerkt een eigen uitbreiding. De numerieke toetsing van de resultaten vindt plaats in sectie 4. Daaraan voorafgaand wordt in die sectie eerst beschreven volgens welke methode de numerieke berekeningen worden uitgevoerd.

Het verslag wordt afgesloten met een conclusie in sectie 5.



### 3 Analytische werkwijze: homogenisatie en effectieve vergelijkingen

#### 3.1 Basisidee van het hier gebruikte model

Zoals in *Homogenization and porous media*, [4], wordt beschreven, is homogenisatie een wiskundige manier om het 'gemiddelde' te nemen van differentiaalvergelijkingen over een groter gebied (de zogenaamde 'effectieve vergelijking'). Hierbij bekijkt men een relevante functie  $u_\varepsilon$  die afhankelijk is van een zekere kleine schaalparameter  $\varepsilon$ . Het 'gemiddelde' dat men probeert te berekenen wordt nu geïdentificeerd met de limiet  $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$ .

Deze methode is in [2] toegepast op een heterogeen olieveld, waaruit olie wordt gewonnen door de injectie van water. Men gaat uit van een (sterk geïdealiseerde) situatie, waarin een één-dimensionale stroming plaatsvindt. Het permeabele medium bestaat uit lagen van gelijke dikte  $L_y$ , die achtereenvolgens grof (lees: goed doorlatend), en fijn (lees: slecht doorlatend) zijn. De grensvlakken tussen de lagen staan loodrecht op de stromingsrichting. Als  $L_x$  karakteristiek is voor de afmeting van het olieveld, wordt de kleine parameter  $\varepsilon$  gegeven door  $\varepsilon = L_y/L_x$ . Het nemen van de limiet  $\varepsilon \rightarrow 0$ , kan hier worden gekoppeld aan de veronderstelling dat een olieveld bestaat uit 'oneindig veel' uiterst dunne laagjes.

Met behulp van deze parameter  $\varepsilon$  kan men de olieverzadiging  $u$ , de flux  $F$  en de capillairdruk  $p_c$  ontwikkelen in een reeks in termen van  $\varepsilon$ . In [2] maakt men gebruik van de continuïteit van de flux op elke interface die twee homogene laagjes scheidt. Dit betekent dat alle termen van de  $\varepsilon$ -expansie van  $F$  continu moeten zijn. Daarnaast wordt in dit artikel aangenomen dat de eerste-orde  $\varepsilon$ -term  $u_1$  van de verzadiging ook continu is op een interface.

Deze laatste aanname wordt echter in [3] onder de loep genomen, en wordt vervolgens vervangen door de aanname dat de eerste twee termen van de capillairdruk  $p_c$  continu zijn. In dit verslag wordt de verbeterde werkwijze van [3] aangehouden, en wordt dus eveneens aangenomen dat de eerste twee termen van de druk continu zijn.

#### 3.2 Uitbreiding: groter aantal laagafhankelijke parameters

Er zal nu een uitgebreide beschrijving volgen van de stappen die in [2] en [3] achtereenvolgens genomen worden, om tot een effectieve vergelijking te komen. Zoals in de inleiding (sectie 2) al vermeld is, zal in deze parafrasering van de gedane literatuurstudie, een eigen uitbreiding van het model geïntegreerd worden.

##### 3.2.1 Verschil met het originele model

In het originele model van Van Duijn *et al.* was alleen de permeabiliteitsparameter  $k$  afhankelijk van de laag die beschouwd wordt. In het vervolg zal tevens worden meegenomen dat de gebruikte Leverett-functie  $J(x, u)$  afhankelijk is van de laag. Er geldt steeds dat het capillairgetal van orde 1 is:  $N_c = O(1)$ , evenals de verhouding tussen beide gebruikte permeabiliteiten:  $k^+/k^- = O(1)$ . De hier genoemde parameters worden overigens nog nader toegelicht.

### 3.2.2 Basisvergelijkingen en -voorwaarden

De belangrijkste vergelijkingen die dit probleem bepalen, zijn twee vergelijkingen voor massabehoud (waarin  $\alpha$  staat voor  $o$  of  $w$ , 'olie' of 'water'):

$$\phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

en voor beide  $\alpha$ 's de Wet van Darcy:

$$q_\alpha = -k(x) \frac{k_{r\alpha}(S_\alpha)}{\mu_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial x}. \quad (3.2)$$

In deze vergelijkingen komen de volgende grootheden voor:  $\phi, S, q, k, k_r, \mu, p$ , die achtereenvolgens staan voor de porositeit, de verzadiging (het volume van fase  $\alpha$  gedeeld door het totale volume van de poriën), het specifieke debiet, de absolute permeabiliteit, de relatieve permeabiliteit, de viscositeit en de druk. Daarbij geeft de subscript  $\alpha$  aan op welke fase de grootheid betrekking heeft. De volgende voorwaarden leggen een verband tussen de twee fasen:

$$S_o + S_w = 1, \quad (3.3)$$

$$p_o - p_w = p_c(x, S_w). \quad (3.4)$$

De in (3.4) voorkomende capillairdruk  $p_c$  wordt volgens het Leverett-model, beschreven door:

$$p_c(x, S_w) = \sigma \sqrt{\frac{\phi}{k(x)}} J(x, S_w), \quad (3.5)$$

waarin  $\sigma$  de spanning op de raakvlakken tussen beide fasen weergeeft, en  $J$  de zogenaamde Leverett-functie is.

Definieer nu het totale debiet  $q = q_o + q_w$ . Door (3.1) voor  $\alpha = o$  en  $\alpha = w$  op te tellen, volgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \phi \frac{\partial S_o}{\partial t} + \frac{\partial q_o}{\partial x} + \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial q_w}{\partial x} \\ &= \phi \frac{\partial (S_o + S_w)}{\partial t} + \frac{\partial (q_o + q_w)}{\partial x} \\ &= \phi \frac{\partial (1)}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \quad (\text{na substitutie van (3.3)}) \\ &= \frac{\partial q}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Uit (3.6) volgt dat  $q$  dus constant is in  $x$ . Neem verder aan dat  $q$  ook constant is in de tijd. De hoeveelheid water die per tijdseenheid wordt geïnjecteerd, is namelijk controleerbaar en kan dus constant gehouden worden.

Neem nu de afgeleide van (3.5) naar  $x$ , en substitueer de Wet van Darcy (3.2):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_c}{\partial x} &= \frac{\partial p_o}{\partial x} - \frac{\partial p_w}{\partial x} \\
&= -\frac{\mu_o}{kk_{ro}}q_o + \frac{\mu_w}{kk_{rw}}q_w \\
&= -\frac{\mu_o}{kk_{ro}}q_o + \frac{\mu_w}{kk_{rw}}(q - q_o) \\
&= -\left(\frac{\mu_o}{kk_{ro}} + \frac{\mu_w}{kk_{rw}}\right)q_o + \frac{\mu_w}{kk_{rw}}q.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Dus:

$$q_o = \frac{\frac{\mu_w}{kk_{ro}}q - \frac{\partial p_c}{\partial x}}{\frac{\mu_o}{kk_{ro}} + \frac{\mu_w}{kk_{rw}}}. \tag{3.8}$$

Substitueer (3.8) in (3.1) voor  $\alpha = o$ :

$$\phi \frac{\partial S_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_{ro}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} q - \frac{k}{\mu_w} \frac{k_{ro} k_{rw}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} \frac{\partial p_c}{\partial x} \right) = 0. \tag{3.9}$$

Definieer nu  $u := S_o$  (dus  $S_w = 1 - u$ ) en de dimensieloze variabelen  $\hat{x} := x/L_x$ ,  $\hat{t} := tq/\phi L_x$ ,  $\hat{k} := k/K$ . Hierin zijn  $L_x$  en  $K$  een karakteristieke macroscopische lengteschaal, respectievelijk een karakteristieke permeabiliteit. Met deze schaling wordt (3.9):

$$\begin{aligned}
0 &= \phi \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{t}} \frac{\partial S_o}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \frac{k_{ro}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} q - \frac{\hat{k}K}{\mu_w} \frac{k_{ro} k_{rw}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial p_c}{\partial \hat{x}} \right) \\
&= \phi \frac{q}{\phi L_x} \frac{\partial S_o}{\partial \hat{t}} + \frac{1}{L_x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \frac{k_{ro}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} q - \frac{\hat{k}K}{\mu_w L_x} \frac{k_{ro} k_{rw}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} \frac{\partial p_c}{\partial \hat{x}} \right).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Gebruik nu onder andere dat  $\partial q/\partial x = 0$ , dus ook  $\partial q/\partial \hat{x} = 0$ , dat wil zeggen dat  $q$  een constante is, met betrekking tot differentiëren naar  $x$ . Bovenstaande vergelijking kan nu in de volgende vorm geschreven worden:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial u}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \frac{k_{ro}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} - \frac{\hat{k}K}{\mu_w q L_x} \frac{k_{ro} k_{rw}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} \frac{\partial p_c}{\partial \hat{x}} \right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \frac{k_{ro}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} - \frac{\hat{k}K}{\mu_w q L_x} \frac{k_{ro} k_{rw}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \sigma \sqrt{\frac{\phi}{\hat{k}K}} J(\hat{x}, u) \right) \right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \frac{k_{ro}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} - \hat{k} \frac{\sigma \sqrt{K\phi}}{\mu_w q L_x} \frac{k_{ro} k_{rw}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \frac{J(\hat{x}, u)}{\sqrt{\hat{k}}} \right) \right).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Voor de leesbaarheid worden in het vervolg de hoedjes op de dimensieloze variabelen achterwege gelaten. Definieer nu de constanten  $N_c$  (capillairgetal) en  $M$  (viscositeitsratio), welke beide dimensieloos zijn:

$$N_c := \frac{\sigma \sqrt{K\phi}}{\mu_w q L_x}, \quad M := \frac{\mu_o}{\mu_w}. \tag{3.12}$$

Herdefinieer  $p_c$ , die in dit geval staat voor de dimensieloze capillairdruk:

$$p_c(x, u) := \frac{J(x, u)}{\sqrt{k(x)}}. \quad (3.13)$$

Als daarnaast de 'fractional flow function'  $f$  en de flux  $F$  gegeven zijn door:

$$f(u) := \frac{k_{ro}(u)}{k_{ro}(u) + Mk_{rw}(u)}, \quad (3.14)$$

$$F := f(u) - N_c k(x) k_{rw}(u) f(u) \frac{\partial}{\partial x} p_c(x, u), \quad (3.15)$$

kan (3.11), in dimensieloze vorm, worden geschreven als:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (3.16)$$

**Opmerking:** de gebruikte Leverett-functie  $J$  is hier een strict stijgende functie in  $u$  (die tevens van  $x$  afhangt). Verder geldt  $J(u=0) > 0$  en  $\lim_{u \rightarrow 1} J(x, u) = \infty$ .

$k_{ro}$  is strict stijgend op  $[0,1]$ , met  $k_{ro}(0) = 0$ , terwijl  $k_{rw}$  juist strict dalend is op dat interval, met  $k_{rw}(1) = 0$ . Dit betekent dat  $f(0) = 0$  en  $f(1) = 1$ , en dat  $f$  strict stijgend is op  $[0,1]$ . De afgeleide naar  $u$  van  $f(u)$  is namelijk:

$$\begin{aligned} \frac{df(u)}{du} &= \frac{(k_{ro} + Mk_{rw})k'_{ro} - k_{ro}(k'_{ro} + Mk'_{rw})}{(k_{ro} + Mk_{rw})^2} \\ &= \frac{Mk_{rw}k'_{ro} - Mk_{ro}k'_{rw}}{(k_{ro} + Mk_{rw})^2} > 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Hierbij is gebruikt dat  $k'_{ro} > 0$  en  $k'_{rw} < 0$ , terwijl  $k_{ro} \geq 0$  en  $k_{rw} \geq 0$ , maar nooit gelijktijdig 0. Hieruit volgt dat zowel de teller als de noemer strict groter dan 0 zijn.

### 3.2.3 Interface tussen grof en fijn medium

Beschouw nu de situatie waarin  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  en  $u(x, 0) = \tilde{u}_0(x)$ . Neem aan dat er op  $x = 0$  een overgang plaatsvindt, tussen een grof medium links en een fijn medium rechts, waarbij de parameter  $k(x)$  en de functie  $J(x, u)$  aan weerszijden van de interface gegeven worden door:

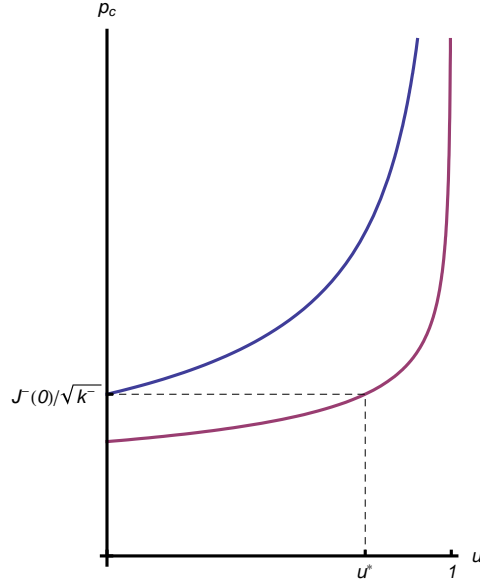
$$k(x) = \begin{cases} k^+, & \text{voor } x < 0; \\ k^-, & \text{voor } x > 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

$$J(x, u) = \begin{cases} J^+(u), & \text{voor } x < 0; \\ J^-(u), & \text{voor } x > 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

**Eis:** hierbij geldt als extra eis dat  $k^- < k^+$  en, voor de capillairdruk, dat  $J^+(0)/\sqrt{k^+} < J^-(0)/\sqrt{k^-}$ .

**Opmerking:** aangezien  $J^+$  strict stijgend is, moet er een  $u$  zijn waarvoor  $J^+(u)/\sqrt{k^+} = J^-(0)/\sqrt{k^-}$  (zie figuur 1). Noem deze waarde  $u^*$ : de drempel-verzadiging, die dus uniek bepaald is door:

$$\frac{J^+(u^*)}{\sqrt{k^+}} = \frac{J^-(0)}{\sqrt{k^-}}. \quad (3.20)$$



Figuur 1: Capillairdruk  $p_c(u) = J(u)/\sqrt{k}$  als functie van de verzadiging  $u$ , in de fijne laag (blauw) en de grove laag (paars). De drempelwaarde  $u^*$  is aangegeven.

Uit (3.20) volgt dat voor alle  $u < u^*$  geldt dat  $J^+(u)/\sqrt{k^+} < J^-(0)/\sqrt{k^-}$ , wat impliceert dat de capillairdruk alleen continu is in  $x = 0$  als de verzadiging in de grove laag ( $u(0-)$ ) minstens  $u^*$  bedraagt. Indien  $u(0-) < u^*$  kan er dus geen olie stromen van de grove naar de fijne laag; dit wordt het 'trapping effect' genoemd. Op een overgang van een grof naar een fijn medium blijft dus ook altijd olie achter.

Andersom, impliceert  $u(0-) \geq u^*$  dat er olie gaat stromen en dat dus  $u(0+) > 0$ . In dit geval is ook de capillairdruk continu. Anderzijds betekent  $u(0+) = 0$  dat  $u(0-) < u^*$  moet zijn en dat de capillairdruk niet continu kan zijn. Dit verband is te schrijven als de randvoorwaarde:

$$u(0+, t) \left( p_c(0+, t) - p_c(0-, t) \right) = 0. \quad (3.21)$$

De extra eis  $J^+(0)/\sqrt{k^+} < J^-(0)/\sqrt{k^-}$  geeft dat hierin altijd geldt:

$$p_c(0+, t) - p_c(0-, t) \geq 0. \quad (3.22)$$

Bovenstaande uitleg is ook te schrijven als:

$$\begin{cases} u(0-, t) < u^* & \Rightarrow u(0+, t) = 0, \\ u(0-, t) \geq u^* & \Rightarrow \frac{J^+(u(0-, t))}{\sqrt{k^+}} = \frac{J^-(u(0+, t))}{\sqrt{k^-}}. \end{cases} \quad (3.23)$$

In de literatuur wordt het bovenstaande ook wel de 'extended pressure condition' genoemd; onderbouwing kan worden gevonden in [1].

Daarnaast is (natuurlijk) ook de flux  $F$  continu op  $x = 0$ :

$$F(u(0-), t) = F(u(0+), t). \quad (3.24)$$

### 3.2.4 Periodiek systeem

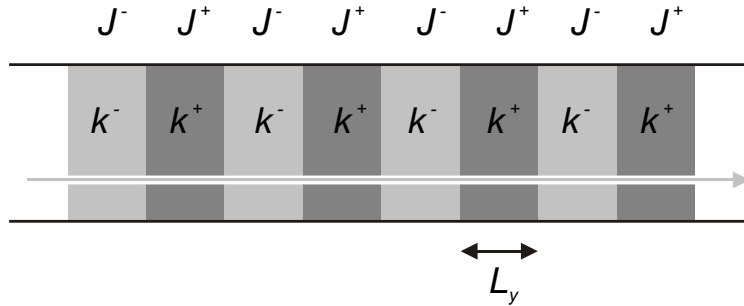
Bekijk nu een situatie waarin er niet alleen op  $x = 0$  een overgang van grof naar fijn materiaal plaatsvindt. In plaats daarvan is er een systeem van een (groot) aantal lagen van gelijke dikte, die achtereenvolgens bestaan uit afwisselend grof (met  $k^+$ ,  $J^+$ ) en fijn (met  $k^-$ ,  $J^-$ ) materiaal (zoals in figuur 2). Laat  $L_x$  (zoals al eerder aangenomen is) een karakteristieke macroscopische lengteschaal zijn. Laat  $L_y$  een karakteristieke microscopische lengteschaal zijn (de dikte van één laag), en definieer  $\varepsilon$  als:

$$\varepsilon := \frac{L_y}{L_x}. \quad (3.25)$$

Laat  $y = x/\varepsilon$  de variabele op de microschaal zijn, en neem in het vervolg aan dat  $x$  en  $y$  onafhankelijk zijn. De verzameling  $\{\varepsilon j | j \in \mathbb{Z}\}$  geeft nu de collectie van interfaces aan. In dit systeem hebben de opeenvolgende lagen de volgende parameters  $k$  en  $J$ :

$$k(x) = \begin{cases} k^+, & \text{voor } x \in ((2j-1)\varepsilon, 2j\varepsilon), j \in \mathbb{Z}; \\ k^-, & \text{voor } x \in (2j\varepsilon, (2j+1)\varepsilon), j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.26)$$

$$J(x, u) = \begin{cases} J^+(u), & \text{voor } x \in ((2j-1)\varepsilon, 2j\varepsilon), j \in \mathbb{Z}; \\ J^-(u), & \text{voor } x \in (2j\varepsilon, (2j+1)\varepsilon), j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.27)$$



Figuur 2: Schematische weergave van een poreus medium dat afwisselend bestaat uit fijne en grove laagjes, elk steeds van dikte  $L_y$ . Bij een fijne laag horen de karakteristieken  $J^-$  en  $k^-$ , bij een grove laag  $J^+$  en  $k^+$ . De pijl geeft de richting van de vloeistofstroom aan.

In analogie met de interface-condities (3.23), gelden nu de volgende overgangscondities:

$$x = 2j\varepsilon : \begin{cases} u(2j\varepsilon-) < u^* \Rightarrow u(2j\varepsilon+) = 0, \\ u(2j\varepsilon-) \geq u^* \Rightarrow \frac{J^+(u(2j\varepsilon-))}{\sqrt{k^+}} = \frac{J^-(u(2j\varepsilon+))}{\sqrt{k^-}}. \end{cases} \quad (3.28)$$

$$x = (2j+1)\varepsilon : \begin{cases} u((2j+1)\varepsilon+) < u^* \Rightarrow u((2j+1)\varepsilon-) = 0, \\ u((2j+1)\varepsilon+) \geq u^* \Rightarrow \frac{J^-(u((2j+1)\varepsilon-))}{\sqrt{k^-}} = \frac{J^+(u((2j+1)\varepsilon+))}{\sqrt{k^+}}. \end{cases} \quad (3.29)$$

### 3.2.5 Asymptotische expansie voor de flux

Schrijf de verzadiging  $u$  als een asymptotische expansie:

$$u_\varepsilon(x, t) = u_0(x, y, t) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t) + \dots = u_0 + \Delta u. \quad (3.30)$$

Hierbij zijn de functies  $u_j$  periodiek in  $y$  (dus op de microschaal). De  $x$ -afhankelijkheid betekent hier een '+' of een '-', corresponderend met de betreffende laag.

Voor de flux (3.15) is een Taylor-expansie te schrijven. Beschouw daarbij alleen de binnengebieden van een laag (niet de interfaces), en houdt in het achterhoofd dat zowel  $J$  als  $k$  hier gelezen moeten worden als  $J^+$  of  $J^-$ , dan wel als  $k^+$  of  $k^-$ , afhankelijk van de laag die bekeken wordt. Dan:

$$\begin{aligned} F(u_0 + \Delta u) &= f(u_0 + \Delta u) - N_c k k_{rw}(u_0 + \Delta u) f(u_0 + \Delta u) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{J(u_0 + \Delta u)}{\sqrt{k}} \right) \\ &= f(u_0 + \Delta u) - N_c k k_{rw}(u_0 + \Delta u) f(u_0 + \Delta u) \frac{J'(u_0 + \Delta u)}{\sqrt{k}} \frac{\partial(u_0 + \Delta u)}{\partial x} \\ &= f(u_0 + \Delta u) - N_c \sqrt{k} D(u_0 + \Delta u) \frac{\partial(u_0 + \Delta u)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

met:

$$D(u_0 + \Delta u) := k_{rw}(u_0 + \Delta u) f(u_0 + \Delta u) J'(u_0 + \Delta u). \quad (3.32)$$

De flux wordt nu als een expansie in termen van  $\varepsilon$  gegeven door:

$$F(u_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} F_0 + F_1 + \varepsilon F_2 + \dots \quad (3.33)$$

De 'coëfficiënten'  $F_0$ ,  $F_1$  en  $F_2$  staan hierin voor:

$$F_0 := -N_c \sqrt{k} D(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} F_1 &:= f(u_0) - N_c \sqrt{k} D(u_0) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ &\quad - N_c \sqrt{k} D'(u_0) u_1 \frac{\partial u_0}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} F_2 &:= f'(u_0) u_1 - N_c \sqrt{k} D(u_0) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \\ &\quad - N_c \sqrt{k} D'(u_0) u_1 \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ &\quad - N_c \sqrt{k} \left( D'(u_0) u_2 + \frac{1}{2} D''(u_0) u_1^2 \right) \frac{\partial u_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Door de expansies voor de verzadiging en de flux te substitueren in vergelijking (3.16) en de termen van bepaalde orde  $\varepsilon$  apart te beschouwen, vindt men de volgende vergelijkingen:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -N_c \sqrt{k} D(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (\text{orde } \varepsilon^{-2}) \quad (3.37)$$

$$\text{dus:} \quad -N_c \sqrt{k} D(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial y} = F_0 = F_0(x, t), \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, \quad (\text{orde } \varepsilon^{-1}) \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0. \quad (\text{orde } \varepsilon^0) \quad (3.40)$$

### 3.2.6 Asymptotische expansie voor de capillairdruk

De Taylor-reeks van de capillairdruk (zie uitdrukking (3.13)) in termen van  $u_0$  en  $\Delta u$  is:

$$\begin{aligned} p_c(u_0 + \Delta u) &= \frac{J(u_0 + \Delta u)}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \left( J(u_0) + \frac{\partial J(u)}{\partial u} \Big|_{u_0} \Delta u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u^2} \Big|_{u_0} (\Delta u)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \left( J(u_0) + \varepsilon u_1 J'(u_0) + O(\varepsilon^2) \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\text{omdat} \quad \Delta u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$$

De eerste twee termen van de druk worden verondersteld continu te zijn op een interface. Deze aanname zal later gebruikt worden.

### 3.2.7 Nulde-orde term van de flux

Voor  $F_0$  geldt niet alleen dat deze onafhankelijk is van  $y$ , maar zelfs dat deze identiek gelijk is aan 0. Neem daartoe eerst aan  $F_0 < 0$ . Aangezien de flux continu is, geldt dat  $F_0 < 0$  in alle lagen, als gegeven is dat  $F_0 < 0$  in één laag. Voor het teken van  $F_0$  hoeft er dus geen onderscheid tussen de lagen gemaakt te worden.

Definieer de volgende functies:

$$w(y) := J(u_0(y)), \quad (3.42)$$

$$\lambda(w) := k_{rw}(J^{-1}(w))f(J^{-1}(w)) = k_{rw}(u_0(y))f(u_0(y)), \quad (3.43)$$

$$\Lambda(w) := \int_{J(0)}^w \lambda(s) ds. \quad (3.44)$$

$\Lambda$  is strict stijgend, aangezien  $\lambda$  positief is. Deze functies hangen alledrie af van de specifieke laag, die beschouwd wordt. De '+' en '-' zijn echter omwille van de leesbaarheid in deze definities weggelaten.

Met  $D(u_0)\partial u_0/\partial y = \lambda\partial w/\partial y$ , en omdat  $F_0 < 0$ , wordt (3.34):

$$\sqrt{k}\lambda \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{F_0}{N_c} =: \tilde{F} > 0. \quad (3.45)$$



Voor  $-1 < y < 0$  (grof medium) geldt nu, met de substitutie  $s = s(y) \sim w(y)$ , het volgende:

$$\begin{aligned}
\Lambda^+(w^+(0-)) - \Lambda^+(w^+(-1+0)) &= \int_{w^+(-1+0)}^{w^+(0-)} \lambda^+(s) ds \\
&= \int_{-1+0}^{0-} \lambda^+(s(y)) \frac{\partial s}{\partial y} dy \\
&= \int_{-1+0}^{0-} \frac{\tilde{F}^+}{\sqrt{k^+}} \frac{\partial s}{\partial y} dy \\
&= \frac{\tilde{F}^+}{\sqrt{k^+}} \int_{-1+0}^{0-} dy = \frac{\tilde{F}^+}{\sqrt{k^+}}, \tag{3.46}
\end{aligned}$$

omdat  $\tilde{F}^+$   $y$ -onafhankelijk is. Daarnaast geldt:

$$\int_{w^+(-1+0)}^{w^+(0-)} \lambda^+(s) ds \leq (w^+(0-) - w^+(-1+0)) \|\lambda^+\|_\infty. \tag{3.47}$$

De vergelijkingen (3.46) en (3.47) geven samen:

$$w^+(0-) \geq w^+(-1+0) + \frac{\tilde{F}^+}{\sqrt{k^+}} \frac{1}{\|\lambda^+\|_\infty}, \tag{3.48}$$

en analoog geldt voor een fijn medium op  $0 < y < 1$ :

$$w^-(1-0) \geq w^-(0+) + \frac{\tilde{F}^-}{\sqrt{k^-}} \frac{1}{\|\lambda^-\|_\infty}. \tag{3.49}$$

Gebruik nu de voorwaarden (3.28) en (3.29), en onderscheid de gevallen  $w^+(0-) < J^+(u^*)$  en  $w^+(0-) \geq J^+(u^*)$ .

**Geval 1:**  $w^+(0-) < J^+(u^*)$ :

Als  $w^+(0-) < J^+(u^*)$  dan  $w^-(0+) = J^-(0)$ . Dit volgt uit conditie (3.28).

Verder volgt uit (3.49) dat  $w^-(1-0) \geq w^-(0+) + \frac{\tilde{F}^-}{\sqrt{k^-}} \frac{1}{\|\lambda^-\|_\infty} > w^-(0+) = J^-(0)$ .

Aangezien dus  $w^-(1-0) \neq J^-(0)$  volgt uit (3.29) en de periodiciteit van de functies  $u_i$  dat  $w^+(1+0) = w^+(-1+0) \geq J^+(u^*)$ .

Nu geeft (3.48) dat  $w^+(0-) \geq w^+(-1+0) + \frac{\tilde{F}^+}{\sqrt{k^+}} \frac{1}{\|\lambda^+\|_\infty} > w^+(-1+0) \geq J^+(u^*)$ , wat in tegenspraak is met  $w^+(0-) < J^+(u^*)$ .

**Geval 2:**  $w^+(0-) \geq J^+(u^*)$ :

Als  $w^+(0-) \geq J^+(u^*)$ , dan  $\frac{w^+(0-)}{\sqrt{k^+}} = \frac{w^-(0+)}{\sqrt{k^-}}$  volgens conditie (3.28).

Dit betekent  $w^-(0+) = \sqrt{\frac{k^-}{k^+}} w^+(0-)$ .

(3.48) en (3.49) geven:

$$\begin{aligned}
w^-(1-0) &\geq w^-(0+) + \frac{\tilde{F}^-}{\sqrt{k^-} \|\lambda^-\|_\infty} \frac{1}{\sqrt{k^-}} \\
&= \sqrt{\frac{k^-}{k^+}} w^+(0-) + \frac{\tilde{F}^-}{\sqrt{k^-} \|\lambda^-\|_\infty} \frac{1}{\sqrt{k^-}} \\
&\geq \sqrt{\frac{k^-}{k^+}} \left( w^+(-1+0) + \frac{\tilde{F}^+}{\sqrt{k^+} \|\lambda^+\|_\infty} \frac{1}{\sqrt{k^+}} \right) + \frac{\tilde{F}^-}{\sqrt{k^-} \|\lambda^-\|_\infty} \frac{1}{\sqrt{k^-}} \\
&= \sqrt{\frac{k^-}{k^+}} w^+(-1+0) + \left( \frac{\sqrt{k^-} \tilde{F}^+}{k^+ \|\lambda^+\|_\infty} + \frac{\tilde{F}^-}{\sqrt{k^-} \|\lambda^-\|_\infty} \right).
\end{aligned}$$

Onderscheid hier weer twee gevallen: ofwel  $w^+(-1+0) \geq J^+(u^*)$ , ofwel  $w^+(-1+0) < J^+(u^*)$ .

**Geval 2a:**  $w^+(-1+0) \geq J^+(u^*)$ :

Als  $w^+(-1+0) \geq J^+(u^*)$ , dan  $\frac{w^+(-1+0)}{\sqrt{k^+}} = \frac{w^-(-1-0)}{\sqrt{k^-}}$  volgens conditie (3.29).

Dus:  $w^+(-1+0) = \sqrt{\frac{k^+}{k^-}} w^-(-1-0)$ .

Het bovenstaande combineert tot:

$$\begin{aligned}
w^-(1-0) &\geq \sqrt{\frac{k^-}{k^+}} w^+(-1+0) + \left( \frac{\sqrt{k^-} \tilde{F}^+}{k^+ \|\lambda^+\|_\infty} + \frac{\tilde{F}^-}{\sqrt{k^-} \|\lambda^-\|_\infty} \right) \\
&= \sqrt{\frac{k^-}{k^+}} \sqrt{\frac{k^+}{k^-}} w^-(-1-0) + \left( \frac{\sqrt{k^-} \tilde{F}^+}{k^+ \|\lambda^+\|_\infty} + \frac{\tilde{F}^-}{\sqrt{k^-} \|\lambda^-\|_\infty} \right) \\
&> w^-(-1-0).
\end{aligned}$$

Dit is in strijd met de periodiciteit, die stelt dat zou moeten gelden  $w^-(1-0) = w^-(-1-0)$ .

**Geval 2b:**  $w^+(-1+0) < J^+(u^*)$ :

Als  $w^+(-1+0) < J^+(u^*)$ , dan  $w^-(1-0) = J^-(0)$  volgens (3.29).

$$\begin{aligned}
J^-(0) &= w^-(1-0) \geq w^-(0+) + \frac{\tilde{F}^-}{\sqrt{k^-} \|\lambda^-\|_\infty} \frac{1}{\sqrt{k^-}} \\
&= \sqrt{\frac{k^-}{k^+}} w^+(0-) + \frac{\tilde{F}^-}{\sqrt{k^-} \|\lambda^-\|_\infty} \frac{1}{\sqrt{k^-}} \\
&\geq \sqrt{\frac{k^-}{k^+}} J^+(u^*) + \frac{\tilde{F}^-}{\sqrt{k^-} \|\lambda^-\|_\infty} \frac{1}{\sqrt{k^-}} \\
&= J^-(0) + \frac{\tilde{F}^-}{\sqrt{k^-} \|\lambda^-\|_\infty} \frac{1}{\sqrt{k^-}} \\
&> J^-(0).
\end{aligned}$$

Dit geeft een fundamentele tegenspraak.

Uit bovenstaande redenering volgt  $F_0 \geq 0$ . Een analoge redenering geeft  $F_0 \leq 0$ , dus  $F_0 = 0$ .

□

### 3.2.8 Nulde-orde term van de verzadiging

Uit (3.34) volgt dat:

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \quad (3.50)$$

aangezien  $D(u_0) \neq 0$  in het niet-triviale geval  $0 < u_0 < 1$ . Dit betekent dus dat  $u_0$  constant is in  $y$  (maar wel afhankelijk is van de laag). Uit de condities (3.28) en (3.29) volgt nu:

$$u_0 = \begin{cases} C \geq u^*, & \text{voor } -1 < y < 0; \\ \bar{C} = (J^-)^{-1} \left( \sqrt{\frac{k^-}{k^+}} J^+(C) \right), & \text{voor } 0 < y < 1. \end{cases} \quad (3.51)$$

Of:

$$u_0 = \begin{cases} C < u^*, & \text{voor } -1 < y < 0; \\ 0, & \text{voor } 0 < y < 1. \end{cases} \quad (3.52)$$

Het verband tussen  $\bar{C}$  en  $C$  in (3.51) volgt uit de continuïteit op  $y = 0$  van de nulde-orde term van de capillairdruk (zie de expansie in vergelijking (3.41)).

### 3.2.9 Eerste-orde term van de flux

Vergelijking (3.39) geeft samen met  $F_0 \equiv 0$  (zie sectie 3.2.7) dat  $\partial F_1 / \partial y = 0$ , waardoor:

$$\begin{aligned} F_1 &= f(u_0) - N_c \sqrt{k} D(u_0) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - N_c \sqrt{k} D'(u_0) u_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ &= F_1(x, t). \end{aligned} \quad (3.53)$$

In sectie 3.2.8 is al gezegd dat  $\partial u_0 / \partial y = 0$ , dus is  $F_1$  (die constant is binnen een laag) als volgt te schrijven:

$$F_1 = \begin{cases} f(C) - N_C \sqrt{k^+} D^+(C) \left( \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right), & \text{voor } -1 < y < 0; \\ \begin{cases} f(\bar{C}) - N_C \sqrt{k^-} D^-(\bar{C}) \left( \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right), & \text{voor } 0 < y < 1 \text{ en } C \geq u^*; \\ 0, & \text{voor } 0 < y < 1 \text{ en } C < u^*. \end{cases} \end{cases} \quad (3.54)$$

Dus in het niet-triviale geval dat  $C \geq u^*$ , geldt:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \begin{cases} \frac{f(C) - F_1(C)}{N_C \sqrt{k^+} D^+(C)} - \frac{\partial C}{\partial x}, & \text{voor } -1 < y < 0; \\ \frac{f(\bar{C}) - F_1(\bar{C})}{N_C \sqrt{k^-} D^-(\bar{C})} - \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}, & \text{voor } 0 < y < 1. \end{cases} \quad (3.55)$$

### 3.2.10 Continuïteit van de eerste-orde term van de capillairdruk

Zoals gezegd in sectie 3.2.6 is naast de nulde-orde term, ook de eerste-orde term  $u_1 J'(u_0) / \sqrt{k}$  van de expansie in (3.41) continu. Hier wordt zowel de continuïteit op  $y = 0$  als op  $y = \pm 1$  bekeken, voor het geval dat  $C \geq u^*$ .

Voor  $y$  rond 0 geldt, met behulp van (3.51):

$$\frac{1}{\sqrt{k^+}} u_1^+(0-) (J^+)'(C) = \frac{1}{\sqrt{k^-}} u_1^-(0+) (J^-)'(\bar{C}). \quad (3.56)$$

Gebruik de periodiciteit van de termen van  $u$ , voor de continuïteit in  $y = \pm 1$ . Dat wil zeggen dat de eerste-orde term van de druk in  $y = -1 + 0$  gelijk moet zijn aan die term in  $y = 1 - 0$ :

$$\frac{1}{\sqrt{k^+}} u_1^+(-1 + 0) (J^+)'(C) = \frac{1}{\sqrt{k^-}} u_1^-(1 - 0) (J^-)'(\bar{C}). \quad (3.57)$$

### 3.2.11 Effectieve vergelijking

Op  $(-1, 0)$  geldt dan met behulp van (3.55):

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{k^+}} (J^+)'(C) \right] \frac{\partial u_1}{\partial y} = \left[ \frac{1}{\sqrt{k^+}} (J^+)'(C) \right] \left( \frac{f(C) - F_1}{N_C \sqrt{k^+} D^+(C)} - \frac{\partial C}{\partial x} \right), \quad (3.58)$$

en op  $(0, 1)$ :

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{k^-}} (J^-)'(\bar{C}) \right] \frac{\partial u_1}{\partial y} = \left[ \frac{1}{\sqrt{k^-}} (J^-)'(\bar{C}) \right] \left( \frac{f(\bar{C}) - F_1}{N_C \sqrt{k^-} D^-(\bar{C})} - \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right). \quad (3.59)$$

Integreer nu over  $y$ :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \left[ \frac{1}{\sqrt{k^+}} (J^+)'(C) \right] \frac{\partial u_1}{\partial y} dy &= \left[ \frac{1}{\sqrt{k^+}} (J^+)'(C) \right] (u_1^+(0-) - u_1^+(-1 + 0)) \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{k^+}} (J^+)'(C) \right] \left( \frac{f(C) - F_1}{N_C \sqrt{k^+} D^+(C)} - \frac{\partial C}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[ \frac{1}{\sqrt{k^-}} (J^-)'(\bar{C}) \right] \frac{\partial u_1}{\partial y} dy &= \left[ \frac{1}{\sqrt{k^-}} (J^-)'(\bar{C}) \right] (u_1^-(1 - 0) - u_1^-(0+)) \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{k^-}} (J^-)'(\bar{C}) \right] \left( \frac{f(\bar{C}) - F_1}{N_C \sqrt{k^-} D^-(\bar{C})} - \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

De tweede regel in (3.60), respectievelijk (3.61), volgt uit het feit dat de integrand op de gegeven intervallen niet van  $y$  afhangt, en het integratie-interval lengte 1 heeft.

Merk op dat, hoewel er in (3.55) sprake is van zowel  $F_1(C)$  als  $F_1(\bar{C})$ , eigenlijk geldt:  $F_1(C) = F_1(\bar{C})$ .  $F_1$  hangt namelijk niet van  $y$  af, volgens (3.53). Daarnaast zijn alle termen in de expansie voor de flux continu. Dat betekent  $F_1(0-) = F_1(0+)$ , ofwel  $F_1(C) = F_1(\bar{C})$ . Daarom zijn  $F_1(C)$  en  $F_1(\bar{C})$  in (3.58) en verder, beide vervangen door  $F_1$ .

Door nu (3.60) en (3.61) op te tellen, en de continuïteitscondities (3.56) en (3.57) toe te

passen, volgt:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{\sqrt{k^+}} (J^+)'(C) \right] \left( u_1^+(0-) - u_1^+(-1+0) \right) \\
& \quad + \left[ \frac{1}{\sqrt{k^-}} (J^-)'(\bar{C}) \right] \left( u_1^-(1-0) - u_1^-(0+) \right) \\
= & \frac{1}{\sqrt{k^+}} (J^+)'(C) u_1^+(0-) - \frac{1}{\sqrt{k^-}} (J^-)'(\bar{C}) u_1^-(0+) \\
& \quad + \frac{1}{\sqrt{k^-}} (J^-)'(\bar{C}) u_1^-(1-0) - \frac{1}{\sqrt{k^+}} (J^+)'(C) u_1^+(-1+0) \\
= & 0. \tag{3.62}
\end{aligned}$$

Het bovenstaande is gelijk aan de som van de tweede regels van (3.60) en (3.61), dus:

$$\begin{aligned}
0 = & \left[ \frac{1}{\sqrt{k^+}} (J^+)'(C) \right] \left( \frac{f(C) - F_1}{N_C \sqrt{k^+} D^+(C)} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \\
& + \left[ \frac{1}{\sqrt{k^-}} (J^-)'(\bar{C}) \right] \left( \frac{f(\bar{C}) - F_1}{N_C \sqrt{k^-} D^-(\bar{C})} - \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right). \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Hieruit is een uitdrukking voor  $F_1$  in termen van  $C$  en  $\bar{C}$  te herleiden. Vergelijking (3.63) geeft namelijk:

$$F_1 = \frac{\bar{A} \left( f(C) - N_c \sqrt{k^+} D^+(C) \frac{\partial C}{\partial x} \right) + A \left( f(\bar{C}) - N_c \sqrt{k^-} D^-(\bar{C}) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right)}{\bar{A} + A}, \tag{3.64}$$

met:

$$\bar{A} := \frac{N_c \sqrt{k^-} D^-(\bar{C})}{\frac{1}{\sqrt{k^-}} (J^-)'(\bar{C})} = N_c k^- k_{rw}(\bar{C}) f(\bar{C}), \quad \text{en} \tag{3.65}$$

$$A := \frac{N_c \sqrt{k^+} D^+(C)}{\frac{1}{\sqrt{k^+}} (J^+)'(C)} = N_c k^+ k_{rw}(C) f(C). \tag{3.66}$$

Hierbij is de definitie van  $D$ , zie (3.32), gesubstitueerd.  $F_1$  is dus op te vatten als een gewogen gemiddelde met gewichten  $\bar{A}$  en  $A$ .

Neem nu vergelijking (3.40) en integreer deze als volgt:

$$\frac{1}{2} \left( \int_{-1}^0 \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \int_0^1 \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy \right) = 0. \tag{3.67}$$

Deze uitdrukking is 0 daar de integrand volgens (3.40) gelijk aan 0 is. Bovenstaande vergelijking laat zich dus herschrijven tot:

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^0 \frac{\partial u_0}{\partial t} dy + \int_0^1 \frac{\partial u_0}{\partial t} dy \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^0 \frac{\partial F_1}{\partial x} dy + \int_0^1 \frac{\partial F_1}{\partial x} dy \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( F_2 \Big|_{y=0-} - F_2 \Big|_{y=-1+0} \right) + \frac{1}{2} \left( F_2 \Big|_{y=1-0} - F_2 \Big|_{y=0+} \right). \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Vanwege de continuïteit van  $F_2$ , geldt  $F_2(0-) = F_2(0+)$  en  $F_2(-1+0) = F_2(1-0)$ , dus valt de laatste regel weg. Verder is  $u_0$  constant in  $y$  op de intervallen  $(-1, 0)$  en  $(0, 1)$ , en is  $F_1$  constant in  $y$  over het hele interval  $(-1, 1)$ . Vergelijking (3.68) kan dus eenvoudiger worden geschreven als:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} = 0, \quad (3.69)$$

met  $F_1$  zoals in (3.64). Verder is daarin  $U$ , de 'gemiddelde verzadiging', gedefinieerd als:

$$U := \frac{C + \bar{C}}{2}. \quad (3.70)$$

Merk op dat (3.69) beschouwd kan worden als differentiaalvergelijking (3.16) in de limiet  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Bedenk dat  $F_1$  en functie van zowel  $C$  als  $\bar{C}$  is, en roep het verband tussen beide constanten in herinnering (zie ook uitdrukking (3.51)):

$$\bar{C} = (J^-)^{-1} \left( \sqrt{\frac{k^-}{k^+}} J^+(C) \right). \quad (3.71)$$

Dit is een strict stijgende functie in  $C$ , die (dus) inverteerbaar is. (3.70) en (3.71) combineren tot:

$$C + (J^-)^{-1} \left( \sqrt{\frac{k^-}{k^+}} J^+(C) \right) = 2U, \quad (3.72)$$

waarvan het linkerlid inverteerbaar is. Dat betekent dat  $C$  te schrijven is als een inverteerbare functie  $g(U)$ . Analoog kan worden beredeneerd dat  $\bar{C}$  te schrijven is als  $\bar{C} = \bar{g}(U)$ , voor zekere functie  $\bar{g}$  die inverteerbaar is. Hieruit volgt:

$$F_1 = F_1(C, \bar{C}) = F_1(g(U), \bar{g}(U)) =: \tilde{F}_1(U). \quad (3.73)$$

Vergelijking (3.69) wordt nu:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}_1(U)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.74)$$

met:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(U) &= \frac{\bar{A} \left( f(g(U)) - N_c \sqrt{k^+} D^+(g(U)) \frac{\partial g(U)}{\partial x} \right) + A \left( f(\bar{g}(U)) - N_c \sqrt{k^-} D^-(\bar{g}(U)) \frac{\partial \bar{g}(U)}{\partial x} \right)}{\bar{A} + A} \\ &= \frac{\bar{A} f(g(U)) + A f(\bar{g}(U))}{\bar{A} + A} \\ &\quad - \frac{\bar{A} N_c \sqrt{k^+} D^+(g(U)) \frac{\partial g(U)}{\partial x} + A N_c \sqrt{k^-} D^-(\bar{g}(U)) \frac{\partial \bar{g}(U)}{\partial x}}{\bar{A} + A} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Hiermee hebben we een effectieve vergelijking in  $U$  die (bij gegeven begincondities en randwaarden) eenvoudiger oplosbaar is, dan het oorspronkelijke probleem. We hebben hier namelijk alleen nog te maken met één homogene laag; alle heterogeniteiten zijn uit de effectieve vergelijking verdwenen.

**Opmerkingen:**  $\tilde{F}_1$  bestaat uit een transport-gedeelte en een diffusie-gedeelte. De tweede regel in (3.75) is de transport- of convectieve term, welke een eerste-orde term in (3.74) levert. De derde regel in (3.75) is het diffusie-gedeelte (veroorzaakt door capillaire effecten). In (3.74) ontstaat hierdoor een tweede-orde term.

Merk verder op dat de afgeleide vergelijkingen alleen gelden voor  $C \geq u^*$ , ofwel  $U \geq \frac{1}{2}u^*$ . Voor  $U < \frac{1}{2}u^*$  is de druk niet continu en is er geen flux:  $\tilde{F}_1(U < \frac{1}{2}u^*) = 0$ . Deze constatering blijkt vooral bij de numerieke aanpak belangrijk te zijn.

In [2], blz. 3, stelt men overigens dat 'in most cases of practical interest  $k_{rw}(u)J'(u) \rightarrow 0$  as  $u \rightarrow 1$ '. Dit heeft tot gevolg dat de diffusie-term in  $\tilde{F}_1(U)$  verdwijnt als  $U = 1$ , aangezien het product van  $k_{rw}$  en  $J'$  voorkomt in  $D$ . De convectieve term wordt 1 voor  $U = 1$ , aangezien deze term (hoewel de gewichten verdwijnen) een gewogen gemiddelde van  $f(g(U))$  en  $f(\bar{g}(U))$  is, en deze beide 1 zijn.

### 3.2.12 Notatie

Omdat dit later bij de numerieke berekeningen handig blijkt te zijn, wordt hier een nieuwe notatie ingevoerd. Definieer  $P_c(U)$  als volgt, met behulp van (3.71):

$$P_c(U) := \frac{J^+(C)}{\sqrt{k^+}} = \frac{J^-(\bar{C})}{\sqrt{k^-}}. \quad (3.76)$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_c(U)}{\partial x} &= \frac{(J^+)'(g(U))}{\sqrt{k^+}} \cdot \frac{\partial g(U)}{\partial x} \\ &= \frac{(J^-)'(\bar{g}(U))}{\sqrt{k^-}} \cdot \frac{\partial \bar{g}(U)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Schrijf de diffusieterm uit (3.75) nu in termen van  $P_c(U)$ , en gebruik hierbij (3.32), de definitie van  $D$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{A}N_c\sqrt{k^+}D^+(g(U))\frac{\partial g(U)}{\partial x} + AN_c\sqrt{k^-}D^-(\bar{g}(U))\frac{\partial \bar{g}(U)}{\partial x}}{\bar{A} + A} \\ &= \frac{\bar{A}N_ck^+k_{rw}(g(U))f(g(U)) + AN_ck^-k_{rw}(\bar{g}(U))f(\bar{g}(U))}{\bar{A} + A} \cdot \frac{\partial P_c(U)}{\partial x} \\ &= \frac{2\bar{A}A}{\bar{A} + A} \cdot \frac{\partial P_c(U)}{\partial x} \\ &=: \Lambda(U) \frac{\partial P_c(U)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

## 3.3 Verdere uitbreiding

### 3.3.1 Basisvergelijkingen en -voorwaarden

Stel nu dat niet alleen de absolute permeabiliteit  $k$  en de Leverett-functie  $J$  afhangen van de laag, maar dat hetzelfde eveneens geldt voor de porositeit  $\phi$ , en de relatieve permeabiliteiten

$k_{ro}$  en  $k_{rw}$ . Dit betekent  $k_{ro} = k_{ro}^{+/-}$  en  $k_{rw} = k_{rw}^{+/-}$ , op de manier zoals '+/-' ook gedefinieerd is voor  $k$  en  $J$ . Zie hiervoor (3.18)-(3.19) of (3.26)-(3.27):

$$k_{r\alpha}(x, u) = \begin{cases} k_{r\alpha}^+(u), & \text{voor } x \in ((2j-1)\varepsilon, 2j\varepsilon), j \in \mathbb{Z}; \\ k_{r\alpha}^-(u), & \text{voor } x \in (2j\varepsilon, (2j+1)\varepsilon), j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.79)$$

De  $\alpha$  staat hierbij voor de  $o$  ('olie'), of de  $w$  ('water').

De porositeit wordt vervangen door een zekere referentie  $\phi_{\text{ref}}$ , daar waar  $\phi$  is gebruikt om te schalen (in de schaling van  $t$  naar  $\hat{t}$  of in (3.12)). Als echter de porositeit in een bepaalde laag wordt bedoeld, dan wordt  $\Phi(x)\phi_{\text{ref}}$  gebruikt, met:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi^+, & \text{voor } x \in ((2j-1)\varepsilon, 2j\varepsilon), j \in \mathbb{Z}; \\ \Phi^-, & \text{voor } x \in (2j\varepsilon, (2j+1)\varepsilon), j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.80)$$

Dit is bijvoorbeeld het geval in uitdrukking (3.5); de (nog ongeschaalde) capillaardruk volgens het Leverett-model, wordt in de nieuwe situatie gegeven door:

$$p_c(x, S_w) = \sigma \sqrt{\frac{\Phi(x)\phi_{\text{ref}}}{k(x)}} J(x, S_w). \quad (3.81)$$

In uitdrukking (3.9) is nu dezelfde aanpassing nodig:

$$\Phi\phi_{\text{ref}} \frac{\partial S_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_{ro}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} q - \frac{k}{\mu_w} \frac{k_{ro} k_{rw}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} \frac{\partial p_c}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.82)$$

Bedenk dat  $k_{ro}$  en  $k_{rw}$  wel gelezen moeten worden als  $k_{ro}^{+/-}$  en  $k_{rw}^{+/-}$ . Het toevoegen van '+' en '-' verandert de vorm van de vergelijking echter niet, en is daarom achterwege gelaten. Voer ook nu weer de dimensieloze variabelen  $\hat{x}$ ,  $\hat{k}$  in (met dezelfde definities als in sectie 3.2.2); alleen voor de dimensieloze  $\hat{t}$  is de definitie enigszins anders:  $\hat{t} = tq/\phi_{\text{ref}}L_x$ .

Op de manier van (3.10) en (3.11) volgt voor de nieuwe situatie, na weglating van de hoedjes:

$$0 = \Phi \frac{\partial S_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_{ro}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} - k \frac{\sigma \sqrt{K\phi_{\text{ref}}}}{\mu_w q L_x} \frac{k_{ro} k_{rw}}{k_{rw} \frac{\mu_o}{\mu_w} + k_{ro}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{\frac{\Phi}{k}} J(S_w) \right) \right).$$

De viscositeitsratio  $M = \frac{\mu_o}{\mu_w}$  blijft onveranderd, evenals de definitie  $u := S_o$ ; voer wel de volgende nieuwe definities in:

$$N_c := \frac{\sigma \sqrt{K\phi_{\text{ref}}}}{\mu_w q L_x} \quad (3.83)$$

$$p_c(x, u) := \sqrt{\frac{\Phi}{k}} J(x, u) \quad (3.84)$$

Merk op dat nu  $S_w = 1 - u$ . Roep de definities (3.14) en (3.15) voor de fractional flow function  $f$  en de flux  $F$  in herinnering, die nu echter afhangen van de nieuwe uitdrukkingen voor  $N_c$ , en  $p_c$  en waarin  $k_{ro}$  en  $k_{rw}$  dus afhangen van de laag. Deze functies moeten dus eigenlijk geschreven worden als  $f^{+/-}$  en  $F^{+/-}$ . Ook de drempel-verzadiging  $u^*$  (zie (3.20)) wordt nu iets anders gedefinieerd:

$$\sqrt{\frac{\Phi^+}{k^+}} J^+(u^*) = \sqrt{\frac{\Phi^-}{k^-}} J^-(0). \quad (3.85)$$



Differentiaalvergelijking (3.16) moet aangepast worden, terwijl het ook belangrijk is te bedenken dat daarbij  $F$  dus afhankelijk van de laag is:

$$\Phi \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (3.86)$$

Merk op dat in de secties 3.2.3 en 3.2.4,  $\Phi$ 's moeten worden toegevoegd in de overgangscondities waarvoor de capillairdruk gebruikt is, maar dat dit in wezen weinig verandert. Merk ook op dat vergelijking (3.40) een iets andere vorm krijgt:

$$\Phi \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0. \quad (3.87)$$

### 3.3.2 Afleiding van de effectieve vergelijking

Ook voor de rest van de redenering geldt dat deze eigenlijk vrijwel analoog is aan wat al gedaan is, en moet er alleen op meerdere plaatsen  $\Phi$  worden toegevoegd. Vanaf sectie 3.2.11 is er wel een verschil. Allereerst worden hier de benodigde tussenresultaten gegeven, die wel nog lijken op de tussenresultaten voorheen:

$$u_0 = \begin{cases} C \geq u^*, & \text{voor } -1 < y < 0; \\ \bar{C} = (J^-)^{-1} \left( \sqrt{\frac{k^- \Phi^-}{k^+ \Phi^+}} J^+(C) \right), & \text{voor } 0 < y < 1. \end{cases} \quad (3.88)$$

Of:

$$u_0 = \begin{cases} C < u^*, & \text{voor } -1 < y < 0; \\ 0, & \text{voor } 0 < y < 1. \end{cases} \quad (3.89)$$

Voor  $F_1$  geldt een uitdrukking in termen van  $C$  en  $\bar{C}$  die lijkt op (3.64) tot en met (3.66); deze is hier (voorlopig) nog niet van belang.

Beschouw nu de volgende integraal van (3.87), die analoog is aan de integraal van (3.40) in (3.67) en op basis van de daar gebruikte argumenten verder wordt uitgerekend:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^0 \Phi \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \int_0^1 \Phi \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \Phi^+ C + \Phi^- \bar{C} \right) + \frac{\partial F_1}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Definieer vervolgens de 'gemiddelde' verzadiging  $U$  en de effectieve porositeit  $\Phi_{\text{eff}}$ :

$$U := \frac{\Phi^+ C + \Phi^- \bar{C}}{\Phi^+ + \Phi^-}, \quad (3.91)$$

$$\Phi_{\text{eff}} := \frac{\Phi^+ + \Phi^-}{2}. \quad (3.92)$$

De effectieve vergelijking wordt dan:

$$\Phi_{\text{eff}} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} = 0, \quad (3.93)$$

waarbij  $F_1$  een functie in termen van  $C$  en  $\bar{C}$  is. Zoals voorheen kunnen ook nu het verband van  $U$  met  $C$  en  $\bar{C}$ , en het (inverteerbare) verband tussen  $C$  en  $\bar{C}$  onderling (zie (3.88)),

worden gebruikt om  $F_1$  uit te drukken als een functie van  $U$ . Concreet betekent dit dat uit de relaties:

$$\bar{C} = (J^-)^{-1} \left( \sqrt{\frac{k^- \Phi^-}{k^+ \Phi^+}} J^+(C) \right), \quad \text{en} \quad (3.94)$$

$$U = \frac{\Phi^+ C + \Phi^- \bar{C}}{\Phi^+ + \Phi^-}, \quad (3.95)$$

leiden tot inverteerbare uitdrukkingen  $g$  en  $\bar{g}$  in termen van  $U$  voor  $C$  en  $\bar{C}$ :  $C = g(U)$  en  $\bar{C} = \bar{g}(U)$ . Vergelijking (3.93), kan nu worden herschreven in een vorm die uitsluitend afhankelijk is van  $U$ :

$$\Phi_{\text{eff}} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}_1(U)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.96)$$

waarbij  $\tilde{F}_1(U) = F_1(g(U), \bar{g}(U))$  gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(U) = & \frac{\bar{A} f^+(g(U)) + A f^-(\bar{g}(U))}{\bar{A} + A} \\ & - \frac{\bar{A} N_c \sqrt{k^+ \Phi^+} D^+(g(U)) \frac{\partial g(U)}{\partial x} + A N_c \sqrt{k^- \Phi^-} D^-(\bar{g}(U)) \frac{\partial \bar{g}(U)}{\partial x}}{\bar{A} + A}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\bar{A} = N_c k^- \Phi^- k_{rw}^-(\bar{g}(U)) f^-(\bar{g}(U)), \quad \text{en} \quad (3.98)$$

$$A = N_c k^+ \Phi^+ k_{rw}^+(g(U)) f^+(g(U)). \quad (3.99)$$

## 4 Numerieke oplossing

Om de analytische resultaten uit sectie 3 te toetsen, zullen hier zowel de oorspronkelijke als de effectieve vergelijking numeriek worden opgelost. De verkregen resultaten kunnen daarna vergeleken worden. Allereerst wordt de gebruikte methode voor het numeriek oplossen hier besproken. Deze methode is ontleend aan [2] en [3]. Het gebruik van numerieke methoden was in die artikelen nodig, omdat een echt bewijs voor de convergentie van de homogenisatiemethode ontbrak. Dit bewijs is er inmiddels overigens wel, zie [5].

### 4.1 Methode

Om differentiaalvergelijkingen numeriek op te lossen moeten zowel de tijd als de ruimte gediscretiseerd worden. Dat wil zeggen dat er enerzijds een zekere tijdsstap  $\tau$  wordt geïntroduceerd, zodat elk discreet tijdstip  $t_n$  gegeven wordt door  $t_n = n\tau$ . Anderzijds wordt de ruimte, die hier één-dimensionaal is, gediscretiseerd waarbij de afstand tussen de roosterpunten  $h$  is; het punt  $x_i$  heeft dan positie  $(i - \frac{1}{2})h$ .  $u_i^n$  is nu de (benaderde) verzadiging op tijdstip  $t_n$ , in het volume rond  $x_i$ . Gezien de roostergrrootte, loopt de betreffende cel dus van  $x = (i - 1)h$  tot  $x = ih$ . Laat de flux op tijdstip  $t_n$  en op positie  $(i - 1)h$  gegeven zijn door  $F_{i-\frac{1}{2}}^n = F((i - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2})h, n\tau) = F((i - 1)h, n\tau)$ .

Gebruikte volgende benadering voor de tijdsafgeleide van  $u$  op zekere positie  $x_i$  en tijdstip  $t_n$ , zeg  $u_i^n$ :

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} \doteq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}. \quad (4.1)$$

Hieruit volgt de volgende methode voor het bepalen van  $u_i^{n+1}$ :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \tau \frac{\partial u_i^n}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Gebruik een soortgelijke benadering voor de afgeleide naar  $x$  van de flux op positie  $x_i$ :

$$\frac{\partial F_i^n}{\partial x} \doteq \frac{F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n}{h}, \quad (4.3)$$

en differentiaalvergelijking (3.16), waaruit volgt:

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} = -\frac{\partial F_i^n}{\partial x}. \quad (4.4)$$

Bovenstaande uitdrukkingen leiden samen tot een methode voor het bepalen van  $u_i^{n+1}$  op basis van gegevens van tijdstip  $t_n$ :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\tau}{h}(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n). \quad (4.5)$$

#### 4.1.1 Numeriek oplossen van de oorspronkelijke vergelijking

De oorspronkelijke vergelijking luidt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (4.6)$$

met daarin:

$$\begin{aligned} F(x, u) &= f(u) - N_c k(x) k_{rw}(u) f(u) \frac{\partial}{\partial x} p_c(x, u) \\ &= f(u) - N_c \sqrt{k(x)} k_{rw}(u) f(u) \frac{\partial J(x, u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Let op: zowel  $k$  als  $J$  zijn laagafhankelijk.

Als de verzadiging  $u_i^n$  bekend is op zeker tijdstip  $t_n$  en voor alle  $i$ , kan hieruit de flux op dat tijdstip worden berekend. Vervolgens volgt uit (4.5) de verzadiging op tijdstip  $t_{n+1}$ , waaruit weer de flux op dat tijdstip berekend kan worden. In het bijzonder moet de verzadiging op  $t_0 = 0$  gegeven zijn, om aan deze berekening te beginnen. Daarnaast zijn randvoorwaarden nodig.

Om de manier waarop de flux op positie  $x = ih$  berekend kan worden, expliciet te kunnen weergeven, wordt nu onderscheid gemaakt tussen de volgende gevallen:

***Geval 1:  $x = ih$  is een punt binnen een laag:***

De flux op deze positie op tijdstip  $t = n\tau$  wordt gegeven als functie van de verzadiging op dat tijdstip, door:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_i^n) - N_c \sqrt{k} k_{rw} \left( \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} \right) f \left( \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} \right) J' \left( \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} \right) \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, \quad (4.8)$$

waarbij  $k$  en  $J$  een superscript '+' of '-' krijgen, zodanig dat deze bij de betreffende laag past.

***Geval 2a:  $x = ih$  is een punt op een interface, overgang van grof naar fijn:***

Hier wordt de situatie bekeken waar  $x = ih$  de positie is van de interface tussen cellen die rond  $x_i$ , respectievelijk  $x_{i+1}$  liggen. Hierbij geldt:  $k(x_i) = k^+$  en  $k(x_{i+1}) = k^-$ .

Bekijk nu, als extra variabelen, de verzadiging aan weerszijden van deze interface. Hierbij worden de volgende definities gebruikt:

$$u_{i-}^n = \lim_{x \uparrow ih} u(x, t_n), \quad (4.9)$$

$$u_{i+}^n = \lim_{x \downarrow ih} u(x, t_n). \quad (4.10)$$

De 'extended pressure condition' (3.23) wordt met deze notatie:

$$\begin{cases} u_{i-}^n < u^* & \Rightarrow u_{i+}^n = 0, \\ u_{i-}^n \geq u^* & \Rightarrow \frac{J^+(u_{i-}^n)}{\sqrt{k^+}} = \frac{J^-(u_{i+}^n)}{\sqrt{k^-}}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Met behulp van (4.5) volgt nu:

$$u_{i-}^{n+1} = u_{i-}^n - \frac{\tau}{h} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n), \quad (4.12)$$

$$u_{i+}^{n+1} = u_{i+}^n - \frac{\tau}{h} (F_{i+\frac{3}{2}}^n - F_{i+\frac{1}{2}}^n). \quad (4.13)$$

Tel bovenstaande uitdrukkingen op, en definieer  $\Gamma$ :

$$u_{i-}^{n+1} + u_{i+}^{n+1} = u_{i-}^n + u_{i+}^n - \frac{\tau}{h} \left( F_{i+\frac{3}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right) =: \Gamma \quad (4.14)$$

**Opmerking:** Volgens [2] is gegarandeerd dat  $0 \leq \Gamma \leq 2$ , mits er aan de zogenaamde CFL-conditie (naar Courant, Friedrichs en Lewy) is voldaan. Deze conditie zorgt ervoor dat de methode numeriek stabiel is.

Stel nu dat  $\Gamma < u^*$ . Aangezien (natuurlijk)  $u_{i+}^{n+1} \geq 0$ , volgt  $u_{i-}^{n+1} < u^*$ . Uit (4.11) volgt nu dat  $u_{i+}^{n+1} = 0$ , en dus  $u_{i-}^{n+1} = \Gamma$ .

In deze situatie geldt dus:  $\Gamma < u^* \Rightarrow u_{i-}^{n+1} = \Gamma$ .

Stel dat  $\Gamma \geq u^*$ . Stel ook  $u_{i-}^{n+1} < u^*$ , dan geven de overgangsvoorwaarden  $u_{i+}^{n+1} = 0$ , wat leidt tot de volgende tegenspraak:  $u^* \leq \Gamma = u_{i-}^{n+1} + u_{i+}^{n+1} < u^*$ . Dus moet  $u_{i-}^{n+1} \geq u^*$ .

Er geldt hier dus  $\Gamma \geq u^* \Rightarrow u_{i-}^{n+1} \geq u^*$ . De matching conditions (4.11) geven:

$$\Gamma \geq u^* \Rightarrow \frac{J^+(u_{i-}^{n+1})}{\sqrt{k^+}} = \frac{J^-(u_{i+}^{n+1})}{\sqrt{k^-}} = \frac{J^-(\Gamma - u_{i-}^{n+1})}{\sqrt{k^-}}. \quad (4.15)$$

**Opmerking:** (4.15) heeft een unieke oplossing in  $u_{i-}^{n+1}$ . De linkerkant van:

$$\frac{J^+(u_{i-}^{n+1})}{\sqrt{k^+}} = \frac{J^-(\Gamma - u_{i-}^{n+1})}{\sqrt{k^-}}. \quad (4.16)$$

is namelijk strict stijgend in  $u_{i-}^{n+1}$ , en de rechterkant strict dalend. De functie  $J^+(u_{i-}^{n+1})/\sqrt{k^+} - J^-(\Gamma - u_{i-}^{n+1})/\sqrt{k^-}$  is dus monotoon stijgend. Voor  $u_{i-}^{n+1} = 0$  is de functiewaarde negatief aangezien  $J^+(0)/\sqrt{k^+} < J^-(0)/\sqrt{k^-} \leq J^-(\Gamma)/\sqrt{k^+}$  (dit volgt uit de gestelde eis in sectie 3.2.3). Voor  $u_{i-}^{n+1} = \Gamma > u^*$  geeft de definitie van de drempelverzadiging  $u^*$  (3.20):  $J^+(\Gamma)/\sqrt{k^+} > J^+(u^*)/\sqrt{k^+} = J^-(0)/\sqrt{k^-}$ , dus is de functiewaarde positief.

Er is dus precies één nulpunt, waardoor (4.16) precies één oplossing voor  $u_{i-}^{n+1}$  heeft.

**Eis:** neem aan dat het rooster dat geconstrueerd in de  $x$ -richting zo fijn is, dat  $x = (i-1)h$  en  $x = (i+1)h$  niet op een interface liggen als dat wel al bij  $x = ih$  het geval is. Dat betekent dat één homogeen laagje uit tenminste twee volume-elementjes bestaat.  $F_{i-\frac{1}{2}}^n$  en  $F_{i+\frac{3}{2}}^n$  zijn dan gewoon volgens 'Geval 1' te berekenen.

Om  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$  te verkrijgen, bij gegeven verzadiging  $u_{i-}^n$  en  $u_{i+}^n$ , wordt eerst  $\Gamma$  bepaald volgens het tweede deel van (4.14). Indien  $\Gamma < u^*$ , geldt  $u_{i+}^{n+1} = 0$ , en dan volgt uit (4.13), dat:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{h}{\tau} u_{i+}^n - F_{i+\frac{3}{2}}^n. \quad (4.17)$$

Indien  $\Gamma \geq u^*$ , dan volgt  $u_{i-}^{n+1}$  uit (4.16). (4.12) geeft nu aan hoe  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$  bepaald kan worden:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{h}{\tau} (u_{i-}^n - u_{i-}^{n+1}) + F_{i-\frac{1}{2}}^n. \quad (4.18)$$

Merk op dat het, zoals gezegd, in beide gevallen dus noodzakelijk is dat  $F_{i+\frac{3}{2}}^n$ , dan wel  $F_{i-\frac{1}{2}}^n$  expliciet te bepalen zijn volgens 'Geval 1'. Ofwel  $u_{i-}^{n+1}$ , ofwel  $u_{i+}^{n+1}$  is al berekend, om  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$

te vinden. De andere van de twee volgt uit het eerste deel van (4.14):  $\Gamma = u_{i-}^{n+1} + u_{i+}^{n+1}$ .

**Geval 2b:  $x = ih$  is een punt op een interface, overgang van fijn naar grof:**

De redenering die hier gevolgd moet worden, is analoog aan die van 'Geval 2a'. Ook hier geldt de 'extended pressure condition': de druk is continu dan en slechts dan als de verzadiging aan de kant van het grove medium de drempelwaarde overschrijdt. Het resultaat is hier als volgt. Bereken eerst  $\Gamma$  volgens het tweede deel van (4.14), dan:

$$\begin{cases} \Gamma < u^* \Rightarrow u_{i+}^{n+1} = \Gamma \text{ en } u_{i-}^{n+1} = 0, \\ \Gamma \geq u^* \Rightarrow u_{i+}^{n+1} \text{ volgt uit: } \frac{J^-(\Gamma - u_{i+}^{n+1})}{\sqrt{k^-}} = \frac{J^+(u_{i+}^{n+1})}{\sqrt{k^+}} \\ \text{en } u_{i-}^{n+1} = \Gamma - u_{i+}^{n+1}. \end{cases} \quad (4.19)$$

Nu is  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$  te verkrijgen, bij gegeven verzadiging  $u_{i-}^n$  en  $u_{i+}^n$ . Indien  $\Gamma < u^*$ , geldt dus  $u_{i-}^{n+1} = 0$ , en dan volgt uit (4.12), dat:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{h}{\tau} u_{i-}^n + F_{i-\frac{1}{2}}^n. \quad (4.20)$$

Indien  $\Gamma \geq u^*$ , dan volgt  $u_{i+}^{n+1}$ , zoals aangegeven in (4.19). (4.13) geeft nu aan hoe  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$  bepaald kan worden:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{h}{\tau} (u_{i+}^{n+1} - u_{i+}^n) + F_{i+\frac{3}{2}}^n. \quad (4.21)$$

Ook hier is het een vereiste dat  $F_{i+\frac{3}{2}}^n$ , dan wel  $F_{i-\frac{1}{2}}^n$  niet de flux op een interface weergeven, en dus te bepalen zijn volgens 'Geval 1'. Met  $\Gamma = u_{i-}^{n+1} + u_{i+}^{n+1}$ , het eerste deel van (4.14), is de verzadiging te berekenen aan die kant van de interface waar deze nog onbekend is.

Steeds wordt na de flux op  $t = t_n$  en de verzadiging aan weerszijden van een interface op  $t = t_{n+1}$ , de verzadiging op  $x_i$  (voor alle overige  $i$ ) en op  $t = t_{n+1}$  berekend met (4.5), en met behulp van de gegeven randwaarden.

#### 4.1.2 Numeriek oplossen van de effectieve vergelijking

Ook de effectieve vergelijking (3.74) wordt numeriek opgelost:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(U)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (4.22)$$

Merk op dat de subscript 1, die in (3.74) voorkwam als index van de asymptotische expansie van de flux, nu is weggelaten. Hierdoor wordt verwarring voorkomen, met de subscript die hierna de positie gaat aangeven.

In bovenstaande differentiaalvergelijking komen de volgende uitdrukkingen voor:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(U) &= \frac{\bar{A}f(g(U)) + Af(\bar{g}(U))}{\bar{A} + A} - \Lambda(U) \frac{\partial P_c(U)}{\partial x}, \\ \bar{A} &= N_c k^- k_{rw}(\bar{g}(U)) f(\bar{g}(U)), \\ A &= N_c k^+ k_{rw}(g(U)) f(g(U)), \quad \text{en} \\ \Lambda(U) &= \frac{2\bar{A}A}{\bar{A} + A} = \frac{2}{\frac{1}{\bar{A}} + \frac{1}{A}}, \end{aligned}$$

Voor het berekenen van de verzadiging  $U$  op tijdstip  $t_{n+1}$ , bij gegeven verzadiging op  $t_n$ , wordt het principe van (4.5) gebruikt. Deze uitdrukking heeft nu de volgende vorm:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\tau}{h} (\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^n). \quad (4.23)$$

Hierin is ook de flux op tijdstip  $t_n$  nodig. Aangezien er nu geen sprake meer is van heterogeniteiten (en er dus geen interfaces meer zijn), kan de flux voor elke  $x$  op dezelfde manier worden bepaald. Hiervoor is de verzadiging op  $t_n$  nodig.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{\bar{A}(\bar{g}(U_i^n))f(g(U_i^n)) + A(g(U_i^n))f(\bar{g}(U_i^n))}{\bar{A}(\bar{g}(U_i^n)) + A(g(U_i^n))} \\ &\quad - \frac{2\Lambda(U_i^n)\Lambda(U_{i+1}^n)}{\Lambda(U_i^n) + \Lambda(U_{i+1}^n)} \cdot \frac{P_c(U_{i+1}^n) - P_c(U_i^n)}{h}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Er is voor een harmonisch gemiddelde van  $\Lambda$ 's gekozen in de diffusie-term, aangezien  $\Lambda$  zelf ook een harmonisch gemiddelde van  $A$  en  $\bar{A}$  is.

Zoals aan het eind van sectie 3.2.11 is opgemerkt, geldt bovenstaande uitdrukking voor de flux alleen voor  $U \geq \frac{1}{2}u^*$ . Voor  $U_i^n < \frac{1}{2}u^*$  is de eerste term van de flux (de convectie-term) gelijk aan 0. De tweede term (de diffusie-term) is 0 als ofwel  $U_i^n < \frac{1}{2}u^*$ , ofwel  $U_{i+1}^n < \frac{1}{2}u^*$ . Deze term is ook 0 als  $U_i^n = 1$  of  $U_{i+1}^n = 1$ .

**Opmerking:** de manier waarop  $P_c$  berekend moet worden, volgt uit (3.76):

$$P_c(U_i^n) = \frac{J^+(g(U_i^n))}{\sqrt{k^+}} = \frac{J^-(\bar{g}(U_i^n))}{\sqrt{k^-}}. \quad (4.25)$$

## 4.2 Berekeningen en resultaten

Bij de numerieke berekeningen zijn de volgende waarden en functies gebruikt:

$$\begin{aligned} J^+(u) &= \frac{1}{\sqrt[4]{1-u}}, \\ J^-(u) &= \frac{1}{\sqrt{1-u}}, \\ k_{rw}(u) &= (1-u)^2, \\ k_{ro}(u) &= u^2, \\ k^+ &= 1, \\ k^- &= \frac{1}{2}, \\ N_c &= 1, \\ M &= 1. \end{aligned}$$

Als 'onderzoeksgebied' wordt het interval  $[-1, 1]$  genomen, waardoor dus  $L_x = 2$ . De begin- en randvoorwaarden zijn:

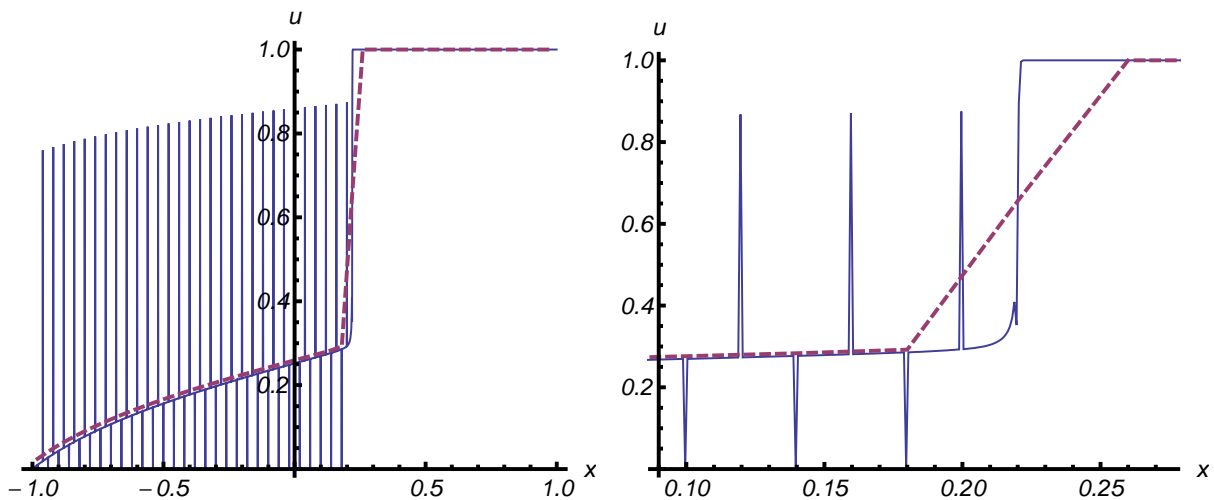
$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 1, & x > -1, \\ u(-1, t) &= 0, & t \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &= 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

De laatste voorwaarde (de Neumann-randvoorwaarde op  $x = 1$ ) houdt in de praktijk in dat de verzadiging in het laatste controle-volume altijd gelijk is aan de verzadiging in het elementje ervoor. Deze voorwaarde is zo gekozen, dat de stroming niet verder wordt beïnvloed aan het einde van het interval dat bekeken wordt.

**Opmerking:** door de keuzes van  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $k^+$  en  $k^-$  ligt ook de waarde van  $u^*$  vast (zie (3.20)). Deze is  $u^* = 0.75$ .

#### 4.2.1 Oscillerend gedrag

Om een eerlijke vergelijking te maken tussen de oplossing van het 'volle probleem' (dus met alle laagjes, en de overgangscondities op de interfaces) en de oplossing van de effectieve vergelijking, wordt de verzadiging bij het volle probleem steeds gemiddeld over tweetallen laagjes (één fijn en één aangrenzend grof laagje). In figuur 3 is, ter illustratie van het effect hiervan, de oplossing van het originele probleem weergegeven, vóór en na het middelen.



Figuur 3: Illustratie van het oscillerend gedrag van de oplossing van het volle probleem, bij  $\varepsilon = \frac{1}{100}$  en  $t = 1.0$ . Links de oscillerende (blauw) en gemiddelde (paars gestippeld) olieverzadiging op het gehele interval  $[-1, 1]$ . Rechts is er ingezoomd op een kleiner deelgebied.

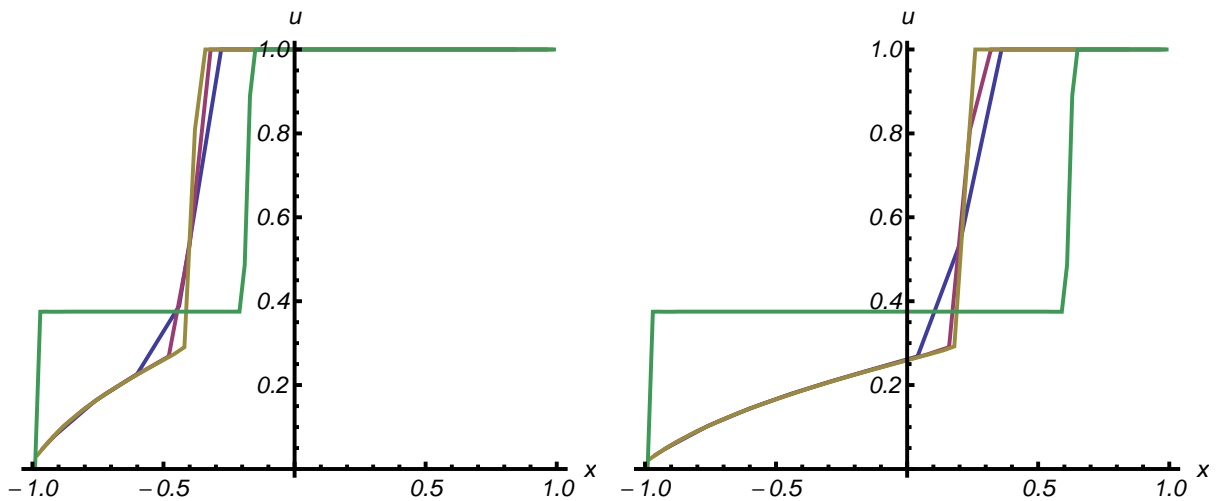
#### 4.2.2 Resultaten voor originele en effectieve vergelijking

In figuur 4 is de invloed van de keuze van schaalparameter  $\varepsilon$  te zien. In de hier behandelde situatie is  $\varepsilon = 1/N$ , waarbij  $N$  het totaal aantal laagjes in het interval  $[-1, 1]$  is. Daarnaast is ook de oplossing van de effectieve vergelijking afgebeeld.

Er zijn twee zaken die meteen opvallen. Ten eerste is de invloed van  $\varepsilon$  op het kwalitatieve verloop van de grafiek niet erg groot. Elk van de drie curven vertoont een golffront dat zich naar rechts verplaatst als de tijd verstrijkt.

Wat nog meer opvalt is dat de oplossing van de effectieve vergelijking erg afwijkt van de oplossingen van het volle probleem. Bij de effectieve vergelijking zie je dat de verzadiging een limietwaarde heeft, als het golffront eenmaal voorbij is. Deze limiet is  $\frac{1}{2}u^*$  (hier: 0.375). Dit





Figuur 4: De oplossing van het volle probleem voor  $\varepsilon = \frac{1}{25}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$  (respectievelijk blauw, paars en bruin), en de oplossing van de effectieve vergelijking (groen). Links voor  $t = 0.5$ , rechts voor  $t = 1.0$ .

is naar verwachting, aangezien er geen flux meer door een interface is, als de verzadiging in de grove laag minder dan  $u^*$  bedraagt: het 'trapping effect'. Dit betekent dat alle olie uit de fijne lagen verdreven kan worden, maar dat er een rest (namelijk  $u^*$ ) achterblijft in de grove lagen. Omdat in het gehomogeniseerde model het gemiddelde van de verzadiging over twee aangrenzende lagen wordt genomen, is er een limiet van  $\frac{1}{2}u^*$ .

Er is dus reden om aan te nemen dat *niet* de oplossing van de effectieve vergelijking 'fout' is, maar dat er een onvolkomenheid zit in de methode waarmee de oplossing van het volle probleem is berekend. Aangezien de pieken (die zich bij de interfaces bevinden) in figuur 3 wel erg steil zijn, moet de verklaring bij de overgangscondities op de interfaces worden gezocht.

In de vergelijkingen (4.12) en (4.13) is impliciet aangenomen dat (4.5) ook geldt op interfaces. Dit is echter geen goede aanname, aangezien dit hele verslag er juist om gaat, dat er moeilijkheden ontstaan in vergelijking (4.6) op de interfaces, vanwege de discontinuïteiten daar. Daarom moet de numerieke methode voor het oplossen van het volle probleem aangepast worden.

### 4.3 Aanpassing van de methode voor de oorspronkelijke vergelijking

De basis van de methode blijft ongewijzigd. Als de verzadiging op een bepaald tijdstip bekend is op elke positie, wordt daaruit de flux op hetzelfde tijdstip in het hele medium bepaald. Uit de flux volgt dan de verzadiging op het volgende tijdstip (nog steeds met (4.5)), enzovoort. Ook het principe van de extra variabelen aan weerszijden van een interface ( $u_{i\pm}^n$ ) blijft gehandhaafd, zij het dat deze op een andere manier berekend moeten worden.

Definieer:

$$\beta^+(u) := \int_0^u k_{rw}(v) f(v) (J^+)'(v) dv, \quad (4.26)$$

$$\beta^-(u) := \int_0^u k_{rw}(v) f(v) (J^-)'(v) dv. \quad (4.27)$$

**Opmerking:** de functie  $\beta$  is strict stijgend, vanwege de eigenschappen van  $k_{rw}$ ,  $f$  en  $J$ . Als deze integraal niet expliciet te berekenen is (wat meestal het geval is), moet een tabel met waarden van  $\beta(u)$  bij gegeven  $u$  gemaakt en gebruikt worden.

Het in sectie 4.1.1 geldende voorschriften worden nu met behulp van (4.26) en (4.27) aangepast. Begin hiervoor met (4.7), binnen een laag, zodat er komt te staan:

$$F(x, u) = f(u) - N_c \sqrt{k} k_{rw}(u) f(u) J'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.28)$$

waarin  $k$  en  $J$  een superscript '+' of '-' hebben. Merk verder op dat (de superscript '+' en '-' even weglatend):  $k_{rw}(u) f(u) J'(u) = \frac{\partial \beta(u)}{\partial u}$ . Dus volgt:

$$\begin{aligned} F(x, u) &= f(u) - N_c \sqrt{k} \frac{\partial \beta(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= f(u) - N_c \sqrt{k} \frac{\partial \beta(u)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Bekijk nu de gevallen '1', '2a' en '2b' zoals voorheen.

**Geval 1:  $x = ih$  is een punt binnen een laag:**

Gebruik (4.29) om de flux binnen een laag te bepalen:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_i^n) - N_c \sqrt{k} \frac{\beta(u_{i+1}^n) - \beta(u_i^n)}{h}, \quad (4.30)$$

waarbij  $k$  en  $\beta$  een superscript '+' of '-' krijgen, zodanig at deze bij de betreffende laag past.

**Geval 2a:  $x = ih$  is een punt op een interface, overgang van grof naar fijn:**

De vergelijkingen (4.9), (4.10) en (4.11) blijven gelden. Op een interface met verzadigingen  $u_{i\pm}^n$  aan weerszijden, kan de flux door de interface vanuit de grove laag, én vanuit de fijne laag benaderd worden op de manier van (4.30):

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_i^n) - N_c \sqrt{k^+} \frac{\beta^+(u_{i-}^n) - \beta^+(u_i^n)}{h/2}, \quad (4.31)$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_{i+}^n) - N_c \sqrt{k^-} \frac{\beta^-(u_{i+1}^n) - \beta^-(u_{i+}^n)}{h/2}. \quad (4.32)$$

Merk op dat er door  $h/2$  gedeeld wordt, aangezien de benadering is geconstrueerd in een *half* volume-elementje. De benodigde  $u$ 's zijn genomen aan het begin en einde van het betreffende halve elementje.

De flux is continu, dus moeten bovenstaande vergelijkingen aan elkaar gelijk zijn:

$$f(u_i^n) - N_c \sqrt{k^+} \frac{\beta^+(u_{i-}^n) - \beta^+(u_i^n)}{h/2} = f(u_{i+}^n) - N_c \sqrt{k^-} \frac{\beta^-(u_{i+1}^n) - \beta^-(u_{i+}^n)}{h/2}, \quad (4.33)$$

ofwel:

$$\frac{h}{2} f(u_i^n) + N_c \sqrt{k^+} \beta^+(u_i^n) + N_c \sqrt{k^-} \beta^-(u_{i+1}^n) = \frac{h}{2} f(u_{i+}^n) + N_c \sqrt{k^+} \beta^+(u_{i-}^n) + N_c \sqrt{k^-} \beta^-(u_{i+}^n). \quad (4.34)$$

Als de verzadiging  $u_i^n$  bekend is voor alle  $i$  op zekere  $t$ , dan is de linkerkant van deze vergelijking bekend. Schrijf die als  $T$ . De rechterkant is een functie, zeg  $\rho$ , van  $u_{i-}^n$  en  $u_{i+}^n$ . Deze twee limietwaarden van de verzadiging wil je vinden. Ze moeten (via bovenstaande vergelijking) voldoen aan de continuïteit van de flux, en aan de 'extended pressure condition' (4.11).

Schrijf (4.34) nu kort als:

$$T = \rho(u_{i-}^n, u_{i+}^n). \quad (4.35)$$

Bedenk dat  $u_i^n$  en  $u_{i+1}^n$  in het interval  $[0, 1]$  liggen. Daar  $f$  strict stijgend is op  $[0, 1]$ , met  $f(0) = 0$  en  $f(1) = 1$ , en ook  $\beta$  strict stijgend is met  $\beta(0) = 0$ , geldt dus  $0 \leq T \leq h/2 + N_c(\sqrt{k^+}\beta^+(1) + \sqrt{k^-}\beta^-(1))$ . Eveneens is  $\rho$  strict stijgend in beide variabelen, en  $\rho(0,0) = 0$ .

Stel dat  $0 \leq T \leq (h/2)f(u^*) + N_c\sqrt{k^-}\beta^-(u^*)$ . Stel dat ook  $u_{i+}^n > 0$ . Uit de 'extended pressure condition' (4.11) volgt nu:  $\rho(u_{i-}^n, u_{i+}^n) > (h/2)f(u^*) + N_c\sqrt{k^-}\beta^-(u^*) \geq T$ . Er is dus geen oplossing voor  $u_{i\pm}^n$  met  $u_{i+}^n > 0$ , die aan zowel de 'extended pressure condition' als aan de continuïteit van de flux (4.35) voldoet. Er moet dus gelden  $u_{i+}^n = 0$ . Aangezien  $\rho$  strict stijgend is, moet er een unieke  $u_{i-}^n \in [0, u^*]$  zijn die voldoet aan  $\rho(u_{i-}^n, 0) = T$ . Er is dan aan beide voorwaarden (4.11) en (4.35) voldaan.

Bereken de flux  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$  met (4.31) of (4.32) (deze zijn gelijk vanwege de continuïteit van flux).

Stel dat  $(h/2)f(u^*) + N_c\sqrt{k^-}\beta^-(u^*) < T \leq h/2 + N_c(\sqrt{k^+}\beta^+(1) + \sqrt{k^-}\beta^-(1))$ . Nu volgt uit de 'extended pressure condition', dat er juist geen oplossing is met  $u_{i+}^n = 0$ ; stel dat dit wel zo is, dan  $0 \leq u_{i-}^n \leq u^*$ . Dan volgt een tegenspraak:  $\rho(u_{i-}^n, u_{i+}^n) \leq (h/2)f(u^*) + N_c\sqrt{k^-}\beta^-(u^*) < T$ . De capillairdruk is hier dan continu, en dus hangen  $u_{i-}^n$  en  $u_{i+}^n$  samen volgens:

$$u_{i+}^n = (J^-)^{-1}\left(\sqrt{k^-/k^+}J^+(u_{i-}^n)\right) > 0. \quad (4.36)$$

Uit het feit dat  $\rho$  en de  $J$ 's strict stijgend zijn, volgt dat er een unieke oplossing voor  $u_{i\pm}^n$  is, die zowel aan continuïteit van druk, als aan continuïteit van flux voldoen. Bereken de flux  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$  ook hier met (4.31) of (4.32).

**Geval 2b:  $x = ih$  is een punt op een interface, overgang van fijn naar grof:**

Deze situatie is vrijwel analoog, dus worden alleen de resultaten gegeven. De definities van  $\rho$  en  $T$  zijn:

$$\rho(u_{i-}^n, u_{i+}^n) := \frac{h}{2} f(u_{i+}^n) + N_c \sqrt{k^-} \beta^-(u_{i-}^n) + N_c \sqrt{k^+} \beta^+(u_{i+}^n), \quad (4.37)$$

$$T := \frac{h}{2} f(u_i^n) + N_c \sqrt{k^-} \beta^-(u_i^n) + N_c \sqrt{k^+} \beta^+(u_{i+1}^n) \quad (4.38)$$

De verzadiging aan weerszijden van de interface  $u_{i\pm}^n$  moet ook hier voldoen aan de 'extended pressure condition' en aan  $\rho(u_{i-}^n, u_{i+}^n) = T$ , de continuïteit van de flux.

Als  $0 \leq T \leq (h/2)f(u^*) + N_c\sqrt{k^-}\beta^-(u^*)$ , dan  $u_{i-}^n = 0$  en  $u_{i+}^n \in [0, u^*]$  is de unieke oplossing van  $\rho(0, u_{i+}^n) = T$ .

Als  $(h/2)f(u^*) + N_c\sqrt{k^-}\beta^-(u^*) < T \leq h/2 + N_c(\sqrt{k^+}\beta^+(1) + \sqrt{k^-}\beta^-(1))$ , dan zijn  $u_{i-}^n$  en  $u_{i+}^n$  de unieke oplossingen van  $\rho(u_{i-}^n, u_{i+}^n) = T$  en  $u_{i+}^n = (J^+)^{-1}\left(\sqrt{k^+/k^-}J^-(u_{i-}^n)\right) > 0$ .

De flux volgt uit één van onderstaande uitdrukkingen (deze hebben dezelfde uitkomst vanwege de continuïteit van de flux):

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_i^n) - N_c\sqrt{k^-}\frac{\beta^-(u_{i-}^n) - \beta^-(u_i^n)}{h/2}, \quad (4.39)$$

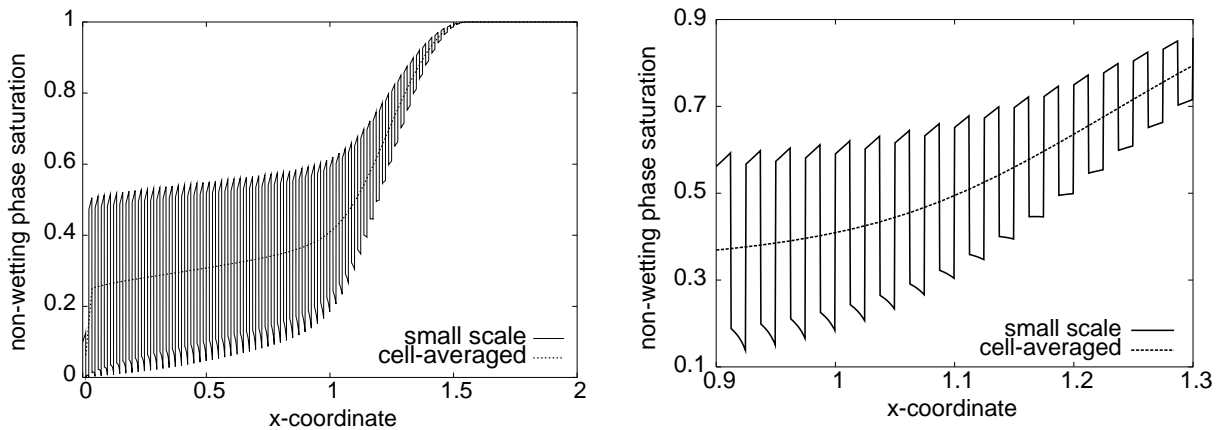
$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_{i+}^n) - N_c\sqrt{k^+}\frac{\beta^+(u_{i+1}^n) - \beta^+(u_{i+}^n)}{h/2}. \quad (4.40)$$

## 4.4 Resultaten

Ter illustratie van de resultaten van de aangepaste methode uit sectie 4.3, volgen hier enkele (representatieve) grafieken uit [3]. Er zijn daarbij twee verschillen met de numerieke methode die in sectie 4.2 werd toegepast. Allereerst zijn de berekeningen in [3] uitgevoerd op het interval  $[0, 2]$  in plaats van op  $[-1, 1]$ ; dit is echter een futiliteit. Daarnaast zijn beide Leverett-functies hetzelfde gekozen:  $J^+(u) = J^-(u) = (1-u)^{-1/2}$ . Dit betekent tevens dat nu  $u^* = 0.5$  en niet meer  $u^* = 0.75$  zoals in sectie 4.2.

### 4.4.1 Oscillerend gedrag

In analogie met sectie 4.2.1 wordt hier eerst bekeken wat het effect is van het nemen van het gemiddelde over twee aangrenzende lagen (bij de oplossing van het volle probleem); zie figuur 5.



Figuur 5: Illustratie van het oscillerend gedrag van de oplossing van het volle probleem, bij  $\varepsilon = \frac{1}{80}$  en  $t = 0.8$ . Links de oscillerende en gemiddelde (gestippeld) olieverzadiging op het gehele interval  $[0, 2]$ . Rechts is er ingezoomd op een kleiner deelgebied. Zie ook figuur 3.

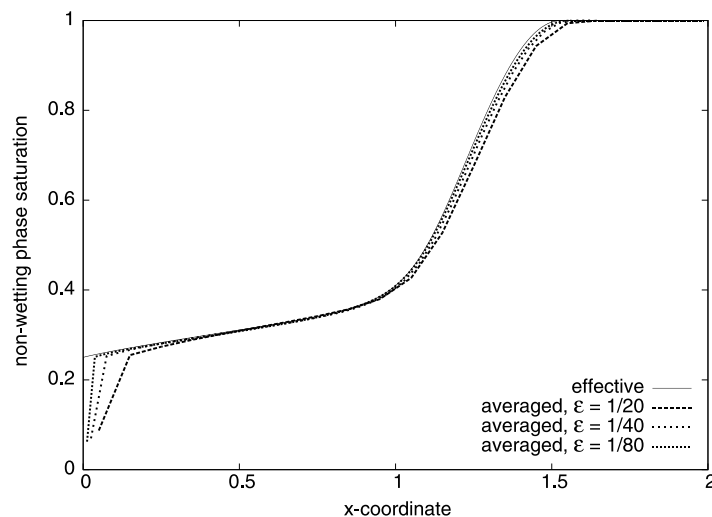
Er zijn twee dingen die duidelijk opvallen in figuur 5. Ten eerste is het oscillerende gedrag van de verzadiging anders dan in figuur 3. In die figuur is er een relatief gladde lijn (waarbij er niet veel verschil is tussen de verzadiging in een grove of een fijne laag), met daarop 'gesuperponeerd' smalle, spitse pieken (naar boven of naar beneden) op de plekken van de interfaces. In figuur 5 zijn er geen echte pieken, maar komen er op de plaats van de interfaces abrupte sprongen voor tussen relatief hoge verzadiging (grove lagen) en relatief lage verzadiging (fijne lagen). Dit is inderdaad wat je zou verwachten: vanwege het 'trapping effect' blijft er een hoeveelheid olie in de grove lagen achter, terwijl de fijne lagen (bijna) leegraken.

Het tweede dat opvalt, heeft ook met het trapping effect te maken. Zodra het golffront voorbij is, zie je dat er een limietwaarde van de (gemiddelde) verzadiging is. In sectie 4.2.2 is dit al aangehaald, toen het ging over het verschil tussen de oplossing van het volle probleem en het gehomogeniseerde probleem. Deze limietwaarde is  $\frac{1}{2}u^*$ . Je ziet ook dat deze limietwaarde vrijwel vanaf het begin van het interval  $[0, 2]$  wordt aangenomen; dit is vergelijkbaar met de oplossing van de effectieve vergelijking in figuur 4.

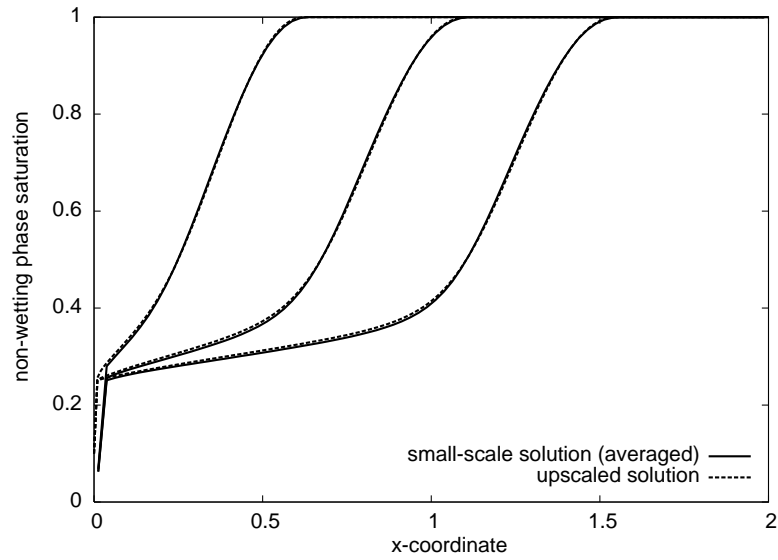
#### 4.4.2 Resultaten voor originele en effectieve vergelijking

In figuur 6 is duidelijk te zien dat bij de aangepaste numerieke methode de oplossingen van de effectieve vergelijking en van het volle probleem veel dichters bij elkaar liggen. Vergelijk dit met de situatie in figuur 4.

Het is duidelijk dat, ongeacht de keuze van  $\varepsilon$ , het kwalitatieve verloop van de grafieken voor het gehomogeniseerde model voldoet aan wat je verwacht. Er is een front, waarachter een rest olie achterblijft (het trapping effect,  $\frac{1}{2}u^*$ ), en deze limiet wordt vrijwel meteen vanaf  $x = 0$  aangenomen.



Figuur 6: De oplossingen van de effectieve vergelijking (zwart), en van het volle probleem bij  $\varepsilon = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}$  (gestippeld) bij  $t = 0.8$ . Zie ook figuur 4.



Figuur 7: Illustratie van het verloop in de tijd van de oplossingen van de effectieve vergelijkingen en van het volle probleem bij  $\varepsilon = \frac{1}{80}$ . De tijdstippen zijn  $t = 0.2, 0.5$  en  $0.8$ .

Ook het verloop in de tijd is zoals je dat verwacht (zie figuur 7). In tegenstelling tot wat figuur 4 laat zien, blijven de oplossingen van de effectieve vergelijking en van het opgeschaalde model met de aangepaste methode wel ‘bij elkaar’.

## 5 Conclusie

De wiskundige techniek 'homogenisatie' is in dit verslag toegepast om een effectieve vergelijking af te leiden voor een specifiek één-dimensionaal model van een oliereservoir in een heterogeen medium. De essentie van de (dimensievolle) basisvergelijkingen, van waaruit het hele opgeschaalde model ontwikkeld is, is ook terug te zien in de vorm van de effectieve vergelijking: de som van een partiële afgeleide naar de tijd en een partiële afgeleide naar de plaats is gelijk aan 0. De term waarvan in de effectieve vergelijking de afgeleide naar de plaats wordt genomen (de flux), bestaat uit twee delen. De convectieve term zorgt voor een eerste-orde term in de uiteindelijke differentiaalvergelijking; door de diffusieve term van de flux ontstaat er een tweede-orde term in de differentiaalvergelijking. Ook in de originele vergelijkingen zijn eerste- en tweede-orde termen te onderscheiden.

Het gebruikte één-dimensionale model dat bestaat uit laagjes van gelijke dikte die afwisselend fijn en grof zijn, lijkt sterk geïdealiseerd (en dat is het ook!). De kans is klein dat je deze situatie in het echt zult tegenkomen. Desondanks moge uit de omvang van de afleiding van de effectieve vergelijking duidelijk zijn, dat het goed is om met een relatief eenvoudig model te beginnen. In [2] en [3] zijn overigens nog enkele variaties in dit model aangebracht.

Voor het opgeschaalde model is het noodzakelijk gebleken om de olieverzadiging te middelen over twee aangrenzende laagjes. Hierdoor verlies je een deel van de informatie die de oplossing van het volle probleem wel bezit. Om de oplossingen van het opgeschaalde en het volle probleem te kunnen vergelijken, is ook de gevonden verzadiging bij het volle probleem gemiddeld over twee laagjes. Inderdaad raak je daarbij gegevens kwijt over het oscillerende gedrag van de verzadiging. Dit is echter geen groot probleem, aangezien je voornamelijk geïnteresseerd bent in het globale gedrag van de oplossing. Informatie over hoe snel het golf-front zich verplaatst, over wanneer het olieveld dus 'leeg' is, en over hoeveel olie er gewonnen kan worden en hoeveel er in het reservoir achterblijft (trapping effect) is belangrijk. Hiervoor zijn alleen de globale kenmerken van de oplossing nodig.

Toen [2] en [3] geschreven werden, was er nog geen bewijs voor de convergentie van het opgeschaalde model. Dit bewijs werd pas in [5] gegeven. Daarom zag men zich genooddaakt de kwaliteit van het effectieve model te beoordelen aan de hand van numerieke berekeningen. Hetzelfde is in dit verslag gedaan.

Een voordeel van het gebruiken van de effectieve vergelijking in een numerieke methode (in plaats van het volle probleem) is dat je met minder datapunten kunt volstaan. Bij het volle probleem is het nodig om een goed beeld te krijgen van het verloop van de verzadiging binnen elke homogene laag. Dat houdt in dat je naast een groot aantal homogene laagjes, daarin ook nog eens een aanzienlijk aantal volume-elementjes voor de berekening moet hebben (waarvan later weer per tweetal lagen het gemiddelde wordt genomen). Het ontbreken van deze laagjes in het opgeschaalde model, zorgt ervoor dat er ook minder volume-elementjes nodig zijn om het verloop van de verzadiging in het hele medium te beschrijven.

In het verslag is nog een moeilijkheid aan het licht gekomen, bij het doen van numerieke berekeningen voor het volle probleem. Bij de effectieve vergelijking was de numerieke methode redelijk recht-toe-recht-aan. Bij het volle probleem zorgen de condities op de interfaces ervoor, dat de methode een stuk ingewikkelder wordt. Het is ook duidelijk geworden dat een

methode die goed lijkt, niet per se de goede resultaten hoeft te geven, en dat dan aanpassing van de methode nodig is.

Dit verslag heeft (in ieder geval voor een deel) duidelijk gemaakt op welke manier homogenisatie een ingewikkeld fysisch probleem kan vereenvoudigen. Er gaat daarbij weliswaar informatie verloren, maar de globale aspecten waarin men is geïnteresseerd blijven gelden voor het gehomogeniseerde model. Het specifieke geval waarop homogenisatie hier is toegepast, ziet er relatief eenvoudig uit. De condities die op interfaces gelden, maken het model echter gecompliceerd, waardoor ook hier al het voordeel van homogenisatie merkbaar is geworden.



## Referenties

- [1] Duijn, C.J. van, Molenaar, J. en Neef, M.J. de: *The effect of capillary forces on immiscible two-phase flow in heterogeneous porous media*.  
Transp. Porous Med., 21, blz. 71-93 (1995).
- [2] Duijn, C.J. van, Mikelic, A. en Pop, I.S.: *Effective equations for two-phase flow with trapping on the micro scale*.  
SIAM J. Appl. Math., 62, blz. 1531-1568 (2002).
- [3] Duijn, C.J. van, Eichel, H., Helmig, R. en Pop, I.S.: *Effective equations for two-phase flow in porous media: the effect of trapping on the microscale*.  
Transp. Porous Med., 69, blz. 411-428 (2007).
- [4] Hornung, U. (red.): *Homogenization and porous media*.  
Springer Verlag, Berlin (1997).
- [5] Schweizer, B.: *Homogenization of degenerate two-phase flow equations with oil trapping*.  
SIAM J. Math. Anal., 39, blz. 1740-1763 (2008).