

**MASTER**

**Temperatuurmetingen aan een hoge druk kwikontlading**

Timmermans, C.J.

*Award date:*  
1972

[Link to publication](#)

**Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Temperatuurmetingen aan een  
hoge druk kwikontlading

72-2

C.J.Timmermans

jan.'72

Afstudeerwerk verricht o.l.v. Prof.Dr. A.A.Kruihof.

INHOUDSOPGAVE	BLZ
1. Inleiding.	1
2. Gastemperatuur uit lijnbreedtemetingen.	2
2.1 Bespreking van de methodiek.	2
2.2 Gastemperatuur uit resonantie-verbrede spektrallijnen.	2
2.3 Temperatuur m.b.v. Starkverbreding en Sahavergelijking.	4
2.4 Samenvatting.	8
3. Gas-en elektronentemperatuurverdeling uit relatieve intensiteitsmetingen.	9
3.1 Correctie voor de absorptie	9
3.2 Afleiding gas- en elektronentemperatuurverdeling	11
3.3 Meetresultaten	14
3.4 De werkelijke temperatuurverdeling onder voorwaarde L.T.E..	15
4. De werkelijke gastemperatuurverdeling uit absolute metingen.	17
4.1 De methode Kruithof en een uitbreiding daarvan.	17
4.2 Methode volgens Bartels	20
4.3 Vergelijking van beide methoden	24
4.4 Meetresultaten	25
5. Overzicht van de verkregen temperaturen.	28
6. Meetopstelling	30
Referenties	32
Appendix	33

## I Inleiding

In gasontladingen is de temperatuur een belangrijke parameter, immers met de temperatuurverdeling hangen de dichtheidsverdelingen van zowel atomen als elektronen zeer nauw samen. De in de snelheidsverdeling van de elektronen voorkomende temperatuur, de z.g. elektronentemperatuur  $T_e$ , is in het algemeen hoger dan de gastemperatuur  $T_a$ .

Kan men op grond van metingen aantonen dat het verschil  $T_e - T_a$  relatief klein is, dan worden de berekeningen van een aantal plasmaparameters aanzienlijk vereenvoudigd omdat dan sommige wetten van de thermodynamica toe te passen zijn. Er zijn een aantal spectroscopische diagnostieken bekend om de temperatuur van gasontladingen te bepalen.

In dit rapport zal nader ingegaan worden op:

- 1 De bepaling van de gastemperatuur uit de verbreding van spektraallijnen.
- 2 De gas- en elektronentemperatuurverdeling uit relatieve intensiteitsmetingen.
- 3 De bepaling van de temperatuur uit absolute metingen van zowel emissie als absorptie van bepaalde spektraallijnen.

ad 1: De meeste theorieën over lijnverbreding zijn gebaseerd op homogene gasontladingen, door Mouwen is een correctiemethode ontwikkeld, waardoor deze theorieën ook toepasbaar worden op inhomogene ontloadingen.

ad 2: Met een eenvoudiger methode dan Elenbaas (6) heeft beschreven, zijn de relatieve gas- en elektronentemperatuurverdelingen bepaald.

ad 3: Gebaseerd op de stralingstransportvergelijking zijn een tweetal methoden toegepast, welke de temperatuur berekenen uit de emissie en absorptie in een klein frequentiegebiedje van een spektraallijn. Beide methoden zijn uitgebreid teneinde op relatief eenvoudige wijze de radiële absolute gastemperatuurverdeling te kunnen bepalen.

De metingen uitgevoerd aan een aantal spektraallijnen, geven ca. 150 K lagere temperaturen op de as van de gasontlading dan gevonden zijn door Elenbaas.

## 2 Gastemperatuur uit lijnbreedtemetingen.

### 2.1 Bespreking van de methodiek.

Rompe (3) heeft deze methode reeds in 1941 toegepast op hogedruk kwikontladingen. Elenbaas (6) beschrijft deze methode in zijn boek doch geeft geen resultaten.

Het fenomeen van lijnverbreding is in 't algemeen vrij ingewikkeld, omdat een aantal oorzaken van verbreding gelijktijdig optreden.

Het is bekend dat lijnen van het type  $n^1S_0 - 6^1P_1$  in Hg-ontladingen resonantieverbreding vertonen.

Uit de halfwaardebreedte van dit type spektraallijn is de neutrale deeltjesdichtheid te berekenen. Is bovendien de druk bekend dan kan de gastemperatuur berekend worden. Lijnen van het type  $n^3D_2 - 6^1P_1$  worden zowel door resonantieverbreding als door z.g. Stark-effect, verbreed. Dit Stark-effect treedt op als gevolg van door geladen deeltjes (ionen en elektronen) veroorzaakte elektrische velden. Door nu de lijnbreedten van de spektraallijnen  $n^1S_0 - 6^1P_1$  en  $n^3D_2 - 6^1P_1$  te combineren, kan het verbredingseffect t.g.v. alleen het Stark-effect worden gevonden.

Met relaties waarin de verbreding t.g.v. het Stark-effect als functie van de elektronendichtheid  $n_e$  en ionendichtheid  $n_i$  wordt beschreven, kunnen  $n_e$  en  $n_i$  berekend worden.

Wordt nu lokaal thermodynamisch evenwicht verondersteld, dan kan de temperatuur  $T$  m.b.v. de Sahavergelijking uit de bekende waarden van  $n_e$  en  $n_i$  berekend worden.

### 2.2 Gastemperatuur uit spektraallijnen met alleen resonantieverbreding.

Onder resonantieverbreding wordt verstaan de verbreding t.g.v. botsingen met dezelfde atomen als de emitterende atomen. Dit treedt op bij resonantielijnen en bij lijnen die op een resonantienivo uitkomen.

Deze verbredingsvorm benatwoordt in goede benadering aan een Lorentz-profiel (1) met de halfwaardebreedte  $\gamma_{nm}$

$$\gamma_{nm} = C_{nm} n_a m^{-1} \quad (2.1)$$

met

$$C_{nm} = k \frac{f_{mo} q^2}{m_e \omega_{mo}} \quad (2.2)$$

waarin  $f_{m0}$  = de oscillatorsterkte van het resonantienivo  
 $\omega_{m0}$  = de centrale hoekfrequentie van de resonantielij  
 $n_a$  = dichtheid van de storende deeltjes  
 $k$  = numerieke factor

Volgens Furssov en Wlassow (3)

$$k = \frac{3}{\pi C \cdot 4\pi\epsilon_0} \quad (2.3)$$

Opgemerkt moet echter worden dat (2.1) geldig is voor een homogeen plasma en wij hebben gemeten aan een gecontraheerde zuil.

Mouwen (2) heeft een methode ontwikkeld om de halfwaardebreedte van een spectraallijn, gemeten aan zo'n inhomogeen plasma te corrigeren, zodanig dat de halfwaardebreedte op de as van de ontlading verkregen wordt. Deze correctiemethode brengt de invloed in rekening die de gastemperatuursverdeling en de daarmee gekoppelde verdeling van de emitterende atomen, heeft op de vorm en de halfwaardebreedte van de spektraallijn. Zie Appendix I.

De correctie geeft als resultaat

$$\gamma_{nm}(0) = \frac{\gamma_{nm}}{1 + \mu_{mn}} \quad (2.4)$$

waarin  $\mu_{mn}$  = spectrale inhomogeniteitsfactor volgens Mouwen zodat (2.1) overgaat in

$$\gamma_{nm}(0) = C_{nm} n_a(0) \quad (2.5)$$

Toepassing van de gaswet  $p = n_a k T_a$  geeft, dat in combinatie met (2.5) en bekende druk  $p$ , de gastemperatuur  $T_a$  en dichtheid  $n_a$  berekend kunnen worden.

Uitgegaan moet worden van het lijnprofiel zoals dit door resonantieverbreding gevormd wordt. Echter het gemeten lijnprofiel is behept met nog andere verbredingsmechanismen zoals de apparaatverbreding en Dopplerverbreiding.

Om de correctie voor de Dopplerverbreiding te vinden volgen we een iteratiemethode. Door in eerste aanleg de Dopplerverbreiding te verwaarlozen is, kan m.b.v. (2.5) een benaderde waarde  $n_{a1}(0)$  voor de dichtheid  $n_a(0)$  berekend worden.

Met  $p = n_a k T_a$  volgt nu  $T_{a1}(0)$ , een schatting van  $T_a(0)$ , de bijdrage van de Dopplerverbreiding bij  $T_{a1}(0)$  is dan bekend.

De toepassing van deconvolutie (13) kunnen  $T_a(0)$  en  $n_a(0)$  iteratief berekend worden.

Tabel 1

golflengte		RESONANTIE HALFWAARDE BREEDTE			GASTEMPERATUUR	GASDICHTHEID
		gemeten <sup>(4)</sup>	op de as		op de as	op de as
lijntype	$\lambda$ nm	$\Delta\lambda$ nm pm	$\Delta\lambda$ nm pm (0)	$\gamma$ nm m <sup>-1</sup> (0)	$T_a(0)$ K	$n_a(0)$ 10 <sup>24</sup> m <sup>-3</sup>
8 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> - 6 <sup>1</sup> P <sub>1</sub>	491.6	28.9	27.4	115	5740 ± 5%	1,10 ± 5%
9 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> - 6 <sup>1</sup> P <sub>1</sub>	410.8	22.4	21.4	120	5400 ± 5%	1.20 ± 5%

Opmerking 1: Oscillatorsterkte  $f_{m0} = 1,3$  zie (4) . Hiermee wordt (2.5)

$$\gamma_{nm}(0) = 1,0308 \cdot 10^{-24} n_a(0) \quad m^{-1}.$$

2:  $\mu_{nm} \simeq 0,04$

3: In tabel 1 zijn de gemeten halfwaarden zowel in pm als in m<sup>-1</sup> uitgedrukt via

$$\text{de relatie } \gamma^{nm} = \frac{1}{(\lambda^{nm})^2} \Delta\lambda^{nm}$$

4: Gemeten halfwaardebreedte, gecorrigeerd voor apparaatverbreiding.

## 2.3 Temperatuurbepaling m.b.v. Starkverbreiding en Saha-vergelijking

2.3.1 Unsöld (5) heeft aangetoond dat voor een zeker energienivo geldt:

$$\gamma_{e,i} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{7/6}}{3 \cdot 10^{14}} \cdot C_{st}^{2/3} R^{1/6} T_{e,i}^{1/6} \left\{ \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_{e,i}} \right\}^{1/6} n_{e,i} \quad m^{-1} \quad (2.6)$$

Hierin  $\gamma_{e,i}$  = halfwaardebreedte in m<sup>-1</sup> van de Lorentzfunctie, indices e = elektronen  
i = ionen.

$C_{st}$  = Stark-constante

R = gasconstante

$T_{e,i}$  = temperatuur van elektronen of ionen.  
 $m_a$  = atoomgewicht van de emitter  
 $m_{e,i}$  = atoomgewicht van de storende deeltjes  
 $n_{e,i}$  = dichtheid van de storende deeltjes.

Lindholm (7) heeft een verbeterde berekening uitgevoerd, waardoor de numerieke waarde van  $\gamma_{e,i}$  circa 30% groter werd zodat (2.6) luidt

$$\gamma_{e,i} = 50,3 \cdot 10^{-14} \cdot T_{e,i}^{1/6} C_{St}^{2/3} \left\{ \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_{e,i}} \right\}^{1/6} n_{e,i} \text{ m}^{-1} \quad (2.7)$$

Aangezien voor Lorentzfuncties geldt dat de halfwaardebreedten van twee samenwerkende verbredingen lineair opgeteld worden is de halfwaardebreedte van het Stark-effect

$$\gamma_{ei}(0) = \gamma_e(0) + \gamma_i(0) = \{ 20,93 T_e(0)^{1/6} + 2,78 T_i(0)^{1/6} \} n_e(0) \cdot 10^{22} \text{ m}^{-1} \quad (2.8)$$

als we algemeen invoeren  $\gamma_{ei} = \gamma_e + \gamma_i$

Hierin is aangenomen dat de ontlading voldoet aan de quasineutraliteitsvoorwaarde  $n_e \simeq n_i$ .

Door toepassing van de correctie voor de inhomogeniteit van de ontlading wordt de halfwaardebreedte op de as gevonden  $\gamma_{ei}(0)$ .

Verder zijn de bekende waarden voor  $m_a = m_i$  en  $m_e$  ingevuld.

Doordat zowel  $T_e(0)$  als  $T_i(0)$  tot de macht één-zesde in (2.8) voorkomen is het voldoende een relatief ruwe schatting voor  $T_e(0)$  en  $T_i(0)$  te geven, zodat met

$T_e(0) \approx T_i(0)$  en (2.8) overgaat in

$$n_e(0) = \frac{\gamma_{ei}(0)}{23,71 T_e(0)^{1/6}} \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3} \quad (2.9)$$

2.3.2 Het lijnprofiel van de spektraallijnen van het type  $n^3D_2 - 6^1P_1$  is de convolutie van:



- a. Doppler bijdrage,  $\gamma_D^{nm}$
- b. Lorentz-bijdrage van de neutrale deeltjes  $\gamma_{Ln}^{nm}$
- c. Lorentz-bijdrage van de elektronen  $\gamma_{Le}^{nm}$
- d. Lorentz-bijdrage van de ionen  $\gamma_{Li}^{nm}$

Opmerking 1: We gaan hier wel van de gemeten halfwaardebreedten gecorrigeerd voor de apparaatverbreding uit.

2: Natuurlijke lijnverbreding en isotopie-effecten zijn verwaarloosd,

3: Aangezien de gastemperatuur  $T_a(0)$  ongeveer bekend is, kan voor het Doppler-effect gedeconvolueerd worden.

Nu kan voor de halfwaardebreedte van b.v.  $\lambda = 577.0 \text{ nm}$  ( $6^3P_2 - 6^1P_1$ ) geschreven worden

$$\gamma^{5770} = \gamma_{Ln}^{5770} + \gamma_{Le}^{5770} + \gamma_{Li}^{5770} \quad (2.10)$$

Evenzo voor de spektraallijn  $\lambda = 491,6 \text{ nm}$  ( $8^1S_0 - 6^1P_1$ ), die alleen resonantieverbreding vertoont

$$\gamma^{4916} = \gamma_{Ln}^{4916} \quad (2.11)$$

Omdat beide lijnen hetzelfde eindnivo ( $6^1P_1$ ) hebben, geldt

$$\gamma_{Ln}^{4916} = \gamma_{Ln}^{5770} \quad (2.12)$$

De fysische achtergrond is dat de breedte van een spektraallijn bepaald wordt door zijn begin- en eindnivo, (1).

Het verschil van  $\gamma^{5770}$  en  $\gamma^{4916}$  wordt m.b.v. (2.12)

$$\gamma_{ei}^{70-16} = \gamma^{5770} - \gamma^{4916} = \gamma_{Le}^{5770} + \gamma_{Li}^{5770} \quad (2.13)$$

Voor de overzichtelijkheid van de formules hebben we hier de aanduiding dat het halfwaardebreedten betreft op de as van de ontlading weggelaten.

M.b.v. (2.9) kan nu met de gebruikte spektraallijnen de elektronendichtheid  $n_e(0)$  berekend worden.

2.3.3 Wanneer nu verondersteld wordt dat Lokaal thermisch evenwicht heerst (L.T.E) dan kan de Saha-vergelijking toegepast worden.

Deze is als volgt te schrijven:

$$\frac{n_e(0) n_i(0)}{n_a(0)} = 2 \cdot \frac{(2\pi n_e k)^{3/2}}{h^3} T_e(0)^{3/2} \exp\left(-\frac{e V_i}{kT_e(0)}\right) \quad (2.14)$$

Hierin is  $T_e(0) \approx T_a(0)$  de temperatuur op de as van de ontlading  
 $V_i$  = ionisatiepotentiaal.

Aangezien het linkerlid van de Saha-vergelijking bekend is uit de metingen kan de temperatuur bepaald worden.

Tabel 2

Overgang	golflengte	halfwaardebreedte op de as van de ontlading	
	$\lambda$ nm	$\Delta\lambda$ nm	$\gamma$ $m^{-1}$
$6^3D_2 - 6^1P_1$	577,0	46,2	$138 \pm 1.5\%$
$6^3D_1 - 6^1P_1$	579,0	49,8	$148 \pm 1.5\%$
$8^1S_0 - 6^1P_1$	491,6	27,8	$115 \pm 2\%$
$9^1S_0 - 6^1P_1$	410,8	21,4	$120 \pm 2,5\%$

Tabel 3

Combinatie nm-kl $\gamma_{ei}(0)$	elektronen dichtheid op de as	temperatuur op de as
	$n_e(0)$ $\cdot 10^{20} m^{-3}$	$T_e(0) = T_a(0)$ K
70-16 $\gamma_{ei}(0) = 23 \pm 11\%$	23	$6030 \pm 1,5\%$
90-16 $\gamma_{ei}(0) = 33 \pm 11\%$	33	$6230 \pm 1,5\%$
70-08 $\gamma_{ei}(0) = 18 \pm 16\%$	18	$5900 \pm 1,5\%$
90-08 $\gamma_{ei}(0) = 28 \pm 16\%$	28	$6120 \pm 1,5\%$

Opmerking 1: Foutanalyse geeft dat

a) Onzekerheid in  $\gamma_{ei}^{[nm-k]}$  = 11-16%

b) Onzekerheid in  $n_e(0)$  = 20%

c) Onzekerheid in  $n_a(0) \simeq 5\%$

2: De volgende relatie volgt m.b.v. de Saha-vergelijking

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2T} \frac{\Delta S}{S}$$

waarin T = temperatuur

S = Sahavergelijking

## 2.4 Samenvatting

Het resultaat van vorige hoofdstukken samengevat geeft

1: De gastemperatuur op de as van de ontlading berekend uit resonantieverbreding

$$\overline{T_a(0)} = 5570 \pm 200 \text{ K}$$

2: De temperatuur berekend m.b.v. het Stark-effect, onder de voorwaarde L.T.E., geeft

$$\overline{T_a(0)} = 6070 \pm 70 \text{ K}$$

We zien dat de gemiddelden een systematisch verschil vertonen van 500 K hetgeen buiten de spreiding ligt.

### 3 Gas- en elektronentemperatuurverdeling uit relatieve intensiteitsmetingen.

Elenbaas (6) heeft een methode beschreven om de radiële temperatuurverdeling in een hoge druk kwikontlading te bepalen.

Deze methode heeft de volgende bezwaren:

- 1 De absorptie wordt niet in rekening gebracht
- 2 Het is noodzakelijk dat een aantal spectraallijnen worden gemeten, welke een grote spreiding in de excitatiepotentialen hebben. Hieraan kan in een ontlading in zuivere kwikdamp slechts in zeer beperkte mate worden voldaan.
- 3 Toevoeging van andere elementen aan Hg, b.v. Cd teneinde meerdere geschikte spektraallijnen te verkrijgen, beïnvloedt in het algemeen de ontladingsvorm.
- 4 Om de absolute waarde van de temperatuur te vinden, moet van de gekozen spektraallijn de overgangswaarschijnlijkheid  $A_{nm}$  bekend zijn.

De punten 1, 2 en 3 worden in het volgende besproken. Punt 4 wordt behandeld in hoofdstuk 4.

#### 3.1 Correctie voor de absorptie

Kruithof (10) heeft een methode beschreven waarbij de gemeten intensiteiten worden gecorrigeerd voor de absorptie.

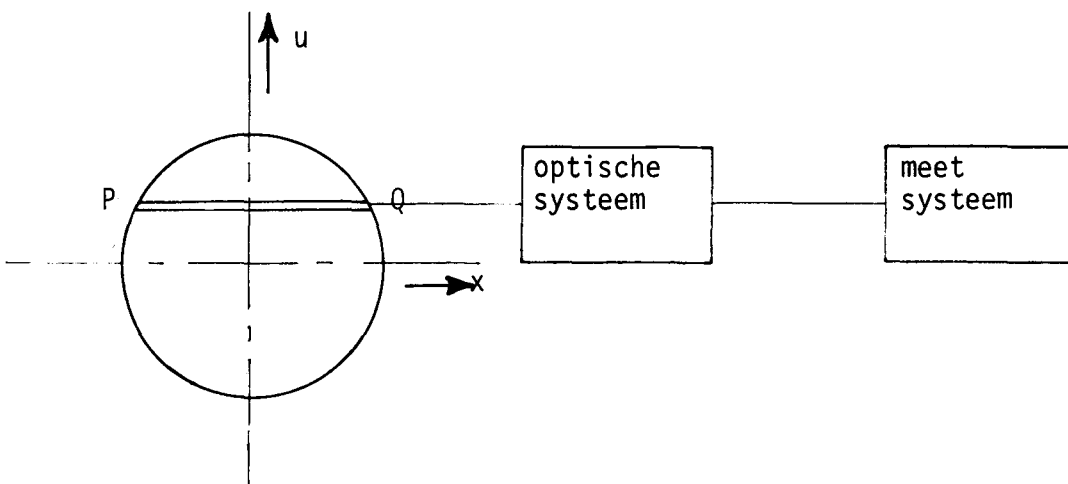


Fig.3.1 Gebruikt coördinatensysteem.

Voor een spektraallijn, zonder absorptie wordt de totale radiantie als functie van de plaats  $u$ , geïntegreerd over de dwarsdoorsnede van de ont-lading, per eenheid van booglengte, als volgt gegeven:

$$L_e(u) = \int_P^Q L_e(x,u) dx = \frac{1}{4\pi} \int_P^Q P(r) dx \quad (3.1)$$

Waarin:

- 1  $L_e(x,u)$  is het vermogen uitgestraald per eenheid van oppervlak, per eenheid van ruimtehoek,  $J m^{-2} ster^{-1} s^{-1}$ .
- 2  $P(r)$  is het vermogen uitgestraald per eenheid van volume,  $J m^{-3} s^{-1}$ .

De methode berust erop dat de Hoog heeft aangetoond dat voor een plaats-onafhankelijke spektraallijn met absorptie, de gemeten  $L_e(u)$ -waarden gecorri-geerd moeten worden met  $t(u)$ , de transmissie op de plaats  $u$ , zodat (3.1) wordt

$$L_e(u)_1 = \frac{L_e(u)}{\sqrt{t(u)}} = \frac{1}{4\pi} \int_P^Q \frac{P(r) r dr}{\sqrt{r^2 - u^2}} \quad (3.2)$$

$t(u)$  kan m.b.v. een absorptie-experiment bepaald worden.

De met deze methode geïntroduceerde maximale fout wordt gegeven in Tabel 3.1 als functie van de transmissie  $t$ .

Met deze correctie is het eerste bezwaar tegen de methode Elenbaas ondervangen.

absorptie %	transmissie $t$ %	maximale fout %
10	90	0.15
20	80	0.6
30	70	1.6
40	60	3.4
50	50	6
60	40	11

Tabel 3.1 Geïntroduceerde maximale fout.

Formule (3.2) is een integraal van het Abelse type. Transformatie van deze integraal geeft

$$P(r) = -4 \int_r^\infty \frac{dL_e(u)_1}{\sqrt{u^2 - r^2}} du \quad (3.3)$$

Er zijn nu een aantal methoden die het mogelijk maken om uit de gemeten waarden van  $L_e(u)_1, P(r)$  te berekenen, het z.g. Abelen. Op grond van het werk van Mouwen (2) is hier gekozen voor de methode waarbij de som van 2 Gaussfuncties wordt aangepast aan  $L_e(u)_1$ . Het voordeel is, dat de Abeltransformatie analytisch kon worden uitgevoerd. Een nadeel is, dat de aanpassing in de flanken relatief grote systematische afwijkingen vertoont van het gemeten  $L_e(u)$  profiel.

### 3.2 Afleiding gas- en elektronentemperatuurverdeling

Gebaseerd op de absorptiecorrectiemethode heeft Mouwen (12) door wel een plaatsafhankelijk lijnprofiel in rekening te brengen, een theorie ontwikkeld om op eenvoudige wijze de temperatuurverdeling te bepalen.

In het volgende wordt deze methode beschreven waarbij een modificatie van de door Mouwen verkregen uitdrukking wordt ingevoerd.

In de hogedruk Hg-ontlading kunnen de Dopplerverbreiding en de isotopie-effecten meestal verwaarloosd worden t.o.v. de resonantieverbreding (12). Het lijnprofiel kan dan voorgesteld worden door een Lorentz-functie, welke in genormaliseerde vorm luidt:

$$I_\omega(\omega, r) = \frac{2}{\pi\gamma(r)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\gamma^2(r)}} \quad (3.4)$$

De halfwaardebreedte  $\gamma(r)$  voldoet aan de relatie

$$\gamma(r) = C_a n_a(r) \quad (3.5)$$

met  $C_a$  = constante voor resonantieverbreding

$n_a(r)$  = dichtheid van de storende deeltjes, in dit geval de gasatomen.

Voor de straling per eenheid van volume van een niet absorberende lijn kan worden geschreven

$$P(r) = h\nu \frac{g_n}{g_0} A_{nm} n_0(r) \exp \left\{ - \frac{E_n}{kT_e(r)} \right\} \quad (3.6)$$

met  $n_0(r)$  = dichtheid atomen in het grondnivo

$T_e(r)$  = excitatietemperatuur

De stralingsdichtheid in een frequentiegebiedje  $d\omega$  is

$$dP(\omega, r) = P(r) I_\omega(\omega, r) d\omega \quad (3.7)$$

Indien  $dP(\omega, r)$  wordt gemeten in het centrum van het lijnprofiel in een klein frequentiegebiedje  $d\omega \ll \gamma(r)$  is  $\omega \approx \omega_0$ .

Door de verarming van de atomen door excitatie en ionisatie te verwaarlozen, zodat  $n_0(r) = n_a(r)$ , toonde Mouwen aan m.b.v. (3.4), (3.5) en (3.6) dat voor het quotient  $dP(\omega, 0)/dP(\omega, r)$  geschreven kan worden

$$\frac{dP(\omega, 0)}{dP(\omega, r)} = \exp \left[ \frac{E_n}{k} \left\{ \frac{1}{T_e(r)} - \frac{1}{T_e(0)} \right\} \right] \quad (3.8)$$

Nu is experimenteel aan de gestelde voorwaarde,  $d\omega \ll \gamma(r)$ , niet altijd te voldoen. Wordt (3.8) toch toegepast om een uitdrukking voor de elektronentemperatuur te verkrijgen, dan wordt de variatie van de spectraallijn over het door de monochromator uitgesneden golflengtegebiedje verwaarloosd.

Met de volgende beschouwing wordt hiermee wel rekening gehouden.

Stel de doorlaatfunctie van de monochromator  $A_n(\omega)$  voldoet aan

$$A_n(\omega) = 1 \quad \text{voor } \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$A_n(\omega) = 0 \quad \text{voor alle overige } \omega \quad (3.9)$$

De spektrale intensiteit  $\Delta P(\omega, r)$  die dan gemeten wordt

$$\Delta P(\omega, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} dP(\omega, r) A_n(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} P(r) I_\omega(\omega, r) A_n(\omega) d\omega \quad (3.10)$$

Samen met (3.4), (3.6) en (3.9) wordt dit

$$\Delta P(\omega, r) = P(r) \Big|_{\nu_0} \cdot \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{\Delta\omega}{\gamma(r)} \right) \quad (3.11)$$

Substitutie van  $\gamma(r) = C_a n_a(r)$  geeft voor het quotient

$$\frac{\Delta P(\omega, 0)}{\Delta P(\omega, r)} = \frac{n_0(0) \exp \left\{ -\frac{E_n}{kT_e(0)} \right\} \cdot \arctan \left( \frac{\Delta\omega}{C_a n_a(0)} \right)}{n_0(r) \exp \left\{ -\frac{E_n}{kT_e(r)} \right\} \cdot \arctan \left( \frac{\Delta\omega}{C_a n_a(r)} \right)} \quad (3.12)$$

Toepassen van reeksontwikkeling voor  $\arctan x$  en met de voorwaarde  $n_0(r) = n_a(r)$  geeft na uitwerking

$$\frac{\Delta P(\omega, 0)}{\Delta P(\omega, r)} = \exp \left[ \frac{E_n}{k} \left\{ \frac{1}{T_e(r)} - \frac{1}{T_e(0)} \right\} \right] \cdot F(r, \Delta\omega) \quad (3.13)$$

met

$$F(r, \Delta\omega) = 1 + \frac{\Delta\omega^2}{3C_a^2 n_a^2(0)} \left\{ \frac{n_a^2(0)}{n_a^2(r)} - 1 \right\} \quad (3.14)$$

Vergelijken we dit resultaat (3.14) met de door Mouwen gevonden uitdrukking (3.8), dan zien we dat het verschil de functie  $F(r, \Delta\omega)$  is.

Opmerkingen:

- 1 Nagegaan is de invloed die het apparaatprofiel heeft. Het blijkt, gezien de invloed die  $F(r, \Delta\omega)$  heeft op (3.13), dat de gekozen  $A_n(\omega)$  voldoende met deze invloeden rekening houdt.
- 2 In dit rapport wordt de metingen in de top van een spektraallijn in een golflengtegebiedje  $\Delta\omega$  de "spectrale meting" genoemd.  
Meting van het gehele lijnprofiel heet dan "integrale meting".

Deze "integrale meting" geeft met (3.7) en (3.4)

$$P_{\text{int}}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} dP(\omega, r) = P(r) \int_{-\infty}^{+\infty} I_\omega(\omega, r) d\omega = P(r) \quad (3.15)$$

Analoog met de "spectrale meting" wordt dan

$$\frac{P(0)}{P(r)} = \frac{n_a(0)}{n_a(r)} \cdot \exp \left[ \frac{E_n}{k} \left\{ \frac{1}{T_e(r)} - \frac{1}{T_e(0)} \right\} \right] \quad (3.16)$$

Combinatie van (3.13) en (3.16) geeft met de gaswet  $p = n_a k T_a(r)$



$$\frac{P(o)/P(r)}{\Delta P(\omega, r)/\Delta P(\omega, o)} = \frac{n_a(o)}{n_a(r)} \cdot \frac{1}{F(r, \Delta\omega)} = \frac{T_a(r)}{T_a(o)} \frac{1}{F(r, \Delta\omega)} \quad (3.17)$$

Aangezien zowel de elektronendruk als de ionendruk hier verwaarloosd kan worden wordt de ideale gaswet toegepast.

Indien  $F(r, \Delta\omega)$  bekend is, hetgeen met een iteratieprocedure uit te voeren is, volgt uit (3.17) de gastemperatuurverdeling  $T_a(r)/T_a(o)$  en m.b.v. (3.13) een uitdrukking voor de elektronentemperatuurverdeling, n.l.

$$A(r) = \frac{1}{T_e(r)} - \frac{1}{T_e(o)} \quad (3.18)$$

Het grote voordeel van de beschreven procedure is, dat in principe met de meting van één door resonantie verbrede spectraallijn, de gas- én elektronentemperatuurverdeling bepaald kan worden.

Hiermee is het 2<sup>e</sup> en 3<sup>e</sup> bezwaar tegen de methode Elenbaas, meting van een aantal spectraallijnen, ondervangen.

### 3.3 Meetresultaten

Voor de "spectrale metingen" kan m.b.v. (3.13) geschreven worden

$$\ln \left[ \frac{1}{F(r, \Delta\omega)} \frac{\Delta P(\omega, o)}{\Delta P(\omega, r)} \right] = \frac{E_n}{k} \left\{ \frac{1}{T_e(r)} - \frac{1}{T_e(o)} \right\} \quad (3.19)$$

waarin  $E_n = eV_n$ ,  $V_n$  = excitatiepotentiaal.

Wordt (3.19) als functie van  $V_n$  met parameter  $r$  grafisch uitgezet, dan zullen de rechten door de oorsprong gaan.

Metingen zijn verricht aan de spektraallijnen  $\lambda_1 = 491,6 \text{ nm}$  ( $8^1S_0 - 6^1P_1$ )  
 $\lambda_2 = 410,8 \text{ nm}$  ( $9^1S_0 - 6^1P_1$ ).

De meetresultaten zijn in fig.3.2 gegeven. Uit de helling van deze lijnen zijn nu de waarden van  $\frac{e}{k} \left\{ \frac{1}{T_e(r)} - \frac{1}{T_e(o)} \right\}$  te berekenen.

Als functie van de straal is dit uitgezet in fig.3.3, waarin ook de waarden van Elenbaas (6) zijn vermeld.

Door omschrijven van (3.19) verkrijgen we

$$\left\{ \frac{T_e(r)}{T_e(o)} \right\}^{-1} = 1 + \frac{k}{E_n} T_e(o) \ln \left\{ \frac{1}{F(r, \Delta\omega)} \cdot \frac{\Delta P(\omega, o)}{\Delta P(\omega, r)} \right\} \quad (3.20)$$

Vooruitlopend op het resultaat van de absolute metingen, waaruit  $T_e(0) = 5780$  K volgt, is  $T_e(r)/T_e(0)$  te berekenen, zie Tabel 3.2.

Uit (3.17) volgde

$$B(r) = \frac{T_a(r)}{T_a(0)} = F(r, \Delta\omega) \frac{P(o)/P(r)}{\Delta P(\omega, o)/\Delta P(\omega, r)} \quad (3.21)$$

Zowel in fig.5.1 als in Tabel 3.2 is  $T_a(r)/T_a(0)$  gegeven, zoals deze volgt uit de metingen. Deze verdeling is vergeleken met het door Elenbaas verkregen resultaat.

$r \cdot 10^{-3} \text{m}$	elektronen temp.verdeling	Gastemperatuurverdeling		systematisch verschil in %
		Timmermans	Elenbaas	
0	1	1	1	0
1	0,998	0,998	0,998	0
2	0,992	0,992	0,992	0
3	0,983	0,983	0,983	0
4	0,970	0,970	0,970	0
5	0,955	0,954	0,952	≈ 0,2
6	0,936	0,935	0,928	≈ 0,7
7	0,914	0,913	0,892	≈ 2
8	0,890	0,889	0,856	≈ 4
9	0,864	0,864	0,811	≈ 6
10	0,835	0,835	0,760	≈ 10

Tabel 3.2 Elektronen- en gastemperatuurverdeling verkregen uit metingen van  $\lambda_1 = 491,6$  nm en  $\lambda_2 = 410,8$  nm. Resultaten zijn vergeleken met Elenbaas(6).

### 3.4 De werkelijke temperatuurverdeling onder voorwaarde L.T.E..

Wordt in de door ons toegepaste gasontladingbuis Lokaal Thermisch Evenwicht (L.T.E) verondersteld, d.w.z.  $T_e(r) = T_a(r) = T(r)$ , dan volgt m.b.v. (3.18) en (3.21)

$$T(r) = \frac{1-B(r)}{A(r)} \quad (3.22)$$

$$T(o) = \frac{1-B(r)}{A(r)B(r)} \quad (3.23)$$

In Tabel 3.3 zijn de hiermee berekende temperaturen gegeven, waarbij gemiddeld is over de metingen van  $\lambda_1 = 491,6$  nm en  $\lambda_2 = 410,8$  nm.

Laten we de waarden voor  $r = 9$ . en  $r = 10 \cdot 10^{-3}$  m buiten beschouwing, dan volgt voor de gemiddelde astemperatuur  $\bar{T}_0(o) = 5900 \pm 20$  K.

r .10 <sup>-3</sup> m	T(r) K	T(o) K
0		
1	5895	5906
2	5846	5890
3	5795	5895
4	5731	5907
5	5647	5917
6	5522	5906
7	5396	5910
8	5221	5871
9	4992	5778
10	4706	5620

Tabel 3.3 Berekende werkelijke temperatuur met voorwaarde L.T.E..

### 3.4.1 Nadere discussie van de L.T.E.-voorwaarde.

Indien wordt aangenomen dat de elektronen een Maxwellse energieverdeling hebben en dat de elastische botsingsdoorsnede constant is, zijn relaties bekend waarin de energieoverdracht als functie van het verschil in elektronen- en gastemperatuur ( $T_e - T_a$ ) is gegeven, zie (2),(6).

De energie die door thermische geleiding wordt afgevoerd heeft een energieoverdracht van elektronen naar atomen ten gevolge.

Elenbaas (6) heeft experimenteel aangetoond dat het energieverlies door warmtegeleiding voor deze ontlading  $P_{\text{cond}} \approx 10$  W/cm booglengte bedraagt.

Als gevolg hiervan is de gestelde L.T.E.-voorwaarde niet geheel correct.

Evenals in het werk van Elenbaas, is het verschil  $T_e(r) - T_a(r)$  aangenomen en is nagegaan of bij de temperaturen uit dit werk gevonden ook aan de eis

$P_{\text{cond}} = 10$  W/cm is voldaan.

Indien uitgegaan wordt van de al bekende  $T_a(r)/T_a(o)$ , met de keuze van  $T_a(o) = 5760$  K (hfdst 4) en de besproken verschillen  $T_e(r) - T_a(r)$ , dan kan  $T_e(r)/T_e(o)$  berekend worden.

In fig.3.4 zijn de berekende verdelingen gegeven, het verschil  $T_e(r) - T_a(r)$  in fig.3.5.

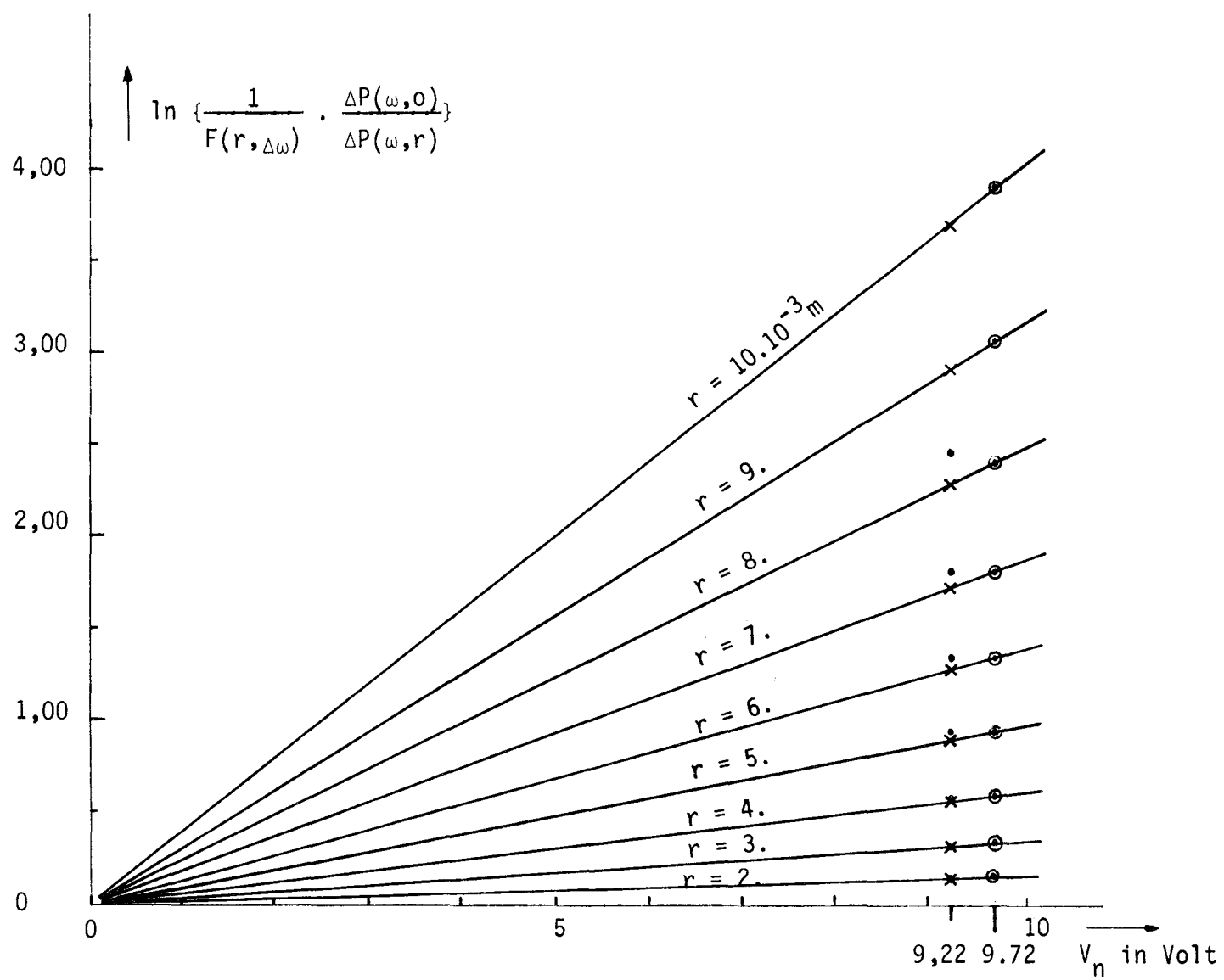


Fig. 3.2 Resultaat van de "spektrale metingen"; x,  $\lambda_1 = 491,6 \text{ nm}$  ( $V_n = 9,22$ );  
 o,  $\lambda_2 = 410,8 \text{ nm}$  ( $V_n = 9,72$ ); •, Mouwen (12).

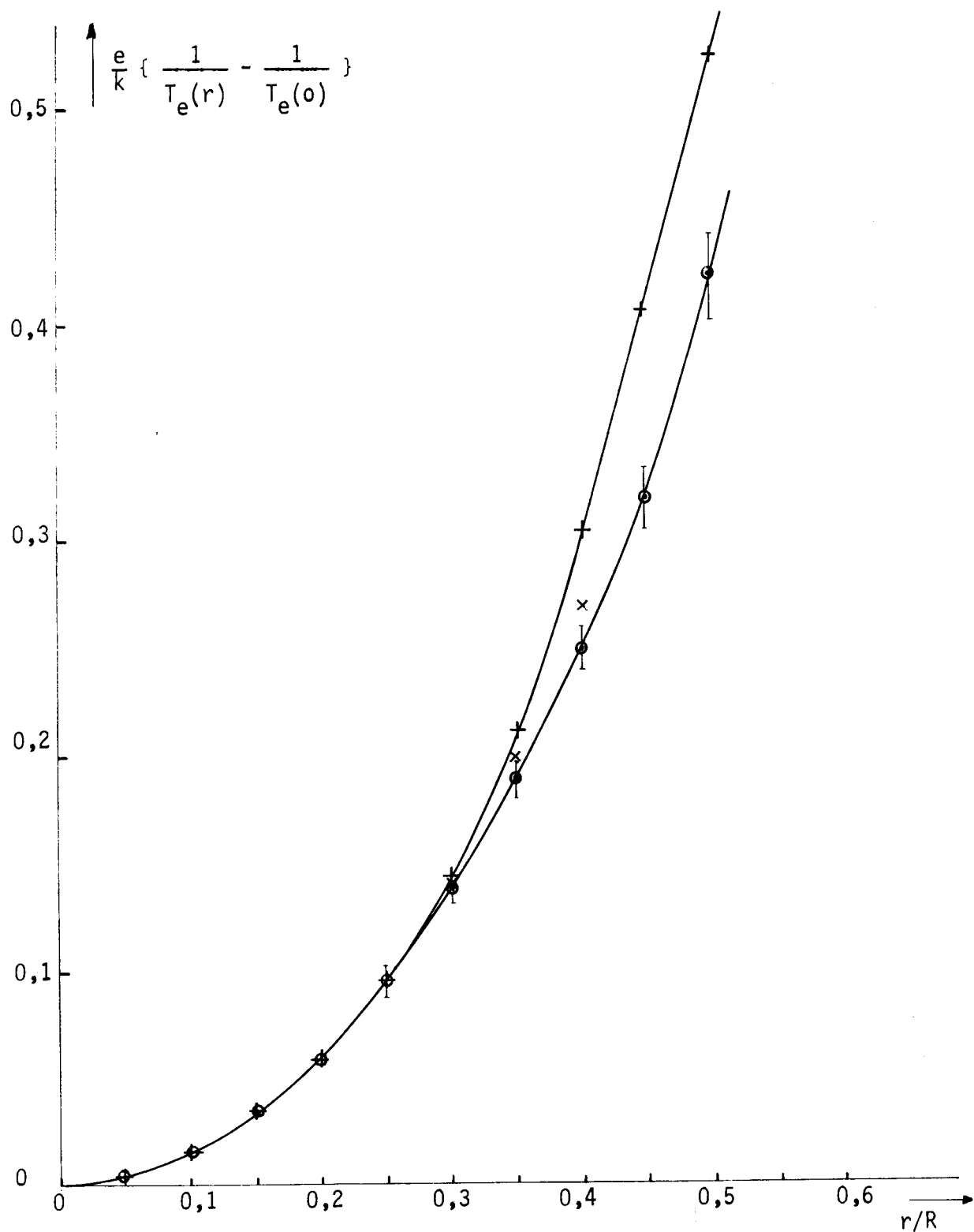


Fig.3.3 De experimenteel bepaalde elektronentemperatuurverdeling

○, gemiddelde resultaat van  $\lambda_1 = 491,6$  nm en  $\lambda_2 = 410,8$  nm.

+, Elenbaas (6).

x, Mouwen (12).

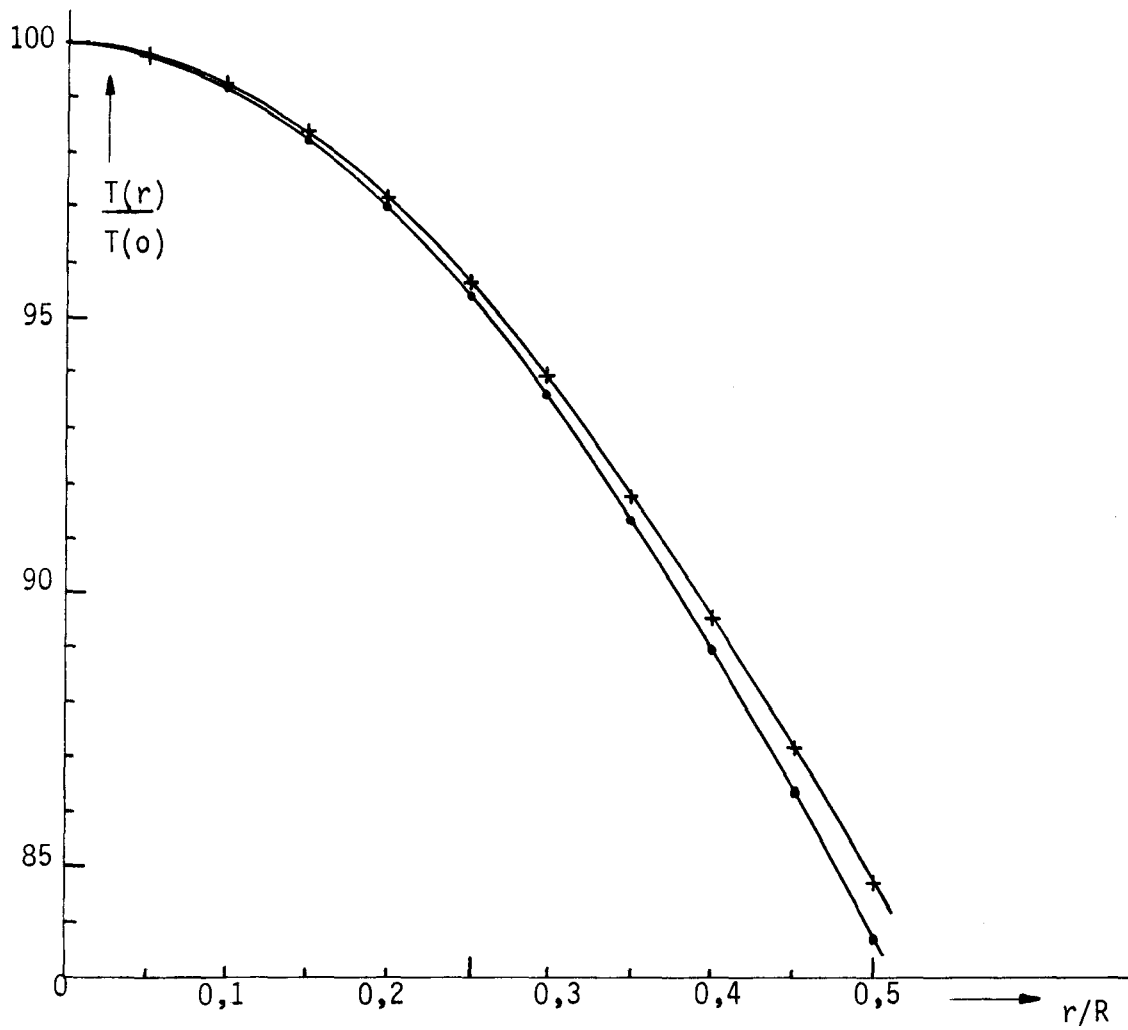


Fig.3.4 Berekende gas- en elektronentemperatuurverdeling: x,  $T_e(r)/T_e(0)$ ; •,  $T_a(r)/T_a(0)$

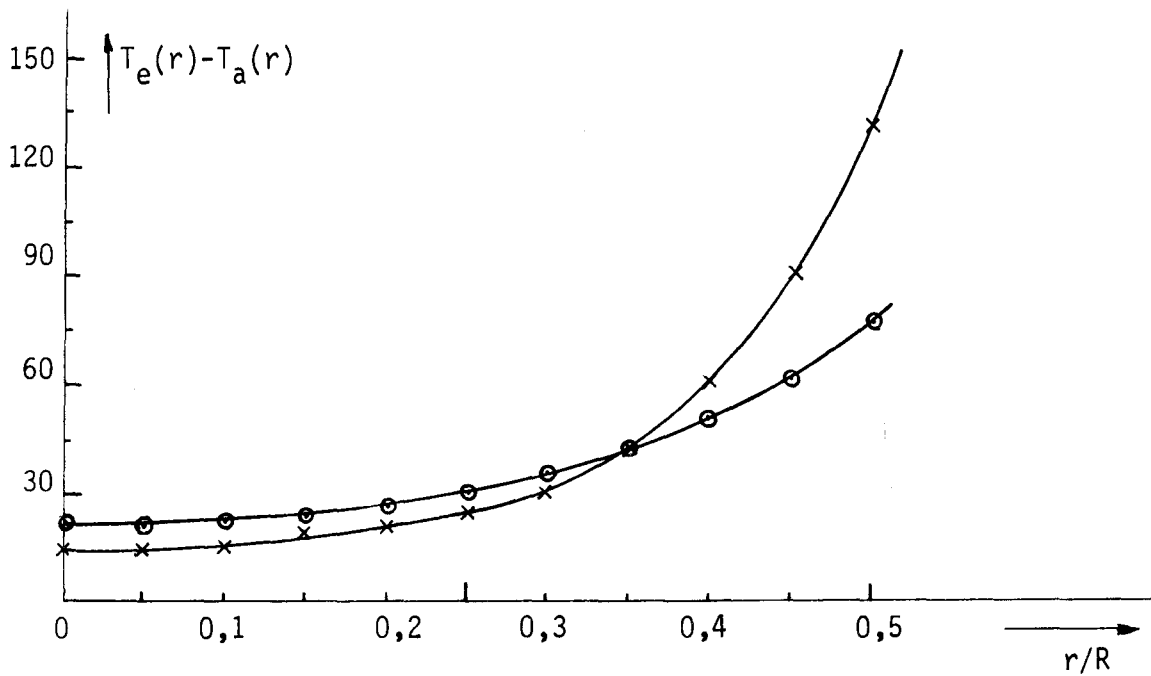


Fig.3.5 Verschillen van  $T_e(r)$  en  $T_a(r)$ , vergeleken met Elenbaas  
 •, Timmermans  
 x, Elenbaas (6)

#### 4 De werkelijke gastemperatuursverdeling uit absolute metingen

Uitgaande van de stralingstransportvergelijking, toepassing van de z.g. relaties van Einstein en bij veronderstelling van L.T.E., is de temperatuur van inhomogene gasontladingen te berekenen.

Vanuit deze veronderstellingen, zijn onafhankelijk van elkaar, een tweetal methoden ontwikkeld, n.l..

1<sup>e</sup> Methode volgens Kruithof

2<sup>e</sup> Methode volgens Bartels.

In 4.1 wordt de 1<sup>e</sup> methode besproken en is nader ingegaan op een uitbreiding van deze methodiek, de methode van Bartels zal in 4.2 globaal en gericht op onze metingen besproken worden.

##### 4.1 De methode van Kruithof en een uitbreiding daarvan.

In 1967 heeft Kruithof (10) een methode beschreven om de gastemperatuur op de as van de ontlading te bepalen. Hiertoe worden de emissie en absorptie in een klein frequentiegebiedje van een "optisch dunne" spektraallijn, geïntegreerd over de dwarsdoorsnede van de ontlading gemeten, zie fig.4.1.

Als gevolg van de veronderstelling dat het plasma zich in L.T.E. bevindt heeft het zin de wet van Kirchhoff toe te passen. M.b.v. deze wet wordt een "gemiddelde" z.g. effectieve temperatuur ( $T_{eff}$ ) bepaald, immers vanwege de monotoon dalende gastemperatuur wordt niet de maximale temperatuur gevonden.

De wet van Kirchhoff luidt

$$I_{\nu} = (1-t) I_{\nu}(z, T_{eff}) \quad (4.1)$$

waarin  $I_{\nu}$  = stralingsvermogen per frequentieeenheid, per oppervlakteeenheid, per eenheid van ruimtehoek,  $Wm^{-2}sr^{-1}$ .

$t$  = transmissie, zodat  $(1-t)$  = absorptie

$$I_{\nu}(z, T_{eff}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{8\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left\{\frac{h\nu}{kT_{eff}}\right\} - 1} \quad (4.2)$$

$I_{\nu}(z, T_{eff})$  is het uitgestraalde vermogen van een zwarte straler  $Wm^{-2}sr^{-1}$ .

(Wet van Planck).

Wordt  $I_v(u=0)$  en  $t(u=0)$  gemeten, dan is  $T_{\text{eff}}(u=0)$  uit (4.1) te berekenen. Kruithof heeft het verband afgeleid tussen  $T_{\text{eff}}$  en de astemperatuur  $T(o)$ , voor  $u = 0$ , zie fig.4.1.

Hierbij is de gestimuleerde emissie verwaarloosd en wordt een plaatsonafhankelijke lijnprofiel aangenomen.

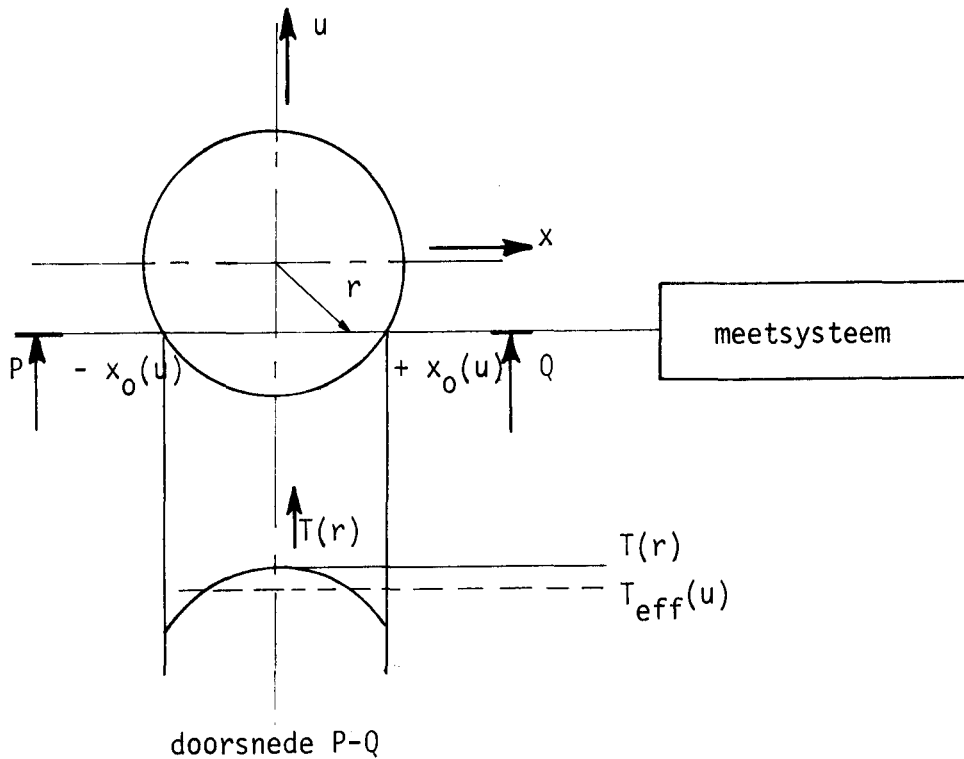


Fig.4.1 Toegepast coördinatensysteem.

Indien volgens methoden beschreven in hfdst. 3 de relatieve gastemperatuurverdeling bepaald is, kan met  $T(o)$  de werkelijke gastemperatuurverdeling berekend worden. Omdat bij deze methode de overgangswaarschijnlijkheid  $A_{nm}$  niet bekend behoeft te zijn, is het laatste bezwaar tegen Elenbaas (hfdst 3, punt 4) vervallen.

De hier beschreven temperatuurmeting kan ook toegepast worden om de werkelijke radiale temperatuurverdeling te bepalen, zodat Abeltransformatie achterwege kan blijven (zie hfdst. 3).

Wordt  $I_v(u)$  over elke doorsnede gemeten en met een absorptiemeting  $t(u)$  bepaald dan is weer met (4.1)  $T_{\text{eff}}(u)$  te berekenen. Het verband tussen  $T_{\text{eff}}(u)$  en de maximale temperatuur geeft dat  $T(r)$  berekend kan worden, zie fig.4.1.

Deze uitbreiding is uitgewerkt in Appendix II, hierbij zijn tevens de gestimuleerde emissie en een plaatsafhankelijk lijnprofiel in de beschouwing opgenomen.



De uiteindelijk verkregen formules waaruit m.b.v.  $T_{\text{eff}}(u)$ ,  $T(r)$  te berekenen is worden hier gegeven.

$$\frac{1}{\exp\left\{\frac{h\nu_0}{kT_{\text{eff}}(u)}\right\} - 1} =$$

$$= \frac{t'(u)}{1 - t'(u)} \int_{P=-x_0(u)}^{Q=+x_0(u)} \frac{\alpha(x,u) \left[1 - \exp\left\{-\frac{h\nu_0}{kT(x,u)}\right\}\right]}{\exp\left\{\frac{h\nu_0}{kT(x,u)}\right\} - 1} n_m(x,u) \exp\{N_m(x,u)\} dx \quad (4.3)$$

Hierin is

$$t'(u) = \exp\left\{-\int_{-x_0(u)}^{+x_0(u)} \alpha(x,u) \left[1 - \exp\left\{-\frac{h\nu_0}{kT(x,u)}\right\}\right] n_m(x,u) dx\right\} \quad (4.4)$$

$t'(u)$  is de z.g. effectieve transmissie

$$\alpha(x,u) = \frac{g_n}{g_m} \frac{c^2}{8\pi\nu^2} A_{nm} I_\omega(x,u) \quad (4.5)$$

$\alpha(x,u)$  is de atomaire absorptiecoëfficiënt

Opmerking 1:  $\alpha(x,u)$  is gedefinieerd volgens de Einsteinrelaties

2: In geval van L.T.E. is het emissieprofiel gelijk aan het absorptieprofiel.

$n_m(x,u)$  is aantal deeltjes in nivo  $m$  op plaats  $(x,u)$

$$N_m(x,u) = \int_{-x_0(u)}^{x(u)} \alpha(x,u) n_m(x,u) \left[1 - \exp\left\{-\frac{h\nu_0}{kT(x,u)}\right\}\right] dx \quad (4.6)$$

$T(x,u)$  = gastemperatuur

Voorwaarden die hierbij gelden zijn:

- 1) Emissie buiten de ontlading moet nul zijn. Met (4.5) is dan ook de absorptie identiek nul.
- 2) Bij de afleiding wordt Lokaal Thermisch Evenwicht verondersteld.

- 3) De verarming van de neutrale deeltjes concentratie  $n_a(x,u)$  door ionisatie en excitatie wordt verwaarloosd, zodat in de Boltzmannvergelijking  $n_o(x,u)$ , de concentratie van de atomen in het grondnivo, overgaat in  $n_o(x,u) = n_a(x,u) = \frac{p_o}{kT(x,u)}$
- 4) De lijnverschuiving t.g.v. "Starkshift" is te verwaarlozen.
- 5) Emissie en absorptie van het continuüm is te verwaarlozen t.o.v. de lijnintensiteit.
- 6) De relatieve temperatuursverdeling  $T(r)/T(o)$  moet bekend zijn. In verband met dit laatste kan indien de vorm van de verdeling onbekend is, ook iteratief te werk worden gegaan.

J.J. de Groot en A.G. Jack (11), hebben  $T_{eff}(u=0)$  en  $T(o)$  numeriek bepaald, het rekenprogramma hiervoor werd door hen welwillend beschikbaar gesteld en kon worden toegepast voor de berekening van  $T(r)$  uit  $T_{eff}(u)$ . De gevolgde procedure is dan,  $T(r)$  wordt zodanig gekozen, dat bij bepaalde transmissie  $t(u)$ , de berekende  $T_{eff}(u)$  overeenkomt met de gemeten  $T_{eff}(u)$ .

Bovenstaande methode heeft het voordeel dat de Abeltransformatie komt te vervallen, een nadeel is om voldoende nauwkeurigheid te verkrijgen, moet de absorptie aan de rand van de ontlading relatief groot zijn.

Uit de afleiding in Appendix II blijkt dat

- 1: De berekening onafhankelijk van de druk  $p_o$  uitgevoerd kan worden.
- 2: De wandtemperatuur ( $T_w$ ) een te verwaarlozen invloed heeft.

Genoemde auteurs hebben dit ook numeriek aangetoond door het verband te berekenen tussen  $T_{eff}$  en de transmissie "t", bij bepaalde  $T(o)$ , m.b.v. een afgekapte parabolische temperatuurverdeling.

De invloed op  $T_{eff}$  met  $T_w = 100$  K en  $T_w \approx 1000$  K blijkt ca. 10K te bedragen. Fig.4.2 geeft het berekende verband tussen  $T_{eff}(u)$  en  $T(r)$ , met als parameter de transmissie "t" voor de toegepaste spectraallijnen.

#### 4.2 Methode volgens Bartels.

Een soortgelijke spectroscopische methode om de temperatuur te bepalen van inhomogene plasma's is door Bartels (15) ontwikkeld. Deze methode is nog niet veel toegepast en de reden is misschien dat deze theorie berust op een strikt formule aanpak van de stralingstransportvergelijking.

De theorie is hoofdzakelijk ontwikkeld voor een rotatiesymmetrisch plasma in L.T.E dat een zelf omgekeerde spektraallijn emitteert. Meet men van een der omkeerlijnen de emissie in een klein frequentiegebiedje, dan is hieruit

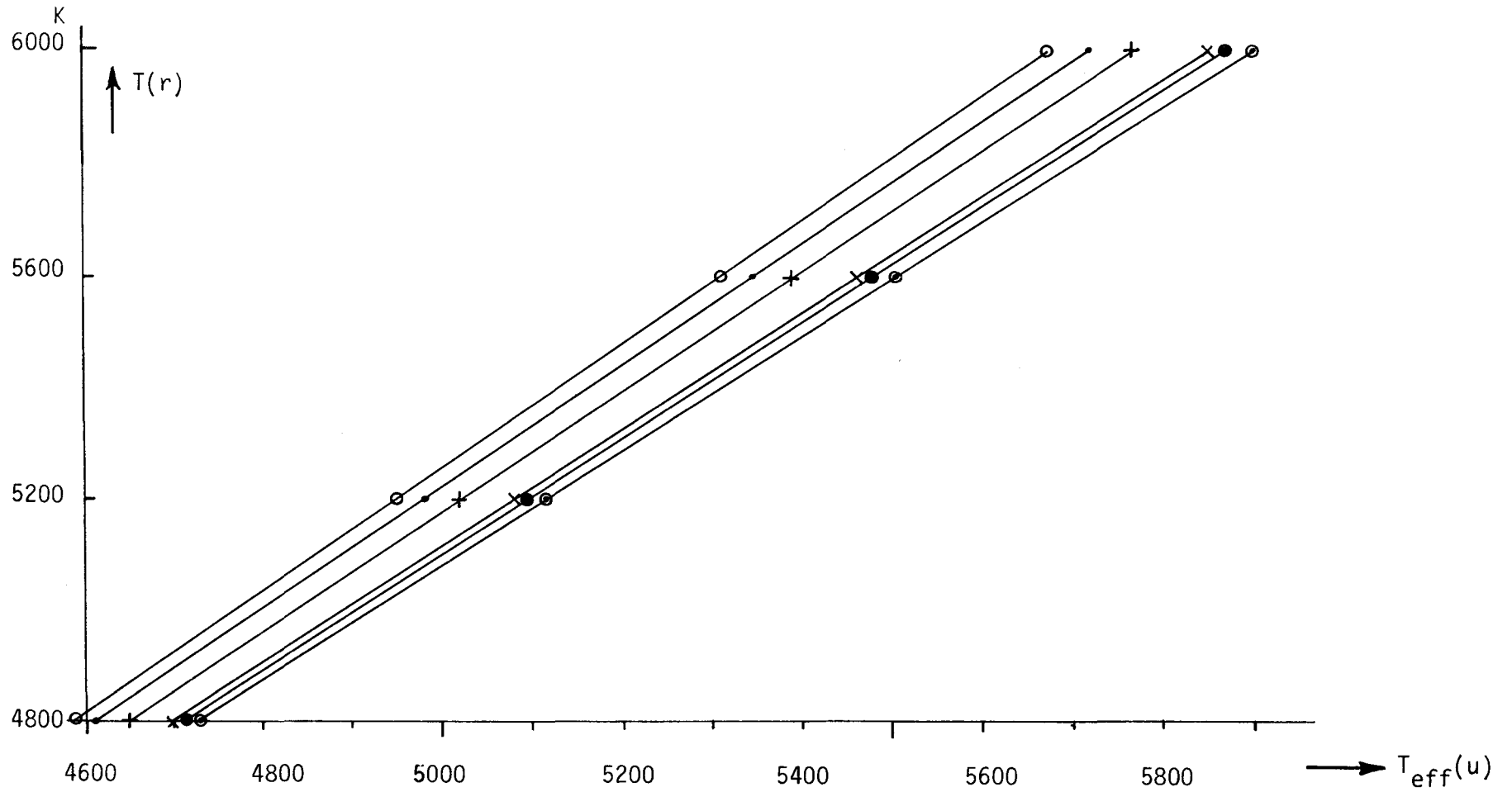


Fig.4.2 Verband tussen  $T_{\text{eff}}(u)$  en  $T(r)$

$\lambda = 577.0$  nm; ⊙,  $t = 0,905$  ( $\tau_0 = 0,1$ )

•,  $t = 0,074$  ( $\tau_0 = 2,6$ )

x,  $t = 0,027$  ( $\tau_0 = 3,6$ )

$\lambda = 546,1$  nm; +,  $t = 0,905$  ( $\tau_0 = 0,1$ )

•,  $t = 0,074$  ( $\tau_0 = 2,6$ )

⊙,  $t = 0,027$  ( $\tau_0 = 3,6$ )

de maximale temperatuur te berekenen. Omdat de absorptie in dit geval niet gemeten behoeft te worden is deze methode experimenteel eenvoudig. De radiale temperatuurverdeling kan voor zover de spektraallijn zelfomkeer vertoont ook bepaald worden, immers met genoemde instelling van de monochromator op een der omkeerkappen, wordt de maximale temperatuur in elke doorsnede bepaald,  $T_{\max}(u) = T(r)$ .

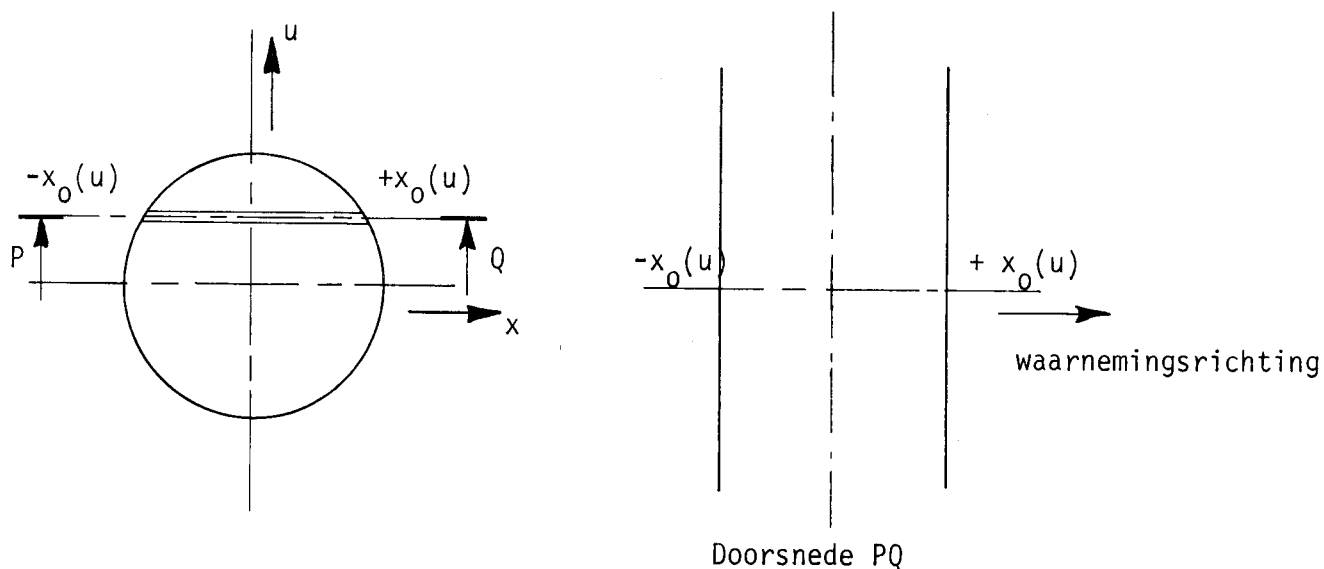


Fig.4.3 Gebruikt coördinatensysteem.

Zoals gezegd wordt uitgegaan van de stralingstransportvergelijking

$$I_{\nu}(u) = \int_{-x_0(u)}^{+x_0(u)} dx \epsilon_{\nu}(x,u) \exp\left\{ - \int_{-x(u)}^{x_0(u)} K_{\nu}(x,u) dx \right\} \quad (4.7)$$

Hierin is

$\epsilon_{\nu}(x,u)$  is de stralingsstroom per volumeeenheid per frequentieeenheid, per steradiaal,  $\text{Wm}^{-3}\text{sr}^{-1}\text{s}$ .

$$K_{\nu}(x,u) = \frac{g_n}{g_m} \frac{c^2}{8\pi\nu^2} A_{nm} n_m(x,u) I_{\omega}(x,u) \quad (4.8)$$

$K_{\nu}$  is de absorptiecoëfficiënt,  $\text{m}^{-1}$ .

$I_{\omega}(x,u)$  is het plaatsafhankelijke genormaliseerde lijnprofiel, zonder absorptie

$$\int_{-x_0(u)}^{x_0(u)} K_\nu(x,u) dx = \tau(x,u) \text{ de optische laagdikte.}$$

Bartels definieert 'n functie,  $J_\nu$  als

$$J_\nu(x,u) = \frac{\epsilon_\nu(x,u)}{K_\nu(x,u)} \quad (4.9)$$

In de onderstaande beschouwing worden de volgende voorwaarden gesteld

- a) Rotatiesymmetrie
- b) Lokaal Thermisch Evenwicht
- c) Monotoon dalende  $J_\nu$  met toenemende afstand tot de as
- d) Verwaarlozing van de gestimuleerde emissie
- 3) Verarming van de atomen door ionisatie en excitatie wordt verwaarloosd
- f) Plaatsonafhankelijk lijnprofiel
- g) Lijnverschuiving nul en geen resonantielijnen.

I.v.m. voorwaarde b) kan de wet van Kirchhoff toegepast worden

$$\epsilon_\nu = K_\nu I_\nu(z,T) \quad (4.10)$$

zodat (4.9) overgaat in

$$J_\nu(x,u) = I_\nu(z,T(x,u)) \quad (4.11)$$

$$\text{met } I_\nu(z,T(x,u)) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{8\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left\{\frac{h\nu}{kT(x,u)}\right\} - 1}$$

de wet van Planck.

Aangetoond kan worden, dat met de voorwaarden a t/m g (4.7) wordt

$$I_\nu(u) = J_{\nu_m}(u) \cdot M \cdot Y(\tau_0(u), p) \quad (4.12)$$

Hierin zijn

$$J_{\nu_m}(u) = I_\nu(z, T_{\max}(u)) \quad (4.13)$$

$$\tau_0(u) = \int_{-x_0(u)}^{+x_0(u)} K_\nu(x,u) dx \quad (4.14)$$

M en p zijn twee parameters die de inhomogeniteit van de ontlading beschrijven.

$Y(\tau_0(u), p)$  is een krommenschaar met parameter  $p$ , deze functie beschrijft de absorptie

Voor bepaalde limietsituaties, gaan  $M$ ,  $p$  en  $Y(\tau_0(u), p)$  over in eenvoudige functies van het onder- en bovennivo van de spektrallijnen,  $E_m$  resp.  $E_n$ .

Onderscheid moet hierbij gemaakt worden tussen resonantieverbreding en Starkverbreding

1) Voor resonantieverbreding, met  $kT \ll E_m$

$$M = M_\infty = \sqrt{E_m/E_n} \quad (4.15)$$

2) Voor Starkverbreding, met  $kT \ll E_m + \frac{1}{2}V_i$  (16)

$$M = M_\infty = \sqrt{\frac{E_m + \frac{1}{2}V_i}{E_n + \frac{1}{2}V_i}} \quad (4.16)$$

Hierin is  $V_i$  de ionisatiepotential

Voor de factor  $p$  geldt

$$p = \frac{6}{\pi} \arctan \frac{M^2}{\sqrt{1 + 2M^2}} \quad (4.17)$$

Bartels toont aan dat  $Y(\tau_0(u), p)$  in de omkeerkappen van een zelfomgekeerde spektraallijn maximaal is en gegeven wordt door

$$Y_{\max}(\tau_0(u), p) = 0,736 + 0,264 p^2 \quad (4.18)$$

zodat deze functie  $Y$  niet d.m.v. een meting bepaald behoeft te worden.

Wordt de methode Bartels toegepast op de flanken van een zelfomgekeerde spektraallijn en in het midden van een niet omgekeerde spektraallijn, dan gaat voor waarden van  $\tau_0 < 2,5$  de functie  $Y(\tau_0(u), p)$  over in

$$Y(\tau_0(u)) = 1 - \exp \{ -\tau_0(u) \} \quad (4.19)$$

Hierin is  $\exp \{ -\tau_0(u) \} = t(u)$ , de transmissie zoals ook bij methode Kruithof besproken is. Worden de metingen uitgevoerd voor alle doorsneden "u", dan is  $T_{\max}(u) = T(r)$  m.b.v. (4.12) te berekenen, dan moet echter de transmissie  $t(u)$  wel bepaald worden.

### 4.3 Vergelijking van beide methoden.

Analyse van de besproken methoden volgens Kruithof en Bartels toont dat het uitgangspunt voor beide hetzelfde is, n.l.

a) de Stralingstransportvergelijking

b) Lokaal Thermisch Evenwicht.

Een aantal voorwaarden om de berekening uit te voeren identiek zijn.

c) rotatiesymmetrie

d) monotoon dalende temperatuurverdeling

e) verarming van de neutrale deeltjesconcentratie door ionisatie en excitatie te verwaarlozen.

Methode Kruithof kan uitgebreid worden door in elke doorsnede van de gasontlading de emissie en absorptie te meten, van

1: Omkeerkap van een zelfomgekeerde spektraallijn

2: Top van een "optisch dunne" lijn.

3: Flank van een spektraallijn.

De methode volgens Bartels kan eveneens toegepast worden op

1: De flanken van een "optisch dikke" spektraallijn.

2: De top van een "optisch dunne" spektraallijn.

In beide gevallen echter moet de absorptie bekend zijn.

Een andere overeenkomst is de volgende:

We schrijven de wet van Kirchhoff als volgt

$$I_{\nu}(u) = \{1-t(u)\} \frac{I_{\nu}(z, T_{\text{eff}}(u))}{I_{\nu}(z, T(r))} \cdot I_{\nu}(z, T(r)) \quad (4.20)$$

Met de definitie van

$$M_{kr}(u) = \frac{I_{\nu}(z, T_{\text{eff}}(u))}{I_{\nu}(z, T(r))} \quad (4.21)$$

gaat (4.20) over in

$$I_{\nu}(u) = \{1-t(u)\} \cdot M_{kr}(u) \cdot I_{\nu}(z, T(r)) \quad (4.22)$$

Hierin is  $T(r)$  de maximale temperatuur in de doorsnede "u",

De methode Bartels geeft (zie (4.12))

$$I_{\nu}(u) = Y(\tau_0(u), p) \cdot M_B \cdot J_{\nu_m}(u) \quad (4.23)$$

met  $J_{\nu_m}(u) = I_{\nu}(z, T_{\max}(u)) = I_{\nu}(z, T(r))$ .

Voor  $\tau_0(u) < 2.5$  ging de functie  $Y$  over in

$$Y(\tau_0(u)) = 1 - \exp\{-\tau_0(u)\} = 1 - t(u). \quad (4.24)$$

Hiermede wordt (4.23)

$$I_{\nu}(u) = \{1 - t(u)\} \cdot M_B \cdot I_{\nu}(z, T(r)) \quad (4.25)$$

In Tabel 4.1 zijn  $M_B$  en  $M_{kr}(u)$  vergeleken, waarbij  $M_{kr}(u)$  is berekend met temperaturen volgend uit de methode Kruithof.

Het blijkt dat  $M_{kr}(u)$  onafhankelijk van  $u$  is.

golflengte	$M_{kr}(u)$	$M_B$	afwijking %
577.0 nm	0,921	0,908	$\approx 1,4$
579.0 nm	0,923	0,908	$\approx 1,6$
546.1 nm	0,825	0,840	$\approx 1,8$

Tabel 4.1 Overeenkomst tussen  $M_{kr}(u)$  en  $M_B$ .

Worden de in Tabel 4.2 gegeven toleranties in  $M_{kr}(u)$  doorberekend, dan zijn  $M_B$  en  $M_{kr}$  even groot.

#### 4.4 Meetresultaten

De metingen zijn verwerkt in Tabel 4.2 waarin de werkelijke gastemperaturen staan, fig.4.4 geeft de relatieve temperatuurverdeling, vergeleken met Elenbaas (6). De systematische verschillen tussen Kruithof en Bartels zijn <1% voor alle spektraallijnen over alle doorsneden. (zie ook hfdst. 4.3).



De grote onnauwkeurigheid in de metingen m.b.v.  $\lambda_3 = 577.0$  en  $\lambda_4 = 579.0$  nm zijn te wijten aan de geringe randabsorptie, de metingen m.b.v.  $\lambda_5 = 546.1$  nm geven het beste resultaat. Vergeleken met Elenbaas, zijn de systematische afwijkingen bij  $r/R = 0,4$ ,  $\approx 3\%$  en bij  $r/R = 0,5$  is dit  $\approx 5\%$ .

Opgemerkt moet echter worden dat Elenbaas vanaf  $r/R = 0,4$  de helling van de gastemperatuurverdeling heeft aangepast aan wandtemperatuurmetingen.

Samenvattend kan men stellen dat beide besproken methoden een goede diagnostiek geven voor het bepalen van de gastemperatuurverdeling in een plasma, dat in "bijna L.T.E." is.

r .10 <sup>-3</sup> m	$\lambda_3 = 577.0$ nm				$\lambda_4 = 579.0$ nm				$\lambda_5 = 546.1$ nm			
	Kruithof		Bartels		Kruithof		Bartels		Kruithof		Bartels	
	T(r) K	$\pm \Delta T(r)$ K	T(r) K	$\pm \Delta T(r)$ K	T(r) K	$\pm \Delta T(r)$ K	T(r) K	$\pm \Delta T(r)$ K	T(r) K	$\pm \Delta T(r)$ K	T(r) K	$\pm \Delta T(r)$ K
0	5760	45	5775	50	5775	50	5800	50	5780	25	5740	30
1	5750	45	5765	50	5765	50	5790	50	5775	25	5730	30
2	5730	50	5745	50	5760	55	5785	55	5750	25	5690	30
3	5695	50	5710	50	5740	60	5775	50	5715	30	5660	30
4	5630	60	5650	60	5720	70	5720	70	5650	30	5610	30
5	5560	70	5575	70	5680	85	5640	100	5565	30	5530	30
6	5470	95	5485	95	5640	100	5620	150	5455	30	5435	30
7	5370	110	5405	130	5610	180	5575	200	5280	30	5265	35
8	5300	200	5315	220	5625	250	5495	350	5090	30	5070	35
9									4890	35	4875	35
10									4725	35	4720	35
11									4640	40	4635	40

Tabel 4.2 Overzicht berekende werkelijke gastemperaturen als functie van de straal.

## 5. Overzicht van de verkregen temperaturen

De uit verschillende methoden verkregen gastemperaturen op de as van de ontlading, zijn in Tabel 5.1 gerangschikt.

1. De temperaturen bepaald met methode I.2 (zie Tabel 5.1) liggen ca. 200 K hoger dan die m.b.v. methode III verkregen. De reden hiervoor ligt wel aan de onzekerheid van de constanten die hier volgens Lindholm en Schulz toegepast zijn.
2. Zoals besproken in hfdst. 4.3 zijn de kleine verschillen in temperaturen, bepaald met methode III Kruithof en III Bartels, terug te voeren op de grote overeenkomst van beiden methodieken
3. De gemiddelde astemperatuur met methode III  $\overline{T_a(0)} = 5760 \pm 40$  K. Elenbaas (6) geeft hiervoor 5885 K.

Fig.5.1 geeft de relatieve temperatuurverdelingen bepaald met

- 1: Relatieve intensiteitsmetingen
- 2: Absolute metingen van emissie en absorptie.

Tevens is in de figuur getekend de verdeling volgens Elenbaas (6)

Opmerking: Vanaf  $r/R = 0.4$  heeft Elenbaas de helling aangepast aan zijn wandtemperatuurmetingen.

Methode		Gastemperatuur op de as van de ontlading $T_a(o)$ in K.	
I	Gastemperatuur uit spektraal lijnbreedte		
	1: M.b.v. resonantie-verbrede spektraallijnen		
	$\lambda_1 = 410.8$ nm	5740	$\pm 290$
	$\lambda_2 = 491.6$ nm	5400	$\pm 270$
	2: M.b.v. de combinatie resonantie- en Starkverbreding		
	Voorwaarde L.T.E.		
	577.0 met 491.6 nm	6030	$\pm 90$
	577.0 met 410.8 nm	5900	$\pm 90$
	579.0 met 491.6 nm	6230	$\pm 90$
	579.0 met 410.8 nm	6120	$\pm 90$
II	Gastemperatuur uit relatieve intensiteitsmetingen Voorwaarde L.T.E..	5900	$\pm 20$
III	Gastemperatuur uit absolute meting van emissie en absorptie	Kruithof	Bartels
	577.0 nm	5760	$\pm 45$ 5775
	579.0 nm	5775	$\pm 50$ 5800
	546.1 nm	5780	$\pm 25$ 5740
	491.6 nm	5730	$\pm 250$
	410.8 nm	5780	$\pm 200$

Tabel 5.1 Overzicht verkregen gastemperaturen op de as van de ontlading.

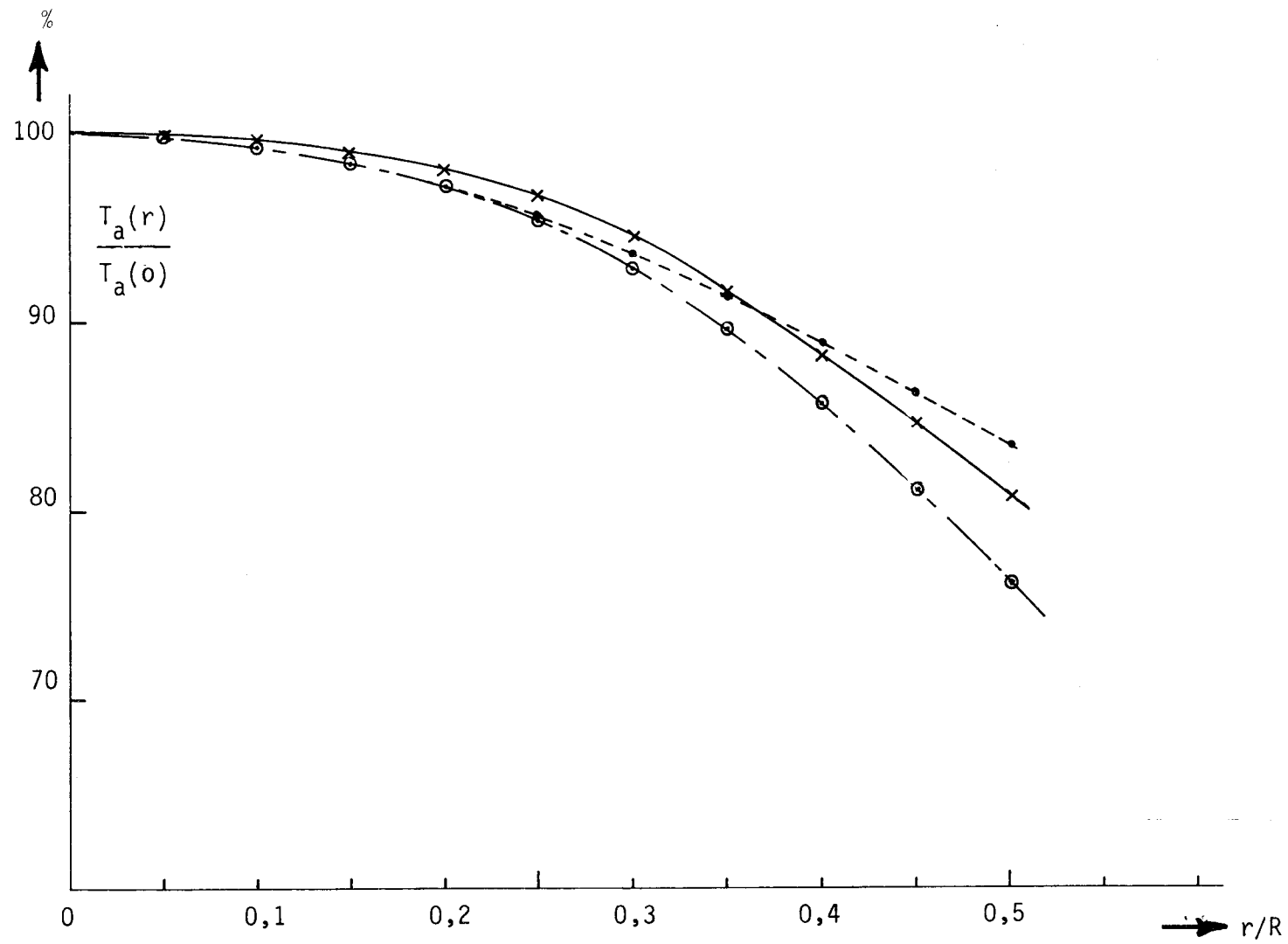


Fig.5.1 •, Temperatuurverdeling m.b.v. relatieve intensiteitsmeting  
 ×, Temperatuurverdeling m.b.v. absolute intensiteitsmeting  
 ○, Temperatuurverdeling volgens Elenbaas (6).

## 6 Meetopstelling

### 6.1 Bepaling van de absolute en relatieve intensiteit

In fig.6.1 is 'n blokschema van de gebruikte opstelling gegeven.

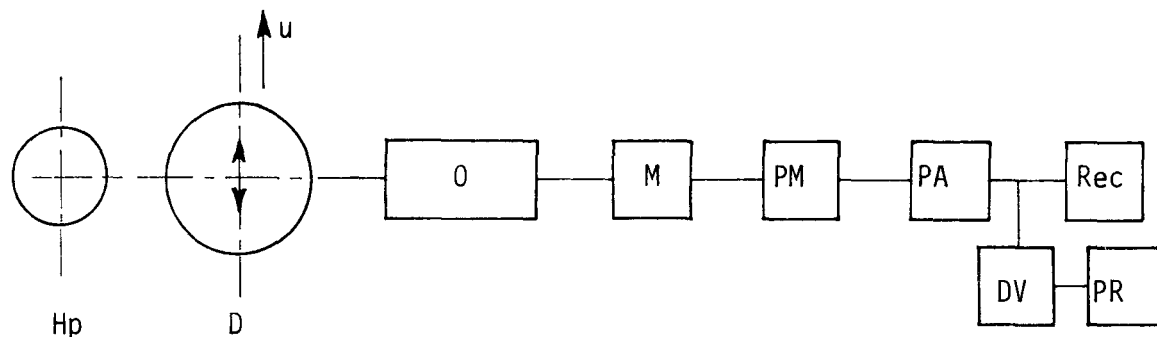


Fig.6.1 Schema van de opstelling

Via het optisch systeem  $O$  wordt een plakje ( $0,70 \times 9$  mm) van de D-ontladingsbuis afgebeeld op de intreespleet van de monochromator  $M$ . De radiantie uitgezonden door dit plakje in de meetrichting, wordt voor de ingestelde golflengten als functie van de plaats  $u$  gemeten, door de D-buis langs de  $u$ -as m.b.v. een slede te verplaatsen. M.b.v. de fotomultiplier  $PM$  en picoampèremeter  $PA$  wordt deze radiantie geregistreerd op recorder  $Rec$  en is via digitale voltmeter  $DV$  en printer  $PR$  op ponsband beschikbaar in digitale vorm.

### 6.2 Bepaling van de transmissie van de ontlading en buis.

De gemeten radiantie van de D-ontlading moet worden gecorrigeerd voor de transmissie (cq.absorptie) van de buis en de ontlading. Dit laatste alleen voor de relatieve intensiteitsmetingen. Deze absorptiemeting werd met eenzelfde soort vertikaal opgestelde ontladingsbuis ( $Hp$ ) uitgevoerd.

Aangezien het hier gecontraheerde ontladingen betreft, speelt het probleem van de lichtbreking op de gebogen glaswand hier geen grote rol, diam.ontlading  $\approx 8$  mm, diam.D-buis  $\approx 40$  mm.

### 6.3 Lijnbreedtemetingen

Voor deze metingen staat de D-ontladingsbuis op de plaats  $u=0$ , de monochromator werd voor iedere golflengte opnieuw ingesteld. Tevens werd bij elke meting het apparaatprofiel bepaald m.b.v. een lage druk Hg-lamp en Cd-lamp.

#### 6.4 IJking met behulp van Wolframbandlamp.

T.b.v. de absolute metingen werden ijkingen met een wolframbandlamp uitgevoerd. Daartoe werd deze op de plaats van de D-buis opgesteld. De spectrale radiantie en de temperatuur van deze bandlamp is bekend, de transmissie van het kwartsvenster is in rekening gebracht.

#### 6.5 Gegevens van de D-ontlading

Deze gasontladingsbuis is conform de gegevens van de z.g. D-ontlading van Elenbaas.

1: Inwendige diameter  $\approx 41 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

2: lengte 0,50 m.

3: 12 mg Hg per 0,01 m buislengte

4: 34-35 W per 0,01 m buislengte

5: Stroom 6A, Spanning 280-290 Volt

6: Druk  $\approx 0.88 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ .

#### 6.6 Verwerking van de meetresultaten

Voor de intensiteitsmetingen, welke i.v.m. de nauwkeurigheid een aantal maal uitgevoerd werden, is een Algol-programma geschreven. M.b.v. dit programma werd als functie van de plaats berekend

1: Intensiteit gecorrigeerd voor glasdoorlaat t.b.v. absolutemetingen

2: Intensiteit gecorrigeerd voor glasdoorlaat en voor de absorptie van het plasma volgens Kruithof, hfdst. 3.1.

3: Transmissie van het plasma.

De relative intensiteitsmetingen werden verder behandeld met 'n Algol-programma, waarin m.b.v. 'n kleinste kwadratenmethode, een som van 2 Gaussfuncties (2 parameters) werd aangepast aan de intensiteitsverdelingen over de dwarsdoorsnede van de buis. Zoals in hfdst. 3.1 werd opgemerkt, is de Abeltransformatie dan analytisch uit te voeren, hetgeen in dit programma werd ingebouwd.

De lijnbreedtemetingen, hfdst.2, werden verwerkt met 'n programma waarin een Voigt-profiel (formule van Whiting) werd aangepast aan deze metingen.

## REFERENTIES

- 1 . Traving. G., Braun Verlag, Karlsruhe (1960); DH 6013 bsn.
- 2 . Mouwen. C.A.M., Dissertatie THE. 8 juni 1971.
- 3 . Rompe. R. und Schulz. P., Z.f.Physik 118 (1941) 269.
- 4 . Rompe.R. und Schulz.P., Z.f.Physik 108 (1938) 654.
- 4.1 Rompe.R. und Schulz.P., Z.f.Physik 110 (1938) 223.
- 4.2 Rompe.R. und Schulz.P., Z.f.Physik 114 (1939) 435.
- 5 . Unsöld.A., Z.f.Astrophys. 12 (1936). 56.
- 6 . Elenbaas.W., The high pressure mercury vapour discharge. North Holland Publishing Company 1951.
- 7 . Lindholm. E., Arkiv f.Mat.Astron.Och.Fysik 32A. no. 17 (1945).
- 8 . Kreye, W.C., Roesler. F.L., J.Opt.Soc.Am. 60 (1970) 1100.
- 9 . Engelhard. E., NPL Symposium no.11.1959
10. Kruithof. A.A., Riemens.J.,Proc.VIII<sup>th</sup> Int.Conf.Phen.Ion.Gas (1967) 223.
11. de Groot. J.J., Jack.A.G., Philips Rapport CLL 1018/71.
12. Mouwen. C.A.M., Physica 44 (1969) 381-386.
13. Davies. J.T., Vaughan. J.M., Astrophys.Journ. 137 (1963) 1302.
14. Meiners. D. en Weiss. C.O., Zeitschrift für Angew.Physik 29 (1970) 35.
15. Bartels. H., Z.f.Physik 125 (1948) 597.
16. Ozaki.N., J.Quant.Spectrosc.Radiat.Transfer 11 (1970) 1111-1123.
17. Bartels.H., Z.f.Physik 126 (1949) 108.
18. Richter.J., Plasma Diagnostics Chapter 1. Lochte Holtgreven editor. North Holland Publ.Co. 1968.



## Appendix I. Invloed gastemperatuurverdeling op de halfwaardebreedte van spektraallijnen.

In onderstaande wordt globaal ingegaan op de invloed van gradiënten in de gastemperatuur en de daarmee samenhangende verdelingsfuncties van de emitterende atomen t.a.v. de vorm en de halfwaardebreedte van resonantie-verbrede spektraallijnen. Beschouwd wordt een inhomogeen, radieel symmetrisch plasma. De vorm van de resonantieverbrede spektraallijn geëmitteerd op de plaats  $r$  is  $I_{\omega}(\omega, r)$ , de straling per eenheid van volume is  $P_{nm}(r)$ .

M.b.v. een optisch systeem, zie fig.3.1., kan voor de spektraallijn de radiantie gemeten worden in een frequentiebandje  $d\omega$ , in  $u = 0$

$$I_{nm}(\omega, 0) = \frac{dL_{nm}(\omega, u)}{d\omega} = \frac{1}{4\pi} \int_P^Q P_{nm}(r) \cdot I_{\omega}(\omega, r) dr \quad (I.1)$$

Hierbij wordt geïntegreerd over  $PQ$  gemeten.

Omdat de vorm van de spektraallijn grotendeels wordt bepaald door de concentratie van atomen  $n_a(r)$  voor kleine  $r$ , ontwikkelde Mouwen (2)  $I_{\omega}(\omega, r)$  in een Taylorreeks naar  $r = 0$ . Deze reeks wordt gesubstitueerd in  $I_{nm}(\omega, 0)$ , deze gaat na verwaarlozing van hogere orde termen en normering over in

$$I_{nm}^0(\omega, 0) = \left\{ \frac{1 + \mu_{nm}}{1 - \mu_{nm}} \right\} I_{nm}(\omega) - \left\{ \frac{2\mu_{nm}}{1 - \mu_{nm}} \right\} I_{nm}^2(\omega) \quad (I.2)$$

Hierin is  $I_{nm}(\omega)$  het genormaliseerde lijnprofiel

$$\text{met } \mu_{nm} = \frac{1}{2}(1 - \theta) \frac{\lambda_{nm}}{\beta^2} \quad (I.3)$$

$$\theta = T_{wand}/T(0) \quad (I.4)$$

Verondersteld is dat

$$1: \frac{T_a(r)}{T_a(0)} = \theta + \frac{1 - \theta}{1 + \frac{r^2}{\beta^2}} \quad (I.5)$$

met  $2\beta$  is de halfwaardebreedte van  $\frac{1}{1 + \frac{r^2}{\beta^2}}$

$$2: P_{nm}(r) = P_{nm}(0) \exp \left\{ -\frac{r^2}{x_{nm}^2} \right\} \quad (I.6)$$

De halfwaardebreedte  $\gamma_{nm}$  van  $I_{nm}^0(\omega, 0)$  wordt dan gegeven door

$$\gamma_{nm} = \gamma_{nm}(r=0) \{1 + \mu_{nm} + 0(\mu_{nm}^2)\} \quad (I.7)$$

$\gamma_{nm}$  is de gemeten halfwaardebreedte in  $u = 0$ .

$\gamma_{nm}(r=0)$  is de halfwaardebreedte op de as,  $r = 0$ .

Worden de termen  $0(\mu_{nm}^2)$  verwaarloosd, dan verkrijgen we

$$\gamma_{nm}(r=0) = \frac{\gamma_{nm}}{1 + \mu_{nm}} \quad (I.8)$$

Opmerking:

1: Nagegaan is dat de veronderstelde gastemperatuurverdeling (I.5) voldoet in ons experiment.

2: De aanname dat  $P_{nm}(r)$  is een Gaussfunctie, is gerechtvaardigd.

3: Berekening toont aan dat  $\mu_{nm} \approx 0,042$ .

## Appendix II. Uitbreiding van de methode Kruithof.

De methode die Kruithof volgt om het verband tussen  $T_{\text{eff}}(u=0)$  en  $T(0)$  te vinden is gebaseerd op de stralingstransportvergelijking, daarbij wordt de gestimuleerde emissie verwaarloosd en een plaatsonafhankelijk lijnprofiel aangenomen. Het doel van onderstaande beschouwing is, om niet alleen de gestimuleerde emissie en het plaatsonafhankelijke lijnprofiel mee te nemen, maar ook om deze methodiek te kunnen uitbreiden voor metingen over de gehele doorsnede van de gasontladingsbuis

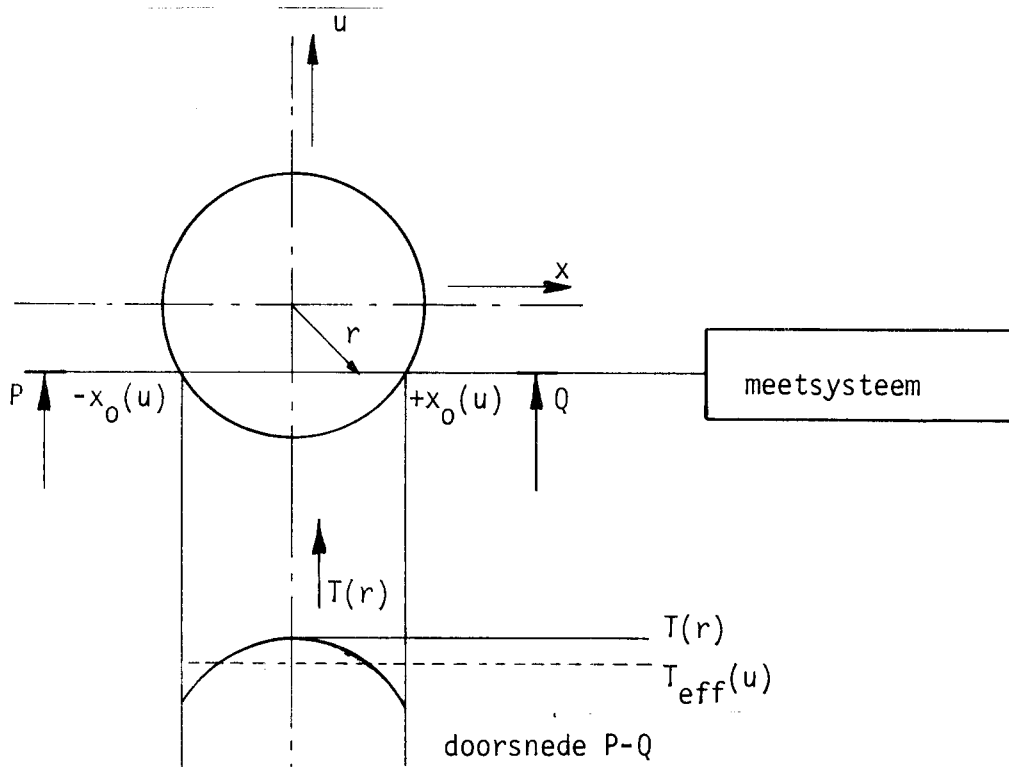


Fig.3.1 Gebruikt coördinatensysteem.

De stralingstransportvergelijking luidt in integrale vorm

$$I_{\nu}(u) = \int_{-x_0(u)}^{+x_0(u)} \epsilon_{\nu}^{\text{SP}}(x,u) \exp\left(-\int_{x(u)}^{x_0(u)} K'_{\nu}(x',u) dx'\right) dx \quad (\text{II.1})$$

$$\text{Hierin is } \epsilon_{\nu}^{\text{SP}}(x,u) = \frac{h\nu}{4\pi} \cdot A_{nm} n_n(x,u) \cdot I_{\omega}(x,u) \quad (\text{II.2})$$

$$K'_{\nu}(x,u) = K_{\nu}(x,u) \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{h\nu}{kT(x,u)}\right] \right\} \quad (\text{II.3})$$

$$K_{\nu}(x,u) = \alpha(x,u) n_m(x,u) \quad (\text{II.4})$$

$$\alpha(x, u) = \frac{h\nu}{c} \cdot B_{mn} I_{\omega}(x, u) \quad (\text{II.5})$$

$$B_{mn} = \frac{g_n}{g_m} B_{nm} = \frac{g_n}{g_m} \cdot \frac{c^3}{8\pi h\nu^3} A_{nm} \quad (\text{II.5a})$$

met  $\alpha$  = atomaire absorptiecoefficient  
 $K'_\nu$  = effectieve absorptiecoefficient  
 $I_{\omega}(x, u)$  = het lijnprofiel zonder absorptie.

Opmerking 1: De term  $\exp\{-\frac{h\nu}{kT(x, u)}\}$  is de invloed van de gestimuleerde emissie in  $K'_\nu$ .

2: Voor de overzichtelijkheid van de formules laten we de afhankelijkheid van  $x$  en  $u$  van de diverse grootheden weg.

Verder wordt ingevoerd de effectieve transmissie  $t'(u) = t'$

$$t' = \exp\left\{-\int_{-x_0}^{+x_0} K'_\nu dx\right\} \quad (\text{II.6})$$

en de variabele  $N'_m = N'_m(x, u)$  met

$$N'_m = \int_{-x_0}^x K'_\nu dx' ; \quad N'_m(x_0) = \int_{-x_0}^{+x_0} K'_\nu dx \quad (\text{II.7})$$

$$\text{hiermede wordt } dx = \frac{dN'_m}{K'_\nu} \quad (\text{II.8})$$

Substitutie van (II.6), (II.7) en (II.8) in (II.1) geeft

$$I_\nu(u) = t' \int_0^{N'_m(x_0) \epsilon_\nu^{sp}} \frac{1}{K'_\nu} \cdot \exp\{N'_m\} dN'_m \quad (\text{II.9})$$

Met de uitdrukkingen voor  $\epsilon_\nu^{sp}$  en  $K'_\nu$  verkrijgen we

$$I_\nu(u) = \frac{8\pi h\nu^3}{4\pi c^2} t' \int_0^{N'_m(x_0)} \frac{g_m}{g_n} \cdot \frac{n_n}{n_m} \cdot \frac{\exp\{N'_m\} dN'_m}{1 - \exp\{-\frac{h\nu}{kT}\}} \quad (\text{II.10})$$

M.b.v. de Wet van Boltzmann

$$n_n = n_m \frac{g_n}{g_m} \exp\left\{-\frac{h\nu}{kT}\right\} \quad (\text{II.11})$$

wordt (II.10)

$$I_{\nu}(u) = \frac{8\pi h\nu^3}{4\pi c^2} t' \int_0^{N_m'(x_0)} \frac{1}{\exp\left\{\frac{h\nu}{kT}\right\} - 1} \cdot \exp\{N_m'\} \cdot dN_m' \quad (\text{II.12})$$

Passen we op de integraal in (II.12) de stelling van het gemiddelde toe, d.w.z., er is een waarde van  $T(x,u)$ , nl.  $T^*(u)$ , waarvoor geldt

$$\int_0^{N_m'(x_0)} \frac{\exp\{N_m'\} dN_m'}{\exp\left\{\frac{h\nu}{kT}\right\} - 1} = \frac{1}{\exp\left\{\frac{h\nu}{kT^*}\right\} - 1} \cdot \int_0^{N_m'(x_0)} \exp\{N_m'\} \cdot dN_m' \quad (\text{II.13})$$

De integraal in het rechterlid van (II.13) laat zich m.b.v. de gedefinieerde effectieve transmissie  $t'$ , in combinatie met (II.7) uitwerken tot

$$\int_0^{N_m'(x_0)} \exp\{N_m'\} dN_m' = \exp\{N_m'(x_0)\} - 1 = \frac{1}{t'} - 1 \quad (\text{II.14})$$

Samen met (II.13) en (II.14) gaat (II.12) over in

$$I_{\nu}(u) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{8\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left\{\frac{h\nu}{kT^*}\right\} - 1} \{1 - t'\} \quad (\text{II.15})$$

Dit vergelijken we met de wet van Kirchhoff, volgens welke voor een "grijs" lichaam geldt

$$I_{\nu} = I_{\nu}(z, T_{\text{eff}}) \cdot \{1 - t_1\} \quad (\text{II.16})$$

Hierin  $I_{\nu}(z, T_{\text{eff}}(u))$  is het uitgestraalde vermogen per ruimtehoek, per oppervlakte-eenheid, per frequentie-eenheid,  $\text{Wm}^{-3}\text{sr}^{-1}\text{s}$ ;  $\{1 - t_1\}$  is de absorptie.

$$I_{\nu}(z, T_{\text{eff}}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{8\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left\{\frac{h\nu}{kT_{\text{eff}}}\right\} - 1} \quad (\text{II.17})$$

Hieruit volgt:  $T^*(u) = T_{\text{eff}}(u)$  en  $t' = t'(u) = t_1(u)$ .

Indien door een absorptiemeting  $t'$  bepaald wordt, dan is met absolute metingen van  $I_{\nu}(u)$  volgens (II.15) de effectieve temperatuur  $T_{\text{eff}}(u)$  voor elke doorsnede  $u$  te bepalen.

Het verband tussen  $T_{\text{eff}}(u)$  en de maximale temperatuur  $T(r)$  in de beschouwde doorsnede, zie fig.3.1, is m.b.v. (II.13) en (II.14), substitutie van  $dN_m^i$  volgens (II.7) en (II.4), als volgt te vinden:

$$\frac{1}{\exp\left\{\frac{h\nu}{T_{\text{eff}}(u)}\right\}-1} =$$

$$= \frac{t'(u)}{1-t'(u)} \int_{-x_0(u)}^{+x_0(u)} \frac{\alpha(x,u)n_m(x,u)\{1-\exp\left[-\frac{h\nu}{kT(x,u)}\right]\}}{\exp\left\{\frac{h\nu}{kT(x,u)}\right\}-1} \cdot \exp N_m^i(x,u) \cdot dx \quad (\text{II.18})$$

Uitschrijven van  $t'(u)$  geeft

$$t'(u) = \exp\left\{-\int_{-x_0(u)}^{+x_0(u)} \alpha(x,u)n_m(x,u)\left\{1-\exp\left[-\frac{h\nu}{kT(x,u)}\right]\right\} dx\right\} \quad (\text{II.19})$$

Voor  $N_m^i$  verkrijgen we dan

$$N_m^i(x,u) = \int_{-x_0(u)}^{x(u)} \alpha(x,u)n_m(x,u)\left\{1-\exp\left[-\frac{h\nu}{kT(x,u)}\right]\right\} dx \quad (\text{II.20})$$

In bovenstaande formules is  $n_m(x,u)$  m.b.v. Boltzmann te schrijven als

$$n_m(x,u) = \frac{g_m}{g_0} n_0(x,u) \exp\left\{-\frac{E_m}{kT(x,u)}\right\} \quad (\text{II.21})$$

Met de verwaarlozing van de verarming der neutrale deeltjes  $n_a$  door ionisatie en excitatie, kan voor de atomen in het grondnivo  $n_0$  geschreven worden

$$n_0(x,u) = n_a(x,u) = \frac{p_0}{kT(x,u)}$$

Verder nemen we voor het aantonen van de gevolgde procedure aan dat de temperatuurverdeling parabolisch is, b.v.  $T(x,u) = T(0,u) \left\{1 - a\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\}$ .

M.b.v. een numeriek rekenprogramma is de volgende procedure uitgevoerd:

- 1: Kies bepaalde waarde  $t'_j(u)$  voor  $t'(u)$ .  
 Kies bepaalde waarde  $T_j(o,u)$  voor  $T(o,u)$ .
- 2: M.b.v. (II.19) is het constante deel van  $\alpha(x,u)$

$$\text{n.l. } \frac{g_n}{g_m} \frac{c^2}{8\pi\nu^2} A_{nm} \text{ te berekenen}$$

- 3: Hiermede is  $N'_m(x,u)$  met (II.20) bekend.

- 4: Met deze gegevens is (II.18) te berekenen en hieruit volgt een waarde  $T_{\text{eff.}j}(u)$  voor  $T_{\text{eff}}(u)$ .

- 5: Variëren van  $t'_j(u)$  en  $T_j(o,u)$  geeft als functie van deze de  $T_{\text{eff.}j}(u)$  zoals deze in fig. 4.2 zijn uitgezet.

Nadere bestudering van de gevolgde methodiek toont aan dat dit onafhankelijk van de druk  $p_0$  uitgevoerd kan worden.

Opmerking:

- 1: Het is misschien mogelijk om met de gevolgde methode, omdat het constante deel van  $\alpha(x,u)$  bepaald kan worden, uit metingen de overgangswaarschijnlijkheid  $A_{nm}$  te verkrijgen.

- 2: Formule (II.18) gaat met de aanname van een plaatsonafhankelijk lijnprofiel  $\alpha(x,u) = \alpha$  en de gestimuleerde emissie te verwaarlozen, over in de door Kruithof afgeleide uitdrukking.