

MASTER

Het recursief schatten van parameters in niet-lineaire systemen

Uittenbogaart, J.R.

Award date:
1990

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Het recursief schatten
van parameters
in niet-lineaire systemen

J.R. Uittenbogaart

afstudeerverslag
DSM-nr. N90 8716
WFW-nr. 90.051
september 1990

Afstudeerhoogleraar : prof. dr. ir. J.J. Kok (TUE)
Afstudeerbegeleiders : prof. ir. P.J. de Jong (DSM)
ir. P. Djavdan (DSM)
dr. ir. F.E. Veldpaus (TUE)

DSM Research
afdeling PT-WP

SUMMARY

For on-line simulation of a process it is often desirable to have the disposal of an actual estimation of the parameters of the model. In this master thesis some of the available methods for estimation of parameters in non-linear models are discussed. The method most frequently used, the Extended Kalman Filter for the joint estimation of parameters and state of a non-linear system, is derived from the optimal Kalman-Bucy state estimator for linear systems. In the recursive prediction error method of Jakoby and Pandit [7], estimation of state and parameters are separately performed, but there is a mutual exchange of results. For both estimations an EKF is used. In this thesis this method is improved and extended to the MIMO case. It is then used for the estimation of a slow-varying parameter in a test problem. The method shows good results. Finally a least squares method is discussed. In this method the state of the process is no longer estimated but calculated from the model description. Tests of the method do not always show good results. The possible causes of the problems are indicated.

SAMENVATTING

Bij het on-line simuleren van een proces is het vaak wenselijk om over actuele schattingen van sommige modelparameters te beschikken. In dit afstudeerverslag worden enkele van de beschikbare methoden voor het schatten van parameters in niet-lineaire modellen besproken. De meest gebruikte methode voor deze problemen, het Extended Kalman Filter (EKF) voor gecombineerde parameter- en toestandsschatting voor niet-lineaire systemen, wordt afgeleid uit de optimale Kalman-Bucy toestandsschatting voor lineaire systemen. Bij de uit de literatuur bekende recursieve predictie error methode van Jakoby en Pandit [7] vindt de schatting van toestand en parameters gescheiden plaats en worden de schattingen onderling uitgewisseld. Voor beide schattingen wordt gebruik gemaakt van een EKF. Deze methode wordt in dit verslag gecorrigeerd en geschikt gemaakt voor MIMO systemen. De methode is toegepast op een testprobleem met een langzaam veranderende parameter en levert goede resultaten op. Tenslotte wordt een kleinste kwadraten methode besproken. Bij deze methode wordt de toestand van het proces niet geschat maar berekend met het model. Het testen van deze methode leidde niet altijd tot goede resultaten. De vermoedelijke oorzaken van de problemen worden aangegeven.

INHOUDSOPGAVE

Summary	i
Samenvatting	ii
Inhoudsopgave	iii
Hoofdstuk 1 : Inleiding	
1.1	Het modelleren van een proces 1
1.1.1	Het vastleggen van de modelstructuur 1
1.1.2	Parameterschatting 2
1.1.3	Validatie 3
1.2	Toestandsschatting 3
1.3	Opdrachtoomschrijving 4
Hoofdstuk 2 : Parameterschattingsmethoden voor toestandsmodellen	
2.1	Toestandsbeschrijving 5
2.2	Schattingsmethoden 6
2.3	Gecombineerde parameter- en toestandsschatting 8
Hoofdstuk 3 : Het Extended Kalman Filter voor parameterschatting	
3.1	Afleiding van het Kalman-Bucy filter 10
3.2	Het Extended Kalman Filter 12
3.3	Een predictie error benadering van het Kalman-Bucy filter 14
3.4	Het Extended Kalman Filter voor parameterschatting 15
3.5	Praktijkproblemen met het Extended Kalman Filter 17
Hoofdstuk 4 : Een predictie error methode gebaseerd op het EKF	
4.1	Inleiding 18
4.2	Afleiding van het RPE algoritme uit het EKF 19

4.3	Het testprobleem	23
4.4	De simulaties	26
Hoofdstuk 5 : Een kleinste kwadraten schatter		
5.1	Inleiding	31
5.2	De kleinste kwadraten methode	31
5.3	Beschouwing van de gainmatrix P	32
5.4	beschouwing van de matrix \tilde{A}	33
Hoofdstuk 6 : Conclusies en aanbevelingen		36
Literatuurlijst		38
Appendix A : Afleiding van de kleinste kwadraten methode		40
Appendix B : De ruisgenerator		43
Appendix C : Bewijs van het symmetrisch zijn van P		45

Hoofdstuk 1 : INLEIDING

1.1 Het modelleren van een proces

In de geavanceerde regeltechniek vormt het (wiskundige) model van een proces de basis voor het ontwerp van regelaars. Het opstellen van zo'n model geschiedt op basis van voorkennis over en waarnemingen aan het proces. Onder waarnemingen worden metingen van in- en uitgangssignalen van het proces verstaan. Het opstellen van het model kan globaal in drie stadia verdeeld worden:

1. vastleggen van de modelstructuur
2. parameterschatting
3. validatie

Deze drie stadia zullen nu kort besproken worden.

1.1.1 Het vastleggen van de modelstructuur

Allereerst dient het proces gemodelleerd te worden. De vereiste nauwkeurigheid van het model wordt bepaald door het doel ervan. Bij het modelleren worden de balansen (materiaal-, impuls- en energiebalans) en andere vergelijkingen (b.v. vergelijkingen die de reactiekinetiek beschrijven) voor het proces opgesteld. Dit resulteert in een set algebraïsche vergelijkingen en differentiaalvergelijkingen. Over het algemeen zullen niet alle fenomenen, die in het proces een rol spelen, nauwkeurig beschreven kunnen worden. Bovendien zal een nauwkeurig model in veel gevallen complex en omvangrijk zijn. Door nu het model te vereenvoudigen (bijvoorbeeld door over te gaan van een gedetailleerde naar een meer globale beschrijving) wordt een model verkregen dat weliswaar beter hanteerbaar is, maar waarin bepaalde parameters niet of niet voldoende nauwkeurig bekend zijn.

1.1.2 Parameterschatting

De volgende stap is het schatten van de onbekende modelparameters. Bij het schatten worden metingen van de in- en uitgangsgrootheden van het proces geconfronteerd met het model. Aan de hand van een criterium worden de parameters in het model zodanig bepaald dat het model het gedrag van het proces zo goed mogelijk beschrijft. Bij het schatten is de "kleur" van het model belangrijk. Van witte modellen (dit zijn modellen die opgesteld zijn op grond van bijvoorbeeld fysisch/chemische of mechanische verbanden) zijn zowel de structuur van het model als de waarden van alle parameters bekend; zwarte modellen zijn modellen waarvan de vergelijkingen geen enkel overeenkomst met de "echte" procesvergelijkingen hoeven te hebben, maar waarvan alleen geëist wordt dat het ingangs-uitgangsgedrag het ingangs-uitgangsgedrag van het proces benadert.

In de laatste dertig jaar zijn veel schattingsalgorithmen ontwikkeld. Desondanks is, vooral op het gebied van schatting van parameters in niet-lineaire modellen, nog veel werk te doen.

De meeste schattingsmethoden werken off-line. Dit betekent dat de in- en uitgangssignalen van het proces gedurende een bepaalde tijd gemeten en opgeslagen worden. Vervolgens worden deze data gebruikt om de parameters van het proces te schatten. In de praktijk is het echter vaak gewenst om on-line over een actueel model te beschikken. De reden hiervoor is dat het model vaak gebruikt wordt om het proces te volgen (monitoring) en on-line beslissingen te nemen, zoals voor de keuze van het ingangssignaal (regeling) of voor het detecteren van fouten. In zo'n geval dient het verloop van de parameters in de tijd gevolgd te kunnen worden. De parameterschattingsmethoden dienen dan recursief te werken. Dit houdt in dat na ieder set metingen die beschikbaar komt de parameters van het model aangepast worden. De grootte van de aanpassing is afhankelijk van het vertrouwen in de oude waarde van de parameters en de afwijking tussen de metingen aan het proces en de voorspellingen daarvan door het model. Omdat de recursieve methoden alleen de laatste metingen gebruiken behoeven er, in tegenstelling tot de situatie bij off-line methoden, maar weinig data opgeslagen te

worden. Een nadeel van deze methoden is dat ze vaak minder snel convergeren dan niet-recursieve methoden.

Recursieve methoden (ook wel real-time, adaptieve of sequentiële methoden genoemd) kunnen natuurlijk ook off-line gebruikt worden. In hoofdstuk 2 zullen enkele van de principes, waarop de recursieve algoritmen gebaseerd zijn, beschreven worden.

1.1.3 Validatie

De laatste stap is het testen of het gevonden model geschikt is voor zijn toepassing. De validatie kan op verschillende wijze gedaan worden. Tijdens het schatten kan al gecontroleerd worden of de covariantie van de schattingsfout in de tijd afneemt. Indien de geschatte parameters een fysische betekenis hebben kan gecontroleerd worden of de schattingen inderdaad fysisch interpreteerbaar zijn. Als er meer dan een set data beschikbaar is kan een cross-validatie uitgevoerd worden door het model te confronteren met nieuwe data en de residuen (het verschil tussen de uitgangen van het proces en die van het model) te controleren op grootte en kansdichtheidsverdeling. Tenslotte kunnen de gevolgen van het veranderen van de orde van het model voor de responsie geanalyseerd worden. Wanneer het model niet goed genoeg blijkt zal het modelvormingsproces nogmaals doorlopen moeten worden: met de verkregen inzichten zal getracht moeten worden een geschikt model te formuleren.

1.2 Toestandsschatting

Schattingsmethoden worden niet alleen gebruikt voor het bepalen van modelparameters. Zoals hierboven reeds is aangegeven is het vaak wenselijk om on-line te beschikken over een model van het proces. In die gevallen is vaak kennis over de volledige toestand van het proces vereist. Meestal echter worden niet alle toestandsgrootheden gemeten. Bovendien bevatten de gemeten grootheden over het algemeen ruis. Het schatten van de toestand uit metingen heeft veel overeenkomsten met

het schatten van parameters. Het Extended Kalman Filter combineert zelfs het schatten van toestand en parameters. Op deze methode wordt in hoofdstuk 2 en 3 uitvoerig teruggekomen.

1.3 Opdrachtoomschrijving

In deze afstudeeropdracht is een studie gedaan naar het recursief schatten van parameters in modellen van chemische processen. De kleur van de modellen is licht grijs. Dit betekent dat de modelstructuur bekend is maar dat er nog wel enkele onbekende parameters zijn. De uitgangsgrootheden van deze processen worden op discrete tijdstippen gemeten. De vergelijkingen die deze dynamische processen beschrijven zijn continu, dynamisch en al dan niet niet-lineair. Bovendien zijn de parameters niet altijd constant, maar de verandering ervan is langzaam vergeleken met de veranderingen in de toestand. Een voorbeeld van zo'n langzaam veranderende parameter is de warmteoverdrachtscoëfficiënt van een warmtewisselaar. Door vervuiling (een proces dat moeilijk te beschrijven en nauwelijks te modelleren is) zal de warmteoverdracht langzaam verminderen.

In hoofdstuk 2 zullen eerst in beknopte vorm enige principes betreffende parameterschatting behandeld worden. In hoofdstuk 3 wordt de theorie van toestandsschatting met het Kalman-filter voor lineaire systemen uitgebreid naar het Extended Kalman Filter (EKF) voor gecombineerde toestands- en parameterschatting voor niet-lineaire systemen. Het resulterende algoritme is complex en kost veel rekentijd. Door enkele vereenvoudigingen door te voeren wordt in hoofdstuk 4 een recursieve predictie error methode, gebaseerd op het EKF, afgeleid. Deze methode kost weliswaar minder rekentijd, maar heeft voor de schatting wel afgeleiden van de modelvergelijkingen naar de toestandsgrootheden en parameters nodig. Deze afgeleiden zijn, zeker voor complexe systemen, niet altijd eenvoudig te bepalen. Om deze problemen te voorkomen wordt in hoofdstuk 5 een recursieve kleinste kwadraten methode behandeld die alleen parameters schat en niet meer de toestand. In hoofdstuk 6 zullen tenslotte enige conclusies en suggesties gegeven worden.

Hoofdstuk 2 : PARAMETERSCHATTINGSMETHODEN VOOR TOESTANDSMODELLEN

2.1 Toestandsbeschrijving

Voor de beschrijving van het dynamisch gedrag van een systeem wordt vaak gebruik gemaakt van toestandsbeschrijving. Hiervoor worden de vergelijkingen, die het systeem karakteriseren, omgeschreven naar eerste orde differentiaalvergelijkingen in de toestandsvariabelen \underline{x} en de ingang \underline{u} :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad \text{voor } t \geq 0; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (2.1)$$

De te meten grootheden kunnen geschreven worden als algebraïsche functies van \underline{x} en \underline{u} :

$$\underline{y}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (2.2)$$

Als in de toestandsbeschrijving een aantal nog onbekende parameters voorkomt, kunnen die parameters in een parametervector $\underline{\theta}$ ondergebracht worden. De systeemvergelijkingen worden dan :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{\theta}(t)) \quad (2.3)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{\theta}(t)) \quad (2.4)$$

Een proces zal verder nog beïnvloed worden door ruis. Er zullen twee soorten ruis onderscheiden worden: systeemruis $\underline{w}(t)$ en observatieruis $\underline{v}(t)$. De systeemruis representeert niet-gemodelleerde invloeden op het proces en modelfouten, de observatieruis representeert bijvoorbeeld meetruis. De ruis wordt additief verondersteld.

De werkelijke metingen op tijdstip t aan een proces worden opgeslagen in de vector $\underline{y}_m(t)$.

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{\theta}(t)) + \underline{w}(t) \quad (2.5)$$

$$\underline{y}_m(t) = \underline{y}(t) + \underline{v}(t) \quad (2.6)$$

$$= \underline{h}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{\theta}(t)) + \underline{v}(t) \quad (2.7)$$

In de praktijk zullen de metingen aan een continu systeem een discreet karakter hebben. Verondersteld wordt dat de metingen beschikbaar komen op de discrete tijdstippen t_0, t_1, \dots, t_k . Bij toestands- en parameterschatting worden de werkelijke meetresultaten en de met het model berekende uitgangen met elkaar vergeleken. Om deze vergelijking mogelijk te maken dienen de uitgangssignalen van het model gediscretiseerd te worden.

2.2 Schattingsmethoden

Voor het schatten van parameters zullen hieronder enkele methoden kort besproken worden.

Bij de methode van de kleinste kwadraten wordende onbekende parameters in de systeemvergelijkingen zodanig aangepast, dat de criteriumfunctie

$$V(k) = \sum_{i=1}^k \underline{e}^T(i) W \underline{e}(i) \quad (2.8)$$

minimaal wordt, waarbij $\underline{e}(i)$ gedefinieerd is door :

$$\underline{e}(i) = \underline{y}_m(i) - \underline{h}(\underline{x}(i), \underline{u}(i), \underline{\theta}(i)) \quad (2.9)$$

Deze grootheid representeert dus de uitgangsfout, het verschil tussen de gemeten en de voorspelde waarde van de uitgang. W is een weegmatrix die er voor zorgt dat grootheden met verschillende dimensies in de criteriumfunctie meegenomen kunnen worden en dat de invloed van de verschillende componenten van $\underline{e}(i)$ op de kwadratensom gewogen wordt. De nevenconditie bij het minimaliseren van de criteriumfunctie is dat

altijd voldaan moet worden aan de toestandsvergelijkingen. Het in rekening brengen van de nevencondities kan bijvoorbeeld gebeuren door bij de minimalisatie de toestandsvergelijkingen met Lagrange-multiplicatoren aan de criteriumfunctie toe te voegen.

Voor een lineair model kan bewezen worden dat de schattingen bias-vrij zijn als het foutsignaal $\underline{e}(i)$ gemiddelde $\underline{0}$ heeft en niet autogecorreleerd is [2].

Bij de gewone kleinste kwadratenmethode hebben alle foutsignalen in de criteriumfunctie V een gelijk gewicht.

De predictie error methoden vertonen veel overeenkomsten met de kleinste kwadraten methode. De toestand en de parameters op t_k worden voorspeld op grond van de op t_{k-1} beschikbare informatie. De voorspelling wordt gedaan met behulp van de modelvergelijkingen. Met deze voorspellingen, die genoteerd worden als respectievelijk $\hat{\underline{x}}(k|k-1)$ en $\hat{\underline{\theta}}(k|k-1)$, wordt de uitgangsvector voorspeld. Deze voorspelling wordt genoteerd als $\underline{y}(k|k-1)$. Vervolgens worden de parameters zodanig aangepast dat de criteriumfunctie

$$V(k) = \sum_{i=1}^k \underline{\varepsilon}^T(i) W(i) \underline{\varepsilon}(i) \quad (2.10)$$

minimaal wordt, waarbij $\underline{\varepsilon}(i)$ het verschil is tussen de gemeten en de door het model voorspelde waarde van de uitgang.

$$\underline{\varepsilon}(i) = \underline{y}_m(i) - \underline{y}(i|i-1) \quad (2.11)$$

In hoofdstuk 4 wordt een predictie error methode uitvoerig besproken.

De Maximum Likelihood methode beschouwt de metingen als realisaties van stochastische grootheden [14]. De Bayes methode beschouwt bovendien ook de parameters als stochastische grootheden [4]. Het optimaliseren

van de criteriumfunctie vindt bij beide methoden iteratief plaats. Daardoor zijn deze methoden niet geschikt voor het recursief schatten van parameters.

2.3 Gecombineerde parameter- en toestandsschatting

Zoals in de inleiding reeds is opgemerkt, is het in sommige gevallen gewenst om de toestand van een proces te kunnen volgen. Ook het schatten van parameters vereist in veel gevallen dat de toestand van het proces bekend is. Het is mogelijk toestandsschatting en parameterschatting gecombineerd te laten plaatsvinden. Een mogelijkheid is de onbekende parameters te beschouwen als toestanden van het systeem en de toestandsvector uit te breiden met de parametervector. De toestandsbeschrijving dient dan uitgebreid te worden met een stelsel vergelijkingen dat de tijdsafhankelijkheid van de parameters karakteriseert. In veel gevallen mogen de parameters constant verondersteld worden. De extra systeemvergelijkingen luiden

$$\dot{\underline{\theta}} = \underline{0} \quad (2.12)$$

Het uitbreiden van de oorspronkelijke toestandsvector \underline{x} met een parametervector $\underline{\theta}$ heeft tot gevolg dat het stelsel differentiaalvergelijkingen voor de beschrijving van het gedrag van het systeem niet-lineair wordt, ook als het oorspronkelijke model lineair is. Dit kan aan de hand van het volgende voorbeeld geïllustreerd worden.

Stel dat het proces lineair en scalair is en beschreven wordt door de toestand x en een onbekende parameter θ :

$$\dot{x} = \theta x \quad (2.13)$$

Het toevoegen van de vergelijking $\dot{\theta}=0$ geeft het stelsel

$$d/dt \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Het rechterlid is niet meer te schrijven als een lineaire combinatie van de uitgebreide toestandsvector.

Het probleem van gecombineerde parameter- en toestandsschatting kan op verschillende manieren opgelost worden.

Een mogelijkheid is het opstellen van een kleinste kwadraten criterium, waarin een gewogen som van de ruissignalen $\underline{w}(k)$ en $\underline{v}(k)$ wordt geminimaliseerd. Bij de minimalisatie moet rekening gehouden worden met het feit dat de oplossing van het probleem altijd moet voldoen aan de systeemvergelijkingen. De invariant imbedding methode is een rekenmethode die dit probleem ook recursief kan oplossen [2]. Het voordeel van de kleinste kwadraten methode is dat a priori geen aannamen over de ruissignalen gemaakt hoeven te worden.

Bij het Extended Kalman Filter worden de ruissignalen als stochastische processen geïnterpreteerd. De uitgebreide toestandsvector (ook wel gegeneraliseerde toestandsvector genoemd) en de gemeten grootheden worden door deze aannamen ook stochastische grootheden. Het EKF zal in hoofdstuk 3 uitvoerig behandeld worden.

Hoofdstuk 3 : HET EXTENDED KALMAN FILTER VOOR PARAMETERSCHATTING

3.1 Afleiding van het Kalman-Bucy filter

In deze paragraaf wordt het Kalman-Bucy filter afgeleid. Dit filter is een optimale toestandsschatter voor lineaire systemen en dient als basis voor de afleiding van het Extended Kalman Filter.

Als uitgangspunt wordt de beschrijving van een lineair discreet dynamisch systeem in de toestandruimte (zie hoofdstuk 2) genomen

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) + \underline{w}(k) \quad (3.1)$$

$$\underline{y}(k) = C\underline{x}(k) + \underline{v}(k) \quad (3.2)$$

De matrices A, B en C worden bekend en constant verondersteld, de begintoestand $\underline{x}(0)$ heeft een gemiddelde $\bar{\underline{x}}_0$ en een covariantiematrix Q_0 . De systeemruis $\underline{w}(k)$ en de meetruis $\underline{v}(k)$ worden verondersteld wit te zijn met constante intensiteiten W en V, dus

$$E\{\underline{x}(0)\} = \bar{\underline{x}}_0 \quad E\{(\underline{x}(0) - \bar{\underline{x}}_0)(\underline{x}(0) - \bar{\underline{x}}_0)^T\} = Q_0 \quad (3.3)$$

$$E\{\underline{v}(k)\} = \underline{0} \quad E\{\underline{v}(k)\underline{v}^T(s)\} = V \delta(k-s) \quad (3.4)$$

$$E\{\underline{w}(k)\} = \underline{0} \quad E\{\underline{w}(k)\underline{w}^T(s)\} = W \delta(k-s) \quad (3.5)$$

Verder wordt een correlatie verondersteld tussen de beide ruissignalen

$$E\{\underline{v}(k)\underline{w}^T(s)\} = R_{vw} \delta(k-s) \quad (3.6)$$

maar geen correlatie tussen de toestand op $t=t_k$ en de ruissignalen op $t=t_k$. De optimale waarnemer voor het systeem is

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = A\hat{\underline{x}}(k) + B\underline{u}(k) + K(k)[\underline{y}_m(k) - C\hat{\underline{x}}(k)] \quad (3.7)$$

De fout $\tilde{\underline{x}}$ die bij de schatting gemaakt wordt is het verschil tussen de

werkelijke en de geschatte toestand

$$\tilde{\underline{x}}(k+1) = \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1) \quad (3.8)$$

$$= [A - K(k)C] \tilde{\underline{x}}(k) + \underline{w}(k) - K(k)\underline{v}(k) \quad (3.9)$$

De optimale waarde van de versterkingsfactor $K(k)$ kan gevonden worden door de variantie van de fout die bij de schatting gemaakt wordt te minimaliseren:

$$\min_K \text{tr} \{P(k)\} \quad (3.10)$$

waarbij $\text{tr} \{P(k)\}$ het spoor van $P(k)$ is en $P(k)$ de covariantie van de schattingsfout is:

$$P(k) = E\{\tilde{\underline{x}}(k)\tilde{\underline{x}}^T(k)\} \quad (3.11)$$

De waarde van $P(k+1)$ is afhankelijk van de waarde van $P(k)$

$$P(k+1) = E\{\tilde{\underline{x}}(k+1)\tilde{\underline{x}}^T(k+1)\} \quad (3.12)$$

$$= E\{[[A - K(k)C] \tilde{\underline{x}}(k) + \underline{w}(k) - K(k)\underline{v}(k)] \cdot [[A - K(k)C] \tilde{\underline{x}}(k) + \underline{w}(k) - K(k)\underline{v}(k)]^T\} \quad (3.13)$$

$$= E\{ [A - K(k)C] \tilde{\underline{x}}(k)\tilde{\underline{x}}^T(k) [A - K(k)C]^T - \underline{w}(k)\underline{v}^T(k)K^T(k) + K(k)\underline{v}(k)\underline{v}^T(k)K^T(k) + \underline{w}(k)\underline{w}^T(k) - K(k)\underline{v}(k)\underline{w}^T(k) \} \quad (3.14)$$

$$= [A - K(k)C] P(k) [A - K(k)C]^T - R_{vw}^T K^T(k) + K(k)VK^T(k) + W(k) - K(k)R_{vw} \quad (3.15)$$

De optimale waarde van $K(k)$ moet zodanig zijn dat de covariantie minimaal wordt. De covariantie wordt minimaal als het verschil tussen $P(k+1)$ en $P(k)$ maximaal is. Om nu $K(k)$ te vinden moet $P(k+1)$ eerst omschreven worden

$$P(k+1) = AP(k)A^T - K(k)CP(k)A^T - AP(k)C^TK^T(k) + K(k)CP(k)C^TK^T(k) - R_{vw}^TK^T(k) + K(k)VK^T(k) + W - K(k)R_{vw} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
&= AP(k)A^T - K(k)CP(k)A^T + W - K(k)R_{vw} + \\
&\quad [AP(k)C^T + R_{vw}^T - K(k)[CP(k)C^T + V]]K^T(k)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

De optimale waarde van $K(k)$ is (zie [3])

$$K_{opt}(k) = [AP(k)C^T + R_{vw}^T] [CP(k)C^T + V]^{-1} \tag{3.18}$$

De bijbehorende vergelijking voor $P(k+1)$ luidt

$$P(k+1) = AP(k)A^T - K(k)CP(k)A^T + W - K(k)R_{vw} \tag{3.19}$$

$$= AP(k)A^T + W - K(k)[CP(k)C^T + V]K^T(k) \tag{3.20}$$

$$= [A - K(k)C]P(k)A^T + W - K(k)R_{vw} \tag{3.21}$$

3.2 Het Extended Kalman Filter

Het in de vorige paragraaf afgeleide Kalman-Bucy filter is een optimale toestandsschatter voor lineaire systemen. Het lineair zijn van de systeemvergelijkingen is essentieel in de afleiding van het filter. Voor niet-lineaire systemen van de vorm

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{w}(k)) \tag{3.22}$$

$$\underline{y}(k) = \underline{h}(\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{v}(k)) \tag{3.23}$$

is het Kalman-Bucy filter in principe niet geschikt. Voor niet-lineaire systemen kan een (niet optimaal) filter afgeleid worden, uitgaande van de ideeën achter het Kalman-Bucy filter. Het resulterende filter wordt het Extended Kalman Filter (kortweg EKF) genoemd. Het EKF lineariseert de systeemvergelijkingen op ieder tijdstip rond de geschatte toestand

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\hat{\underline{x}}(k), \underline{u}(k), \underline{0}) + F_x(k)[\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)] + F_w(k) \underline{w}(k) \tag{3.24}$$

$$\underline{y}(k) = \underline{h}(\hat{\underline{x}}(k), \underline{u}(k), \underline{0}) + H_x(k)[\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)] + H_v(k) \underline{v}(k) \tag{3.25}$$

met

$$F_x = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^T} \quad F_x(k) = F_x(\hat{\underline{x}}(k), \underline{u}(k), \underline{0}) \quad (3.26)$$

$$F_w = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{w}^T} \quad F_w(k) = F_w(\hat{\underline{x}}(k), \underline{u}(k), \underline{0}) \quad (3.27)$$

$$H_x = \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}^T} \quad H_x(k) = H_x(\hat{\underline{x}}(k), \underline{u}(k), \underline{0}) \quad (3.28)$$

$$H_v = \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{v}^T} \quad H_v(k) = H_v(\hat{\underline{x}}(k), \underline{u}(k), \underline{0}) \quad (3.29)$$

Op deze gelineariseerde vergelijkingen kan het Kalman-Bucy filter wel toegepast worden. De filtervergelijking luidt dan

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{f}(\hat{\underline{x}}(k), \underline{u}(k), \underline{0}) + K(k) [\underline{y}_m(k) - \underline{h}(\hat{\underline{x}}(k), \underline{u}(k), \underline{0})] \quad (3.30)$$

De optimale waarde van $K(k)$ en de bijbehorende differentievergelijking voor $P(k)$ zijn dan analoog aan 3.1 af te leiden

$$K(k) = [F_x(k)P(k)H_x^T(k) + \bar{R}_{vw}^T][H_x(k)P(k)H_x^T(k) + \bar{V}]^{-1} \quad (3.31)$$

$$P(k+1) = F_x(k)P(k)F_x^T(k) + \bar{W} - K(k)[H_x(k)P(k)H_x^T(k) + \bar{V}]K^T(k) \quad (3.32)$$

met

$$\bar{R}_{vw} = F_w(k) R_{vw} H_v^T(k) \quad (3.33)$$

$$\bar{W} = F_w(k) W F_w^T(k) \quad (3.34)$$

$$\bar{V} = H_v(k) V H_v^T(k) \quad (3.35)$$

3.3 Een predictie error benadering van het Kalman-Bucy filter

Evenals in paragraaf 3.1 is het uitgangspunt een lineair discreet dynamisch systeem

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) + \underline{w}(k) \quad (3.36)$$

$$\underline{y}(k) = C\underline{x}(k) + \underline{v}(k) \quad (3.37)$$

Stel dat de toestand op $t=t_k$ geschat is. De toestands- en de meetvector op $t=t_{k+1}$ kunnen dan voorspeld worden

$$\hat{\underline{x}}(k+1|k) = A\hat{\underline{x}}(k|k) + B\underline{u}(k) \quad (3.38)$$

$$\hat{\underline{y}}(k+1|k) = C\hat{\underline{x}}(k+1|k) \quad (3.39)$$

Hierin is $\hat{\underline{x}}(k+1|k)$ de voorspelde toestand op tijdstip t_{k+1} , voorspeld op grond van de op $t=t_k$ beschikbare informatie. $\hat{\underline{x}}(k|k)$ is de geschatte toestand op $t=t_k$.

Vervolgens wordt gewacht totdat de metingen aan het proces $y_m(k+1)$ beschikbaar komen. De voorspelde toestand $\hat{\underline{x}}(k+1|k)$ wordt gecorrigeerd aan de hand van het verschil tussen de metingen aan het werkelijke proces en de voorspelling van de metingen

$$\hat{\underline{x}}(k+1|k+1) = \hat{\underline{x}}(k+1|k) + K(k+1) [\underline{y}_m(k+1) - \hat{\underline{y}}(k+1|k)] \quad (3.40)$$

De fout $\tilde{\underline{x}}(k+1)$ die bij deze schatting gemaakt wordt is het verschil tussen de werkelijke toestand en de geschatte toestand na correctie

$$\tilde{\underline{x}}(k+1) = \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1|k+1) \quad (3.41)$$

$$= A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) + \underline{w}(k) - \hat{\underline{x}}(k+1|k) - K(k+1)[\underline{y}_m(k+1) - C\hat{\underline{x}}(k+1|k)] \quad (3.42)$$

$$= A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) + \underline{w}(k) - A\hat{\underline{x}}(k|k) - B\underline{u}(k) - K(k+1)[C\underline{x}(k+1) + \underline{v}(k+1) - CA\hat{\underline{x}}(k|k) - CB\underline{u}(k)] \quad (3.43)$$

$$= \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{u}(k) + \underline{w}(k) - \hat{\underline{A}}\underline{x}(k|k) - \underline{B}\underline{u}(k) - K(k+1) [C\underline{A}\underline{x}(k) + C\underline{B}\underline{u}(k) + C\underline{w}(k) + \underline{v}(k+1) - C\hat{\underline{A}}\underline{x}(k|k) - C\underline{B}\underline{u}(k)] \quad (3.44)$$

$$= \tilde{\underline{A}}\underline{x}(k) + \underline{w}(k) - K(k+1)C\tilde{\underline{A}}\underline{x}(k) - K(k+1)C\underline{w}(k) + K(k+1)\underline{v}(k+1) \quad (3.45)$$

$$= [A - K(k+1)CA]\tilde{\underline{x}}(k) - [I - K(k+1)C]\underline{w}(k) + K(k+1)\underline{v}(k+1) \quad (3.46)$$

Deze formules vertonen veel overeenkomst met de formules van paragraaf 3.2. De optimale $K(k)$ en de bijbehorende differentievergelijking voor $P(k)$ kunnen op analoge wijze worden afgeleid. Het totale predictie filter luidt

de predictie vergelijkingen

$$\hat{\underline{x}}(k+1|k) = \hat{\underline{A}}\underline{x}(k|k) + \underline{B}\underline{u}(k) \quad (3.47)$$

$$\hat{\underline{y}}(k+1|k) = C\hat{\underline{x}}(k+1|k) \quad (3.48)$$

de correctie aan de hand van de metingen

$$P(k+1) = AK(k)A^T + W \quad (3.49)$$

$$K(k+1)^{-1} = P(k+1)^{-1} + CV^{-1}C^T \quad (3.50)$$

$$\hat{\underline{x}}(k+1|k+1) = \hat{\underline{x}}(k+1|k) + K(k+1)CV^{-1} [\underline{y}_m(k+1) - \hat{\underline{y}}(k+1|k)] \quad (3.51)$$

De extensie naar niet-lineaire systemen kan gemaakt worden op dezelfde wijze als de overgang van het Kalman-Bucy filter naar het EKF.

3.4 Het Extended Kalman Filter voor parameterschatting

Het Extended Kalman Filter kan geschikt gemaakt worden voor parameterschatting door de parameters te beschouwen als toestanden van het systeem. Door nu de toestandsvector uit te breiden met de parametervector kan het EKF ook parameters schatten. De werkwijze zal aan de hand van een niet-lineair systeem besproken worden.

Uitgangspunt is een niet-lineaire systeem met additieve ruis

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\theta}(k)) + \underline{w}(k) \quad (3.52)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{h}(\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\theta}(k)) + \underline{v}(k) \quad (3.53)$$

De systeemvergelijkingen zijn nu afhankelijk van de parametervector $\underline{\theta}$. De waarde van de parameters wordt verondersteld constant te zijn, dus

$$\underline{\theta}(k+1) = \underline{\theta}(k) \quad (3.54)$$

De uitgebreide toestandsvector voor dit systeem is

$$\underline{z}(k) = \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{\theta}(k) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

De toestandsvergelijkingen worden nu

$$\underline{z}(k+1) = \underline{m}(\underline{z}(k), \underline{u}(k), \underline{w}(k)) \quad (3.56)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{n}(\underline{z}(k), \underline{u}(k), \underline{v}(k)) \quad (3.57)$$

met

$$\underline{m}(\underline{z}(k), \underline{u}(k), \underline{w}(k)) = \begin{bmatrix} \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\theta}(k)) \\ \underline{\theta}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{w}(k) \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\underline{n}(\underline{z}(k), \underline{u}(k), \underline{v}(k)) = \underline{h}(\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{\theta}(k)) + \underline{v}(k) \quad (3.59)$$

Op deze vergelijkingen kan dan weer het Extended Kalman Filter toegepast worden. De resulterende vergelijking voor het filter is

$$\hat{\underline{z}}(k+1) = \underline{m}(\hat{\underline{z}}(k), \underline{u}(k), \hat{\underline{\theta}}(k)) + K(k)[\underline{y}_m(k) - \underline{n}(\hat{\underline{z}}(k), \underline{u}(k), \hat{\underline{\theta}}(k))] \quad (3.60)$$

met

$$K(k) = [M_z(k)P(k)N_z^T(k) + R_{vw}^T][N_z(k)P(k)N_z^T(k) + V]^{-1} \quad (3.61)$$

$$P(k+1) = M_z(k)P(k)M_z^T(k) + L - K(k)[N_z(k)P(k)N_z^T(k) + V]K^T(k) \quad (3.62)$$

$$M_z = \frac{\partial \underline{m}}{\partial \underline{z}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^T} & \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{\theta}^T} \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix} \quad M_z(k) = M_z(\hat{z}(k), \underline{u}(k), \hat{\theta}(k)) \quad (3.63)$$

$$N_z = \frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{z}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}^T} & \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{\theta}^T} \end{bmatrix} \quad N_z(k) = N_z(\hat{z}(k), \underline{u}(k), \hat{\theta}(k)) \quad (3.64)$$

$$L = \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

3.5 Praktijkproblemen met het Extended Kalman Filter

Toepassingen van het Extended Kalman Filter in de praktijk hebben aangetoond dat er in sommige gevallen divergentie van het algoritme plaatsvindt. Dit probleem is door Ljung [6] voor lineaire problemen onderzocht. De oorzaak blijkt de Kalman gain $K(k)$ te zijn. De reden van divergentie is dat een verandering in de parametervector $\underline{\theta}$ niet voldoende doorwerkt in $K(k)$. De oplossing van het divergentie probleem is het toevoegen van een term

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} K(k) \underline{\varepsilon}(k)$$

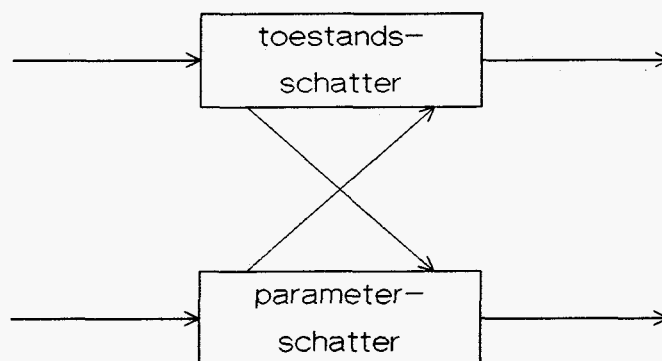
aan de vergelijking voor $\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{\theta}^T}$, waarbij $\underline{\varepsilon}(k)$ het verschil is tussen $\underline{y}_m(k)$ en $\underline{y}(k)$.

Wanneer een eerste orde benadering van de systeemvergelijkingen niet voldoende blijkt, is het mogelijk een betere benadering te gebruiken. Een voorbeeld hiervan is het gebruik van tweede orde benaderingen in de vergelijking voor de geschatte toestand, zoals beschreven door Zhou en Blanke [9].

Hoofdstuk 4 : EEN PREDICTIE ERROR METHODE GEBASEERD OP HET EKF

4.1 Inleiding

Het Extended Kalman Filter uit in hoofdstuk 3 is in de praktijk soms moeilijk bruikbaar omdat er problemen kunnen optreden bij de convergentie van het algoritme. Bovendien kan door het samenvoegen van de toestands- en de parametervector een schattingsalgoritme ontstaan met grote matrices. Daarom worden parameter- en toestandsschatting soms losgekoppeld. Binnen een sample-interval worden parameters en toestand apart geschat waarbij de schattingen onderling worden uitgewisseld. De schatting van de toestand is nodig bij de schatting van de parameters. Voor lineaire systemen wordt voor de toestandsschatting over het algemeen een Kalman filter gebruikt, terwijl voor de parameterschatting gekozen kan worden uit verschillende methoden (correlatie-, regressie- of prediction error methoden). In het geval van niet constante parameters wordt ook hiervoor een Kalman filter gebruikt. Deze werkwijze is door Jakoby en Pandit [7] ook gevolgd voor niet-lineaire systemen. De scheiding van parameter- en toestandsschatting resulteert in twee Extended Kalman Filters. Doordat de predictie error benadering van het EKF wordt gebruikt is de methode een recursieve predictie error methode (RPE methode)



figuur 4.1 De scheiding van parameter- en toestandsschatting

De in [7] beschreven afgeleide methode is alleen geschikt voor SISO systemen en bevat veel onnauwkeurigheden. Daarom zal in 4.2 een verbeterde afleiding gegeven worden. Vervolgens zal in 4.3 de methode getest worden voor het schatten van één parameter in een systeem met drie toestanden.

4.2 Afleiding van het RPE algoritme uit het EKF

De RPE (recursive prediction error) methode gaat er van uit dat het systeem beschreven kan worden met de volgende vergelijkingen

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{\theta}(k), \underline{u}(k)) + \underline{w}(k) \quad E\{\underline{w}(k) \underline{w}^T(i)\} = W \delta(k-i) \quad (4.1)$$

$$\underline{\theta}(k+1) = \underline{g}(\underline{x}(k), \underline{\theta}(k), \underline{u}(k)) + \underline{s}(k) \quad E\{\underline{s}(k) \underline{s}^T(i)\} = S \delta(k-i) \quad (4.2)$$

$$\underline{y}(k+1) = \underline{h}(\underline{x}(k), \underline{\theta}(k), \underline{u}(k)) + \underline{v}(k) \quad E\{\underline{v}(k) \underline{v}^T(i)\} = V \delta(k-i) \quad (4.3)$$

De parameters worden nu dus niet constant verondersteld. Wel wordt verondersteld dat de verandering van de parameters langzamer is dan de verandering van de toestand. Zoals in de inleiding reeds is gesteld worden voor de schatting van de toestand en de parameters gebruik gemaakt van twee aparte EKF's. De EKF's bestaan uit een predictie en een correctie deel (zie 3.3).

Allereerst worden de toestand en de parameters apart voorspeld

predictie van de toestand

$$\hat{\underline{x}}(k+1|k) = \underline{f}(\hat{\underline{x}}(k|k), \hat{\underline{\theta}}(k|k), \underline{u}(k)) \quad (4.4)$$

predictie van de parameters

$$\hat{\underline{\theta}}(k+1|k) = \underline{g}(\hat{\underline{x}}(k|k), \hat{\underline{\theta}}(k|k), \underline{u}(k)) \quad (4.5)$$

De uitgang wordt voorspeld met behulp van de predictie van toestand en parameters.

$$\begin{aligned} &\text{predictie van de uitgang} \\ \hat{\underline{y}}(k+1|k) &= \underline{h}(\hat{\underline{x}}(k+1|k), \hat{\underline{\theta}}(k+1|k), \underline{u}(k)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nadat de metingen aan het werkelijke systeem op $t=t_{k+1}$ beschikbaar zijn gekomen wordt de predictie-error $\underline{\varepsilon}(k+1)$ bepaald.

$$\begin{aligned} &\text{predictie-error} \\ \underline{\varepsilon}(k+1) &= \underline{y}_m(k+1) - \hat{\underline{y}}(k+1|k) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Tenslotte worden de toestand en de parameters gecorrigeerd met behulp van de predictie-error

$$\begin{aligned} &\text{correctie van de toestand} \\ \underline{R}^*(k+1) &= \underline{F}_x(k) \underline{R}(k) \underline{F}_x^T(k) + W \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\underline{R}^{-1}(k+1) = \underline{R}^{*-1}(k+1) + \underline{H}_x^T(k+1) \underline{V}^{-1} \underline{H}_x(k+1) \quad (4.9)$$

$$\hat{\underline{x}}(k+1|k+1) = \hat{\underline{x}}(k+1|k) + \underline{R}(k+1) \underline{H}_x^T(k+1) \underline{V}^{-1} \underline{\varepsilon}(k+1) \quad (4.10)$$

$$\text{met } \underline{F}_x \text{ als in (3.26), } \underline{F}_x(k) = \underline{F}_x(\hat{\underline{x}}(k|k), \hat{\underline{\theta}}(k|k)) \quad (4.11)$$

$$\text{met } \underline{H}_x \text{ als in (3.28), } \underline{H}_x(k+1) = \underline{H}_x(\hat{\underline{x}}(k+1|k), \hat{\underline{\theta}}(k+1|k)) \quad (4.12)$$

\underline{R}^* en \underline{R} komen overeen met respectievelijk \underline{P} en \underline{K} uit 3.3

$$\begin{aligned} &\text{correctie van de parameters} \\ \underline{P}^*(k+1) &= \underline{G}_\theta(k) \underline{P}(k) \underline{G}_\theta^T(k) + S \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\underline{P}^{-1}(k+1) = \underline{P}^{*-1}(k+1) + \underline{H}_\theta^T(k+1) \underline{V}^{-1} \underline{H}_\theta(k+1) \quad (4.14)$$

$$\hat{\underline{\theta}}(k+1|k+1) = \hat{\underline{\theta}}(k+1|k) + \underline{P}(k+1) \underline{H}_\theta^T(k+1) \underline{V}^{-1} \underline{\varepsilon}(k+1) \quad (4.15)$$

$$\text{met } G_{\underline{\theta}} = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\theta}^T} \quad G_{\underline{\theta}}(k) = G_{\underline{\theta}}(\hat{\underline{x}}(k|k), \hat{\underline{\theta}}(k|k)) \quad (4.16)$$

$$\text{met } H_{\underline{\theta}} = \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{\theta}^T} \quad H_{\underline{\theta}}(k+1) = H_{\underline{\theta}}(\hat{\underline{x}}(k+1|k), \hat{\underline{\theta}}(k+1|k)) \quad (4.17)$$

* P en P komem overeen met respectievelijk P en K uit 3.3

De matrix $H_{\underline{\theta}}(k+1)$ wordt een nul-matrix als, zoals in veel systemen, de parameters geen directe invloed op de uitgang hebben. Het gevolg hiervan is dat de parameters niet gecorrigeerd worden. Om dit te voorkomen nemen Jakoby en Pandit in plaats van de partiële afgeleide de totale afgeleide van \underline{h} naar $\underline{\theta}$. Ook andere, uit de literatuur bekende predictie error methoden gebruiken de totale afgeleide [6].

$$H_{\underline{\theta}}^*(k+1) = \frac{d\underline{h}}{d\underline{\theta}^T} = H_{\underline{\theta}}(k+1) + H_{\underline{x}}(k+1) \cdot \frac{d(\hat{\underline{x}}(k+1|k))}{d\underline{\theta}^T} \quad (4.18)$$

Bij de bepaling van de afgeleide van de voorspelde toestand naar de parameters kan echter nog geen gebruik gemaakt worden van de predictie van de parametervector $\hat{\underline{\theta}}(k+1|k)$.

Wanneer de veranderingen in de parameters veel trager zijn dan de veranderingen in de toestand, kan de volgende benadering gemaakt worden

$$\frac{d(\hat{\underline{x}}(k+1|k))}{d\underline{\theta}^T} \Bigg|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}(k+1|k), \underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}(k+1|k)} \approx \frac{d(\hat{\underline{x}}(k+1|k))}{d\underline{\theta}^T} \Bigg|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}(k+1|k), \underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}(k|k)} \quad (4.19)$$

De afgeleide in het rechter lid kan berekend worden door de voorspelde toestand $\hat{\underline{x}}(k+1|k)$ te differentiëren naar $\underline{\theta}$

$$\frac{d(\hat{\underline{x}}(k+1|k))}{d\underline{\theta}^T} = F_{\underline{\theta}}(k) + F_{\underline{x}}(k) \frac{d(\hat{\underline{x}}(k|k))}{d\underline{\theta}^T} \Bigg|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}(k|k), \underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}(k|k)} \quad (4.20)$$

De afgeleide van de geschatte toestand naar de parameters kan berekend worden door de correctievergelijking te differentiëren naar $\underline{\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{d(\hat{\underline{x}}(k|k))}{d\underline{\theta}^T} &= \frac{d(\hat{\underline{x}}(k|k-1))}{d\underline{\theta}^T} + \frac{dR(k)}{d\underline{\theta}^T} H_{\underline{x}}^T(k) V^{-1} \underline{\varepsilon}(k) + R(k) \frac{dH_{\underline{x}}^T(k)}{d\underline{\theta}^T} V^{-1} \\ \underline{\varepsilon}(k) - R(k) H_{\underline{x}}(k) V^{-1} \frac{d(\hat{\underline{y}}(k|k-1))}{d\underline{\theta}^T} &\Bigg|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}(k|k-1), \underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}(k|k-1)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

De in deze vergelijking optredende afgeleide van R naar $\underline{\theta}$ kan bepaald worden door de vergelijking voor R te differentiëren naar $\underline{\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{dR(k)}{d\underline{\theta}^T} &= -R(k) \left[\frac{dR^{*-1}(k)}{d\underline{\theta}^T} + \frac{dH_{\underline{x}}^T(k)}{d\underline{\theta}^T} V^{-1} H_{\underline{x}}(k) + \right. \\ &\left. H_{\underline{x}}^T(k) V^{-1} \frac{dH_{\underline{x}}(k)}{d\underline{\theta}^T} \right] R(k) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Evenzo voor R_k^{*-1} naar $\underline{\theta}$

$$\frac{dR^{*-1}(k)}{d\theta} = -R^{*-1}(k-1) \left[F_x(k-1) R_x(k-1) \frac{dF_x^T(k-1)}{d\theta} + \frac{dF_x(k-1)}{d\theta} \right. \\ \left. R_x(k-1) F^T(k-1) + F_x(k-1) \frac{dR(k-1)}{d\theta} F_x^T(k-1) \right] R^{*-1}(k-1) \quad (4.23)$$

Voor het berekenen van $H_\theta(k+1)$ zijn dus vier extra vergelijkingen nodig.

4.3 Het testprobleem

De in 4.2 afgeleide methode wordt getest voor het volgende probleem.

In een reactor bevindt zich een stof A met een concentratie van 1000 mol/m³ en een temperatuur van 298 K. Op t=0 begint stof A door het toevoegen van een katalysator exotherm te reageren. De reactie is een aflopende eerste orde reactie. De reactiesnelheid is op ieder tijdstip afhankelijk van de aanwezige hoeveelheid A en de temperatuur

$$R_A = V_{\text{reac}} \text{Conc}_A k_0 \exp(-E_{\text{act}}/(R T_A)) \quad (4.24)$$

Hierin is R_A de reactiesnelheid (mol/s), V_{reac} de inhoud van de reactor (m³), Conc_A de concentratie (mol/m³), k_0 de botsingscoëfficiënt (1/s), E_{act} de activeringsenergie (JK/mol), R de gasconstante (J/mol) en T_A de temperatuur (K). Er wordt van uit gegaan dat de temperatuur overal in de reactor hetzelfde is.

De toename van de hoeveelheid A per tijdseenheid is gelijk aan de reactiesnelheid. De differentiaalvergelijking voor de hoeveelheid A in de reactor luidt

$$\frac{d}{dt}(V_{\text{reac}} \text{Conc}_A) = -R_A \quad (4.25)$$

Door de exotherme reactie zal er energie vrijkomen en zal de inhoud van de reactor warmer worden. Daardoor zal de reactie sneller gaan verlopen. Om te voorkomen dat de reactiesnelheid steeds groter wordt, wordt de reactor gekoeld. De koeling wordt gerealiseerd door koelwater door de mantel van de reactor te laten stromen. De hoeveelheid door het koelsysteem afgevoerde warmte is afhankelijk van het temperatuurverschil tussen reactor en mantel. De toename van de warmteïnhoud van de inhoud van de reactor is gelijk aan de bij de reactie vrijgekomen warmte min de door de koeling afgevoerde warmte

$$\frac{d}{dt}(V_{\text{react}} \rho_A C_{p_A} T_A) = H_A R_A - U A (T_A - T_M) \quad (4.26)$$

Hierin is ρ de soortelijke massa (kg/m^3) en C_{p_A} de soortelijke warmte (J/kgK) van de reactorinhoud, H_A de reactiewarmte (J/mol), U de warmteoverdrachtscoëfficiënt ($\text{W/m}^2\text{K}$) en A het oppervlak waarover de warmtewisseling plaatsvindt (m^2). T_M is de temperatuur van het koelwater in de mantel.

De toename van de hoeveelheid warmte in de reactormantel is gelijk aan de door de reactorinhoud afgestane warmte plus het verschil tussen de binnenkomende en de afgevoerde warmte

$$\frac{d}{dt}(V_M \rho_M C_{p_M} T_M) = F C_{p_M} (T_{\text{Min}} - T_M) + U A (T_A - T_M) \quad (4.27)$$

Hierin is V_M het volume van de mantelinhoud (m^3), ρ_M en C_{p_M} respectievelijk de soortelijke massa (kg/m^3) en de soortelijke warmte (J/kgK) van het koelmiddel. F is het debiet van het koelmiddel (kg/s).

De warmteoverdrachtscoëfficiënt U kan geschreven worden als

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{\alpha_R} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_M} \Rightarrow U = \frac{\lambda \alpha_M + d \alpha_R \alpha_M + \lambda \alpha_R}{\alpha_R \lambda \alpha_M} \quad (4.28)$$

Hierin is α_R de filmcoëfficiënt ($\text{W/m}^2\text{K}$) tussen de inhoud van de reactor en de reactorwand, d de dikte van de reactorwand (m), λ de

warmtegeleidingscoëfficiënt (W/mK) van het reactorwand-materiaal en α_M de filmcoëfficiënt tussen reactorwand en koelwater.

De filmcoëfficiënten veranderen langzaam, onder andere door vervuiling (α_M) en verandering van de samenstelling van de stof (α_R). In de testen wordt alleen α_R geschat. Dit heeft als voordeel dat de vergelijkingen van de schatter overzichtelijk blijven. Het proces heeft drie toestanden, Conc_A , T_A en T_M , die voldoen aan de drie differentiaalvergelijkingen (4.3.2), (4.3.3) en (4.3.4). De ingangssignalen zijn F en T_{Min} .

In figuur 4.3.1 is het verloop van de concentratie, van de reactor-temperatuur en van de temperatuur van het koelwater als functie van de tijd uitgezet. De beginwaarden voor de toestand zijn

$$\underline{x}(0)^T = [1000 \quad 298 \quad 298] \quad (4.30)$$

De waarde van de parameter is in deze simulatie 5000.

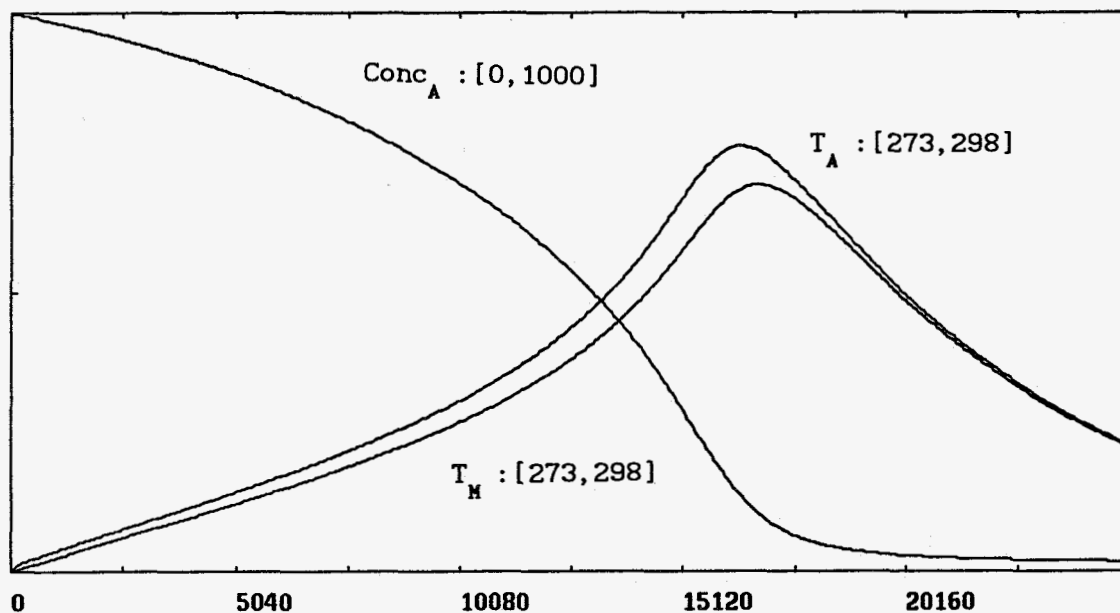
De gemeten grootheden zijn T_A en T_M . De meetvergelijking ziet er dus als volgt uit

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} T_A \\ T_M \end{bmatrix} = C \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Conc}_A \\ T_A \\ T_M \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

De simulaties zijn uitgevoerd met het door DSM ontwikkelde pakket AGNES (Application Generator aNd Equation Solver). Het pakket lost stelsels algebraïsche vergelijkingen en eerste orde differentiaalvergelijkingen simultaan op. De vergelijkingen worden in continue vorm ingevoerd. De discretisatie van de vergelijkingen vindt plaats met een impliciet differentiatieschema.

Omdat het hier een fictieve reactor betreft worden de "meetresultaten" ook gegenereerd door AGNES. Dit geschiedt door voor het proces dezelfde vergelijkingen te nemen als voor het model. Er is dus geen verschil tussen het proces en het model en dus ook geen ongemodelleerde dynamica. De uitgangsgrootheden van het gesimuleerde proces worden voorzien van additieve ruis. De standaard

random-generator genereert alleen getallen tussen 0 en 1 die bovendien uniform verdeeld zijn. Om toch normaalverdeelde ruis met instelbaar gemiddelde en standaarddeviatie te kunnen verkrijgen wordt met het in appendix B beschreven algoritme uit uniform verdeelde ruis een benadering van normaalverdeelde ruis gegenereerd.



figuur 4.3.1 *Het verloop van $Conc_A$, T_A en T_M als functie van de tijd.*

4.4 De simulaties

Hoewel AGNES de vergelijkingen simultaan oplost, is er voor gezorgd dat predictie, het beschikbaar komen van de metingen en de correctie van de schattingen aan de hand van deze metingen gescheiden van elkaar plaatsvinden. In het volgende zijn de dimensies van de grootheden om reden van overzichtelijkheid weggelaten.

De simulaties zijn uitgevoerd met de volgende startwaarden van de

variabelen

$$\underline{x}(0)^T = [1000 \quad 298 \quad 298] \quad (4.31)$$

De proceswaarde van de filmcoëfficiënt α_R is constant en gelijk aan 5000. De beginwaarde van geschatte parameter is 6000. De ruis op de temperatuurmetingen heeft een gemiddelde $\mu=0$ en een standaarddeviatie $\sigma=0.3$. De intensiteit van de ruis is dus 0.09. In alle figuren zijn weergegeven de (niet gemeten) procesconcentratie, de geschatte concentratie, de werkelijke en de geschatte reactortemperatuur en de geschatte parameter, alle uitgezet tegen de tijd.

In figuur 4.4.1 staan de resultaten voor bovenstaande uitgangssituatie. De door de schatter veronderstelde intensiteit van de ruis is op 0.2 gesteld. Dit heeft als voordeel dat het verloop van de schatting minder grillig is dan wanneer de werkelijke intensiteit wordt gebruikt.

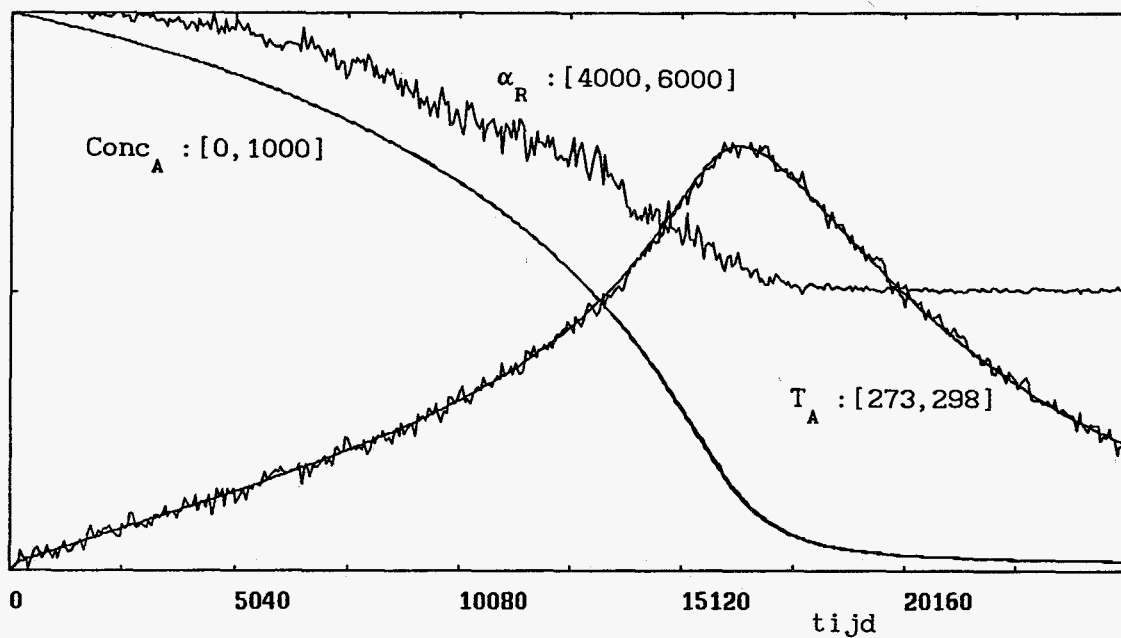
In figuur 4.4.2 is gekeken in hoeverre de schatter in staat is een stapvormige verandering van de parameter te volgen. De beginwaarde van de schatting is nu gezet op de juiste waarde. Op $t=3600$ is de filmcoëfficiënt in het proces verhoogt naar 5500. De schatter volgt de verandering goed.

In figuur 4.4.3 is uitgegaan van een beginschatting van de filmcoëfficiënt van 10000. Het is opvallend dat de aanpassing van de parameter in het begin gering is. Dit komt doordat in het begin de koeling nog nauwelijks van invloed is op de reactortemperatuur en de invloed van een slechte schatting van de filmcoëfficiënt gering is.

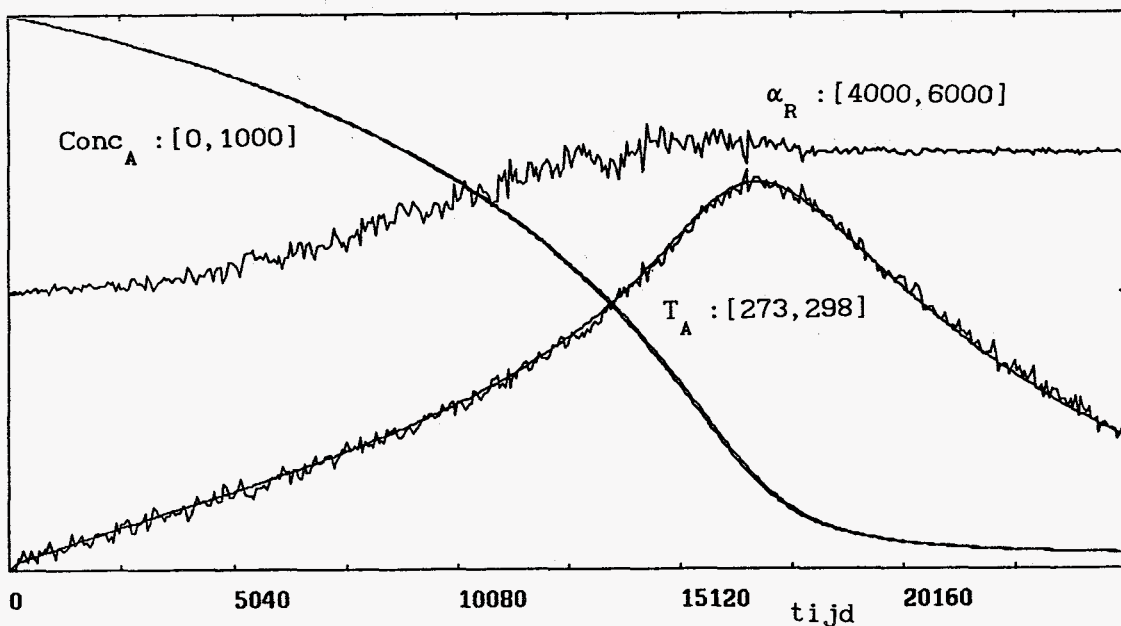
In figuur 4.4.4 is te zien dat wanneer de veronderstelde intensiteit van de meetruis verlaagd wordt tot 0.02 en dus kleiner is dan de werkelijke intensiteit, de schatting grilliger wordt maar nog steeds convergeert.

In figuur 4.4.5 is een begin gemaakt met de studie van de invloed van ongemodelleerde dynamica op de schatter. Aan de procesvergelijking van de reactiesnelheid is een constante term toegevoegd die zorgt voor een remming van de reactie. De schatter blijkt ondanks de modelfout goed te convergeren.

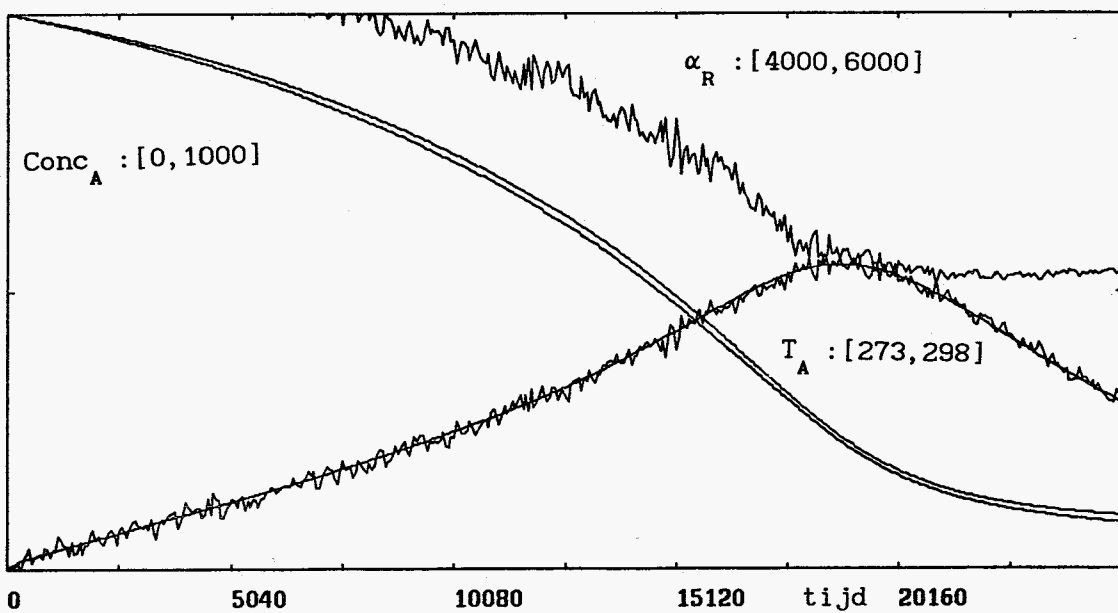
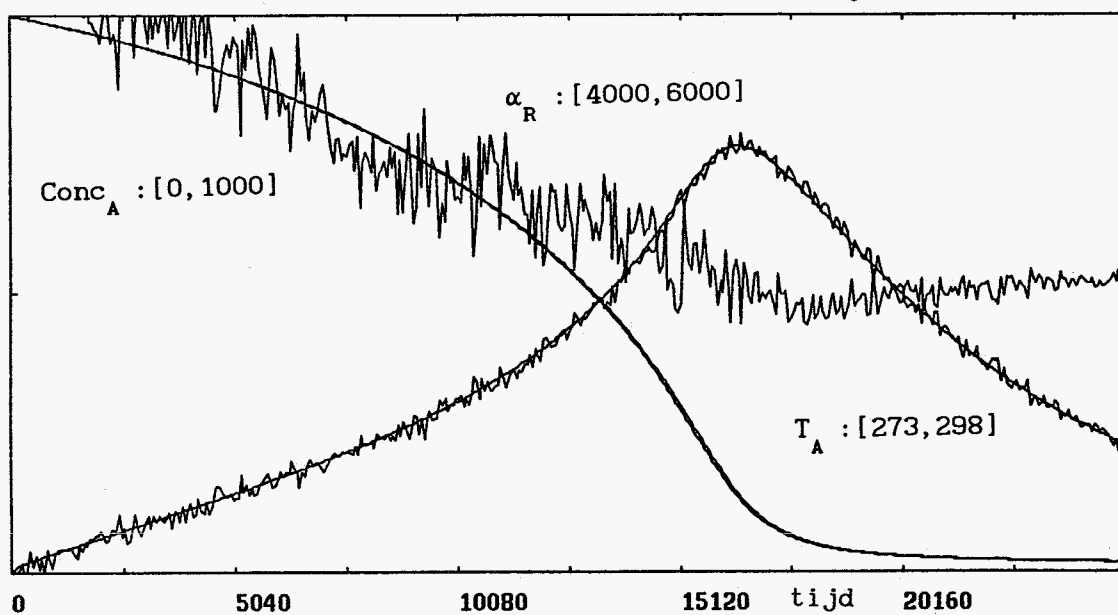
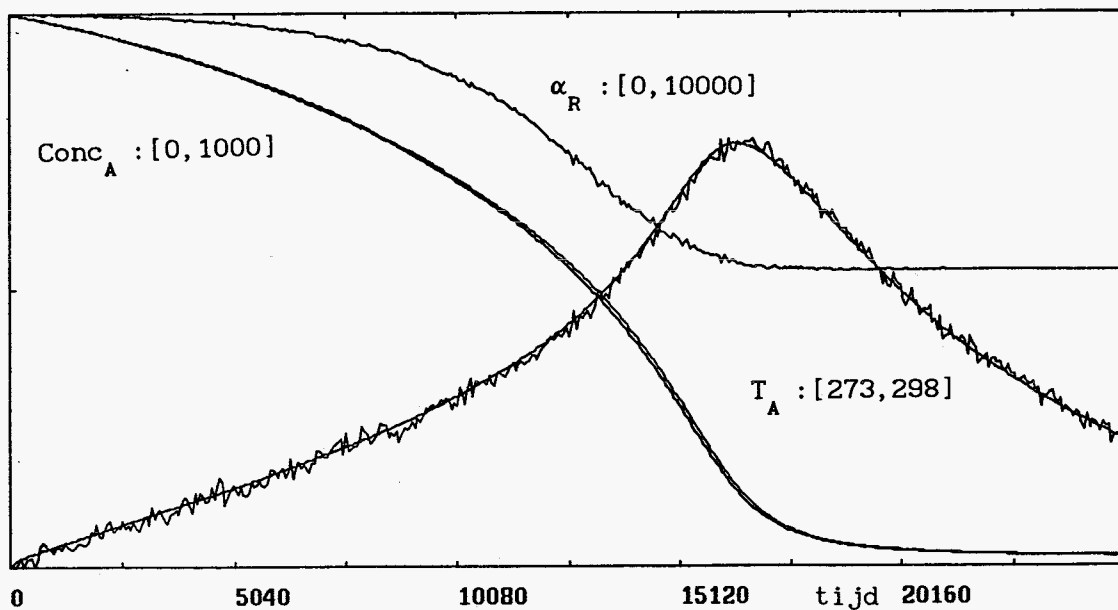
In figuur 4.4.6 is tenslotte een langzame verandering van de werkelijke parameter genomen. Ieder uur neemt de filmcoëfficiënt toe met 420. De schatter blijkt in staat deze verandering goed te kunnen volgen, zelfs zonder de vergelijking die het gedrag van de parameter beschrijft te veranderen. Wel is de veronderstelde intensiteit S van de ruis op de filmcoëfficiënt vergroot. In de figuur is ter verduidelijking ook de werkelijke waarde van de filmcoëfficiënt weergegeven.

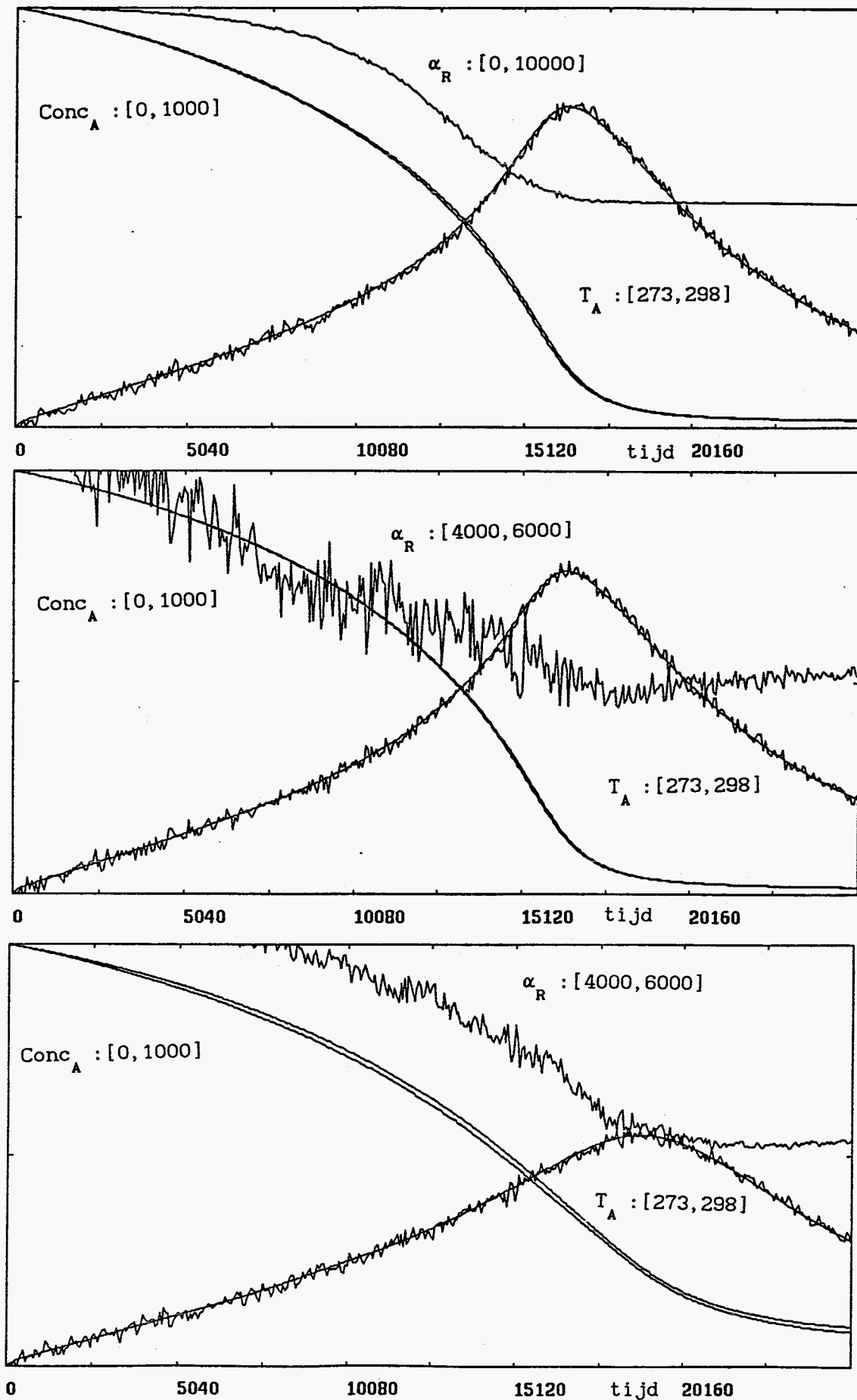


figuur 4.4.1

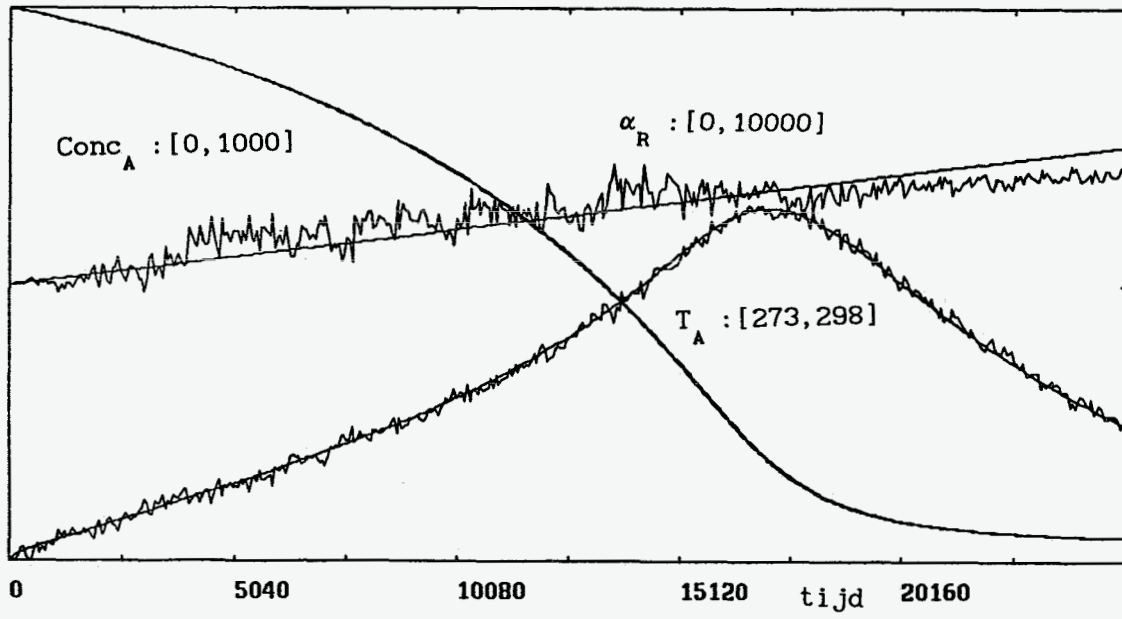


figuur 4.4.2





figuur 4.4.3, figuur 4.4.4 en figuur 4.4.5



figuur 4.4.6

Hoofdstuk 5 : EEN KLEINSTE KWADRATEN SCHATTER

5.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt een parameterschattingsmethode, gebaseerd op het kleinste kwadraten criterium, besproken. De methode wijkt af van de tot zover besproken methoden, omdat de toestand van het proces niet geschat, maar berekend wordt met het modelvoorschrift. Dit heeft als voordeel dat er minder vergelijkingen nodig zijn.

Voor het schatten van de parameters maakt de methode gebruik van de afgeleide van de toestandsvector naar de parametervector. Dit wordt besproken in 5.4. In die paragraaf wordt ook besproken waarom het gebruik van de methode soms problemen oplevert en waarom Bratatjandra [8] wel resultaten heeft geboekt.

5.2 De kleinste kwadraten methode

Het uitgangspunt van de afleiding is dat de vergelijkingen van het model geschreven kunnen worden in de volgende continue, mogelijk niet-lineaire vorm

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{\theta}(t)) \quad (5.1)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{\theta}(t)) \quad (5.2)$$

en dat de discretisatie van deze vergelijkingen door de simulatie software wordt verzorgd. Door de discretisatie gaat de notatie van de toestand op t_k in de continue beschrijving $\underline{x}(t_k)$ over in $\underline{x}(k)$.

De afleiding van de methode is gegeven in appendix A. Voor het schatten van de parametervector dienen de volgende twee vergelijkingen aan het model toegevoegd te worden

$$\hat{\underline{\theta}}(k+1) = \hat{\underline{\theta}}(k) + P(k) \tilde{A}^T(k+1) (\underline{y}_m(k+1) - \underline{h}(k+1)) \quad (5.3)$$

$$P(k+1) = P(k) - P(k) \tilde{A}^T(k+1) [I + \tilde{A}(k+1) P(k) \tilde{A}^T(k+1)]^{-1} \tilde{A}(k+1) P(k) \quad (5.4)$$

waarin $\tilde{A}(k+1)$ gedefinieerd is als

$$\tilde{A} = \frac{d\underline{h}}{d\underline{\theta}^T} \quad \tilde{A}(k+1) = \tilde{A}(x(k+1), u(k+1), \hat{\underline{\theta}}(k)) \quad (5.5)$$

en P de gain-matrix van de kleinste kwadraten methode is. De matrices P en \tilde{A} zullen nu apart besproken worden.

5.3 Beschouwing van de gainmatrix P

De matrix P van de kleinste kwadraten schatter (KKS) lijkt sterk op de matrix P van het EKF. De interpretatie is echter verschillend. Bij het EKF is P de covariantiematrix van de schattingsfout, bij de KKS ontstaat de P matrix door linearisatie van de meetvergelijkingen rond de geschatte parameters.

In appendix C wordt bewezen dat indien de beginwaarde van P symmetrisch is, P altijd symmetrisch is. Dit leidt tot een reductie van het aantal vergelijkingen van n^2 tot $(n^2+n)/2$.

De beginwaarde van P dient, evenals bij het EKF, groot gekozen te worden. De aanpassing van de parameters zal daardoor in het begin groot zijn. Naarmate de tijd voortschrijdt zullen de elementen van P kleiner worden. Om te voorkomen dat deze elementen zo klein worden dat de parameters niet meer aangepast kunnen worden, wordt de vergelijking voor P aangepast met een vergeetfactor. Er kan gekozen worden uit twee vergeetstrategieën: de lineaire en de exponentiële vergeetfactor

de lineaire vergeetfactor

$$P(k+1) = \bar{P}(k+1) + \alpha I \quad (5.6)$$

de exponentiële vergeetfactor

$$P(k+1) = \beta \bar{P}(k+1) \quad (5.7)$$

waarbij $\bar{P}(k+1)$ de met vergelijking 5.2.4 berekende waarde van de gainmatrix is. Verder is α een "klein" getal, en geldt $\alpha > 0$ en $\beta > 1$. In [11] worden deze twee vergeetstrategieën gecombineerd en worden vergelijkingen voor de bepaling van α en β gegeven. Het uitgangspunt in de afleiding van de KKS is dat bij de bepaling van de parameters de metingen op alle tijdstippen evenzwaar wegen. Het toevoegen van een vergeetfactor heeft echter tot gevolg dat recentere metingen een grotere invloed hebben op de waarde van de parameters. Dit is voor processen waarvan de parameters langzaam veranderen uiteraard ook gewenst.

5.4 Beschouwing van de matrix \tilde{A}

De matrix \tilde{A} is de totale afgeleide van de meetvergelijkingen naar de parameters. Deze afgeleide is meestal niet analytisch te bepalen en zal derhalve numeriek benaderd moeten worden. Er zijn twee manieren voor deze benadering

$$1. \quad \tilde{a}_{ij}(k+1) = (h_i(k+1) - h_i(k)) / (\theta_j(k+1) - \theta_j(k)) \quad (5.8)$$

In deze vergelijking is \tilde{a}_{ij} het element van \tilde{A} in rij i en kolom j . Deze methode voldoet niet goed, omdat de uitgangssignalen \underline{h} van tijdstip t_k naar tijdstip t_{k+1} niet alleen veranderen doordat de parameters en de toestand veranderen door parameterveranderingen, maar ook omdat de toestand in de tijd verandert.

$$2. \quad \tilde{A} = \underline{dh}/\underline{d\theta}^T = H_\theta + H_x \cdot \underline{\partial x}/\underline{\partial \theta}^T \quad (5.9)$$

De matrices H_θ en H_x zijn eenvoudig uit de modelvergelijkingen te

bepalen. Voor de berekening van $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\theta}^T}$ dient vergelijking 5.1 gedifferentieerd te worden naar $\underline{\theta}$

$$\frac{d}{d\underline{\theta}^T}(\dot{\underline{x}}(t)) = \frac{d}{d\underline{\theta}^T}(f(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{\theta}(t))) \quad (5.10)$$

$$= F_{\underline{\theta}} + F_x \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\theta}^T} \quad (5.11)$$

Als $\underline{\theta}$ constant is mogen in het rechterlid differentiatie naar tijd en parametervector verwisseld worden

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\theta}^T} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{d\underline{x}}{d\underline{\theta}^T} \end{bmatrix} = F_{\underline{\theta}} + F_x \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\theta}^T} \quad (5.12)$$

Deze differentiaalvergelijking in $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\theta}^T}$ kan aan de vergelijkingen van de schatter toegevoegd worden.

Op dit punt komen de nadelen van het weglaten van de toestandsschatting naar voren. Doordat de toestand niet meer geschat wordt en ook de bepaling van $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\theta}^T}$ onafhankelijk van de metingen aan het werkelijke systeem plaatsvindt, zal de waarde van $\hat{A}(k+1)$ niet goed te bepalen zijn. Dit zal aan de hand van een voorbeeld geïllustreerd worden.

Stel dat de te schatten parameters constant zijn en dat de geschatte parameters nog niet gelijk zijn aan de werkelijke parameters. De toestand \underline{x} van het proces zal op tijdstip t_k slechts een functie zijn van de begintoestand $\underline{x}()$, het ingangssignaal \underline{u} over het gehele interval (t_0, t_k) en de parametervector $\underline{\theta}$. Dus

$$\underline{x}(k) = \underline{k}(\underline{x}(0), \underline{u}(0), \underline{u}(1), \dots, \underline{u}(k), \underline{\theta}) \quad (5.13)$$

De door het model berekende toestand zal echter afhankelijk zijn van alle waarden $\hat{\underline{\theta}}(0), \hat{\underline{\theta}}(1), \dots, \hat{\underline{\theta}}(k)$

$$\hat{\underline{x}}_k = \underline{k}(\hat{\underline{x}}(0), \underline{u}(0), \underline{u}(1), \dots, \underline{u}(k), \hat{\underline{\theta}}(0), \hat{\underline{\theta}}(1), \dots, \hat{\underline{\theta}}(k)) \quad (5.14)$$

Het is nu niet moeilijk voor te stellen dat wanneer de door het model berekende toestand niet correct is, ook de berekening van de matrix \tilde{A} niet correct zal zijn. Simulaties hebben aangetoond dat de foutvoortplanting zodanig kan zijn, dat de geschatte parameters volledig onbruikbaar zijn. Bratatjandra [8] maakt bij zijn simulaties veel gebruik van de analytisch bepaalde matrix \tilde{A} omdat bij zijn studie de te schatten parameter expliciet in de meetvergelijking voorkomt. In de gevallen dat geen analytisch bepaalde matrix \tilde{A} wordt gebruikt, maakt hij gebruik van

$$d(h_i - \tilde{a}_{ij} \hat{\theta}_j) / dt = 0 \quad (5.15)$$

Deze vergelijking wordt door het gebruikte simulatie programma (AGNES) omgezet in de vergelijking

$$\Delta h_i - \Delta \tilde{a}_{ij} \hat{\theta}_j - \tilde{a}_{ij} \Delta \hat{\theta}_j = 0 \quad (5.16)$$

$$\tilde{a}_{ij} = \Delta h_i / \Delta \hat{\theta}_j - \hat{\theta}_j \Delta \tilde{a}_{ij} / \Delta \hat{\theta}_j \quad (5.17)$$

Deze vergelijking heeft zowel het al eerder genoemde nadeel dat de metingen niet alleen veranderen door parameterveranderingen, als het nadeel dat de waarde van het tweede deel van het rechterlid alleen te verwaarlozen is als de veranderingen in \tilde{a}_{ij} klein zijn. Dit laatste is alleen het geval als de elementen van \tilde{A} constant zijn en dat er een juiste schatting van bestaat. Bratatjandra merkt in zijn verslag ook op dat een verkeerde beginwaarde voor een numeriek bepaalde matrix \tilde{A} kan leiden tot verkeerde schattingen.

Hoofdstuk 6 : CONCLUSIES EN AANBEVELINGEN

Voor het recursief schatten van parameters in niet-lineaire systemen zijn enkele methoden bestudeerd. De meest gebruikte methode, het Extended Kalman Filter voor het schatten van parameters in niet-lineaire systemen, is afgeleid uit de optimale Kalman-Bucy schatter voor lineaire systemen. De uit de literatuur bekende problemen met deze methode en de grote rekenintensiteit waren de redenen om de door Jakoby en Pandit in 1987 gepubliceerde schattingsmethode nader te bestuderen. Nadat de methode gecorrigeerd en aangepast was voor MIMO systemen hebben testen aangetoond dat de methode goede resultaten levert. Dit was ook het geval wanneer er een langzaam veranderende parameter geschat diende te worden, de modelstructuur het proces niet correct beschreef of de meetruis op het proces relatief groot was. Een nadeel van de methode is dat wanneer er meer dan één parameter geschat dient te worden, deze schattingen beter afzonderlijk uitgevoerd kunnen worden, omdat het overzicht over het algoritme dan snel verloren gaat. Toch is het onderzoeken van de geschiktheid van de methode voor het schatten van meerdere parameters aan te raden. Wanneer blijkt dat een eerste orde benadering van de systeemvergelijkingen niet voldoende is, kan de tweede orde benadering, zoals die in hoofdstuk 3 reeds is aangehaald, mogelijk uitkomst bieden.

Bij de kleinste kwadraten methode die in dit verslag besproken is, wordt de toestand niet geschat uit de metingen aan het proces, maar berekend met het modelvoorschrift. Hierdoor kan de berekening van de voor de schatter benodigde afgeleide van de uitgangen naar de parameters problemen opleveren. Voor problemen waarbij deze afgeleide niet analytisch te bepalen is, of waarbij er alleen slechte beginschattingen van de afgeleide beschikbaar zijn, is er een redelijke kans dat de methode slechte resultaten levert. Voor de uitbreiding van de methode met een schatter voor deze afgeleide, zoals

dat ook bij de methode van Jakoby en Pandit gebeurt, is een schatting van de toestand nodig. Het grote voordeel van de methode, namelijk het geringe aantal vergelijkingen, gaat dan verloren.

LITERATUURLIJST

1. **Ljung, L.**
System identification - Theory for the user
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey; 1987
2. **Eykhoff, P.**
System identification
Wileys-Interscience, London; 1974
3. **Kok, J.J.**
Werktuigkundig regelen 2
Collegedictaat TU Eindhoven; 1985
4. **Isermann, R.**
Prozeßidentifikation
Springer-Verlag, Berlin; 1974
5. **Bard, Y.**
Nonlinear parameter estimation
Academic press, New York; 1974
6. **Ljung, L.**
Asymptotic behavior of the Extended Kalman Filter as a parameter estimator for linear systems
IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 24, No. 1; 1979
7. **Jakoby, W. en Pandit, M.**
A prediction-error-method for recursive identification of non-linear systems
Automatica, Vol. 23, No. 4; 1987

-
8. **Bratatjandra, H.**
On-line Kalman schatter
Stageverslag, DSM-Research; 1989

 9. **Zhou, W.W. en Blanke, M.**
Identification of a class of non-linear state-space models using
RPE techniques
IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 34, No. 3; 1989

 10. **Goodwin, G.C. en Sin, K.S.**
Adaptive filtering, prediction and control
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey; 1984

 11. **Kraus, F.**
Stabilized least squares estimators for time-variant processes
*Proc. of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa,
Florida; 1989*

 12. **v.d. Linden, R.J.P.**
Design and application of PRIMAL
Proefschrift TU Eindhoven; 1990

 13. **Damen, A.A.H. en v.d. Ven, H.H.**
Moderne regeltechniek
Collegedictaat TU Eindhoven; 1989

 14. **v.d. Boom, A.J.W. en Damen, A.A.H.**
Stochastische systeemtheorie
Collegedictaat TU Eindhoven; 1987

Appendix A AFLEIDING VAN DE KLEINSTE KWADRATEN SCHATTER

Het uitgangspunt is dat de modelvergelijkingen de volgende vorm hebben

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{\theta}(t)) \quad (\text{A.1})$$

$$\underline{y}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{\theta}(t)) \quad (\text{A.2})$$

en dat de discretisatie van dit stelsel vergelijkingen door de simulatie software wordt verzorgd.

De criteriumfunctie van de kleinste kwadraten methode is

$$V(k) = \sum_{i=1}^k (\underline{y}_m(i) - \underline{h}(i))^T (\underline{y}_m(i) - \underline{h}(i)) \quad (\text{A.3})$$

De vectoren $\underline{y}_m(i)$ en $\underline{h}(i)$ worden ondergebracht in de vectoren $\underline{Y}(i)$ en $\underline{H}(i)$ zodanig dat

$$\underline{Y}(k) = \begin{bmatrix} \underline{y}_m(1) \\ \underline{y}_m(2) \\ \vdots \\ \underline{y}_m(k) \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{H}_k = \begin{bmatrix} \underline{h}(1) \\ \underline{h}(2) \\ \vdots \\ \underline{h}(k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

de criteriumfunctie $V(k)$ wordt

$$V(k) = (\underline{Y}(k) - \underline{H}(k))^T (\underline{Y}(k) - \underline{H}(k)) \quad (\text{A.5})$$

Voor $\hat{\underline{\theta}}(k)$, de beste schatting van $\underline{\theta}$ tot tijdstip k , is $V(k)$ minimaal. De afgeleide van $V(k)$ naar $\underline{\theta}$ is dus de nulvector voor $\hat{\underline{\theta}}(k)$.

$$\left. \frac{d\underline{H}(k)}{d\underline{\theta}} \right|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}(k)}^T (\underline{Y}(k) - \underline{H}(k)) = \underline{0} \quad (\text{A.6})$$

De matrix $d\underline{H}(k)/d\underline{\theta}^T$ wordt $A(k)$ genoemd. Op tijdstip t_{k+1} moet gelden

$$A^T(k+1) \left(\underline{Y}(k+1) - \underline{H}(k+1) \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}(k+1)} = \underline{0} \quad (A.7)$$

waarin

$$A(k+1) = \begin{bmatrix} A(k) \\ \tilde{A}(k+1) \end{bmatrix}$$

$$\text{en } \tilde{A} = \frac{d\underline{h}}{d\underline{\theta}^T} \quad \tilde{A}(k+1) = \tilde{A}(x(k+1), u(k+1), \theta(k)) \quad (A.8)$$

dus

$$\begin{bmatrix} A^T(k) & \tilde{A}^T(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}(k) \\ \underline{y}(k+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{H}(k) \\ \underline{h}(k+1) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}(k+1)} = \underline{0} \quad (A.9)$$

$$A^T(k) (\underline{Y}(k) - \underline{H}(k)) + \tilde{A}^T(k+1) (\underline{y}(k+1) - \underline{h}(k+1)) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}(k+1)} = \underline{0} \quad (A.10)$$

Aangenomen wordt dat $\hat{\underline{\theta}}(k+1) = \hat{\underline{\theta}}(k) + \Delta\underline{\theta}$. De eerste term van het linker lid wordt gelineariseerd rond $\hat{\underline{\theta}}(k)$

$$A^T(k) (\underline{Y}(k) - \underline{H}(k)) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}(k+1)} =$$

$$A^T(k) (\underline{Y}(k) - \underline{H}(k)) + d(A^T(k) (\underline{Y}(k) - \underline{H}(k))) / d\underline{\theta}^T \cdot \Delta\underline{\theta} \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}(k)} = \quad (A.11)$$

$$\underline{0} + \left[dA^T(k) / d\underline{\theta}^T \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}(k)} \cdot (\underline{Y}(k) - \underline{H}(k)) - A^T(k) A(k) \right] \cdot \Delta\underline{\theta} \quad (A.12)$$

Omdat het verschil tussen de modelvoorspellingen van de meetvector en de werkelijke metingen klein is, kan het product van de tweede afgeleide van de meetvergelijking naar de parameters en genoemd verschil verwaarloosd worden.

$$A^T(k)(\underline{y}(k) - \underline{h}(k)) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}(k+1)} = -A^T(k) A(k) \underline{\Delta\theta} \quad (\text{A. 13})$$

Als (A.13) in (A.11) wordt ingevuld kan hieruit $\underline{\Delta\theta}$ bepaald worden

$$\underline{\Delta\theta} = (A^T(k) A(k))^{-1} \tilde{A}^T(k+1) (\underline{y}_m(k+1) - \underline{h}(k+1)) \quad (\text{A. 14})$$

Noem

$$(A^T(k) A(k))^{-1} = P(k) \quad (\text{A. 15})$$

Dit geeft

$$\hat{\underline{\theta}}(k+1) = \hat{\underline{\theta}}(k) + P(k) \tilde{A}^T(k+1) (\underline{y}_m(k+1) - \underline{h}(k+1)) \quad (\text{A. 16})$$

De matrix $P(k+1)$ kan recursief bepaald worden uit $P(k)$

$$P(k+1) = (A^T(k+1) A(k+1))^{-1} \quad (\text{A. 17})$$

$$= (A_k^T(k) A(k) + \tilde{A}^T(k+1) \tilde{A}(k+1))^{-1} \quad (\text{A. 18})$$

$$= (P^{-1}(k) + \tilde{A}^T(k+1) \tilde{A}(k+1))^{-1} \quad (\text{A. 19})$$

Wanneer het aantal te schatten parameters groter is dan het aantal gemeten grootheden, kan het aantal berekeningen verminderd worden door voor het inverteren van het rechterlid gebruik te maken van de matrix inversie stelling.

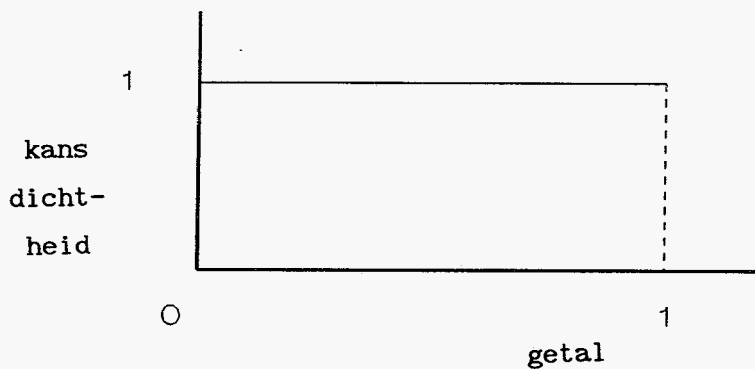
$$(A + B^T B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B^T (I + B A^{-1} B^T)^{-1} B A^{-1} \quad (\text{A. 20})$$

Dit geeft

$$P(k+1) = P(k) - P(k) \tilde{A}^T(k+1) [I + \tilde{A}(k+1) P(k) \tilde{A}^T(k+1)]^{-1} \tilde{A}(k+1) P(k) \quad (\text{A. 21})$$

Appendix B : DE RUISGENERATOR

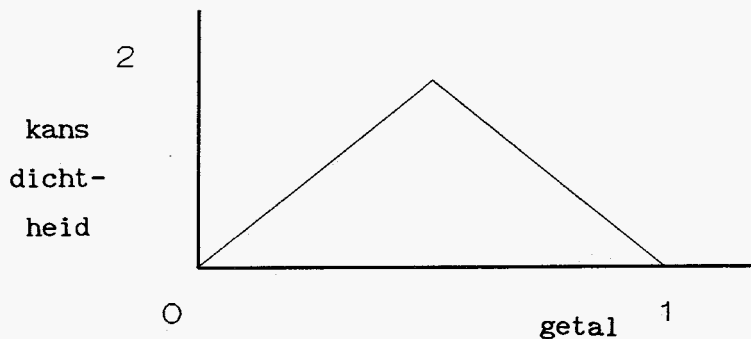
Bij het simuleren van processen is het in sommige gevallen gewenst dat er gebruik gemaakt kan worden van een normaal verdeeld ruissignaal. De meeste computers zijn echter slechts in staat random een getal tussen 0 en 1 te kiezen. Dit random getal heeft een uniforme verdeling.



figuur B.1 *De kansdichtheidsfunctie van de uniforme verdeling*

Het gemiddelde van deze verdeling is 0.5 en de standaarddeviatie σ is $12^{-0.5}$. De maximale afwijking van een sample is $0.5 \approx 1.7\sigma$.

Door nu de computer twee samples uit het interval $[0,1]$ te laten nemen en deze te middelen wordt een driehoekige verdeling verkregen.



figuur B.2 *De kansdichtheidsverdeling van het gemiddelde van de som van twee uniforme verdelingen.*

De maximale afwijking bedraagt nu 2.4σ . Naarmate er meer samples genomen en gemiddeld worden, zal de verdeling de normale verdeling steeds beter benaderen. Voor de simulaties worden zes samples genomen en gemiddeld. De maximale afwijking bedraagt nu 4.2σ . Het Fortran-algorithme van de ruisgenerator ziet er als volgt uit

C RUISGENERATOR

C

```
INTEGER      SEED
INTEGER      J
REAL*4       RUIS_SOM
REAL*4       AFWIJKING
DATA SEED    /655555/
```

C

```
RUIS_SOM = 0.
```

C

```
DO 100 J=1,6
    RUIS_SOM = RUIS_SOM + RAN(SEED)
```

100 CONTINUE

C

```
AFWIJKING = RUIS_SOM/6 - 0.5
NORM_VERD_RUIS = AFWIJKING * ST_DEVIATIE * SQRT(12. * 6.) + GEM
```

C

```
END
```

Appendix C : BEWIJS VAN HET SYMMETRISCH ZIJN VAN P

De vergelijking voor $P(k+1)$ luidt

$$P(k+1) = P(k) - P(k) \tilde{A}^T(k+1) [I + \tilde{A}(k+1) P(k) \tilde{A}^T(k+1)]^{-1} \tilde{A}(k+1) P(k) \quad (C.1)$$

Als $P(k)$ symmetrisch is, zal $[I + \tilde{A}(k+1) P(k) \tilde{A}^T(k+1)]$ ook symmetrisch zijn. Stel $[I + \tilde{A}(k+1) P(k) \tilde{A}^T(k+1)] = B$. Voor een symmetrische matrix geldt $B^T = B$. Voor de getransponeerde van het produkt in het rechter lid van (C.1) geldt

$$[P(k) \tilde{A}^T(k+1) B^{-1} \tilde{A}(k+1) P(k)]^T = P^T(k) \tilde{A}^T(k+1) [B^{-1}]^T \tilde{A}(k+1) P^T(k) \quad (C.2)$$

$$= P(k) \tilde{A}^T(k+1) [B^T]^{-1} \tilde{A}(k+1) P(k) \quad (C.3)$$

$$= P(k) \tilde{A}^T(k+1) B^{-1} \tilde{A}(k+1) P(k) \quad (C.4)$$

Hieruit volgt dat wanneer $P(k)$ symmetrisch is, $P(k+1)$ ook symmetrisch is. Als de beginwaarden $P(0)$ symmetrisch zijn volgt via volledige inductie dat $P(k)$ symmetrisch is voor alle waarden $k \geq 0$.