

## MASTER

### Knikken van een gekepte houten kruisverband theoretisch en numeriek onderzoek

Popal, N.

*Award date:*  
2011

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

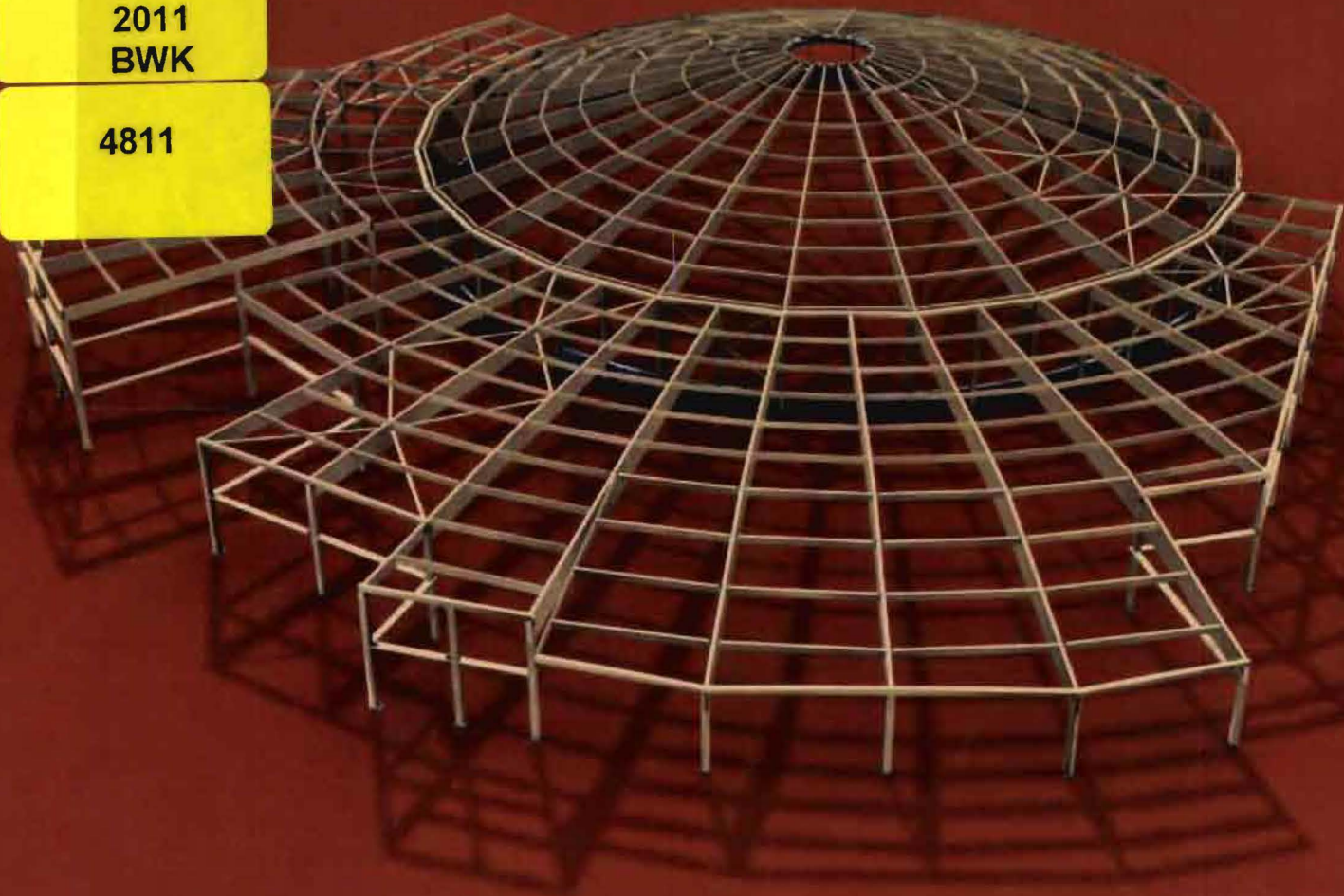
#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

ARR  
2011  
BWK

4811



structural design

E

H

U

# Knikken van een gekepte houten kruisverband

*Afstudeerverslag*

**N. Popal**

A-2011.08

# **Knikken van een gekepte houten kruisverband**

**Theoretisch en numeriek onderzoek**

**Afstudeerverslag**

## **Afstudeerverslag**

Student: Nuria Popal  
Student nummer: 0582531  
Datum: 15-06-2011

## **Afstudeercommissie:**

Prof.dr. Ir. A.J.M Jorissen  
Dr.ir.S.P.G.Moonen  
Ing. T. Geuijen

Technische Universiteit Eindhoven  
Faculteit Bouwkunde  
Afdeling Architecture, Building & Planning  
Mastertrack Structural Design

Afstudeerverslag nummer: A-2011.08  
Onderzoeksnummer: 2011-3-STA 1

# **Knikken van een gekepte houten kruisverband**

**Afstudeerverslag**

**Nuria Popal**

*prof. dr. ir. A. J. M. Jorissen*



## Voorwoord

Tijdens mijn afstuderen aan de Technische Universiteit te Eindhoven, heb ik me bezig gehouden met de stabiliteit van kruisende staven. Daarvoor is een theoretisch en numeriek onderzoek uitgevoerd. Mijn werkzaamheden richten zich op het analyseren van het theoretische knikgedrag van een houten windverband.

Eerst bedank ik de leden van de afstudeercommissie voor de begeleiding, en voor de waardevolle adviezen welke ik gekregen heb tijdens mijn afstuderen.

Tot slot wil ik alle begeleiders danken voor hun medewerking aan dit onderzoek.

Nuria Popal  
Juni'2011-06-15

## Samenvatting

Een van de eisen waaraan een constructie moet voldoen is stabiliteit. Om te controleren of een constructie voldoende weerstand kan bieden tegen uitknikken in het vlak van de constructie, moet elke staaf afzonderlijke worden onderzocht. Voor de afvoer van de horizontale lasten zijn horizontale en verticale stabiliteitsvoorzieningen noodzakelijk.

De stabiliteit kan met windverbanden in gevels en in dakvlakken worden gerealiseerd. Een windverband is een deel van een constructie welke de afdracht verzorgt van horizontale belastingen op een constructie naar de fundering.

Een houten windverband kan bestaan uit twee staven waarbij de ene staaf op trek en de andere op druk wordt belast. Om de staven in een vlak te kunnen plaatsen, zullen de beide staven door een halfhoutse keepverbinding verbonden moeten worden.

De vraagstelling die in dit verslag aan de orde is gekomen, is de volgende:

- Wat is het knikgedrag van houten windverband met uitkeeping.
- Wat is het vervorminggedrag van het knooppunt.

Het stabiliteitsgedrag van het kruisverband wordt onderzocht via drie methoden, namelijk analytische methode, energie methode en Eindige elementen methode (ANSYS).

In hoofdstuk 1 wordt een beknopt overzicht gegeven over de theorie en formulering van de genoemde methoden.

In hoofdstuk 2 is de Eulerse knikkracht voor de staaf zonder keep met de analytische methode, energie methode en eindige elementen methode bepaald.

In hoofdstuk 3 is het effect van de keep in de opdruk belaste staaf met analytisch methode, energie methode en eindige elementen methode onderzocht. Met behulp van een aantal aannamen is een goede theoretische benadering mogelijk. De aanwezigheid van de keep resulteert in een reductie van de weerstand tegen knikken van de staaf.

In de meeste praktijksituaties, waarbij de staaf over de halve hoogte is ingekeept, zal de reductie van de knikkracht ca 20% bedragen. Uit hoofdstuk 3 blijkt ook dat:

- De keep in de opdrukbelaste staaf een negatieve invloed op de kniklast heeft.

Hierbij komen de analytische en eindige elementen methoden overeen. Echter de energie methode komt niet overeen met de analytische uitwerking en ANSYS. De knikkrachten bepaald met de energie methode zijn altijd hoger dan de exacte resultaten: Doordat in de veronderstelde vervorming het eerste orde moment door de excentriciteit niet meegenomen is, is de energie hoger, resulterend in een hogere knikkracht.

In hoofdstuk 4 is de invloed van de verende ondersteuning op de kniklengte onderzocht. De op druk belaste staaf wordt gesteund door de trekstaaf hetgeen resulteert in een gereduceerde kniklengte en in een hogere knikkracht. Uit het resultaat van analyses blijkt dat bij kleine veerstijfheid de staaf knikt in de symmetrische knikvorm en bij voldoende veerstijfheid de staaf knikt in de antisymmetrische knikvorm.

De minimum waarde van de veerstijfheid waarbij een antisymmetrische knikvorm optreedt, wordt de kritische veerstijfheid genoemd die in hoofdstuk 4 is bepaald. Het spreidingsgebied van veerstijfheid waarbij een symmetrische knikvorm optreedt is  $0 < k < k_{cr}$ . Bij  $k_{cr} = 16\pi^2 EI / L^3$  is de knikvorm antisymmetrisch en de knikkracht is  $P_{cr} = 4\pi^2 EI / L^2$ . De veerstijfheid boven de  $k_{cr}$  zijn niet van praktisch belang omdat de staaf bezwijkt bij de antisymmetrische bezwijkvorm en neemt de knikkracht voor  $k > k_{cr}$  niet meer toe en is alleen stuiken van het materiaal mogelijk. Uit hoofdstuk 4 blijkt dat door de veer de kniklengte wordt gereduceerd tot  $0,5L \leq L_k \leq 1,0L$  (met L de staaf lengte) en de knikkracht varieert van  $\pi^2 EI / L^2 \leq P_{cr} \leq 4\pi^2 EI / L^2$ .

Hierbij komen de analytische en eindige elementen methoden exact overeen. Echter de energie methode komt niet goed overeen met de analytische uitwerking en ANSYS. De knikkrachten bepaald met de energie methode zijn altijd hoger dan de analytische en numerieke resultaten, omdat voor de energie methode minder vrijheidsgraden zijn beschouwd.

Ondanks de aangebrachte vereenvoudigingen is een zuiver wiskundig analytische oplossing van de op drukbelaste staaf slechts in twee gevallen mogelijk: staaf met keep en staaf met verende ondersteuning in het midden. Om het effect van keep en veer met elkaar te combineren, wordt in hoofdstuk 5 de kritische kracht voor de opdrukbelaste staaf met keep en gesteund in het midden door de veer onderzocht. Deze berekening wordt met de analytische methode vrij gecompliceerd (onmogelijk), echter met de potentiële energie methode of een numerieke rekenmethode is wel mogelijk.

Uit hoofdstuk 5 blijkt dat de energie methode toepasbaar is voor staven met keep en gesteund in het midden door de veer. Uit hoofdstuk 5 blijkt ook dat de keep grote invloed heeft op de knikkracht van de staaf. De knikkracht wordt gereduceerd door de keep in vergelijking met een staaf zonder keep. Echter als de veer oneindig stijf is, dan heeft de keep kleine invloed op de knikkracht. De keep heeft een vergrotende invloed op de kniklengte in vergelijking met staaf zonder keep.

In hoofdstuk 6 is met de eindige elementen methode (Ansys) de kritische kracht voor het hele systeem met constant EI bepaald. Uit hoofdstuk 6 blijkt dat de kritische knikkracht voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) exact overeen komt met de kritische knikkracht voor de gedrukte staaf met veer in het midden.

In hoofdstuk 6 is met de eindige elementen methode (Ansys) de kritische kracht voor het kruisverband met keep bepaald. Uit hoofdstuk 6 ook blijkt dat de kritische knikkracht voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) exact overeen komt met de kritische knikkracht voor gedrukte staven met keep en veer in het midden. Uit hoofdstuk 6 blijkt dat de keep een verkleinde invloed op de knikkracht en ook op de veerstijfheid (geleverd door de trekstaaf) heeft in vergelijking met het kruisverband zonder keep. En heeft de keep een vergrotende invloed op de kniklengte van het kruisverband met keep in vergelijking met het kruisverband zonder keep.

In hoofdstuk 7 wordt het vervormingsgedrag van het kruisverband met constant EI en excentriciteit geanalyseerd. Daarbij worden voor beide staven een mogelijke excentriciteit aangenomen om imperfecties in de beginsituatie mee te nemen en hun invloed op het geheel te onderzoeken. Er is een theoretische analyse van het kruisverband gegeven. Naast de theoretische analyse wordt ook een analyse met het eindige element methode waarbij geometrisch niet-lineaire gedrag in rekening genomen wordt, uitgevoerd.

Uit hoofdstuk 7 blijkt dat excentriciteit en de richting van de excentriciteit van de druk en trek staaf van het kruisverband grote invloed heeft op het vervormingsgedrag van het knooppunt.

## Inhoudsopgave

<b>INLEIDING</b> .....	<b>6</b>
<b>PLAN VAN AANPAK</b> .....	<b>7</b>
<b>1 THEORIE EN FORMULERING</b> .....	<b>12</b>
1.1. ANALYTISCHE METHODE .....	13
1.1.1. <i>Op drukbelaste staaf</i> .....	13
1.2. ENERGIE METHODEN .....	14
1.3. NUMERIEKE .....	18
<b>2 OP DRUKBELASTE STAAF ZONDER KEEP</b> .....	<b>19</b>
2.1. ANALYTISCHE METHODE MET DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN .....	19
2.1.1. <i>Theoretische uitwerking van op drukbelaste staaf zonder keep</i> .....	20
2.2. ENERGIE METHODE .....	23
2.2.1. <i>Knikkracht voor de staaf zonder keep</i> .....	23
2.3. NUMERIEK .....	24
2.4. CONCLUSIE .....	25
<b>3 OP DRUKBELASTE STAAF MET KEEP</b> .....	<b>26</b>
3.1. ANALYTISCHE METHODE .....	27
3.1.1. <i>Theoretische uitwerking van op drukbelaste staaf met keep</i> .....	27
3.1.2. <i>Hoekverdraaiing staafdeel I</i> .....	27
3.1.3. <i>Hoekverdraaiing staafdeel H</i> .....	29
3.1.4. <i>Gelijkstellen van de hoekverdraaiingen</i> .....	29
3.1.5. <i>Vergelijken van de knikkracht voor de staaf met keep aan staaf zonder keep</i> .....	31
3.2. ENERGIE METHODE: .....	35
3.2.1. <i>Knikkracht voor staaf met Keep</i> .....	35
3.3. NUMERIEK .....	39
3.4. CONCLUSIE .....	40
<b>4 OP DRUKBELASTE STAAF MET VERENDE ONDERSTEUNING</b> .....	<b>41</b>
4.1. ANALYTISCHE METHODE: .....	41
4.1.1. <i>Op drukbelaste niet gekepte staaf met verende ondersteuning in het midden</i> .....	42
4.1.2. <i>Bepaling van de veerstijfheid, geleverd door de trekstaaf</i> .....	49
4.2. ENERGIE METHODE: .....	54
4.2.1. <i>Knikkracht voor staaf met verende ondersteuning in het midden</i> .....	54
4.3. NUMERIEK .....	58
4.4. PRAKTIJK TOEPASSINGEN VOOR HET KRUISVERBAND ZONDER KEEP .....	60
4.4.1. <i>Analytische methode</i> .....	60
4.4.2. <i>Verificatie met Eindige elementen methode</i> .....	61
4.4.3. <i>Analytische methode</i> .....	63
4.4.4. <i>Verificatie met Eindige elementen methode</i> .....	64
4.4.5. <i>Analytische methode</i> .....	66
4.4.6. <i>Verificatie met Eindige elementen methode</i> .....	67
4.4.7. <i>Analytische methode</i> .....	69



4.4.8.	<i>Verificatie met Eindige elementen methode</i> .....	70
4.4.9.	<i>Analytische methode</i> .....	72
4.4.10.	<i>Verificatie met Eindige elementen methode</i> .....	73
4.4.11.	<i>Analytische methode</i> .....	75
4.4.12.	<i>Verificatie met Eindige elementen methode</i> .....	76
4.4.13.	<i>Analytische methode</i> .....	78
4.4.14.	<i>Verificatie met Eindige elementen methode</i> .....	79
4.5.	CONCLUSIE .....	81
<b>5</b>	<b>OP DRUKBELASTE STAAF MET KEEP EN VERENDE ONDERSTEUNING .....</b>	<b>82</b>
5.1.	ANALYTISCHE METHODE: .....	82
5.1.1.	<i>Bepaling van de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep zonder invloed van de trekkracht</i> .....	82
5.2.	ENERGIE METHODE: .....	87
5.2.1.	<i>Knikkracht voor drukbelaste staaf met keep en verende ondersteuning</i> .....	87
5.3.	NUMERIEK: .....	90
5.4.	PRAKTIJK TOEPASSINGEN VOOR HET KRUISVERBAND MET KEEP .....	92
5.4.1.	<i>Numeriek</i> .....	92
5.4.2.	<i>Numeriek</i> .....	94
5.4.3.	<i>Numeriek</i> .....	96
5.4.4.	<i>Numeriek</i> .....	98
5.4.5.	<i>Numeriek</i> .....	100
5.4.6.	<i>Numeriek</i> .....	102
5.4.7.	<i>Numeriek</i> .....	104
5.5.	CONCLUSIE:.....	107
<b>6</b>	<b>NUMERIEKE BESCHOUWING VAN HET VOLLEDIGE KRUISVERBAND:.....</b>	<b>108</b>
6.1.1.	<i>Knikkracht voor het kruisverband zonder keep:</i> .....	108
6.1.2.	<i>Knikkracht voor het kruisverband met keep:</i> .....	110
<b>7</b>	<b>DE VERVORMING VAN HET KRUISVERBAND.....</b>	<b>112</b>
7.1.	ANALYTISCHE METHODE .....	112
7.1.1.	<i>Analyse Kruisverband met exentriciteit</i> .....	112
7.1.2.	<i>Op trekbelaste staaf</i> .....	113
7.1.3.	<i>Opdrukbelaste staaf</i> .....	119
7.1.4.	<i>Evenwicht</i> .....	126
7.2.	PRAKTIJK TOEPASSINGEN .....	128
7.2.1.	<i>Analyse Kruisverband met exentriciteit</i> .....	128
7.2.2.	<i>Verificatie met Eindige elementen methode</i> .....	129
7.3.	CONCLUSIE:.....	129
	<b>CONCLUSIES.....</b>	<b>130</b>
	<b>AANBEVELINGEN .....</b>	<b>131</b>
	<b>FIGUURLIJST .....</b>	<b>132</b>
	<b>REFERENTIES .....</b>	<b>134</b>
	LITERATUUR .....	134

## Inleiding

Een constructie dient getoetst te worden aan bepaalde criteria met betrekking tot stabiliteit, sterkte, en stijfheid. Een constructie is stabiel als het standzeker is en vormvast. Voor de berekening van de stabiliteit van een constructie moet aan bepaalde voorwaarden worden voldaan. Een van deze voorwaarden is de knikstabiliteit.

De stabiliteit van de constructie kan met windverbanden in gevels en in dakvlakken worden gerealiseerd (zie figuur 0.1). De staven in windverbanden zullen op trekkracht en/of drukkracht worden belast. Bij stalen profielen is het vaak beter het windverband op trek te berekenen, omdat de relatief slanke profielen gevoelig zijn voor knik. Bij houten profielen zal meestal op druk en trekkrachten worden gerekend hetgeen de krachten op de verbindingen reduceert(halveert). Een van de moeilijkheid is bij het houten windverband de onderlinge kruising van de staven. Deze wordt vaak met een halfuitkeping gerealiseerd.

### Probleemstelling

De probleemstelling die in dit project aan de orde komt is:

- Het knikgedrag van het houten windverband met uitkeping. (zie figuur 0.2).
- Het vervorminggedrag van het knooppunt van het houten windverband. (zie figuur 0.2).

### Doelstelling

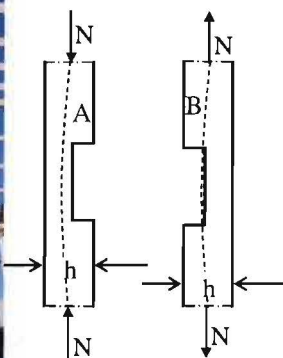
Het doel van deze studie is om de knikkracht van de gekepte staaf die t.p.v de keep door de op trek belaste staaf wordt gesteund te onderzoeken met behulp van verschillende methoden.

De doelstelling die binnen het afstudeerproject vallen zijn:

- Leren het wetenschappelijke onderzoek te analyseren en verwerken
- Het analyseren van het theoretische knikgedrag uitgaande van differentiaalvergelijkingen en of energie benaderingen van het houten windverband.
- Analyseren de invloed van de keep op een gedrukte staaf en de invloed van de verende ondersteuning op de kniklengte.
- Ervaring opdoen met numerieke methode.



Figuur 0.1 Winverbanden in dak en gevelvlakken



Figuur 0.2 Houten windverband

## Plan van aanpak

Windverbanden nemen de horizontale belastingen op door middel van normaal krachten. Deze normaal krachten zijn bij houten kruisverband druk en trek krachten.

Om het stabiliteitsgedrag van een kruisverband te kunnen beoordelen is het nodig om zo nauwkeurig mogelijk de relaties tussen belasting en vervorming te analyseren. De berekening van de stabiliteit van op druk en buiging belaste staven met keep is een van de lastige problemen in de mechanica.

De analyse van het systeem wordt als volgt aangepakt.

### Analyseprocedure:

Het stabiliteitsgedrag van het kruisverband wordt onderzocht via drie methoden, namelijk analytische methode, energie methode en Eindige elementen methode (ANSYS).

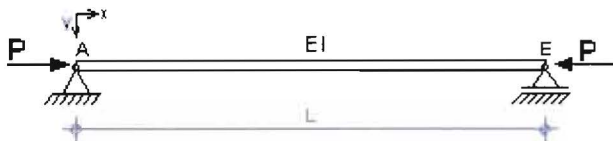
Uit het kruisverband wordt eerst de drukstaaf beschouwd waarna het hele systeem wordt geanalyseerd.

### Hoofdstuk 1 Theorie en formulering

In hoofdstuk 1 wordt over de theorie en formulering van de genoemde methoden besproken.

### Hoofdstuk 2 opdrukbelaste staaf zonder keep

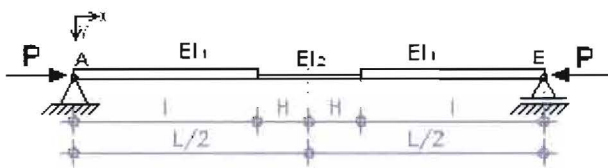
In hoofdstuk 2 is de Eulerse knikkracht voor de staaf zonder keep met analytische methode, energie methode en Eindige elementen methode bepaald (zie §2.1, §2.2, §2.3).



### Hoofdstuk 3 opdrukbelaste staaf met keep

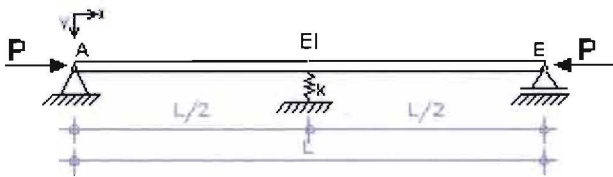
Hoofdstuk 3 bevat een analyse van de invloed van de keep op de knikkracht ( $P_{cr}$ ) van de opdrukbelaste staaf om te kijken hoeveel de knikkracht wordt gereduceerd door de keep (zie §3.1).

De Eulerse knikkracht wordt gelijk aan de knikkracht voor de staaf met keep ( $P_{cr}$ ) gesteld om de reductie factor ( $\eta$ ) voor de staaf met keep te bepalen. De factor ( $\eta$ ) die afhankelijk van de geometrie van de inkeping is, wordt vermenigvuldigd met de Eulerse knikkracht om de kritische kracht voor de staaf met keep te bepalen. Met deze factor is in de praktijk heel simpel de kritische kracht voor een willekeurige inkeping te bepalen.



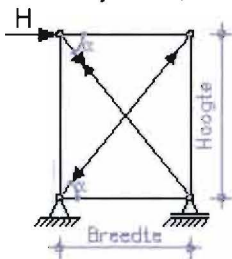
### Hoofdstuk 4 opdrukbelaste staaf met verende ondersteuning in het midden

De opdrukbelaste staaf wordt in het midden gesteund door de trekstaaf en deze steun wordt met de veer die een veerconstante  $k$  heeft, geschematiseerd. De kracht die op de verende steun wordt uitgeoefend, hangt af van de veerstijfheid. Hierbij wordt de invloed van de verende ondersteuning op de knikkracht onderzocht om te kijken in hoeverre de op drukbelaste staaf wordt gesteund door de trekstaaf (door de veer).



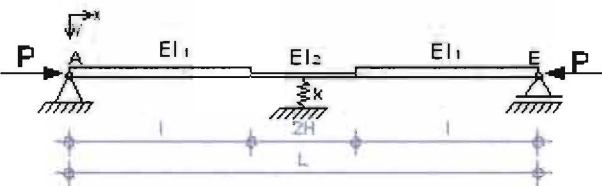
**Bepaling k, niet gekepte staaf:**

Hier wordt de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf vgl.(4.34) en ook de kritische veerstijfheid vgl.(4.18) voor de opdrukbelaste staaf bepaald. Zie §4.1.1 en §4.1.2. In hoofdstuk 4 wordt praktijk toepassingen voor het kruisverband zonder keep belast door de windbelasting met analytische, Energie en Eindige elementen methoden geanalyseerd. Zie §4.4.



**Hoofdstuk 5 opdrukbelaste staaf met keep en verende ondersteuning in het midden**

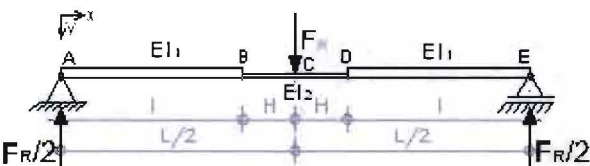
In hoofdstuk 5 wordt de drukbelaste staaf met keep en gesteund in het midden door de veer geanalyseerd. Om die twee effecten (veer en keep) met elkaar te combineren, wordt de kritische kracht voor de opdrukbelaste staaf onderzocht. Deze berekening wordt met de analytische methode vrij gecompliceerd (onmogelijk), echter met de energie methode en Eindige elementen methode zijn wel mogelijk.



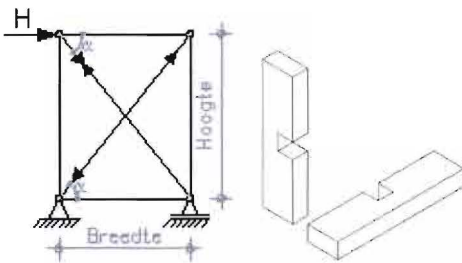
**Bepaling k, gekepte staaf:**

De veerstijfheid (k) bij de opdrukbelaste staaf kan worden bepaald door de vervorming te bepalen van de trekstaaf, die wordt met:

- Staaf met inkeping (afwijkende EI) en puntlast. Zie §5.1.1.

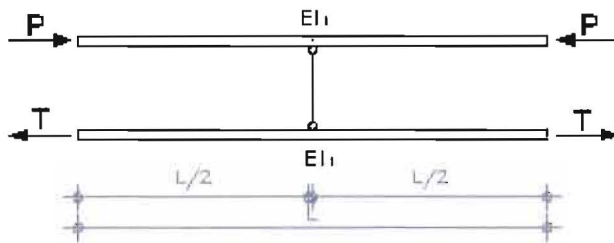


In hoofdstuk 5 wordt praktijk toepassingen voor gekeept kruisverband belast door de windbelasting met de Energie methode en Eindige elementen methode geanalyseerd. Zie §5.4

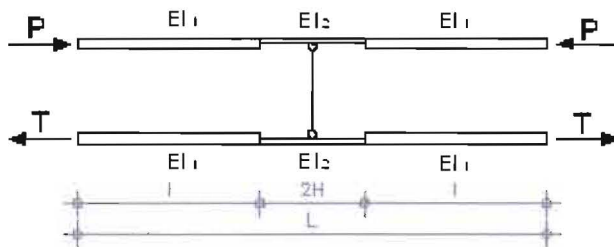


**Hoofdstuk 6 numerieke beschouwing van het volledig kruisverband:**

Met de eindige elementen methode (Ansys) wordt in paragraaf 6.1.1 de kritische kracht voor het hele systeem zonder keep bepaald. Deze wordt vergeleken met de knikkraft voor de staaf met verende ondersteuning.



In paragraaf 6.1.2 wordt met de eindige elementen methode de kritische kracht voor het hele systeem met keep bepaald. Deze wordt vergeleken met de knikkraft voor de staaf met keep en verende ondersteuning.



**Hoofdstuk 7 analyse vervorminggedrag van het kruisverband met excentriciteit:**

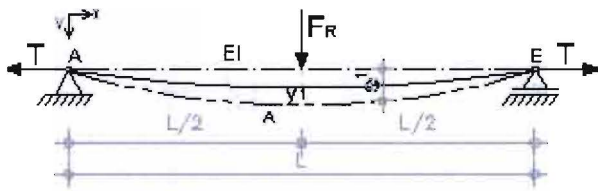
In hoofdstuk 7 wordt het vervorminggedrag van het kruisverband met constant EI en excentriciteit geanalyseerd.

Dit betekent dat naast de normaalkracht altijd een buigend moment aanwezig is. Ten gevolge van dit buigend moment, vervormt de staaf dus ook in een richting loodrecht op de staafas met als gevolg dat de afstand tussen de werklijn van de normaalkracht en de staafas toeneemt.

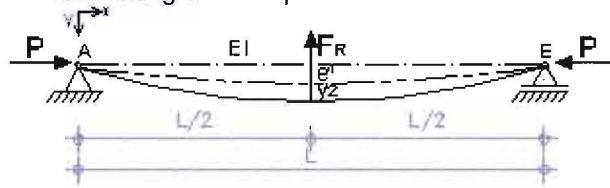
Uit het kruisverband worden eerst de trekstaaf en drukstaaf los gezien om de krachtwerking met betreffende vervorming voor elke staaf te kunnen analyseren.

In paragraaf 7.1.2 wordt de vervorming van de op trekbelaste staaf met constant EI geanalyseerd.

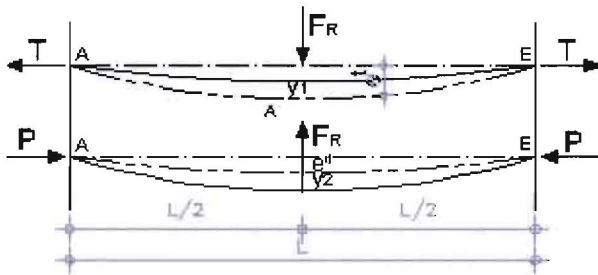
Knikken van gekepte houten kruisverband



De vervorming van de op druk belaste staaf met constant  $EI$ , wordt in paragraaf 7.1.3 geanalyseerd.



De staven zijn gekoppeld waardoor de uitbuiging ter plaatse van de koppeling van de beide staven gelijk is. In evenwicht geldt dat bij een bepaalde kracht  $F_R$ , de vervorming van de op trek belaste staaf en de vervorming van de op druk belaste staaf gelijk is. Met deze kracht  $F_R$  wordt de vervorming voor de op drukbelaste staaf onderzocht (zie §7.1.4).



In paragraaf 7.2 worden praktijk toepassingen behandeld. Naast de theoretische analyse wordt ook een analyse met het eindige elemente methode uitgevoerd, waarbij niet-lineaire gedrag in rekening genomen wordt. Vervolgens wordt de uitwerking van de analytische methode vergeleken met de numerieke methode (ANSYS).

In paragraaf 7.2.3 wordt het kruisverband met initiële uitbuiging geanalyseerd en de resultaten worden vergeleken met de EEM methode in paragraaf 7.2.4.

De uitwerking verloopt in 7 stappen als volgt:

hoofdstuk		Analytisch	Energie	ANSYS
		Paragraaf		
1	Theorie en formulering	1.1	1.2	1.3
2	Staaf zonder keep $\rightarrow P_E$	2.1	2.2	2.3
3	Staaf met keep $\rightarrow P_{cr}$	3.1	3.2	3.3
4	Staaf met verende ondersteuning in het midden $\rightarrow P_{cr}$	4.1	4.2	4.3
	Bepaling $k$ , niet gekepte staaf	4.1.1, 4.1.2		
	Praktijk toepassingen	4.4	4.4	4.4
5	Staaf met keep en verende ondersteuning $\rightarrow P_{cr}$	5.1	5.2	5.3
	Bepaling $k$ , gekepte staaf	5.1.2		
	Praktijk toepassingen		5.4	5.4
6	Knikkraft voor het volledige kruisverband $\rightarrow P_{cr}$			6.1.1, 6.1.2
7	De vervorming van het kruisverband	7.1		
	Analyse vervorminggedrag kruisverband met exentriciteit	7.1.1		
	Praktijk toepassingen	7.2		7.2
	Analyse kruisverband met exentriciteit	7.2.1		
				7.2.2

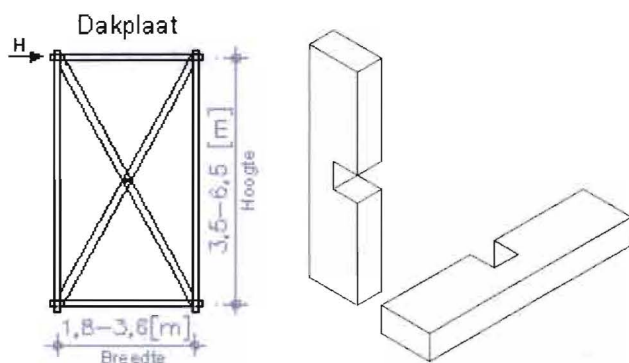
# 1 Theorie en formulering

Voor de bepaling van de knikkracht zijn verschillende theorieën voorgesteld in de afgelopen jaren. Om de nauwkeurigheid en de praktische bruikbaarheid van deze methoden te presenteren, worden er vergelijkingen gemaakt tussen de methoden.

Voor de afvoer van de horizontale lasten zijn in bouwwerken horizontale en verticale stabiliteitsverbanden noodzakelijk.

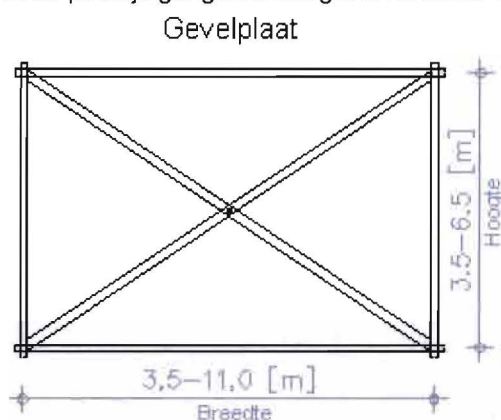
Om de staven van het kruisverband in een vlak te kunnen plaatsen, zullen de beide staven middels een halfhoutse keepverbinding elkaar kruisen. Dit betekent dat de keep hoogte is gelijk aan de helft van de doorsnede hoogte. Omdat de op de verband werkende belasting  $H$  (zie figuur 1.1) kan omkeren, wordt de stijfheid van de drukbelaste staaf gelijk aan de stijfheid van de trekbelaste staaf aangenomen ( $EI_{druk} = EI_{trek}$ ). In de praktijk is ook meestal ( $EI_{druk} = EI_{trek}$ ), omdat de wind van links of van rechts kan komen.

In de praktische toepassingen wordt het dakvlak voorzien van houten stabiliteitsverbanden over een hoogte en breedte weergegeven in figuur 1.1.



Figuur 1.1 Verband in dakvlak

In de praktische toepassingen wordt het gevelvlak voorzien van houten stabiliteitsverbanden (diagonaal). De in de praktijk gangbare hoogte en breedte van de gevelvlak zijn weergegeven in figuur 1.2.



Figuur 1.2 Verband in gevel



## 1.1. Analytische methode

### 1.1.1. Op drukbelaste staaf

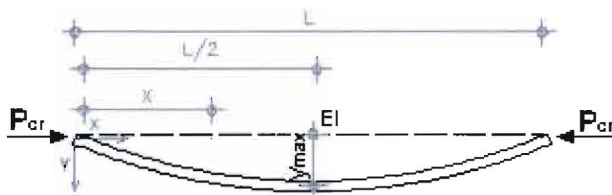
In de praktijk zal de kniklast van een constructie met de Eindige-Elementen-Methode (EEM) worden bepaald, maar een analytische berekening levert goed inzicht in het constructieve gedrag.

Een analytische oplossing wordt gevonden door het opstellen en oplossen van differentiaalvergelijkingen. M.b.v. differentiaalvergelijkingen is het mogelijk om zeer nauwkeurig de kniklast van een willekeurige constructie te bepalen.

Eerst wordt de druk belaste staaf uit een houten windverband los gezien. Het evenwicht van de vervormde staaf wordt beschouwd:

Ten gevolge van een uitbuiging ontstaat er, naast de normaalkracht, ook een buigend moment. Het mechanica model kan worden beschreven m.b.v. vergelijking (1.1):

$$M_{inw} = -EI_1 \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{1.1}$$



Figuur 1.3 Schematisering op drukbelaste staaf

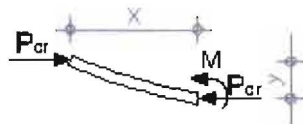
Als de staaf gebogen is (zie figuur 1.3) kan het inwendige buigmoment worden bepaald met behulp van de snedemethode (zie figuur 1.4). Hier zijn de doorbuiging y en het inwendige moment M afgebeeld in de negatieve richting volgens de bij vgl.1.1 gehanteerde tekenafspraken.

Uitwendige moment is gelijk aan:

$$M_{uit} = P_{cr} \cdot y$$

Uit het momentenevenwicht van inwendig en uitwendig momenten volgt:

$$-EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P_{cr} \cdot y$$



Figuur 1.4 Snede van de drukbelaste staaf

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{P_{cr} \cdot y}{EI} = 0 \tag{1.2}$$

Vergelijking 1.2 is een homogene, tweedeorde, lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten waarvan de oplossing m.b.v. vgl.(1.3) is te beschrijven. De basis hiervoor is een doorbuigingslijn volgens de algemene formule:

$$y(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} x\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} x\right) \tag{1.3}$$

De twee integratieconstanten kunnen worden bepaald uit de randvoorwaarden in de uiteinden van de staaf. Omdat  $y=0$  in  $x=0$ , volgt  $C_2 = 0$ . En omdat  $y=0$  in  $x=L$ , geldt:

$$C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} L\right) = 0$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan als  $C_1 = 0$ ; dan is echter  $y=0$ , wat een triviale oplossing is, waarbij de staaf altijd recht moet blijven, ook al wordt de staaf instabiel als gevolg van de belasting. De andere mogelijkheid is dat:

$$\sin\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} L\right) = 0$$

Hieraan wordt voldaan als:

$$\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} L = n\pi$$

De kleinste waarde van  $P_{cr}$  wordt verkregen als  $n=1$ ; de kritische belasting voor de staaf is dan:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Deze belasting wordt ook de kniklast van Euler genoemd. De overeenkomstige knikvorm wordt beschreven door de vergelijking:

$$y = C_1 \sin \frac{\pi x}{L} \tag{1.4}$$

In vgl.(1.4) vertegenwoordigt de constante  $C_1$  de maximale doorbuiging,  $y_{max}$ , die optreedt in het midden van de staaf. Specifieke waarden voor  $C_1$  kunnen niet worden verkregen, omdat de exacte gebogen vorm van de staaf onbekend is na uitknikken. Hier is echter aangenomen dat deze doorbuiging klein is.

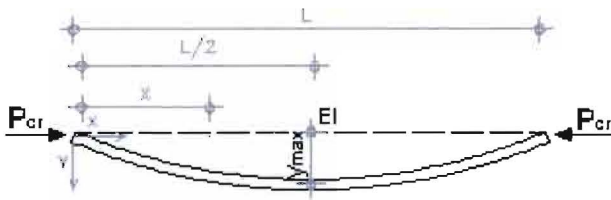
## 1.2. Energie methoden

Hoewel algemeen wordt aanvaard dat energie methoden niet zo nauwkeuriger zijn als de analytische methode en dat ze beperkt zijn tot elastische analyse, worden zij het meest gebruikt voor het leveren van snelle benaderende oplossingen van de problemen waarvoor exacte oplossingen niet bestaan.

De energie methode omvat het gebruik van de totale potentiële energie (TPE) van een constructie.

De energiemethode is de belangrijkste benaderende methode voor de kritieke krachtberekening. De algemene procedure is, dat eerst een geschikte benadering knik doorbuigingsfunctie wordt gekozen. De knikkracht wordt berekend door het bepalen van de overeenkomstige totale potentiële energie en hiervoor de waarde met een minimale potentiële energie te beschouwen. De benadering van de knik doorbuigingsfunctie moet voldoen aan de geometrische randvoorwaarden.

Ter vergelijking met de analytische methode in §1.1 is de op drukbelaste staaf met de potentiële energie methode uitgewerkt die eveneens is gebaseerd op de uitgangspunten volgens §1.1. De Potentiële energie is de energie die een constructie in zich draagt om te kunnen vervormen of bewegen. De inwendige en uitwendige potentiële energie worden berekend om een functie voor  $E_{pot}$  te kunnen schrijven.



Figuur 1.5 Schematisering op drukbelaste staaf

De inwendige potentiële energie wordt veroorzaakt door de vervorming van de constructie en is dus positief. De constructie zal altijd terug willen naar de uitgangssituatie. De grootte van  $E_{pot;i}$  is de oppervlakte onder de moment-kromming (M-k) diagram.

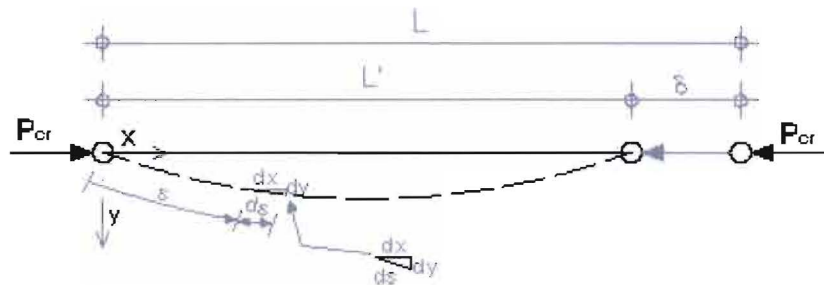
De inwendige potentiële energie is gelijk aan:

$$E_{pot;i} = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1.5)$$

Of:

$$E_{pot;i} = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (1.6)$$

De uitwendige potentiële energie wordt veroorzaakt door de verplaatsing van de krachten in hun richting en is dus negatief (zie figuur 1.6). De kracht haalt de constructie uit zijn (ideale) uitgangssituatie en beperkt de mogelijkheid om terug te keren. De potentiële energie van de constructie neemt hiermee af. De grootte van  $E_{pot;u}$  is de som van alle krachten vermenigvuldigd met hun verplaatsing.



Figuur 1.6 Verkorting van de drukbelaste staaf

Voor  $\delta$  geldt de volgende:

$$\delta = L - L'$$

De staaf lengte is:

$$L = \int_0^L ds$$

En voor  $L'$ :

$$L' = \int_0^L \frac{dx}{ds} ds$$

In figuur 1.6 is een driehoek weergegeven, waarvoor geldt:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\frac{dx}{ds} = \left( 1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Door gebruikt te maken van de reeksonwikkeling.... Kan dit worden herschreven tot:

$$\frac{dx}{ds} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{dy}{ds} \right)^4 - \dots$$

Als alleen de eerste term wordt meegenomen dan geldt:

$$L' = \int_0^L \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right) ds$$

$$\delta = L - L' = \int_0^L \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 ds$$

De uitwendige potentiële energie is gelijk aan:

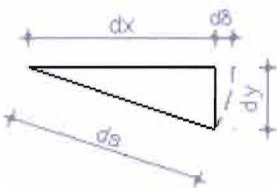
$$E_{pot,u} = -P_{cr} \int_0^L \frac{1}{2} (y')^2 dx$$

In deze laatste stap is gebruikt gemaakt van de benadering  $dx=ds$  en  $P$  is  $P_{cr}$  (knikkraft) geworden.

Hier wordt opgemerkt dat alleen de axiale verkorting is beschouwd, voordat de staaf de knikkraft bereikt.

Tijdens het knikken wordt aangenomen dat de staaf geen verandering in de lengte meer krijgt, aangezien bij de knik de axiale kracht niet meer verandert.

Een alternatieve afleiding van  $\delta$  is:



$$d\delta = ds - dx$$

$$\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L (ds - dx) = \int_0^L \left( \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} - 1 \right) dx$$

$$= \int_0^L \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \dots \right) - 1 \right) dx \cong \int_0^L \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

Bij benadering is  $L' = L$  (aangezien  $L = L' + \delta$  en  $\delta$  heel klein is) dan volgt:

$$\delta = \int_0^L \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

De uitwendige potentiële energie is dan:

$$E_{pot;u} = -P_{cr} \delta$$

$$E_{pot;u} = -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (1.7)$$

$$E_{pot;u} = -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^L (y')^2 dx$$

De inwendige en uitwendige potentiële energie worden bij elkaar opgeteld.

$$E_{pot} = E_{pot;i} + E_{pot;u} = \frac{1}{2} \int_0^L EI (y'')^2 dx - \frac{P_{cr}}{2} \int_0^L (y')^2 dx \quad (1.8)$$

Bij de evenwichtssituatie is de potentiële energie minimaal. Bij het zoeken naar de minimale hoeveelheid energie moet niet gezocht worden naar de nulwaarde van  $E_{pot}$ , maar die van de afgeleide, dus in dit geval wordt de afgeleide van de potentiële energie gelijk aan nul gesteld. Voor evenwicht moet de eerste variatie van de totale potentiële energie gelijk aan nul worden gesteld:

$$\delta E_{pot} = 0$$

$\delta E_{pot}$  in deze vergelijking heet de eerste variatie van  $E_{pot}$ .

De laatste uitdrukking is de wiskundige formulering van de stationaire totale potentiële energie. Een stationaire waarde kan overeenkomen met een minimale of maximale waarde van de totale potentiële energie. Een minimum waarde geeft aan dat het evenwicht stabiel is, een maximale waarde geeft aan dat het evenwicht instabiel is.

$$\delta E_{pot} = \frac{dE_{pot}}{dk_{kr}} \delta k_{kr} = 0$$

$k_{kr}$  - is de kromming.

Aangezien  $\delta k_{kr}$  nooit nul kan zijn, kan er ook gesteld worden dat:

$$\frac{dE_{pot}}{dk_{kr}} = 0$$

De grootte van de potentiële energie is een maat voor de nauwkeurigheid van de oplossing: Hoe exacter de oplossing, hoe lager de  $E_{pot}$ .

### 1.3. Numerieke

In het numerieke onderzoek wordt van het programma ANSYS gebruik gemaakt. ANSYS is een op Eindige Elementen Methode gebaseerd softwarepakket.

De Eindige Elementen methode is in het algemeen een benaderingsoplossing, die in bepaalde gevallen (namelijk in die gevallen dat de constructie alleen belast wordt door knoopbelastingen bij staafconstructies) gelijk is aan de exacte oplossing.

De Eindige Elementen methode kan gedefinieerd worden als een systematische toepassing van de stuksgewijze Raleigh-Ritz methode. De systematiek in de toepassing is dat de stukjes waarover probeerfuncties gekozen worden de elementen zijn, en dat als vrijheidsgraden de verplaatsingen(en/of rotaties) van de knopen van de elementen genomen worden.

De keuze van het type element en de verdeling van het elementennet hebben een grote invloed op de resultaten verkregen met een Eindige Elementen programma zoals ANSYS. De nauwkeurigheid waarmee het programma rekent wordt in grote mate hierdoor bepaald.

Om de nauwkeurigheid, convergentieoplossingen, en de toepasbaarheid van de genoemde methoden aan te tonen, worden verschillende staven met variabele diktes en lengtes geanalyseerd. De numeriek resultaten worden in tabelvorm weergegeven.

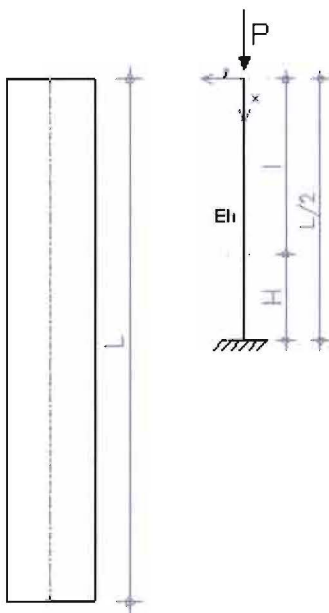
De numerieke procedure wordt gepresenteerd voor een groot aantal gevallen in deze thesis.

## 2 Op drukbelaste staaf zonder keep

Hier wordt de druk belaste staaf uit een houten windverband behandeld. Het knikken van een staaf leidt er vaak toe dat een windverband of een constructie plotseling bezwijkt. Daarom is het belangrijk bij het dimensioneren van staven om de axiale belasting te bepalen die de staven kunnen dragen zonder dat knik optreedt. De maximale axiale belasting die een staaf kan dragen wanneer deze op het punt staat te gaan knikken, wordt de **kritische last**, ( $P_{cr}$ ), genoemd.

### 2.1. Analytische methode met differentiaalvergelijkingen

Eerst wordt de eulerse knikkracht voor de staaf zonder keep bepaald. (zie figuur 2.1).



Figuur 2.1 Schematisatie van drukbelaste staaf

Bij de figuur gelden:

L - de hele lengte van de staaf

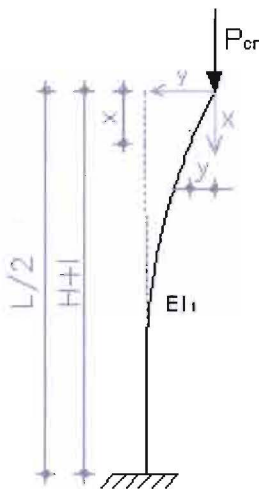
L/2- de halve lengte van de staaf

H - halve lengte van het deel dat in de volgende hoofdstuk moet uitgekept worden

l - lengte buiten de keep ( $L/2 - H$ )

2.1.1. Theoretische uitwerking van op drukbelaste staaf zonder keep

Hierin is de staaf op de halve lengte vanwege de symmetrie overwegingen volledig stijf ingeklemd. De eenzijdige ingeklemd staaf met een stijfheid ( $EI_1$ ) wordt belast met een kracht  $P$ . Voor het schema: Zie figuur 2.2.



Figuur 2.2 Schematisatie halve staaf

Langs analytische weg zijn inwendige en uitwendige momenten berekend als functie van de uitbuiging. De uitbuiging is zodanig bepaald dat in elke punt van de staaf het uitwendige moment gelijk is aan het inwendige moment.

In een snede van de staaf bedraagt het inwendige moment, veroorzaakt door het lineair verloop van de buigspanningen over de doorsnede.

$$M_{inw} = -EI_1 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Het moment in een snede van de staaf, veroorzaakt door de uitwendige belasting en een uitbuiging  $y(x)$  bedraagt:

$$M_{uitw} = P_{cr} \cdot y(x)$$

Uit figuur 2.2 blijkt:

$$M_{uitw} = P_{cr} \cdot y$$

In het geval van evenwicht geldt:

$$-EI_1 \frac{d^2 y}{dx^2} = P_{cr} \cdot y$$

De kromming kan worden geschreven als  $d^2 y / dx^2 = y''$  dus:

$$y'' = -\frac{P_{cr} \cdot y}{EI_1}$$

Met  $\left(\frac{P_{cr}}{EI_1} = a^2\right)$  volgt:



$$y'' = -a^2 \cdot y \quad (2.1)$$

Vergelijking (2.1) is een homogene, lineaire tweede orde differentiaalvergelijking waarvan de algemene oplossing is:

$$y(x) = C_1 \cdot \sin(ax) + C_2 \cdot \cos(ax) \quad (2.2)$$

Door vgl.(2.2) tweemaal te differentiëren en vervolgens in vgl.(2.1) te substitueren wordt aangetoond dat vgl.(2.2) een algemene oplossing is.

*Controle :*

$$\frac{dy}{dx} = aC_1 \cos ax - aC_2 \sin ax$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 C_1 \sin ax - a^2 C_2 \cos ax$$

$$\text{gelijkstellen: } \frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 y$$

$$-a^2 C_1 \sin ax - a^2 C_2 \cos ax + a^2 (C_1 \sin ax + C_2 \cos ax) = 0$$

In vgl.(2.2)dienen de constanten C1 en C2 nog te worden opgelost.

Als de randvoorwaarden geldt:

$$\text{Voor } x = 0 \Rightarrow y = 0$$

Vergelijking 2.2 kan worden geschreven als:

$$0 = C_1 \cdot \sin(0) + C_2 \cdot \cos(0)$$

$$0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \Rightarrow C_2 = 0$$

Waarmee de vergelijking voor de vervorming y(x) bepaald kan worden:

$$y(x) = C_1 \cdot \sin(ax)$$

Voor X=L/2 kan geschreven worden als (l+H) zie figuur 2.2.

$$y(L/2) = C_1 \cdot \sin a(l+H)$$

De hoekverdraaiing bij de inklemming is gelijk aan nul.

$$y'(L/2) = C_1 \cdot a \cos a(l+H) = 0$$

Voor een niet triviale oplossing ( $y \neq 0$  en  $C_1 \neq 0$ ) geldt de volgende:

$$\cos a(l+H) = 0 \text{ voor } a(l+H) = n \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(l+H)} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$a^2 = n^2 \frac{\pi^2}{4(l+H)^2}$$

- Als de kracht (P) de eulerse knikkracht (PE) bereikt of  $P_{cr} = PE$ , zal dan de staaf in 1 of meer sinusgolven loodrecht op het staafas uitbuigen. De kleinste kritische kracht wordt verkregen als  $n = 1$ .

$$\text{En } \frac{P_E}{EI_1} = a^2$$

$$\frac{P_E}{EI_1} = \frac{\pi^2}{4(l+H)^2}$$

De Eulerse knikkracht voor een staaf zonder keep is gelijk aan:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI_1}{(4l^2 + 8lH + 4H^2)} \quad (2.3)$$

Deze paragraaf behandelt de staaf zonder keep. Dit betekent in dit geval  $H=0$  waardoor vgl.(2.3) over gaat

in  $P_E = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$  formule vergelijken in §1.1.1

## 2.2. Energie methode

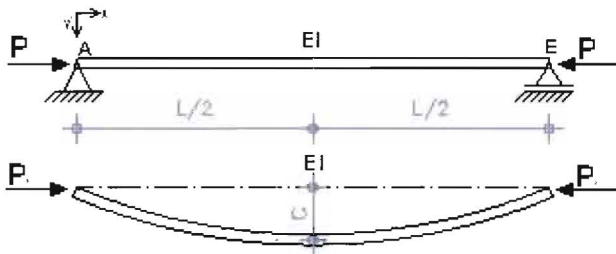
### 2.2.1. Knikkracht voor de staaf zonder keep

Er wordt voor de doorbuigingsvorm een sinusvorm  $y(x) = C \sin(\pi x / L)$  aangenomen.

$$y(x) = C \sin(\pi x / L)$$

Waarin:

C is een coëfficiënt, afhankelijk van de randvoorwaarden.



Figuur 2.3 Op drukbelaste staaf

Voor de totale potentiële energie ( $E_{pot}$ ) geldt:

$$E_{pot} = E_{pot;i} + E_{pot;u}$$

$$E_{pot} = \left[ \int_0^L \frac{1}{2} EI (y'')^2 dx - \int_0^L \frac{1}{2} P_{cr} (y')^2 dx \right]$$

De inwendige potentiële energie is gelijk aan:

$$E_{pot;i} = \int_0^L \frac{1}{2} EI (y'')^2 dx$$

$$y'(x) = C \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$y''(x) = -C \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$E_{pot;i} = \frac{EI}{2} \int_0^L (y'')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ -C \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]^2 dx$$

$$E_{pot;i} = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \frac{C^2 \pi^4}{L^4} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx = \frac{EIC^2 \pi^4}{4L^3} \quad (2.4)$$

De uitwendige potentiële energie is gelijk aan:

$$E_{pot;u} = -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^L (y')^2 dx = -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^L \left[ C \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]^2 dx$$

$$E_{pot;u} = -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^L \left[ C^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx = -\frac{P_{cr} \pi^2 C^2}{4L} \quad (2.5)$$

De inwendige en uitwendige energie wordt bij elkaar op geteld:

$$E_{pot} = \left\{ \frac{EI\pi^4}{4L^3} - \frac{P_{cr}\pi^2}{4L} \right\} C^2 \quad (2.6)$$

Voor evenwicht geldt:

$$\delta E_{pot} = \frac{dE_{pot}}{dC} \delta C = 0$$

Voor niet triviale oplossing geldt de volgende:

$$\frac{dE_{pot}}{dC} = 0$$

$$\frac{EI\pi^4}{4L^3} - \frac{P_{cr}\pi^2}{4L} = 0$$

$$P_{cr} = \frac{EI\pi^4}{4L^3} \cdot \frac{4L}{\pi^2} = \frac{EI\pi^2}{L^2} \quad (2.7)$$

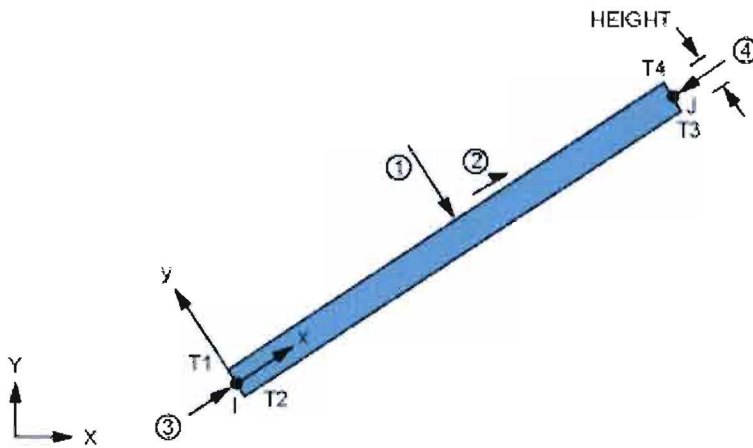
### 2.3. Numeriek

De verkregen resultaten zijn vergeleken met de Eindige-Elementen-Methode(EEM).

De betreffende staaf is gemodelleerd met BEAM 3 in het eindige elementen program ANSYS. Daarvoor is de invoerfile uit bijlage 2 gebruikt. BEAM 3 is een eenassige element met spanning, druk, en buiging mogelijkheden. Het element heeft drie graden van vrijheid bij elke knoop: verplaatsingen in de knoop X en y richtingen en rotatie om de Z as.

BEAM 3 element kan alleen worden gebruikt in 2D. Het element wordt gedefinieerd door twee knooppunten, het oppervlakte van de doorsnede, het traagheidsmoment, de hoogte en de materiaaleigenschappen.

Onderste figuur toont de geometrie, knoopplocaties en de coördinaten voor dit element.



Tabel 2.1 geeft enige informatie over de juistheid en de convergentie van de huidige methoden met die verkregen door EEM analyse.

Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	l [mm]	b [mm]	h [mm]	Hi [mm]	EH [Nmm <sup>2</sup> ]	Pcr [kN]		
								(Analyt)	(ANSYS)	(Energie)
3500	1800	3936	1928	80	160	40	273066666667	174	174	174
4500	2400	5100	2500	100	200	50	666666666667	253	253	253
5000	2700	5682	2781	120	240	60	1382400000000	423	423	423
6000	3300	6848	3354	140	280	70	2561066666667	539	539	539
5000	7000	8600	4260	100	200	50	666666666667	89	89	89
6500	11000	12700	6230	240	480	120	22118400000000	1353	1353	1353
5500	9000	10500	5150	200	400	100	10666666666667	955	955	955

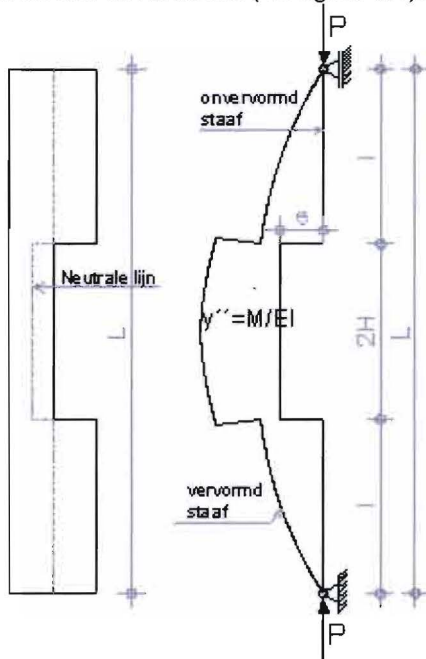
Tabel 2.1 knikkracht voor staaf zonder keep

## 2.4. Conclusie

Uit tabel 2.1 blijkt dat analytisch oplossing, de energie oplossing en de met de ANSYS verkregen resultaten exact overeen komen.

### 3 Op drukbelaste staaf met keep

Hier wordt de op druk belaste staaf met een keep beschouwd: Wat is de rol van de keep wanneer de staaf op druk wordt belast? Doordat de neutrale lijn in de keep niet samenvalt met de neutrale lijn buiten de keep, wordt er een bepaalde nulxcentriciteit gecreëerd waardoor de staaf behalve op druk ook op een buigend moment wordt belast (zie figuur 3.1).



Figuur 3.1 Schematisatie opdrukbelaste staaf met keep in het midden

Bij de figuur gelden:

- L - de hele lengte van de staaf
- L/2- lengte half staaf
- H - halve lengte van het deel dat is uitgekeept
- l - lengte buiten de keep ( $L/2 - H$ )
- e - nulxcentriciteit door de uitkeping

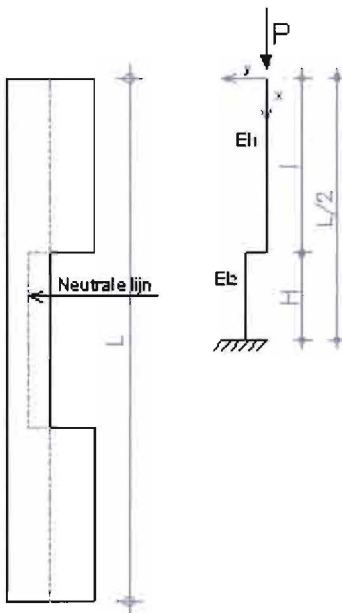
### 3.1. Analytische methode

In deze paragraaf wordt de invloed van de keep op de knikkracht geanalyseerd om te kijken hoeveel de knikkracht wordt gereduceerd door de keep.

De invloed van de keep wordt gepresenteerd met de factor  $\eta$ .  $\eta = \frac{P_{cr}}{P_E}$  wordt gedefinieerd waarbij  $P_E$  de Eulerse knikkracht van de niet gekepte staaf (zie vgl.(2.7)) en  $P_{cr}$  de knikkracht van de gekepte staaf.

#### 3.1.1. Theoretische uitwerking van op drukbelaste staaf met keep

De op druk belaste staaf met keep kan worden geschematiseerd zoals in figuur 3.2 is weergegeven. Hierin is de staaf op de halve lengte vanwege de symmetrie overwegingen volledig stijf ingeklemd. De eenzijdig ingeklemde staaf met wisselende stijfheid ( $EI_1$ ) en ( $EI_2$ ) wordt belast door een kracht  $P$ .

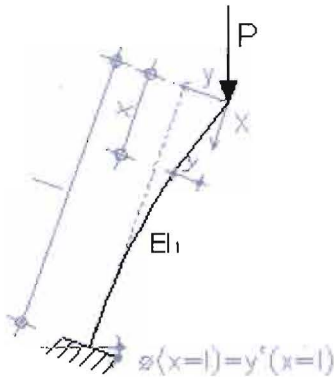


Figuur 3.2 Schematisatie halve staaf

#### 3.1.2. Hoekverdraaiing staafdeel I

Het bovenste staafdeel boven de keep wordt geschematiseerd als een staaf aan het ene uiteinde ingeklemd aan de het deel met keep terwijl het andere uiteinde vrij kan verplaatsen en roteren.

Langs analytische weg worden inwendige en uitwendige momenten berekend als functie van de uitbuiging. De uitbuiging is zodanig bepaald dat in elke punt van de staaf het uitwendige moment gelijk is aan het inwendige moment.



Figuur 3.3 Schematisatie bovenste staafdeel boven de keep

$$M_{inw} = -EI_1 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$M_{uitw} = P \cdot y(x)$$

Uit figuur 3.3 blijkt:

$$M_{uitw} = P \cdot y$$

In het geval van evenwicht geldt:

$$-EI_1 \frac{d^2 y}{dx^2} = P \cdot y$$

Voor de kromming volgt:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P \cdot y}{EI_1}$$

Met  $\left(\frac{P}{EI_1} = a^2\right)$  volgt:

$$y'' = -a^2 \cdot y \tag{3.1}$$

Vergelijking (3.1) is een homogene, lineaire tweede orde differentiaalvergelijking waarvan de algemene oplossing is:

$$y(x) = C_1 \cdot \sin(ax) + C_2 \cdot \cos(ax) \tag{3.2}$$

Uit de randvoorwaarden worden  $C_1$  en  $C_2$  bepaald.

Voor:

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

Vergelijking 3.2 kan worden geschreven als:

$$0 = C_1 \cdot \sin(0) + C_2 \cdot \cos(0)$$

$$0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \rightarrow C_2 = 0$$

Waarmee de vergelijking voor de vervorming  $y(x)$  bepaald kan worden:

$$y(x) = C_1 \cdot \sin(ax) \tag{3.3}$$



Voor  $x = l$  geldt de volgende:

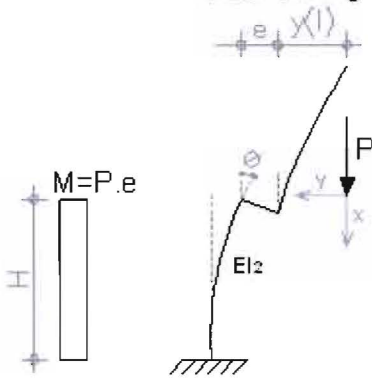
$$y(l) = C_1 \cdot \sin(al)$$

De hoekverdraaiing bedraagt dan:

$$\phi(l) = y'(l) = C_1 \cdot a \cdot \cos(al) \quad (3.4)$$

### 3.1.3. Hoekverdraaiing staafdeel H

Het onderste staafdeel wordt geschematiseerd als een aan het einde volledig ingeklemde staaf.



Figuur 3.4 Schematisatie helft van de keep

Voor dit deel van de staaf is het hoekverdraaiing gelijk aan:

$$\phi(H) = \frac{1}{EI_2} [P(e + y(l))] H$$

$$\phi(H) = \frac{1}{EI_2} [P(e + C_1 \sin(al))] H \quad (3.5)$$

### 3.1.4. Gelijkstellen van de hoekverdraaiingen

Door de twee hoekverdraaiingen aan elkaar gelijk te stellen, wordt eerst de onbekend  $C_1$  gevonden, en vervolgens de vervorming van de staaf. Gelijkstellen van vgl.(3.4) en vgl.(3.5) levert op:

$$C_1 \cdot a \cdot \cos(al) = \frac{1}{EI_2} [P(e + C_1 \sin(al))] H$$

Nu wordt de verhouding buigstijfheid van het staafdeel met lengte H en staafdeel met lengte l,  $\beta$  genoemd.

$$\beta = \frac{EI_2}{EI_1} \text{ [dimensieloos]}$$

$$EI_2 = \beta \cdot EI_1$$

Hierin:

$\beta$  is de verzwakkingsgraad van de doorsnede.

$EI_2$  – is de buigstijfheid van het staafdeel H

$EI_1$  – is de buigstijfheid van het staafdeel l

Nu kan  $C_1$  gevonden worden:

$$C_1 = \frac{e}{\left[ \frac{\beta EI_1}{PH} a \cos(al) - \sin(al) \right]} = \frac{e}{\left[ \frac{\beta}{aH} \cos(al) - \sin(al) \right]}$$

Waarmee de vergelijking voor de vervorming  $y(x)$  bepaald kan worden:

$$y(x) = \frac{e}{\left[ \frac{\beta}{aH} \cos(al) - \sin(al) \right]} \cdot \sin(ax) \quad (3.6)$$

Als de noemer van vgl.(3.6) gelijk aan nul is, wordt de vervorming oneindig groot en dan treedt er knik op, waardoor geldt:

$$\left[ \frac{\beta}{aH} \cos(al) - \sin(al) \right] = 0$$

$$\frac{\beta}{aH} = \tan(al) \Rightarrow al \tan(al) = \frac{\beta l}{H}$$

Als  $\frac{\beta l}{H} = \mu$  dan:

$$al \tan(al) = \mu \quad (3.7)$$

Uit vgl.3.7 volgt:

$$\tan(al) = \frac{\mu}{al}$$

Vergelijking (3.7) is een transcendente vergelijking die analytisch niet is op te lossen, maar wel grafisch door iteratie.

Daartoe dienen de volgende twee functies te worden getekend:

$$f(al) = al \tan al$$

$$f(al) = \mu$$

Met de snijpunten van beide functies zal de kleinste waarde van  $(al)$  ongelijk aan nul tot de kleinste knikkraft van de staaf leiden.

Uit vgl.(3.7) volgt:

$$a = \frac{\mu}{l \tan(al)}$$

$$P_{cr} = EI_1 a^2$$

De kritische kracht voor een staaf met keep is gelijk aan:

$$P_{cr} = EI_1 \left( \frac{\mu}{l \tan(al)} \right)^2 \quad (3.8)$$

Controle: Voor  $\beta=1$ ,  $EI_1 = EI_2$  volgt:

$$\mu = \frac{l}{H} \text{ met } l+H = L/2 \text{ volgt:}$$

$$P_{cr} = EI_1 \left( \frac{\mu}{l \tan(\alpha l)} \right)^2$$

**Controle:**

Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	l [mm]	b [mm]	h [mm]	Hi [mm]	$\mu$ [-]	EI1 [Nmm <sup>2</sup> ]	$\alpha l$ [-]	PE [kN]	Pcr [kN] (Analyt)
3500	1800	3936	1928	80	160	40	48.2	273066666667	1.54	174	174
4500	2400	5100	2500	100	200	50	50.0	666666666667	1.54	253	253
5000	2700	5682	2781	120	240	60	46.4	1382400000000	1.54	423	423
6000	3300	6848	3354	140	280	70	47.9	2561066666667	1.54	539	539
5000	7000	8600	4250	100	200	50	85.0	666666666667	1.55	89	89
6500	11000	12700	6230	240	480	120	51.9	22118400000000	1.54	1353	1354
5500	9000	10500	5150	200	400	100	51.5	1066666666667	1.54	955	955

3.1.5. Vergelijken van de knikkraft voor de staaf met keep aan staaf zonder keep

Hier wordt de invloed van de keep op de knikkraft ( $P_{cr}$ ) van de opdrukbelaste staaf geanalyseerd om te kijken hoeveel de knikkraft wordt gereduceerd door de keep.

De Eulerse knikkraft wordt gelijk aan de knikkraft voor de staaf met keep ( $P_{cr}$ ) gesteld om de reductie factor ( $\eta$ ) voor de staaf met keep te bepalen. De factor ( $\eta$ ) die afhankelijk van de inkeping is, wordt vermenigvuldigd met de Eulerse knikkraft om de kritische kragt voor de staaf met keep te bepalen.

Uit §2.1.1 vgl.(2.3) volgt de Eulerse knikkraft voor staaf zonder keep:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI_1}{4l^2 + 8l.H + 4H^2}$$

Er kan gesteld worden:

$$\frac{\pi^2 EI_1}{4l^2 + 8l.H + 4H^2} = \frac{\pi^2 EI_1}{4l^2 \left( 1 + 2 \frac{H}{l} + \frac{H^2}{l^2} \right)}$$

Zoals gesteld:

$$\mu = \frac{\beta l}{H} \Rightarrow \frac{H}{l} = \frac{\beta}{\mu} \text{ waarmee:}$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI_1}{4l^2 \left( 1 + 2 \frac{\beta}{\mu} + \frac{\beta^2}{\mu^2} \right)} \tag{3.9}$$

Controle: Staaf zonder keep

$$\beta = \frac{EI_2}{EI_1} = 1$$

$$\mu = \frac{\beta l}{H} = \infty$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(l_k)^2}$$

Nu wordt de invloed van de keep meegenomen.

De Eulerse knikkraft wordt gelijk aan de knikkraft voor de staaf met keep ( $P_{cr}$ ) gesteld om de reductie factor ( $\eta$ ) door de keep te bepalen.

Per definitie geldt dat:

$$P_{cr} = \eta P_E \Rightarrow \eta = \frac{P_{cr}}{P_E} = \frac{EI_1 \cdot \left[ \frac{\mu}{l \tan(al)} \right]^2}{\pi^2 EI_1 \cdot 4l^2 \left( 1 + 2 \frac{\beta}{\mu} + \frac{\beta^2}{\mu^2} \right)}$$

$$\eta = \left[ \frac{\mu}{l \tan(al)} \right]^2 \cdot \frac{4l^2 \left( 1 + 2 \frac{\beta}{\mu} + \frac{\beta^2}{\mu^2} \right)}{\pi^2}$$

$$\eta = \left( \frac{\mu^2}{l^2 \left( \frac{\mu}{al} \right)^2} \right) \cdot \frac{4(l+H)^2}{\pi^2} = \frac{(al)^2}{l^2} \cdot \frac{4(l+H)^2}{\pi^2}$$

$$\eta = \frac{(al)^2}{l^2} \cdot \frac{4l^2 \left( 1 + 2 \frac{\beta}{\mu} + \frac{\beta^2}{\mu^2} \right)}{\pi^2}$$

$$\eta = \frac{4(al)^2 \left( 1 + 2 \frac{\beta}{\mu} + \frac{\beta^2}{\mu^2} \right)}{\pi^2} \quad (3.10)$$

De factor  $\eta$  wordt met de eulerse knikkraft vermenigvuldigd om de kritische kracht te verkrijgen.

In tabel 3.1 is de  $\eta$  waarde voor verschillende waarde voor  $\mu$   $\mu = \frac{l}{H} \frac{EI_2}{EI_1}$  uitgewerkt.

$\beta = 0.125$				
$\mu = \beta \cdot l/H$	=	$(\alpha l) \tan(\alpha l)$	$(\alpha l)$	$\eta$
[-]		[-]	[-]	[-]
1		1	0.86	0.300
2		2	1.08	0.470
4		4	1.26	0.648
6		6	1.35	0.738
8		8	1.40	0.792
10		10	1.43	0.828
12		12	1.45	0.852
14		14	1.47	0.871
16		16	1.48	0.887
18		18	1.49	0.897
20		20	1.50	0.907
30		30	1.52	0.936
40		40	1.53	0.952
50		50	1.54	0.961
60		60	1.55	0.967
70		70	1.55	0.972
80		80	1.55	0.975
90		90	1.55	0.978
100		100	1.56	0.980
120		120	1.56	0.984
140		139	1.56	0.986

Tabel 3.1 : uitwerking  $n$  voor  $\beta = 0,125$

Uit de tabel 3.1 blijkt dat als de inkeping t.o.v. de liggerlengte groot is, de keep veel invloed heeft op de kniklengte. Als de inkeping t.o.v. de liggerlengte klein is, heeft de keep weinig invloed op de kniklengte. Zoals uit de tabel 3.1 te zien dat bij kleine inkeping ( $\mu = 140$ ) de reductiefactor ( $\eta = 0,986$ ) is. Dit wel zeggen dat ongeveer 1% van de Eulerse knikkraft door de keep gereduceerd wordt.

$$EI_1 = E \left( \frac{1}{12} \right) b \cdot h^3$$

$$EI_2 = E \left( \frac{1}{12} \right) b \cdot (0.5h)^3$$

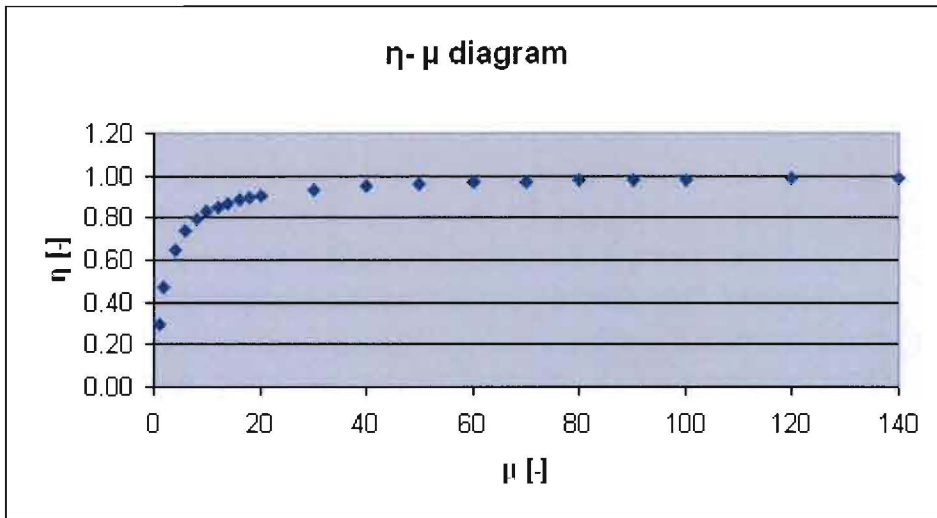
Vanwege de halfhoutse uitkeping geldt dat:

$$\frac{EI_2}{EI_1} = (0.5)^3$$

$$\frac{EI_2}{EI_1} = \beta = 0,125$$

Deze waarde is in tabel 3.1 aangehouden

De verhouding  $\frac{l}{H}$  is in de praktijk  $\frac{l}{H} \sim 60$ , waardoor  $\mu \sim 60 \cdot 0,125 = 7,5$  m.b.v. formule (3.10) volgt dat in de praktijk een reductiefactor  $\eta \sim 0,8$  een goede benadering is.

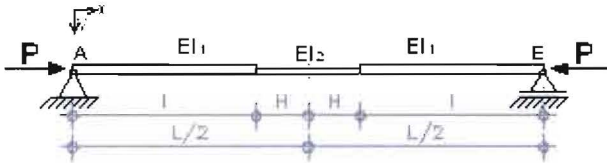


Figuur 3.5 verband tussen η en μ

### 3.2. Energie methode:

#### 3.2.1. Knikkraft voor staaf met Keep

De op druk belaste staaf met keep kan worden geschematiseerd als in figuur 3.6 is weergegeven.



Figuur 3.6 Op drukbelaste staaf met keep

De inwendige potentiële energie is gelijk aan:

$$E_{pot,i} = \int_L \frac{1}{2} EI (y'')^2 dx$$

De uitwendige potentiële energie is gelijk aan:

$$E_{pot,u} = - \int_L \frac{1}{2} P (y')^2 dx$$

De inwendige en uitwendige potentiële energie wordt bij elkaar opgeteld:

$$E_{pot} = \left[ \int_L \frac{1}{2} EI (y'')^2 dx - \int_L \frac{1}{2} P (y')^2 dx \right]$$

Er wordt de doorbuigingsvorm een sinusvorm aangenomen.

$$y(x) = C \sin(\pi x / L) \tag{3.11}$$

$$y'(x) = C \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$y''(x) = -C \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$E_{pot,i} = \frac{EI}{2} \int_L (y'')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_L \left[ -C \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]^2 dx$$

$$E_{pot,i} = \frac{EI}{2} \cdot \frac{C^2 \pi^4}{L^4} \int_L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{EI}{2} \cdot \frac{C^2 \pi^4}{L^4} \int_L \left[ \frac{1}{2} (1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)) \right] dx$$

$$E_{pot,i} = \frac{EI}{4} \cdot \frac{C^2 \pi^4}{L^4} \int_L \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right] dx$$

Hierin is de inwendige energie van de staaf op de halve lengte, vanwege de symmetrie overwegingen bepaald en met twee vermenigvuldigd.

Vanwege de discontinuïteit van het traagheidsmoment is de inwendige potentiële energie beschreven volgens:

$$E_{pot,i} = \frac{EC^2\pi^4}{4L^4} \left[ \int_0^l I_1 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) dx + \int_l^{L/2} I_2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) dx \right] \cdot 2$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$$

Na integratie over de staaf lengte volgt als:

$$E_{pot,i} = \frac{EC^2\pi^4}{4L^4} \left[ I_1 \left( x - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)_0^l + I_2 \left( x - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)_l^{L/2} \right] \cdot 2$$

$$E_{pot,i} = \frac{EC^2\pi^4}{2L^4} \left[ I_1 \left( l - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right) + I_2 \left\{ \left( \frac{L}{2} - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi L/2}{L}\right) \right) - \left( l - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right) \right\} \right]$$

$$E_{pot,i} = \frac{EC^2\pi^4}{2L^4} \left[ I_1 \left( l - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right) + I_2 \left\{ \left( \frac{L}{2} - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi L/2}{L}\right) \right) + \left( -l + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right) \right\} \right]$$

$$E_{pot,i} = \frac{EC^2\pi^4}{2L^4} \left[ I_1 \left( l - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right) + I_2 \left\{ \left( \frac{L}{2} - 0 \right) + \left( -l + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right) \right\} \right]$$

$$E_{pot,i} = \frac{EI_1 C^2 \pi^4}{2L^4} \left[ l + \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \left( \frac{L}{2} - l \right) + \frac{L}{2\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right]$$

$$E_{pot,i} = \frac{EI_1 C^2 \pi^4}{2L^4} \left[ l + \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot (H) + \frac{L}{2\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right]$$

$$E_{pot,i} = \frac{EI_1 C^2 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \left( \frac{H}{L} \right) + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right] \quad (3.12)$$

#### Controle:

Als de staaf zonder keep is ( $I_1 = I_2$  m.a.w.  $\beta=1$ ) dan:

$$E_{pot,i} = \frac{EI_1 C^2 \pi^4}{2L^3} \left[ \left( \frac{l}{L} \right) + \left( \frac{H}{L} \right) + 0 \right] = \frac{EI_1 C^2 \pi^4}{2L^3} \left[ \left( \frac{L/2}{L} \right) \right]$$

$$E_{pot,i} = \frac{EI_1 C^2 \pi^4}{4L^3}$$

Voor de uitwendige potentiële energie geldt de volgende:

$$E_{pot,u} = -\frac{P}{2} \int_0^L (y')^2 dx = \frac{P}{2} \int_0^L \left[ C \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]^2 dx = \frac{P}{2} \int_0^L \left[ C^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx = -\frac{P\pi^2 C^2}{4L}$$

Of:



$$E_{pot,u} = -\frac{P}{2} \int_L (y')^2 dx = \frac{P}{2} \int_L \left[ C \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]^2 dx = \frac{PC^2 \pi^2}{2L^2} \int_L \left[ \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx$$

$$E_{pot,u} = -\frac{PC^2 \pi^2}{2L^2} \int_L \left[ \frac{1}{2} (1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)) \right] dx = \frac{PC^2 \pi^2}{4L^2} \int_L (1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)) dx$$

Nu wordt de uitwendige potentiële energie voor de staaf met de keep bepaald. Integratie over de staaf lengte volgt als:

$$E_{pot,u} = -\frac{PC^2 \pi^2}{4L^2} \left[ \int_0^l (1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)) dx + \int_l^{L/2} (1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)) dx \right] \cdot 2$$

$$E_{pot,u} = -\frac{PC^2 \pi^2}{2L^2} \left[ \left( x + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)_0^l + \left( x + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)_l^{L/2} \right]$$

$$E_{pot,u} = -\frac{PC^2 \pi^2}{2L^2} \left[ \left( l + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right) + \left\{ \left( \frac{L}{2} + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi L/2}{L}\right) \right) - \left( l + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right) \right\} \right]$$

$$E_{pot,u} = -\frac{PC^2 \pi^2}{2L^2} \left[ \left( l + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right) + \left\{ \left( \frac{L}{2} + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi L/2}{L}\right) \right) + \left( -l - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right) \right\} \right]$$

$$E_{pot,u} = -\frac{PC^2 \pi^2}{2L^2} \left[ l + \left\{ \frac{L}{2} - l \right\} \right] = \frac{PC^2 \pi^2}{2L^2} \left[ \left( \frac{L}{2} \right) \right] = -\frac{PC^2 \pi^2}{4L} \quad (3.13)$$

Uit vgl.3.13 =vgl.(2.5) blijkt dat de uitkeping geen invloed heeft op de uitwendige potentiële energie. Voor de totale potentiële energie geldt de volgende:

$$E_{pot} = \left\{ \frac{EI_1 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \left( \frac{H}{L} \right) + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right] - \frac{P\pi^2}{4L} \right\} C^2 \quad (3.14)$$

Voor evenwicht geldt:

$$\delta E_{pot} = \frac{dE_{pot}}{dC} \delta C = 0$$

Voor een niet triviale oplossing geldt de volgende:

$$\frac{EI_1 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \left( \frac{H}{L} \right) + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right] - \frac{P\pi^2}{4L} = 0$$

$$\frac{P\pi^2}{4L} = \frac{EI_1 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \left( \frac{H}{L} \right) + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right]$$

De kritische knikkraft voor de staaf met keep is gelijk aan:

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI_1}{L^2} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \left( \frac{H}{L} \right) + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right] \quad (3.15)$$

Voor  $\frac{I_2}{I_1} = 0.125$  de halfhoutse overkeping volgt:

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI_1}{L^2} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{0.125 \cdot H}{L} \right) - \frac{0.875}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right]$$

**Controle:**

Als  $I_1 = I_2$  dan volgens vgl.(3.15) kan geschreven worden:

*Controle :*

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI_1}{L^2} \left[ \frac{L/2 - H}{L} + \frac{H}{L} - 0 \right]$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{L^2}$$

Dus knikkraft voor de staaf zonder keep is gelijk aan  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{L^2}$  zoals in paragraaf 2.2.1 vlg.(2.7) is bepaald.

### 3.3. Numeriek

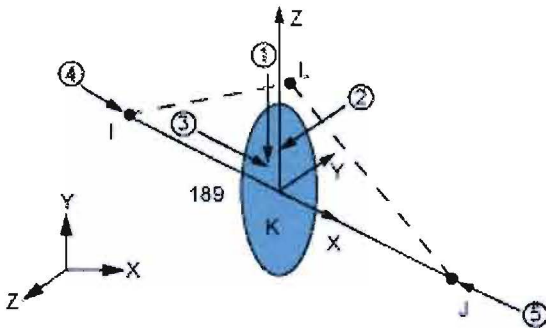
De verkregen resultaten zijn vergeleken met resultaten van de Eindige-Elementen-Methode(EEM).

De betreffende staaf is gemodelleerd met BEAM 189 in eindige elementen program ANSYS. Daarvoor is de invoerfile uit bijlage 3 gebruikt.

BEAM 189 is een element geschikt voor het analyseren van slanke tot matige dikke balk constructies. Dit element is een kwadratische (3knooppunt) balk element in 3D. Het element heeft zes of zeven graden van vrijheid in elke knooppunt, met het aantal graden van vrijheid, afhankelijk van de waarde van de KEYOPT(1). Als KEYOPT(1) = 0 (standaardinstelling), zes graden van vrijheid optreden bij elk knooppunt. Deze omvatten de verplaatsing in de x,y en z richtingen en de rotatie om de x,y en z richtingen. Dit element is zeer geschikt voor grote rotatie, en/of grote rek in niet lineaire toepassingen.

De geometrie, de knoop locaties, en de coördinatie van het systeem voor dit element zijn weergegeven in onderste figuur.

BEAM 189 wordt gedefinieerd door knooppunten I,J en K in het globale coördinaat systeem (zie onderste figuur).



Met behulp van de verschillende parameters zoals vermeld in tabel 3.2 kan de knikkraft  $P_{cr}$  volgens ANSYS worden bepaald. Door deze te vergelijken met de eulerse knikkraft PE kan de waarde  $P_{cr} / PE$  worden gevonden.

Hierin is aangehouden dat  $\beta = 0,125$  (halfhoutse overkeping). De  $\eta$  waarde is met vgl.(3.10) voor analytische oplossing bepaald. De gebruikte elasticiteitsmodulus is  $10.000N/mm^2$ .

Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	l [mm]	b [mm]	h [mm]	Hi [mm]	$\mu$ [-]	EI [Nmm <sup>2</sup> ]	aI [-]	PE [kN]	Pcr [kN]		$\eta$ [-]	
											(Analyt)	(ANSYS)	(Pcr/PE)	(Analyt)
3500	1800	3936	1928	80	160	40	6.02458	273066666667	1.4	174	134	133	0.77	0.74
4500	2400	5100	2500	100	200	50	6.25000	666666666667	1.36	253	196	195	0.77	0.75
5000	2700	5682	2781	120	240	60	5.79420	1382400000000	1.34	423	322	320	0.76	0.73
6000	3300	6848	3354	140	280	70	5.98895	2561066666667	1.35	539	414	412	0.76	0.74
5000	7000	8600	4250	100	200	50	10.62500	666666666667	1.44	89	76	76	0.85	0.84
6500	11000	12700	6230	240	480	120	6.48958	22118400000000	1.36	1353	1060	1050	0.78	0.75
5500	9000	10500	5150	200	400	100	6.43750	10666666666667	1.36	955	746	743	0.78	0.75

Tabel 3.2 Verificatie met behulp van ANSYS

Zoals te zien de kritische knikkraft is gereduceerd door de keep in vergelijking met PE bepaald in paragraaf 2.4.

Uit tabel 3.3 ook blijkt dat de knikkraft bepaald met ANSYS komt overeen met de analytische uitwerking. Analytische knikkraft is bepaald met vgl.(3.8)

De factor  $\eta$  wordt met de eulerse knikkraft vermenigvuldigd om de kritische kracht te verkrijgen.

Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	I [mm]	b [mm]	h [mm]	Hi [mm]	$\mu$ [-]	I [mm <sup>4</sup> ]	I <sub>2</sub> [mm <sup>4</sup> ]	aI [-]	P <sub>cr</sub> [kN]		
											(Analyt)	(Ansys)	(Energie)
3500	1800	3936	1928	80	160	40	6.03	27306666.7	3413333.3	1.35	134	133	168
4500	2400	5100	2500	100	200	50	6.25	66666666.7	8333333.3	1.36	196	195	244
5000	2700	5682	2781	120	240	60	5.79	138240000	17280000	1.34	322	320	407
6000	3300	6848	3354	140	280	70	5.99	256106667	32013333	1.35	414	412	520
5000	7000	8600	4250	100	200	50	10.63	66666666.7	8333333.3	1.44	76	76	87
6500	11000	12700	6230	240	480	120	6.49	2211840000	276480000	1.36	1060	1055	1309
5500	9000	10500	5150	200	400	100	6.44	1066666667	133333333	1.36	746	743	923

Tabel 3.3 Vergelijking van de resultaten

### 3.4. Conclusie

Uit tabel 3.3 blijkt dat de knikkracht door de keep wordt gereduceerd in vergelijking met de staaf zonder keep (zie tabel 2.3). Dus de kniksterkte wordt bij aanwezigheid van een moment kleiner dan de Eulerse knikkracht.

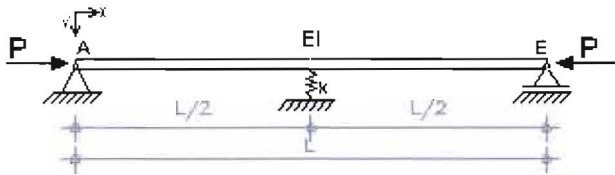
Uit tabel 3.3 ook blijkt dat de knikkracht bepaald met ANSYS goed overeen komt met de analytische uitwerking. Echter de knikkracht bepaald met de energie methode komt niet goed overeen met de analytische uitwerking en ANSYS. Dit komt doordat in de energie methode voor de uitbuiging vorm een sinus vorm is verondersteld,  $y(x) = C \sin(\pi x / L)$  waarin voor de totale potentiële energie de constante C verdwijnt. In de analytische methode is ook de uitbuigingsvorm  $y(x) = C \sin(\pi x / L)$  aangenomen, echter in de analytische methode is C bepaald en in de C waarde is de invloed van de inkeping (e) ook meegenomen (zie.vgl.3.6).

Dus doordat in de veronderstelde vervorming de eerste orde moment door de excentriciteit niet meegenomen is, is de totale potentiële energie hoger, vandaar een hogere knikkracht. Zie bijlage 3 voor het eerste orde moment. De knikkracht met de energie methode is ongeveer 25% hoger dan de exacte waarde. Uit hoofdstuk 3 blijkt dat door de keep de kniklengte wordt vergroot in vergelijking met staaf zonder keep.

## 4 Op drukbelaste staaf met verende ondersteuning

Een houten windverband bestaat uit twee staven waarbij de ene staaf op trek en de andere op druk wordt belast. Het knikgedrag van de gedrukte staaf wordt gunstig door de getrokken staaf beïnvloed. Het is de vraag in hoeverre de staven elkaar steunen en welke consequenties dit heeft voor de kniklengte voor het systeem.

De trekstaaf heeft invloed op de stabiliteit van het systeem. De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$ . De stijfheid die de trekstaaf geeft, zorgt voor een verende ondersteuning van de drukstaaf (zie figuur 4.1). Dit heeft een gunstige invloed op de kniklast van de drukbelaste staaf.



Figuur 4.1 Schematisatie van een verende gesteunde staaf

### 4.1. Analytische methode:

De op de op drukbelaste staaf wordt in het midden door de trekstaaf gesteund en deze steun wordt met de veer  $k$  geschematiseerd.

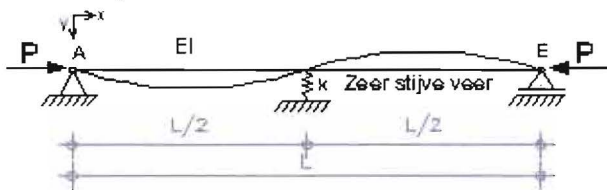
Er zijn een aantal knikvormen aan te geven voor de op drukbelaste staaf. Afhankelijk van de energie die een knikvorm kost zal de uitbuigingsvorm aangenomen worden. De staaf met de minste energie zal als knikvorm dienen. Bij een zeer grote stijfheid van de veer treedt de antisymmetrische bezwijkvorm op (zie figuur 4.2) en bij een slappe veer de symmetrische vorm (zie figuur 4.3).

Bij de antisymmetrische bezwijkvorm (stijve veer) heeft een verhoging van de veerstijfheid  $k$  geen invloed op de kniklast, omdat het moment in het middensteunpunt gelijk aan nul is.

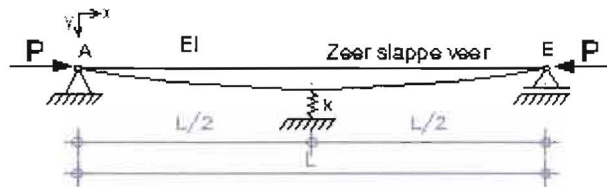
De elastische kniklast ( $P_{cr}$ ) van de gedrukte, verend gesteunde staaf ligt tussen de beide gevallen in.

$$\frac{\pi^2 EI}{L^2} \leq P_{cr} \leq \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

$$0.5L \leq L_k \leq L$$



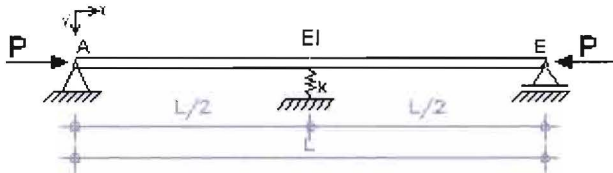
Figuur 4.2 Schematisatie van een verende gesteunde staaf met antisymmetrische knikvorm



Figuur 4.3 Schematisatie van een verende gesteunde staaf met symmetrische knikvorm

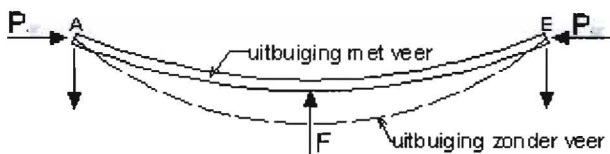
4.1.1. Op drukbelaste niet gekepte staaf met verende ondersteuning in het midden

De op drukbelaste staaf wordt in het midden gesteund door de veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 4.4). Om de invloed van de veer op de knikkraft te bestuderen wordt de op drukbelaste staaf geschematiseerd als in figuur 4.4 is weergegeven.



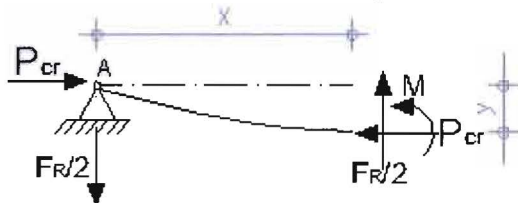
Figuur 4.4 Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning in het midden

Hier wordt aangenomen dat bij een kleine veer stijfheid de staaf knikt in de symmetrische knikkvorm (zie figuur 4.3) en bij voldoende veerstijfheid de staaf knikt in de antisymmetrische knikkvorm (zie figuur 4.2). Het minimum waarde voor de veerstijfheid om de antisymmetrische knikkvorm te genereren, wordt de kritische veerstijfheid genoemd. De kritische veerstijfheid wordt in deze paragraaf bepaald.



Figuur 4.5 Schematisatie op drukbelaste staaf met uitbuigingvorm

Voor de linker helft van de staaf geldt:



Figuur 4.6 Schematisatie snede van de opdrukbelaste staaf

Uit figuur 4.6 volgt vgl. (4.1) voor het momentevenwicht.

$$M_{uitw} = P_{cr} \cdot y - \frac{F_R}{2} x \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{4.1}$$

$$M_{inw} = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$EI y'' = -P_{cr} \cdot y + \frac{F_R}{2} x$$

$$EI y'' + P_{cr} \cdot y = \frac{F_R}{2} x \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{4.2}$$

$$y'' + \frac{P_{cr}}{EI} \cdot y = \frac{F_R}{2EI} x$$

De rechte kant van bovenste vergelijking wordt vermenigvuldigd met  $\frac{P_{cr}}{P_{cr}}$  dan geldt de volgende:

$$y'' + \frac{P_{cr}}{EI} \cdot y = \frac{F_R}{2EI} x \cdot \frac{P_{cr}}{P_{cr}}$$

Met  $\left(\frac{P_{cr}}{EI} = a^2\right)$

$$y'' + a^2 \cdot y = a^2 \frac{F_R}{2P_{cr}} x \quad (4.3)$$

De oplossing van vgl.(4.3) bestaat uit een algemene en een particuliere oplossing.

$$y = C_3 \cdot \sin(ax) + C_4 \cdot \cos(ax) + y_p \quad (4.4)$$

Voor algemene oplossing geldt de volgende:

$$y = C_3 \cdot \sin(ax) + C_4 \cdot \cos(ax)$$

Voor de particuliere oplossing geldt de volgende:

$$y_p = C_5 x \quad (4.5)$$

$$y_p' = C_5 \quad (4.6)$$

$$y_p'' = 0 \quad (4.7)$$

Vlg.(4.5) en vlg.(4.7) invullen in de differentiaalvergelijking (4.3) dan volgt de volgende:

$$0 + a^2 (C_5 x) = a^2 \frac{F_R \cdot x}{2P_{cr}} \quad (4.8)$$

Vergelijking 4.8 delen door  $a^2$  dan voor onbekende  $C_5$  geldt de volgende:

$$C_5 = \frac{F_R}{2P_{cr}}$$

Voor vgl. 4.5 volgt dan:

$$y_p = \frac{F_R}{2P_{cr}} x$$

Voor differentiaal vlg.(4.4) volgt dan:

$$y = C_3 \cdot \sin(ax) + C_4 \cdot \cos(ax) + \frac{F_R}{2P_{cr}} x \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (4.9)$$

Volgens de buiging randvoorwaarde (in de steunpunten is de doorbuiging nul) geldt:

$$x = 0 \rightarrow y(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

Dan:

$$y = C_3 \cdot \sin(ax) + \frac{F_R}{2P_{cr}} x \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (4.10)$$

$$y' = aC_3 \cos(ax) + \frac{F_R}{2P_{cr}} \quad (4.11)$$

Voor  $x=L/2$  kan vgl.(4.11) worden geschreven:

$$y'(L/2) = aC_3 \cos\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{F_R}{2P_{cr}}$$

Volgens de symmetrie randvoorwaarde geldt, dat de hoekverdraaiing  $y'(L/2) = 0$ :

$$aC_3 \cos\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{F_R}{2P_{cr}} = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{F_R}{2P_{cr}a} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{aL}{2}\right)}$$

Dan wordt vgl.(4.10):

$$y(x) = -\frac{F_R}{2P_{cr}a} \frac{\sin(ax)}{\cos\left(\frac{aL}{2}\right)} + \frac{F_R x}{2P_{cr}}$$

Stel  $y\left(\frac{L}{2}\right) = \Delta$ :

$$y(L/2) = -\frac{F_R}{2P_{cr}a} \frac{\sin\frac{aL}{2}}{\cos\frac{aL}{2}} + \frac{F_R}{2P_{cr}} \frac{L}{2} = \Delta$$

$$y(L/2) = -\frac{F_R}{2P_{cr}a} \tan\frac{aL}{2} + \frac{F_R}{2P_{cr}} \frac{L}{2} = \Delta \quad (4.12)$$

Er wordt uitgegaan van een lineair elastische veer met veerstijfheid  $k$ . Dan volgt voor de drukbelaste staaf dat  $F_R = -k \cdot \Delta$ . Het negatieve teken wordt ingevoerd omdat de richting van  $F_R$  tegengesteld is aan die van de doorbuiging (zie figuur 4.6).

Voor de trekbelaste staaf geldt dat  $F_R = k \cdot \Delta$ . De richting van de  $F_R$  en de doorbuiging zijn hetzelfde en het positieve teken betekent dat de trekbelaste staaf de drukbelaste staaf steunt.

In het geval van de antisymmetrische knikvorm volgt dat  $k=k_{cr}$  en  $\Delta=0$ .

Voor de op trek belaste staaf wijzigt vgl.(4.12) in vergelijking:

$$-\frac{k \cdot \Delta}{2P_{cr}a} \frac{\sin\frac{aL}{2}}{\cos\frac{aL}{2}} + \frac{k \cdot \Delta}{2P_{cr}} \frac{L}{2} = \Delta$$

Na deling door  $\Delta$  volgt:

$$-\frac{k}{2P_{cr}a} \cdot \tan\frac{aL}{2} + \frac{k}{2P_{cr}} \frac{L}{2} = 1$$



$$\frac{k}{2P_{cr}a} \left[ \frac{aL}{2} - \tan \frac{aL}{2} \right] = 1 \quad (4.13)$$

Vergelijking 4.13 delen door  $\frac{k}{2P_{cr}a}$  geeft:

$$\frac{aL}{2} - \tan \frac{aL}{2} = \frac{2P_{cr}a}{k}$$

Met ( $P_{cr} = EIa^2$ ) kan de bovenste vergelijking worden geschreven als:

$$\frac{aL}{2} - \tan \frac{aL}{2} = \frac{2EIa^2a}{k}$$

$$\frac{aL}{2} - \frac{2EIa^3}{k} = \tan \frac{aL}{2}$$

$$\frac{aL}{2} - 16 \frac{EI}{kL^3} \left( \frac{aL}{2} \right)^3 = \tan \frac{aL}{2} \quad (4.14)$$

Vergelijking (4.14) is een transcendente vergelijking, dat wil zeggen, de waarde van  $aL/2$  overeenkomt met een bepaalde  $k$  die analytisch niet is op te lossen, maar wel numeriek of grafisch door iteratie.

Er kan plot van elke term in vgl.(4.14) als een functie van  $aL/2$  worden gemaakt voor het bepalen van de oplossing. De eerste term  $f(aL/2) = aL/2$  is de rechte lijn op  $45^\circ$  in figuur 4.7. De term  $16 \frac{EI}{kL^3} \left( \frac{aL}{2} \right)^3$  is een

afwijking naar beneden van de rechte lijn. De term  $\frac{aL}{2} - 16 \frac{EI}{kL^3} \left( \frac{aL}{2} \right)^3$  is in figuur (4.7) weergegeven.

Alleen de term  $16 \frac{EI}{kL^3} \left( \frac{aL}{2} \right)^3$  is een functie van  $k$ .

De oplossing van vgl.(4.14) wordt gevonden door de functie van  $\frac{aL}{2} - 16 \frac{EI}{kL^3} \left( \frac{aL}{2} \right)^3$  te snijden met

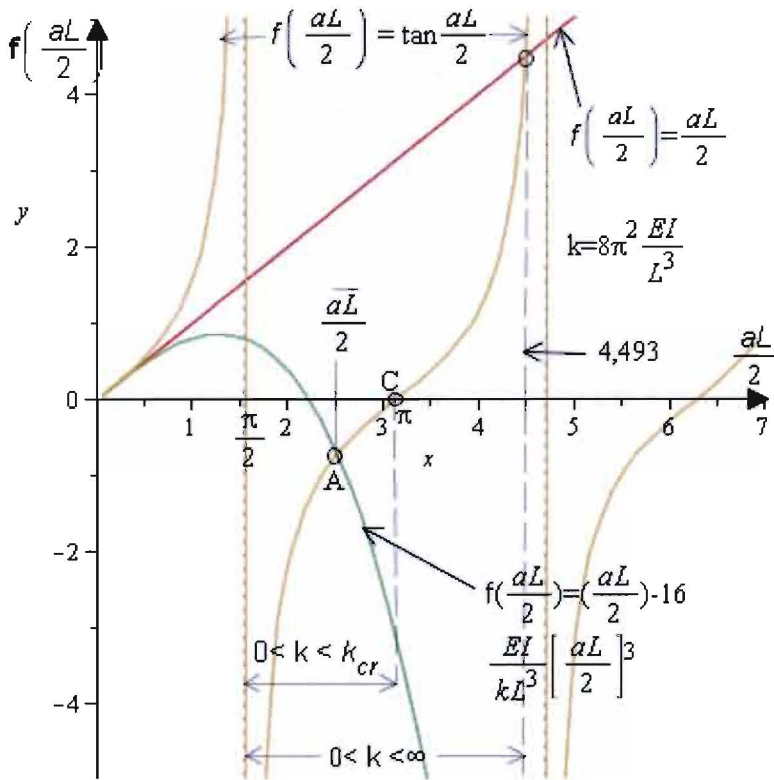
$\tan \frac{aL}{2}$ :

$$f\left(\frac{aL}{2}\right) = \frac{aL}{2} - 16 \frac{EI}{kL^3} \left( \frac{aL}{2} \right)^3 \text{ en:}$$

$$f\left(\frac{aL}{2}\right) = \tan \frac{aL}{2}$$

De snijpunten zijn in figuur (4.7) bepaald.

Van de snijpunten van beide functies leidt de kleinste waarde van  $(aL/2)$  ongelijk aan nul tot de kleinste knikkraft van de staaf.



Figuur 4.7 Kritieke toestand voor de veer gesteunde staaf

**Opmerkingen:**

1. Als  $k=0$  is er geen veer en de coëfficiënt van de  $16 \frac{EI}{kL^3} \left(\frac{aL}{2}\right)^3$  is oneindig. Dan volgt

$$f\left(\frac{aL}{2}\right) = \tan \frac{aL}{2} = -\infty \text{ en } \frac{aL}{2} = \frac{\pi}{2} : a^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \text{ en krijgen wij de staaf met scharnieren}$$

$$\text{ondersteuning en zonder veer met resultaat } P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

2. Voor  $k > 0$  vermindert  $16 \frac{EI}{kL^3} \left(\frac{aL}{2}\right)^3$ , zodat curve minder en minder gebogen wordt en nadert tot de

$$\text{lineaire term } f\left(\frac{aL}{2}\right) = \frac{aL}{2}.$$

3. Voor  $k = \infty$  is volgt dat  $f\left(\frac{aL}{2}\right) = \frac{aL}{2}$  en vgl.(4.14) wordt geschreven als:

$$\frac{aL}{2} - 0 = \tan \frac{aL}{2} \tag{4.15}$$

Het gezocht snijpunt is op  $aL/2=4,493$  (zie figuur 4.7 ) waarna

$$P = EIa^2 = EI \left[ \frac{2}{L} 4,493 \right]^2 = 4,4,493^2 \frac{EI}{L^2} = \frac{80,76EI}{L^2} \quad (4.16)$$

Echter als de veer oneindig stijf was, verwachten wij  $P = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} = \frac{39,48EI}{L^2}$  veel lager dan

$$P = 4,4,493^2 \frac{EI}{L^2} = \frac{8,18\pi^2 EI}{L^2}. \text{ Uiteraard is het knikgedrag veranderd van het oorspronkelijke gedrag in}$$

een of andere wijze op een  $k$  minder dan  $k = \infty$ .

4. De grootste  $k$  bij de antimetrische bezwijkvorm vindt plaats bij punt C in figuur 4.7. De snijding vindt plaats wanneer de staaf knikt bij de antimetrische bezwijkvorm voor een staaf met scharnieren

ondersteuning.  $P = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$  of  $\frac{aL}{2} = \pi$ . De bijbehorende  $k$  in vgl.(4.14) is uit gevonden:

$$(\pi) - \frac{16EI}{kL^3} (\pi)^3 = \tan(\pi)$$

$$(\pi) - \frac{16EI}{kL^3} (\pi)^3 = 0 \quad (4.17)$$

Vergelijking 4.17 delen door  $\pi$  dan de kritische veerstijfheid is:

$$k_{cr} = 16\pi^2 \frac{EI}{L^3} \quad (4.18)$$

De betreffende veer stijfheid kan ook geschreven worden als:

$$k_{cr} = 16 \frac{P_E}{L}$$

Voor een bepaalde waarde van de veerstijfheid ( $k_{cr}$ ) verandert de laagste kritische knikvorm van symmetrische tot antisymmetrische. Als de veerstijfheid  $k = k_{cr}$  knikt de staaf in de antisymmetrische bezwijkvorm op ( $P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$ ).

Stijging van de veerstijfheid  $k$  boven de  $k_{cr}$  verandert de knikvorm niet (knikvorm blijft antisymmetrisch) en is alleen stuken van het materiaal mogelijk. Daarom is er geen noodzaak voor de veer aan het eventuele stijver dan  $16\pi^2 \frac{EI}{L^3}$  (behorend bij  $\frac{aL}{2} = \pi$ ).

5. Voor  $k = \frac{k_{cr}}{2} = \frac{8\pi^2 EI}{L^3}$  de lineare-kubische curve in figuur 4.7 snijdt de tangen curve op

$$\frac{aL}{2} = 2,5185 \text{ (punt A in figuur 4.7) of } P_{cr} = \frac{25,37EI}{L^2}. \text{ Dit snijpunt is representatief voor alle}$$

oplossingen voor het probleem.

$$\frac{aL}{2} = 2,5185$$

$$P_{cr} = a^2 EI = \left( \frac{2,5185 \cdot 2}{L} \right)^2 \cdot EI$$

$$P_{cr} = \frac{25,37 EI}{L^2}$$

Kritische kracht gelijk stellen aan de Eulerse kracht om de kniklengte te bepalen.

$$\frac{\pi^2 EI}{L_k^2} = \frac{25,37 EI}{L^2} \Rightarrow L_k = 0,62L$$

Zoals te zien voldoet deze kniklengte aan de veronderstelling van paragraaf 4.1:

$$0,5L < L_k < L$$

Dus bij een veerstijfheid  $k = \frac{8\pi^2 EI}{L^3}$  is de kniklengte kleiner dan L en groter dan 0.5L

De verhouding tussen de kritische knikkracht en Eulerse knikkracht is gelijk aan:

$$\frac{P_{cr}}{P_E} = \frac{25,37 EI}{L^2} \cdot \frac{L^2}{\pi^2 EI} = 2,57$$

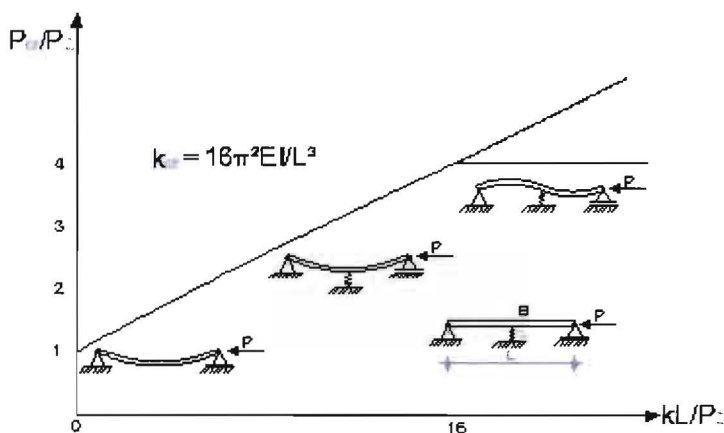
Zoals te zien voldoet bovenste vergelijking aan de veronderstelling van paragraaf 4.1:

$$1 \leq \frac{P_{cr}}{P_E} \leq 4$$

6. Als  $k$  is  $0 < k < k_{cr}$  (tussen  $\frac{aL}{2} = \frac{\pi}{2}$  en  $\frac{aL}{2} = \pi$ ) volgt de symmetrische knikvorm in figuur 4.7.

7. Mogelijke oplossingen van de transcendente vergelijking in het gebied  $0 < k < \infty$  zijn aangegeven in figuur 4.7. Maar deze (boven de  $k_{cr}$ ) zijn niet van praktisch belang omdat de staaf bezwijkt bij de antimetrische bezwijkvorm.

De resultaten van de oplossing proces zijn weergegeven in figuur 4.8. Er voor  $k=0$  knikt de staaf als een staaf met tweescharnieren ondersteuning, wanneer P bereikt de eulerse knikkracht:  $P_E = \pi^2 EI / L^2$ .



Figuur 4.8 Verband tussen  $P_{cr}/P_E$  en  $k$  voor een staaf met een verende steun in het midden

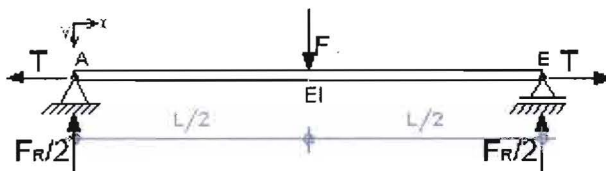
Indien  $k$  groter wordt, verhoogd de knikkracht lineair (de kromme die behoort bij de symmetrische uitbuigingsvorm, wijkt maar weinig af van een rechte lijn (zie figuur 4.8) tot dat de kritische veerstijfheid  $k_{cr}$  is bereikt, dan knikt de staaf in de antimetrische knikvorm met  $P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$ . De veer wordt niet ingedrukt

ongeacht eventuele de waarde van  $k \geq k_{cr}$ . Dat wil zeggen de stijging van de  $k$  boven de kritische waarde  $k_{cr}$  geen invloed heeft op de knikkracht (neemt de knikkracht niet meer toe).

Dus een dwarse ondersteuning hoeft niet volledig stijf te zijn om een staaf in de antimetrische knikvorm te laten knikken. De steun hoeft alleen het minimum waarde van de kritische veerstijfheid  $k_{cr}$  te hebben om de axiale knikkracht van de staaf te verhogen.

#### 4.1.2. Bepaling van de veerstijfheid, geleverd door de trekstaaf

Om de invloed van de trekstaaf voor de stabiliteit van heel systeem in rekening te brengen, kan de trekstaaf gezien worden als een veer. De trekstaaf zorgt voor een verende ondersteuning voor de drukstaaf.



Figuur 4.9 Schematisatie op trekbelaste staaf

In een snede van de staaf bedraagt het inwendige moment (zie figuur 4.11):

$$M_{inv} = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Het uitwendige moment in een snede van de staaf is (zie figuur 4.11):

$$M_{uitw} = -T(y) + \frac{1}{2} F_R x$$



Figuur 4.10 Schematisatie op trekbelaste staaf met uitbuigingsvorm



Figuur 4.11 Schematisatie snede van de trekbelaste staaf

Nu wordt de vergelijking van moment op een willekeurige punt op een afstand  $x$  van links bepaald. In het geval van evenwicht geldt:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = +T(y) - \frac{1}{2} F_R x$$

$$y'' = \frac{T(y)}{EI} - \frac{F_R x}{2EI} \cdot \frac{T}{T}$$

Stel  $\frac{T}{EI} = a^2$

$$y'' = a^2 \cdot y - a^2 \frac{F_R x}{2T}$$

$$y'' - a^2 \cdot y = -a^2 \frac{F_R x}{2T} \tag{4.19}$$

$$y = C_1 \cdot \sinh(ax) + C_2 \cdot \cosh(ax) + y_p \tag{4.20}$$

Voor algemene oplossing geldt de volgende:

$$y = C_1 \cdot \sinh(ax) + C_2 \cdot \cosh(ax)$$

Voor particuliere oplossing geldt:

$$y_p = -C_3 x \tag{4.21}$$

$$y'_p = -C_3$$

$$y''_p = 0 \tag{4.22}$$

Om onbekende  $C_3$  te kunnen bepalen, worden vgl.(4.21) en vgl.(4.22) ingevuld in de differentiaalvergelijking (4.19):

$$y''_p - a^2 \cdot y_p = -a^2 \frac{F_R x}{2T} \tag{4.23}$$

$$0 - a^2 [-C_3 x] = -a^2 \frac{F_R \cdot x}{2T} \tag{4.24}$$

Voor  $x = L$ , kan vgl.(4.24) worden omgeschreven tot vgl.(4.25):

$$a^2 \cdot C_3 \cdot L = -a^2 \frac{F_R \cdot L}{2T} \tag{4.25}$$

Na delen van vgl.(4.25) door  $a^2$  volgt voor de onbekende  $C_3$ :

$$C_3 = -\frac{F_R}{2T}$$

Na invulling van  $C_3$  in vgl.(4.21) volgt de particuliere oplossing  $y_p$ :

$$y_p = \frac{F_R}{2T} x$$

De particuliere oplossing wordt bij de algemene oplossing opgeteld. Hieruit kan vgl.(4.20) geschreven worden:

$$y(x) = C_1 \sinh(ax) + C_2 \cosh(ax) + \frac{F_R}{2T} x \quad (4.26)$$

Onbekende  $C_1$  en  $C_2$  kunnen gevonden worden met de volgende randvoorwaarden:

1. Buiging randvoorwaarde: In de steunpunten is de doorbuiging nul.
2. symmetrie randvoorwaarde: Vanwege het maximum doorbuiging plaats vindt altijd in het middenpunt van de staaf. Hier moet de hoekverdraaiing nul zijn ( $y' = 0$ ).

Volgens de randvoorwaarde 1 geldt:

$$x = 0 \Rightarrow y_1(0) = 0, \text{ waaruit volgt dat } C_2 = 0$$

Vergelijking 4.26 reduceert hierdoor tot vgl.(4.27):

$$y(x) = C_1 \sinh(ax) + \frac{F_R}{2T} x \quad (4.27)$$

Hoekverdraaiing is:

$$y'(x) = C_1 \cosh(ax) + \frac{F_R}{2T}$$

Volgens de randvoorwaarde 2 geldt de volgende:

$$x = \frac{1}{2} L \Rightarrow y'_1(L/2) = 0$$

$$y'(x) = C_1 \cosh\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{F_R}{2T} = 0$$

$$C_1 \cdot a \cosh\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{F_R}{2T} = 0$$

Hieruit volgt:

$$C_1 = -\frac{F_R}{a2T} \cdot \frac{1}{\cosh\left(\frac{aL}{2}\right)}$$

Invulling van  $C_1$  in vgl.(4.26) resulteert in vgl.(4.28).

$$y(x) = -\frac{F_R}{2Ta} \frac{\sinh(ax)}{\cosh\left(\frac{aL}{2}\right)} + \frac{F_R x}{2T} \quad (4.28)$$

De grootste verplaatsing wordt in het midden van de staaf gevonden.

Voor  $x=L/2$  geldt:

$$y(x = L/2) = -\frac{F_R}{2Ta} \frac{\sinh\left(\frac{aL}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{aL}{2}\right)} + \frac{F_R \cdot \frac{L}{2}}{2T} = y_{\max}$$

$$y_{\max} = -\frac{F_R}{2Ta} \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{F_R \cdot L}{4T} \quad (4.29)$$

Stel  $y(\frac{L}{2}) = \Delta$ , dan volgt vgl.(4.31):

$$y(L/2) = -\frac{F_R}{2Ta} \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{F_R \cdot L}{4T} = \Delta \quad (4.30)$$

$$-\frac{k \cdot \Delta}{2Ta} \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{k \cdot \Delta \cdot L}{4T} = \Delta$$

$$-\frac{k}{2Ta} \cdot \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{k \cdot L}{4T} = 1$$

$$\frac{k}{2Ta} \left[ \frac{aL}{2} - \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) \right] = 1 \quad (4.31)$$

Door vgl.(4.31) te delen door  $\frac{k}{2Ta}$  volgt:

$$\frac{aL}{2} - \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) = \frac{2Ta}{k}$$

Met ( $T = EIa^2$ ) kan de bovenstaande vergelijking worden geschreven als:

$$\frac{aL}{2} - \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) = \frac{2EIa^2 a}{k}$$

$$\frac{aL}{2} - \frac{2EI \cdot a^3}{k} = \tanh\left(\frac{aL}{2}\right)$$

Met  $a^3 = \left(\frac{aL}{2}\right)^3 \cdot \frac{8}{L^3}$  volgt:

$$\frac{aL}{2} - 16 \frac{EI}{kL^3} \left(\frac{aL}{2}\right)^3 = \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) \quad (4.32)$$

Vergelijking.(4.32) wordt gebruikt om vgl.(4.29) verder uit te werken:

$$y_{\max} = -\frac{F_R}{2Ta} \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{F_R L}{4T}$$

Stel wederom dat:

$$\frac{T}{EI} = a^2 \Rightarrow T = a^2 EI$$

Waardoor:

$$y_{\max} = -\frac{F_R}{2EI \cdot a^2 \cdot a} \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{F_R L}{4EI \cdot a^2}$$

En



$$y_{\max} = -\frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{3}{\left(\frac{aL}{2}\right)^3} \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{3 \cdot \frac{aL}{2}}{\left(\frac{aL}{2}\right)^3}$$

Stel  $u = \frac{aL}{2}$ . Dan volgt:

$$y_{\max} = -\frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{3}{u^3} \tanh(u) + \frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{3u}{u^3}$$

Vergelijking wordt gereduceerd tot:

$$y_{\max} = \frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{-3(\tanh(u) - u)}{u^3} \quad (4.33)$$

De door de trekstaaf geleverde veerstijfheid is gelijk aan:

$$k = \frac{F_R}{y_{\max}} = \frac{F_R}{1} \cdot \frac{48EI}{F_R \cdot L^3} \cdot \frac{u^3}{-3(\tanh(u) - u)}$$

$$k = \frac{48EI}{L^3} \cdot \frac{u^3}{-3(\tanh(u) - u)} \quad (4.34)$$

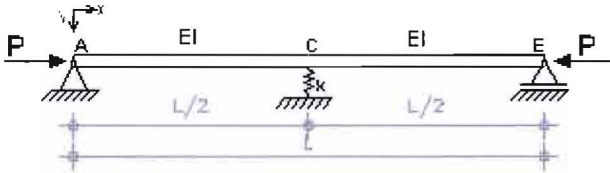
Indien  $T=0$  en ook  $u=0$ , geen trekkracht aanwezig, reduceert vgl.(4.34) tot:

$$k = \frac{48EI}{L^3} \left[ \frac{N}{mm} \right]$$

## 4.2. Energie methode:

### 4.2.1. Knikkracht voor staaf met verende ondersteuning in het midden

In paragraaf 4.1 is de exacte oplossing voor deze staaf gevonden. Nu wordt de benaderende oplossing, volgens een energie methode die eenvoudiger toepasbaar is, gepresenteerd.



Figuur 4.12 Op drukbelaste staaf met verende ondersteuning in het midden

Voor de vervorming wordt  $C \sin(\pi x / L)$  aangenomen, waarin C de maximale vervorming in het midden van de staaf is.

$$E_{pot,i} = \int_0^L \frac{1}{2} EI (y'')^2 dx + \frac{1}{2} k \cdot y_c^2$$

$$E_{pot,u} = -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^L (y')^2 dx$$

$$E_{pot} = E_{pot,i} + E_{pot,u}$$

$$E_{pot} = \left[ \int_0^L \frac{1}{2} EI (y'')^2 dx + \frac{1}{2} k \cdot y_c^2 - \frac{P_{cr}}{2} \int_0^L (y')^2 dx \right]$$

Specifieke waarden voor C kunnen niet worden verkregen, omdat de exacte gebogen vorm van de staaf na uitknikken onbekend is (C valt uiteindelijk weg uit de vergelijkingen). Er is echter aangenomen dat deze doorbuiging klein is.

$$y'(x) = C \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$y''(x) = -C \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$E_{pot,i} = \frac{EI}{2} \int_0^L (y'')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ -C \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]^2 dx$$

$$E_{pot,i} = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \frac{C^2 \pi^4}{L^4} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx = \frac{EI}{2} \cdot \frac{C^2 \pi^4}{L^4} \int_0^L \left[ \frac{1}{2} (1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)) \right] dx$$

$$E_{pot,i} = \frac{EIC^2 \pi^4}{4L^4} \int_0^L \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right] dx$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$$

Na integratie over de staaf lengte volgt als:

$$E_{pot,i} = \frac{EIC^2\pi^4}{4L^4} \left( x - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)_0^L = \frac{EIC^2\pi^4}{4L^3} \quad (4.35)$$

Voor  $L/2$  geldt:

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = y_c = C \sin\left(\frac{\pi \frac{L}{2}}{L}\right) = C$$

De inwendige energie in de veer is:

$$\frac{1}{2}k \cdot y_c^2 = \frac{1}{2}kC^2$$

De uitwendige energie is gelijk aan:

$$\begin{aligned} E_{pot,u} &= -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^L (y')^2 dx = -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^L \left[ C \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]^2 dx \\ E_{pot,u} &= -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^L \left[ C^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx = -\frac{P_{cr}C^2\pi^2}{2L^2} \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \right] dx \\ E_{pot,u} &= -\frac{P_{cr}C^2\pi^2}{4L^2} \left( x + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)_0^L = -\frac{P_{cr}C^2\pi^2}{4L} \quad (4.36) \end{aligned}$$

De inwendige en uitwendige potentiële energie wordt bij elkaar op geteld:

$$E_{pot} = \left\{ \frac{EI\pi^4}{4L^3} + \frac{1}{2}k - \frac{P_{cr}\pi^2}{4L} \right\} C^2$$

Voor evenwicht geldt:

$$\delta E_{pot} = \frac{dE_{pot}}{dC} \delta C = 0$$

Voor een niet triviale oplossing geldt de volgende:

$$\begin{aligned} \frac{EI\pi^4}{4L^3} + \frac{1}{2}k - \frac{P_{cr}\pi^2}{4L} &= 0 \\ P_{cr} &= \frac{\frac{EI\pi^4}{4L^3} + \frac{k}{2}}{\frac{\pi^2}{4L}} = \frac{EI\pi^2}{L^2} + \frac{k \cdot 2L}{\pi^2} \end{aligned}$$

De kritische knikkraft is gelijk aan:

$$P_{cr} = P_E + \frac{k \cdot 2L}{\pi^2} \quad (4.37)$$

Bij een veerstijfheid  $k \geq k_{cr}$  knikt de staaf in dubbele golf. De knikkracht is dan gelijk aan

$$P_{cr} = 4\pi^2 EI / L^2, \text{ en}$$

$$\frac{4\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} + \frac{k \cdot 2L}{\pi^2}$$

Voor de kritische veerstijfheid  $k_{cr}$  volgt vgl.(4.38).

$$\frac{k_{cr} \cdot 2L}{\pi^2} = \frac{3\pi^2 EI}{L^2}$$

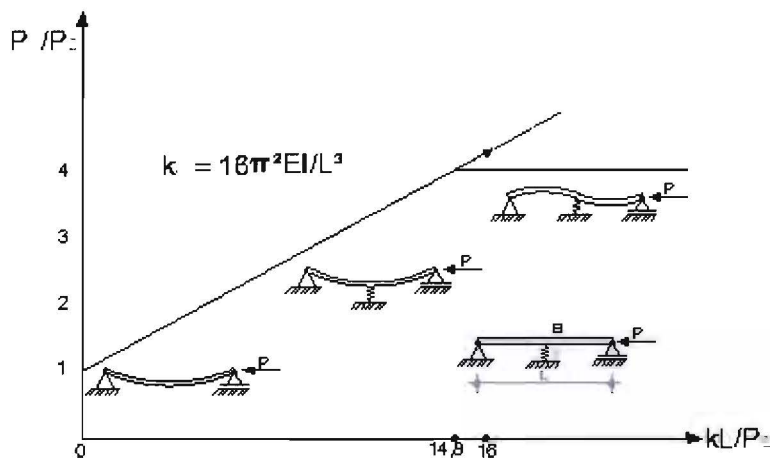
$$k_{cr} = \frac{3 \pi^4 EI}{2 L^3}$$

$$k_{cr} = 14,8 \frac{\pi^2 EI}{L^3} \tag{4.38}$$

Uit vgl.(4.38) blijkt dat de kritische veerstijfheid berekend met de energie methode 7.5% lager is dan de exacte waarde voor de veerstijfheid  $k_{cr} = 16 \frac{\pi^2 EI}{L^3}$  volgens de analytische methode (zie vgl.4.18). Dus de

resultaten zou een strepend lijn in figuur (4.14) zijn die begint van  $P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$  en gaan naar een waarde

van  $k$  minder dan de exacte  $k_{cr} = 16 \frac{\pi^2 EI}{L^3}$  op  $P = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$ . Deze knikkrachten zijn altijd hoger dan de exacte resultaten gegeven in figuur 4.8 wat wij zou verwachten.



Figuur 4.13 Verband tussen  $P_{cr}/PE$  en  $k$  voor een staaf met een verende steun in het midden

Het is opmerkelijk dat voor een waarde voor  $k$  zo hoog dat de staaf in de antisemitische knikvorm bezwijkt, betekent dat de knikvorm is ver van de half-sinus golf die werd veronderstel (zie figuur 4.8).

Uit vgl. (4.37) volgt vgl.(4.39):

$$P_{cr} = P_E + \frac{k \cdot 2L}{\pi^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \left[ 1 + \frac{L^2}{\pi^2 EI} \cdot \frac{k \cdot 2L}{\pi^2} \right] = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \left[ 1 + \frac{k \cdot 2L}{P_E \pi^2} \right] = \frac{\pi^2 EI}{L^2} (1 + \alpha)$$

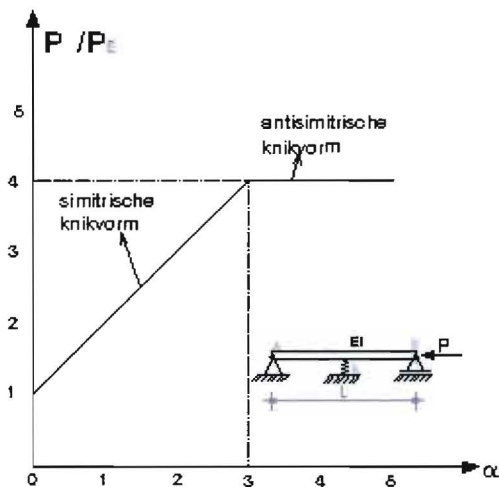
Waarin:

$$\alpha = \frac{k \cdot 2L}{P_E \pi^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \left[ 1 + \frac{2kL^3}{\pi^4 EI} \right]$$

Of:

$$\frac{P_{cr}}{P_E} = \left[ 1 + \frac{k \cdot 2L}{P_E \pi^2} \right] = 1 + \alpha \tag{4.39}$$



Figuur 4.14 Verband tussen  $P$  en  $\alpha$  voor een staaf met een verende steun in het midden

In vergelijking (4.39) met  $\alpha = k \cdot 2L / P_E \pi^2$  dimentioneel, geeft het verband tussen  $k$ ,  $L$  en  $P_E$  aan.

Wanneer  $\alpha = 0$  betekent dat veer een bijzonder slappe veer is, en  $P_{cr} = P_E$  dus de knikkracht is de kleinste. Met de toenemende positieve waarde van  $\alpha$  neemt  $P_{cr}$  lineair toe en er komt een punt waarop de symmetrische knikkracht gelijk is ( $P_{cr} = 4\pi^2 EI / L^2$ ) behorende bij de antisymmetrische uitbuigingvorm (als een zeer stijve veer). Dit treedt op voor  $\alpha = 3$  of  $P_{cr} = 4 P_E$ . Voor  $\alpha > 3$  is de kniklast constant en gegeven door vgl.(4.40).

$$P_{cr} = \frac{EI_1 \pi^2}{L^2} + \frac{k \cdot 2L}{\pi^2} = P_E + 0,2k \cdot L \tag{4.40}$$

### 4.3. Numeriek

De verkregen resultaten zijn vergeleken met de Eindige-Elementen-Methode(EEM).

De betreffende staaf is gemodelleerd met twee typen elementen, BEAM 3 en COMBIN 14 (balk-en veerelementen) in de eindige elementen program ANSYS. Daarvoor is de invoerfile uit bijlage 4 gebruikt.

COMBIN 14 heeft longitudinale of torsie vermogen in 1-D, 2D en 3D toepassingen. De longitudinale veer-demper optie is een eenassige spanning-druk- element met maximale drie graden van vrijheid bij elk knoop: Verplaatsing in de x,y en z richtingen. De torsie veer-demper optie is een zuiver rotatie element met drie graden van vrijheid bij elk knoop: rotatie over de x, y en z as. Geen buiging of axiale krachten worden beschouwd. Van belang is dat bij een eigenwaarde-berekening met lineaire veerconstanten gerekend wordt.

In tabel 4.1 worden veel numerieke resultaten gegeven om de juistheid van de voorgestelde methoden analytische/energie te verifiëren.

Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	b [mm]	h [mm]	k(Analyt) [N/mm]	k(Energ) [N/mm]	EH [mm <sup>4</sup> ]	Pcr [kN]			Lk [L]	P [kN]	n [-]
								(Analyt)	(Ansys)	(Energ)			
3500	1800	3936	80	160	215*	215	2.7307E+11	342	342	345	0.71	0.33	1044
		3936	80	160	354**	354	2.7307E+11	447	447	456	0.62	115	3.891
		3936	80	160	707***	655	2.7307E+11	696	696	696	0.5	413	1.685
		3936	80	160	2000		2.7307E+11		696				
4500	2400	5100	100	200	241*	241	6.6667E+11	498	498	502	0.71	0.2	2488
		5100	100	200	397**	397	6.6667E+11	650	650	663	0.62	167	3.895
		5100	100	200	794***	734	6.6667E+11	1012	1012	1012	0.5	600	1.686
		5100	100	200	2000		6.6667E+11		1012				
5000	2700	5682	120	240	362*	362	1.3824E+12	832	832	839	0.71	1	832
		5682	120	240	595**	595	1.3824E+12	1086	1086	1108	0.62	280	3.88
		5682	120	240	1190***	1101	1.3824E+12	1690	1690	1690	0.5	1003	1.69
		5682	120	240	2000		1.3824E+12		1690				
6000	3300	6848	140	280	383*	383	2.5611E+12	1061	1061	1070	0.71	1	1061
		6848	140	280	630**	630	2.5611E+12	1386	1386	1413	0.62	355	3.9
		6848	140	280	1259***	1165	2.5611E+12	2156	2156	2156	0.5	1280	1.68
		6848	140	280	5000		2.5611E+12		2156				
5000	7000	8600	100	200	50*	50	6.6667E+11	175	175	176	0.71	0.3	582
		8600	100	200	83**	83	6.6667E+11	229	229	234	0.62	59	3.88
		8600	100	200	166***	153	6.6667E+11	356	356	356	0.5	212	1.68
		8600	100	200	2000		6.6667E+11		356				
6500	11000	12700	240	480	518*	518	2.2118E+13	2663	2663	2687	0.71	0.5	5326
		12700	240	480	853**	853	2.2118E+13	3479	3480	3549	0.62	893	3.897
		12700	240	480	1705***	1577	2.2118E+13	5412	5412	5412	0.5	3210	1.686
		12700	240	480	5000		2.2118E+13		5412				
5500	9000	10500	200	400	442*	442	1.0667E+13	1879	1879	1895	0.71	0.4	4697
		10500	200	400	728**	728	1.0667E+13	2455	2455	2504	0.62	632	3.89
		10500	200	400	1455***	1346	1.0667E+13	3819	3819	3819	0.5	2265	1.69
		10500	200	400	5000		1.0667E+13		3819				

Tabel 4.1 Vergelijking resultaten

**Referentie:**

- \* de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf zonder de invloed van de trekkracht ( $k = \frac{48EI}{L^3}$ )
- \*\* de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met de invloed van de trekkracht ( $k = \frac{8\pi^2 EI}{L^3}$ )
- \*\*\* de kritische veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met de invloed van de trekkracht ( $k_{cr} = \frac{16\pi^2 EI}{L^3}$ )
- oneindige stijve veer (arbitrair gekozen)

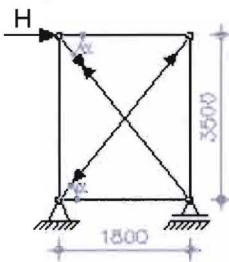
Uit tabel 4.1 blijkt dat voor  $k > k_{cr}$  de knikkracht niet meer stijgt en ook de knikvorm hetzelfde blijft.

Uit tabel 4.1 ook blijkt dat voor een lage veerstijfheid (bijvoorbeeld 50 N/mm) de knikkracht bepaald met de energie methode slechts een kleine afwijking heeft met het resultaat van de analytische uitwerking en ANSYS. Hoe kleiner de veerstijfheid hoe meer de energie methode overeen komt met de analytische methode en Ansys.

#### 4.4. Praktijk toepassingen voor het kruisverband zonder keep

##### 4.4.1. Analytische methode

In figuur 4.15 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 4.15 Het kruisverband met diagonalen

Als de windkracht gelijk aan  $H=27\text{kN}$  is dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L = L_{dig} = \sqrt{(1800)^2 + (3500)^2} = 3936\text{mm}$$

$$\cos \alpha = \frac{1800}{3936} = 0,457$$

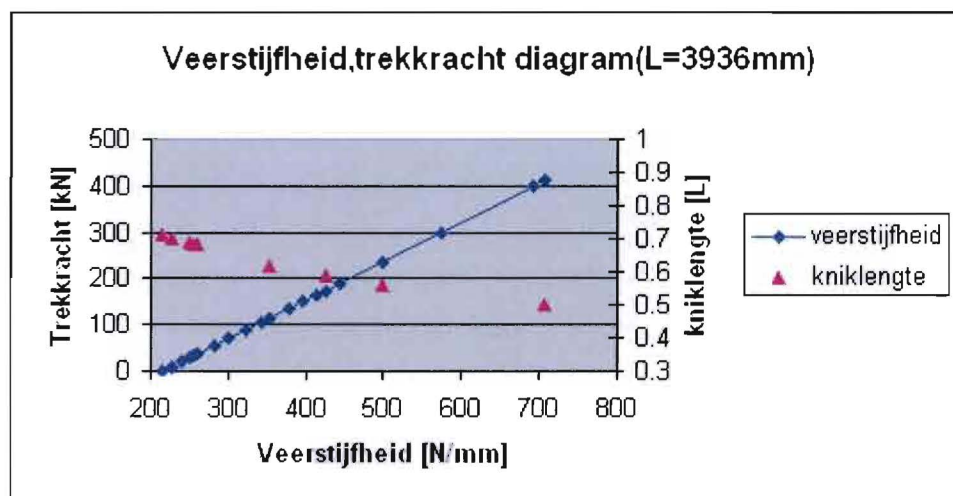
Indien  $T=P$  is, geldt:

$$T = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 29\text{kN} \quad \text{en} \quad P = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 29\text{kN}$$

Voor  $T=29\text{kN}$  is de veerstijfheid gelijk aan (vgl.4.34):

$$k = \frac{48EI}{L^3} \frac{u^3}{-3(\tan h(u) - u)} = 250\text{N/mm}$$

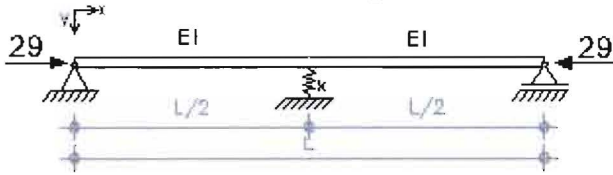
In figuur 4.16 is de veerstijfheid, geleverde door de trekstaaf (volgens vgl.4.34) voor verschillende waarde van de trekkracht weergegeven.



Figuur 4.16 Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf



De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$ .



Figuur 4.17 Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning

De veerstijfheid ( $k=250\text{N/mm}$ ) wordt in vgl.(4.14) ingevuld:

$$\frac{aL}{2} - 16 \frac{EI}{kL^3} \left( \frac{aL}{2} \right)^3 = \tan \frac{aL}{2}$$

$$k = \frac{5.77 \pi^2 EI}{L^3} = 250 \text{ N / mm}$$

Volgens de figuur 4.7 geldt:

$$\frac{aL}{2} = 2.288 \text{ en } P_{cr} = \frac{20,94 EI}{L^2} = 369 \text{ kN}$$

De in dit onderzoek berekeningen zijn gemaakt met  $n \geq 10$

$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 12.73$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,085$$

De kniklengte is voor deze kracht gelijk aan  $0,69L$  (zie figuur 4.17).

$$\frac{\pi^2 EI}{L_k^2} = \frac{20,94 EI}{L^2} \Rightarrow L_k = 0,69L$$

#### 4.4.2. Verificatie met Eindige elementen methode

De knikkracht wordt ook volgens de ANSYS voor de staaf met verende ondersteuning bepaald (zie figuur 4.17) :

$$P_{cr} = 29.12,73 = 369 \text{ kN}$$

Voor de invoerfile zie bijlage 4 praktijk toepassingen.

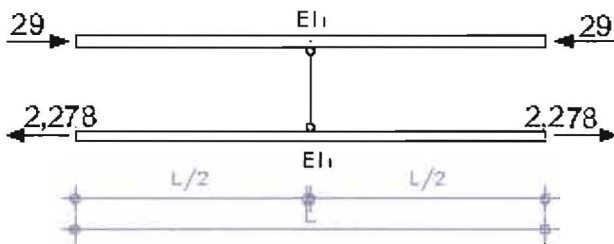
De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald (zie figuur 4.18). In de analytische methode wordt de drukbelasting ( $P=29\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$\frac{29}{12,73} = 2,278 \text{ kN}$$

Het kruisverband wordt met een trekbelasting van  $0.078P$  in ANSYS belast.

$$T = 0,078P = 2,278 \text{ kN}$$

Dus trekkracht groeit van  $2.278\text{kN}$  tot  $29\text{kN}$ . Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van  $29\text{kN}$  voor dit kruisverband niet boven  $29\text{kN}$  moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van  $29\text{kN}$  tot de knikkracht ( $369\text{kN}$ ) is bereikt.



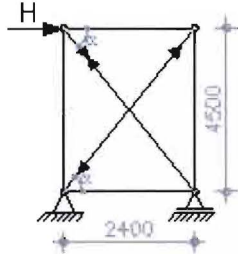
Figuur 4.18 Schematisatie van het kruisverband zonder keep in ANSYS

$$P_{cr} = 369kN$$

De knikvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

4.4.3. Analytische methode

In figuur 4.19 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 4.19 Het kruisverband met diagonalen

Als de windkracht is gelijk aan H=40kN dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L = L_{dig} = \sqrt{(2400)^2 + (4500)^2} = 5100mm$$

$$\cos \alpha = \frac{2400}{5100} = 0,47$$

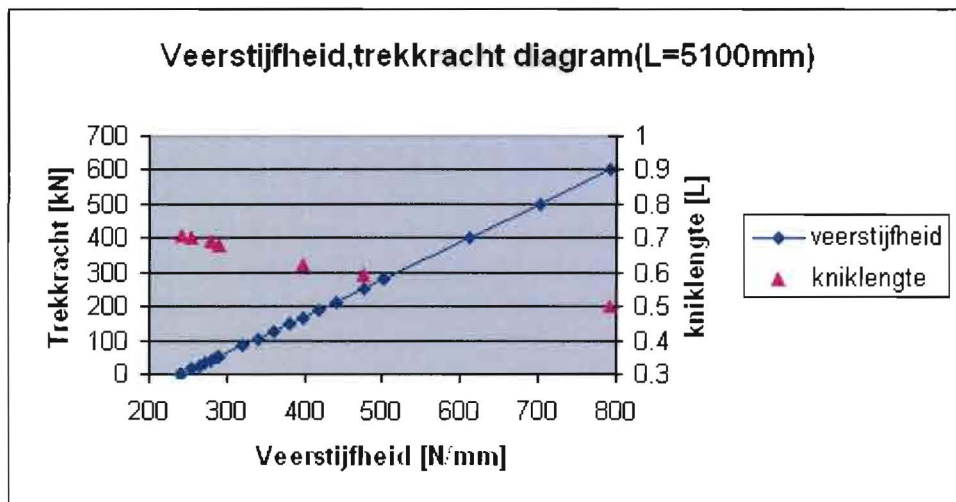
Indien T=P is, geldt:

$$T = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 42kN \text{ en } P = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 42kN$$

Voor T=42kN is de veerstijfheid gelijk aan (vgl.4.34):

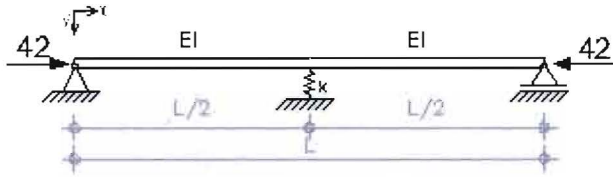
$$k = \frac{48EI}{L^3} \frac{u^3}{-3(\tan h(u) - u)} = 281N / mm$$

In figuur 4.20 is de veerstijfheid, geleverde door de trekstaaf (volgens vgl.4.34) voor verschillende waarde van de trekkracht weergegeven.



Figuur 4.20 Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 4.21).



Figuur 4.21 Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning

De veerstijfheid ( $k=291\text{N/mm}$ ) wordt in vgl.(4.14) ingevuld:

$$k = \frac{5.77\pi^2 EI}{L^3} = 291\text{N/mm}$$

$$\frac{aL}{2} - 16 \frac{EI}{kL^3} \left(\frac{aL}{2}\right)^3 = \tan \frac{aL}{2}$$

Volgens de figuur 4.7 geldt:

$$\frac{aL}{2} = 2.289 \text{ en } P_{cr} = \frac{20,96EI}{L^2} = 537\text{kN}$$

$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 12.79$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,085$$

De kniklengte is voor deze kracht gelijk aan  $0,69L$  (zie figuur 4.21).

$$\frac{\pi^2 EI}{L_k^2} = \frac{20,96EI}{L^2} \Rightarrow L_k = 0,69L$$

#### 4.4.4. Verificatie met Eindige elementen methode

De knikkracht wordt ook volgens de ANSYS voor de staaf met verende ondersteuning bepaald (zie figuur 4.21) :

$$P_{cr} = 42.12,79 = 537\text{kN}$$

Voor de invoerfile zie bijlage 4 praktijk toepassingen.

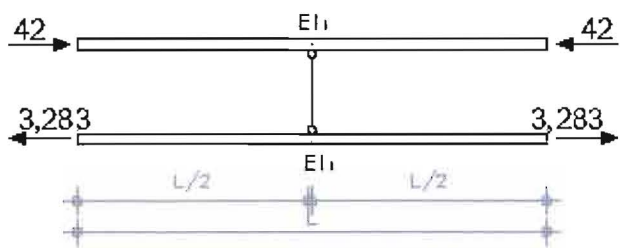
De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald (zie figuur 4.22). In de analytische methode wordt de drukbelasting ( $P=42\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$\frac{42}{12,79} = 3,284\text{kN}$$

Het kruisverband wordt met een trekbelasting van  $0.078P$  in ANSYS belast.

$$T = 0,078P = 3,28\text{kN}$$

Dus trekkracht groeit van  $3,284\text{kN}$  tot  $42\text{kN}$ . Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van  $42\text{kN}$  voor dit kruisverband niet boven  $42\text{kN}$  moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van  $42\text{kN}$  tot de knikkracht ( $537\text{kN}$ ) is bereikt.



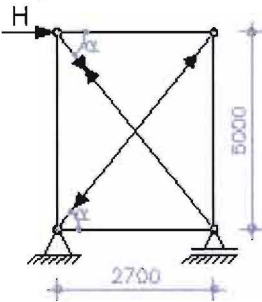
*Figuur 4.22 Schematisatie van het kruisverband zonder keep in ANSYS*

$$P_{cr} = 537 \text{ kN}$$

De knikvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

#### 4.4.5. Analytische methode

In figuur 4.23 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 4.23 Het kruisverband met diagonalen

Als de windkracht is gelijk aan  $H=67\text{kN}$  dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L = L_{dig} = \sqrt{(2700)^2 + (5000)^2} = 5682\text{mm}$$

$$\cos \alpha = \frac{2700}{5682} = 0,475$$

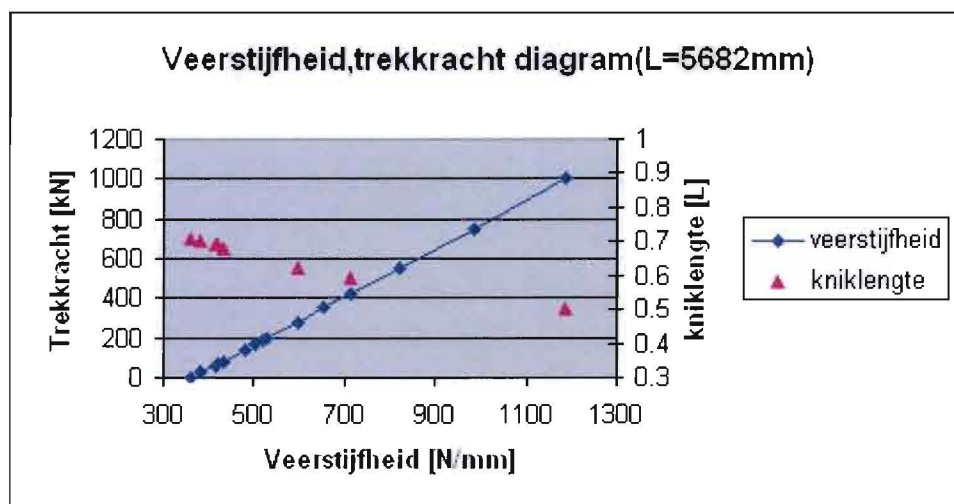
Indien  $T=P$  is, geldt:

$$T = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 70\text{kN} \text{ en } P = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 70\text{kN}$$

Voor  $T=70\text{kN}$  is de veerstijfheid gelijk aan (vgl.4.34):

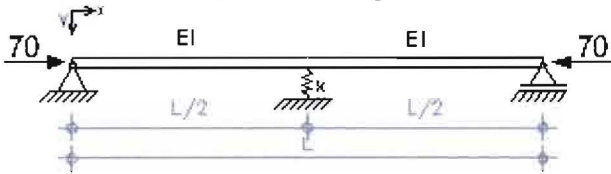
$$k = \frac{48EI}{L^3} \frac{u^3}{-3(\tan h(u) - u)} = 421\text{N/mm}$$

In figuur 4.24 is de veerstijfheid, geleverde door de trekstaaf (volgens vgl.4.34) voor verschillende waarde van de trekkracht weergegeven.



Figuur 4.24 Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 4.25).



Figuur 4.25 Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning

De veerstijfheid ( $k=421\text{N/mm}$ ) wordt in vgl.(4.14) ingevuld:

$$k = \frac{5,66\pi^2 EI}{L^3} = 421\text{N/mm}$$

$$\frac{aL}{2} - 16 \frac{EI}{kL^3} \left( \frac{aL}{2} \right)^3 = \tan \frac{aL}{2}$$

Volgens de figuur 4.7 geldt:

$$\frac{aL}{2} = 2,289 \text{ en } P_{cr} = \frac{20,95EI}{L^2} = 897\text{kN}$$

$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 12,81$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,085$$

De kniklengte is voor deze kracht gelijk aan  $0,69L$  (zie figuur 4.25).

$$\frac{\pi^2 EI}{L_k^2} = \frac{20,95EI}{L^2} \Rightarrow L_k = 0,69L$$

#### 4.4.6. Verificatie met Eindige elementen methode

De knikkracht wordt ook volgens de ANSYS voor de staaf met verende ondersteuning bepaald (zie figuur 4.25) :

$$P_{cr} = 70 \cdot 12,817 = 897\text{kN}$$

De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald (zie figuur 4.26). In de analytische methode wordt de drukbelasting ( $P=70\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$T = \frac{P}{n}$$

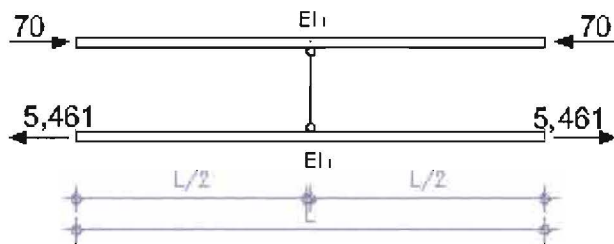
$$\frac{70}{12,817} = 5,461\text{kN}$$

Voor de invoerfile zie bijlage 4 praktijk toepassingen.

Het kruisverband wordt met een trekbelasting van  $0,078P$  in ANSYS belast.

$$T = 0,078P = 5,46\text{kN}$$

Dus trekkracht groeit van 5,46kN tot 70kN. Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van 70kN voor dit kruisverband niet boven 70kN moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van 70kN tot de knikkracht (897kN) is bereikt.



Figuur 4.26 Schematisatie van het kruisverband zonder keep in ANSYS

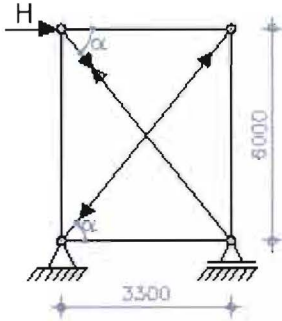
$$P_{cr} = 898 \text{ kN}$$

De knikvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.



4.4.7. Analytische methode

In figuur 4.27 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 4.27 Het kruisverband met diagonalen

Als de windkracht is gelijk aan H=87kN dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L_{dig} = \sqrt{(3300)^2 + (6000)^2} = 6848mm$$

$$\cos \alpha = \frac{3300}{6848} = 0,482$$

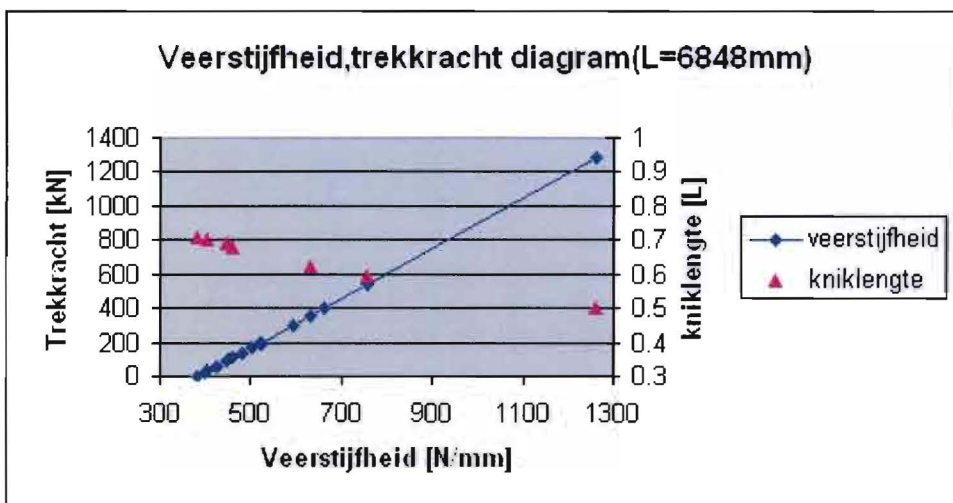
Indien T=P is, geldt:

$$T = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 90kN \text{ en } P = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 90kN$$

Voor T=90kN is de veerstijfheid gelijk aan (vgl.4.34):

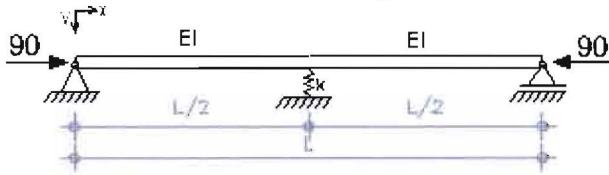
$$k = \frac{48EI}{L^3} \frac{u^3}{-3(\tan h(u) - u)} = 446N/mm$$

In figuur 4.28 is de veerstijfheid, geleverde door de trekstaaf (volgens vgl.4.34) voor verschillende waarde van de trekkracht weergegeven.



Figuur 4.28 Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 4.29).



Figuur 4.29 Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning

De veerstijfheid ( $k=446\text{N/mm}$ ) wordt in vgl.(4.14) ingevuld:

$$k = \frac{5.666\pi^2 EI}{L^3} = 446\text{N/mm}$$

$$\frac{aL}{2} - 16 \frac{EI}{kL^3} \left( \frac{aL}{2} \right)^3 = \tan \frac{aL}{2}$$

Volgens de figuur 4.7 geldt:

$$\frac{aL}{2} = 2.289 \text{ en } P_{cr} = \frac{20,96EI}{L^2} = 1145\text{kN}$$

$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 12,72$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,085$$

De kniklengte is voor deze kracht gelijk aan  $0,69L$  (zie figuur 4.29).

$$\frac{\pi^2 EI}{L_k^2} = \frac{20,96EI}{L^2} \Rightarrow L_k = 0,69L$$

#### 4.4.8. Verificatie met Eindige elementen methode

De knikkracht wordt ook volgens de ANSYS voor de staaf met verende ondersteuning bepaald (zie figuur 4.29) :

$$P_{cr} = 90 \cdot 12,72 = 1145\text{kN}$$

Voor de invoerfile zie bijlage 4 praktijk toepassingen.

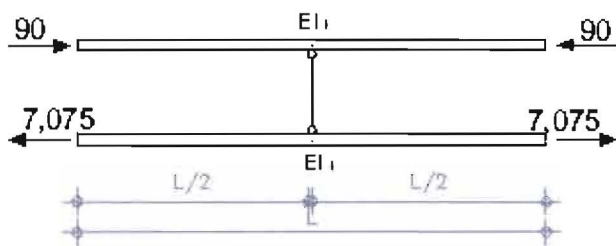
De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald (zie figuur 4.30). In de analytische methode wordt de drukbelasting ( $P=90\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$\frac{90}{12,72} = 7,075\text{kN}$$

Het kruisverband wordt met een trekbelasting van  $0.079P$  in ANSYS belast.

$$T = 0,079P$$

Dus trekkracht groeit van  $7,075\text{kN}$  tot  $90\text{kN}$ . Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van  $90\text{kN}$  voor dit kruisverband niet boven  $90\text{kN}$  moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van  $90\text{kN}$  tot de knikkracht ( $1145\text{kN}$ ) is bereikt.



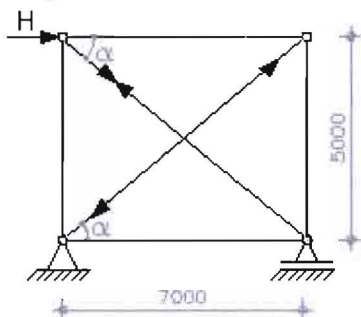
*Figuur 4.30 Schematisatie van het kruisverband zonder keep in ANSYS*

$$P_{cr} = 1145 \text{ kN}$$

De knikvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

#### 4.4.9. Analytische methode

In figuur 4.31 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 4.31 Het kruisverband met diagonalen

Als de windkracht is gelijk aan  $H=24kN$  dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L_{dig} = \sqrt{(5000)^2 + (7000)^2} = 8600mm$$

$$\cos \alpha = \frac{7000}{8600} = 0,81$$

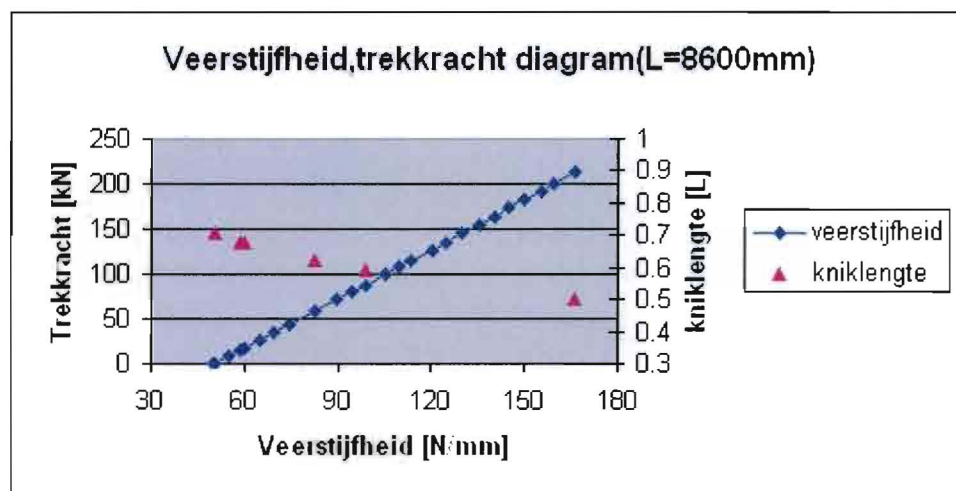
Indien  $T=P$  is, geldt:

$$T = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 15kN \text{ en } P = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 15kN$$

Voor  $T=15kN$  is de veerstijfheid gelijk aan (vgl.4.34):

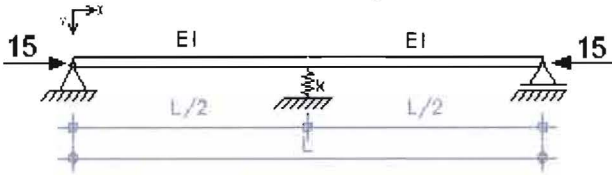
$$k = \frac{48EI}{L^3} \frac{u^3}{-3(\tan h(u) - u)} = 59N / mm$$

In figuur 4.32 is de veerstijfheid, geleverde door de trekstaaf (volgens vgl.4.34) voor verschillende waarde van de trekkracht weergegeven.



Figuur 4.32 Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 4.33).



Figuur 4.33 Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning

De veerstijfheid ( $k=60\text{N/mm}$ ) wordt in vgl.(4.14) ingevuld:

$$k = \frac{5.703\pi^2 EI}{L^3} = 59\text{N/mm}$$

$$\frac{aL}{2} - 16 \frac{EI}{kL^3} \left(\frac{aL}{2}\right)^3 = \tan \frac{aL}{2}$$

Volgens de figuur 4.7 geldt:

$$\frac{aL}{2} = 2.293 \text{ en } P_{cr} = \frac{21,03EI}{L^2} = 190\text{kN}$$

$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 12,64$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,086$$

De kniklengte is voor deze kracht gelijk aan  $0,68L$  (zie figuur 4.33).

$$\frac{\pi^2 EI}{L_k^2} = \frac{21,03EI}{L^2} \Rightarrow L_k = 0,68L$$

#### 4.4.10. Verificatie met Eindige elementen methode

De knikkracht wordt ook volgens de ANSYS voor de staaf met verende ondersteuning bepaald (zie figuur 4.33) :

$$P_{cr} = 15 \cdot 12,64 = 190\text{kN}$$

Voor de invoerfile zie bijlage 4 praktijk toepassingen.

De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald (zie figuur 4.34). In de analytische methode wordt de drukbelasting ( $P=15\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

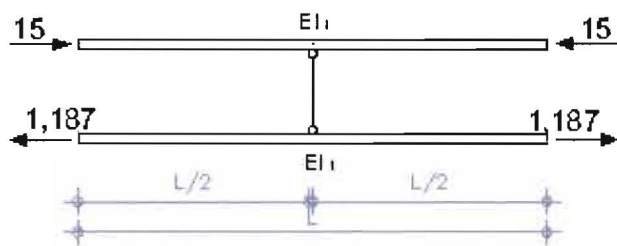
$$\frac{15}{12,64} = 1,187\text{kN}$$

Het kruisverband wordt met een trekbelasting van  $0,079P$  in ANSYS belast.

$$T = 0,079P$$

Dus trekkracht groeit van  $1,187\text{kN}$  tot  $15\text{kN}$ . Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van  $15\text{kN}$  voor dit kruisverband niet boven  $15\text{kN}$  moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van  $15\text{kN}$  tot de knikkracht ( $190\text{kN}$ ) is bereikt.

Knikken van gekepte houten kruisverband



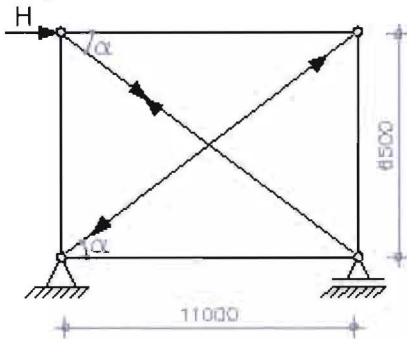
Figuur 4.34 Schematisatie van het kruisverband zonder keel in ANSYS

$$P_{cr} = 189kN$$

De knikvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

4.4.11. Analytische methode

In figuur 4.35 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 4.35 Het kruisverband met diagonalen

Als de windkracht is gelijk aan H=372kN dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L_{dig} = \sqrt{(6500)^2 + (11000)^2} = 12700mm$$

$$\cos \alpha = \frac{11000}{12700} = 0,866$$

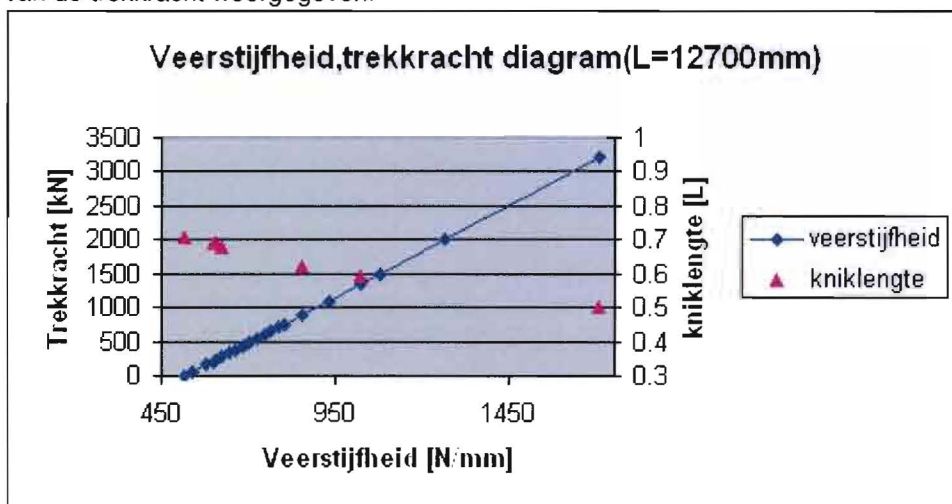
Indien T=P is, geldt:

$$T = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 215kN \text{ en } P = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 215kN$$

Voor T=215kN is de veerstijfheid gelijk aan (vgl.4.34):

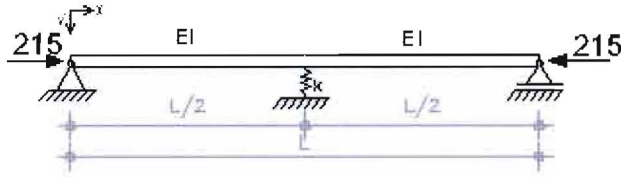
$$k = \frac{48EI}{L^3} \frac{u^3}{-3(\tan h(u) - u)} = 599N / mm$$

In figuur 4.36 is de veerstijfheid, geleverde door de trekstaaf (volgens vgl.4.34) voor verschillende waarde van de trekkracht weergegeven.



Figuur 4.36 Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 4.37).



Figuur 4.37 Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning

De veerstijfheid ( $k=599\text{N/mm}$ ) wordt in vgl.(4.14) ingevuld:

$$k = \frac{5,62\pi^2 EI}{L^3} = 599\text{N/mm}$$

$$\frac{aL}{2} - 16 \frac{EI}{kL^3} \left( \frac{aL}{2} \right)^3 = \tan \frac{aL}{2}$$

Volgens de figuur 4.7 geldt:

$$\frac{aL}{2} = 2,285 \text{ en } P_{cr} = \frac{20,877 EI}{L^2} = 2863\text{kN}$$

$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 13,316$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,081$$

De kniklengte is voor deze kracht gelijk aan  $0,69L$  (zie figuur 4.37).

$$\frac{\pi^2 EI}{L_k^2} = \frac{20,877 EI}{L^2} \Rightarrow L_k = 0,69L$$

#### 4.4.12. Verificatie met Eindige elementen methode

De knikkracht wordt ook volgens de ANSYS voor de staaf met verende ondersteuning bepaald (zie figuur 4.37) :

$$P_{cr} = 215 \cdot 13,316 = 2863\text{kN}$$

Voor de invoerfile zie bijlage 4 praktijk toepassingen.

De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald (zie figuur 4.38). In de analytische methode wordt de drukbelasting ( $P=280\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

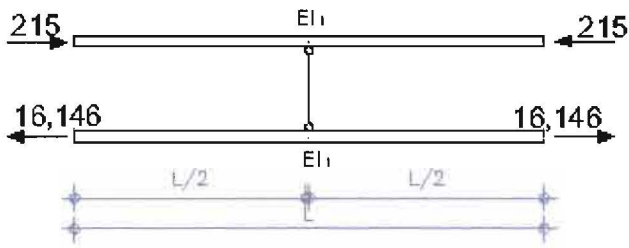
$$\frac{215}{13,316} = 16,146\text{kN}$$

Het kruisverband wordt met een trekbelasting van  $0,075P$  in ANSYS belast.

$$T = 0,075P$$

Dus trekkracht groeit van  $16,146\text{kN}$  tot  $215\text{kN}$ . Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van  $215\text{kN}$  voor dit kruisverband niet boven  $215\text{kN}$  moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van  $215\text{kN}$  tot de knikkracht ( $2863\text{kN}$ ) is bereikt.





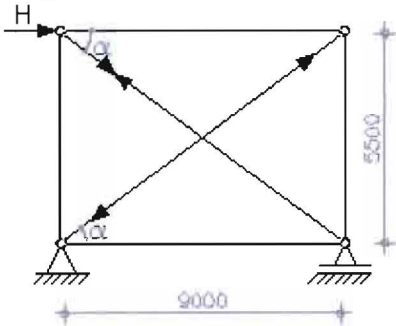
Figuur 4.38 Schematisatie van het kruisverband zonder keel in ANSYS

$$P_{cr} = 2864 \text{ kN}$$

De knikvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

4.4.13. Analytische methode

In figuur 4.39 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 4.39 Het kruisverband met diagonalen

Als de windkracht is gelijk aan H=257kN dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L_{dig} = \sqrt{(5500)^2 + (9000)^2} = 10500mm$$

$$\cos \alpha = \frac{9000}{10500} = 0,857$$

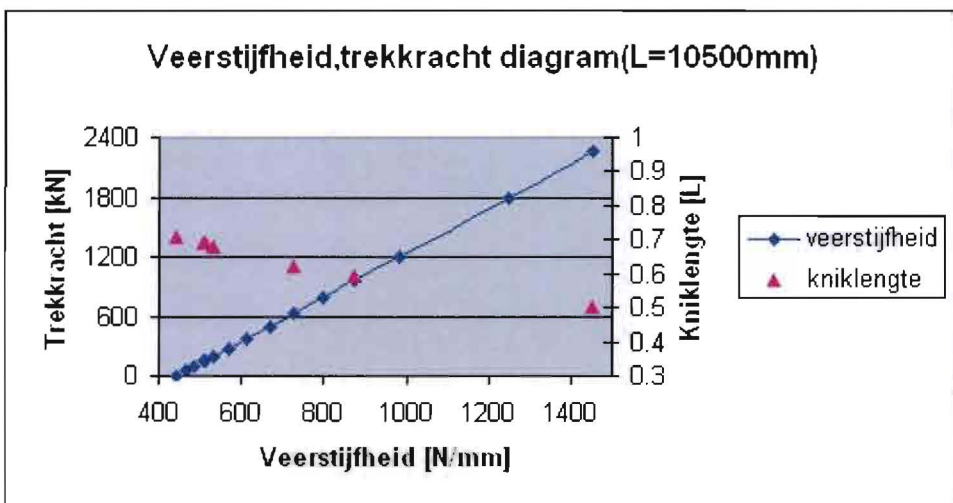
Indien T=P is, geldt:

$$T = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 150kN \text{ en } P = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 150kN$$

Voor T=150kN is de veerstijfheid gelijk aan (vgl.4.39):

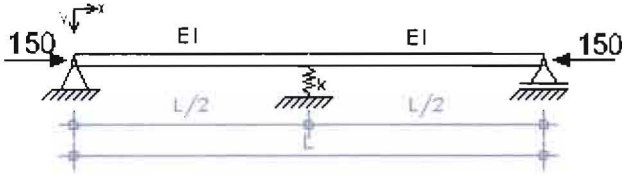
$$k = \frac{48EI}{L^3} \frac{u^3}{-3(\tan h(u) - u)} = 511N / mm$$

In figuur 4.40 is de veerstijfheid, geleverde door de trekstaaf (volgens vgl.4.34) voor verschillende waarde voor de trekkracht weergegeven.



Figuur 4.40 Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 4.41).



Figuur 4.41 Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning

De veerstijfheid ( $k=60\text{N/mm}$ ) wordt in vgl.(4.14) ingevuld:

$$k = \frac{5.619\pi^2 EI}{L^3} = 511\text{N/mm}$$

$$\frac{aL}{2} - 16 \frac{EI}{kL^3} \left(\frac{aL}{2}\right)^3 = \tan \frac{aL}{2}$$

Volgens de figuur 4.7 geldt:

$$\frac{aL}{2} = 2.284 \text{ en } P_{cr} = \frac{20,874EI}{L^2} = 2020\text{kN}$$

$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 13,464$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,08$$

De kniklengte is voor deze kracht gelijk aan  $0,69L$  (zie figuur 4.41).

$$\frac{\pi^2 EI}{L_k^2} = \frac{20,874EI}{L^2} \Rightarrow L_k = 0,69L$$

#### 4.4.14. Verificatie met Eindige elementen methode

De knikkracht wordt ook volgens de ANSYS voor de staaf met verende ondersteuning bepaald (zie figuur 4.26) :

$$P_{cr} = 150 \cdot 13,464 = 2020\text{kN}$$

Voor de invoerfile zie bijlage 4 praktijk toepassingen.

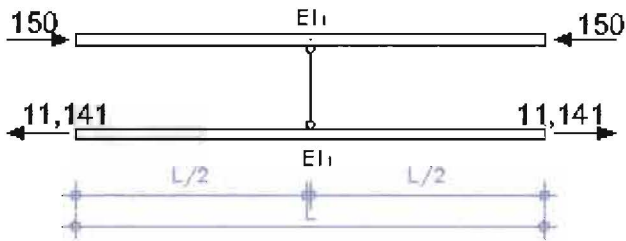
De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald (zie figuur 4.42). In de analytische methode wordt de drukbelasting ( $P=150\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$\frac{150}{10,321} = 11,141\text{kN}$$

Het kruisverband wordt met een trekbelasting van  $0,074P$  in ANSYS belast.

$$T = 0,074P$$

Dus trekkracht groeit van  $11,141\text{kN}$  tot  $150\text{kN}$ . Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van  $150\text{kN}$  voor dit kruisverband niet boven  $150\text{kN}$  moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van  $150\text{kN}$  tot de knikkracht ( $2020\text{kN}$ ) is bereikt.



Figuur 4.42 Schematisatie van het kruisverband zonder keep in ANSYS

$$P_{cr} = 2019 \text{ kN}$$

De knikkvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

In tabel 4.2 wordt de knikkraft voor veergesteunde staven zonder keep weergegeven

Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	b [mm]	h [mm]	k [N/mm]	P [kN]	Eh [mm <sup>4</sup> ]	P <sub>cr</sub> [kN]			wind [kN]	L <sub>k</sub> [L]	n [-]	n/n-1 [-]
								(Analyt)	(Ansys)	(Energ)				
3500	1800	3936	80	160	250	29	2.7E+11	369	369	373	27	0.69	12.7	1.09
4500	2400	5100	100	200	281	42	6.7E+11	537	537	543	40	0.69	12.8	1.08
5000	2700	5682	120	240	421	70	1.4E+12	897	897	907	67	0.69	12.8	1.08
6000	3300	6848	140	280	446	90	2.6E+12	1145	1145	1158	87	0.69	12.7	1.09
5000	7000	8600	100	200	59	15	6.7E+11	190	190	192	24	0.68	12.6	1.09
6500	11000	12700	240	480	599	215	2.2E+13	2863	2863	2895	372	0.69	13.3	1.08
5500	9000	10500	200	400	511	150	1.1E+13	2020	2020	2042	257	0.69	13.5	1.08

Tabel 4.2 Vergelijking van de resultaten

In tabel 4.3 wordt de knikkraft voor het kruisverband zonder keep weergegeven

Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	b [mm]	h [mm]	T [N/mm]	P [kN]	Eh [mm <sup>4</sup> ]	P <sub>cr</sub> [kN]	wind [kN]	L <sub>k</sub> [L]	n [-]	n/n-1 [-]
								(Ansys)				
3500	1800	3936	80	160	2.277	29	2.7E+11	369	27	0.69	12.7	1.09
4500	2400	5100	100	200	3.284	42	6.7E+11	537	40	0.69	12.8	1.08
5000	2700	5682	120	240	5.464	70	1.4E+12	898	67	0.69	12.8	1.08
6000	3300	6848	140	280	7.075	90	2.6E+12	1145	87	0.69	12.7	1.09
5000	7000	8600	100	200	1.187	15	6.7E+11	189	24	0.68	12.6	1.09
6500	11000	12700	240	480	16.15	215	2.2E+13	2864	372	0.69	13.3	1.08
5500	9000	10500	200	400	11.14	150	1.1E+13	2019	257	0.69	13.5	1.08

Tabel 4.3 Vergelijking van de resultaten

## 4.5. Conclusie

Uit tabel 4.1 blijkt dat de knikkracht bepaald met ANSYS overeen komt met de analytische uitwerking. Echter het resultaat van de energie methode wijkt af. Dus de aanwezigheid van de veer heeft invloed op de elastische stabiliteit waarde van Eulerse knikkracht ( $P_e$ ) en zelfs een kleine veerstijfheid zal de oorzaak van een aanzienlijke stijging in ( $P_e$ ) zijn. En het zou de oorzak van de complete wijziging in de knikvorm kunnen zijn.

Dus de knikkrachten bepaald met de energie methode zijn altijd hoger (en daarmee niet altijd veilig) ten opzicht van de exact resultaten. Omdat het aantal vrijheidsgraden in de benaderingen minder is dan werkelijke. Continu mechanisch systeem met oneindig aantal vrijheidsgraden

$y(x) = C_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + C_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \dots = \sum_n C_{2n-1} \sin\left[(2n-1)\frac{\pi x}{L}\right]$  geeft onnatuurlijke beperkingen van

het systeem, vandaar hogere energie. Dus de nauwkeurigheid van de oplossing hangt grotendeels af van de juistheid van de veronderstelde verplaatsing trial-functie.

Uit tabel 4.1 blijkt ook dat de kritische veerstijfheid berekend met de energie methode 7.5% lager is dan de exacte waarde voor de veerstijfheid volgens de analytische methode.

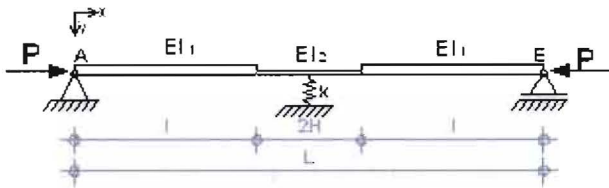
Het is opmerkelijk dat voor  $k > k_{cr}$  de knikvorm lijkt af te wijken van de veronderstelde sinusvorm.

Uit hoofdstuk 4 blijkt dat door de veer de kniklengte wordt gereduceerd tot  $0,5L \leq L_k \leq 1,0L$  (met L de staaf lengte) en de knikkracht varieert van  $\pi^2 EI / L^2 \leq P_{cr} \leq 4\pi^2 EI / L^2$ .

## 5 Op drukbelaste staaf met keep en verende ondersteuning

Een houten windverband bestaat uit twee staven waarbij de ene staaf op trek en de andere op druk wordt belast. De trekstaaf heeft invloed op de stabiliteit van het hele systeem. De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$ .

De op drukbelaste staaf met wisselende  $EI$  en verende ondersteuning in het midden kan worden geschematiseerd als in figuur 5.1 is weergegeven. De staaf wordt belast door een kracht  $P$ .



Figuur 5.1 Schematisatie op drukbelaste staaf met keep en verende ondersteuning in het midden

### 5.1. Analytische methode:

Ondanks de aangebrachte vereenvoudigingen is een zuiver wiskundig analytische oplossing van de op drukbelaste staaf slechts in twee gevallen mogelijk: De staaf met keep in het midden en de staaf met verende ondersteuning in het midden.

Combinatie van keep en veer wordt met de analytische methode vrij gecompliceerd (onmogelijk).

Om dan toch die twee onafhankelijke effecten op een makkelijke manier met elkaar te combineren is het nodig om een zo goed mogelijke benadering methode te zoeken, zoals potentiële energie methode.

Om de knikkracht volgens de energie methode voor de drukbelaste staaf met keep en gesteund in het midden door de veer te bepalen, wordt eerst de veerstijfheid volgens de analytische methode bepaald en dan in de energie methode toegepast.

De trekstaaf heeft invloed op de stabiliteit van het gehele systeem. De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$ . De stijfheid die de trekstaaf met keep geeft, zorgt voor een verende ondersteuning van de drukstaaf met keep.

Om de veerstijfheid ( $k$ ) voor de drukbelaste staaf te bepalen, moet de invloed van de trekkracht en ook de invloed van de keep tegelijk op de veerstijfheid meenemen.

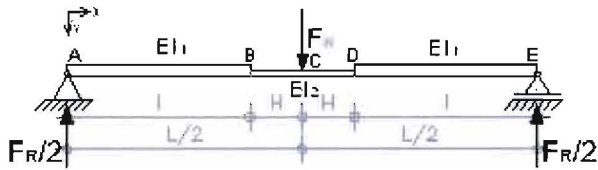
In de volgende paragrafen wordt de veerstijfheid ( $k$ ) voor de gekepte drukbelaste staaf met de analytische methode bepaald.

#### 5.1.1. Bepaling van de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep zonder invloed van de trekkracht

Hierin wordt eerst de veerstijfheid alleen door de invloed van de verbinding kracht  $F_R$  zonder de invloed van de trekkracht bepaald.

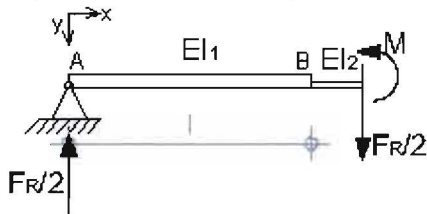
In figuur (5.2) is een staaf getoond met twee verschillende traagheidsmomenten belast door een kracht  $F_R$  in het midden van de staaf.

De doorbuigingen en hellingen worden door het oplossen van de differentiaalvergelijkingen van de vervorming bepaald.



Figuur 5.2 Schematisatie van gekepte staaf, belast door een kracht in het midden van de staaf

In dit geval is het mogelijk gebruik te maken van symmetrie-overwegingen, waardoor we ons kunnen beperken tot een helft, bijvoorbeeld linkerhelft (zie figuur 5.3).



Figuur 5.3 Schematisatie snede van gekepte staaf

Voor het momentenevenwicht geldt:

$$M_{uinv} = \frac{F_R}{2} x; (0 \leq x \leq \frac{1}{2} L)$$

$$M_{inv} = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

De Differentiaalvergelijkingen voor de linkerhelft van de staaf met uitkeping zijn:

$$EI_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{F_R}{2} x \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{F_R}{2EI_1} x \tag{5.1}$$

$$EI_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -\frac{F_R}{2} x \quad (l \leq x \leq \frac{1}{2} L) \text{ of } (l \leq x \leq l + H)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = -\frac{F_R}{2EI_2} x \tag{5.2}$$

Elk van vgl.(5.1) en vgl.(5.2) worden twee keer geïntegreerd om de doorbuiging te kunnen bepalen. Deze integratie leveren vier constanten van de integratie op, welke bepaald kunnen worden via de volgende randvoorwaarden:

3. symmetrie randvoorwaarde: Het maximum doorbuiging plaats zit altijd in het middenpunt van de staaf.

Hier moet  $\frac{dy_2}{dx}(x = l + H) = 0$  zijn.

4. Randvoorwaarde oplegging: In de steunpunten is de doorbuiging nul ( $y_1(x = 0) = 0$ ).

5. Continuïteit randvoorwaarde: op punt B ( $x=l$ ) is de helling van AB zijde van de staaf gelijk aan de helling van BC zijde van de staaf.

6. Continuïteit randvoorwaarde: Op punt B ( $x=l$ ) is de doorbuiging van AB zijde gelijk aan de door buiging van BC zijde van de staaf.

Integratie van vgl.(5.1) resulteert in:

$$y_1' = -\frac{F_R x^2}{4EI_1} + C_1 \quad (0 \leq x \leq l) \quad (5.3)$$

Voor  $x=l$  geldt de volgende:

$$y_1' = -\frac{F_R l^2}{4EI_1} + C_1 \quad (5.4)$$

Integratie van vgl.(5.2) resulteert in vgl.(5.5):

$$y_2' = -\frac{F_R x^2}{4EI_2} + C_2 \quad (l \leq x \leq \frac{1}{2}L) \text{ of } (l \leq x \leq l+H) \quad (5.5)$$

Volgens de randvoorwaarde 1 voor  $x=L/2$  geldt voor vlg.(5.5):

$$0 = -\frac{F_R (L/2)^2}{4EI_2} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{F_R \cdot L^2}{16EI_2}$$

$$y_2' = -\frac{F_R \cdot x^2}{4EI_2} + \frac{F_R \cdot L^2}{16EI_2}$$

$$y_2' = \frac{F_R (L^2 - 4x^2)}{EI_2 16} \quad (l \leq x \leq \frac{1}{2}L) \quad (5.6)$$

Van vgl.(5.6) kan de hoekverdraaiing op punt B waar het traagheidsmoment van  $I_1$  naar  $I_2$  veranderd, worden bepaald.

$$y_2'(l) = \frac{F_R (L^2 - 4l^2)}{EI_2 16} \quad (5.7)$$

Het verloop van de doorbuiging op punt B is continue, Randvoorwaarde 4 worden gebruikt om de hoekverdraaiing op punt B van vlg.(5.4) gelijk te stellen aan de hoekverdraaiing op punt B van vlg.(5.7):

$$-\frac{F_R l^2}{4EI_1} + C_1 = \frac{F_R (L^2 - 4l^2)}{16EI_2} \Rightarrow C_1 = \frac{F_R [4EI_2 \cdot l^2 + EI_1 (L^2 - 4l^2)]}{16EI_1 EI_2}$$

De hoekverdraaiing tussen punt A en B (zie vgl.5.3) wordt:

$$y_1' = -\frac{F_R x^2}{4EI_1} + \frac{F_R [4EI_2 \cdot l^2 + EI_1 (L^2 - 4l^2)]}{16EI_1 EI_2}$$

$$y_1' = \frac{F_R [-4EI_2 x^2 + 4EI_2 \cdot l^2 + EI_1 (L^2 - 4l^2)]}{16EI_1 EI_2} \quad (0 \leq x \leq l) \quad (5.8)$$

Na integratie van vlg.(5.6) en vlg.(5.8) geldt de volgende:



$$y_1 = \frac{F_R}{16EI_1EI_2} \left[ -\frac{4EI_2x^3}{3} + 4EI_2l^2x + EI_1L^2x - 4EI_1l^2 \cdot x \right] + C_3 \quad (0 \leq x \leq l) \quad (5.9)$$

$$y_2 = \frac{F_R}{EI_2 16} (L^2x - \frac{4x^3}{3}) + C_4$$

$$y_2 = \frac{F_R}{48EI_2} (3L^2x - 4x^3) + C_4 \quad (l \leq x \leq \frac{1}{2}L) \quad (5.10)$$

Voor  $x=l$  geldt:

$$y_2 = \frac{F_R}{48EI_2} (3L^2l - 4l^3) + C_4 \quad (5.11)$$

Volgens de randvoorwaarde 2 is  $C_3 = 0$  dan wordt de doorbuiging tussen punt A en B (van vlg.5.9) gelijk aan:

$$y_1 = \frac{F_R}{48EI_1EI_2} \left[ -4EI_2x^3 + 12EI_2l^2x + 3EI_1L^2x - 12EI_1l^2 \cdot x \right] \quad (5.12)$$

Van vgl.5.11 kan de doorbuiging op punt B ( $x=l$ ) bepaald worden:

$$y_1 = \frac{F_R}{48EI_1EI_2} \left[ 8EI_2l^3 + 3EI_1L^2l - 12EI_1l^3 \right] \quad (5.13)$$

Het verloop van de doorbuiging is op punt B continue er kan worden gebruik van de continuïteit randvoorwaarde 4 en door in punt B de doorbuiging van (vgl.5.11) gelijk stellen aan (vgl.5.13).

$$\frac{F_R}{48EI_2} (3L^2l - 4l^3) + C_4 = \frac{F_R}{48EI_1EI_2} \left[ 8EI_2l^3 + 3EI_1L^2l - 12EI_1l^3 \right]$$

$$C_4 = \frac{F_R}{48EI_1EI_2} \left[ 8EI_2l^3 + 3EI_1L^2l - 12EI_1l^3 \right] - \frac{F_R}{48EI_2} (3L^2l - 4l^3)$$

$$C_4 = \frac{F_R}{48EI_1EI_2} \left[ 8EI_2l^3 - 8EI_1l^3 \right]$$

$$C_4 = \frac{F_R l^3}{6EI_1EI_2} (EI_2 - EI_1)$$

De doorbuiging tussen punt B en C, vgl.(5.10) volgt met de gevonden  $C_4$  uit vgl.(5.14).

$$y_2 = \frac{F_R}{48EI_2} (3L^2x - 4x^3) + \frac{F_R l^3}{48EI_1EI_2} (8EI_2l^3 - 8EI_1l^3)$$

$$y_2 = \frac{F_R}{48EI_1EI_2} \left[ 3EI_1L^2x - 4EI_1x^3 + 8EI_2l^3 - 8EI_1l^3 \right] \quad (5.14)$$

Ten slotte de doorbuiging in het midden van de staaf ( $x=L/2$ ) is gelijk aan:

$$y_c = \frac{F_R}{48EI_1EI_2} [EI_1L^3 + 8EI_2L^3 - 8EI_1L^3] \quad (5.15)$$

**Controle:**

Als  $EI_1 = EI_2$  (prismatische staaf op twee steunpunten belast met een kracht  $F_R$  in het midden).

$$y_c = \frac{F_R \cdot L^3}{48EI_2}$$

De veerstijfheid voor staaf met keep zonder de invloed van de trekkracht is gelijk:

$$k = \frac{F_R}{y_c} = \frac{48EI_1EI_2}{[EI_1L^3 + 8EI_2L^3 - 8EI_1L^3]} \quad (5.16)$$

**Controle:**

Als  $EI_1 = EI_2$

$$k = \frac{48EI}{L^3}$$

Met behulp van verschillende parameters zoals vermeld in tabel 5.1 wordt de veerstijfheid voor de trekbelaste staaf zonder de invloed van de trekkracht volgens vgl.(5.16) bepaald:

Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	I [mm]	b [mm]	h [mm]	k [N/mm]	Hi [mm]	E <sub>H</sub> [mm <sup>4</sup> ]	E <sub>I</sub> [mm <sup>4</sup> ]
3500	1800	3936	1928	80	160	152	40	2.73067E+11	34133333333
4500	2400	5100	2500	100	200	172	50	6.66667E+11	83333333333
5000	2700	5682	2781	120	240	252	60	1.3824E+12	172800000000
6000	3300	6848	3354	140	280	270	70	2.56107E+12	320133333333
5000	7000	8600	4259	100	200	41	41	6.66667E+11	83333333333
6500	11000	12700	6230	240	480	373	120	2.21184E+13	276480000000
5500	9000	10500	5150	200	400	318	100	1.06667E+13	133333333333

Tabel 5.1 Veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep zonder de invloed van de trekkracht

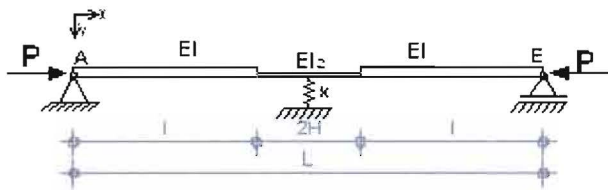
## 5.2. Energie methode:

Hier wordt de drukbelaste staaf met keep en gesteund in het midden door de veer geanalyseerd. Om die twee effecten (veer en keep) met elkaar te combineren, wordt de kritische kracht voor de opdruk belaste staaf onderzocht.

### 5.2.1. Knikkracht voor drukbelaste staaf met keep en verende ondersteuning

De trekstaaf heeft invloed op de stabiliteit van heel systeem. De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer. De stijfheid die de trekstaaf geeft, zorgt voor een verende ondersteuning van de drukstaaf. Dit heeft een gunstige invloed op de kniklast van de drukstaaf.

De normaalkrachtenverdeling in de drukbelaste staaf zal hierdoor beïnvloed worden door krachtsoverdracht naar de trekstaaf.



Figuur 5.4 Op drukbelaste staaf met keep en verende ondersteuning

Er wordt de doorbuigingsvorm een sinusvorm aangenomen.

$$y(x) = C \sin(\pi x / L) \tag{5.17}$$

$$y'(x) = C \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$y''(x) = -C \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

De inwendige potentiële energie is gelijk aan:

$$E_{pot,i} = \int_L \frac{1}{2} EI (y'')^2 dx$$

Voor \$L/2\$ geldt:

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = y_c = C \sin\left(\frac{\pi \frac{L}{2}}{L}\right) = C$$

De inwendige energie in de veer is:

$$\frac{1}{2} k \cdot y_c^2 = \frac{1}{2} k C^2$$

De uitwendige potentiële energie is gelijk aan:

$$E_{pot,u} = - \int_L \frac{1}{2} P (y')^2 dx$$

De inwendige en uitwendige potentiële energie wordt bij elkaar opgeteld:

$$E_{pot} = \left[ \int_L \frac{1}{2} EI (y'')^2 dx + \frac{1}{2} k \cdot y_c^2 - \int_L \frac{1}{2} P (y')^2 dx \right]$$

Voor de staaf met keep geldt:

$$E_{pot,i} = \frac{EI}{2} \int_L (y'')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_L \left[ -C \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]^2 dx$$

$$E_{pot,i} = \frac{EI}{2} \cdot \frac{C^2 \pi^4}{L^4} \int_L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{EI}{2} \cdot \frac{C^2 \pi^4}{L^4} \int_L \left[ \frac{1}{2} (1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)) \right] dx$$

Voor de staaf met keep is de inwendige potentiële energie in paragraaf 3.2 bepaald:

$$E_{pot,i} = \frac{EI_1 C^2 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left(\frac{I_2}{I_1}\right) \cdot \left(\frac{H}{L}\right) + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right]$$

Voor een halfhoutse keepverbinding ( $\frac{I_2}{I_1} = 0.125$ ) geldt:

$$E_{pot,i} = \frac{EI_1 C^2 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left(\frac{0.125H}{L}\right) - \frac{0.875}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right]$$

Voor de staaf met keep en gesteund in het midden door de veer geldt:

$$E_{pot,i} = \left\{ \frac{EI_1 C^2 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left(\frac{I_2}{I_1}\right) \cdot \left(\frac{H}{L}\right) + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right] + \frac{k}{2} \right\} C^2 \quad (5.18)$$

Voor  $\frac{I_2}{I_1} = 0.125$  geldt:

$$E_{pot,i} = \left\{ \frac{EI_1 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left(\frac{0.125H}{L}\right) - \frac{0.875}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right] + \frac{k}{2} \right\} C^2$$

Voor de uitwendige potentiële energie geldt:

$$E_{pot,u} = -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^L (y')^2 dx = -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^L \left[ C \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]^2 dx$$

$$E_{pot,u} = -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^L \left[ C^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx = -\frac{P_{cr} \pi^2 C^2}{4L} \quad (5.19)$$

De inwendige en uitwendige potentiële energie wordt bij elkaar opgeteld, hetgeen resulteert in vgl.(5.37).

$$E_{pot} = \left\{ \frac{EI_1 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left(\frac{I_2}{I_1}\right) \cdot \left(\frac{H}{L}\right) + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right] + \frac{k}{2} - \frac{P_{cr} \pi^2}{4L} \right\} C^2 \quad (5.20)$$

Met  $\frac{I_2}{I_1} = 0.125$  geldt:

$$E_{pot} = \left\{ \frac{EI_1 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{0.125H}{L} \right) - \frac{0.875}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right] + \frac{k}{2} - \frac{P_{cr} \pi^2}{4L} \right\} C^2$$

Voor evenwicht geldt:

$$\delta E_{pot} = \frac{dE_{pot}}{dC} \delta C = 0$$

Voor een niet triviale oplossing geldt het volgende:

$$\frac{EI_1 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \left( \frac{H}{L} \right) + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right] + \frac{k}{2} - \frac{P_{cr} \pi^2}{4L} = 0$$

$$\frac{EI_1 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \left( \frac{H}{L} \right) + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) + \frac{k}{2} \cdot \frac{2L^3}{EI_1 \pi^4} \right] = \frac{P_{cr} \pi^2}{4L}$$

$$\frac{P_{cr} \pi^2}{4L} = \frac{EI_1 \pi^4}{2L^3} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \left( \frac{H}{L} \right) + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) + \frac{kL^3}{EI_1 \pi^4} \right]$$

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI_1}{L^2} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \left( \frac{H}{L} \right) + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) + \frac{kL^3}{EI_1 \pi^4} \right]$$

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI_1}{L^2} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot \left( \frac{H}{L} \right) + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right] + \frac{2k \cdot L}{\pi^2} \tag{5.21}$$

Met  $\frac{I_2}{I_1} = 0.125$  geldt:

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI_1}{L^2} \left[ \frac{l}{L} + \left( \frac{0.125H}{L} \right) - \frac{0.875}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right] + \frac{2k \cdot L}{\pi^2}$$

Voor de niet gekepte staaf geldt  $I_1 = I_2$ , m.a.w.  $\beta=1$  (zie paragraaf 3.1.5), en vgl.(5.21) wordt:

**Controle:**

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI_1}{L^2} \left[ \frac{l}{L} + \frac{H}{L} + 0 \right] + \frac{2k \cdot L}{\pi^2}$$

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI_1}{L^2} \left[ \frac{L/2}{L} \right] + \frac{2k \cdot L}{\pi^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{L^2} + \frac{2k \cdot L}{\pi^2}$$

**5.3. Numeriek:**

De verkregen resultaten zijn vergeleken met de Eindige-Elementen-Methode(EEM).

De betreffende staaf is gemodelleerd met BEAM 189 en COMBIN 14 in eindige elementen program ANSYS. Daarvoor is de invoerfile uit bijlage 5 gebruikt.

Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	I [mm]	b [mm]	h [mm]	k [N/mm]	P [kN]	Hi [mm]	EI N/mm <sup>4</sup>	EI <sub>2</sub> [N/mm <sup>4</sup> ]	P <sub>cr</sub> [kN] Ansysy(Energ)	L <sub>k</sub> [L]	n [-]	
3500	1800	3936	1928	80	160	152*	0.33	40	3E+11	34133333333	264	289	0.81	805
3500	1800	3936	1928	80	160	280**	115	40	3E+11	34133333333	372	391	0.68	3.23
3500	1800	3936	1928	80	160	608***	413	40	3E+11	34133333333	624	653	0.53	1.51
4500	2400	5100	2500	100	200	172*	0.2	50	7E+11	83333333333	387	422	0.81	1935
4500	2400	5100	2500	100	200	314**	167	50	7E+11	83333333333	541	569	0.68	3.24
4500	2400	5100	2500	100	200	682***	600	50	7E+11	83333333333	908	949	0.53	1.51
5000	2700	5682	2781	120	240	252*	1	60	1E+12	172800000000	635	697	0.82	635
5000	2700	5682	2781	120	240	468**	280	60	1E+12	172800000000	897	946	0.69	3.20
5000	2700	5682	2781	120	240	1017***	1003	60	1E+12	172800000000	1511	1578	0.53	1.51
6000	3300	6848	3354	140	280	270*	1	70	3E+12	320133333333	817	894	0.81	817
6000	3300	6848	3354	140	280	496**	365	70	3E+12	320133333333	1147	1208	0.69	3.23
6000	3300	6848	3354	140	280	1081***	1280	70	3E+12	320133333333	1933	2020	0.53	1.51
5000	7000	8600	4250	100	200	41*	0.3	50	7E+11	83333333333	151	159	0.77	503
5000	7000	8600	4250	100	200	71**	59	50	7E+11	83333333333	204	211	0.66	3.46
5000	7000	8600	4250	100	200	138***	212	50	7E+11	83333333333	331	328	0.52	1.56
6500	11000	12700	6230	240	480	373*	0.5	120	2E+13	2764800000000	2090	2269	0.80	4180
6500	11000	12700	6230	240	480	682**	893	120	2E+13	2764800000000	2919	3064	0.68	3.27
6500	11000	12700	6230	240	480	1471***	3210	120	2E+13	2764800000000	4876	5094	0.53	1.52
5500	9000	10500	5150	200	400	318*	0.4	100	1E+13	1333333333333	1470	1600	0.81	3675
5500	9000	10500	5150	200	400	582**	632	100	1E+13	1333333333333	2059	2161	0.68	3.26
5500	9000	10500	5150	200	400	1256***	2266	100	1E+13	1333333333333	3440	3596	0.53	1.52

Tabel 5.2 Verificatie met behulp van ANSYS

**Referentie:**

- \* de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep zonder de invloed van de trekkracht (is volgens vgl.5.16 bepaald
- \*\* de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep en met de invloed van de trekkracht
- \*\*\* de kritische veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep en met de invloed van de trekkracht

Tabel 5.2 presenteert de knikkracht van de opdrukbelaste staaf met keep, gesteund in het midden door de veer en bevestigt dat de potentiële energie methode is een effectieve methode voor een knik analyse van de opdrukbelaste staaf met keep en gesteund in het midden door de veer.

Als tabel 5.2 (staven met keep) met tabel 4.1 (staven zonder keep) wordt vergeleken, zien wij dat de keep een verkleinde invloed op de knikkracht en ook op de veerstijfheid heeft.

De keep heeft een vergrotende invloed op de kniklengte met vergelijking voor staaf zonder keep.

De veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep zonder de invloed van de trekkracht is ongeveer 18-

30% gereduceerd in vergelijking met de veerstijfheid door de trekstaaf voor staaf zonder keep ( $\frac{48EI}{L^3}$ ).

De veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep en met de invloed van de trekkracht is ongeveer 15-21% gereduceerd in vergelijking met de veerstijfheid door de trekstaaf voor staaf zonder keep ( $\frac{8\pi^2 EI}{L^3}$ ).

De veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep en met de invloed van de trekkracht is ongeveer 10-14% gereduceerd in vergelijking met de veerstijfheid door de trekstaaf voor staaf zonder keep ( $\frac{16\pi^2 EI}{L^3}$ ).

De keep heeft op de kritische veerstijfheid ( $k_{cr}$ ) kleine invloed dan op  $k < k_{cr}$ .

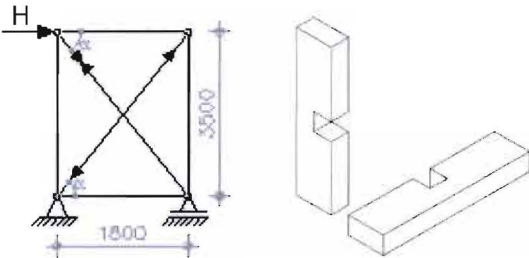
De knikvormen zijn voor staven met keep voor alle drie gevallen van tabel 5.2 symmetrisch (zie bijlage 5). Terwijl in hoofdstuk 4 is de knikvorm bij de kritische veerstijfheid voor staven zonder keep antisymmetrisch.

## 5.4. Praktijk toepassingen voor het kruisverband met keep

In deze paragraaf wordt het kruisverband met keep belast door de windbelasting geanalyseerd in vergelijking met §4.4

### 5.4.1. Numeriek

In figuur 5.5 is het gekepte kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 5.5 Het kruisverband met keep en diagonalen

Als de windkracht gelijk aan  $H=27\text{kN}$  is dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L = L_{dig} = \sqrt{(1800)^2 + (3500)^2} = 3936\text{mm}$$

$$\cos \alpha = \frac{1800}{3936} = 0,457$$

Indien  $T=P$  is, geldt:

$$T = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 29\text{kN} \text{ en } P = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 29\text{kN}$$

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 5.6).

Voor  $T=29\text{kN}$  is de veerstijfheid voor staaf zonder keep gelijk aan  $250\text{N/mm}$  (zie §4.4).

Aangezien de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep en met de invloed van de trekkracht analytisch is niet bepaald. Wordt eerst de veerstijfheid voor staaf met keep ongeveer

$k_{keep} = 73\% \text{ van } k_{zonder,keep}$  wordt aangenomen en voor deze veerstijfheid wordt de knikkracht voor staaf met

keep en verende ondersteuning bepaald. Dan wordt de knikkracht voor het kruisverband met keep en met

een trekkracht gelijk aan  $T = \frac{P}{n}$  in Ansys bepaald. Als deze twee knikkrachten hetzelfde zijn betekent dat

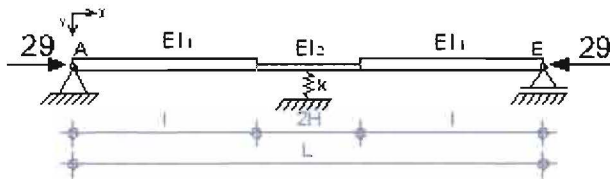
de aan genomen veerstijfheid de juiste veerstijfheid is.

$$k_{keep} = 73\% \text{ van } k_{zonder,keep} = 183\text{N/mm}$$

Met 27% gereduceerde veerstijfheid ( $183\text{N/mm}$ ) is de knikkracht voor staaf met keep en verende ondersteuning gelijk aan knikkracht voor het kruisverband met keep.

De knikkracht wordt volgens de ANSYS voor de staaf met keep en verende ondersteuning bepaald (zie figuur 5.6):





Figuur 5.6 Schematisati staaf met keep en verende ondersteuning

$$P_{cr} = 29 \cdot 10,02 = 291kN$$

De in dit onderzoek berekeningen zijn gemaakt met  $n \geq 10$

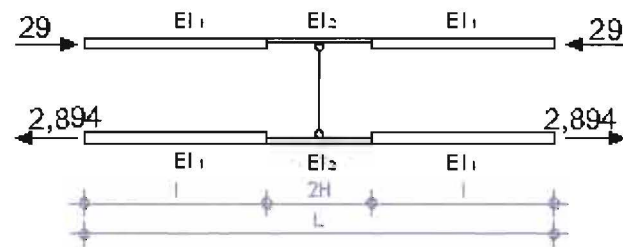
$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 10,02$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,11$$

De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald. Er wordt de drukbelasting ( $P=29kN$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$T = \frac{P}{n} = \frac{29}{10,02} = 2,894kN$$

Dus trekkracht groeit van 2,894kN tot 29kN. Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van 29kN voor dit kruisverband niet boven 29kN moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van 29kN tot de knikkracht (291kN) is bereikt.



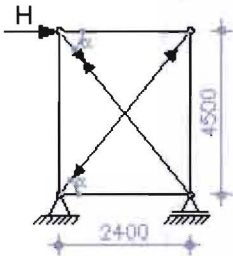
Figuur 5.7 Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS

$$P_{cr} = 291kN$$

De knikvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

### 5.4.2. Numeriek

In figuur 5.8 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 5.8 Het kruisverband met keep en diagonalen

Als de windkracht is gelijk aan  $H=40\text{kN}$  dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L_{dig} = \sqrt{(2400)^2 + (4500)^2} = 5100\text{mm}$$

$$\cos \alpha = \frac{2400}{5100} = 0,47$$

Indien  $T=P$  is, geldt:

$$T = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 42\text{kN} \text{ en } P = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 42\text{kN}$$

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 5.9).

Voor  $T=42\text{kN}$  is de veerstijfheid voor staaf zonder keep gelijk aan  $281\text{N/mm}$  (zie §4.4).

Aangezien de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep en met de invloed van de trekkracht analytisch is niet bepaald. Wordt eerst de veerstijfheid voor staaf met keep ongeveer

$k_{keep} = 74\% vank_{zonder,keep}$  wordt aangenomen en voor deze veerstijfheid wordt de knikkracht voor staaf met keep en verende ondersteuning bepaald. Dan wordt de knikkracht voor het kruisverband met keep en met

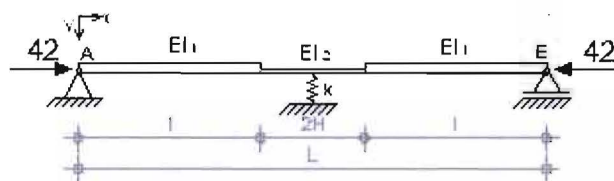
een trekkracht gelijk aan  $T = \frac{P}{n}$  in Ansys bepaald. Als deze twee knikkrachten hetzelfde zijn betekent dat

de aan genomen veerstijfheid de juiste veerstijfheid is.

$$k_{keep} = 74\% vank_{zonder,keep} = 208\text{N / mm}$$

Met 26% gereduceerde veerstijfheid ( $208\text{N/mm}$ ) is de knikkracht voor staaf met keep en verende ondersteuning gelijk aan knikkracht voor het kruisverband met keep.

De knikkracht wordt volgens de ANSYS voor de staaf met keep en verende ondersteuning bepaald (zie figuur 5.9):



Figuur 5.9 Schematisatie staaf met keep en verende ondersteuning

$$P_{cr} = 42 \cdot 10,158 = 427 \text{ kN}$$

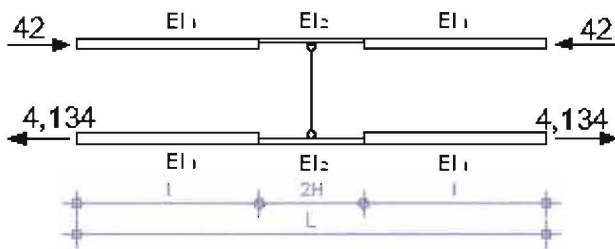
$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 10,166$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,10$$

De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald. Er wordt de drukbelasting ( $P=42\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$\frac{42}{10,159} = 4,134 \text{ kN}$$

Dus trekkracht groeit van 4,134 kN tot 42 kN. Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van 42 kN voor dit kruisverband niet boven 42 kN moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van 42 kN tot de knikkracht (426 kN) is bereikt.



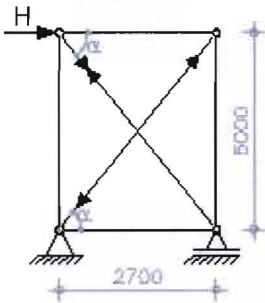
Figuur 5.10 Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS

$$P_{cr} = 426,3 \text{ kN}$$

De knikvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

5.4.3. Numeriek

In figuur 5.11 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 5.11 Het kruisverband met diagonalen

Als de windkracht is gelijk aan  $H=67\text{kN}$  dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L_{dig} = \sqrt{(2700)^2 + (5000)^2} = 5682\text{mm}$$

$$\cos \alpha = \frac{2700}{5682} = 0,475$$

Indien  $T=P$  is, geldt:

$$T = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 70\text{kN} \text{ en } P = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 70\text{kN}$$

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 5.12).

Voor  $T=70\text{kN}$  is de veerstijfheid voor staaf zonder keep gelijk aan  $421\text{N/mm}$  (zie §4.4).

Aangezien de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep en met de invloed van de trekkracht analytisch is niet bepaald. Wordt eerst de veerstijfheid voor staaf met keep ongeveer

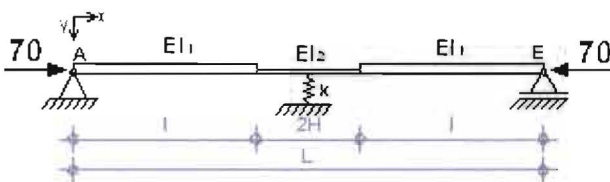
$k_{keep} = 72,4\% \text{ van } k_{zonder;keep}$  wordt aangenomen en voor deze veerstijfheid wordt de knikkracht voor staaf met keep en verende ondersteuning bepaald. Dan wordt de knikkracht voor het kruisverband met keep en met een trekkracht gelijk aan  $T = \frac{P}{n}$  in Ansys bepaald. Als deze twee knikkrachten hetzelfde zijn betekent

dat de aan genomen veerstijfheid de juiste veerstijfheid is.

$$k_{keep} = 72,4\% \text{ van } k_{zonder;keep} = 305\text{N/mm}$$

Met 27.6% gereduceerde veerstijfheid ( $305\text{N/mm}$ ) is de knikkracht voor staaf met keep en verende ondersteuning gelijk aan knikkracht voor het kruisverband met keep.

De knikkracht wordt volgens de ANSYS voor de staaf met keep en verende ondersteuning bepaald (zie figuur 5.12):



Figuur 5.12 Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning

$$P_{cr} = 70 \cdot 10 = 700 \text{ kN}$$

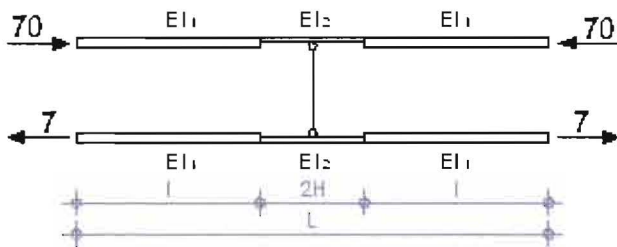
$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 10$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,11$$

De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald. Er wordt de drukbelasting ( $P=70\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$\frac{70}{10} = 7 \text{ kN}$$

Dus trekkracht groeit van 7kN tot 70kN. Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van 70kN voor dit kruisverband niet boven 70kN moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van 70kN tot de knikkracht (700kN) is bereikt.



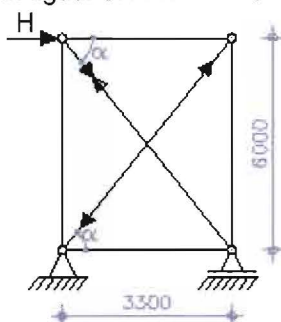
Figuur 5.13 Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS

$$P_{cr} = 701 \text{ kN}$$

De knikvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

#### 5.4.4. Numeriek

In figuur 5.14 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 5.14 Het kruisverband met diagonalen

Als de windkracht is gelijk aan  $H=87\text{kN}$  dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L_{dig} = \sqrt{(3300)^2 + (6000)^2} = 6848\text{mm}$$

$$\cos \alpha = \frac{3300}{6848} = 0,482$$

Indien  $T=P$  is, geldt:

$$T = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 90\text{kN} \text{ en } P = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 90\text{kN}$$

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 5.15).

Voor  $T=90\text{kN}$  is de veerstijfheid voor staaf zonder keep gelijk aan  $446\text{N/mm}$  (zie §4.4).

Aangezien de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep en met de invloed van de trekkracht analytisch is niet bepaald. Wordt eerst de veerstijfheid voor staaf met keep ongeveer

$k_{keep} = 73\% \text{ van } k_{zonder.Keep}$  wordt aangenomen en voor deze veerstijfheid wordt de knikkracht voor staaf met keep en verende ondersteuning bepaald. Dan wordt de knikkracht voor het kruisverband met keep en met

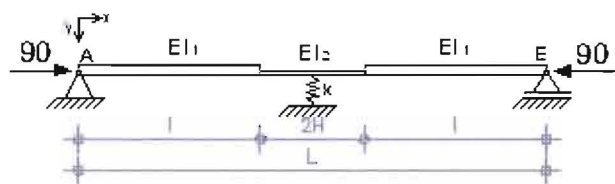
een trekkracht gelijk aan  $T = \frac{P}{n}$  in Ansys bepaald. Als deze twee knikkrachten hetzelfde zijn betekent dat

de aan genomen veerstijfheid de juiste veerstijfheid is.

$$k_{keep} = 73\% \text{ van } k_{zonder.Keep} = 325\text{N/mm}$$

Met 27% gereduceerde veerstijfheid ( $325\text{N/mm}$ ) is de knikkracht voor staaf met keep en verende ondersteuning gelijk aan knikkracht voor het kruisverband met keep.

De knikkracht wordt volgens de ANSYS voor de staaf met keep en verende ondersteuning bepaald (zie figuur 5.15):



Figuur 5.15 Schematisatie staaf met keep en verende ondersteuning

$$P_{cr} = 90 \cdot 9,984 = 899 \text{ kN}$$

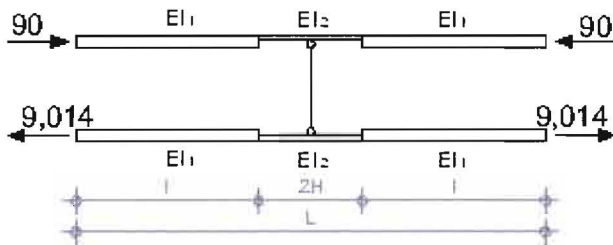
$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 9,98$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,11$$

De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald. Er wordt de drukbelasting ( $P=90\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$\frac{90}{9,984} = 9,014 \text{ kN}$$

Dus trekkracht groeit van  $9,014\text{kN}$  tot  $90\text{kN}$ . Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van  $90\text{kN}$  voor dit kruisverband niet boven  $90\text{kN}$  moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van  $90\text{kN}$  tot de knikkracht ( $898\text{kN}$ ) is bereikt.



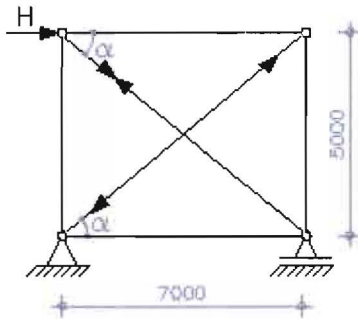
Figuur 5.16 Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS

$$P_{cr} = 901 \text{ kN}$$

De knikvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

### 5.4.5. Numeriek

In figuur 5.17 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 5.17 Het kruisverband met diagonalen

Als de windkracht is gelijk aan  $H=24\text{kN}$  dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L_{dig} = \sqrt{(5000)^2 + (7000)^2} = 8600\text{mm}$$

$$\cos \alpha = \frac{7000}{8600} = 0,81$$

Indien  $T=P$  is, geldt:

$$T = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 15\text{kN} \text{ en } P = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 15\text{kN}$$

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 5.18).

Voor  $T=15\text{kN}$  is de veerstijfheid voor staaf zonder keep gelijk aan  $59\text{N/mm}$  (zie §4.4).

Aangezien de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep en met de invloed van de trekkracht analytisch is niet bepaald. Wordt eerst de veerstijfheid voor staaf met keep ongeveer

$k_{keep} = 73\% \text{ van } k_{zonder;keep}$  wordt aangenomen en voor deze veerstijfheid wordt de knikkraft voor staaf met keep en verende ondersteuning bepaald. Dan wordt de knikkraft voor het kruisverband met keep en met

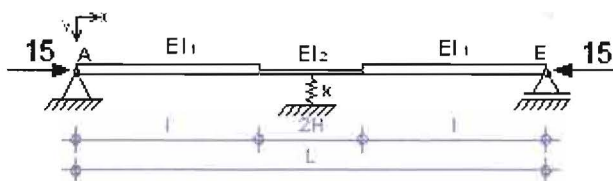
een trekkracht gelijk aan  $T = \frac{P}{n}$  in Ansys bepaald. Als deze twee knikkraften hetzelfde zijn betekent dat

de aan genomen veerstijfheid de juiste veerstijfheid is.

$$k_{keep} = 73\% \text{ van } k_{zonder;keep} = 43\text{N/mm}$$

Met 27% gereduceerde veerstijfheid ( $43\text{N/mm}$ ) is de knikkraft voor staaf met keep en verende ondersteuning gelijk aan knikkraft voor het kruisverband met keep.

De knikkraft wordt volgens de ANSYS voor de staaf met keep en verende ondersteuning bepaald (zie figuur 5.18):



Figuur 5.18 Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning



$$P_{cr} = 15 \cdot 10,852 = 163 \text{ kN}$$

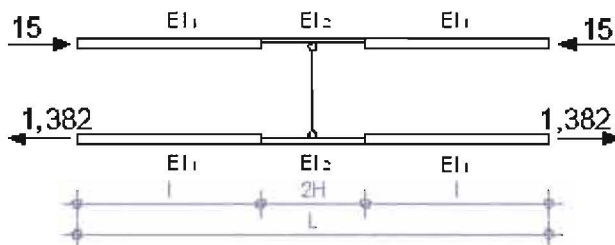
$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 10,85$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,10$$

De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald. Er wordt de drukbelasting ( $P=15\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$\frac{15}{10,852} = 1,382 \text{ kN}$$

Dus trekkracht groeit van 1,382 kN tot 15 kN. Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van 15 kN voor dit kruisverband niet boven 15 kN moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van 15 kN tot de knikkracht (164 kN) is bereikt.



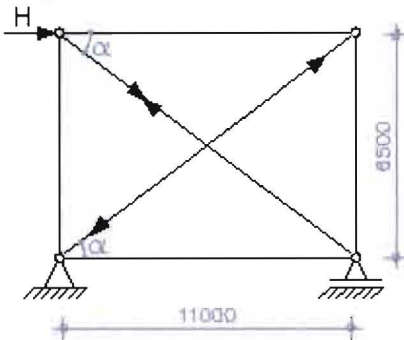
Figuur 5.19 Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS

$$P_{cr} = 164 \text{ kN}$$

De knikvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

5.4.6. Numeriek

In figuur 5.20 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 5.20 Het kruisverband met diagonalen

Als de windkracht is gelijk aan  $H=372\text{kN}$  dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L_{dig} = \sqrt{(6500)^2 + (11000)^2} = 12700\text{mm}$$

$$\cos \alpha = \frac{11000}{12700} = 0,866$$

Indien  $T=P$  is, geldt:

$$T = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 215\text{kN} \text{ en } P = \frac{H/2}{\cos \alpha} = 215\text{kN}$$

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid  $k$  (zie figuur 5.21).

Voor  $T=215\text{kN}$  is de veerstijfheid voor staaf zonder keep gelijk aan  $599\text{N/mm}$  (zie §4.4).

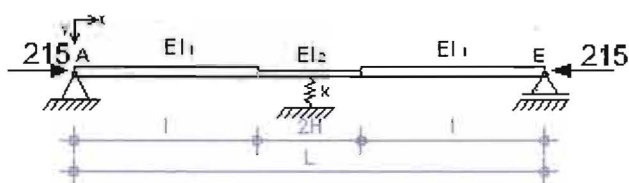
Aangezien de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep en met de invloed van de trekkracht analytisch is niet bepaald. Wordt eerst de veerstijfheid voor staaf met keep ongeveer  $k_{keep} = 74,5\% \text{ van } k_{zonder;keep}$  wordt aangenomen en voor deze veerstijfheid wordt de knikkracht voor staaf met keep en verende ondersteuning bepaald. Dan wordt de knikkracht voor het kruisverband met keep en

met een trekkracht gelijk aan  $T = \frac{P}{n}$  in Ansys bepaald. Als deze twee knikkrachten hetzelfde zijn betekent dat de aan genomen veerstijfheid de juiste veerstijfheid is.

$$k_{keep} = 74,5\% \text{ van } k_{zonder;keep} = 447\text{N/mm}$$

Met 25.5% gereduceerde veerstijfheid ( $447\text{N/mm}$ ) is de knikkracht voor staaf met keep en verende ondersteuning gelijk aan knikkracht voor het kruisverband met keep.

De knikkracht wordt volgens de ANSYS voor de staaf met keep en verende ondersteuning bepaald (zie figuur 5.21):



Figuur 5.21 Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning

$$P_{cr} = 215 \cdot 10,65 = 2290 \text{ kN}$$

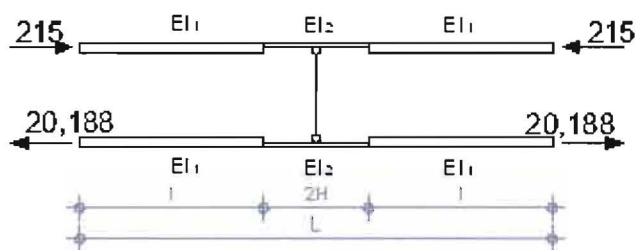
$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 10,65$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,10$$

De kritische knikkraft wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald. Er wordt de drukbelasting ( $P=215\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$\frac{215}{10,65} = 20,188 \text{ kN}$$

Dus trekkracht groeit van  $20,188\text{kN}$  tot  $215\text{kN}$ . Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van  $215\text{kN}$  voor dit kruisverband niet boven  $215\text{kN}$  moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van  $215\text{kN}$  tot de knikkraft ( $2289\text{kN}$ ) is bereikt.



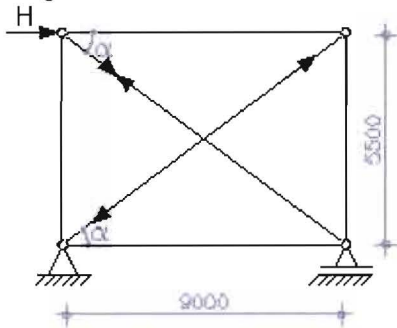
Figuur 5.22 Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS

$$P_{cr} = 2289 \text{ kN}$$

De knikkvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

5.4.7. Numeriek

In figuur 5.22 is het kruisverband met diagonalen en windkracht(H) weergegeven.



Figuur 5.23 Het kruisverband met diagonalen

Als de windkracht is gelijk aan H=257kN dan:

$$H = P \cdot \cos \alpha + T \cdot \cos \alpha$$

$$L_{dig} = \sqrt{(5500)^2 + (9000)^2} = 10500mm$$

$$\cos \alpha = \frac{9000}{10500} = 0,857$$

Indien T=P is, geldt:

$$T = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 150kN \text{ en } P = \frac{H / 2}{\cos \alpha} = 150kN$$

De invloed van de trekstaaf kan gezien worden als een veer met veerstijfheid k (zie figuur 5.24).

Voor T=150kN is de veerstijfheid voor staaf zonder keep gelijk aan 511N/mm (zie §4.4).

Aangezien de veerstijfheid geleverd door de trekstaaf met keep en met de invloed van de trekkracht analytisch is niet bepaald. Wordt eerst de veerstijfheid voor staaf met keep ongeveer

$k_{keep} = 74,5\% \text{ van } k_{zonder,keep}$  wordt aangenomen en voor deze veerstijfheid wordt de knikkracht voor staaf met keep en verende ondersteuning bepaald. Dan wordt de knikkracht voor het kruisverband met keep en

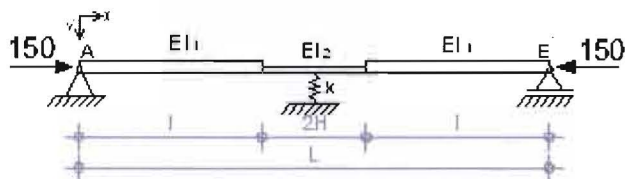
met een trekkracht gelijk aan  $T = \frac{P}{n}$  in Ansys bepaald. Als deze twee knikkrachten hetzelfde zijn betekent

dat de aan genomen veerstijfheid de juiste veerstijfheid is.

$$k_{keep} = 74,5\% \text{ van } k_{zonder,keep} = 380N / mm$$

Met 25.5% gereduceerde veerstijfheid (380N/mm) is de knikkracht voor staaf met keep en verende ondersteuning gelijk aan knikkracht voor het kruisverband met keep.

De knikkracht wordt volgens de ANSYS voor de staaf met keep en verende ondersteuning bepaald (zie figuur 5.24):



Figuur 5.24 Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning

$$P_{cr} = 150 \cdot 10,742 = 1611 \text{ kN}$$

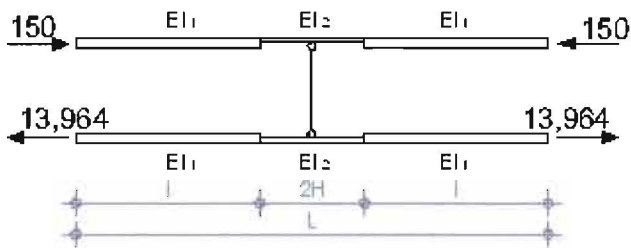
$$n = \frac{P_{cr}}{P} = 10,742$$

$$\frac{n}{n-1} = 1,10$$

De kritische knikkracht wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald. Er wordt de drukbelasting ( $P=150\text{kN}$ ) en trekbelasting gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$\frac{150}{10,742} = 13,964 \text{ kN}$$

Dus trekkracht groeit van 13,964 kN tot 150 kN. Omdat de trekkracht volgens de drukkracht van 150 kN voor dit kruisverband niet boven 150 kN moet groeien. Terwijl de drukbelasting groeit van 150 kN tot de knikkracht (1611 kN) is bereikt.



Figuur 5.25 Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS

$$P_{cr} = 1611 \text{ kN}$$

De knikvorm is voor dit kruisverband symmetrisch.

In tabel 5.3 is de knikkracht en de kniklengte voor de staaf met keep weergegeven.

Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	I [mm]	b [mm]	h [mm]	k [N/mm]	P [kN]	Hi [mm]	Eh [mm <sup>4</sup> ]	Elz [mm <sup>4</sup> ]	Pcr [kN]		wind [kN]	Lk [L]	n [-]	n/n-1 [-]
											(Ansys)	(Energ)				
3500	1800	3936	1928	80	160	183	29	40	2.73E+11	34133333333	291	314	27	0.774	10.0	1.11
4500	2400	5100	2500	100	200	208	42	50	6.67E+11	83333333333	427	459	40	0.770	10.2	1.11
5000	2700	5682	2781	120	240	305	70	60	1.38E+12	172800000000	700	758	67	0.777	10.0	1.11
6000	3300	6848	3354	140	280	325	90	70	2.56E+12	320133333333	899	971	87	0.775	10.0	1.11
5000	7000	8600	4250	100	200	43	15	50	6.67E+11	83333333333	163	162	24	0.739	10.9	1.10
6500	11000	12700	6230	240	480	447	215	120	2.21E+13	2764800000000	2290	2459	372	0.769	10.7	1.10
5500	9000	10500	5150	200	400	380	150	100	1.07E+13	1333333333333	1611	1732	257	0.770	10.7	1.10

Tabel 5.3 Vergelijking van de resultaten voor verende gesteunde staven met keep

Als tabel 5.3 met tabel 4.2 wordt vergeleken, zien wij dat de knikkracht en de veerstijfheid zijn door de keep gereduceerd. En de kniklengte (Lk) wordt door de keep vergroot in vergelijking met het kruisverband zonder keep.

In tabel 5.4 is de knikkracht en de kniklengte voor het kruisverband met keep weergegeven.

Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	I [mm]	b [mm]	h [mm]	T [kN]	P [kN]	Hi [mm]	Eh [mm <sup>4</sup> ]	Elz [mm <sup>4</sup> ]	Pcr [kN]		wind [kN]	Lk [L]	n [-]	n/n-1 [-]
											(Ansys)	(Energ)				
3500	1800	3936	1928	80	160	2.89	29	40	2.73E+11	34133333333	291	27	0.773	10.0	1.11	
4500	2400	5100	2500	100	200	4.13	42	50	6.67E+11	83333333333	426	40	0.770	10.2	1.11	
5000	2700	5682	2781	120	240	7.00	70	60	1.38E+12	172800000000	701	67	0.777	10.0	1.11	
6000	3300	6848	3354	140	280	9.01	90	70	2.56E+12	320133333333	901	87	0.774	10.0	1.11	
5000	7000	8600	4250	100	200	1.38	15	50	6.67E+11	83333333333	164	24	0.736	10.9	1.10	
6500	11000	12700	6230	240	480	20.19	215	120	2.21E+13	2764800000000	2289	372	0.769	10.6	1.10	
5500	9000	10500	5150	200	400	13.96	150	100	1.07E+13	1333333333333	1611	257	0.770	10.7	1.10	

Tabel 5.4 Vergelijking van de resultaten voor kruisverbanden met keep

### **5.5. Conclusie:**

De energie methode komt niet overeen met de ANSYS. De knikkrachten bepaald met de energie methode zijn altijd hoger dan de resultaten met ANSYS. Dit komt doordat de eerste orde moment door de excentriciteit in de veronderstelde vervorming niet meegenomen is. Voor het eerste orde moment zie bijlage 5.

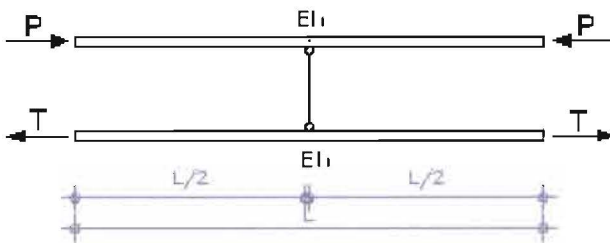
Als tabel 5.2 (staaf met keep) met tabel 4.1 (staaf zonder keep) wordt vergeleken, zien wij dat de keep een verkleinde invloed op de knikkracht en ook op de veerstijfheid (geleverd door de trekstaaf) heeft. En heeft de keep een vergrotende invloed op de kniklengte.

## 6 Numerieke beschouwing van het volledige kruisverband:

### 6.1.1. Knikkraft voor het kruisverband zonder keep:

Met de eindige elementen methode (Ansys) is de kritische kracht voor het hele systeem zonder keep bepaald. Verbindingen zijn belangrijke elementen die een of meer constructie elementen samen verbinden. Het kruisverband is gemodelleerd met BEAM 3 in eindige elementen program ANSYS. De staven zijn in het midden aan elkaar gekoppeld door de translatie-vrijheidsgraden in y richting van de middelste knopen te koppelen (met het CERIG commando). De ene staaf wordt met een drukkracht P belast, terwijl de andere staaf wordt belast door een trekkracht.

Voor de schematisatie van het kruisverband zie bijlage 6.



*Figuur 6.1 Schematisatie het kruisverband zonder keep*

De verbinding van de staven is van cruciaal belang voor het analyseren van het knikgedrag van het kruisverband, omdat ze werken onder de horizontale belasting.

De kritische knikkraft wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald. Er wordt de drukbelasting (P) en trekbelasting (T) gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$T = \frac{P}{n}$$

De n waarde is in tabel 4.1 voor op drukbelaste staaf met veer bepaald.



Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	b [mm]	h [mm]	T [kN]	P [kN]	EI N/mm <sup>4</sup>	P <sub>cr</sub> [kN] (Ansys)	L <sub>k</sub> [L]	n [-]	n/n-1 [-]
3500	1800	3936	80	160	0	0.33	2.73E+11	343	0.71	1045	1.00
3500	1800	3936	80	160	29.6	115	2.73E+11	448	0.62	3.893	1.35
3500	1800	3936	80	160	245	413	2.73E+11	696	0.5	1.685	2.46
4500	2400	5100	100	200	0	0.2	6.67E+11	498	0.71	2488	1.00
4500	2400	5100	100	200	43	167	6.67E+11	651	0.62	3.897	1.35
4500	2400	5100	100	200	356	600	6.67E+11	1012	0.5	1.686	2.46
5000	2700	5682	120	240	0	1.0	1.38E+12	833	0.71	833	1.00
5000	2700	5682	120	240	72	280	1.38E+12	1089	0.62	3.89	1.35
5000	2700	5682	120	240	595	1003	1.38E+12	1691	0.5	1.686	2.46
6000	3300	6848	140	280	0	1.0	2.56E+12	1062	0.71	1062	1.00
6000	3300	6848	140	280	91	355	2.56E+12	1386	0.62	3.904	1.34
6000	3300	6848	140	280	760	1280	2.56E+12	2156	0.5	1.684	2.46
5000	7000	8600	100	200	0	0.3	6.67E+11	175	0.71	584.6	1.00
5000	7000	8600	100	200	17	59	6.67E+11	229	0.62	3.883	1.35
5000	7000	8600	100	200	112	212	6.67E+11	356	0.5	1.679	2.47
6500	11000	12700	240	480	0	0.5	2.21E+13	2664	0.71	5328	1.00
6500	11000	12700	240	480	229	893	2.21E+13	3482	0.62	3.899	1.34
6500	11000	12700	240	480	1904	3210	2.21E+13	5412	0.5	1.686	2.46
5500	9000	10500	200	400	0	0.4	1.07E+13	1880	0.71	4699	1.00
5500	9000	10500	200	400	163	632	1.07E+13	2458	0.62	3.89	1.35
5500	9000	10500	200	400	1343	2265	1.07E+13	3819	0.5	1.686	2.46

Tabel 6.1 Knikkracht voor het kruisverband zonder keep in ANSYS

Uit de tabel 6.1 blijkt dat de kritische knikkracht voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) goed overeen komt met de kritische knikkracht voor gedrukte staven met verende ondersteuning in het midden (zie tabel 4.1).

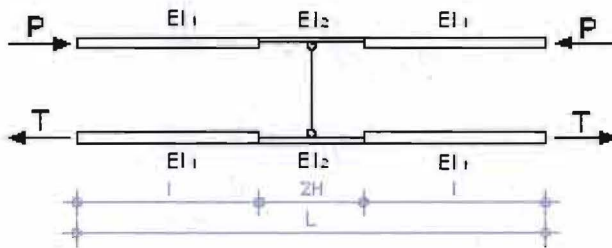
6.1.2. Knikkraft voor het kruisverband met keep:

Met de eindige elementen methode (Ansys) is de kritische kracht voor het hele systeem bepaald.

Het kruisverband is gemodelleerd met BEAM 189 in eindige elementen program ANSYS. Daarvoor is de invoerfile uit bijlage 6 gebruikt.

Het kruisverband is gemodelleerd door twee staven met lengte L en keep met lengte 2H. De staven zijn in het midden aan elkaar gekoppeld door de translatie-vrijheidsgraden in y richting van de middelste knopen te koppelen (met het couple commando). Dit commando zorgt ervoor dat het midden knooppunt van de trekstaaf even(gelijk) zal bewegen met het midden knooppunt van de drukstaaf als gevolg van de belasting. Hier wordt uy gekozen voor de vrijheidsgraden voor het koppelen van de beweging van de knooppunten in de y richting.

Voor de schematisatie van het kruisverband zie bijlage 6.



*Figuur 6.2 Schematisatie het kruisverband met keep*

De verbinding van de staven is van cruciaal belang voor het analyseren van het knikgedrag van het kruisverband, omdat ze werken onder de horizontale belasting.

De kritische knikkraft wordt in ANSYS voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) bepaald. Er wordt de drukbelasting (P) en trekbelasting (T) gelijk aangenomen. In ANSYS groeit de trekbelasting tegelijk met de drukbelasting. Om dit te voorkomen, wordt de trekstaaf belast met:

$$T = \frac{P}{n}$$

De n waarde is in tabel 5.2 voor op drukbelaste staaf met keep en gesteund in het midden door de veer bepaald.

Hoogte [mm]	Breedte [mm]	L [mm]	b [mm]	h [mm]	Hi [mm]	T [kN]	P [kN]	Eh N/mm <sup>4</sup>	Elz [N/mm <sup>4</sup> ]	Pcr [kN] (Ansys)	Lk [L]	n [-]	n/n-1 [-]
3500	1800	3936	80	160	40	0.0003	0.33	2.73E+11	34133333333	264	0.81	805	1
3500	1800	3936	80	160	40	35.6	115	2.73E+11	34133333333	371	0.68	3.23	1.45
3500	1800	3936	80	160	40	273	413	2.73E+11	34133333333	623	0.53	1.51	2.97
4500	2400	5100	100	200	50	0.0003	0.2	6.67E+11	83333333333	387	0.81	1935	1
4500	2400	5100	100	200	50	52	167	6.67E+11	83333333333	543	0.68	3.25	1.44
4500	2400	5100	100	200	50	396.3	600	6.67E+11	83333333333	910	0.53	1.52	2.94
5000	2700	5682	120	240	60	0.0035	1	1.38E+12	172800000000	635	0.82	635	1
5000	2700	5682	120	240	60	87	280	1.38E+12	172800000000	896	0.69	3.2	1.45
5000	2700	5682	120	240	60	666	1003	1.38E+12	172800000000	1510	0.53	1.51	2.98
6000	3300	6848	140	280	70	0	1	2.56E+12	3201333333333	817	0.81	817	1
6000	3300	6848	140	280	70	110	355	2.56E+12	3201333333333	1148	0.69	3.23	1.45
6000	3300	6848	140	280	70	847.68	1280	2.56E+12	3201333333333	1930	0.53	1.51	2.97
5000	7000	8600	100	200	50	0.0008	0.3	6.67E+11	83333333333	151	0.77	503	1
5000	7000	8600	100	200	50	17	59	6.67E+11	83333333333	205	0.66	3.47	1.41
5000	7000	8600	100	200	50	135.72	212	6.67E+11	83333333333	333	0.52	1.57	2.75
6500	11000	12700	240	480	120	0.001	0.5	2.21E+13	2764800000000	2090	0.8	4180	1
6500	11000	12700	240	480	120	273.17	893	2.21E+13	2764800000000	2919	0.68	3.27	1.44
6500	11000	12700	240	480	120	2113.2	3210	2.21E+13	2764800000000	4879	0.53	1.52	2.92
5500	9000	10500	200	400	100	8E-05	0.4	1.07E+13	1333333333333	1470	0.81	3675	1
5500	9000	10500	200	400	100	193.98	632	1.07E+13	1333333333333	2058	0.68	3.26	1.44
5500	9000	10500	200	400	100	1492.8	2266	1.07E+13	1333333333333	3440	0.53	1.52	2.93

Tabel 6.2 Knikkraft voor het kruisverband met keep in Ansys

Uit de tabel 6.2 blijkt dat de kritische knikkraft voor het hele systeem (met de druk en trek staaf) komt overeen met de kritische knikkraft voor gedrukte staven met keep en veer in het midden (zie tabel 5.2).

## 7 De vervorming van het kruisverband

In dit hoofdstuk wordt het vervorminggedrag van het knooppunt van het houten windverband met constant  $EI$  en excentriciteit geanalyseerd.

Van belang is het om de berekening niet te baseren op theoretisch zuiver rechte staven, maar uit te gaan van een initiële uitbuiging (excentriciteit). Dit betekent dat naast de normaalkracht altijd een buigend moment aanwezig is. Ten gevolge van dit buigend moment, vervormt de staaf in de richting loodrecht op de staafas met als gevolg dat de afstand tussen de werklijn van de normaalkracht en de staafas toeneemt.

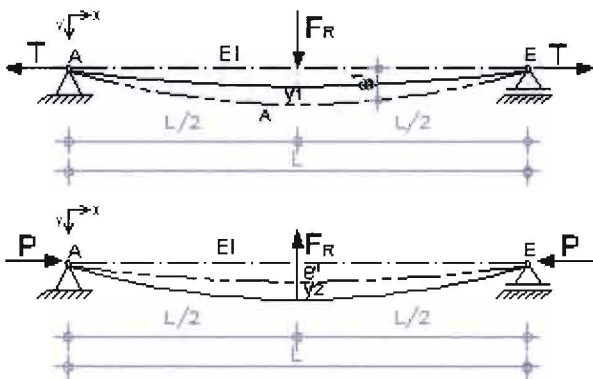
### 7.1. Analytische methode

#### 7.1.1. Analyse Kruisverband met excentriciteit

Uit het kruisverband worden de trekstaaf en drukstaaf los gezien. Bij buiging met normaaltrekkracht zal de uiteindelijke verplaatsing loodrecht op de staafas kleiner worden dan op grond van de 1<sup>ste</sup>-orde berekeningen bepaalde verplaatsing. Door deze kleinere verplaatsing zullen eveneens de inwendige momenten kleiner worden dan de volgens de 1<sup>ste</sup>-orde bepaalde inwendige momenten.

Bij buiging met normaaldrukkracht zal de uiteindelijke verplaatsing loodrecht op de staafas groter worden dan op grond van de 1<sup>ste</sup>-orde berekeningen bepaalde verplaatsing. Door deze grotere verplaatsing zullen eveneens de inwendige momenten groter worden dan de volgens de 1<sup>ste</sup>-orde bepaalde inwendige momenten.

In figuur 7.1 is voor beide staven een excentriciteit verondersteld.



Figuur 7.1 Schematisatie op trek en druk belaste staven

De staven zijn in het kruispunt met elkaar verbonden. Deze verbinding moet in de richting haaks op het vlak door de staafassen een kracht kunnen opnemen. In figuur 7.1 is een op trekbelaste staaf met excentriciteit ( $e^1$ ) en een op druk belaste staaf met excentriciteit ( $e^2$ ) weergegeven. De staven zijn gekoppeld, waardoor de uitbuiging gelijk is, het gaat resulteren in een kracht  $F_R$  tussen de twee staven. De gedrukte staaf wil onder invloed van kracht  $P$  verder uitbuigen, maar door kracht  $F_R$  wordt deze geremd, terwijl de getrokken staaf steeds rechter wil worden maar door kracht  $F_R$  wordt tegengewerkt.

Bij de figuur 7.1 gelden:

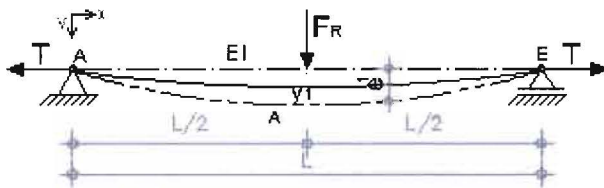
- $e^1$  - de excentriciteit bij de op trekbelaste staaf
- $y_1$  - de vervorming t.g.v. trekkracht
- $y_2$  - de vervorming t.g.v. drukkracht

$e^d$  - de excentriciteit bij de op drukbelaste staaf  
 $F_R$  - de kracht in de verbinding

7.1.2. Op trekbelaste staaf

Op trekbelaste staaf belast door een kracht in het midden van de staaf en een axiale trekkracht is weergegeven in figuur 7.2. De stijfheid van de staaf (EI) is constant.

Langs analytische weg zijn inwendige en uitwendige momenten berekend als functie van de uitbuiging. De uitbuiging is zodanig bepaald dat in elke punt van de staaf het uitwendige moment gelijk is aan het inwendige moment.



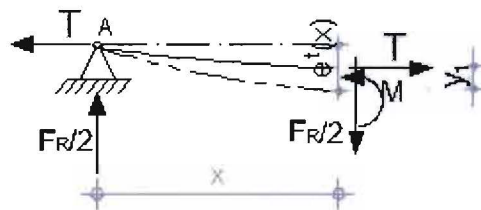
Figuur 7.2 Schematisatie op trekbelaste staaf

In een snede van de staaf bedraagt het inwendige moment (zie figuur 7.3):

$$M_{inv} = -EI \frac{d^2 y_1}{dx^2}$$

Door de excentriciteit valt de werklijn van de normaaltrekkracht niet meer samen met de staafas. Het moment in de staaf wordt kleiner en dus wordt ook de verplaatsing kleiner. Het uitwendige moment in een snede van de staaf is (zie figuur 7.3):

$$M_{uitw} = -T(e'(x) + (y_1)) + \frac{1}{2} F_R x$$



Figuur 7.3 Schematisatie snede van de trekbelaste staaf

Nu wordt de vergelijking van moment op een willekeurige punt op een afstand x van links of rechts bepaald. Uit figuur 7.3 blijkt dat:

$$y_1 = y_1(x)$$

In het geval van evenwicht geldt:

$$EI \frac{d^2 y_1}{dx^2} = +T(e'(x) + (y_1)) - \frac{1}{2} F_R x$$

$$y_1'' = \frac{T(y_1 + e'(x))}{EI} - \frac{F_R x}{2EI} \cdot \frac{T}{T}$$

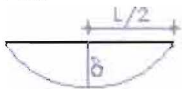
Met  $(\frac{T}{EI} = a^2)$  volgt:

$$y_1'' = a^2 \cdot y_1 + a^2 \cdot e'(x) - a^2 \frac{F_R x}{2T}$$

$$y_1'' - a^2 \cdot y_1 = +a^2 \cdot e'(x) - a^2 \frac{F_R x}{2T}$$

Nu wordt gekeken hoe de uitbuigingvorm voor  $e'(x)$  eruit ziet.  
 wordt aangenomen dat in indifferente/neutrale situatie:

$$y_{\max} = \delta$$



Als wordt aan genomen dat uitbuigingvorm een sinus vorm heeft.

$$y = C \sin ax$$

$$\text{Voor: } x = \frac{1}{2}L \rightarrow y = \delta \rightarrow C \sin a \frac{L}{2} = \delta$$

Verder geldt in de indifferente situatie:

$$x = L; y = 0$$

$$0 = C \cdot \sin aL$$

Voor een niet triviale oplossing moet de tweede term van bovenste vergelijking gelijk aan nul zijn.

Dan:

$$\sin aL = 0 \text{ voor } aL = n\pi \rightarrow a = \frac{\pi}{L} \text{ (n = 1 voor het kleinste en maatgevend knikkraft)}$$

$$a = \frac{\pi}{L} \Rightarrow \delta = C \cdot \sin \frac{\pi}{L} \cdot \frac{L}{2}$$

$$\delta = C \cdot \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta = C$$

$$y = \delta \sin \frac{\pi}{L} x$$

Controle:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{L}{2} &\Rightarrow y = \delta \\ x = L &\Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Dus de uitbuigingvorm voor  $e'(x)$  kan worden geschreven als de sinusvorm:

$$e'(x) = \delta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$y_1'' - a^2 \cdot y_1 = +a^2 \cdot e' \cdot \sin \frac{\pi x}{L} - a^2 \frac{F_R x}{2T} \quad (7.1)$$

De oplossing van vgl.(7.1) bestaat uit algemene en particuliere oplossing.

$$y_1 = C_1 \cdot \sinh(ax) + C_2 \cdot \cosh(ax) + y_p \quad (7.2)$$

Voor algemene oplossing geldt de volgende:

$$y_1 = C_1 \cdot \sinh(ax) + C_2 \cdot \cosh(ax)$$

Voor particuliere oplossing geldt:

$$y_p = +C_3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - C_4 x \quad (7.3)$$

$$y_p' = +\frac{\pi}{L} C_3 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - C_4$$

$$y_p'' = -\frac{\pi^2}{L^2} C_3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (7.4)$$

Om onbekende C3 en C4 te kunnen bepalen, vgl.(7.3) en vgl.(7.4) invullen in de differentiaalvergelijking (7.1):

$$y_p'' - a^2 \cdot y_p = +a^2 \cdot e' \cdot \sin \frac{\pi x}{L} - a^2 \frac{F_R x}{2T} \quad (7.5)$$

$$-\frac{\pi^2}{L^2} C_3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - a^2 \left[ C_3 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - C_4 x \right] = a^2 \cdot e' \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - a^2 \frac{F_R \cdot x}{2T} \quad (7.6)$$

Voor x = L, kan vgl.(7.6) worden geschreven:

$$-\frac{\pi^2}{L^2} C_3 \sin\left(\frac{\pi L}{L}\right) - a^2 \left[ C_3 \cdot \sin\left(\frac{\pi L}{L}\right) - C_4 \cdot L \right] = a^2 \cdot e' \cdot \sin\left(\frac{\pi L}{L}\right) - a^2 \frac{F_R \cdot L}{2T}$$

$$a^2 \cdot C_4 \cdot L = -a^2 \frac{F_R \cdot L}{2T}$$

$$C_4 = -\frac{F_R}{2T}$$

Voor x = L/2 kan vgl.(7.6) worden geschreven:

$$-\frac{\pi^2}{L^2} C_3 \sin\left(\frac{\pi \cdot \frac{L}{2}}{L}\right) - a^2 \left[ C_3 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \frac{L}{2}}{L}\right) - C_4 \cdot \frac{L}{2} \right] = e' \cdot a^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \frac{L}{2}}{L}\right) - a^2 \frac{F_R \cdot \frac{L}{2}}{2T}$$

$$-\frac{\pi^2}{L^2} \cdot C_3 - a^2 \left( C_3 - \frac{C_4 \cdot L}{2} \right) = e' \cdot a^2 - a^2 \frac{F_R \cdot L}{4T}$$

Voor  $\frac{\pi^2}{L^2}$  geldt de volgende:

Zoals gesteld:

$$\begin{aligned} \frac{T}{EI} &= a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{T}{EI}} \\ a &= \sqrt{T \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{L^2}} \\ a &= \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{T}{P_E}}; \frac{P_E}{T} = n \\ a^2 &= \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\pi^2}{L^2} = a^2 \cdot n \end{aligned}$$

$$-a^2 \cdot n_i \cdot C_3 - a^2 C_3 - \frac{F_R \cdot L}{4T} = e' \cdot a^2 - a^2 \frac{F_R \cdot L}{4T}$$

Delen door  $a^2$ :

$$-n_i \cdot C_3 - C_3 - \frac{F_R \cdot L}{4T} = e' - \frac{F_R \cdot L}{4T}$$

$$C_3(n_i + 1) = -e' \Rightarrow C_3 = -e' \cdot \frac{1}{n_i + 1}$$

Met  $n_i = \frac{P_E}{T}$

Waarden voor  $C_3$  en  $C_4$  invullen in vgl.(7.3). Hieruit volgt voor de particuliere oplossing:

$$y_p = -e' \left( \frac{1}{n_i + 1} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{F_R x}{2T}$$

De eerste term van bovenste vergelijking presenteert de doorbuiging (zie  $y_1$  in figuur 7.3) die alleen door trekkracht wordt veroorzaakt, daarom is het met minus teken, m.a.w. door de trekkracht neemt de vervorming af.

De particuliere oplossing wordt bij de algemene oplossing bijgeteld. Hieruit kan vgl.(7.2) geschreven worden:

$$y_1(x) = C_1 \sinh(ax) + C_2 \cosh(ax) - e' \left( \frac{1}{n_i + 1} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{F_R x}{2T} \quad (7.7)$$

Onbekende  $C_1$  en  $C_2$  kunnen gevonden worden met de volgende randvoorwaarden:

7. Buiging randvoorwaarde: In de steunpunten is de doorbuiging nul.

8. symmetrie randvoorwaarde: Omdat maximum doorbuiging altijd in het middenpunt van de staaf ligt, is hier de hoekverdraaiing gelijk aan nul ( $y' = 0$ ).

Volgens de randvoorwaarde 7 geldt:

$$x = 0 \Rightarrow y_1(0) = 0$$



Dan voor vgl.(7.7) geldt:

$$x = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Vergelijking 7.7 kan als alternatief geschreven worden:

$$y_1(x) = C_1 \sinh(ax) - e' \left( \frac{1}{n_i + 1} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{F_R x}{2T} \quad (7.8)$$

Hoekverdraaiing is:

$$y_1'(x) = C_1 \cosh(ax) - \frac{\pi}{L} e' \left( \frac{1}{n_i + 1} \right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{F_R}{2T}$$

Volgens de randvoorwaarde 6 geldt de volgende:

$$x = \frac{1}{2}L \Rightarrow y_1'(L/2) = 0$$

$$C_1 \cosh\left(\frac{aL}{2}\right) - e' \left( \frac{1}{n_i + 1} \right) \cos\left(\frac{\pi L}{2}\right) + \frac{F_R}{2T} = 0$$

$$C_1 \cdot a \cosh\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{F_R}{2T} = 0$$

Hieruit onbekende C1 kan bepaald worden:

$$C_1 = -\frac{F_R}{a2T} \cdot \frac{1}{\cosh\left(\frac{aL}{2}\right)}$$

Met de gevonden C1, volgt vgl.(7.9).

$$y_1(x) = -\frac{F_R}{2Pa} \frac{\sinh(ax)}{\cosh\left(\frac{aL}{2}\right)} - e' \left( \frac{1}{n_i + 1} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{F_R x}{2T} \quad (7.9)$$

De grootste verplaatsing wordt in het midden van de staaf gevonden.  
Voor  $x=L/2$  geldt het volgende:

$$y_1(L/2) = y_{1\max} = -\frac{F_R}{2Ta} \frac{\sinh\left(\frac{aL}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{aL}{2}\right)} - e' \left( \frac{1}{n_i + 1} \right) \sin\left(\frac{\pi L}{2}\right) + \frac{F_R L}{2T}$$

$$y_{1\max} = -\frac{F_R}{2Ta} \tan h\left(\frac{aL}{2}\right) - e' \left( \frac{1}{n_i + 1} \right) + \frac{F_R L}{4T}$$

Zoals gesteld:

$$\frac{T}{EI} = a^2 \Rightarrow T = a^2 EI$$

$$y_{1\max} = -\frac{F_R}{2EI \cdot a^2 \cdot a} \tan h\left(\frac{aL}{2}\right) - e' \left( \frac{1}{n_i + 1} \right) + \frac{F_R L}{4EI \cdot a^2}$$

Vergelijking kan als alternatief geschreven worden:

$$y_{1\max} = -\frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{3}{\left(\frac{aL}{2}\right)^3} \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) - e' \left(\frac{1}{n_t + 1}\right) + \frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{3 \cdot \frac{aL}{2}}{\left(\frac{aL}{2}\right)^3}$$

$$y_{1\max} = -\frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{3}{u^3} \tanh(u) + \frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{3u}{u^3} - e' \left(\frac{1}{n_t + 1}\right)$$

Vergelijking wordt gereduceerd tot:

$$y_{1\max} = \frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{-3(\tanh(u) - u)}{u^3} - e' \left(\frac{1}{n_t + 1}\right)$$

Waarin:

$$u = \frac{1}{2} aL$$

$$y_{1\max} = \frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot (-\chi(u)) - e' \left(\frac{1}{n_t + 1}\right) \quad (7.10)$$

Waarin:

$$\frac{3(\tanh(u) - u)}{u^3} = \chi(u)$$

Hierbij moet worden opgemerkt dat de eerste term van de vgl.(7.10) presenteert de doorbuiging, die alleen door kracht  $F_R$  wordt veroorzaakt. De term  $\chi(u)$  presenteert de invloed van de axiale trekkracht  $T$ .

Aangezien zowel de factor  $\chi(u)$ , als de factor  $e' \left(\frac{1}{n_t + 1}\right)$  negatief gedefinieerd zijn bij de in figuur 7.3 gedefinieerde tekens versterken de beide effecten elkaar.

Het is opmerkelijk dat de vervorming door kracht  $F_R$  lineair varieert maar dit geldt niet voor de axiale kracht  $T$

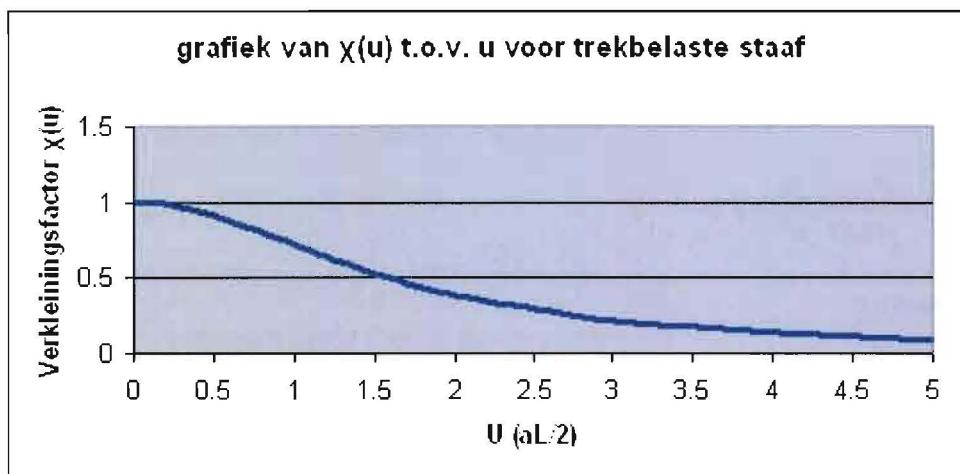
Uit vgl.(7.10) kunnen de volgende conclusies worden getrokken:

- Voor  $u = 0$  de onvariabele (constante) kracht  $F_R$  op de staaf vergroot de uitbuiging als een constante puntlast waarbij de vervorming  $y(L/2)$  gelijk wordt aan het vergeetmenietje.

$$y_1\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{F_R \cdot L^3}{48EI}$$

- Voor  $F_R = 0$ , gedraagt de staaf zich volgens de  $n/n+1$  regel, d.w.z. door de trekkracht wordt de excentriciteit verminderd of de factor  $n/n+1$ . Dit kan een verkleiningsfactor worden genoemd.
- Door de kracht  $T$  neemt de vervorming af terwijl door de kracht  $F_R$  de vervorming zal toenemen.

In figuur 7.4 is het verband tussen  $\chi(u)$  en  $u$  voor de trek belaste staaf weergegeven.



Figuur 7.4 Verband tussen  $\chi(u)$  en  $u$

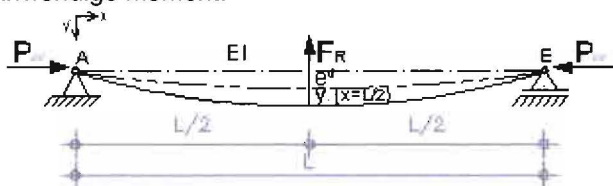
Uit de figuur 7.4 ook blijkt dat voor kleine waarde ( $U$ ) de factor  $\chi(u)$  tot 1 stijgt. Dus voor de kleinste waarde van ( $U$ ) is de factor  $\chi(u)$  gelijk aan 1 en dan wordt de vervorming in het midden van de staaf gelijk

$$\text{aan het vergeetmenietje } y_1(L/2) = \frac{F_R \cdot L^3}{48EI}.$$

### 7.1.3. Opdrukbelaste staaf

Op drukbelaste staaf belast door een kracht in het midden van de staaf en een axiale drukkracht is weergegeven in figuur 7.5. De stijfheid van de staaf ( $EI$ ) is constant.

Langs analytische weg zijn inwendige en uitwendige momenten berekend als functie van de uitbuiging. De uitbuiging is zodanig bepaald dat in elke punt van de staaf het uitwendige moment gelijk is aan het inwendige moment.



Figuur 7.5 Schematisatie op drukbelaste staaf

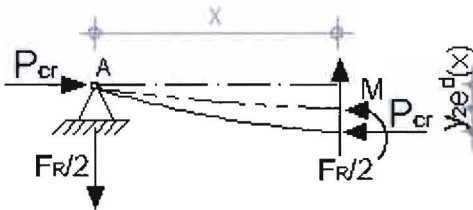
Door de excentriciteit valt de werklijn van de normaaldrukkracht niet meer samen met de staafas. Het moment in de staaf wordt groter en ook de verplaatsing wordt groter.

In een snede van de staaf bedraagt het inwendige moment (zie figuur 7.6):

$$M_{inw} = -EI \frac{d^2 y_2}{dx^2}$$

Het uitwendige moment in een snede van de staaf is (zie figuur 7.6):

$$M_{uinv} = +P \left( y_2(x) + e^d(x) \right) - \frac{1}{2} F_R x$$



Figuur 7.6 Schematisatie snede van de op drukbelaste staaf

Gelijk stellen van de momenten geeft de vergelijking:

$$EI \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -P(y_2(x) + e^d(x)) + \frac{1}{2} F_R x$$

Uit figuur 7.6 blijkt dat:

$$y_2 = y_2(x)$$

Verder geldt:

$$y_2'' = -\frac{P(y_2 + e^d(x))}{EI} + \frac{F_R x}{2EI}$$

Met  $(\frac{P}{EI} = a^2)$  volgt:

$$y_2'' = -a^2 \cdot y_2 - a^2 \cdot e^d(x) + a^2 \frac{F_R x}{2P}$$

$$y_2'' + a^2 \cdot y_2 = -a^2 \cdot e^d(x) + a^2 \frac{F_R x}{2P}$$

De uitbuigingsvorm voor  $e^d(x)$  kan beschouwd worden als een sinusvorm (vergelijkbare met afleiding voor de trekstaaf op pagina 33):

$$e^d(x) = e^d \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$y_2'' + a^2 \cdot y_2 = -a^2 \cdot e^d \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a^2 \frac{F_R x}{2P} \quad (7.11)$$

De oplossing van vgl.(6.11) bestaat uit een algemene en een particuliere oplossing.

$$y_2 = C_3 \cdot \sin(ax) + C_4 \cdot \cos(ax) + y_p$$

Voor de algemene oplossing geldt:

$$y_2 = C_3 \cdot \sin(ax) + C_4 \cdot \cos(ax)$$

Voor de particuliere oplossing geldt:

$$y_p = C_5 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - C_6 x \quad (7.12)$$

$$y_p' = \frac{\pi}{L} C_5 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - C_6$$

$$y_p'' = -\frac{\pi^2}{L^2} C_5 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (7.13)$$

Vlg.(7.12) en vlg.(7.13) invullen in de differentiaalvergelijking (7.11) geeft:

$$-\frac{\pi^2}{L^2} C_5 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a^2 \left[ C_5 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - C_6 x \right] = -e^d \cdot a^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a^2 \frac{F_R \cdot x}{2P} \quad (7.14)$$

Voor  $x=L$  geldt:

$$-\frac{\pi^2}{L^2} C_5 \sin\left(\frac{\pi L}{L}\right) + a^2 \left[ C_5 \cdot \sin\left(\frac{\pi L}{L}\right) - C_6 \cdot L \right] = -e^d \cdot a^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi L}{L}\right) + a^2 \frac{F_R \cdot L}{2P}$$

$$-a^2 \cdot C_6 \cdot L = a^2 \frac{F_R \cdot L}{2P}$$

Delen door  $a^2$  geldt:

$$C_6 = -\frac{F_R}{2P}$$

Voor  $x=L/2$  volgt met invulling van  $C_6$  voor vgl.(7.14).

$$-\frac{\pi^2}{L^2} \cdot C_5 + a^2 \left( C_5 - \frac{C_6 \cdot L}{2} \right) = -e^d \cdot a^2 + a^2 \frac{F_R \cdot L}{4P}$$

Zoals gesteld wordt (vergelijkbare met afleiding voor de trekstaaf op pagina 35):

$$\frac{\pi^2}{L^2} = a^2 \cdot n$$

$$-a^2 \cdot n_d \cdot C_5 + a^2 C_5 + a^2 \frac{F_R \cdot L}{4P} = -e^d \cdot a^2 + a^2 \frac{F_R \cdot L}{4P}$$

Delen door  $a^2$  geeft:

$$-n_d \cdot C_5 + C_5 + \frac{F_R \cdot L}{4P} = -e^d + \frac{F_R \cdot L}{4P}$$

$$C_5(n_d - 1) = e^d \Rightarrow C_5 = e^d \cdot \frac{1}{n_d - 1}$$

$$n_d = \frac{P_E}{P}$$

Hieruit volgt voor de particuliere oplossing:

$$y_p = e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{F_R x}{2P}$$

De particuliere oplossing wordt bij de algemene oplossing bijgeteld:

$$y_2(x) = C_3 \sin(ax) + C_4 \cos(ax) + e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{F_R x}{2P} \quad (7.15)$$

Uit vgl.7.15 blijkt dat hier is de toename van de doorbuiging t.g.v. normaaldrukkraft.

De onbekende  $C_3$  en  $C_4$  worden gevonden met de volgende randvoorwaarden:

9. Buiging randvoorwaarde: In de steunpunten is de doorbuiging nul.

10. symmetrie randvoorwaarde:  $\frac{dy_2}{dx}(x = L/2) = 0$

Volgens de randvoorwaarde 7 geldt:

Voor  $x = 0 \Rightarrow y(x) = 0$

Hieruit volgt, voor:

$y(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

Vergelijking (7.15) reduceert, met  $C_4 = 0$ , tot vgl.(7.16).

$$y_2(x) = C_3 \sin(ax) + e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{F_R x}{2P} \quad (7.16)$$

Hoekverdraaiing is:

$$y_2'(x) = C_3 \cdot a \cdot \cos(ax) + \frac{\pi}{L} e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{F_R}{2P}$$

Volgens de randvoorwaarde 12 geldt:

$$x = \frac{1}{2}L \Rightarrow y_2'(L/2) = 0$$

$$C_3 \cdot a \cos\left(\frac{aL}{2}\right) + \frac{F_R}{2P} = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{F_R}{2Pa} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{aL}{2}\right)}$$

Vergelijking (7.16) wijzigt na invulling van  $C_3$  in vgl.(7.17).

$$y_2(x) = -\frac{F_R}{2Pa} \frac{\sin(ax)}{\cos\left(\frac{aL}{2}\right)} + e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{F_R x}{2P} \quad (7.17)$$

Voor  $x=L/2$  geldt:

$$y_2(L/2) = y_{2\max} = -\frac{F_R}{2Pa} \frac{\sin\left(\frac{aL}{2}\right)}{\cos\left(\frac{aL}{2}\right)} + e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right) \sin\left(\frac{\pi L}{L}\right) + \frac{F_R L}{2P}$$

$$y_{2\max} = -\frac{F_R}{2Pa} \tan\left(\frac{aL}{2}\right) + e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right) + \frac{F_R L}{4P} \quad (7.18)$$

Volgens vgl. (7.18) kan vgl. (7.19) geschreven worden:

$$y_{2\max} = \frac{F_R}{2Pa} \left( \left( \frac{aL}{2} \right) - \tan\left(\frac{aL}{2}\right) \right) + e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right) \quad (7.19)$$

Zoals gesteld wordt (vergelijkbare met afleiding voor de trekstaaf):

$$\text{Omdat } \frac{P}{EI} = a^2 \Rightarrow P = a^2 EI$$

Vergelijking (7.18) reduceert hierdoor tot:

$$\begin{aligned}
 y_{2\max} &= -\frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{3}{\left(\frac{aL}{2}\right)^3} \tan\left(\frac{aL}{2}\right) + e^d \left(\frac{1}{n_d - 1}\right) + \frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{3 \cdot \frac{aL}{2}}{\left(\frac{aL}{2}\right)^3} \\
 y_{2\max} &= -\frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{3}{u^3} \tan(u) + \frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \frac{3u}{u^3} + e^d \left(\frac{1}{n_d - 1}\right) \\
 y_{2\max} &= -\frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \frac{3(\tan(u) - u)}{u^3} + e^d \left(\frac{1}{n_d - 1}\right) \\
 y_{2\max} &= -\frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \cdot \chi(u) + e^d \left(\frac{1}{n_d - 1}\right) \tag{7.20}
 \end{aligned}$$

Waarin:

$$\frac{3(\tan(u) - u)}{u^3} = \chi(u)$$

$$u = \frac{1}{2} aL$$

Voor waarde (u) geldt de volgende:

$$\frac{P}{EI} = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$a = \sqrt{P \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{L^2}}$$

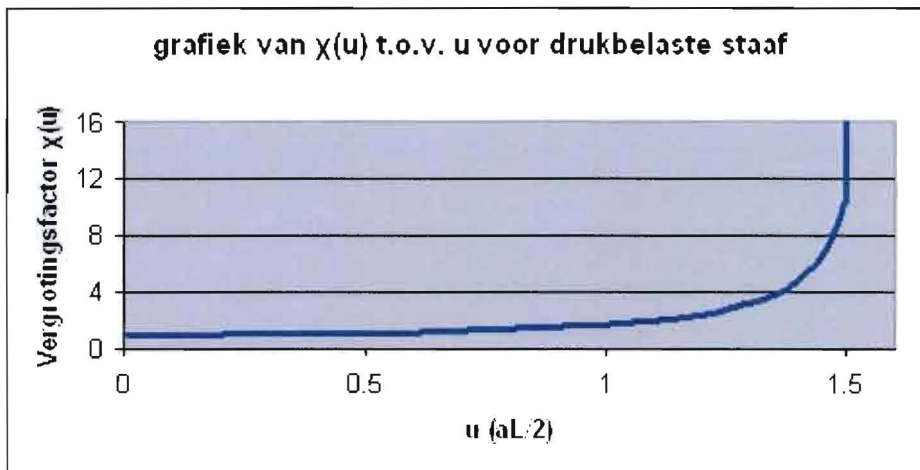
$$a = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{P}{P_E}}$$

$$\text{Substitueren } u = \frac{aL}{2} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \cdot \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}$$

Het is opmerkelijk dat door de kracht  $F_R$  de vervorming varieert lineair maar dit geldt niet voor de axiale kracht  $P$ .

Uit vgl.(7.20) kunnen de volgende conclusies worden getrokken:

- Als  $F_R = 0$  dan gedraagt het staaf volgens de  $n/n-1$  regel (vergrotingsfactor) d.w.z door de axiale drukkracht wordt de excentriciteit vergroot.
- Door de kracht  $P$  neemt de vervorming toe terwijl door de kracht  $F_R$  de vervorming afneemt.



Figuur 7.7 Verband tussen  $\chi(u)$  en  $u$

In vgl.(7.20) is de parameter ( $u$ ) afhankelijk van de waarde  $(\frac{P}{P_E})$ . Hierbij moet worden opgemerkt dat de eerste term van de vgl.(7.20) de doorbuiging presenteert, die alleen door kracht  $F_R$  wordt veroorzaakt. De term  $\chi(u)$  presenteert de invloed van de axiale kracht  $P$ . Voor kleine waarde van  $P$  is, waarde ( $u$ ) ook klein en de factor  $\chi(u)$  reduceert tot 1 (zie figuur 7.7).

$$\chi(u) = \frac{3}{u^3} \left[ \left( u + \frac{u^3}{3} + \dots \right) - u \right] \approx 1,0$$

De vervorming is dan gelijk aan het vergeetmenietje:

$$y_2\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{F_R \cdot L^3}{48EI}$$

Als  $u \frac{\pi}{2}$  bereikt dan wordt de term  $\chi(u)$  oneindig en er treedt knik op (zie figuur 7.7).

Het buigend moment in dit geval voor  $x=L/2$  is gelijk aan:

$$M_{\max} = P \cdot y_{2\max} - \frac{F_R \cdot L}{4} \tag{7.21}$$

Voor het bepalen van het buigend moment van de gedrukte staaf wordt vlg. (7.19) ingevuld in vgl. (7.21).

$$M_{\max} = P \cdot \frac{F_R}{2Pa} \left( \left( \frac{aL}{2} \right) - \tan\left(\frac{aL}{2}\right) \right) + P \cdot e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right) - \frac{F_R \cdot L}{4}$$

$$M_{\max} = -\frac{F_R}{2a} \left( \tan \frac{aL}{2} \right) + P \cdot e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right)$$

$$M_{\max} = -\frac{F_R \cdot L}{4 \frac{aL}{2}} \cdot \tan \frac{aL}{2} + P \cdot e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right) = -\frac{F_R \cdot L}{4} \cdot \frac{\tan(u)}{u} + P \cdot e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right)$$



$$M_{\max} = -EI \left( \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right)_{x=L/2} = -\frac{F_R \cdot L}{4} \cdot \frac{\tan(u)}{u} + P \cdot e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right)$$
$$M_{\max} = EI \left( \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right)_{x=L/2} = \frac{F_R \cdot L}{4} \cdot \frac{\tan(u)}{u} - P \cdot e^d \left( \frac{1}{n_d - 1} \right) \quad (7.22)$$

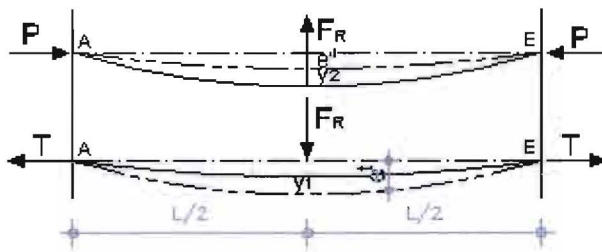
Uit vgl.(7.22) blijkt dat als P nul nadert, u ook naar nul nadert en sinds:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1$$

$$M_{\max} = \frac{F_R \cdot L}{4}$$

#### 7.1.4. Evenwicht

In figuur 7.8 is de schematisatie van het gekoppeld systeem weergegeven.



Figuur 7.8 Schematisatie van gekoppeld systeem

Als de staven aan elkaar gekoppeld zijn dan gelden de volgende randvoorwaarde:

- $F_R = -F_R$
- $y_1 = y_2$

Uit vgl.(7.10) en vgl.(7.20) blijkt:

$$y_1\left(\frac{1}{2}L\right) = \frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \frac{-3(\tan h(u) - u)}{u^3} - e^i\left(\frac{1}{n_i + 1}\right)$$

$$y_2\left(\frac{1}{2}L\right) = -\frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \frac{3(\tan(u) - u)}{u^3} + e^d\left(\frac{1}{n_d - 1}\right)$$

Waarmee de volgende vergelijking kan worden opgesteld.

$$\frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \frac{-3(\tan h(u) - u)}{u^3} - e^i\left(\frac{1}{n_i + 1}\right) = -\frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \frac{3(\tan(u) - u)}{u^3} + e^d\left(\frac{1}{n_d - 1}\right)$$

$$\frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \frac{-3(\tan h(u) - u)}{u^3} + \frac{F_R \cdot L^3}{48EI} \frac{3(\tan(u) - u)}{u^3} = e^d\left(\frac{1}{n_d - 1}\right) + e^i\left(\frac{1}{n_i + 1}\right)$$

$$\frac{F_R \cdot L^3 [-3 \tan h(u) + 3u + 3 \tan(u) - 3u]}{48EIu^3} = e^d\left(\frac{1}{n_d - 1}\right) + e^i\left(\frac{1}{n_i + 1}\right)$$

$$\frac{F_R \cdot L^3 \cdot 3[\tan(u) - \tan h(u)]}{48EIu^3} = e^d\left(\frac{1}{n_d - 1}\right) + e^i\left(\frac{1}{n_i + 1}\right)$$

Als wij definiëren dat:

$$Z^i = e^i\left(\frac{1}{n_i + 1}\right)$$

$$Z^d = e^d\left(\frac{1}{n_d - 1}\right)$$

Kan de kracht  $F_R$  worden bepaald m.b.v. vgl.(7.23):

$$F_R = \frac{48EI \cdot u^3}{3L^3} \cdot \frac{Z^i + Z^d}{\tan(u) - \tanh(u)} \quad (7.23)$$

Voor het bepalen van de verplaatsing van de gedrukte staaf wordt vlg. (7.23) ingevuld in vgl. (7.20).

$$y_2\left(\frac{1}{2}L\right) = -\frac{48EI \cdot u^3}{3L^3} \cdot \frac{Z' + Z^d}{\tan(u) - \tanh(u)} \frac{L^3}{48EI} \frac{3(\tan(u) - u)}{u^3} + Z^d$$

$$y_2\left(\frac{1}{2}L\right) = y_{2\max} = \frac{-Z'(\tan(u) - u) - Z^d(\tanh(u) - u)}{\tan(u) - \tanh(u)} \quad (7.24)$$

## 7.2. Praktijk toepassingen

### 7.2.1. Analyse Kruisverband met exentriciteit

Hierin is een kruisverband van de Manege te Beesterzwaag geanalyseerd.

Twee staven met lengte  $L=5682\text{mm}$  en doorsnede  $120 \times 240\text{ mm}$  waarvan staaf 1 wordt belast met een trekkracht  $T$  en staaf 2 wordt belast met een drukkracht  $P$ . Hierin is het vervorminggedrag op  $x=L/2$  geanalyseerd.

Uitgangspunt is dat elke staaf door diverse oorzaken toch een zekere initiële uitbuiging  $e^d$  of  $e^t$  heeft. De initiële uitbuigingslijn kan in principe een willekeurige gebogen vorm hebben, maar omdat de juiste vorm een kleine tot verwaarloosbare invloed heeft op het eindresultaat wordt dit met een sinus lijn gerekend.

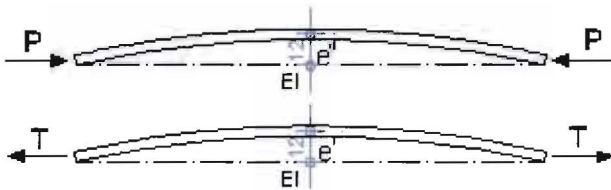
De staven hebben een aangenomen gelijke initiële uitbuiging  $e^t = e^d = 5682 / 500 = 12\text{mm}$  (conform NEN 6760). Dit is een normaal voorkomende initiële uitbuiging voor gelamineerde hout. De initiële uitbuigingvorm wordt een sinusvormig verloop aangehouden (conform NEN 6760). De gebruikte elasticiteitsmodulus is  $10200\text{N/mm}^2$ .

Hierin is het vervorminggedrag op  $x=L/2$  geanalyseerd.

De relatieve vervorming is het quotiënt tussen vervorming  $y_2(L/2)$  en exentriciteit  $e^d$  en de relatieve belasting is het quotiënt tussen de kritische knikkracht en de eulerse kracht.

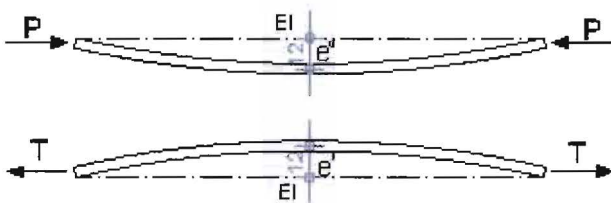
Er zijn twee situaties geanalyseerd:

Situatie 1 met  $e^t = e^d = 12\text{mm}$



Figuur 7.9 Het kruisverband met hetzelfde richting van de exentriciteit

- Situatie 2 met  $e^t = 12\text{mm}; e^d = -12\text{mm}$

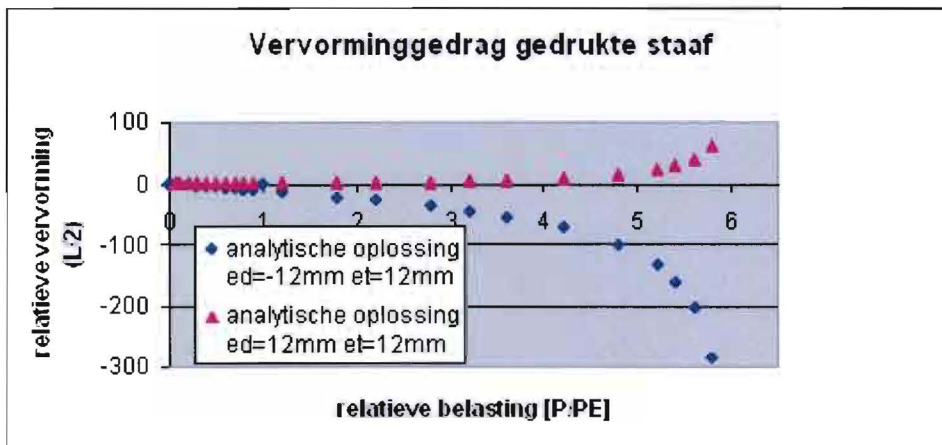


Figuur 7.10 Het kruisverband met niet hetzelfde richting van de exentriciteit

In figuur 7.11 is het relatieve vervormingsgedrag van het middelste steunpunt  $y_1(L/2)$  uitgezet tegen de relatieve belasting ( $P/P_E$ ) ( $P_E=431\text{ kN}$ ).

De analytische oplossingen zijn geanalyseerd door vgl.(7.24).

De uitkomsten worden getoond in figuur 7.11:



Figuur 7.11 Vervorminggedrag middensteunpunt

Uit figuur 7.11 blijkt dat bij  $e^t = e^d = 12\text{mm}$  het kruisverband stijver gedraagt dan bij  $e^t = 12\text{mm}; e^d = -12\text{mm}$ .

Uit figuur 7.11 ook blijkt dat de richting van de excentriciteit een grote invloed op het vervorminggedrag van het knooppunt heeft.

### 7.2.2. Verificatie met Eindige elementen methode

De verkregen resultaten zijn vergeleken met de Eindige-Elementen-Methode(EEM).

De staven hebben een gelijke initiële uitbuiging  $e^t = e^d = 12\text{mm}$ .

Het betreffende kruisverband is gemodelleerd met BEAM 3. De staven zijn in het midden aan elkaar gekoppeld door de translatie-vrijheidsgraden in y richting van de middelste noden te koppelen (met het CERIG commando). De ene staaf wordt met een drukkracht P belast, terwijl de andere staaf wordt belast door een trekkracht.

Voor de schematisatie van het kruisverband zie bijlage 7. Te zien is dat de uitkomsten van de analytische berekeningen met de ANSYS overeenstemmen (zie bijlage 7).

### 7.3. Conclusie:

De verbinding kracht (FR) van het kruisverband van de drukstaaf, veroorzaakt de belemmering van de doorbuiging terwijl voor de trekstaaf, veroorzaakt de toename van de doorbuiging.

Door de axiale kracht wordt kracht (FR) variabel waardoor dit invloed op de knikkracht heeft.

Door de axiale trekkracht wordt de excentriciteit verminderd met de factor  $(n/n+1)$ . Door de axiale drukkracht wordt de excentriciteit vergroot met de factor  $(n/n-1)$ .

De excentriciteit en ook de richting van de excentriciteit heeft groot invloed op het vervorminggedrag van het knooppunt.

## Conclusies

In deze studie is de analytische en energie methoden geformuleerd voor de knik analyse van de gekepte staven. De energie methode wordt het meest gebruikt voor het leveren van een snelle benaderende oplossing van problemen waarvoor geen exacte oplossingen bestaan of waarvan deze te gecompliceerd zijn. Het belangrijkste voordeel van deze methode is dat de energie methode kan worden toegepast in de vorm van de gekepte staven met de combinatie van veer in het midden van de staven. Bovendien vereist deze methode geen ingewikkelde en tijdrovende analyse.

Met de energie methode is de geschatte knikkracht altijd groter dan de exacte waarde vanwege het minder aantal van vrijheidsgraden in de knik de doorbuiging benaderingen dan in de werkelijkheid. De knik doorbuiging functie  $y(x) = C \sin(ax)$  voldoet niet aan de randvoorwaarden en de geometrie randvoorwaarden. Echter er is gewoon geen manier om een conservatieve kniklast te berekenen. Dus de energie methode moet worden toegepast en de knikkracht bepaald met de energie methode vermenigvuldigen met een factor van ca 0.92 wat uit dit onderzoek blijkt, (of een numerieke techniek zoals eindige elementen te gebruiken), waarin een sequentie van de gebruikte onderlinge functies geeft een indicatie van convergentie naar de exacte kniklast als er genoeg termen worden gebruikt.

Aan de volgende onderzoeker aan te raden om deze factor nauwkeurig te bepalen.

Hierin kan geconcludeerd worden dat de keep een verkleinde invloed op de knikkracht en een vergrotende invloed op de kniklengte heeft.

## Aanbevelingen

Voor de knik analyse van de gekepte staven maken gebruik van energie op basis van gemodificeerde trilvormen.

- Het gebruik van de dynamische bewegingsvergelijking om de trilvorm van gekepte staaf te verkrijgen.
- Voor de knik analyse gebruik maken van de trilvorm op basis van gelijk stellen van de trilvorm aan de knikvorm.
- Evalueren van de kritische knikkracht door de stationeer totale potentiële energie methode.
- Een experimenteel onderzoek

## Figuurlijst

Figuur 0.1	Winverbanden in dak en gevelvlakken	Figuur 0.2	Houten windverband.....	6
Figuur 1.1	Verband in dakvlak.....			12
Figuur 1.2	Verband in gevel.....			12
Figuur 1.3	Schematisering op drukbelaste staaf.....			13
Figuur 1.4	Snedes van de drukbelaste staaf.....			13
Figuur 1.5	Schematisering op drukbelaste staaf.....			15
Figuur 1.6	Verkorting van de drukbelaste staaf.....			15
Figuur 2.1	Schematisatie van drukbelaste staaf.....			19
Figuur 2.2	Schematisatie halve staaf.....			20
Figuur 2.3	Op drukbelaste staaf.....			23
Figuur 3.1	Schematisatie opdrukbelaste staaf met keep in het midden.....			26
Figuur 3.2	Schematisatie halve staaf.....			27
Figuur 3.3	Schematisatie bovenste staafdeel boven de keep.....			28
Figuur 3.4	Schematisatie helft van de keep.....			29
Figuur 3.5	verband tussen $\eta$ en $\mu$ .....			34
Figuur 3.6	Op drukbelaste staaf met keep.....			35
Figuur 4.1	Schematisatie van een verende gesteunde staaf.....			41
Figuur 4.2	Schematisatie van een verende gesteunde staaf met antisymmetrische knikvorm.....			41
Figuur 4.3	Schematisatie van een verende gesteunde staaf met symmetrische knikvorm.....			41
Figuur 4.4	Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning in het midden.....			42
Figuur 4.5	Schematisatie op drukbelaste staaf met uitbuigingvorm.....			42
Figuur 4.6	Schematisatie snede van de opdrukbelaste staaf.....			42
Figuur 4.7	Kritieke toestand voor de veer gesteunde staaf.....			46
Figuur 4.8	Verband tussen $P_{cr}/PE$ en $k$ voor een staaf met een verende steun in het midden.....			48
Figuur 4.9	Schematisatie op trekbelaste staaf.....			49
Figuur 4.10	Schematisatie op trekbelaste staaf met uitbuigingvorm.....			49
Figuur 4.11	Schematisatie snede van de trekbelaste staaf.....			49
Figuur 4.12	Op drukbelaste staaf met verende ondersteuning in het midden.....			54
Figuur 4.13	Verband tussen $P_{cr}/PE$ en $k$ voor een staaf met een verende steun in het midden.....			56
Figuur 4.14	Verband tussen $P$ en $\alpha$ voor een staaf met een verende steun in het midden.....			57
Figuur 4.15	Het kruisverband met diagonalen.....			60
Figuur 4.16	Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf.....			60
Figuur 4.17	Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning.....			61
Figuur 4.18	Schematisatie van het kruisverband zonder keep in ANSYS.....			62
Figuur 4.19	Het kruisverband met diagonalen.....			63
Figuur 4.20	Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf.....			63
Figuur 4.21	Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning.....			64
Figuur 4.22	Schematisatie van het kruisverband zonder keep in ANSYS.....			65
Figuur 4.23	Het kruisverband met diagonalen.....			66
Figuur 4.24	Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf.....			66
Figuur 4.25	Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning.....			67
Figuur 4.26	Schematisatie van het kruisverband zonder keep in ANSYS.....			68
Figuur 4.27	Het kruisverband met diagonalen.....			69
Figuur 4.28	Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf.....			69
Figuur 4.29	Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning.....			70
Figuur 4.30	Schematisatie van het kruisverband zonder keep in ANSYS.....			71
Figuur 4.31	Het kruisverband met diagonalen.....			72



Figuur 4.32	Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf .....	72
Figuur 4.33	Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning .....	73
Figuur 4.34	Schematisatie van het kruisverband zonder keep in ANSYS .....	74
Figuur 4.35	Het kruisverband met diagonalen .....	75
Figuur 4.36	Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf .....	75
Figuur 4.37	Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning .....	76
Figuur 4.38	Schematisatie van het kruisverband zonder keep in ANSYS .....	77
Figuur 4.39	Het kruisverband met diagonalen .....	78
Figuur 4.40	Kniklengte en veerstijfheid voor de drukbelaste staaf, geleverd door de trekstaaf .....	78
Figuur 4.41	Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning .....	79
Figuur 4.42	Schematisatie van het kruisverband zonder keep in ANSYS .....	80
Figuur 5.1	Schematisatie op drukbelaste staaf met keep en verende ondersteuning in het midden .....	82
Figuur 5.2	Schematisatie van gekepte staaf, belast door een kracht in het midden van de staaf .....	83
Figuur 5.3	Schematisatie snede van gekepte staaf .....	83
Figuur 5.4	Op drukbelaste staaf met keep en verende ondersteuning .....	87
Figuur 5.5	Het kruisverband met keep en diagonalen .....	92
Figuur 5.6	Schematisati staaf met keep en verende ondersteuning .....	93
Figuur 5.7	Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS .....	93
Figuur 5.8	Het kruisverband met keep en diagonalen .....	94
Figuur 5.9	Schematisatie staaf met keep en verende ondersteuning .....	94
Figuur 5.10	Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS .....	95
Figuur 5.11	Het kruisverband met diagonalen .....	96
Figuur 5.12	Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning .....	96
Figuur 5.13	Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS .....	97
Figuur 5.14	Het kruisverband met diagonalen .....	98
Figuur 5.15	Schematisatie staaf met keep en verende ondersteuning .....	98
Figuur 5.16	Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS .....	99
Figuur 5.17	Het kruisverband met diagonalen .....	100
Figuur 5.18	Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning .....	100
Figuur 5.19	Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS .....	101
Figuur 5.20	Het kruisverband met diagonalen .....	102
Figuur 5.21	Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning .....	102
Figuur 5.22	Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS .....	103
Figuur 5.23	Het kruisverband met diagonalen .....	104
Figuur 5.24	Schematisatie op drukbelaste staaf met verende ondersteuning .....	104
Figuur 5.25	Schematisatie van het kruisverband met keep in ANSYS .....	105
Figuur 6.1	Schematisatie het kruisverband zonder keep .....	108
Figuur 6.2	Schematisatie het kruisverband met keep .....	110
Figuur 7.1	Schematisatie op trek en druk belaste staven .....	112
Figuur 7.2	Schematisatie op trekbelaste staaf .....	113
Figuur 7.3	Schematisatie snede van de trekbelaste staaf .....	113
Figuur 7.4	Verband tussen $\chi(u)$ en $u$ .....	119
Figuur 7.5	Schematisatie op drukbelaste staaf .....	119
Figuur 7.6	Schematisatie snede van de op drukbelaste staaf .....	120
Figuur 7.7	Verband tussen $\chi(u)$ en $u$ .....	124
Figuur 7.8	Schematisatie van gekoppeld systeem .....	126
Figuur 7.9	Het kruisverband met hetzelfde richting van de excentriciteit .....	128
Figuur 7.10	Het kruisverband met niet hetzelfde richting van de excentriciteit .....	128
Figuur 7.11	Vervorminggedrag middensteunpunt .....	129

## Referenties

### Literatuur

Strength of Materials by J.P. Den Hartog. ISBN 0-48660755-0

Vereniging van houtconstructeurs Werkgroep C

Theory of elastic stability by S.P. Timoshenko.

Satbiliteit voor ontwerpers door D.Dick. VSS-1994-2005

Advanced stress and stability analyseis by V.I .feodosiev

Mechanics and Analysis of Beam, Columns and Cabels

Structural and Stress Analysis

Mechanics of Materials

Basic Structural Theory

Buckling of Bars, plates and shells

Fundamentals of Structural Stability

Stability Analysis and Design of Structures