

MASTER

Het beschrijven van contactproblemen met de elementenmethode

van Schalkwijk, R.

Award date:
1983

[Link to publication](#)

Disclaimer

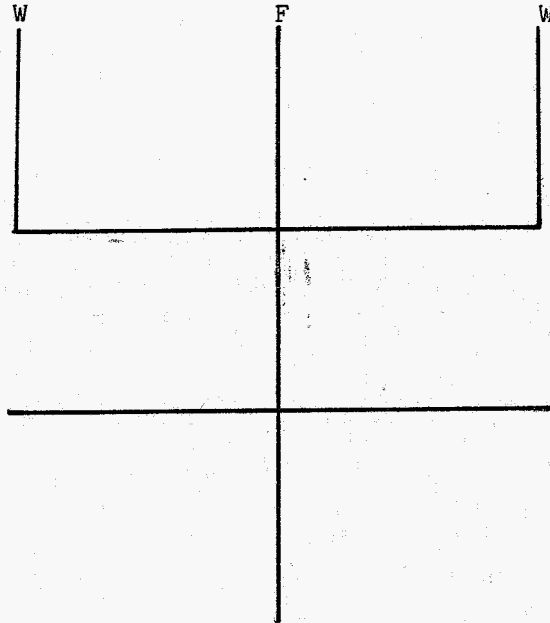
This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Het beschrijven van contactproblemen met de elementenmethode



Afstudeerverslag van : Ruben van Schalkwijk
hoogleraar : Prof. Dr. Ir. J.D. Janssen
met dank aan : Ir. W.A.M. Brekelmans
voor de uitstekende begeleiding.

november 1982.

WE 82.12

Inhoudsopgave

Samenvatting

Literatuurlijst

Lijst van veelvuldig voorkomende symbolen

1. Inleiding

2. Oplossingsstrategie voor niet-lineaire problemen

2.1 Inleiding

2.2 Newton-Raphson, algemene werkwijze

2.3 Procedure in de elementenmethode

3. Eén-dimensionaal contactprobleem

3.1 Inleiding

3.2 Een voorbeeld

3.3 Het "gap-element"

3.4 Het iteratieknooppunt

3.5 Overzicht één-dimensionaal gap-element

3.6 Plastisch materiaalgedrag

4. Rotatiesymmetrische contactproblemen

4.1 Inleiding

4.2 Het 4-knoops ringelement, lineair-elastisch

4.3 Het rotatiesymmetrisch gap-element met wrijving

4.4 Enige praktische aspecten van het gap-element

5. Wrijvingsmodellen

5.1 Inleiding

5.2 Het wrijvingsmodel van Coulomb

5.3 Plastische wrijving, constante wrijvingsfactor

5.4 Gecombineerd model

6. Plasticiteit

6.1 Inleiding

6.2 Spanningsberekening

6.3 Bepaling van de elementstijfheidsmatrix

7. Toepassingen

7.1 De ringcompressietest

7.1.1 Inleiding

7.1.2 Het Coulomb-model en lineair-elastisch materiaalgedrag

7.1.3 Elasto-plastisch materiaalgedrag en vergelijking van
wrijvingsmodellen

7.2 De "drukberg" bij de stuikproef

8. Nabeschuwing

Bijlage 1 : Beschrijving "NONSYS"

Bijlage 2 : Matrix-notatie

Samenvatting

In dit rapport worden m.b.v. de multiplicatorenmethode van Lagrange contactproblemen gemodelleerd met de elementenmethode.

Hierbij spelen een rol : de speling tussen twee (contact-)vlakken, de grootte van het contactoppervlak, de optredende contactdrukken, wrijving en de slip van twee contactvlakken.

Er worden verschillende wrijvingsmodellen gehanteerd : Coulomb-model, plastische-wrijvingsmodel, constante-wrijvingsfactor-model en een combinatie van deze modellen.

Zowel lineair-elastisch materiaalgedrag als elasto-plastisch materiaalgedrag wordt bekeken.

Beperkingen : geometrisch-lineaire rotatie symmetrische problemen en plastisch gedrag alleen op basis van het Von Mises vloeicriterium met isotrope lineaire versterking.

Enkele fenomenen worden gedemonstreerd aan de hand van enkele praktische problemen.

Literatuurlijst

- [I] O.C. Zienkiewicz
The Finite Element Method.(3-th edition)
- [II] Prof. Dr. P.C. Veenstra
Technische plasticiteitsleer.
collegedictaat T.H.E nr. 4.406
- [III] Dr. Ir. F.E. Veldpaus
Mathematische plasticiteitsleer.
collegedictaat T.H.E. vakgroep WFW
- [IV] Ir. W.A.M. Brekelmans
Mogelijke werkwijzen voor de oplossing van
fysisch niet-lineaire problemen via de
"initial Strain" methode.
Rapport : W-TM-80-07 (T.H.E.); november 1980
- [v] Dr. Ir. J.A.H. Ramaekers
Kontaktverschijnselen bij het omvormen.
Rapport : WT 0449 (T.H.E.); maart 1979

Lijst van veelvuldig voorkomende symbolen

Algemeen:• Voor matrixnotatie zie bijlage 2 .

- Het symbool " Δ " geeft een increment aan
bijv. Δu = increment van u (behalve in hoofdstuk 2,
daar is Δu_k de verandering van u in iteratie k).
- Index gebruik : v.b. e_{-k}^{kj} = elementstijfheidsmatrix
van element e bij increment j na iteratie k .

a_i	verplaatsing van knooppunt i in normaal-richting
A	doorsnede of globaal contactoppervlak
A_w	werkelijk contactoppervlak
b_i	verplaatsing van knoopp. i in tangentiaal-richting
\underline{B}	rek interpolatiematrix
$\underline{C}, \underline{C}$	elastische materiaalmatrix
C	elementeigenschap voor het iteratieknooppunt
\underline{D}	hoofdstuk 4: differentiaaloperator hoofdstuk 6: deformatiesnelheidsmatrix
D, D_0	diameter
e	elementnummer
E	elasticiteitsmodulus
$f()$	functie
f	wrijvingscoëfficiënt
G	glijdingsmodulus
H	$= H_0 / (1 + H_0 / E)$
H_0	verstevigingsparameter
h	hoogte
h_0	hoogte in oorspronkelijke toestand
$\underline{I}, \underline{I}$	eenheidsmatrix (resp. 2-dim. en 4-dim.)
\underline{J}	jacobiaan
j	index (incrementnr.)
k	index (iteratienr.)

\underline{K}	stijfheidmatrix
\underline{e}_K	elementstijfheidsmatrix
$\underline{L}, \underline{L}$	materiaalmatrix
l, ℓ	lengtemaat
N_i	interpolatiefunctie
\underline{N}	matrix met interpolatiefuncties
n, \underline{n}	sluitrichting van een gap-element, normaal-richting
P, \underline{p}	knooppuntskracht(en)
\underline{e}_p	knooppuntskrachten van element e
Q	knooppuntskrachten in evenwicht met de uit de ver- plaatsingen berekende spanningen.
\underline{e}_Q	idem van element e
\underline{R}_k^j	residual load
r	straal (coördinaat)
R_i	coördinaat van knooppunt i
s	slip in een increment
\underline{t}	geeft tangentiale richting aan
T	wrijvingskracht volgens wrijvingsmodel
T_0	= T
u, u_i, \underline{u}	verplaatsingen
\underline{e}_u	elementsvrijheidsgraden
v, v_i	verplaatsing
\underline{x}	onbekende grootheid in hoofdstuk 2
Δx	som van twee halve elementzijden (zie fig. 5.3.2)
y	relatieve toename van de contactdruk t.g.v.de wrijving
$\underline{Y}, \underline{Y}$	vloeimatrix
z	coördinaat
\underline{z}	hoofdstuk 2 : momentane benadering van \underline{u}
α	hoek
β	hoek
γ_{rz}	afschuifhoek
δ	variatiesymbool
δ	hoogtereductie

$\underline{\epsilon}, \underline{\xi}, \underline{\epsilon}$	rekgrootheden
$\underline{\epsilon}^p, \underline{\xi}^p, \underline{\epsilon}^p$	plastische rek
$\underline{\epsilon}^e, \underline{\xi}^e, \underline{\epsilon}^e$	elastische rek
$\underline{\epsilon}_{rr}, \underline{\epsilon}_{zz}, \underline{\epsilon}_{\theta\theta}$	rekcomponenten
$\underline{\epsilon}^p$	effectieve plastische rek
η	materiële coördinaat
θ	omtreks hoek coördinaat
λ	Lagrange-multiplicator, normaalkracht
μ	Lagrange-multiplicator, wrijvingskracht
ν	dwarscontractiecoëfficiënt
ξ	materiële coördinaat (hoofdstuk 4)
ξ	elastische fractie (hoofdstuk 6)
$\Pi, \Pi^*, \Pi^{**}, \Pi_c$	potentiële energiefunctieaal
$\sigma, \underline{\sigma}, \underline{\sigma}$	spanningsgrootheden
$\sigma_{zz}, \sigma_{rr}, \dots$	spanningscomponenten
$\underline{\sigma}_n$	normaalspanning
$\underline{\sigma}$	effectieve spanning
σ_v	vloeispanning
σ_{v0}	initiële vloeispanning
τ	wrijvingschuifspanning
τ_0	$= \tau $
$\underline{\Omega}$	rotatiesnelheidsmatrix

1. Inleiding

Een belangrijke ontwikkeling binnen het vakgebied der technische mechanica wordt gevormd door de opkomst en ontwikkeling van van numerieke methoden voor de analyse van niet-lineaire problemen. In dit verslag zullen we onze aandacht vestigen op een enkel facet hiervan nl. de contactproblemen.

Wanneer twee lichamen met elkaar in contact komen zijn een aantal aspecten van belang voor het mechanisch gedrag van het beschouwde systeem :

- De grootte van het contact oppervlak en de speling tussen de delen die niet met elkaar in contact zijn.
- De optredende contactdruk.
- De wrijvingsschuifspanning afhankelijk van het gehanteerde wrijvingsmodel.
- Als er sprake is van slip, de grootte van de slip langs het contactvlak.

Als de contactvlakken klein zijn kan door een hoge contactdruk het materiaal (lokaal) gaan vloeien. Bij de omvormtechniek is tevens sprake van contactproblemen waarbij plastisch materiaalgedrag een rol speelt. Daarom zullen we ons ook bezig houden met het beschrijven van elasto-plastisch materiaalgedrag. We beperken ons echter tot geometrisch-lineaire problemen.

We kiezen voor een analyse met de elementenmethode omdat we ons niet willen beperken tot een bepaalde geometrie. Daarbij maken we gebruik van het elementenmethodeprogramma NONSYS omdat we aan dit pakket op eenvoudige wijze zelf geprogrammeerde elementen kunnen koppelen (beschrijving NONSYS : bijlage 1). Dit pakket is geschikt voor het analyseren van niet-lineaire problemen.

Voordat we ons gaan bezig houden met de contactproblemen besteden we eerst enige aandacht aan een oplossingsproces voor niet-lineaire problemen, zodat duidelijk wordt welke grootheden we op element-niveau moeten definiëren om te kunnen werken met dit oplossingsproces. (Voor matrix-notatie afspraken wordt verwezen naar bijlage 2.)

Om alle aspecten en de daarmee samenhangende numerieke problemen onder de knie te krijgen, bouwen we de theorie, met oplopende

moeilijkheidsgraad, systematisch op.

We maken eerst een één-dimensionaal geometrisch lineair model waarbij alleen speling en de optredende normaalkracht een rol spelen en gebruik wordt gemaakt van lineair-elastisch materiaalgedrag. Het contact wordt in rekening gebracht met een contact-element. Dit element gaat na of er contact is tussen twee knooppunten en leidt indien er sprake is van contact een normaalkracht door en laat de betreffende knooppunten samenvallen. De eigenschappen van dit element worden afgeleid m.b.v. de multiplicatorenmethode van Lagrange toegepast op het principe van minimale potentiële energie. Later brengen we ook bij het één-dimensionale probleem elasto-plastisch materiaalgedrag in rekening. Het hierbij gebruikte contact-element is identiek aan het contact-element bij lineair-elastisch materiaalgedrag, echter zou formeel de afleiding hiervan uit moeten gaan van het principe van de virtuele arbeid, hetgeen tot hetzelfde resultaat leidt.

Als alle (numerieke) problemen hierbij zijn opgelost gaan we over tot geometrisch-lineaire rotatiesymmetrische problemen met lineair-elastisch materiaalgedrag. Hierbij speelt de wrijving een rol. We gebruiken in eerste instantie het Coulomb-wrijvingsmodel. Omdat dit model niet goed blijkt te kloppen wanneer de contactdrukken zo groot worden dat er plastische vervorming optreedt, worden ook enkele in de omvormtechnologie veel gebruikte modellen ingevoerd. De wrijving wordt eveneens in rekening gebracht met de multiplicatorenmethode van Lagrange.

Tenslotte wordt elasto-plastisch gedrag op basis van het Von Mises vloeicriterium met isotrope lineaire versterking in rekening gebracht. Alle stadia van het elementenmethodemodel worden uitvoerig getest en waar mogelijk vergeleken met een exacte oplossing of anderszins waar mogelijk vergeleken met de resultaten van het programmapakket MARC.

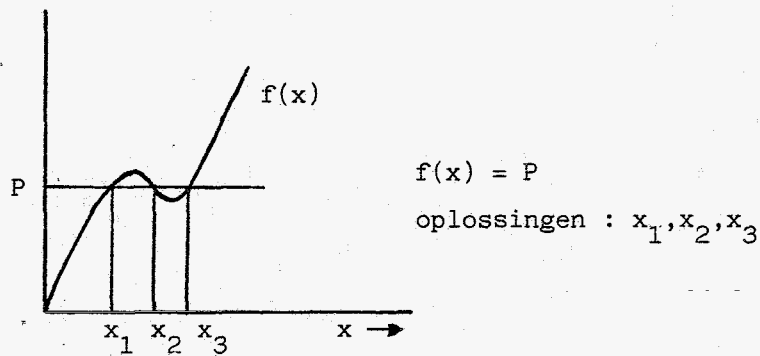
In hoofdstuk 7 worden enkele contactfenomenen gedemonstreerd aan de hand van de ringcompressietest en de stuikproef. Tevens wordt aangetoond dat met kleine variaties van de stempelvorm de contactdruk bij het stuiken van ronde platte voorwerpen verlaagd kan worden, hetgeen van praktisch belang is voor de omvorm technologie. Er zijn echter vele vervolgstudies mogelijk op dit rapport.

2. Oplossingsstrategie voor niet-lineaire problemen

2.1 Inleiding

Als we een mechanika probleem moeten oplossen waar speling, wrijving en plastisch materiaalgedrag een rol spelen, komen we, bij een werkwijze volgens de methode der eindige elementen, uiteindelijk te staan voor het oplossen van een stelsel niet-lineaire vergelijkingen. Voordat we ons bezig houden met het opstellen van deze vergelijkingen, besteden we in dit hoofdstuk enige aandacht aan het oplossen van een stelsel niet-lineaire vergelijkingen.

In het algemeen hoeft de oplossing van een dergelijk stelsel niet eenduidig te zijn (zie fig.2.1.1).



$$f(x) = P$$
$$\text{oplossingen : } x_1, x_2, x_3$$

Fig. 2.1.1

De oplossing die via een iteratieproces bepaald zal moeten worden kan afhankelijk zijn van de gevolgde methodiek. Een veelgebruikte methode voor het oplossen van niet-lineaire stelsels is de zg. "Newton-Raphson" methode.

2.2 Newton-Raphson , algemene werkwijze

We bekijken het volgende stelsel vergelijkingen :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P_2 & f(\tilde{x}) &= P \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P_n \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Er zijn n onbekenden : x_1, x_2, \dots, x_n terwijl P_1, P_2, \dots, P_n bekend verondersteld worden.

De Taylorontwikkeling van f rond $\tilde{x} = \tilde{x}_k$ luidt :

$$f(\tilde{x}) = f(\tilde{x}_k) + \left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \right]_{\tilde{x}=\tilde{x}_k} \cdot (\tilde{x} - \tilde{x}_k) + \text{hogere orde termen} \tag{2.2.2}$$

waarbij :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

de tangent-modulus matrix genoemd wordt.

Veronderstel dat \tilde{x}_k een benaderingsoplossing is van het stelsel (2.2.1), dan gaat (2.2.2) over in :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \right]_{\tilde{x}=\tilde{x}_k} \cdot (\tilde{x} - \tilde{x}_k) = \tilde{P} - f(\tilde{x}_k) \quad (2.2.4)$$

Hierbij zijn hogere orde termen verwaarloosd.

Door in (2.2.4) \tilde{x} te vervangen door \tilde{x}_{k+1} , verkrijgen we een formulering die geschikt is voor een iteratieve bepaling van een benaderingsoplossing. Met :

$$\Delta \tilde{x}_{k+1} := \tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k \quad (2.2.5)$$

gaat (2.2.4) over in :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \right]_{\tilde{x}=\tilde{x}_k} \cdot \Delta \tilde{x}_{k+1} = \tilde{P} - f(\tilde{x}_k) \quad (2.2.6)$$

Een iteratieslag verloopt formeel als volgt :

$$\Delta \tilde{x}_{k+1} = \left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \right]_{\tilde{x}=\tilde{x}_k}^{-1} \cdot (\tilde{P} - f(\tilde{x}_k))$$

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \Delta \tilde{x}_{k+1}$$

Dit is de Newton-Raphson methode.

In de praktijk zal de tangent-modulus matrix niet geïnverteerd worden maar zal $\Delta \tilde{x}_{k+1}$ bepaald worden door het stelsel lineaire vergelijkingen (2.2.6) op te lossen.

2.3 Procedure in de elementenmethode

Veronderstel dat we een stelsel vergelijkingen als (2.2.1) hebben opgesteld met behulp van de elementenmethode.

De onbekenden zijn dan de verplaatsingsgrootheden u_1, u_2, \dots, u_n .

De kolom \tilde{P} bevat de (bekende) uitwendige belastingsgrootheden.

De oplossing van een niet-lineair mechanika probleem is niet altijd eenduidig. Belangrijk hiervoor is het belastingsverloop in de tijd. Om het belastingsverloop te kunnen regelen wordt \tilde{P} in incrementen op de constructie aangebracht.

We definiëren :

- j : incrementnummer ($j=0,1,2,\dots$)
- k : iteratienummer ($k=0,1,2,\dots,m$)
- \tilde{u}_k^j : verplaatsingsgrootheden na iteratie k van increment j . (analoog : $\Delta \tilde{u}_{k+1}^j = \tilde{u}_{k+1}^j - \tilde{u}_k^j$). $\tilde{u}_0^0 = \tilde{0}$.
- ΔP^j : belastingincrement j
- $\tilde{P}^j = \sum \Delta P^l$: totale belasting bij increment j
- $\tilde{Q}_k^j = f(\tilde{u}_k^j)$: knooppuntskrachten "in evenwicht met" de spanningen berekend uit \tilde{u}_k^j .
- $\tilde{K}_k^j = \left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}} \right]_{\tilde{u}=\tilde{u}_k^j}$: de stijfheidsmatrix

Vergelijking (2.2.6) gaat met deze definities over in :

$$\tilde{K}_k^j \cdot \Delta \tilde{u}_{k+1}^j = \tilde{P}^j - \tilde{Q}_k^j \quad (2.3.1)$$

Per increment lossen j lossen we het probleem op met de iteratieformule (2.3.1). Als in increment j het iteratieproces geconvergeerd is na iteratieslag m wordt overgegaan naar increment $j+1$. De laatst berekende oplossing in increment j , \tilde{u}_m^j , is de startwaarde voor de verplaatsingen van iteratie 0 van increment $j+1$. Dus geldt :

$$\tilde{u}_0^{j+1} = \tilde{u}_m^j$$

Analoog geldt :

$$\underline{Q}_0^{j+1} = \underline{Q}_m^j$$

Er is sprake van "knooppuntsevenwicht" als geldt :

$$\underline{P}_k^j = \underline{Q}_k^j \quad (2.3.2)$$

D.w.z. de krachten in evenwicht met de spanningen berekend uit de verplaatsingen \underline{u}_k^j , zijn gelijk aan de uitwendige belastingen.

Uit (2.3.1) volgt dan inderdaad dat de volgende iteratieslag oplevert : $\Delta \underline{u}_{k+1}^j = 0$, zodat \underline{u}_k^j de oplossing van het beschouwde stelsel is voor increment j .

In de praktijk zal men het iteratieproces eerder afbreken, afhankelijk van een zeker convergentiecriterium. Een mogelijkheid is na iedere iteratieslag k van increment j de zg. "residual load" te berekenen :

$$\underline{R}_k^j = \underline{P}_k^j - \underline{Q}_k^j \quad (2.3.3)$$

Het iteratieproces stopt als :

$$|\underline{R}_k^j| < \epsilon_{abs} \quad (2.3.4)$$

of als :

$$|\underline{R}_k^j| < \epsilon_{rel} \cdot |\underline{P}_k^j| \quad (2.3.5)$$

waarbij : ϵ_{abs} : toelaatbare absolute onbalans
 ϵ_{rel} : toelaatbare relatieve onbalans

Wanneer er sprake is van plastisch materiaalgedrag levert het berekenen van \underline{Q}_k^j problemen op. Veelal zal \underline{Q}_k^j benaderd moeten worden. In par. 6.2 gaan we hier dieper op in.

Wanneer gebruik gemaakt wordt van de elementenmethode zullen alle relevante grootheden op element niveau worden gedefiniëerd. Deze grootheden zullen we voorzien van een (links boven) index "e":

$\underline{e}_{K_k}^j$: elementstijfheidsmatrix

$\underline{e}_{Q_k}^j$: knooppuntskrachten in evenwicht met de berekende spanningen van het betreffende element e. Deze volgen dus uit de na iteratie k van increment j berekende verplaatsingen.

Als er sprake is van verdeelde belastingen zullen op element-niveau de kinematisch consistente knooppuntskrachten berekend moeten worden ; van element e wordt deze bijdrage aan het rechterlid weergegeven door $\underline{e}_{P_k}^j$.

Afhankelijk van het gebruikte elementenmethode programma zal deze grootheid bij iedere iteratieslag opnieuw bepaald worden.

In dat geval is het correcter te schrijven : $\underline{e}_{P_k}^j$, hetgeen overigens niets afdoet aan de algemeenheid van de hiervoor beschreven oplossingsprocedure. (Eigenlijk moet het rechterlid \underline{P}_k^j voorzien worden van een index k).

N.B. : M.b.v. $\underline{e}_{P_k}^j$ is ook voor andere doeleinden het rechterlid te beïnvloeden (zie hoofdstuk 3).

Voor het geval dat we één vergelijking met één onbekende hebben (n=1), is het iteratieproces grafisch weer te geven. In fig. 2.3.1 staan voor increment j twee iteratieslagen weergegeven.

Uit deze grafische constuctie blijkt dat men i.h.a. niet "over een maximum (of minimum) heen kan itereren".

In fig. 2.3.2 staat het stroomdiagram van het totale oplossingsproces weergegeven.

We zullen hier gebruik maken van het programmapakket "NONSYS", waarbij de gebruiker zelf elementen moet formuleren (en programmeren).

Dit pakket werkt volgens het hier beschreven oplossingsproces.

(Een beschrijving van NONSYS vindt U in bijlage 1).

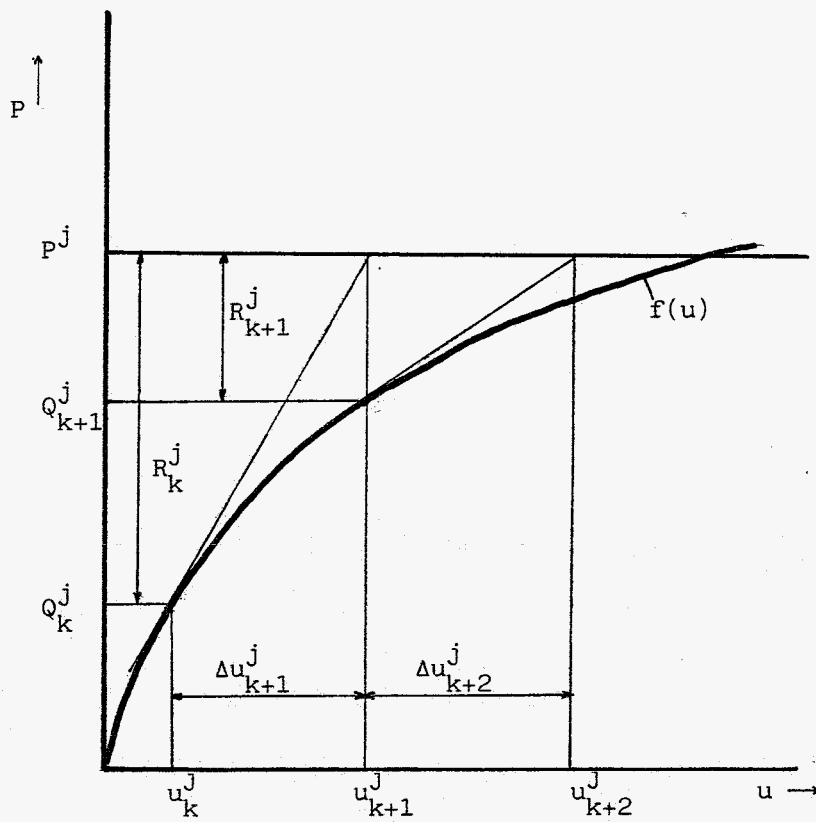


Fig. 2.3.1

Betekenis van symbolen in fig. 2.3.2 :

- j : increment nummer
- k : iteratie nummer
- \tilde{z} : momentane benadering van u
- P^* : uitwendige knooppuntsbelastingen
- $\tilde{\Delta P}^*$: increment van P^*
- \tilde{b} : kolom met verdeelde belastingen
- $\tilde{\Delta b}$: increment van \tilde{b}
- \tilde{e}_P : kinematisch consistente belastingsvektor (berekend m.b.v. \tilde{b})
- \tilde{K} : stijfheidsmatrix
- \tilde{P} : rechter lid
- k_{max} : maximaal aantal iteraties
- j_{max} : aantal incrementen

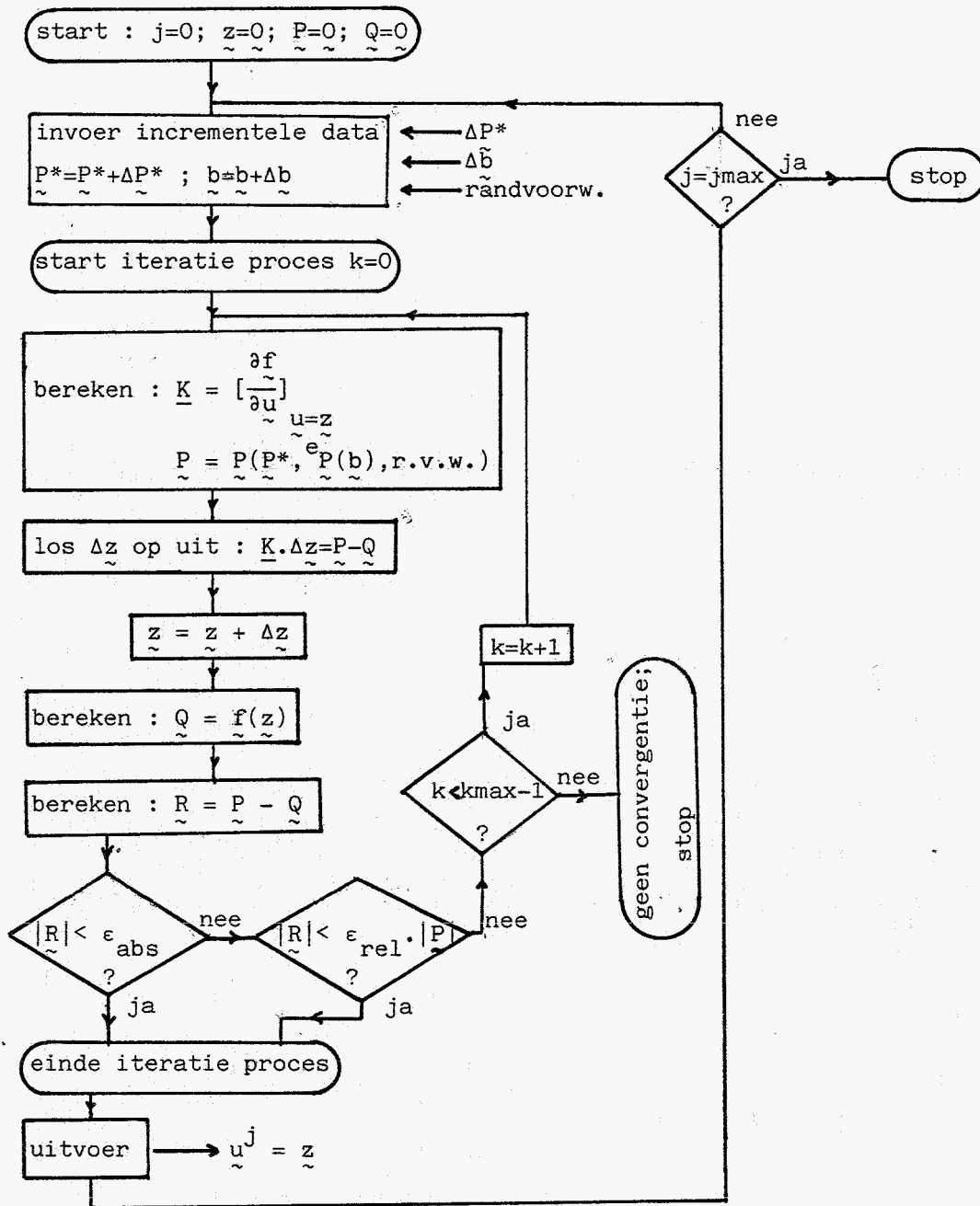


Fig. 2.3.2

3. Eén-dimensionaal contactprobleem

3.1 Inleiding

We bekijken in dit hoofdstuk "constructies" die tijdens belasting met elkaar in contact kunnen komen of contact kunnen verliezen en wel in de meest eenvoudige vorm :

- één-dimensionaal
- lineair-elastisch materiaal
- geometrisch-lineair

Bij één-dimensionale constructies is wrijving niet relevant. We brengen tussen twee constructieknooppunten, die eventueel met elkaar in contact kunnen komen, een element aan dat bij contact een normaalkracht doorleidt en de knooppunten laat samenvallen (d.w.z. het materiaal van het ene constructiegedeelte overlapt niet het materiaal van het andere gedeelte). Als er geen contact is dan zijn de vrijheidsgraden van die knopen niet afhankelijk van elkaar. We noemen dit een "gap-element".

Voordat we dit element precies gaan formuleren, werken we eerst een voorbeeld uit met een variatieprincipe om inzicht te krijgen in de betekenis van enkele relevante grootheden.

3.2 Een voorbeeld

We bekijken het volgende geval :

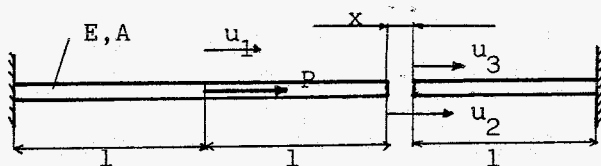


Fig. 3.2.1

P : kracht

u_1, u_2, u_3 : knooppuntsverplaatsingen

\bar{u} : initiële speling (d.w.z. de speling als $P=0$)

$x = \bar{u} - u_2 + u_3$: huidige speling

Als er geen contact is ($x > 0$) dan is de oplossing triviaal.

We gaan nu dit voorbeeld uitwerken voor het geval dat er contact

is ($x < 0$) met het principe van minimale potentiële energie Π

onder de voorwaarde $x=0$.

Voor de potentiële energie geldt :

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} u_1^2 + \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{EA}{l} u_3^2 - Pu_1 \quad (3.2.1)$$

Nu moet gelden :

$$\delta \Pi = 0 \quad \forall \delta u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2.2)$$

onder de nevenvoorwaarde :

$$u_2 - u_3 - \bar{u} = 0 \quad (3.2.3)$$

Volgens de multiplicatorenmethode van Lagrange komt dit overeen

met het minimum van de functionaal :

$$\Pi^* = \Pi + \lambda \cdot (u_2 - u_3 - \bar{u}) \quad (3.2.4)$$

waarbij λ de Lagrange-multiplicator genoemd wordt.

Dus er moet gelden :

$$\delta \Pi^* = 0 \quad \forall u_i \quad (i=1,2,3) \quad \text{en} \quad \forall \delta \lambda \quad (3.2.5)$$

Uitwerking van (3.2.5) levert :

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi^* &= \frac{EA}{l} u_1 \delta u_1 + \frac{EA}{l} (u_2 - u_1) \delta u_2 + \\
 &\frac{EA}{l} (u_1 - u_2) \delta u_1 + \frac{EA}{l} u_3 \delta u_3 + \\
 &- P \delta u_1 + (u_2 - u_3 - \bar{u}) \delta \lambda + \\
 &+ \lambda \delta u_2 - \lambda \delta u_1 = 0
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Dit geeft het volgende stelsel vergelijkingen in de verplaatsingen :

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ -\lambda \\ \bar{u} \\ \lambda \end{bmatrix} \tag{3.2.7}$$

De derde rij van dit stelsel vertegenwoordigt de voorwaarde (3.2.3). Als in het geval dat er geen contact optreedt ($x > 0$), een drukkracht zou werken in de spleet op de linker staaf met grootte N naar links gericht en op de rechter staaf met grootte N naar rechts gericht, geeft de uitwerking van (3.2.2) hetzelfde stelsel als (3.2.7), zonder de derde rij, met als rechterlid $[P, -N, N]^T$. Daaruit volgt dat λ geïnterpreteerd kan worden als de contactkracht tussen de twee staven.

Het stelsel (3.2.7) is echter niet geschikt voor het oplossen van het probleem, omdat λ nog onbekend is. Het stelsel is eenvoudig om te werken naar :

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \lambda \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ \bar{u} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

Stijfheidsmatrix

Als we het probleem met de elementenmethode oplossen, zal dezelfde stijfheidsmatrix ontstaan. In (3.2.8) zijn de (elkaar overlappende) element-stijfheidsmatrices door stippellijnen onderscheiden.

Hierin is het aandeel van het zg. contact-element al aan te wijzen. De normaalkracht λ wordt een vrijheidsgraad en de initiële speling \bar{u} komt in het rechterlid te staan.

We zullen nu overgaan tot een meer algemene formulering van het "gap-element".

3.3 Het "gap-element"

We schematiseren het gap-element als volgt :

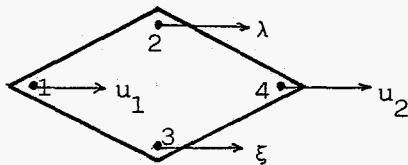


Fig. 3.3.1

De knooppunten 1 en 4 zijn de constructieknooppunten waar tussen het contactprobleem een rol speelt. Als de constructie onbelast is, is de speling \bar{u} .

Knooppunt 2 heeft als vrijheidsgraad de normaalkracht λ .

Knooppunt 3 is een zg. iteratieknooppunt. Hier komen we later op terug.

Een belangrijke grootheid is de sluitrichting \underline{n} (van knoop 1 naar knoop 4). In dit één-dimensionale geval kan volstaan worden de sluitrichting aan te geven met een scalar n ($n=1$ of $n=-1$).

In de in fig. 3.3.1 getekende situatie geldt : $n=1$.

Bij verwisseling van knooppuntsnummers van knooppunt 1 en 4 geldt $n=-1$.

Gesloten gap-element

Veronderstel het gap-element is gesloten, d.w.z. er contact tussen de twee constructieknooppunten. Dan moet, analoog aan §3.2, met een Lagrange-multiplicator de volgende voorwaarde worden verdisconteerd :

$$n \cdot (u_1 - u_2) - \bar{u} = 0 \quad (3.3.1)$$

Als Π de potentiële energie voorstelt, dan wordt de te minimaliseren functionaal :

$$\Pi^* = \Pi + \lambda \cdot [n \cdot (u_1 - u_2) - \bar{u}] \quad (3.3.2)$$

Dus moet gelden :

$$\delta \Pi^* = 0 \quad \forall \delta \underline{v}, \quad \forall \delta u_1, \quad \forall \delta u_2, \quad \forall \delta \lambda \quad (3.3.3)$$

Waarbij \underline{v} : kolom met alle verplaatsingsgroottheden u_1 en u_2 uitgezonderd.

Uitwerking levert :

$$\begin{aligned} \delta \Pi + [n \cdot (u_1 - u_2) - \bar{u}] \delta \lambda + \\ n \lambda \delta u_1 - n \lambda \delta u_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Uit (3.3.4) volgt een stelsel vergelijkingen waaruit \underline{v} , u_1 , u_2 , en λ op te lossen zijn.

Het aandeel in dit stelsel vergelijkingen van het gesloten gap-element is :

$$\begin{bmatrix} 0 & n & 0 \\ n & 0 & -n \\ 0 & -n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \lambda \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

In de elementenmethode wordt dit resultaat in rekening gebracht met :

de element-stijfheidsmatrix :

$$\underline{e}_{k,j} = \begin{bmatrix} 0 & n & 0 \\ n & 0 & -n \\ 0 & -n & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

het aandeel in het rechterlid :

$$e_{p^j}^j = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

Hier is nog geen rekening gehouden met het zg. iteratieknooppunt. De indices j en k hebben betrekking op het oplossingsproces (zie hoofdstuk 2).

De "knooppuntskrachten in evenwicht met de spanningen" in element e, berekend uit de "verplaatsingen", volgen uit :

$$e_{q^j}^j = \begin{bmatrix} 0 & n & 0 \\ n & 0 & -n \\ 0 & -n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \lambda \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot n \\ (u_1 - u_2) \cdot n \\ -\lambda \cdot n \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

Als tijdens het iteratieproces een negatieve λ berekend wordt, verkeert het element zich in de verkeerde status (gesloten) en zal open gaan.

Open gap-element

Veronderstel het gap-element is open, d.w.z. er is geen contact tussen de twee constructieknooppunten. De normaalkracht λ is dus nul. De vrijheidsgraden u_1 en u_2 zijn onafhankelijk van elkaar. Er geldt :

$$\bar{u} - n \cdot (u_1 - u_2) > 0 \quad (3.3.9)$$

Eigenlijk is er geen bijdrage van het gap-element; toch willen we dezelfde matrixopbouw als bij een gesloten gap-element en wel zo dat de totale stijfheidsmatrix niet singulier wordt.

Als element-stijfheidsmatrix kan worden gehanteerd :

$$e_{\underline{k}}^{Kj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

met als aandeel in het rechter lid :

$$e_{\underline{k}}^{Pj} = 0 \quad (3.3.11)$$

Tevens geldt :

$$e_{\underline{k}}^{Qj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \lambda \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.12)$$

Deze laatste vergelijking is van belang bij de statusovergang van gesloten naar open. Als het oplossingsproces (hoofdstuk 2) nog niet geconvergeerd is, dan is het mogelijk dat, wanneer de status verandert van dicht naar open, de normaalkracht ongelijk aan nul is (deze is dan negatief). Als we precies nagaan hoe het iteratieproces verloopt dan blijkt :

- als tijdens iteratie k het gap-element open was, $\lambda_k = 0$, en open blijft, dan geldt $\Delta\lambda_{k+1} = 0$ dus $\lambda_{k+1} = 0$.
- als tijdens iteratie k het gap-element dicht was, $\lambda_k \neq 0$, en open gaat, dan geldt $\Delta\lambda_{k+1} = -\lambda_k$ dus $\lambda_{k+1} = 0$.

Beide gevallen geven het gewenste resultaat : normaalkracht = 0.

3.4 Het iteratieknooppunt

Als in een increment een gap-element van open naar dicht of van dicht naar open gaat is er een extra iteratie nodig om tot de juiste oplossing te komen.

Aan het begin van een iteratieslag wordt nagegaan of het gap-element open of dicht is :

$$x = \bar{u} + n. (u_2 - u_1) : \text{de huidige speling}$$
$$\bar{u} : \text{initiële speling}$$
$$\lambda : \text{normaalkracht}$$

-Als $x > 0$ of $\lambda < 0$ dan : gap-element is/gaat open, anders gesloten.

Bij verandering van status zal de "residual load" t.g.v. een gap-element de volgende (absolute) waarden aannemen :

$$\text{Open} \rightarrow \text{dicht} : |R_{\sim k}^j| = |e_{\sim k \text{ open}}^{Pj} - e_{\sim k \text{ dicht}}^{Qj}| = |u_1 - u_2|$$

$$\text{Dicht} \rightarrow \text{open} : |R_{\sim k}^j| = |e_{\sim k \text{ dicht}}^{Pj} - e_{\sim k \text{ open}}^{Qj}| = |\bar{u} - \lambda|$$

N.B. er worden bij de bepaling van de residual load grootheden met verschillende dimensies gebruikt.

In het geval dat de status van open naar dicht gaat is de "residual load" zeer klein t.o.v. de werkelijk optredende krachten, zodat een nieuwe iteratieslag, die noodzakelijk is, achterwege blijft. Als het gap-element van dicht naar open gaat is de contactkracht meestal klein t.o.v. de andere knooppuntskrachten, zodat men niet verzekerd is van een extra iteratie.

We gebruiken nu een "truc" die het stelsel vergelijkingen in tact laat (met symmetrische matrix) en die bij verandering van status een extra iteratie verzekert.

We voeren een iteratieknooppunt in. Dit knooppunt vertegenwoordigt een dummy-vrijheidsgraad ξ (zie fig. 3.3.1).

Als het gap-element open is kiezen we voor de bijbehorende component van $e_{P_k}^j$ en $e_{Q_k}^j$ de waarde nul. Als het gap-element gesloten is kiezen we voor de bijbehorende component van $e_{P_k}^j$ en $e_{Q_k}^j$ een waarde C (C is een element-eigenschap).

Als de status ongewijzigd blijft is de "residual load" gelijk aan nul. Als de status wijzigt, heeft de "residual load" minstens de waarde C. De bijbehorende diagonaalterm van de element-stijfheidsmatrix is 1, zodat de totale stijfheidsmatrix regulier blijft.

C moet van de orde van de optredende krachten zijn (of groter).

Met de dummy ξ wordt verder niets gedaan.

In de volgende overzichtsparagraaf (§3.5) zijn bovenstaande groot-heden verwerkt in de element-stijfheidsmatrix e.d.

Met het pakket NONSYS is het hier beschreven element gecombineerd met een (lineair-elastisch) lijnelement uitvoerig getest.

Testproblemen als weergegeven in fig. 3.2.1 ,maar ook "constructies" met meerdere gap-elementen, konden feilloos doorgerekend worden.

Steeds kostte een statusovergang van een gap-element één extra iteratie.

3.5 Overzicht één-dimensionaal gap-element

- knooppunt 1 : constructie-knooppunt
- knooppunt 2 : normaalkracht-knooppunt
- knooppunt 3 : iteratie-knooppunt
- knooppunt 4 : constructie-knooppunt

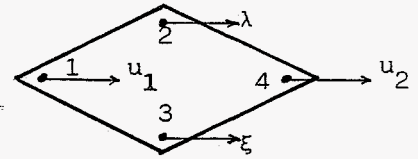


Fig. 3.5.1

u_1, u_2 : verplaatsingen

λ : normaalkracht

ξ : dummy variabele

$$\tilde{u}^T = [u_1, \lambda, \xi, u_2]$$

n : sluitrichting (1 + 4) : "coördinaat" van knoop 2 ($n = \pm 1$)

Open : $\bar{u} + n \cdot (u_2 - u_1) > 0$ of $\lambda \leq 0$

$$e_{\tilde{k}}^{Kj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_{\tilde{k}}^{Pj} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_{\tilde{k}}^{Qj} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gesloten : $\bar{u} + n \cdot (u_2 - u_1) \leq 0$ of $\lambda > 0$

$$e_{\tilde{k}}^{Kj} = \begin{bmatrix} 0 & n & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -n & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_{\tilde{k}}^{Pj} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u} \\ C \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_{\tilde{k}}^{Qj} = \begin{bmatrix} \lambda n \\ (u_1 - u_2) \cdot n \\ C \\ -\lambda n \end{bmatrix}$$

Elementeigenschappen :

\bar{u} : initiële speling (deze mag negatief zijn; dan is \bar{u} de afstand waarover in de referentieconfiguratie twee lichamen op elkaar gedrukt zijn).

C : waarde "residual load" bij verandering van status (open/dicht) voor een extra iteratieslag.

Opmerking : Bij gesloten gap-element is de stijfheidsmatrix niet positief definitief.

3.6 Plastisch materiaalgedrag

Voor technische toepassingen is het één-dimensionale probleem weinig interessant. Het één-dimensionale probleem is echter wel geschikt voor de bestudering van het oplossingsproces.

Als het materiaalgedrag van de lijn-elementen lineair-elastisch is zal, wanneer de gap-elementen in de juiste status verkeren, in één iteratieslag convergentie bereikt worden. Als het materiaal (fysisch) niet-lineair is kunnen we echter convergentieproblemen verwachten.

We bekijken het volgende geval :

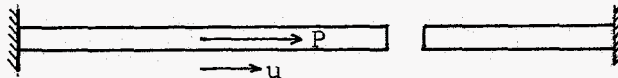


Fig. 3.6.1

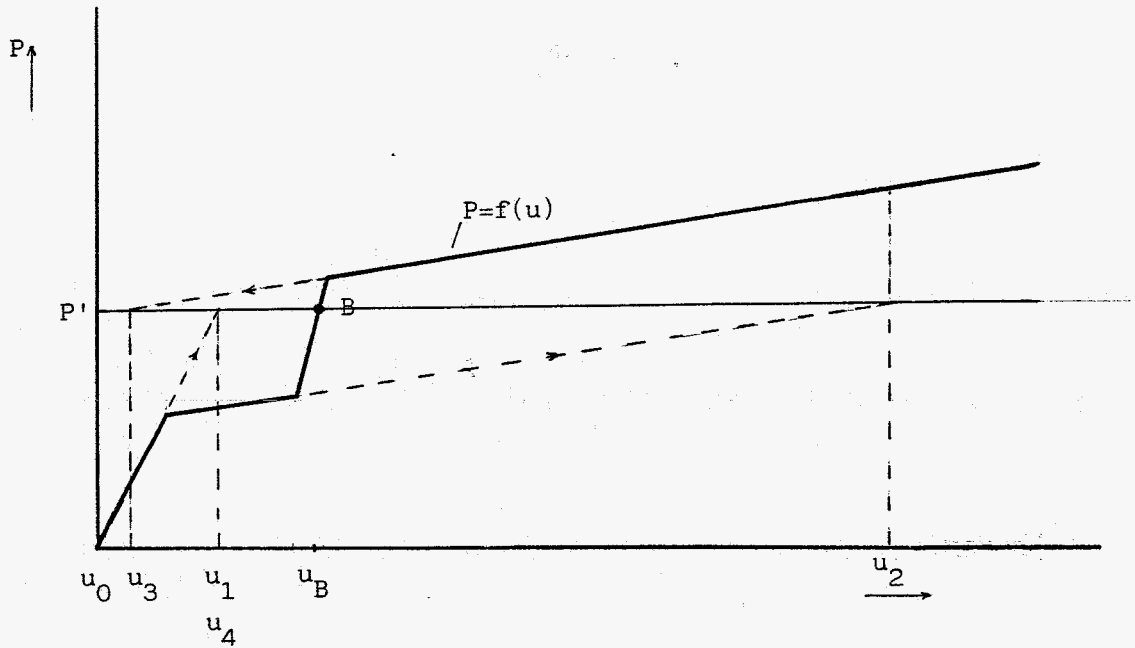
Veronderstel dat het materiaal lineair versterkend is en dat het probleem geometrisch-lineair is.

We kunnen in een P-u-diagram alle evenwichtsstanden weergeven (fig. 3.6.2).

Als we uitgaande van de referentieconfiguratie ($u=0, P=0$) de "constructie" belasten met $P=P'$ dan volgt de nieuwe evenwichtstoestand uit het oplossen van :

$$f(u)=P' \qquad (3.6.1)$$

Als we deze vergelijking (met één onbekende) oplossen met de methode van Newton-Raphson zal dit proces niet altijd convergeren (zie stippellijnen in fig.3.6.2).



— : $f(u)$

- - - : weergave iteratieproces (oplossing u_B wordt niet bereikt)

1 : het materiaal links van het aangrijpingspunt van P wordt plastisch

2 : de spleet sluit

3 : het materiaal rechts van het aangrijpingspunt van P wordt plastisch.

Fig. 3.6.2

Als we het probleem met de elementenmethode aanpakken hebben we te maken met een stelsel vergelijkingen met meer onbekenden. Het oplossingsproces verloopt echter niet zoals weergegeven in fig. 3.6.2.

Om dit te onderzoeken ontwikkelen we een lijn-element met lineair-isotroop-verstevigend materiaalgedrag. We bekijken de geometrisch lineaire situatie, daarom hanteren we als rekdefinitie (zie fig. 3.6.3) :

$$\epsilon = \frac{u}{\ell_0} \quad (3.6.2)$$

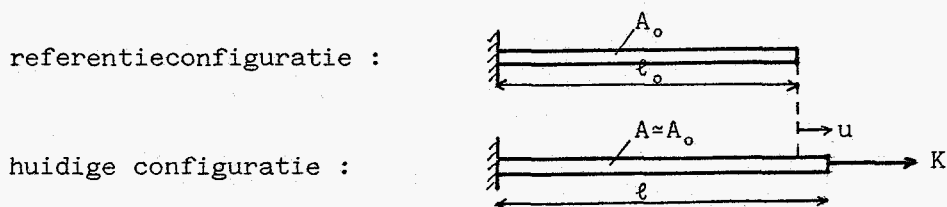


Fig. 3.6.3

De volgende grootheden spelen een rol :

- ϵ^p : plastische rek
- $\bar{\epsilon}^p$: effectieve plastische rek
- σ_v : (huidige) vloeispanning

waarbij formeel geldt :

$$\bar{\epsilon}^p = \int_{\text{tijd}} |\dot{\epsilon}^p| dt \quad (3.6.3)$$

Als een trekstaaf belast wordt en gaat vloeien dan is ϵ^p de rek die overblijft als de belasting wordt weggenomen.

Voor de continue trekproef is $\bar{\epsilon}^p$ identiek aan ϵ^p ; bij de stuikproef geldt echter $\bar{\epsilon}^p = -\epsilon^p$. Het verschil tussen $\bar{\epsilon}^p$ en ϵ^p hangt af van de belastingsgeschiedenis.

Veronderstel dat in een increment (j) ϵ^p toeneemt met $\Delta\epsilon_j^p$ (index j is het increment nr.) dan geldt :

$$\epsilon_{j+1}^p = \epsilon_j^p + \Delta\epsilon_j^p \quad (3.6.4)$$

$$\bar{\epsilon}_{j+1}^p = \bar{\epsilon}_j^p + |\Delta\epsilon_j^p| \quad (3.6.5)$$

Hiermee liggen de definities van ϵ^p en $\bar{\epsilon}^p$ vast.

Het materiaalgedrag geeft het volgende verband tussen vloeispanning en de deformatie :

$$\sigma_v = \sigma_{v0} + H_0 \cdot \bar{\epsilon}^p \quad (3.6.6)$$

In grafiek :

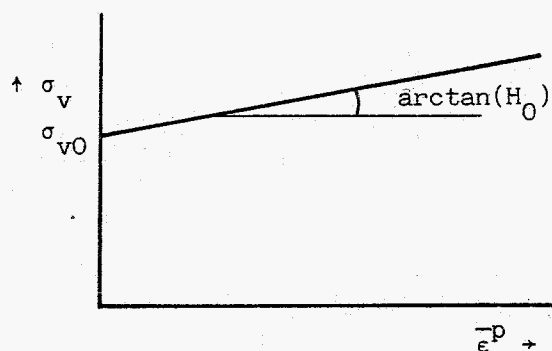


Fig. 3.6.4

H_0 wordt de versterkingsparameter genoemd.

In het spannings-tek-diagram is de belastingsgeschiedenis weer te geven. Bijv. :

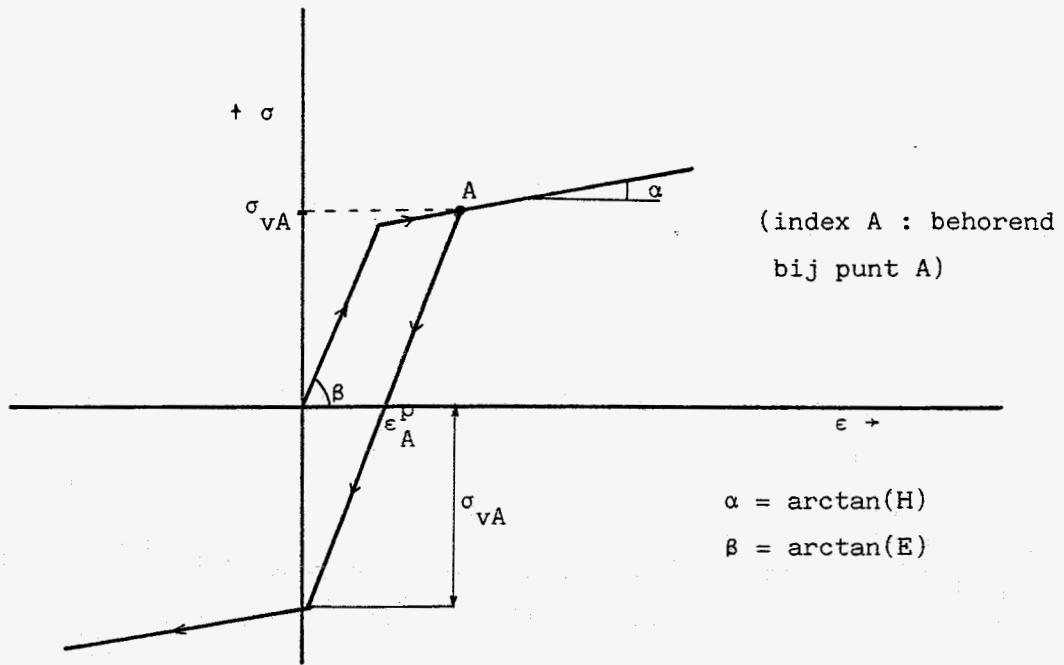


Fig. 3.6.5

Eenvoudig is af te leiden dat :

$$H = \frac{H_0}{1 + H_0/E} \quad (3.6.7)$$

Met bovenstaande theorie is een element te maken waarmee het één-dimensionale gap-element gecombineerd met plastisch materiaalgedrag, met een willekeurige belastingscyclus te testen is.

We verdelen het probleem van fig. 3.6.1 in elementen :

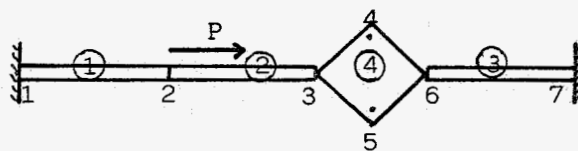


Fig. 3.6.6

Als we het probleem gesignaleerd in fig. 3.6.2, aanpakken met de elementenmethode blijkt het convergentieprobleem niet op te treden. De eerste twee iteratieslagen verlopen zoals geschetst in fig. 3.6.2 ($u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2$) omdat slechts één element vervormt en dus alleen de vrijheidsgraad u een rol speelt (1 vergelijking met 1 onbekende). In element 2 en 3 zijn nog geen vervormingen berekend, dus zal de volgende iteratieslag gerekend worden met elastisch materiaalgedrag en niet met plastisch gedrag zoals in fig. 3.6.2 gesuggereerd wordt. De volgende iteratie leidt direct tot punt B en convergentie is bereikt.

Men mag dus niet zondermeer conclusies trekken uit grafieken als fig. 3.6.2 m.b.t. convergentie van het oplossingsproces bij een elementenmethodemodel.

Verschillende constructies en belastingscycli zijn getest, met druk en met trek, openen en sluiten van de gap-element(en), en steeds convergeerde het oplossingsproces. Iedere overgang van elastisch naar plastisch (of andersom) en iedere status verandering van een gap-element kostte één extra iteratie.

4 Rotatiesymmetrische contactproblemen

4.1 Inleiding

In de techniek is vaak sprake van rotatiesymmetrische contactproblemen. Hierbij is veelal de grootte van het contactoppervlak onbekend ; deze kan bijv. afhangen van de optredende contactdruk (denk bijv. aan een kogel in een taatslager).

In het contactvlak speelt nu ook wrijving een rol. De wrijvingsschuifspanning beïnvloedt de maximaal optredende Von Mises ideële spanning en kan dus van belang zijn voor bepaling van de levensduur van een constructie.

In de omvormtechniek speelt de wrijving een veel grotere rol. Bijv. bij het pletten van een metaal hangt de maximaal optredende contactdruk af van de grootte van de wrijving. Deze effecten kunnen zo groot zijn dat het gebruikte gereedschap bezwijkt.

In dit hoofdstuk ontwikkelen we een rotatiesymmetrisch gap-element waarbij de wrijving in de analyse wordt meegenomen. In dit hoofdstuk hanteren we als voorbeeld het Coulomb-wrijvingsmodel. In hoofdstuk 5 bespreken we enkele andere wrijvingsmodellen. Het gap-element wordt zodanig geformuleerd dat deze andere modellen eenvoudig gesubstitueerd kunnen worden.

Uiteraard moet ook een rotatiesymmetrisch constructie-element geformuleerd worden. We kiezen hier een 4-hoekig 4-knoops-element met lineair-elastisch materiaalgedrag. In hoofdstuk 6 zal ook elasto-plastisch materiaalgedrag aan de orde komen.

4.2 Het 4-knoops ringelement, lineair-elastisch

In fig. 4.2.1 worden de relevante verplaatsingen en spanningsgrootheden gedefiniëerd :

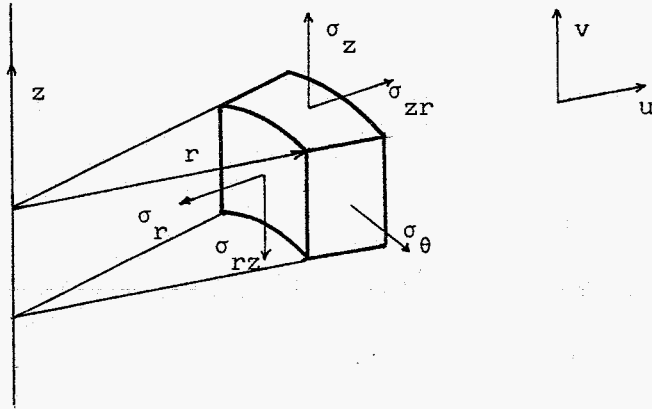


Fig. 4.2.1

De met de spanningsgrootheden geassocieerde rekgrootheden zijn :

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

Met de differentiaaloperator \underline{D} is $\underline{\epsilon}$ te schrijven als :

$$\underline{\epsilon} = \underline{D} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

Hierbij is :

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

De relevante spanningsgrootheden zijn te berekenen uit de rekken met de constitutieve vergelijkingen (wet van Hooke) :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \underline{L} \cdot \underline{\epsilon} \quad (4.2.4)$$

met :

$$\underline{L} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

Voordat we gaan discretiseren bepalen we eerst een coördinaten-transformatie die een willekeurige vierhoek transformeert naar een rechthoek.

Dit biedt grote voordelen bij de discretisering en voor de numerieke integratie.

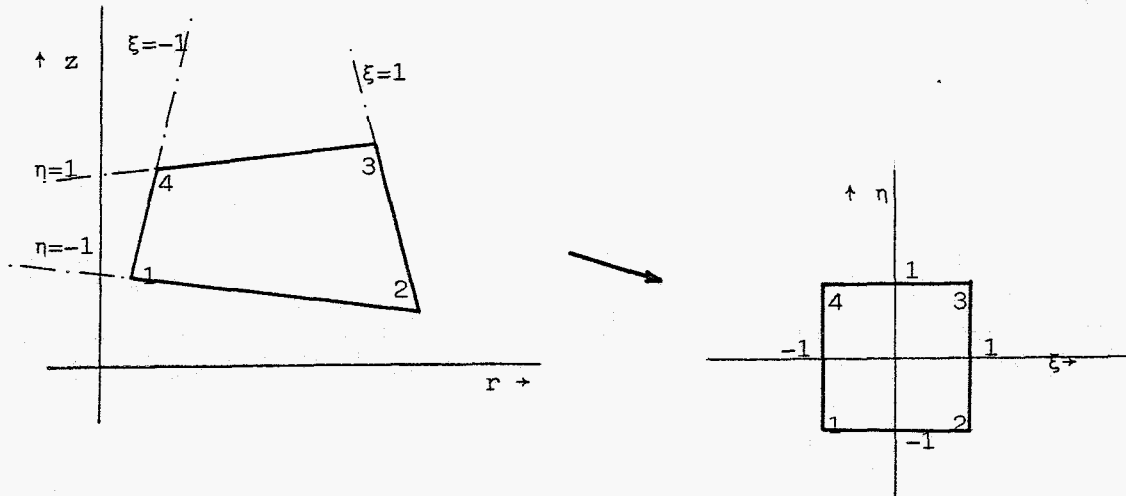


Fig. 4.2.2

Keuze van de transformatie :

$$r = \sum_{i=1}^4 N_i R_i \quad (4.2.6)$$

$$z = \sum_{i=1}^4 N_i Z_i \quad (4.2.7)$$

Waarbij $R_i = r(\text{knoop } i)$ en $Z_i = z(\text{knoop } i)$ (zie fig. 4.2.2).

Het is eenvoudig te bewijzen dat de functies

$$N_i = N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (4.2.8)$$

de gewenste transformatie bewerkstelligen. We noemen ξ en η de materiële coördinaten (ξ_i, η_i zijn de materiële coördinaten van knooppunt i).

De functies N_i ($i=1,2,3,4$) interpoleren eenduidig de coördinaten r en z tussen de knooppuntscoördinaten.

We kunnen nu alle van r en z afhankelijke grootheden uitdrukken in de materiële coördinaten ξ en η .

Voor het berekenen van grootheden waarin de partiële afgeleide van r voorkomt, moeten $\frac{\partial \xi}{\partial r}$ en $\frac{\partial \eta}{\partial r}$ bekend zijn. Als we (4.2.6) en (4.2.7) partiël naar r differentiëren zijn $\frac{\partial \xi}{\partial r}$ en $\frac{\partial \eta}{\partial r}$ eenvoudig te bepalen.

Op analoge wijze zijn de afgeleiden naar z te berekenen.

De discretisering verloopt als volgt: we benaderen het verplaatsingsveld m.b.v. (bekende) interpolatie functies en de onbekende knooppuntsverplaatsingen $\tilde{u}_i^T = [u_i, v_i]$.

We maken het element isoparametrisch; d.w.z. we kiezen voor de verplaatsingen dezelfde interpolatiefuncties als voor de plaatscoördinaten r en z :

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} u(r,z) \\ v(r,z) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad (4.2.9)$$

Het is aan te tonen dat de functies N_i starre translaties, starre rotaties en uniforme deformatie correct beschrijven en tevens voldoen aan de conformiteitseis (zie [I]).

Als we alle knooppuntsverplaatsingen van element e in één kolom zetten :

$$\tilde{u}_e^T = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4] \quad (4.2.10)$$

en we definiëren :

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (4.2.11)$$

dan geldt :

$$\tilde{u} = \underline{N}(\xi, \eta) \cdot \tilde{u}_e \quad (4.2.12)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \tilde{u}_e = \underline{B}(\xi, \eta) \cdot \tilde{u}_e \quad (4.2.13)$$

De elementstijfheidsmatrix van het vierknoops element kunnen we afleiden door te kijken naar de virtuele arbeidsvergelijking van één element (volume V_e) :

$$\int_{V_e} \delta \underline{\epsilon}^T \cdot \underline{\sigma} \, dV = \sum_{i=1}^4 \delta \underline{u}_i^T \cdot \underline{P}_i \quad (4.2.14)$$

(voor alle $\delta \underline{u}_i$ en bijbehorende $\delta \underline{\epsilon}$)

waarbij \underline{P}_i de knooppuntskracht is op knoop i (volume belasting buiten beschouwing gelaten).

Met de boven beschreven discretisering gaat (4.2.14) over in:

$$\int_{V_e} \delta \underline{e}_u^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{L} \cdot \underline{B} \cdot \underline{e}_u \, dV = \sum_{i=1}^4 \underline{e}_u^T \cdot \underline{N}_i^T \cdot \underline{P}_i \quad (4.2.15)$$

Omdat (4.2.15) moet gelden voor alle $\delta \underline{e}_u$ blijft het volgende stelsel vergelijkingen over :

$$\left[\int_{V_e} \underline{B}^T \cdot \underline{L} \cdot \underline{B} \, dV \right] \cdot \underline{e}_u = \underline{e}_P \quad (4.2.16)$$

ofwel $\underline{e}_K \cdot \underline{e}_u = \underline{e}_P \quad (4.2.16a)$

\underline{e}_P is een kolom waarin alle knooppuntskrachten staan :

$\underline{e}_P^T = [P_{1r}, P_{1z}, \dots, P_{4r}, P_{4z}]$. Bedenk daarbij dat $N_i = 1$ op knoop i en dat $N_i = 0$ op alle andere knooppunten.

\underline{e}_K is de elementstijfheidsmatrix. Uiteraard geldt deze elementstijfheidsmatrix ook bij het gebruik van meer dan één element.

Voor het iteratieproces hebben we de knooppuntskrachten in evenwicht met de uit de verplaatsingen berekende spanningen, \underline{e}_Q , nodig :

$$\underline{e}_Q = \int_{V_e} \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} \, dV \quad (4.2.17)$$

(Bij een lineair probleem moet altijd exact gelden : $\underline{e}_Q = \underline{e}_P$.)

Voor het infinitesimale volume element dV geldt :

$$dV = 2\pi r dr dz = 2\pi r(\xi, \eta) \det(\underline{J}) d\xi d\eta \quad (4.2.18)$$

waarbij :

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{de Jacobiaan}) \quad (4.2.19)$$

De integralen benaderen we m.b.v. vierpunts-Gauss integratie :

$$\int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} H_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (4.2.20)$$

n_{int} : aantal integratiepunten ($n_{\text{int}} = 4$)

ξ_i, η_i : integratiepunt i

H_i : gewichtsfactor van integratiepunt i

Voor vierpunts-Gauss integratie geldt :

i	ξ_i	η_i	H_i
1	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
2	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
3	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
4	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1

Door de transformatie naar materiële coördinaten liggen de integratie grenzen voor een willekeurig element vast (zie fig.4.2.2).

4.3 Het rotatiesymmetrisch gap-element met wrijving

In fig. 4.3.1 staan schematisch twee lichamen weergegeven die met elkaar in contact kunnen komen met daartussen een gap-element.

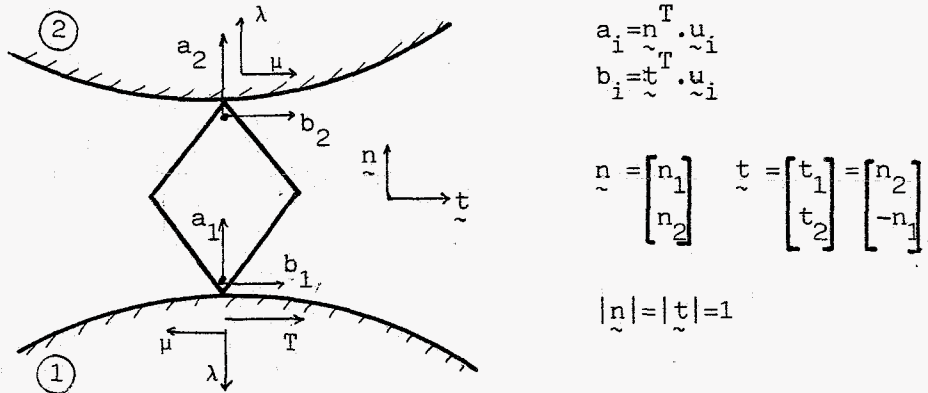


Fig. 4.3.1

We onderscheiden twee richtingen in de analyse : \tilde{n} en \tilde{t} . Loodrecht op het contactvlak (\tilde{n} -richting) spelen de normaalkracht en de speling een rol. De wrijvingsschuifspanning werkt tangentiaal (d.w.z. in de richting van \tilde{t}).

De voorwaarde van contact kunnen we op precies dezelfde manier in rekening brengen als in het één-dimensionale geval (zie hoofdstuk 3).

Als Π de potentiële energie is en \bar{u} de initiële speling dan kunnen we met de multiplicatorenmethode van Lagrange het aandeel van het gesloten gap-element in de richting van \tilde{n} bepalen.

Π is een functie van alle verplaatsingen \tilde{u} (a_i , b_i inbegrepen).

Voor een gesloten gap-element moet

$$\Pi^* = \Pi + \lambda(a_1 - a_2 - \bar{u}) \quad (4.3.1)$$

minimaal zijn voor alle δu en alle $\delta \lambda$ (λ : Lagrange-multiplicator).

Dus :

$$\delta \Pi^* = \delta \Pi + \delta \lambda (a_1 - a_2 - \bar{u}) + \delta \lambda a_1 - \delta \lambda a_2 = 0 \quad (4.3.2)$$

Daarmee wordt het aandeel van de effecten in de normaalrichting:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \lambda \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

De multiplicator λ kan geïdentificeerd worden als de normaalkracht (zie 3.2).

Voor de situatie in het contactvlak kunnen we twee gevallen onderscheiden :

- De maximale wrijvingskracht wordt niet bereikt, d.w.z. er is geen slip.
- Er is wel sprake van slip; de wrijvingskracht voldoet aan een bepaald wrijvingsmodel.

Stel er is geen sprake van slip. We kunnen dan het aandeel van de effecten in de tangentiale richting bepalen m.b.v. de Lagrange-multiplicator μ . Dan moet

$$\Pi^{**} = \Pi^* + \mu(b_1 - b_2) \quad (4.3.4)$$

minimaal zijn, dus

$$\delta\Pi^{**} = \delta\Pi^* + \delta\mu(b_1 - b_2) + \mu\delta b_1 - \mu\delta b_2 = 0 \quad (4.3.5)$$

$$\forall \delta u, \delta \lambda, \delta \mu$$

Daarmee wordt het aandeel van de tangentiale component :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \mu \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

De multiplier μ kan geïdentificeerd worden als de (wrijvings-) kracht in tangentiale richting. In fig. 4.3.1 is weergegeven hoe λ en μ werken op de twee beschouwde lichamen (teken definitie).

We bekijken nu het geval dat er wel slip optreedt. Er werkt dan op lichaam 1 en 2 een tangentiale kracht T die volgt uit een wrijvingsmodel. Met de gekozen teken definities volgt :

$$\mu = -T \quad (4.3.7)$$

We kunnen Π^{**} opvatten als de potentiële energie van het systeem met bekende schuifkracht μ (We mogen μ dan niet variëren).

We kunnen met de multiplier s de voorwaarde (4.3.7) in rekening brengen. De funktionaal

$$\Pi_c = \Pi^{**} - s(T + \mu) \quad (4.3.8)$$

moet minimaal zijn voor variaties van u, λ en s ; dus

$$\delta\Pi_c = \delta\Pi^* + \delta[\mu(b_1 - b_2)] - \delta[s(T + \mu)] = 0 \quad (4.3.9)$$

Hiermee wordt het aandeel van de wrijving :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \mu \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.10)$$

Opgemerkt wordt dat de multiplicator s daarin geen rol speelt.
 Om praktische (numerieke) redenen maken we de matrix symmetrisch door introductie van de onbekende s :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \mu \\ s \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.11)$$

Uit de tweede regel blijkt dat s gelijk is aan de slip ($s=b_1-b_2$).
 Het resultaat (4.3.11) is ook te verkrijgen door bij het stationair eisen van Π_c ook μ te variëren. Daardoor krijgt de multiplicator s dezelfde betekenis als in (4.3.11).

We gaan nu over tot de formulering van het gap-element.

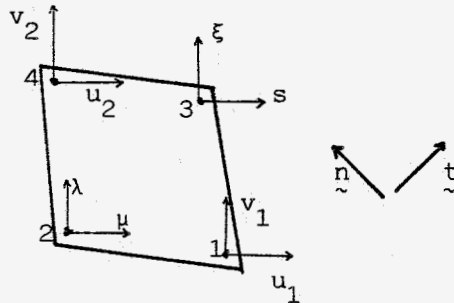


Fig. 4.3.2

We kiezen voor een element met vier knooppunten (zie fig. 4.3.2).
 Twee voor de koppeling aan de contactvlakken (1 en 4), één voor de normaalkracht en de wrijvingskracht (2) en één voor de slip s .

De tweede vrijheidsgraad van knooppunt 3 gebruiken we voor de zg. iteratieparameter ξ . Deze dummy-vrijheidsgraad heeft als bijbehorende component van het rechterlid $e_{\tilde{k}}^{Pj}$ en $e_{\tilde{k}}^{Qj}$ voor iedere status een andere (grote) waarde, zodat bij iedere status overgang minstens één extra iteratieslag volgt (geheel analoog aan §3.4). De stijfheidmatrix ontstaat door het samenstellen van de matrices uit (4.3.3) met (4.3.6) of (4.3.11).

We transformeren de vrijheidsgraden a_i , b_i naar u_i en v_i met behulp van de vectoren gerepresenteerd door \tilde{n} en \tilde{t} . Nu geeft \tilde{n} ook de sluitrichting aan, dus moet deze gericht zijn van knooppunt 1 naar 4 (en niet andersom).

Bij het bepalen van het rechterlid $e_{\tilde{k}}^{Pj}$ en de uit de verplaatsingen berekende knooppuntskrachten $e_{\tilde{k}}^{Qj}$ moeten we rekening houden met de incrementele werkwijze. Het kan nl. zo zijn dat er in het huidige increment geen slip optreedt maar dat dat in het vorige increment wel het geval was. Daarom moeten de gestelde voorwaarden aan de verplaatsingen in het contactvlak, in het geval dat er geen slip optreedt ($b_1 - b_2 = 0$), gelden voor de incrementele verplaatsingen. Om dezelfde redenen is s niet de totale slip maar de slip in het betreffende increment.

Een incrementele grootheid wordt aangegeven met het symbool " Δ " (Δu : increment van u).

We bepalen de elementstijfheidsmatrix $e_{\tilde{k}}^{Kj}$ en $e_{\tilde{k}}^{Pj}$ en $e_{\tilde{k}}^{Qj}$ voor elke status. De momentane elementsvrijheidsgraden staan in de kolom $e_{\tilde{u}}$

$$e_{\tilde{u}}^T = [u_1, v_1, \lambda, \mu, s, \xi, u_2, v_2] \quad (4.3.12)$$

(De componenten van \tilde{n} zijn in het programma in te voeren als coördinaten van knooppunt 2)

We geven zonder nadere uitwerking de resultaten.

Slip

$$e_{\bar{k}}^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n_1 & -n_2 \\ t_1 & t_2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -t_1 & -t_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_1 & -t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_2 & -t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

$$e_{\bar{p}_k}^{jT} = [0 \quad 0 \quad \bar{u} \quad 0 \quad T \quad C_2 \quad 0 \quad 0] \quad (4.3.14)$$

$$e_{\bar{z}_k}^j = \begin{bmatrix} \lambda n_1 + \mu t_1 \\ \lambda n_2 + \mu t_2 \\ n_1 u_1 + n_2 v_1 - n_1 u_2 - n_2 v_2 \\ t_1 \Delta u_1 + t_2 \Delta v_1 - t_1 \Delta u_2 - t_2 \Delta v_2 - s \\ -\mu \\ C_2^* \\ -\lambda n_1 - \mu t_1 \\ -\lambda n_2 - \mu t_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.15)$$

De werking van de iteratievrijheidsgraad ξ en de betekenis van C_2 en C_2^* worden later toegelicht.

Geen slip

De grootte s speelt nu geen rol meer; we willen echter wel dezelfde matrix grootte hebben als bij de status "slip".

$$e_{\underline{k}}^{Kj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n_1 & -n_2 \\ t_1 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t_1 & -t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_1 & -t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_2 & -t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.16)$$

$$e_{\underline{k}}^{PjT} = [0 \quad 0 \quad \bar{u} \quad 0 \quad 0 \quad c_1 \quad 0 \quad 0] \quad (4.3.17)$$

$$e_{\underline{k}}^{Qj} = \begin{bmatrix} \lambda n_1 + \mu t_1 \\ \lambda n_2 + \mu t_2 \\ n_1 u_1 + n_2 v_1 - n_1 u_2 - n_2 v_2 \\ t_1 \Delta u_1 + t_2 \Delta v_1 - t_1 \Delta u_2 - t_2 \Delta v_2 \\ s \\ c_1 \\ -\lambda n_1 - \mu t_1 \\ -\lambda n_2 - \mu t_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.18)$$

De vijfde regel van (4.3.18) is nodig om de slip de waarde nul te geven na een iteratieslag waarbij gerekend is met de (verkeerde) status "slip" ($s_{k-1}^j \neq 0$, $s_k^j = 0$).

Geen contact

Het gap-element heeft geen aandeel in de op te lossen vergelijkingen. We willen wel dezelfde matrixopbouw als bij een andere status (en de totale stijfheidsmatrix mag niet singulier zijn).

$$e_{\vec{k}}^{Kj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.19)$$

$$e_{\vec{k}}^{Pj} = 0 \quad (4.3.20)$$

$$e_{\vec{k}}^{QjT} = [0 \quad 0 \quad \lambda \quad \mu \quad s \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (4.3.21)$$

De werking van de iteratieparameter staat beschreven in §3.4.

Als we de waarde van C als elementeigenschap invoeren dan kunnen we bijv. kiezen :

$$C_1 = C \quad (\text{geen slip})$$

$$C_2 = 2C \quad (\text{slip})$$

Bij de status "slip" heeft de zesde component van $e_{\vec{k}}^{Pj}$ de waarde C_2 en van $e_{\vec{k}}^{Qj}$ de waarde C_2^* . Als de berekende wrijvingskracht voldoende goed voldoet aan het wrijvingsmodel kiezen we :

$$C_2^* = C_2 = 2C$$

Als dit niet het geval is kiezen we :

$$C_2^* = 3C$$

zodat een extra iteratieslag volgt.

Voor C moet een getal gekozen worden in orde van grootte van de optredende knooppuntskrachten.

De status "open" geldt als :

$$(\underline{u}_1 - \underline{u}_2)^T \cdot \underline{n} < \bar{u} \quad \text{of} \quad \lambda < 0 \quad (4.3.22)$$

De normaalkracht λ kan negatief worden tijdens het iteratieproces doordat het rekenprogramma met de (verkeerde) status "gesloten" werkt. In de daarop volgende iteratieslag zal de gap open gaan.

Het wrijvingsprobleem heeft echter geen eenduidige oplossing.

Dit is eenvoudig in te zien aan de hand van het volgende discrete probleem :

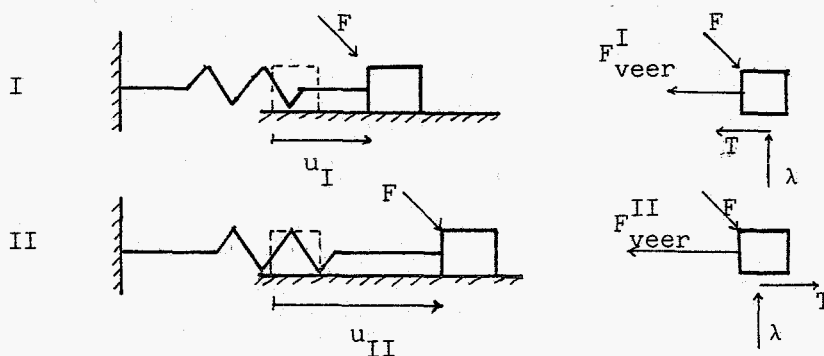


Fig. 4.3.3

Het gestippelde blokje geeft de referentieconfiguratie weer.

Er moet blijkbaar onderscheid gemaakt worden tussen het geval dat de wrijvingskracht tegen de verplaatsing inwerkt of niet. In werkelijkheid zal bij monotone belastingstoename situatie I optreden.

Met een iteratief oplossingsproces kan zowel situatie I als II bereikt worden, tenzij we van te voren een keuze maken tussen I of II.

We willen met de incrementele werkwijze de werkelijke belastingsgeschiedenis zo precies mogelijk benaderen.

Daarom willen we dat de wrijvingskracht het tegengestelde teken van de slip in een increment heeft. Dit heeft bovendien het voordeel dat de berekende wrijvingskracht dezelfde richting heeft als in het geval dat er geen slip optreedt in een bepaald increment (de wrijvingskracht is dan kleiner dan de maximale). Dit laatste bevordert de convergentiesnelheid van het oplossingsproces bij de overgang van "geen slip" naar "slip" (en andersom).

We definiëren :

$$T_0 = |T| \quad (4.3.23)$$

De waarde van T_0 volgt uit een wrijvingsmodel .

Een veel gebruikt model is dat van Coulomb :

$$T_0 = f \lambda \quad (4.3.24)$$

Hierbij is f de wrijvingscoëfficiënt.

De waarde van T volgt met bovenstaande keuze uit :

$$T = \frac{-s}{|s|} T_0 \quad (4.3.25)$$

Hiermee is de oplossing eenduidig.

De evenwichtstoestand zoals weergegeven is in fig. 4.3.3 situatie II kan wel bereikt worden, echter niet in één increment. De situatie kan optreden door eerst een belasting veel groter dan F op het blokje te zetten en daarna te ontlasten tot F (2 incrementen).

De status "geen slip" treedt op als :

$$|\mu| < T_0 \quad (4.3.26)$$

of als

$$\mu s < 0 \quad (4.3.27)$$

De laatste voorwaarde (4.3.27) betekent dat de wrijvingskracht berekend met de status "slip" het verkeerde teken heeft (N.B. $\mu=-T$).

Aan het begin van een increment geldt $s=0$; dit geldt ook als er gerekend is met de status "geen slip". Als $s=0$ heeft (4.3.25) geen betekenis meer. In dat geval kiezen we voor de richting de laatst berekende richting van de wrijvingskracht. Als ook die wrijvingskracht nul is gaan we direct naar de status "geen slip", zodat of de juiste status is bereikt of er een wrijvingskracht wordt berekend met alleen het juiste teken.

Aan het begin van het contact wordt dus altijd gestart met de status "geen slip". Dit is in de realiteit ook vaak het geval.

4.4 Enige praktische aspecten van het gap-element

We bekijken de volgende testproblemen :

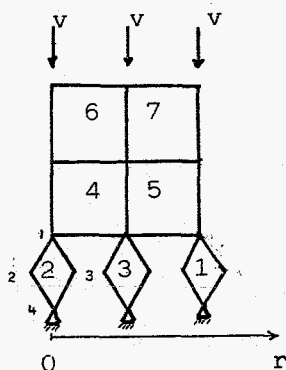


Fig. 4.4.1

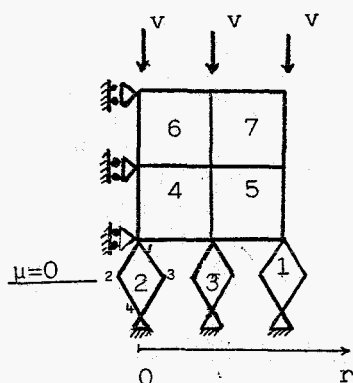


Fig. 4.4.2

Fig 4.4.1 stelt een rotatiesymmetrische ring voor met een oneindig klein gat die geplet wordt.

Fig. 4.4.2 geeft een massieve cilinder weer.

Omdat in fig. 4.4.2 zowel knooppunt 1 als 4 niet kan verplaatsen in de r-richting kan de wrijvingskracht μ in element 2 elke waarde aannemen, zodat de totale stijfheidsmatrix singulier zal zijn.

Dit is te voorkomen door de wrijvingskracht μ (vrijheidsgraad 2 van knoop 2) voor te schrijven.

Door $\mu=0$ te kiezen wordt een gap-element gecreëerd waar wrijving geen rol speelt. Overigens levert de exacte oplossing ook een schuifspanning gelijk aan nul ($\sigma_{rz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0$ als $r=0$).

Bij de nummering van de knooppunten moet men rekening houden met het feit dat de elementstijfheidsmatrix van een gap-element nullen op de hoofddiagonaal heeft.

In de totale stijfheidsmatrix mag de eerste diagonaalcomponent niet nul zijn, omdat bij de matrixdecomposities (bij de oplossingsprocedure) zoals Crout- en Cholesky-decompositie dit niet toelaatbaar is.

Daarom mag een wrijvings-normaalkracht-knooppunt nooit knooppunt nr. 1 zijn.

Bovendien mag het (lokale) eerste constructieknooppunt niet nr. 1 zijn als van deze knoop de vrijheidsgraden zijn voorgescheven; dus in fig. 4.4.1 mag knooppunt 4 niet nr. 1 worden. In dat geval wordt de diagonaalterm (0) van de wrijvings-normaalkracht-knoop de eerste diagonaalterm in de totale stijfheidsmatrix.

In het algemeen is het aan te bevelen de knooppunten van een gap-element te nummeren met relatief hoge knooppuntsnummers.

Praktische toepassingen komen in hoofdstuk 7 aan de orde.

5. Wrijvingsmodellen

5.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk is beschreven hoe bij een contactprobleem wrijving in rekening gebracht kan worden. Hierbij werd verondersteld dat de absolute waarde van de wrijvingsknooppuntskracht T_0 bekend is. De waarde van T_0 volgt uit een wrijvingsmodel. Een veel gebruikt model is het Coulomb-model.

5.2 Het wrijvingsmodel van Coulomb

In het model volgens Coulomb is de maximale wrijvingsspanning evenredig met de normaaldruk op het contactvlak :

$$\tau_0 = f \sigma_n \quad ; \quad \sigma_n \geq 0 \quad (5.2.1)$$

Hierbij is σ_n de normaaldruk en τ_0 de maximale (wrijvings-) schuifspanning en f de wrijvingscoëfficiënt. De wrijvingscoëfficiënt is afhankelijk van de materiaalcombinatie en oppervlaktegesteldheid. Dit model blijkt bij lage drukken resultaten te geven die goed overeen komen met de praktijk.

Dit model beschrijft een verhouding tussen twee spanningen. De knooppuntskrachten zullen op dezelfde wijze samenhangen :

$$T_0 = f \lambda \quad ; \quad \lambda \geq 0 \quad (5.2.2)$$

waarbij λ de contact-knooppuntskracht is.

5.3 Plastische wrijving, constante wrijvingsfactor

Wanneer we te maken hadden met zeer hoge drukken zouden de schuifspanningen volgens het Coulomb-model eveneens zeer grote waarden kunnen bereiken. Wanneer het materiaal voldoet aan het Von Mises-vloeivoorwaarde is de maximaal mogelijke schuifspanning echter :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{3}} \quad (5.3.1)$$

waarbij σ_v de vloeispanning is van het materiaal.

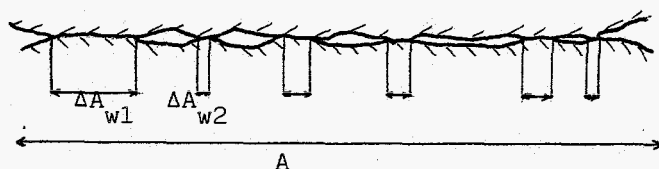
Daarom geeft het "plastische wrijvingsmodel" voor de maximale wrijvingsspanning :

$$\tau_0 = \frac{\sigma_v}{\sqrt{3}} \quad (5.3.2)$$

waarbij σ_v de vloeispanning t.p.v. het contactvlak is; dit kan dus ook de vloeispanning zijn in een tussenliggende oxidelaag of kunststof folie (als smeermiddel).

Een variant hierop is het model met de "constante wrijvingsfactor".

Als we op microniveau naar het contactoppervlak gaan kijken blijkt dat het werkelijk contactoppervlak A_w niet gelijk is aan het globale contactoppervlak A (zie fig. 5.3.1).



$$A_w = \sum_i \Delta A_{wi}$$

Fig. 5.3.1

We definiëren :

$$m = \frac{A_w}{A} \quad (5.3.2)$$

Het wrijvingsmodel met de "constante wrijvingsfactor" geeft voor de maximale wrijvingsspanning :

$$\tau_0 = m \frac{\sigma_v}{\sqrt{3}} \quad (5.3.3)$$

Theoretisch geldt : $0 \leq m \leq 1$. In de praktijk geldt: $0,1 \leq m \leq 0,3$. De factor m moet experimenteel bepaald worden.

Dit model sluit goed aan bij het model van Coulomb.

Als we aannemen dat het werkelijk contactvlak A_w evenredig is met de contactkracht (dit is een redelijke benadering bij lage drukken) dan is ook τ_0 evenredig met σ_n . M.a.w. bij lage drukken gaat dit model over in het Coulomb-model.

Bij hoge drukken, bijv. bij plastische vervorming, neemt men voor m een vaste (experimentele) waarde.

De oneffenheden die samen het werkelijk contactvlak vormen, worden niet beschreven door het elementenmethodemodel van de contactlichamen. Eventuele versteviging t.p.v. deze oneffenheden volgt dus niet uit dit model. Daarom nemen we voor de vloeispanning σ_v een constante waarde (ideaal plastisch contact oppervlak). Bovendien is het model niet goed genoeg om dit soort effecten mee te nemen.

Beide in deze paragraaf beschreven modellen geven een uitdrukking voor een (constante) maximale schuifspanning τ_0 . Uit deze schuifspanning moet de maximale wrijvingsknoopkracht berekend worden. Dit doen we met een erg eenvoudige integratie formule (zie fig. 5.3.2):

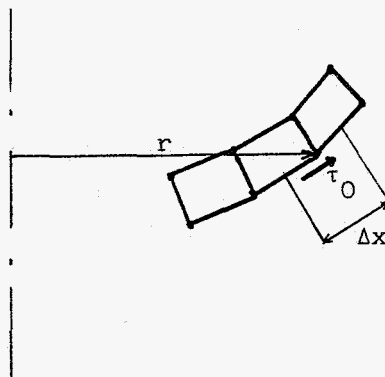


Fig. 5.3.2

$$T_0 = 2\pi r \Delta x \tau_0 \quad (5.3.5)$$

Voor de integratie hoeft alleen Δx als extra eigenschap aan het gap-element te worden toegevoegd.

Om betrouwbare resultaten te krijgen bij een contactprobleem moet een fijne elementen-mesh gebruikt worden zodat de integratieformule (5.3.5) nauwkeurig genoeg is.

5.4 Gecombineerd model

Het is mogelijk om het model van Coulomb te combineren met de modellen uit §5.3.

We hanteren de maximale wrijvingsspanning die geldt volgens Coulomb, tenzij deze schuifspanning groter is dan die volgens het model uit §5.3, dus :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= f \sigma_n && \text{als } f \sigma_n \leq m \frac{\sigma_v}{\sqrt{3}} \\ \tau_0 &= m \frac{\sigma_v}{\sqrt{3}} && \text{als } f \sigma_n > m \frac{\sigma_v}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Grafisch is τ_0 als functie van de contactdruk σ_n weergegeven in de onderstaande figuur :

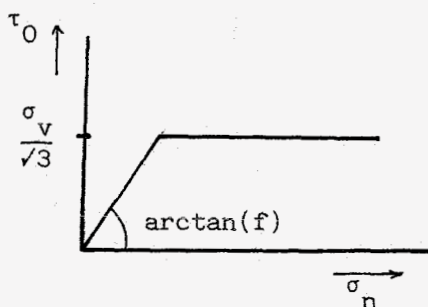


Fig. 5.4.1

Dit model zal waarschijnlijk in redelijke mate overeen komen met de werkelijkheid.

6 Plasticiteit

6.1 Inleiding

Wanneer er sprake is van contact tussen twee lichamen en het contactoppervlak is erg klein (bijv. een kogel in een groef) dan kan t.g.v. de hoge contactdrukken plastische vervorming optreden. Hierdoor wordt het contactfenomeen sterk beïnvloed.

In dit hoofdstuk wordt uitgewerkt hoe met behulp van de elementenmethode plastisch materiaalgedrag in rekening kan worden gebracht. We beperken ons tot de geometrisch lineaire situatie.

Een belangrijk aspect hierbij is de spanningsberekening, waarbij uit een toename van de rekken de toename van de spanningen bepaald wordt.

6.2 Spanningsberekening

Als er sprake is van plastisch materiaalgedrag is er geen eenduidig verband tussen spanning en rek. De spanningen hangen ook van de geschiedenis van het materiaal af, bijv. voordeformatie en belastingsverloop. Het is wel mogelijk een kleine verandering van de spanningen in de tijd eenduidig te berekenen uit kleine veranderingen van de rekken in de tijd, mits alle "geschiedenis parameters" bekend zijn.

In [III] wordt geponoerd :

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{D}} \quad (6.2.1)$$

Hierbij is $\underline{\underline{D}}$ de matrixrepresentatie van de deformatiesnelheidstensor *):

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} [(\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}})^T + (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}})^T] \quad (6.2.2)$$

met $\underline{\underline{v}}$ de snelheid van een materieel punt en $\underline{\underline{\nabla}}$ de gradiëntoperator in een gekozen assenstelsel.

*) Alle grootheden worden gegeven in matrixrepresentatie.

Voor notatie en bewerkingen : zie bijlage 2

In (6.2.1) is $\dot{\underline{\sigma}}$ de "Jaumann-afgeleide van de Cauchy-spanningsmatrix"; dit is de verandering van de spanningsmatrix per tijdseenheid, exclusief de verandering t.g.v. starre rotaties in de omgeving van een materieel punt in het assenstelsel. In formule vorm :

$$\dot{\underline{\sigma}} = \dot{\underline{\sigma}} - (\underline{\Omega} \cdot \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \cdot \underline{\Omega}^T) \quad (6.2.3)$$

waarbij

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2} [(\underline{\nabla} \cdot \underline{v}^T)^T - (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}^T)] \quad (6.2.4)$$

de rotatiesnelheidstensor representeert.

Nu rest nog de bepaling van de vier-dimensionale matrix $\underline{\underline{L}}$, waarin het constitutief gedrag is vastgelegd.

We kunnen enkele vereenvoudigingen invoeren. We beperken ons tot de geometrisch lineaire problemen zodat geldt :

$$\underline{\Omega} \equiv \underline{0} \quad (6.2.5a)$$

$$\dot{\underline{\sigma}} \equiv \dot{\underline{\sigma}} \quad (6.2.5b)$$

$$\underline{D} \equiv \underline{\underline{\epsilon}} \quad (6.2.5c)$$

waarbij $\underline{\underline{\epsilon}}$ de (klassieke) infinitesimale rekmatrix is.

Met deze vereenvoudiging gaat (6.2.1) over in :

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{L}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} \quad (6.2.6)$$

Bij lineair-elastisch materiaalgedrag geldt :

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} \quad (6.2.7)$$

met :

$$\underline{\underline{C}} = 2G [\underline{\underline{I}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \underline{\underline{II}}] \quad (6.2.8)$$

De rek bestaat uit een elastisch gedeelte en een plastisch gedeelte bij elasto-plastisch materiaalgedrag. We berekenen de elastische reksnelheid als volgt :

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^e = \underline{\underline{C}}^{-1} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (6.2.9)$$

We definiëren de plastische reksnelheidsmatrix $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p$:

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^e \quad (6.2.10)$$

De plastische rek is de rek na elastisch ontlasten.

Als er sprake is van plasticiteit moeten de spanningen voldoen aan een vloeicriterium. We kiezen hier voor het Von Mises-vloeicriterium :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \bar{\sigma} - \sigma_v = 0 \quad (6.2.11)$$

waarbij :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\sigma}}^d : \underline{\underline{\sigma}}^d} \quad (6.2.12)$$

de effectieve spanning genoemd wordt. De deviatorische spanningsmatrix $\underline{\underline{\sigma}}^d$ is gedefiniëerd als :

$$\underline{\underline{\sigma}}^d = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad (6.2.13)$$

De vloeigrens σ_v is afhankelijk van de geschiedenis van het materiaal. De achtergrond hiervan wordt bekend verondersteld. Verder gaan we uit van volumeinvariantie t.g.v. plastische vervorming en het postulaat van Drucker (gedissipeerd plastisch vermogen ≥ 0).

We definiëren nu als geschiedenisparameter, om de plastische deformatie vast te leggen, de zg. effectieve plastische rek $\bar{\epsilon}^p$. We doen dit zodanig dat het specifiek gedissipeerde vermogen P_s gegeven wordt door :

$$P_s = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (6.2.14)$$

In [III] wordt aangetoond dat hieraan voldaan is wanneer we $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ definiëren als :

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{\epsilon}}^p : \dot{\underline{\epsilon}}^p} \quad (6.2.15)$$

$$\text{en } \bar{\epsilon}^p = \int \dot{\bar{\epsilon}}^p dt \quad (6.2.16)$$

In het algemeen is de vloeispanning een functie van de effectieve plastische rek.

$$\sigma_v = \sigma_v(\bar{\epsilon}^p) \quad (6.2.17)$$

We definiëren :

$$H_0 = \frac{d\sigma_v}{d\bar{\epsilon}^p} \quad (6.2.18)$$

In het algemeen versterkt het materiaal ($H_0 > 0$); H_0 wordt daarom wel versterkingsparameter genoemd. (In de programmatuur hebben we ons beperkt tot lineair-versterkend gedrag, d.w.z. $H_0 = \text{constant}$.)

In [III] wordt bewezen dat met het bovengenoemde vloeicriterium is af te leiden dat :

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{Y}} \quad (6.2.19)$$

met :

$$\underline{\underline{Y}} = 3G \frac{\underline{\underline{\sigma}}^d \cdot \underline{\underline{\sigma}}^d}{\underline{\underline{\sigma}}^2 (1+H_0/(3G))} \quad (6.2.21)$$

en $\underline{\underline{C}}$ volgens (6.2.8). (G=glijdingsmodulus)

We gaan hier verder niet in op de afleiding hiervan.

We beschouwen steeds rotatiesymmetrische problemen. Om direkt aan te kunnen sluiten bij de theorie uit §4.2 van het vierknoopselement, noteren we alleen de relevante rek- en spanningsgrootheden in kolommen :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^T = [\epsilon_{zz}, \epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \gamma_{rz}] \quad (6.2.22)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^T = [\sigma_{zz}, \sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rz}] \quad (6.2.23)$$

Op dezelfde manier worden $\underline{\underline{\sigma}}^d$, $\underline{\underline{\epsilon}}^e$, $\underline{\underline{\epsilon}}^p$ gedefiniëerd.

Uitgedrukt in deze grootheden :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2} [(\sigma_{zz}^d)^2 + (\sigma_{rr}^d)^2 + (\sigma_{\theta\theta}^d)^2 + 2(\sigma_{rz}^d)^2]} \quad (6.2.24)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} [(\epsilon_{zz}^p)^2 + (\epsilon_{rr}^p)^2 + (\epsilon_{\theta\theta}^p)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{rz}^p)^2]} \quad (6.2.25)$$

Vergelijking (6.2.6) gaat over in :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \quad (6.2.26)$$

met :

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{Y}} \quad (6.2.27)$$

$$\underline{\underline{Y}} = \frac{3G \underline{\underline{\sigma}}^d \cdot (\underline{\underline{\sigma}}^d)^T}{\underline{\underline{\sigma}}^2 (1+H_0/(3G))} \quad (6.2.28)$$

$$\underline{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (6.2.29)$$

Met vergelijking (6.2.26) kunnen we door numeriek integreren de toename van de spanninge bepalen bij gegeven rekveranderingen in de tijd. Numeriek integreren is nodig omdat $\underline{L} = \underline{L}(\underline{\sigma})$. Bij het oplossen van een elasto-plastisch probleem met de elementenmethode gebruiken we een incrementele werkwijze. Na een berekening (iteratieslag) is een rektoename $\Delta \underline{\epsilon}$ bekend, waaruit de spannings-toename $\Delta \underline{\sigma}$ berekend moet worden. Voor het integreren van (6.2.26) moeten we een veronderstelling doen over het verloop van de rek in de tijd; m.a.w. welke weg is er doorlopen in de rekrumte. We kiezen hier voor een rechte rekweg, d.w.z. :

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \text{constant} \quad (6.2.30)$$

in een increment.

Met deze veronderstelling ligt het verband tussen $\Delta \underline{\sigma}$ en $\Delta \underline{\epsilon}$ eenduidig vast. We kunnen het spanningsincrement $\Delta \underline{\sigma}$ nauwkeurig benaderen door het rekincrement op te delen in een aantal, N, (gelijke) subincrementen $\Delta \underline{\epsilon}/N$ en stap voor stap de spanningstoename $\Delta \underline{\sigma}$ op te bouwen :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\sigma}^1 &= \frac{1}{N} \underline{L}^1 \cdot \Delta \underline{\epsilon} \\ \Delta \underline{\sigma}^2 &= \frac{1}{N} [\underline{L}^1 + \underline{L}^2] \cdot \Delta \underline{\epsilon} \\ &\cdot \\ \Delta \underline{\sigma}^N &= \frac{1}{N} [\underline{L}^1 + \underline{L}^2 + \dots + \underline{L}^N] \cdot \Delta \underline{\epsilon} \end{aligned} \quad (6.2.31)$$

Hierbij is \underline{L}^i gebaseerd op $\underline{\sigma}_{i-1} = \Delta \underline{\sigma}^{i-1} + \underline{\sigma}_{i-2}$ voor $i=2,3,\dots,N$ en \underline{L}^1 is

gebaseerd op $\underline{\sigma}_0$, de spanning aan het begin van het increment.

Dit is de zg. subincrement-methode. Deze methode wordt gebruikt als het materiaal zich elasto-plastisch gedraagt.

De nauwkeurigheid van deze spanningsberekening met N subincrementen is te bepalen door de effectieve spanning $\bar{\sigma}_N$ te vergelijken met de vloeispanning σ_v die volgt uit de bijbehorende $\bar{\epsilon}^p$:

$$\underline{\epsilon}^e = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{\sigma}_N$$

$$\underline{\epsilon}^p = \underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^e$$

$$\sigma_v = \sigma_v(\bar{\epsilon}^p)$$

$$\text{relatieve fout} : \frac{\bar{\sigma}_N - \sigma_v}{\sigma_v}$$

Als de relatieve fout te groot is moeten meer subincrementen worden gebruikt.

Als het materiaal zich elastisch gedraagt wordt het spannings-increment eenvoudig berekend m.b.v. vergelijking (6.2.7).

De overgang van elastisch naar elasto-plastisch materiaalgedrag verdient enige extra aandacht. We veronderstellen weer een rechte rekweg over het increment. Hierdoor kunnen we het rekincrement $\Delta \underline{\epsilon}$ eenvoudig splitsen in een elastisch deel en een elasto-plastisch deel. De berekening verloopt als volgt :

Veronderstel het materiaal is elastisch en de spanning aan het begin van het increment wordt gerepresenteerd door $\underline{\sigma}_0$, de vloeispanning is σ_v ($\bar{\sigma}_0 < \sigma_v$). De spanningstoename $\Delta \underline{\sigma}$ moet worden berekend uit een gegeven rekstap $\Delta \underline{\epsilon}$. We gaan uit van elastisch materiaalgedrag, dus :

$$\Delta \underline{\sigma}_I = \underline{C} \cdot \Delta \underline{\epsilon} \quad (6.2.32)$$

$$\underline{\sigma}_I = \underline{\sigma}_0 + \Delta \underline{\sigma}_I \quad (6.2.33)$$

Als echter blijkt dat de berekende effectieve spanning $\bar{\sigma}_I$ groter is dan σ_v , gaat het materiaal vloeien. Het is eenvoudig te bepalen welke fractie ξ van het rekincrement nog net geen plastische vervorming teweeg brengt door (6.2.34) op te lossen (zie (6.2.11)):

$$f(\sigma_0 + \xi \Delta \sigma_I) = 0 \quad (6.2.34)$$

We schalen nu de spanningen terug naar het vloeiooppervlak (d.i. het oppervlak in de spanningsruimte, dat aan het Von Mises vloeicriterium voldoet : $f(g)=0$):

$$\sigma_{II} = \sigma_0 + \xi \Delta \sigma_I \quad (6.2.35)$$

Hierbij is maar een fractie ξ van het rekincrement in rekening gebracht. De spanningstoename t.g.v. het resterende deel van het rekincrement, $(1-\xi)\Delta \sigma$, wordt berekend met de subincrement-methode, met als begin waarde voor de spanningen σ_{II} . Dit is het elasto-plastische deel.

Hiermee ligt de spanningsberekening eenduidig vast.

Het berekenen van de knooppuntskrachten in evenwicht met de spanningen gaat op precies dezelfde manier als in §4.2 :

$$\underline{e}_Q = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} dV \quad (6.2.36)$$

6.3 Bepaling van de elementstijfheidsmatrix

In paragraaf 4.2 is voor de elementstijfheidsmatrix afgeleid :

$$\underline{e}_K = \int_{V_e} \underline{B}^T \cdot \underline{L} \cdot \underline{B} \, dV \quad (6.3.1)$$

Hierbij is van lineair-elastisch materiaalgedrag uitgegaan. Voor de geometrisch-lineaire situatie, met elasto-plastisch materiaalgedrag, geldt dezelfde uitdrukking voor de stijfheidsmatrix; echter moet de matrix \underline{L} aangepast worden aan het plastische materiaalgedrag.

Wanneer men zondermeer "full Newton-Raphson" toepast, moet in (6.3.1) voor \underline{L} de uitdrukking (6.2.27) worden gesubstitueerd, gebaseerd op de spanningen die volgen uit de vorige iteratieslag. Het probleem hierbij is dat de toestand die volgt na de betreffende iteratieslag niet in overeenstemming hoeft te zijn met de veronderstelde rechte rekweg. De rechte rekweg moet nl. gelden voor het hele increment en niet van iteratieslag tot iteratieslag. In het algemeen zal daardoor het proces niet of zeer slecht convergeren. We gaan nu een \underline{L} construeren die gebaseerd is op een rechte rekweg van het begin van het increment tot het eind van de betreffende iteratieslag. We doen dit op een numerieke wijze (uit [IV]):

Aan het begin van het increment gaan we uit van lineair-elastisch materiaalgedrag. Als dit niet de gewenste oplossing geeft gaan we als volgt te werk :

Veronderstel dat na de vorige iteratieslag een rekincrement $\Delta \underline{\epsilon}$ en de daarbij behorende spanningstoename $\Delta \underline{\sigma}$ is bereikt, waarbij is uit gegaan van een rechte rekweg. We tellen nu bij $\Delta \underline{\epsilon}$ een relatief kleine rekstap $\Delta \Delta \underline{\epsilon}$ op :

$$\Delta \underline{\epsilon}^* = \Delta \underline{\epsilon} + \Delta \Delta \underline{\epsilon} \quad (6.3.2)$$

We berekenen met de subincrement-methode, met in acht name van de rechte rekweg, de bijbehorende spanningstoename $\Delta\sigma^*$. De spannings-toename alleen t.g.v. $\Delta\Delta\varepsilon$ is :

$$\Delta\Delta\sigma \approx \Delta\sigma^* - \Delta\sigma \quad (6.3.3)$$

Als we voor $\Delta\Delta\varepsilon$ achtereenvolgens kiezen :

$$\begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix}$$

met $0 < e \ll |\Delta\varepsilon|$, dan is het erg eenvoudig een matrix te construeren zodanig dat :

$$\Delta\Delta\sigma \approx \underline{L}^* \cdot \Delta\Delta\varepsilon \quad (6.3.4)$$

Voor de gewenste matrix \underline{L} voor de elementstijfheidsmatrix (die symmetrisch dient te zijn) kiezen we tenslotte :

$$\underline{L} = \frac{1}{2} (\underline{L}^* + \underline{L}^{*T}) \quad (6.3.5)$$

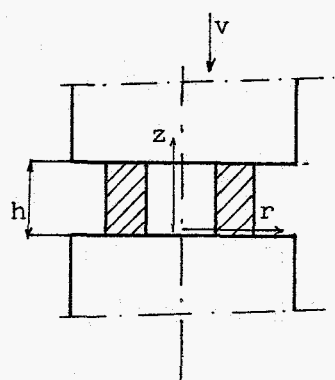
Deze methode wordt wel "de gemodificeerde tangentmodulus-methode" genoemd. Het iteratie proces blijkt in de praktijk, voor de hier beschouwde problemen zeer snel te convergeren. In sommige gevallen is met de keuze van e de convergentiesnelheid te beïnvloeden.

7 Toepassingen

7.1 De ringcompressietest

7.1.1 Inleiding

De rincompressietest is een in de praktijk regelmatig toegepaste materiaalttest, die iets zegt over matariaaleigenschappen van de ring en wrijvingseigenschappen van de materiaalcombinatie van gereedschap en ring (zie onderstaande figuur).



hoogtereductie :

$$\delta = \frac{h_0 - h}{h_0}$$

h_0 : hoogte in oorspronkelijke
toestand

Fig. 7.1.1.1

De wrijving tussen gereedschap en ring zal de vervorming van de ring sterk beïnvloeden. Wanneer er geen sprake is van wrijving zal bijv. de buitenrand van de ring recht blijven. Wanneer de wrijving zodanig groot is dat geen onderlinge verschuiving optreedt zal de buitenrand sterk vervormen.

Het is niet moeilijk te voorspellen dat de werkelijkheid tussen deze twee gevallen in ligt.

In §7.1.2 en §7.1.3 worden enkele wrijvingsfenomenen gedemonstreerd aan de hand van deze ringcompressietest.

We beperken ons tot vervormingen die zo klein zijn dat we ongestraft de geometrisch-lineaire theorie mogen toepassen

Het gereedschap wordt star verondersteld.

We laten eerst enige aspecten zien aan de hand van het Coulomb-model en lineair-elastisch materiaalgedrag. Daarna beschouwen we ook het gecombineerde model (zie hoofdstuk 5) en elasto-plastisch materiaalgedrag.

7.1.2 Het Coulomb-model en lineair-elastisch materiaalgedrag

We bekijken eerst een iets eenvoudiger probleem dan de ring : een massieve cilinder.

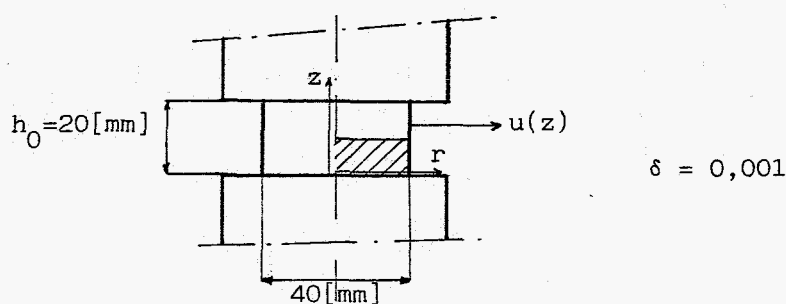


Fig. 7.1.2.1

We reduceren de hoogte met 0,1% ($\delta=0,001$).

Wegens symmetrie kunnen we bij het elementenmethodemodel volstaan met een analyse van het gearceerde gedeelte (fig. 7.1.2.1).

We verdelen dit gebied in (10x10=) 100 congruente 4-knoops elementen.

Het contactvlak beschrijven we met 11 gap-elementen.

Enkele karakteristieke grootheden zijn :

$u(z)$: de verplaatsing van de buitenrand

$s(r)$: de slip in het contactvlak

$-\sigma_{zz}(r)$: de contactdruk ($z=0$)

$\tau(r)$: de wrijvingschuifspanning in het contactvlak

We zullen de berekeningsresultaten van deze grootheden grafisch weergeven door lineaire interpolatie tussen de knooppuntsgrootheden.

Bij de berekeningen is gebruik gemaakt van :

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ [N/mm}^2\text{]} \text{ (elasticiteitsmodulus)}$$

$$\nu = 0,3 \text{ [-]} \text{ (dwarscontractiecoëfficiënt)}$$

Plastisch materiaalgedrag is buiten beschouwing gelaten.

Er is gebruik gemaakt van het Coulomb-wrijvingsmodel.

In de resultaten is de wrijvingscoëfficiënt f als parameter gehanteerd. Steeds wordt in één figuur een karakteristieke grootte uitgezet met $f=0$, $f=0,1$, $f=0,2$ en $f=\infty$.

De resultaten voor $f=0$ zijn eenvoudig analytisch te verifiëren.

In fig. 7.1.2.2 is de verplaatsing van de buitenrand uitgezet als functie van z met f als parameter.

Naarmate de wrijvingscoëfficiënt groter is zal de buitenrand minder naar buiten verplaatsen. De helling $\frac{du}{dz}$ moet 0 zijn bij $z=\frac{1}{2}h=10$ [mm], wegens symmetrie; hieraan is steeds voldaan.

N.B. de resultaten voor $f=\infty$ komen overeen met de resultaten voor elke f die zo groot is dat er nergens slip optreedt in het contactvlak.

In fig. 7.1.2.3 is de slip in het contactvlak uitgezet als functie van r met f als parameter. Bij $f=\infty$ treedt nergens slip op. Bij $f=0,2$ en de hier gekozen geometrie, slijpt een deel naar buiten en er is in een zeker middengebied geen sprake van slip; dit is de zg. "stick-zône". De wrijvingscoëfficiënt $f=0,1$ brengt net geen zichtbare stick-zône teweeg.

De normaaldruk varieert weinig als functie van r en bij verschillende f (zie fig. 7.1.2.4), behalve aan de rand. Aan de rand is sprake van een spanningspiek die te vergelijken is met de spanningsconcentratie die optreedt bij een sprong in de diameter van een trekstang. Bij $f=\infty$ gaat deze analogie het best op, bij $f=0$ treedt de spanningspiek niet op.

De wrijvingsschuifspanning τ blijkt echter sterk afhankelijk te zijn van f (zie fig. 7.1.2.5). Voor $f=0$ geldt $\tau=0$. Als $f=0,1$ blijkt overal slip op te treden (behalve voor $r=0$). De schuifspanning is vrijwel constant (behalve aan de rand en bij $r=0$).

Als er sprake is van een overgang van "stick" naar "slip" dan is deze overgang ook waar te nemen in het schuifspanningsverloop (zie $f=0,2$). De kromme voor $f=0,2$ lijkt in de stick-zône op de kromme voor $f=\infty$ en vertoont in de slip-zône een (ongeveer) constante schuifspanning. De piek aan de rand is een direkt gevolg van het Coulomb-model. Door de "spanningsconcentratie" van de normaalspanning moet bij slip de schuifspanning aan de rand ook een piekwaarde krijgen. Voor $r=0$ geldt in het contactvlak voor de afschuifhoek :

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

dus ook :

$$\sigma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{rz} = 0$$

Dus de exacte oplossing geeft in alle gevallen : $\tau(r=0) = 0$.

Voor de wrijvingscoëfficiënt $f=0,1$ zou een fijnere elementenmesh gebruikt moeten worden om te onderzoeken hoe snel de schuifspanning naar nul gaat bij $r=0$ (er zal zeer waarschijnlijk een kleine stick-zône optreden); dit is hier niet uitgevoerd.

Als we kijken naar het lokale evenwicht van de overgang contactvlak naar buitenrand dan moet exact gelden $\tau=0$ ($r=20$ [mm]).

Dit betekend dat in een zeer klein gebied aan de rand de schuifspanning naar nul moet gaan. Het is in principe mogelijk dat in dit kleine gebied σ_{zz} naar nul gaat.

We beschouwen hier alleen het voor de praktijk belangrijkere globale wrijvingsverloop en onderzoeken deze randeffecten niet nader.

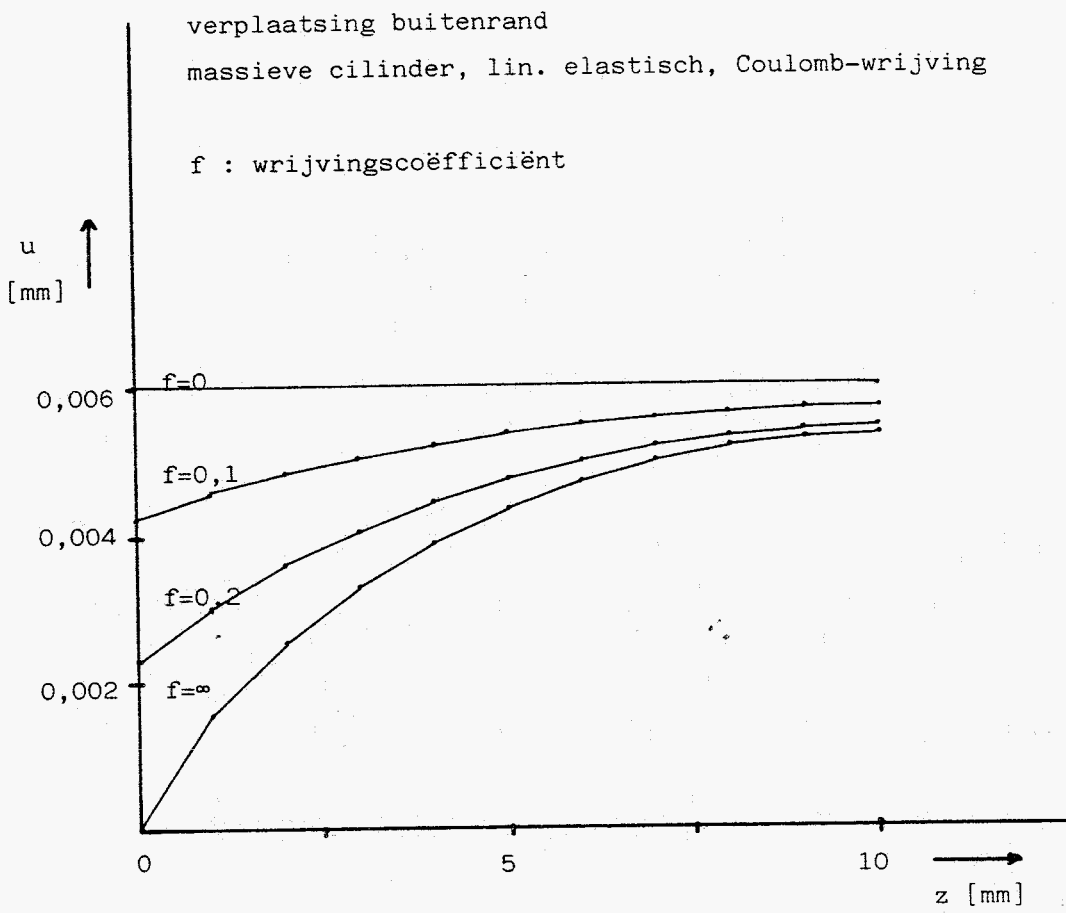


Fig. 7.1.2.2

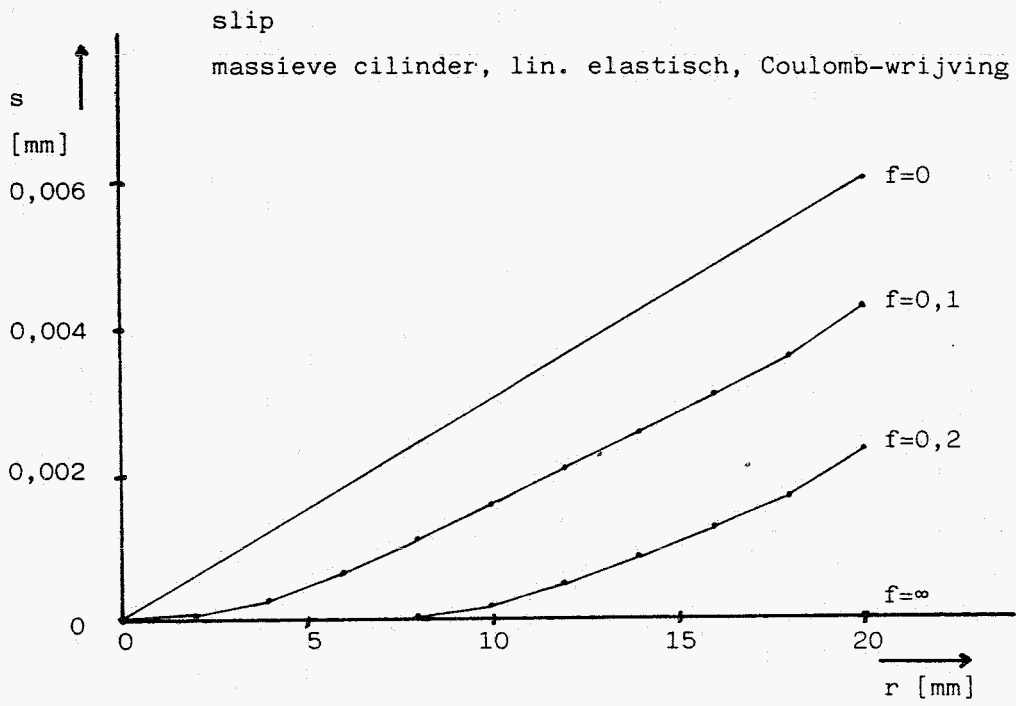


Fig. 7.1.2.3

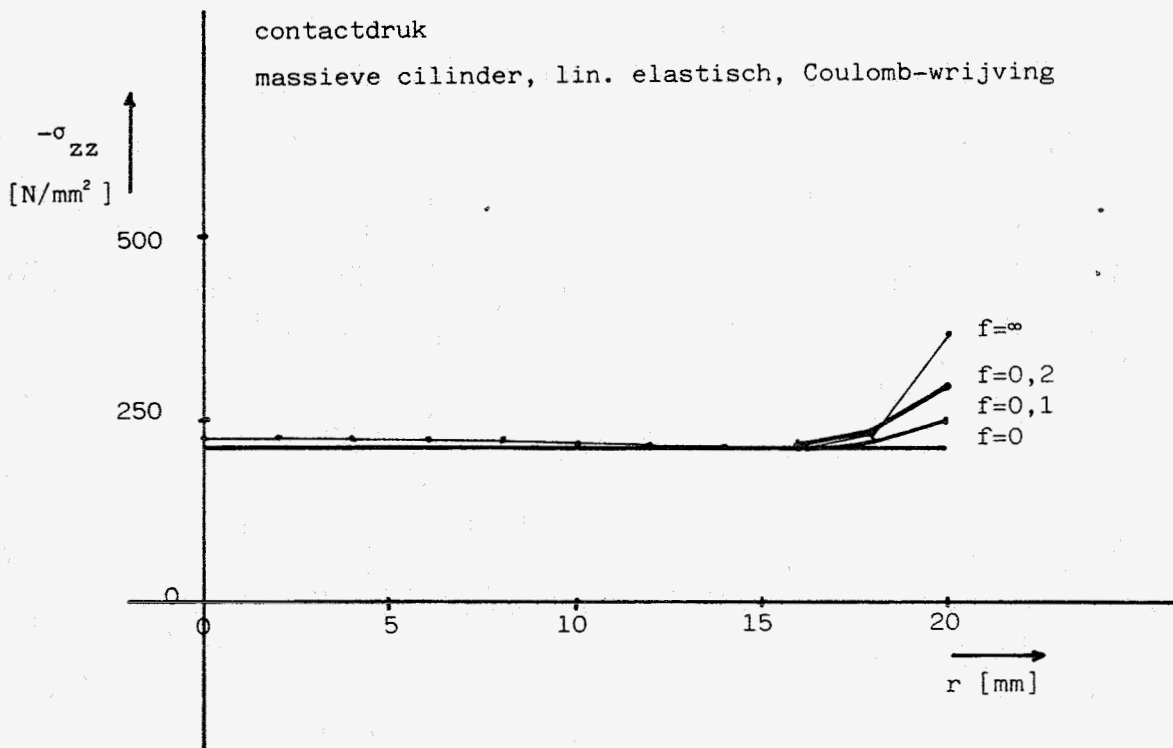


Fig. 7.1.2.4

wrijvingsschuifspanning

massieve cilinder, lin. elastisch, Coulomb-wrijving

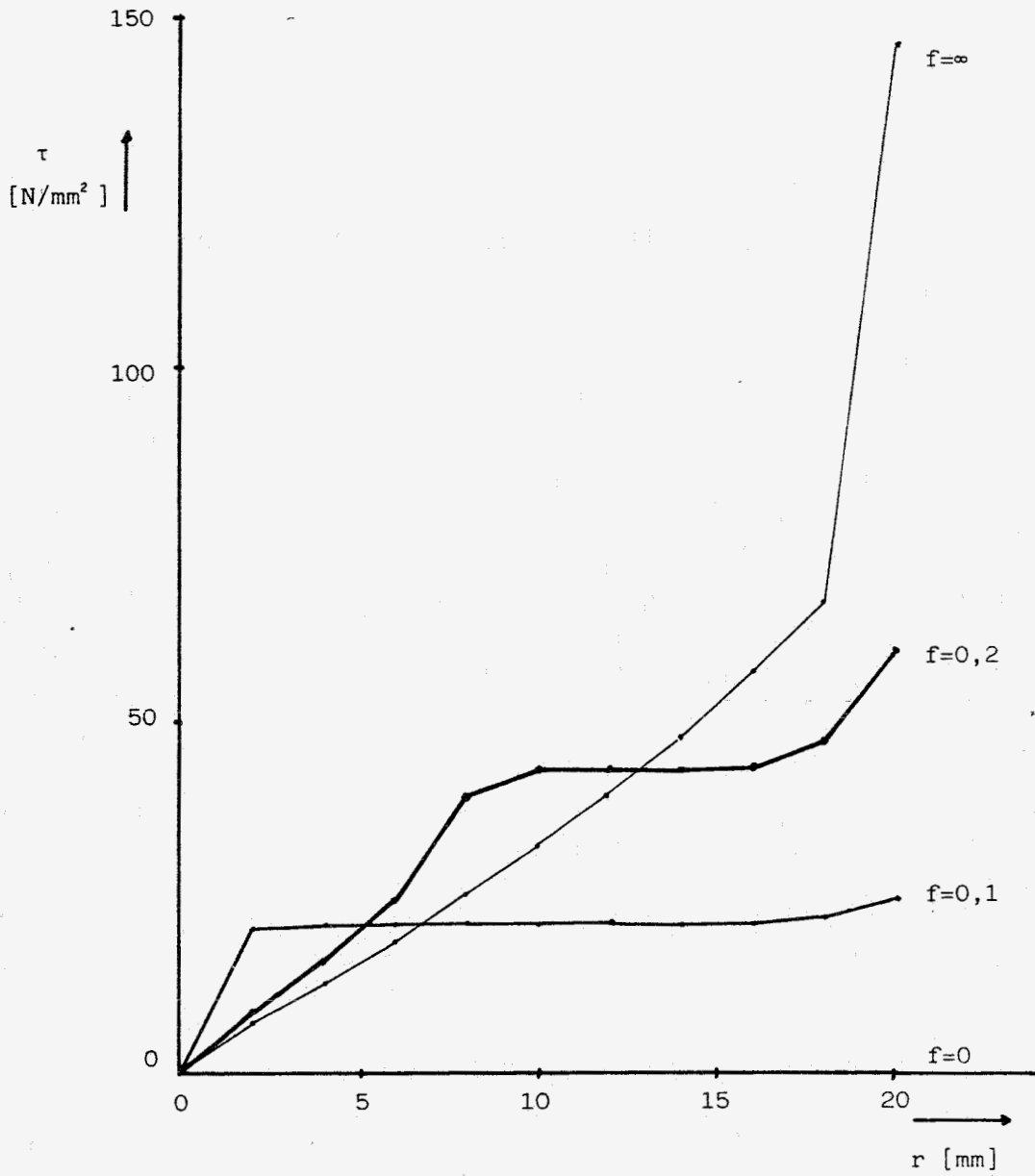


Fig. 7.1.2.5

We bespreken nu op analoge wijze de ringcompressie.

We verdelen het in fig. 7.1.2.6 dubbel gearceerde gedeelte in $(10 \times 10 =)$ 100 congruente 4-knoops elementen en beschrijven het contactvlak met 11 gap-elementen.

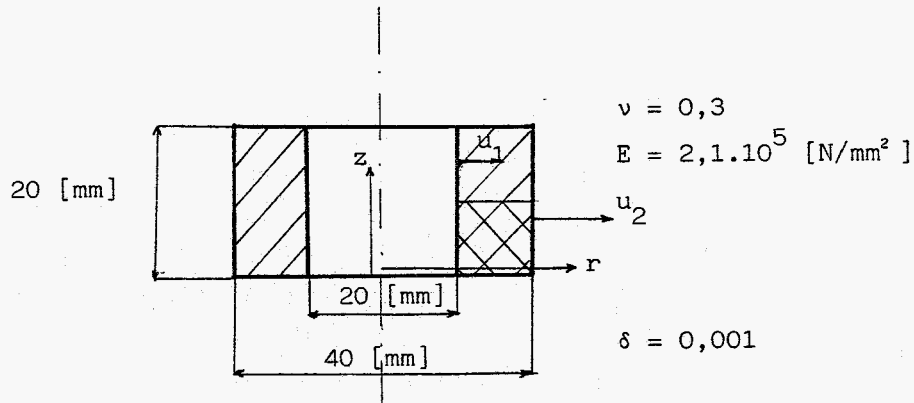


Fig. 7.1.2.6

We beschouwen de volgende grootheden :

- $u_1(z)$: de verplaatsing van de binnenrand
- $u_2(z)$: de verplaatsing van de buitenrand
- $s(r)$: de slip in het contactvlak
- $-\sigma_{zz}(r)$: de contactdruk ($z=0$)
- $\tau(r)$: de wrijvingschuifspanning in het contactvlak

De verplaatsing aan de buitenrand gedraagt zich analoog aan de verplaatsing van de buitenrand van de massieve cilinder (zie fig. 7.1.2.8).

Er treedt een nieuw fenomeen op wat betreft de slip. Bij bepaalde waarden van de wrijvingscoëfficiënt (bijv. $f=0,2$) kan het volgende slippatroon optreden (fig. 7.1.2.7) :

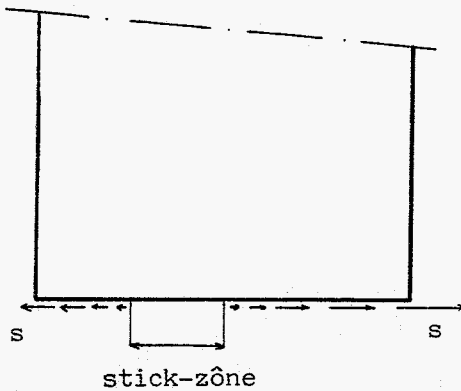


Fig. 7.1.2.7

Bij $f=0,2$ en de hier gekozen geometrie blijkt er een stick-zône op te treden waarbij links van deze zône de slip een andere richting heeft dan rechts van deze zône. Alle andere bekeken wrijvingscoëfficiënten ($f=0$ $f=0,1$ $f=\infty$) gaven dit beeld niet (fig. 7.1.2.9).

Het is vanzelfsprekend dat de verplaatsing van de binnenrand sterk beïnvloed wordt door dit fenomeen (zie fig. 7.1.2.10).

De normaaldruk vertoont nu twee randeffecten (fig. 7.1.2.11).

De wrijvingsschuifspanning kan nu zowel in positieve als in negatieve r -richting werken (zie fig. 7.1.2.12).

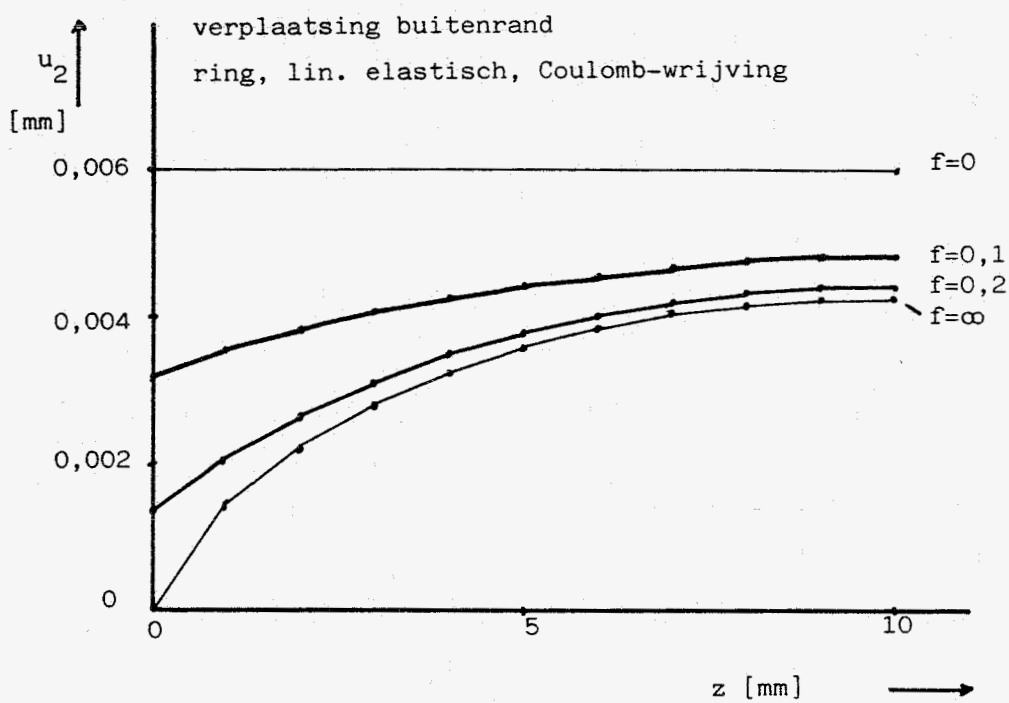


Fig. 7.1.2.8

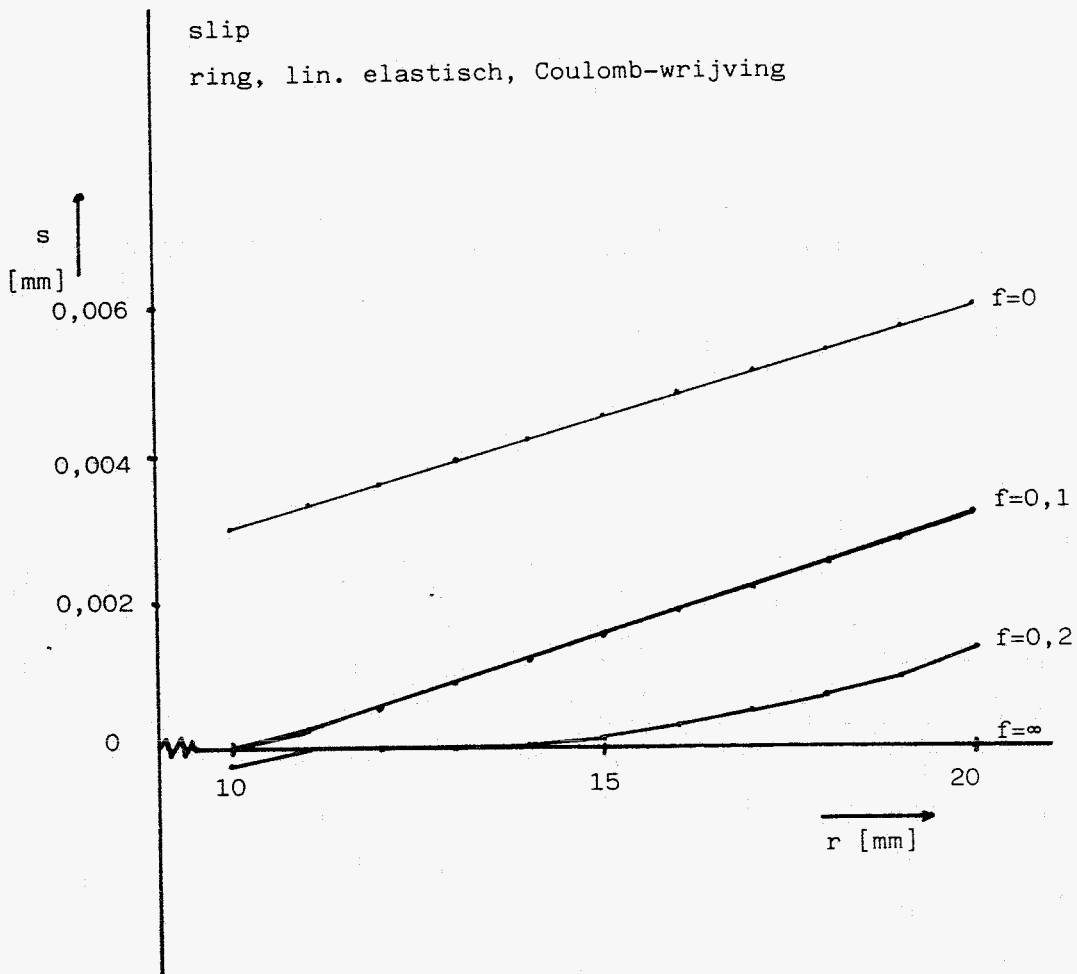


Fig. 7.1.2.9

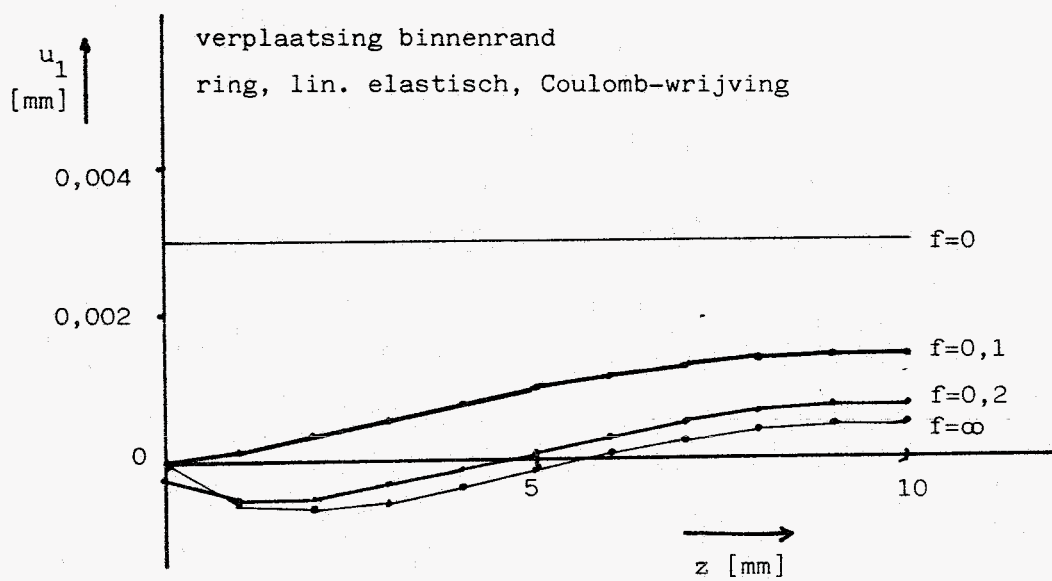


Fig. 7.1.2.10

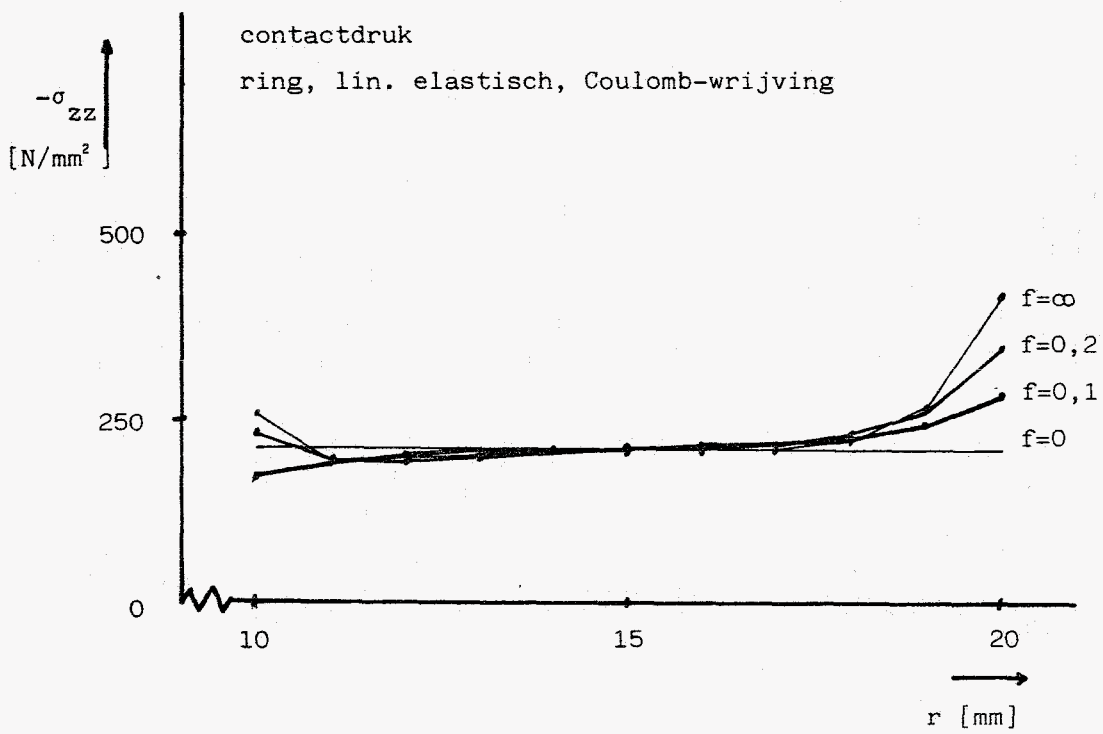


Fig. 7.1.2.11

wrijvingsschuifspanning
ring, lin. elastisch, Coulomb-wrijving

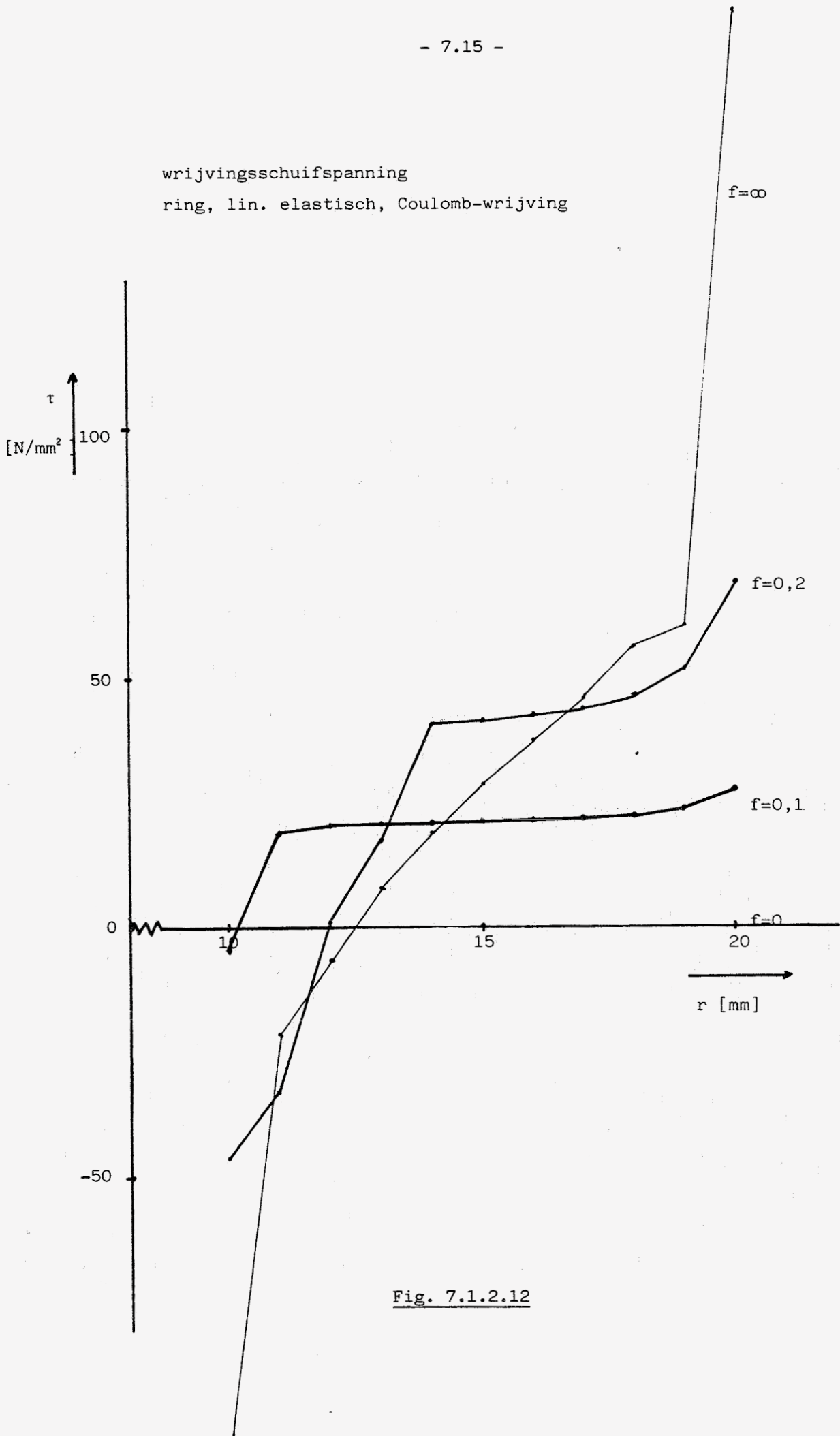


Fig. 7.1.2.12

7.1.3 Elasto-plastisch materiaalgedrag en vergelijking van wrijvingsmodellen

In deze paragraaf presenteren we de resultaten van de ring-compressietest met dezelfde geometrie als in fig. 7.1.2.6 maar nu met elasto-plastisch lineair-verstevigend materiaalgedrag zoals beschreven in hoofdstuk 6 ($\sigma_v = \sigma_{v0} + H_0 \bar{\epsilon}^p$).

Voor het materiaal hanteren we de volgende numerieke waarden :

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ [N/mm}^2 \text{]}$$

$$\nu = 0,3 \text{ [-]}$$

$$H_0 = 10^4 \text{ [N/mm}^2 \text{]}$$

$$\sigma_{v0} = 220 \text{ [N/mm}^2 \text{]}$$

We vergelijken twee wrijvingsmodellen :

Coulomb : $f=0,2$

Gecombineerd model : $f=0,2$, $m=0,2$, $\sigma_v=220 \text{ [N/mm}^2 \text{]}$

Bij alle berekeningen met het laatste model speelde uiteindelijk alleen het "constante wrijvingsfactor"-deel van het model een rol (zie hoofdstuk 5), aan het begin van de deformatie bij nog kleine vervormingen ($\delta=0,0001$) speelde soms ook het Coulomb-deel een rol. Steeds worden twee vervormingen vergeleken: $\delta= 0,001$ en $\delta = 0,01$, beide aangebracht in 10 gelijke incrementen.

De contactdruk is voor beide wrijvingsmodellen bijna gelijk; het rand-effect is bij het Coulomb-model iets groter (zie fig. 7.1.3.1).

Door versteviging van het materiaal ligt de contactdruk bij $\delta=0,01$ hoger dan bij $\delta= 0,001$.

De wrijvingssschuifspanning vertoont echter grote verschillen voor de beide wrijvingsmodellen. De schuifspanning bij het constante wrijvingsfactor model vertoont geen piek aan de rand (fig. 7.1.3.2).

Bij $\delta=0,01$ is de schuifspanning zelfs over het hele contactvlak gelijk.

Het constante wrijvingsfactor model ($m=0,2$) levert bij $\delta=0,001$ een wisseling van sliprichting bij $\delta=0,01$ echter niet meer (fig. 7.1.3.3 en fig. 7.1.3.4).

Het Coulomb-model ($f=0,2$) levert een relatief grote stick-zône op bij $\delta=0,001$; deze verkleint bij verdere vervorming. Toch blijft bij het Coulomb-model bij $\delta=0,01$ de onderkant van de binnenrand naar binnen slippen.

Het blijkt dat de keuze van het wrijvingsmodel de resultaten sterk beïnvloedt.

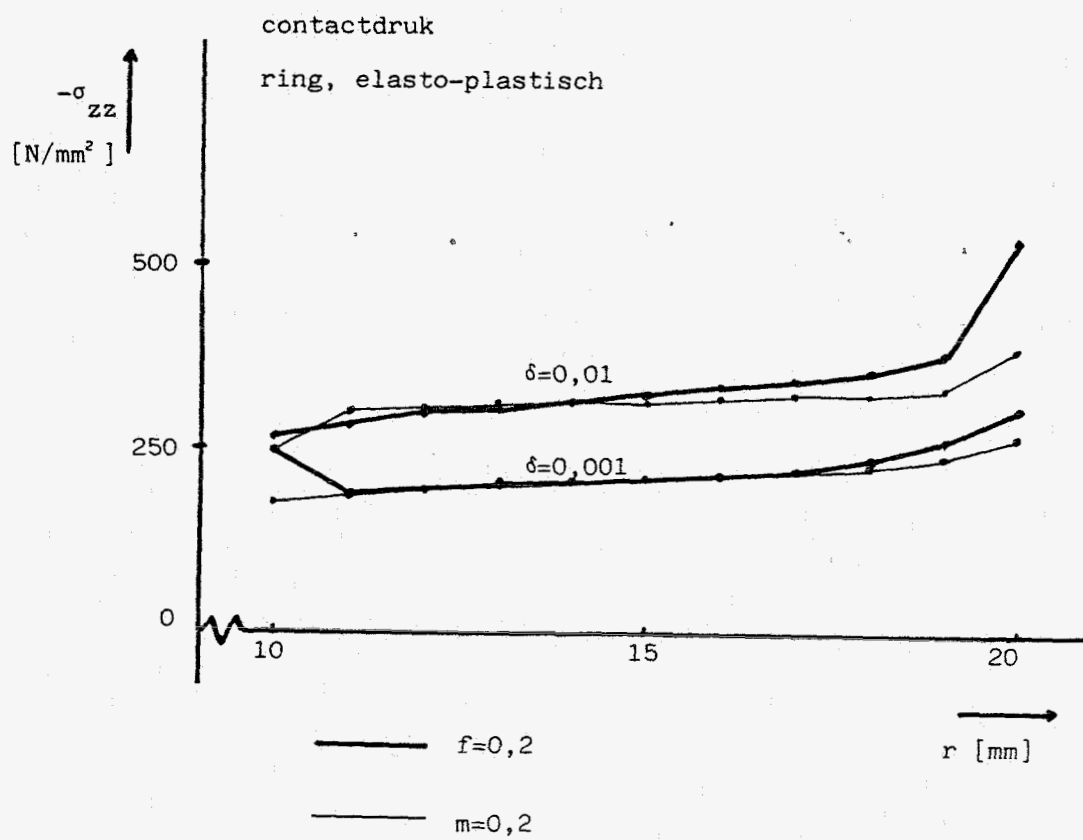
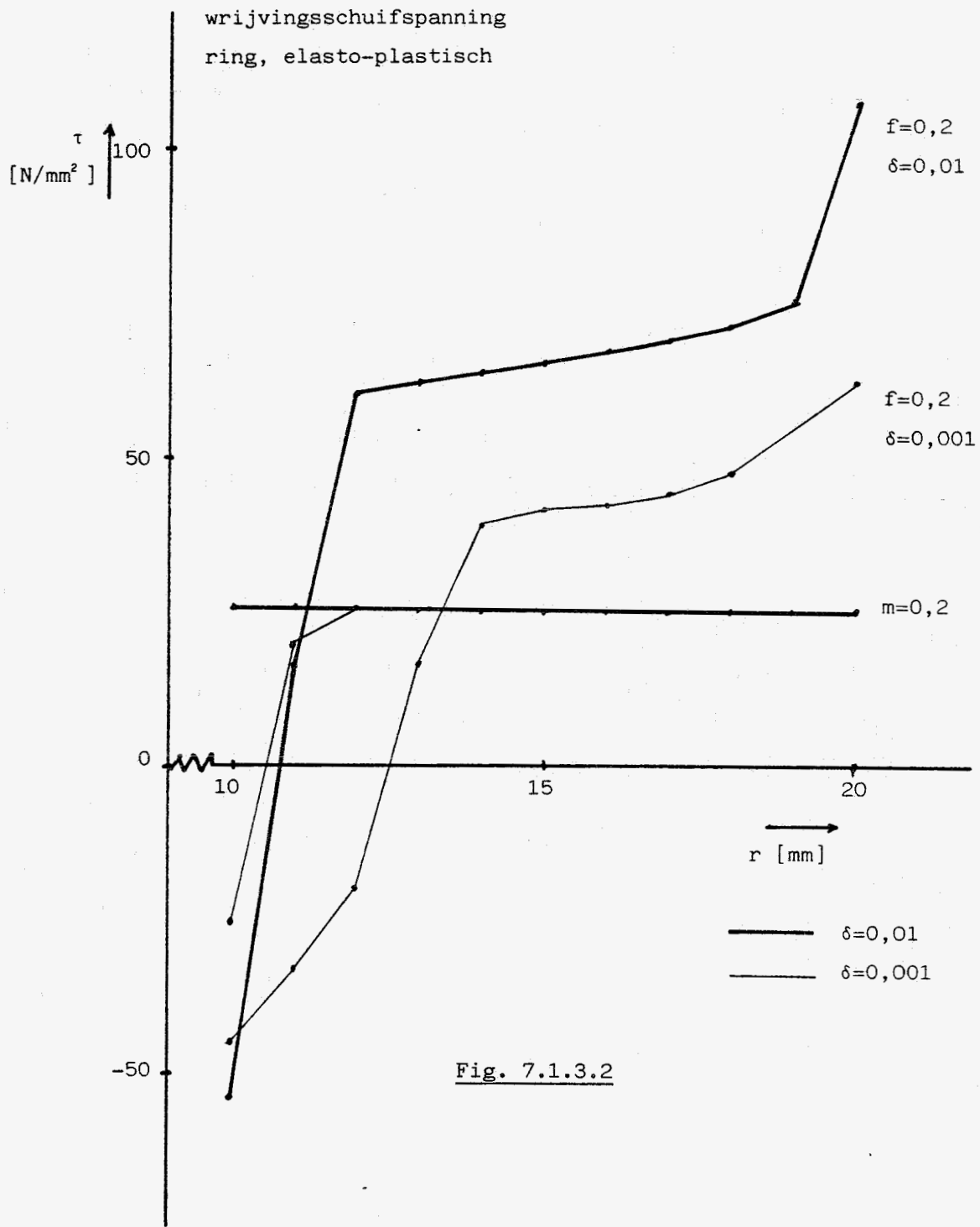


Fig. 7.1.3.1



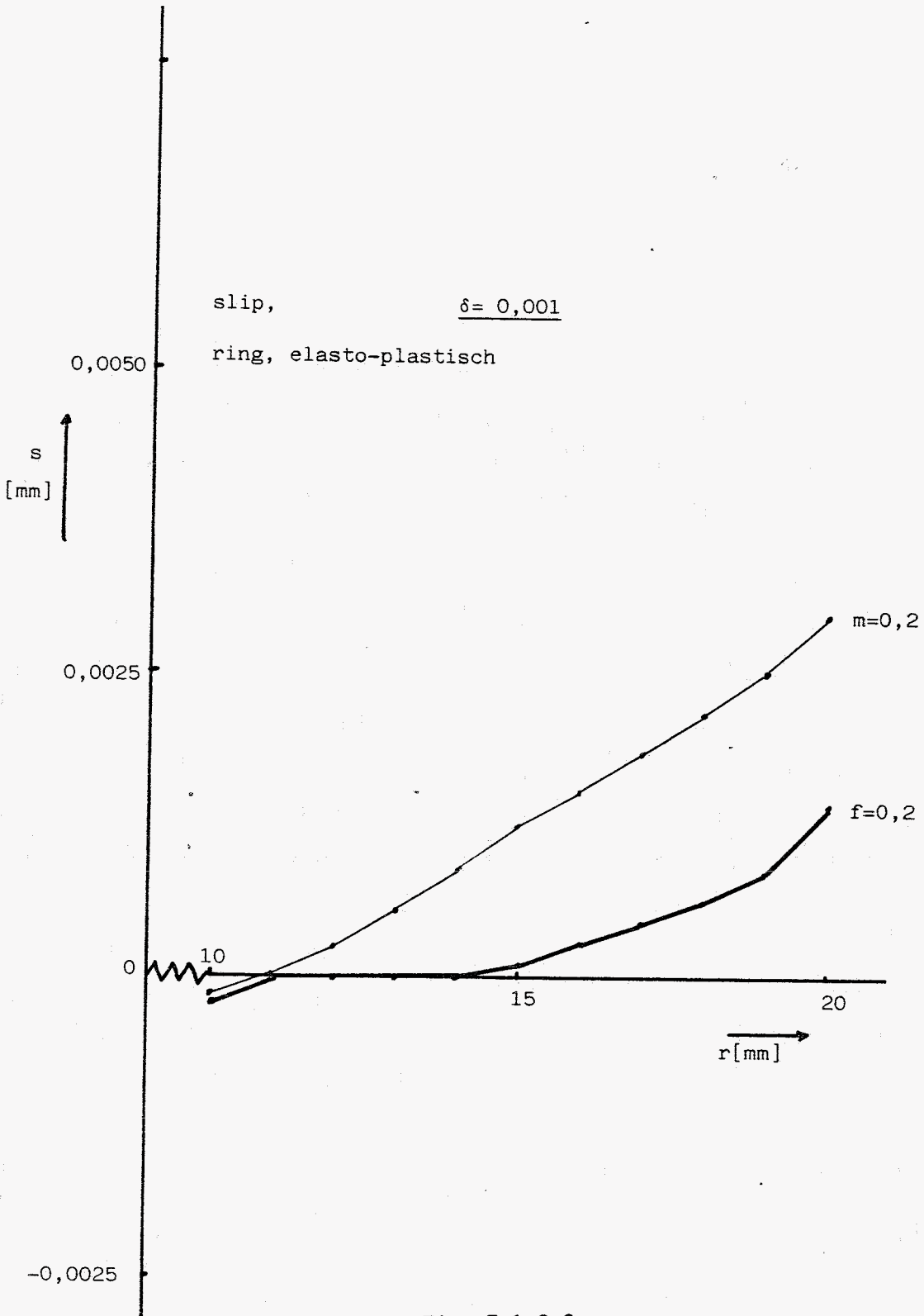


Fig. 7.1.3.3

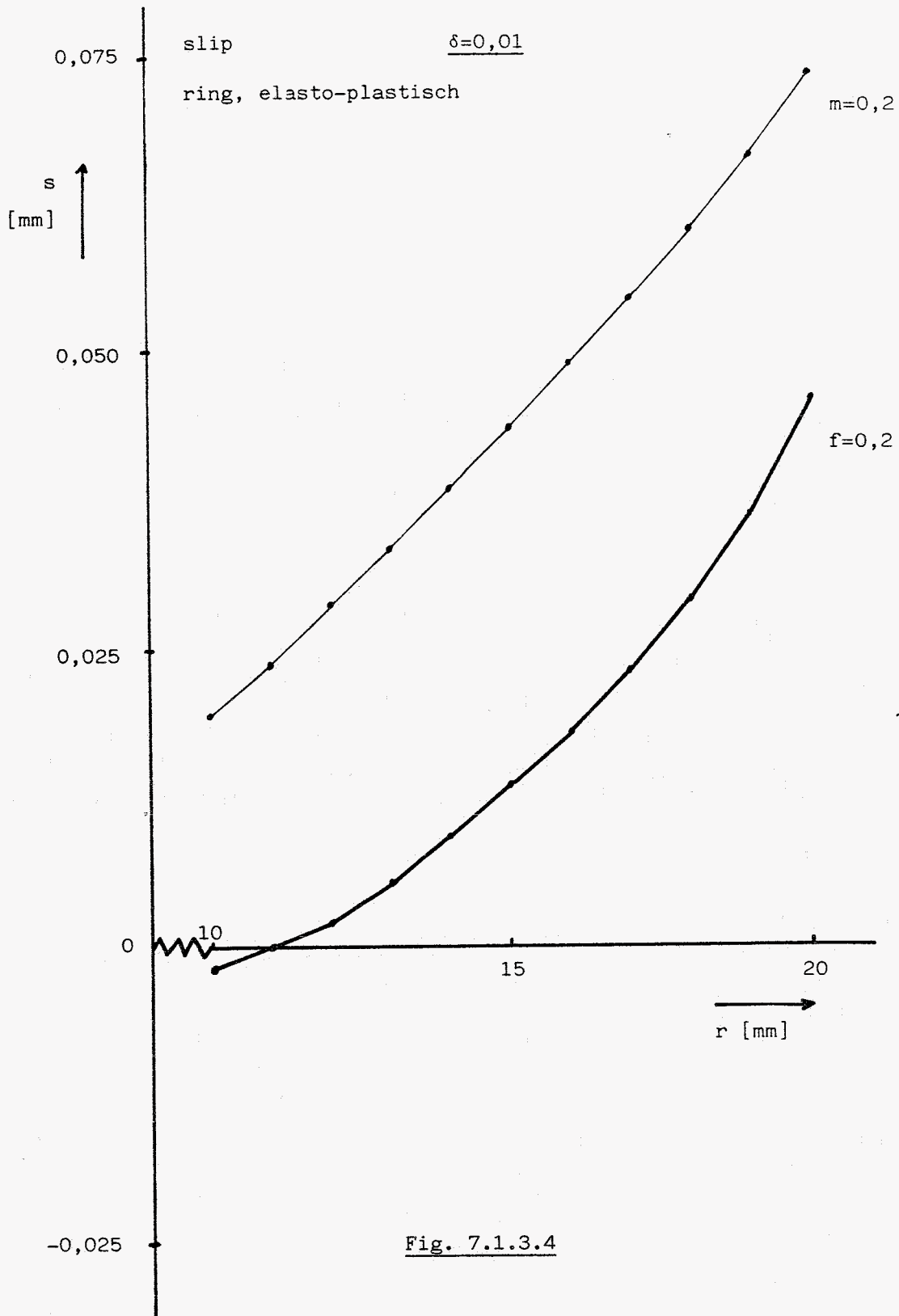


Fig. 7.1.3.4

7.2 De "drukberg" bij de stuikproef

Bij het pletten van circelcilindrische metalen voorwerpen waarvan de diameter veel groter is dan de hoogte (munt-achtige voorwerpen) kan als gevolg van de wrijving de contactdruk zo hoog oplopen dat het gebruikte gereedschap beschadigt. Doordat t.g.v. de wrijving weerstand geboden wordt tegen het naar buiten slippen van het materiaal ontstaat een hydrostatische druk, die zich in het contactvlak uit als een grote contactdruk. Deze druk zal in het midden ($r=0$) groter zijn dan aan de rand; daarom spreekt men wel van een "drukberg".

In [V] is m.b.v. de zg. schillenmethode uitgaande van het constante wrijvingsfactor-model, de Von Mises vloeivoorwaarde een benadering afgeleid voor het verloop van de contactdruk. Hierbij is verondersteld dat σ_{zz} , σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ hoofdspansingen zijn en dat $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr}$. Elastisch gedrag is verwaarloosd. Het resultaat luidt :

$$-\sigma_{zz} = \sigma_v \left(1 + \frac{2m}{\sqrt{3}} \frac{D/2 - r}{h} \right) \quad (7.2.1)$$

waarbij : D : diameter
h : hoogte
m : wrijvingsfactor
 σ_v : vloeispanning (constant)

Bij deze benadering is uitgegaan van ideaal plastisch materiaalgedrag. Door (7.2.1) te integreren over het contact oppervlak verkrijgt men de voor het pletten benodigde kracht. Deze berekende kracht blijkt goed overeen te komen met de in de praktijk gemeten kracht.

Met het hier opgestelde elementenmethode model, uitgaande van het gecombineerde wrijvingsmodel, kunnen we de nauwkeurigheid van formule (7.2.1) nagaan.

We bekijken het volgende geval :

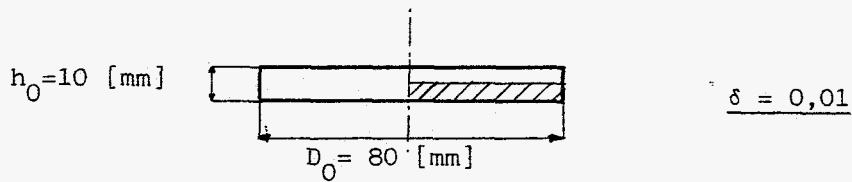


Fig. 7.2.1

We verdelen het gearceerde gedeelte in 100 4-knoops elementen
(20 in r-richting, 5 in z-richting).

We maken gebruik van de volgende numerieke waarden :

$$E = 7,10^4 \text{ [N/mm}^2 \text{]}$$

$$\nu = 0,3$$

$$H_0 = 0 \text{ [N/mm}^2 \text{]}$$

$$\sigma_v = 100 \text{ [N/mm}^2 \text{]}$$

$$m = 0,3$$

$$f = 0,2$$

Het Coulomb-deel van het gecombineerde model blijkt alleen bij kleine deformaties op te treden (1^e increment, $\delta=0,001$).

We werken met 10 gelijke incrementen zodat uiteindelijk een hoogte reductie van 1% is bereikt.

De berekening van de spanningen met 10 subincrementen heeft steeds een nauwkeurigheid kleiner dan 1%.

Als er geen sprake was van wrijving zou de contactdruk overal de waarde σ_v krijgen. We definiëren een grootheid y die de relatieve druktoename t.g.v. de wrijving weergeeft :

$$y = \frac{-\sigma_{zz} - \sigma_v}{\sigma_v} \quad (7.2.2)$$

Hierbij is $-\sigma_{zz}$ de contactdruk. Als er geen wrijving is geldt $y=0$. Voor een hoogte reductie van $\delta=0,01$ is het resultaat weergegeven in fig. 7.2.2.

Volgens de benaderingsoplossing (7.2.1) geldt :

$$y_{\text{benaderd}} = \frac{2m}{\sqrt{3}} \frac{D/2 - r}{h} \quad (7.2.3)$$

Deze benadering is ook uitgezet in fig. 7.2.2. De elementenmethode oplossing en (7.2.3) komen goed overeen.

De drukberg blijkt bij $r=0[\text{mm}]$ een helling nul te hebben en wijkt daar dus af van de benaderingsoplossing.

Aan de rand ($r=40[\text{mm}]$) treedt een spanningsconcentratie op analoog aan de problemen in §7.1.

Het is te bewijzen dat wanneer men een wrijvingsloze stuikproef geometrisch lineair doorrekent, met de hier gebruikte materiaaleigenschappen, men een fout maakt van ca. 5% bij een hoogtereductie van 5%. We laten dit bewijs hier achterwege. Omdat we 5% een nog te accepteren fout vinden gaan we bij onze berekeningen niet verder vervormen dan tot $\delta=0,05$ (ook met wrijving).

Als we het vorige probleem analyseren met $\delta=0,05$ blijkt het resultaat nog minder af te wijken van de benaderingsoplossing (zie fig. 7.2.3 de kromme aangeduid met $\alpha=0^\circ$).

Als het pletten een voorbereiding is hoeft de vormnauwkeurigheid niet groot te zijn.

We gaan nu proberen of een kleine variatie van de stempelvorm de drukberg kan doen inzakken. Wanneer we de stempel een vorm geven als in fig. 7.2.4 dan is het te verwachten dat de druk nog hoger zal worden : het materiaal wordt a.h.w. in de hoek gedrukt.

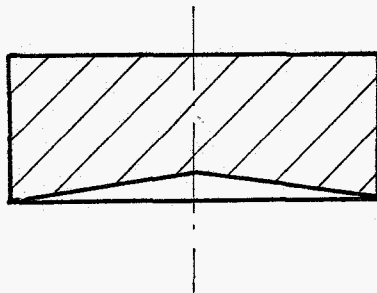
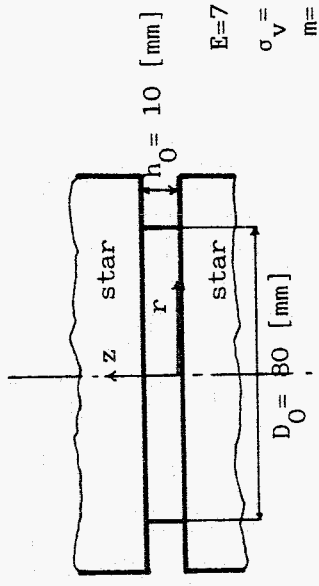


Fig. 7.2.4

"Drukberg" $\delta = 0,01$



$E = 7 \cdot 10^4 \text{ [N/mm}^2\text{]}, \nu = 0,3$
 $\sigma_V = 100 \text{ [N/mm}^2\text{]} \text{ (ideaal plast.)}$
 $m = 0,3$

$$y := \frac{-\sigma_{zz} - \nu}{\sigma_V}$$

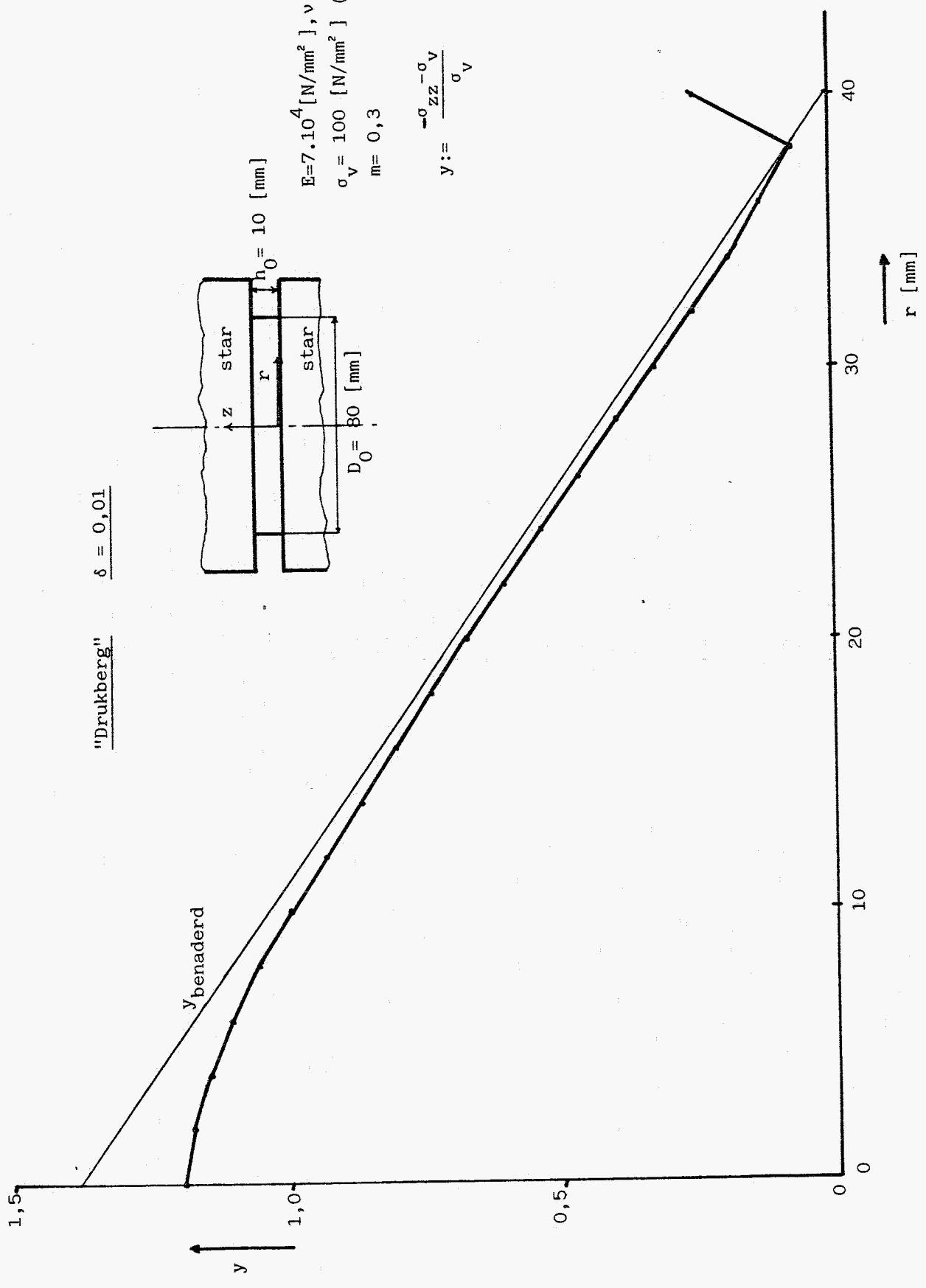


Fig. 7.2.2

We zullen nagaan of het omgekeerde effect (druk verlaging) bereikt kan worden door de stempel een vorm als in fig.7.2.5 te geven.

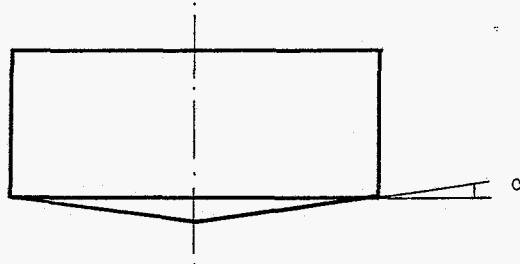


Fig. 7.2.5

We kunnen voor de stempelhoek α niet een onbeperkt grote hoek kiezen, omdat we geometrisch-lineair rekenen. Daarom kijken we eerst, om de tendens te bepalen, de oplossing van het probleem voor $\alpha=0,1^\circ$ bij een hoogte reductie van $\delta=0,01$. Deze oplossing blijkt, behoudens rekenonnauwkeurigheid*, niet af te wijken van de oplossing gepresenteerd in fig. 7.2.2 (vlakke stempel).

De andere belastingsgeschiedenis door het in de tijd toenemende contactoppervlak blijkt, bij $H_0=0$, geen invloed te hebben op het resultaat. Daarom geven we bij verdere berekeningen de te pletten schijf in de referentieconfiguratie dezelfde hoek als de stempel; dit versnelt het oplossingsproces en voorkomt numerieke problemen. We kijken achtereenvolgens naar het probleem voor $\alpha=-1^\circ$ en $\alpha=1^\circ$, beide met $\delta=0,05$. De resultaten zijn weergegeven in fig. 7.2.3. De stempel overeenkomstig fig.7.2.4 blijkt inderdaad een drukverhoging te geven ($\alpha=-1^\circ$).

De stempel met stempelhoek $\alpha=1^\circ$ geeft een drukverlaging !

Het blijkt dus mogelijk te zijn door een makkelijk aan te brengen variatie van de stempelvorm de contactdruk bij het stuiken te verlagen.

*) Nauwkeurigheid : $\epsilon_{rel} = 5 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_{abs} = 10^{-6}$ [N] zie §2.3.

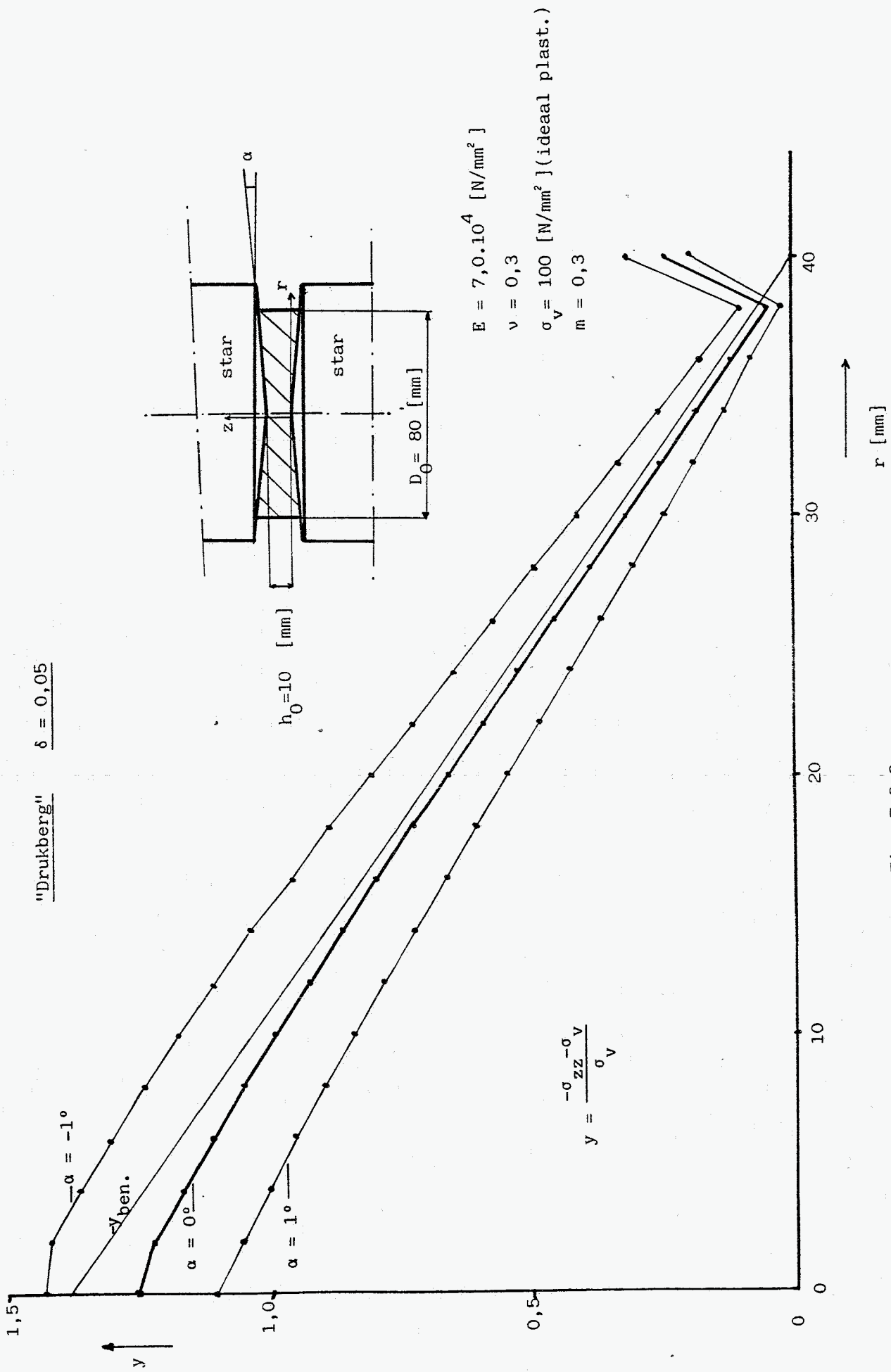


Fig. 7.2.3

8. Nabeschuwing

Er zijn legio praktische problemen te vinden waarbij het hier opgestelde elementenmethodemodel gebruikt kan worden. Voor een routinematige toepassing zou echter behoefte zijn aan een mesh-generator die automatisch gap-elementen aanbrengt tussen twee constructiedelen en wel zo dat de knooppuntnummers van de gap-elementen tussen de knooppuntnummers van het ene constructiedeel en de knooppuntnummers van het andere constructiedeel inliggen. Bij de meeste bestaande mesh-generatoren kunnen gap-elementen naderhand "met de hand" aangebracht worden door de invoerfile te veranderen. De knooppuntnummers van de gap-elementen krijgen dan de hoogste nummers. Dit geeft een stijfheidsmatrix met een onnodig grote bandbreedte. Een belangrijke volgende (grote) stap is het laten vallen van de geometrische lineairiteit. De gap-elementen moeten dan afhankelijk zijn van meerdere constructieknooppunten, omdat bij grote verplaatsingen niet steeds dezelfde constructieknooppunten tegenover elkaar hoeven te liggen.

Er zijn dus vele vervolgstudies mogelijk.

Bijlage 1 : Beschrijving "NONSYS"

Het programma "NONSYS" is een in fortran geschreven eindige-elementen programma voor het analyseren van niet-lineaire problemen. Met het programma is het mogelijk een stelsel (niet-lineaire) vergelijkingen op te stellen en op te lossen.

NONSYS werkt met de Newton-Raphson methode en het in hoofdstuk 2 beschreven convergentie criterium.

Het pakket is duidelijk ontwikkeld voor onderzoeksdoeleinden en niet voor industriële toepassingen. NONSYS heeft nl. geen elementenbibliotheek; de gebruiker moet zelf elementen programmeren.

De belastingen en randvoorwaarden kunnen in stappen (incrementen) worden ingevoerd. Voor ieder increment wordt een stelsel vergelijkingen opgelost, uitgaande van de eindtoestand van het vorige increment. Men moet om een element te formuleren twee subroutines koppelen aan NONSYS; ten eerste een routine USTIFF, waarin de elementstijfheidsmatrix en het rechterlid t.g.v. verdeelde belastingen worden gedefinieerd, en ten tweede een routine UDERIV waarin afgeleide grootheden zoals rekken en spanningen kunnen worden berekend uit de verplaatsingen. In UDERIV moeten ook de knooppuntskrachten in evenwicht met de berekende spanningen worden bepaald; dit is essentieel voor het oplossingsproces (zie hoofdstuk 2).

In deze routines worden de totale verplaatsingen opgeslagen in een twee-dimensionaal array UTOT. $UTOT(i,j)$ staat voor verplaatsingsgrootte i van knooppunt j . Op analoge wijze worden de incrementele verplaatsingen geschreven in het array UINC en (in USTIFF) het rechterlid t.g.v. de verdeelde belastingen in XP. In UDERIV wordt een twee-dimensionaal array XQ gebruikt voor de knooppuntskrachten in evenwicht met de spanningen.

In routine USTIFF zijn de verplaatsingsgrootten gegeven aan het begin van een iteratieslag (dus de verplaatsingen aan het eind van de vorige iteratie of die aan het begin van het increment).

In UDERIV zijn de verplaatsingen gegeven die gelden na de betreffende iteratieslag; hieruit volgen dan bijv. de spanningen na de betreffende iteratieslag.

De elementstijfheidsmatrix wordt vier-dimensionaal opgeslagen in het array XK. Om aan te geven hoe dit vier-dimensionale array gevuld moet worden geven we het volgende voorbeeld :

Veronderstel dat voor een zeker n-knoops element met m vrijheidsgraden per knooppunt de knooppuntskrachten e_P , de elementstijfheidsmatrix e_K en de element-vrijheidsgraden e_u als volgt samenhangen :

$$e_P = e_K \cdot e_u \quad (B1.1)$$

dan geldt voor de in het programma gebruikte array's :

$$XP(i,j) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m XK(i,j,k,\ell) * UTOT(k,\ell) \quad (B1.2)$$

Er wordt dus apart gesommeerd over alle vrijheidsgraden per knoop en over alle knooppunten van een element.

De beschikbare grootheden en de te definiëren grootheden zijn weergegeven in de listing van de twee procedures USTIFF en UDERIV (zonder uitgebreide programmatekst) :

```
SUBROUTINE USTIFF(XK,XP,COOR,UTOT,UINC,SIG,CHAR,PRES,IEL,IC,  
*JINC,JITER,  
*NELCRD,NELNFR,NELNOD,NELSTR,NELINT,NELCHR,NELPRS,KW,IERR)  
  DIMENSION XK(NELNFR,NELNOD,NELNFR,NELNOD),XP(NELNFR,NELNOD),  
*COOR(NELCRD,NELNOD),UTOT(NELNFR,NELNOD),SIG(NELSTR,NELINT),  
*CHAR(NELCHR),PRES(NELPRS)
```

```
C  
C ELEMENTSTIJFHEIDSRoutine  
C TE DEFINIEREN DOOR GEBRUIKER:  
C -----  
C XK :ELEMENTSTIJFHEIDSMATRIX  
C XP :RECHTERLID T.G.V. DRUKBELASTING  
C BESCHIKBAAR VOOR GEBRUIKER:  
C -----  
C COOR :COORDINATEN VAN DE KNOOPPUNTEN VAN HET ELEMENT  
C UTOT :TOTALE VERPLAATSINGEN VAN DE KNOOPPUNTEN  
C UINC :INCREMENTELE VERPLAATSINGEN VAN DE KNOOPPUNTEN  
C SIG :SPANNINGEN IN HET ELEMENT  
C CHAR :ELEMENTEIGENSCHAPPEN  
C PRES :DRUKBELASTINGEN OP HET ELEMENT  
C IEL :NUMMER VAN HET ELEMENT  
C IC :TYPE ELEMENT  
C JINC :INCREMENTNUMMER  
C JITER :ITERATIENUMMER  
C KW :NUMMER UITVOERFILE NONOUT  
C IERR :FOUTENTELLER :BIJ OPTREDENDE FOOT 1 OPHOGEN  
C DIMENSIES VAN DE ARRAYS  
C NELCRD:AANTAL COORDINATEN PER KNOOP  
C NELNFR:AANTAL VRIJHEIDSGRADEN PER KNOOP  
C NELNOD:AANTAL KNOPEN PER ELEMENT  
C NELSTR:AANTAL SPANNINGSCOMPONENTEN PER INTEGRATIEPUNT  
C NELINT:AANTAL INTEGRATIEPUNTEN PER ELEMENT  
C NELCHR:AANTAL ELEMENTPARAMETERS(EIGENSCHAPPEN)  
C NELPRS:AANTAL VERSCHILLENDE TYPEN DRUKBELASTING OP HET ELEMENT  
C  
C  
C DOOR GEBRUIKER TE VERVAARDIGEN PROGRAMMATUUR  
C  
C  
C RETURN  
C END
```


De component SIG(i,j) van het array SIG is aanvankelijk bedoeld om spanningscomponent i van integratiepunt j op te slaan.

In beide routines zijn de reeds berekende spanningen beschikbaar, d.w.z. het array SIG bevat bij het starten van de routine de in de vorige iteratie berekende waarden. Daarom is dit array ook geschikt voor het opslaan van eventuele geschiedenisparameters en de spanningen aan het begin van het increment .

In het array CHAR worden de elementeigenschappen zoals bijv. de elasticiteitsmodulus opgeslagen.

Het is mogelijk meerdere types elementen te programmeren door het begin van het programmadeel van een elementtype een label te geven. M.b.v. de integer IC kan men bepalen bij welk label gestart moet worden (NONSYS geeft bij de aanroep van UDERIV en USTIFF de integer IC een waarde).

De overige variabelen in de listing spreken voor zich.

Voor het opstellen van de invoerfile van NONSYS bestaat een duidelijke handleiding (op te vragen bij L.van Beukering, T.H.-Eindhoven Wh 1.137); daarin is tevens de uitvoer beschreven.

Bijlage 2 : Matrix-notatie

In dit verslag worden stelsels vergelijkingen geschreven in matrix-notatie. Vektoren en tensoren worden gerepresenteerd door resp. kolommen en matrices. In deze bijlage worden alle gebruikte notatie-afspraken gemaakt en tevens alle bewerkingen gedefiniëerd en vergeleken met (bekend veronderstelde) index-notatie.

Notatie

\underline{x} : kolom, N componenten x_i

\underline{x}^T : rij (getransponeerde kolom)

\underline{A} : twee-dimensionale matrix (N bij M); één component : A_{ij}

\underline{B} : vier-dimensionale matrix (K bij L bij N bij M); één component: B_{ijkl}

Bewerkingen

Transponeren : $\underline{B} = \underline{A}^T$

$$B_{ij} = A_{ji}$$

Inwendig produkt *) : $a = \underline{x}^T \cdot \underline{y}$

$$a = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

Dyadisch produkt : $\underline{A} = \underline{x} \cdot \underline{y}^T$

$$A_{ij} = x_i y_j$$

Uitwendigprodukt : $\underline{z} = \underline{x} \times \underline{y}$ (N=3)

$$\begin{aligned} z_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ z_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ z_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned}$$

Matrix x kolom : $\underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{x}$

$$y_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} x_j$$

Matrix x matrix : $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^M A_{ik} B_{kj}$$

Spoor van een (3 bij 3-) matrix : $\text{tr}(\underline{A}) =$

$$\sum_{i=1}^3 A_{ii}$$

*) kolommen en rijen worden behandeld als matrices.

Dubbel inwendig produkt: $\underline{A}:\underline{B} = \text{tr}(\underline{A}\underline{B}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{ji}$

Dubbel inwendig produkt van een vier-dimensionale matrix met een twee-dimensionale matrix :

$$\underline{C} = \underline{A}:\underline{B} \quad C_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ijkl} B_{kl}$$

(bij de laatste twee bewerkingen geldt steeds $K=L=M=N=3$)

Dyadisch produkt van twee matrices :

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} \quad C_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$$

Eénheidsmatrices

\underline{I} zodanig dat : $\underline{y} = \underline{I}\cdot\underline{y} \quad \forall \underline{y}$

$\underline{\underline{I}}$ zodanig dat : $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}}:\underline{\underline{C}} \quad \forall \underline{\underline{C}}$

Voor \underline{I} geldt : $I_{ij} = \delta_{ij}$ (Kronecker delta)

Voor $\underline{\underline{I}}$ geldt : $I_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$