MASTER

Het doorrekenen van een mechanische transformator van een ultrasone lasmachine met behulp van het dynamische gedeelte van ASKA

Balemans, W.J.M.

Award date:
1976

Het doorrekenen van een mechanische transformator van een ultrasone lasmachine met behulp van het dynamische gedeelte van ASKA.

W. Balemans. WE 76-19

Dit afstudeerwerk werd verricht, onder leiding van prof. dr. ir. J.D. Janssen, bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken te Eindhoven, binnen de groep "ultrasoontechnieken" (C.F.T.).
Het werd begeleid door dr. ir. A.P. Hulst (Philips), ir. A. de Kraker (T.H.E.) en dr. ir. F.E. Veldpaus (T.H.E.).
Naast voornoemde personen, wil ik alle overigen bedanken, die hun medewerking hebben verleend bij het tot stand komen van dit werk.

Eindhoven, oktober 1976.
W.J.M. Balemans.

INHOUDSOPGAVE.

SAMENVATTING.

In dit rapport is het dynamische gedeelte van een programmasysteem op basis van de elementenmethode (ASKA II) gebruikt om in een mechanische transformator van een ultrasone lasmachine de verplaatsingen en de spanningen te bepalen. Verder zijn aan de hand van een eenvoudig systeem de resultaten van ASKA vergeleken met de analytische oplossing.
Hieruit blijkt, dat men voorzichtig moet zijn met het toepassen van dynamische reduktie indien verplaatsingen voorgeschreven zijn en met de oriëntatie van de elementen waarin men een systeem verdeelt.

LITERATUURLIJST.

1. Hulst, A.P. "Seminar C Transducers. On a family of high-power transducers", Philips Research Laboratories, Eindhoven.

2. Hulst, A.P. "Macrosonics in industry 2. Ultrasonic welding of metals", Ultasonics 10,6,(1972), p.p. 252-261.

3. Banens, J. "Bepaling van de stijfheidsmatrix van het TRIAX6-element", Rapport afd. Technische Mechanica (T.H.E.).

4. Veldpaus, F.E. "Dynamisch gedrag van systemen met veel vrijheidsgraden", Collegediktaat nr. 4.444 (T.H.E.).

5. Kraker, A. de "Uitbreiding statische reduktie bij dynamische problemen voor het oplossen van het algemene eigenwaardeprobleem", Rapport afd. Technische Mechanica (T.H.E.) nr. WE 74-14.

6. Argyris, J.H. e.a. "ASKA User's reference manual", I.S.D.-Report No. 73, ASKA UM 202, Stuttgart 1975.

7. Argyris, J.H. e.a. "ASKA part II - Linear dynamic analysis. User's reference manual", I.S.D.-Report No. 97, ASKA UM 211, Stuttgart 1974.

8. Argyris, J.H. e.a. "ASKA part II - Linear dynamic analysis. Lecture notes and example problems", I.S.D.-Report No. 155, ASKA UM 212, Stuttgart 1974.

9. Love, A.E.H. "A treatise on the mathematical theory of elasticity", Dover, New York.

10. Gray, A. and Mathews, G.B. "A treatise on Bessel functions and their applications to physics", Dover, New York.

SYMBOLENLIJST.

Symbool	Eenheid	Omschrijving.
A, δA	Nm	arbeid resp. virtuele arbeid.
c	m/s	geluidssnelheid.
C	-	"rechtsboven-driehoeksmatrix" of Choleskyfaktor.
E	N/m^2	elasticiteitsmodulus.
f	N	krachtsvektor.
fr	s^{-1}	frequentie.
g	m/s^2	gravitatieversnelling.
i	-	$i = \sqrt{-1}$
I	-	eenheidsmatrix.
J_n	-	Besselfunktie van de orde n.
k	N/m	stijfheid.
K	N/m	stijfheidsmatrix.
l	m	lengte.
m	kg	massa.
M	kg	massamatrix.
n	-	aantal.
p	-	aantal in berekening meegenomen eigenvektoren.
P_R	-	reguliere vierkante matrix.
Q_R	-	orthonormale eigenvektoren van M_{RR}.
R	-	gegeneraliseerde belastingsvektor.
r,z,t of θ		poolkoördinaten.
S	-	transformatiematrix.
t	s	tijd.
T	-	transformatiematrix.
u, δu	m	verplaatsingsvektor resp. virtuele verplaatsingsvektor.
$\ddot{u}$	m/s^2	$\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$ is versnellingsvektor.
U_e	Nm	elastische energie.
U_k	Nm	kinetische energie.
v	-	eigenvektor.
V	m^3	volume.
x,y,z		koördinaten.
X	-	matrix van eigenvektoren.

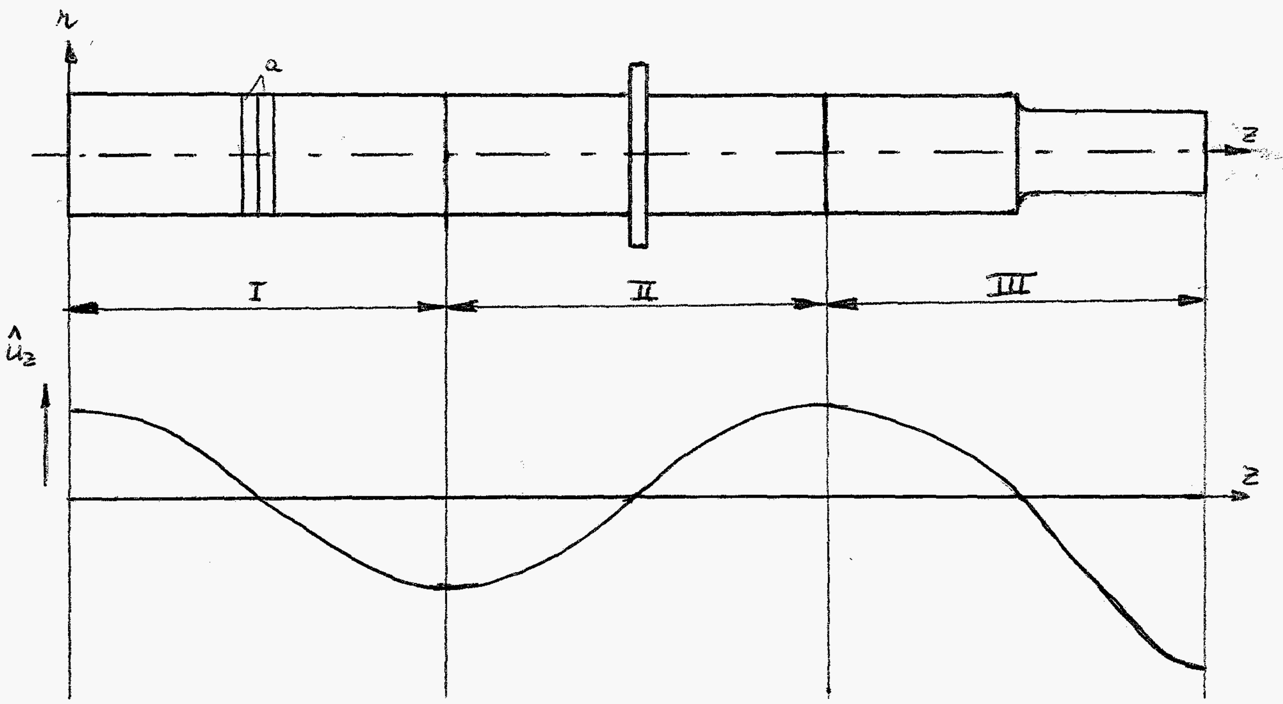
Symbool	Eenheid	Omschrijving.
γ	m^{-1}	$\gamma = \frac{\omega}{c}$ is golfgetal.
ε	-	rek.
η	-	natuurlijke koördinaten.
λ_i	-	i-de eigenwaarde.
Λ	-	matrix van eigenwaarden.
λ	N/m^2	Lamé konstante ($\lambda + \frac{2}{3}\mu =$ K is kompressiemodulus).
μ	N/m^2	Lamé konstante (glijdingsmodulus).
ν	-	dwarskontraktiekoëfficiënt.
ω	s^{-1}	hoekfrequentie.
ρ	kg/m^3	massadichtheid.
σ	N/m^2	spanning.
τ	N/m^2	schuifspanning.

Index	Omschrijving.
L	lokaal.
C	extern.
P	voorgeschreven.
S	onderdrukt.
R	beweging als star lichaam.
E	elastisch.
red	gereduceerd.
r	in radiale richting.
z	in axiale richting.
t, θ	in tangentiale richting.
t	getransponeerd (mits boven geplaatst).

Opmerking: De overige symbolen zijn ter plaatse gedefinieerd.

1. PROBLEEMBESCHRIJVING.

1.1. INLEIDING.

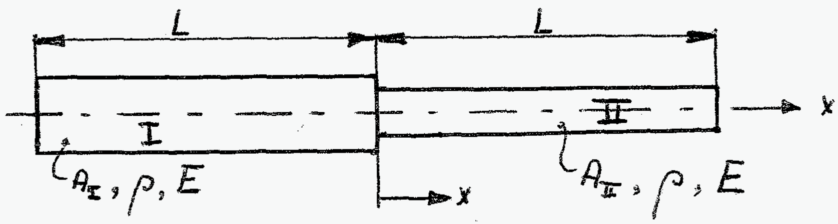


Figuur 1.1.1.

Voor het ultrasoon lassen worden trillers gebruikt, die er in principe als volgt uitzien[1, 2]. (zie figuur 1.1.1.)
Deel I, ook wel transducer genoemd, dient voor het opwekken van de trilling. Hiertoe wordt over 2 piëzo-elektrische ringen a een elektrische spanning aangebracht met een frequentie, zodanig dat de transducer wordt aangestoten in zijn laagste (longitudinale) eigenfrequentie.
Hieraan wordt een z.g. golfgeleider gekoppeld (deel II), waarvan de afmetingen zodanig gekozen zijn, dat ook deze ongeveer dezelfde longitudinale eigenfrequentie heeft. Deel I en II samen trillen in hun tweede eigentrillingsvorm. Als men naar het midden kijkt van de golfgeleider, dan ziet men dat de axiale verplaatsingen nul zijn, zodat het mogelijk is om de triller hier m.b.v. een flens aan de omgeving te bevestigen.
Aangezien voor een aantal toepassingen de verplaatsingsamplitude van het eindvlak te klein is, moet deze vergroot worden. Dit is mogelijk met een z.g. mechanische transformator. (deel III)
Er zijn mechanische transformatoren met diverse vormen, bijv. de bicilindrische (figuur 1.1.1.), de konische en de exponentiële.

Van deze transformatoren heeft de bicilindrische het voordeel, dat hij eenvoudig te vervaardigen is en dat hij, bij gegeven diameterverhouding, een grotere transformatieverhouding heeft. Onder de transformatieverhouding wordt verstaan, de verhouding tussen de verplaatsing van het eindvlak en die van het voorvlak van de transformator.
De bicilindrische trafo heeft echter als groot nadeel, dat in de omgeving van de sprong in diameter grote spanningen optreden, waardoor, zeker bij kleine afrondingen scheuren kunnen ontstaan i.v.m. vermoeiing. De bedrijfsfrequentie van een dergelijke triller ligt nl., afhankelijk van de toepassing, tussen 20 en 120 kHz..
De opdracht was eens na te gaan hoe groot de optredende spanningen zijn in een bicilindrische trafo.
In eerste benadering geldt, uitgaande van de ééndimensionale golfvergelijking:

$$\rho . A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ E . A . \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \qquad (1.1.1.)$$



Figuur 1.1.2.

Als men de trafo stuksgewijs bekijkt, dan geldt zowel voor deel I als voor deel II:

$$\rho . \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E . \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.1.2.)$$

Neemt men aan, dat in het koppelvlak $(x = 0)$ geldt:

$u_I = u_{II}$ (aansluitvoorwaarde) (1.1.3.)

$F_I = F_{II}$ (krachtenevenwicht) (1.1.4.)

en dat de trafo vrij trilt, m.a.w. dat op de vlakken voor $x = -L$ en $x = L$ geen krachten werken, dan is af te leiden, dat:

$$u_I = \hat{u} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) \qquad \text{voor } -L \leq x < 0 \qquad (1.1.5.)$$

$$u_{II} = \hat{u} \cdot \frac{A_I}{A_{II}} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) \qquad \text{voor } 0 < x \leq L \qquad (1.1.6.)$$

met:

$$\omega = \frac{\pi}{2 \cdot L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (1.1.7.)$$

Voor de optredende axiale spanningen geldt:

$$\sigma_{x_I} = E \cdot \frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot \hat{u} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) \qquad \text{voor } -L \leq x < 0 \qquad (1.1.8.)$$

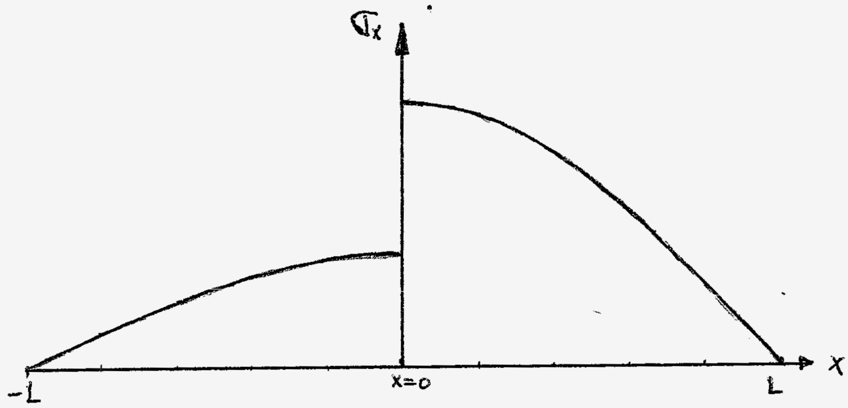
$$\sigma_{x_{II}} = E \cdot \frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot \hat{u} \cdot \frac{A_I}{A_{II}} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) \qquad (1.1.9.)$$

voor $0 < x \leq L$

Voor $x = 0$ geldt:

$$\sigma_{x_I} = E \cdot \frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) \qquad (1.1.10.)$$

$$\sigma_{x_{II}} = E \cdot \frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot \hat{u} \cdot \frac{A_I}{A_{II}} \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) \qquad (1.1.11.)$$



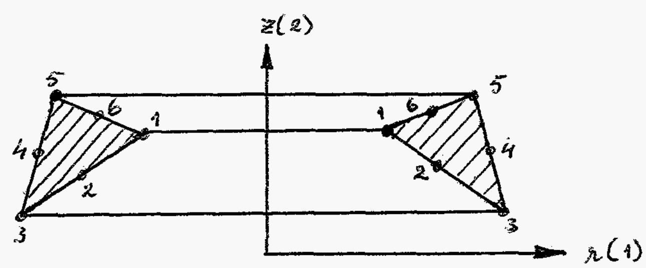
Figuur 1.1.3.

In figuur 1.1.3. is de axiale spanning weergegeven. Uit deze afleiding blijkt er bij $x = 0$ een diskontinuïteit in de spanning op te treden, zodat er wel een indikatie gegeven wordt van de gemiddeld optredende spanning, maar zeker niet de in de omgeving van de afronding optredende spanning.

Meerdimensionaal analytisch oplossen van dit probleem stuit ook op onoverkomelijke moeilijkheden i.v.m. de diskontinuïteit in de doorsnede. Daarom werd er gedacht aan een benaderingsmethode. Aangezien er binnen Philips een programmasysteem op basis van de elementenmethode voorhanden is, waarmee dit probleem in principe opgelost kan worden, (nl. ASKA) is hierop de keuze gevallen.

1.2. MODELVORMING.

Er moet een model gemaakt worden van het systeem.
Het spreekt nl. voor zich, dat het dynamische gedrag van de trafo mede bepaald wordt door de invloed die het lasproces op de trafo uitoefent. Aangezien de aan de las afgetapte energie per cyclus klein is t.o.v. de in de trafo aanwezige energie per cyclus, mogen de krachten die het lasproces op de trafo uitoefent in eerste benadering verwaarloosd worden. Als er echter weinig energie afgevoerd wordt door het lasproces, dan hoeft er ook maar weinig energie toegevoerd te worden, en mag men dus in eerste benadering ook aannemen dat de trafo zonder uitwendige krachten trilt in zijn laagste eigentrillingsvorm.
Hetzelfde resultaat wordt bewerkstelligd door het voorvlak van de trafo een voorgeschreven verplaatsing te geven, die gelijk is aan: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Hierin is ω de laagste eigenhoekfrequentie van de vrij trillende trafo.
De trafo wordt vanwege zijn rotatorische symmetrie (zowel in vorm als in belasting) verdeeld in TRIAX6 elementen(3, 6).
Dit zijn rotatorische symmetrische ringelementen met een driehoekige doorsnede met knooppunten in de hoekpunten en op de middens van de zijden (figuur 1.2.1.).
Elk knooppunt heeft twee graden van vrijheid en wel één in r-richting en één in z-richting.



Figuur 1.2.1.

In hoofdstuk 2 zal nu eerst dieper ingegaan worden op de berekeningswijze in ASKA, waarna in hoofdstuk 3 de opgetreden problemen stap voor stap aan de orde zullen komen.

Opmerking: Bij het TRIAX6 element wordt de r-richting ook wel 1-richting genoemd en de z-richting de 2-richting.

Doordat elk knooppunt slechts twee graden van vrijheid heeft en u_r onafhankelijk is van de hoek θ (dus bij een bepaald element over de gehele omtrek gelijk is) worden eventuele buigingen en hoekverdraaiingen niet in de berekening meegenomen.

2. REKENEN MET HET DYNAMISCHE GEDEELTE VAN ASKA (ASKA II).

2.1. INLEIDING.

ASKA is de afkorting van "Automatic System for Kinematic Analysis". Het is een programmasysteem op basis van de methode der eindige elementen voor de analyse van lineair elastische konstrukties onder zowel statische (ASKA I) als dynamische omstandigheden (ASKA II). Het systeem is ontwikkeld door J.H. Argyris en zijn medewerkers van het "Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen" (I.S.D.) te Stuttgart.
Het systeem is gebaseerd op de verplaatsingsmethode. Deze methode wordt hier globaal geschetst en aan de hand van een eenvoudig voorbeeld verduidelijkt. Dit komt neer op het afleiden van de totale kinetische energie, de totale elastische energie en de gegeneraliseerde krachten van het gediskretiseerde systeem, waarna m.b.v. de stelling van Lagrange de bewegingsvergelijkingen van het systeem eenvoudig bepaald kunnen worden.[4]

De totale kinetische energie wordt geschreven als een som van de kinetische energie over de elementen:

$$U_k = \tfrac{1}{2}\int_V \rho . \dot{u}^2 . dV = \tfrac{1}{2}\sum_{el}\int_{V^{(e)}} \rho . \dot{\bar{\bar{u}}}^2 . dV^{(e)} \qquad (2.1.1.)$$

Binnen een element wordt het verplaatsingsveld ($\bar{\bar{u}}$) geheel bepaald door de verplaatsingsgrootheden ($\bar{u}$) van de bij dat element behorende knooppunten.

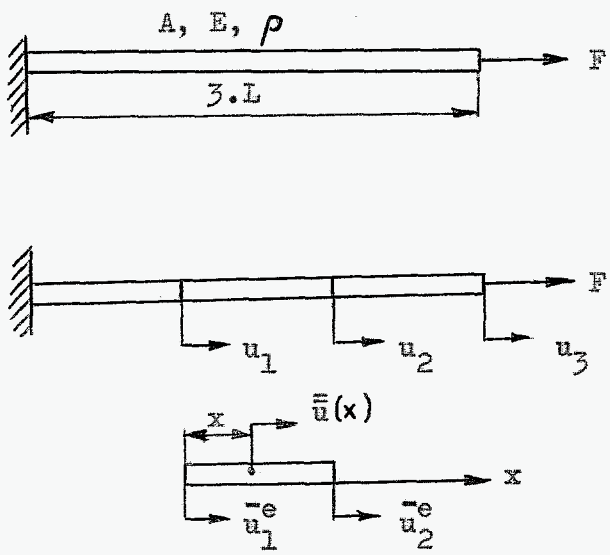
$$\bar{\bar{u}}^{(e)} = f(x,y,z).\bar{u}^{(e)} \qquad (2.1.2.)$$

Dit gebeurt door het kiezen van een interpolatiefunktie (f). De keuze van de interpolatiefunktie wordt beperkt door een aantal eisen, waaraan het gekreëerde verplaatsingsveld moet voldoen om tot zinvolle benaderingen van het probleem te kunnen komen. Hierna kan over het elementvolume worden geïntegreerd. Dan geldt met (2.1.1.) en

(2.1.2.):

$$U_k = \tfrac{1}{2} \sum_{el} \dot{\bar{u}}^t . \bar{M} . \dot{\bar{u}} = \tfrac{1}{2} \dot{u}^t . M . \dot{u} \qquad (2.1.3.)$$

Hierin is u de (diskrete) verplaatsingsvektor van de gehele konstruktie en M de z.g. massamatrix.



Figuur 2.1.1.

Het systeem van figuur 2.1.1. bestaat uit een homogene elastische balk (doorsnede-oppervlak A, elasticiteits-modulus E, dichtheid ρ, lengte 3.L) aan een zijde ingeklemd. Het systeem kan alleen verplaatsingen uitvoeren in de x-richting (ééndimensionale beschouwing). Diskretisatie van dit systeem vindt plaats door de balk te verdelen in drie (gelijke) elementen. In elk element wordt een lineair verplaatsingsveld aangenomen. Hierdoor is het verplaatsings-veld geheel vast te leggen m.b.v. twee vrijheidsgraden per element.

$$\bar{\bar{u}}^{(e)}(x) = (1-\tfrac{x}{L}).\bar{u}_1^e + \tfrac{x}{L}.\bar{u}_2^e = \begin{bmatrix} 1-\tfrac{x}{L} & \tfrac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_2^e \end{bmatrix} = L^{*}. \bar{u} \qquad (2.1.4.)$$

Hierin zijn L^{*} en $\bar{u}$ vektoren.
Voor de kinetische energie van één element geldt:

$$U_k^e = \tfrac{1}{2}\int_{V^{(e)}} \rho . \dot{\bar{u}}^2 . dV^{(e)} = \tfrac{1}{2}\int_{x=0}^{L} \rho . \dot{\bar{u}}^t . L^{*t} . L^* . \dot{\bar{u}} . A . dx \qquad (2.1.5.)$$

Aangezien $\dot{\bar{u}}$ geen funktie is van x kan (2.1.5.) geschreven worden als:

$$U_k^e = \tfrac{1}{2} . \dot{\bar{u}}^t . \left\{ \int_{x=0}^{L} \rho . A . L^{*t} . L^* . dx \right\} . \dot{\bar{u}} = \tfrac{1}{2} . \dot{\bar{u}}^t . \bar{M} . \dot{\bar{u}} \qquad (2.1.6.)$$

Hierin is:

$$\bar{M} = \frac{\rho . A . L}{6} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (2.1.7.)$$

Voor het totale systeem van figuur 2.1.1. is bij de verplaatsingsvektor:

$$u^t = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \qquad (2.1.8.)$$

De totale massamatrix:

$$M = \frac{\rho . A . L}{6} . \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (2.1.9.)$$

Men kan op analoge wijze overgaan van de algemene uitdrukking voor de elastische energie, naar het diskrete systeem.

$$U_e = \tfrac{1}{2} \;.\; u^t \;.\; K \;.\; u \qquad (2.1.10.)$$

Hierin is K de z.g. stijfheidsmatrix. Voor het voorbeeld van figuur 2.1.1. geldt:

$$\bar{K} = \frac{E . A}{L} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.1.11.)$$

$$K = \frac{E.A}{L}.\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.1.12.)$$

De uitwendige belasting op een systeem zal veelal niet bestaan uit krachtgrootheden in de richting van de gekozen vrijheidsgraden u_1, u_2, ..., u_n. Daarom moet deze belasting eerst worden omgezet in z.g. gegeneraliseerde krachten f_1, f_2, ..., f_n, die wel samenhangen met de gekozen vrijheidsgraden.
De berekening van f_i kan geschieden door gebruik te maken van de stelling volgens welke de arbeid δA, die door de uitwendige belasting wordt verricht bij een virtuele variatie δu_i van vrijheidsgraad u_i gelijk is aan:

$$\delta A = f_i.\delta u_i \qquad (2.1.13.)$$

Met (2.1.13.) kunnen de gezochte gegeneraliseerde krachten f_1, f_2, ..., f_n bepaald worden. Zij worden opgevat als de komponenten van een vektor, die belastingvektor of krachtvektor genoemd wordt. Laat men niet één, maar alle vrijheidsgraden tegelijkertijd variëren, dan gaat (2.1.13.) over in:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} f_i.\delta u_i = f^t.\delta u \qquad (2.1.14.)$$

De bewegingsvergelijkingen van het systeem kunnen nu m.b.v. de stelling van Lagrange eenvoudig bepaald worden uit de relaties voor de kinetische energie, de elastische energie en de gegeneraliseerde krachten.
Volgens de stelling geldt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U_k}{\partial \dot{u}_i}\right) + \frac{\partial U_e}{\partial u_i} = f_i \quad \text{voor } i=1,\ 2,\ ....,\ n \qquad (2.1.15.)$$

Past men dit toe met U_k volgens (2.1.3.) en U_e volgens (2.1.10.) dan vindt men:

$$\tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left\{ M_{i,j} + M_{j,i} \right\} . \ddot{u}_j + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left\{ K_{i,j} + K_{j,i} \right\} . u_j = f_i$$

voor $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ (2.1.16.)

Er geldt dus:

$$\tfrac{1}{2} (M + M^t) . \ddot{u} + \tfrac{1}{2} (K + K^t) . u = f \qquad (2.1.17.)$$

En dus ook:

$$M . \ddot{u} + K . u = f \qquad (2.1.18.)$$

Waarbij:

$$M := \tfrac{1}{2} (M + M^t) \qquad (2.1.19.)$$
$$K := \tfrac{1}{2} (K + K^t) \qquad (2.1.20.)$$

Hieruit volgt, dat M en K symmetrische matrices zijn.

In ASKA wordt niet de gehele voorgaande geschiedenis nagelopen, maar voor een aantal elementen zijn massamatrix, stijfheidsmatrix, enz. welke volgens het voorgaande bepaald zouden kunnen worden analytisch reeds direkt opgeslagen.

Oplossen van het probleem wil zeggen, het oplossen van het stelsel vergelijkingen (2.1.18.).

2.2. GLOBALE OPBOUW VAN DE INVOER VAN EEN PROBLEEM IN DE COMPUTER.

De invoer van één probleem is te verdelen in een aantal stukken:

1. De "Job-control".
2. ASKA Processor Control program (A.P.C.).
3. A.P.C.-data: a. topologische beschrijving.
   b. overige gegevens.

2.2.1. De "Job-control".

Eenvoudig gezegd worden met de "Job-control" voldoende gegevens aan de rekenmachine doorgegeven, om die voor te bereiden op het uit te voeren programma. In de opdrachten, waaruit de "Job-control" bestaat, staat o.a. vermeld wie de opdrachtgever is, welke tijd en geheugenruimte vereist zijn, welke hoeveelheid en welk type uitvoer worden gewenst.

2.2.2. ASKA Processor Control program (A.P.C.).

Binnen dit blok stelt de gebruiker zelf zijn programma samen door het in de juiste volgorde aanroepen (CALL) van een aantal processors (enigszins vergelijkbaar met procedures of subroutines). Elke processor voert een proces uit dat kan bestaan uit een zeer groot aantal rekenoperaties en/of logische beslissingen. De input en output van de processor is in het algemeen een "book" of een aantal "books"; een "book" is gedefinieerd als een logische eenheid van een blok met gegevens.
Een voorbeeld van een A.P.C. , met het beoogde doel tussen haakjes is te vinden op blz. 2.42.

2.2.3. De A.P.C.-data.

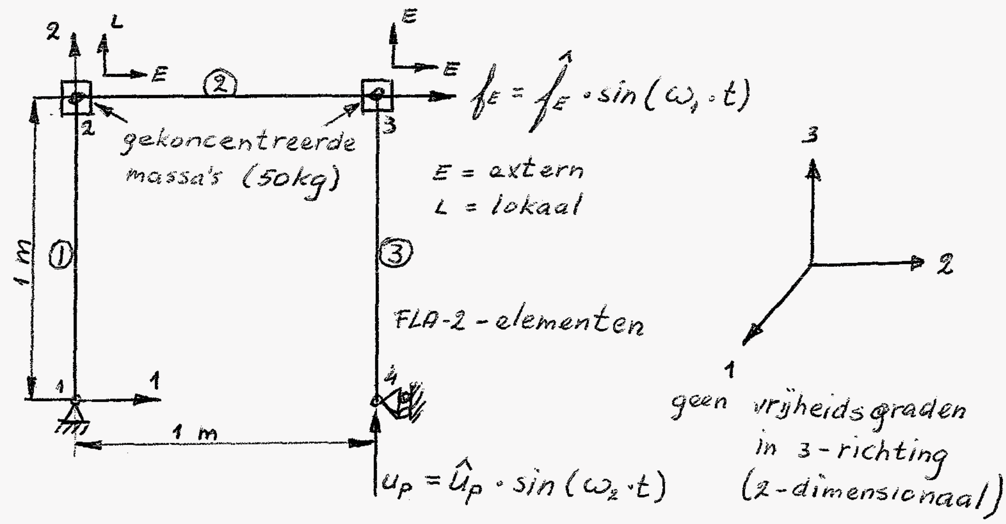
2.2.3.1. Topologische beschrijving.

Bij de topologische beschrijving wordt de te analyseren konstruktie globaal gekarakteriseerd, waarbij de omvang van het probleem wordt vastgelegd. Van elk element wordt aangegeven van welk type het is en welke de bijbehorende knooppuntnummers zijn. Bovendien wordt vermeld of er verplaatsingen voorgeschreven zijn (al dan niet gelijk aan nul) en zo ja, welke. Voor de externe vrijheidsgraden

wordt hetzelfde gedaan.
Deze gegevens bepalen de grootte van de arrays, die bij verdere verwerking van het probleem een rol gaan spelen.

- Van elk element wordt ingevoerd het type en de groep waartoe het element behoort en bovendien de nummers van de knooppunten die tot dat element behoren.(z.g. TYPE-statement)
- Het groepsnummer en het nummer in de groep van de elementen die niet in rekening mogen worden gebracht. (z.g. IGNORE-statement). Dit kan van belang zijn als er in konstrukties "cut-outs" optreden.
- Karakterisering van de vrijheidsgraden met voorgeschreven verplaatsingen ongelijk aan nul (z.g. PRESCRIBE-statement), van de onderdrukte verplaatsingen (z.g. SUPPRESS-statement) en vrijheidsgraden die extern gedeklareerd worden i.v.m. statische reduktie.(z.g. EXTERNAL-statement).
- De nummers van de knooppunten waarin basisrotatie moet worden toegepast (z.g. ROTATED BASIS-statement). Dit is van belang bij bijv. scheve opleggingen.

Voorbeeld van een topologische beschrijving.



Figuur 2.2.3.1.1.

Voor het systeem volgens figuur 2.2.3.1.1. ziet de topologische beschrijving er als volgt uit:

```
TOPOLOGICAL DESCRIPTION
NET (1)(4)(probleemnaam) /probleem met 4 knooppunten/
FLA2(1)(3)(1,1)(2,1) /in NET 1, 3 FLA2-elementen nl. van
                      knooppunt 1 naar knooppunt 2, van 2
                      naar 3 en van 3 naar 4/
SUPPRESS(3)(4)(1,1)   /onderdrukt verplaatsingen in 3-rich-
                      ting van 4 knooppunten nl. knooppunt
                      1, 2, 3 en 4/
SUPPRESS(1,2)(1)(1)   /onderdrukt verplaatsingen in 1- en
                      2-richting van knooppunt 1/
SUPPRESS(1)(1)(4)     /onderdrukt verplaatsing in 1-richting
                      van knooppunt 4/
PRESCRIBE(2)(1)(4)    /voorgeschreven verplaatsing in 2-
                      richting van knooppunt 4/
EXTERNAL(1)(2)(2,1)   /verplaatsingen in 1-richting van
                      knooppunten 2 en 3 zijn extern/
EXTERNAL(2)(1)(3)     /verplaatsing in 2-richting van
                      knooppunt 3 is extern/
END NET
END TOPOLOGICAL DESCRIPTION
```

Het tussen de schuine strepen vermelde kommentaar is hier ter verduidelijking opgenomen en komt dan ook bij de werkelijke invoer niet voor.

2.2.3.2. Overige gegevens.

Hierbij worden gegevens vermeld, zoals knooppuntskoördinaten, geometrische gegevens van het element, elasticiteitsmodulus, dwarskontraktiekoëfficiënt, massadichtheid, knooppuntskrachten, voorgeschreven verplaatsingen, gekoncentreerde massa's, bewegingsmogelijkheden als star lichaam, beginvoorwaarden enz..
Voor het systeem van figuur 2.2.3.1.1. bijv.[6,7]:

```
$DATA
$NPCO N = 1  C = 2    /knooppuntskoördinaten; kolom 1 geeft
     1  0.0  0.0      het knooppuntsnummer en kolom 2 en 3
     2  0.0  1.0      de koördinaten in 1- en 2-richting/
     3  1.0  1.0
     4  1.0  0.0
```

```
$GEDA N=1 G=1 E=A C=2   /geometrische gegevens; dwars-
      1  1.0E-4  1.0E-4 doorsnede t.p.v. begin en einde
                        van de staaf/
$EMOD N=1 G=1 E=A C=1   /elasticiteitsmodulus van het
      1  2.1E+11        materiaal; bij deze staafelementen
                        speelt de dwarskontraktiekoëffi-
                        ciënt geen rol/
$DENS N=1 G=1 E=A C=1   /massadichtheid/
      1  7800.0
$EOF

$DATA
$LUMP N=1 B=BMLL V=1 H=1  /in rekening brengen van de
      2  2  50.0          gekoncentreerde massa's/
$LUMP N=1 B=BMCC V=2 H=2  /idem/
      2  1  50.0
      3  1  50.0
      3  2  50.0
$RMOD N=1 X=1 U=1         /deklareren van de beweging
      1  1  0  0          als star lichaam in 1-richting
$RSUB N=1 I=1 X=2         voor het subsysteem bestaande
      2  3                uit de knooppunten 2 en 3/
$AFAF N=1 X=1             /geeft aan in welk knooppunt de
      3  1  11  10.0      in LIBF gedeklareerde krachts-
                          funkties aangrijpen/
$APAP N=1 X=L             /geeft aan in welk knooppunt de
      4  2  12  .01       in LIBP gedeklareerde verplaat-
                          singen voorgeschreven zijn/
$LIBF N=1 X=1                      /in ASKA te gebruiken
      11  1  1.0  10.0  0.0  0.0  "library-funktion"
$LIBP N=1 X=1                      f1=c1.sin(c2.t+c3)+c4/
      12  1  1.0  12.0  1.57 0.0
$EOF
$FIN
```

2.3. HET OPLOSPROCES.

Aan de hand van de in hoofdstuk 2.2. ingevoerde gegevens kunnen de massamatrix M, de stijfheidsmatrix K en de belastingsvektor f worden opgesteld, waarmee het op te lossen stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen (2.1.17.) bekend is.

2.3.1. Statische reduktie.

In het algemeen geldt dat n, dit is het aantal onafhankelijke vrijheidsgraden dat men gekozen heeft om de beweging van de konstruktie te analyseren, erg groot kan worden, omdat vaak enkel door een fijne verdeling in elementen de werkelijke stijfheid en de werkelijke massaverdeling van de konstruktie voldoende goed benaderd kunnen worden. Daardoor zal de orde van de massamatrix M en de stijfheidsmatrix K erg groot kunnen worden. Het oplossen van het stelsel (2.1.17.) wordt dan een zeer tijdrovende en kostbare geschiedenis, met name het oplossen van het hierbij behorende eigenwaarde-probleem.(zie hoofdstuk 2.3.3.)
Om de rekentijden, nodig voor het oplossen van een groot aantal gekoppelde differentiaalvergelijkingen te beperken kan men in ASKA het aantal vrijheidsgraden reduceren. Hierbij wordt niet gestreefd naar het verkrijgen van de exakte oplossing, maar naar een benaderde oplossing, zodat men in ruil voor een grote vermindering van de benodigde rekentijd, moet aanvaarden dat de berekende resultaten slechts benaderingen voor de exakte oplossing van het stelsel vergelijkingen (2.1.17.) zijn.
De methode berust erop, dat men het aantal vrijheidsgraden n (en daarmee de orde van de matrices M en K) reduceert door een aantal n_L van de vrijheidsgraden op de één of andere manier te schrijven als een lineaire kombinatie van de overige $n_C = n - n_L$ komponenten van de verplaatsingsvektoren[5]. Indien nu $n_C \ll n_L$, hanteert men dus een veel kleiner aantal vrijheidsgraden om het gedrag van de konstruktie te beschrijven, dan men aanvankelijk had aangenomen. De afhankelijk gekozen vrijheidsgraden zijn door het aangenomen lineaire verband uitgedrukt in de onafhankelijk gekozen vrijheidsgraden. Om dit "eenvoudig" te kunnen realiseren krijgt

de verplaatsingsvektor u van vergelijking (2.1.17.) in ASKA t.g.v. een intern reorganisatieproces de volgende struktuur:

$$u^t = \left[u_L^t \; u_C^t \; u_P^t \; u_S^t \right] \qquad (2.3.1.1.)$$

Hierin is:

- u_L: de vektor der lokale (d.w.z. afhankelijke) verplaatsingen.
- u_C: de vektor der externe (d.w.z. onafhankelijke) verplaatsingen.
- u_P: de vektor der voorgeschreven verplaatsingen ongelijk aan nul.
- u_S: de vektor der voorgeschreven verplaatsingen gelijk aan nul (z.g. onderdrukte verplaatsingen).

De bijbehorende, eveneens gepartitioneerde krachtsvektor is:

$$f^t = \left[f_L^t \quad f_C^t \quad f_P^t \quad f_S^t \right] \qquad (2.3.1.2.)$$

Ook de massa- en stijfheidsmatrix worden op analoge wijze gereorganiseerd en gepartitioneerd.
Het gepartitioneerde stelsel tweede orde differentiaalvergelijkingen ziet er nu als volgt uit:

$$\begin{bmatrix} M_{LL} & M_{LC} & M_{LP} & M_{LS} \\ M_{LC}^t & M_{CC} & M_{CP} & M_{CS} \\ M_{LP}^t & M_{CP}^t & M_{PP} & M_{PS} \\ M_{LS}^t & M_{CS}^t & M_{PS}^t & M_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_L \\ \ddot{u}_C \\ \ddot{u}_P \\ \ddot{u}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LC} & K_{LP} & K_{LS} \\ K_{LC}^t & K_{CC} & K_{CP} & K_{CS} \\ K_{LP}^t & K_{CP}^t & K_{PP} & K_{PS} \\ K_{LS}^t & K_{CS}^t & K_{PS}^t & K_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ u_C \\ u_P \\ u_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L \\ f_C \\ f_P \\ f_S \end{bmatrix} \qquad (2.3.1.3.)$$

Voor een gedeelte van dit stelsel kan men ook schrijven:

$$\begin{bmatrix} M_{LL} & M_{LC} \\ M_{LC}^t & M_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_L \\ \ddot{u}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LC} \\ K_{LC}^t & K_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L \\ f_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{LP} & M_{LS} \\ M_{CP} & M_{CS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_P \\ \ddot{u}_S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{LP} & K_{LS} \\ K_{CP} & K_{CS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_P \\ u_S \end{bmatrix} \qquad (2.3.1.4.)$$

Aangezien $\ddot{u}_S = 0$ en $u_S = 0$ geldt:

$$\begin{bmatrix} M_{LL} & M_{LC} \\ M_{LC}^t & M_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_L \\ \ddot{u}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LC} \\ K_{LC}^t & K_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L \\ f_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{LP} \\ M_{CP} \end{bmatrix} \ddot{u}_P - \begin{bmatrix} K_{LP} \\ K_{CP} \end{bmatrix} u_P = \begin{bmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_C \end{bmatrix} = \tilde{f}$$

(2.3.1.5.)

Omdat $\ddot{u}_P$ en u_P bekend zijn, zijn ook $\tilde{f}_L$ en $\tilde{f}_C$ bekend.
In het statische reduktieproces moeten de afhankelijke vrijheidsgraden u_L nu uitgedrukt worden in een lineaire kombinatie van de onafhankelijke vrijheidsgraden u_C.
In ASKA wordt hiertoe de reduktiemethode van Guyan gebruikt.
Deze gaat van de veronderstelling uit, dat M_{LP} ; K_{LP} en f_L nul zijn. Het komt er in de praktijk op neer, dat men in een konstruktie waar in bepaalde knooppunten verplaatsingen (ongelijk aan nul) voorgeschreven zijn, deze knooppunten in moet bedden in een gebied met externe vrijheidsgraden en dat men in knooppunten waar krachten aangrijpen deze knooppuntsvrijheidsgraden extern deklareert.
Met bovenstaande veronderstellingen is (2.3.1.5.) te schrijven als:

$$M_{LL} \cdot \ddot{u}_L + M_{LC} \cdot \ddot{u}_C + K_{LL} \cdot u_L + K_{LC} \cdot u_C = 0 \qquad (2.3.1.6.)$$

Nu wordt verondersteld, dat in (2.3.1.6.) de term $M_{LL} \cdot \ddot{u}_L + M_{LC} \cdot \ddot{u}_C$ t.g.v. de traagheidskrachten te verwaarlozen klein is t.o.v. elk van de stijfheidstermen $K_{LL} \cdot u_L$ en $K_{LC} \cdot u_C$. Dan kan het stelsel differentiaalvergelijkingen (2.3.1.6.) benaderd worden door een stelsel lineaire algebraïsche vergelijkingen:

$$K_{LL} \cdot u_L + K_{LC} \cdot u_C = 0 \qquad (2.3.1.7.)$$

Zonder een wezenlijke beperking van de algemeenheid te introduceren mag men eisen, dat de matrix K_{LL} positief-definiet is. Dit zal het geval zijn dan en slechts dan als het systeem geen beweging als star lichaam kan uitvoeren, indien alle komponenten van u_C, u_P en u_S een voorgeschreven waarde (bijv. nul) wordt opgedwongen.

Door een geschikte keuze van de te elimineren vrijheidsgraden (de komponenten van u_L) kan hiervoor echter altijd gezorgd worden.

Als K_{LL} positief definiet (en dus regulier) is, kan u_L uit (2.3.1.7.) worden opgelost en worden uitgedrukt in u_C.

Dit geeft:

$$u_L = - K_{LL}^{-1} \cdot K_{LC} \cdot u_C = - T \cdot u_C \tag{2.3.1.8.}$$

Hierin is de transformatiematrix T gedefiniëerd als:

$$T = K_{LL}^{-1} \cdot K_{LC} \tag{2.3.1.9.}$$

Hiermee wordt:

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} u_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T \\ I \end{bmatrix} \cdot u_C = \tilde{T} \cdot u_C \tag{2.3.1.10.}$$

Noemt men:

$$\begin{bmatrix} M_{LL} & M_{LC} \\ M_{LC}^t & M_{CC} \end{bmatrix} = \tilde{M} \tag{2.3.1.11.}$$

en:

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LC} \\ K_{LC}^t & K_{CC} \end{bmatrix} = \tilde{K} \tag{2.3.1.12.}$$

Dan kan men voor (2.3.1.5.) ook schrijven:

$$\tilde{M} \cdot \ddot{\tilde{u}} + \tilde{K} \cdot \tilde{u} = \tilde{f} \tag{2.3.1.13.}$$

Met (2.3.1.10.) volgt dat de kinetische energie U_k, de elastische energie U_e en de virtuele arbeid der gegeneraliseerde krachten δA gegeven worden door:

$$U_k = \tfrac{1}{2} \cdot \dot{\tilde{u}}^t \cdot \tilde{M} \cdot \dot{\tilde{u}} = \tfrac{1}{2} \cdot \dot{u}_C^t \cdot \tilde{T}^t \cdot \tilde{M} \cdot \tilde{T} \cdot \dot{u}_C \tag{2.3.1.14.}$$

$$U_e = \tfrac{1}{2} \cdot \tilde{u}^t \cdot \tilde{K} \cdot \tilde{u} = \tfrac{1}{2} \cdot u_C^t \cdot \tilde{T}^t \cdot \tilde{K} \cdot \tilde{T} \cdot u_C \qquad (2.3.1.15.)$$

$$\delta A = \delta \tilde{u}^t \cdot \tilde{f} = \delta u_C^t \cdot \tilde{T}^t \cdot \tilde{f} \qquad (2.3.1.16.)$$

Met Lagrange (2.1.15.) volgt nu:

$$\tilde{T}^t \cdot \tilde{M} \cdot \tilde{T} \cdot \ddot{u}_C + \tilde{T}^t \cdot \tilde{K} \cdot \tilde{T} \cdot u_C = \tilde{T}^t \cdot \tilde{f} \qquad (2.3.1.17.)$$

Verder worden gedefinieërd:

$$M_{red} = \tilde{T}^t \cdot \tilde{M} \cdot \tilde{T} \qquad (2.3.1.18.)$$

$$K_{red} = \tilde{T}^t \cdot \tilde{K} \cdot \tilde{T} \qquad (2.3.1.19.)$$

en:

$$\tilde{f}_{red} = \tilde{T}^t \cdot \begin{bmatrix} f_L \\ f_C \end{bmatrix} \qquad (2.3.1.20.)$$

zodat (2.3.1.5.) m.b.v. (2.3.1.10.), $M_{LP} = 0$ en $K_{LP} = 0$ nu te schrijven is als:

$$M_{red} \cdot \ddot{u}_C + K_{red} \cdot u_C = \tilde{f}_{red} - M_{CP} \cdot \ddot{u}_P - K_{CP} \cdot u_P \qquad (2.3.1.21.)$$

Ook de veel nettere aanpak om tevens u_P en u_S in het reduktieproces "extern" te maken en pas hierna te splitsen in onbekende en bekende vrijheidsgraden, blijkt hetzelfde resultaat op te leveren bij bovengenoemde veronderstellingen. (Zie hiervoor appendix A.)

Uitschrijven van (2.3.1.18.)en (2.3.1.19.) met T gedefinieerd als in (2.3.1.9.) en $\tilde{T}$ als in (2.3.1.10.) geeft:

$$K_{red} = K_{CC} - K_{LC}^t \cdot T \qquad (2.3.1.22.)$$

$$M_{red} = M_{CC} + T^t \cdot M_{LL} \cdot T - \left\{ T^t \cdot M_{LC} + (T^t \cdot M_{LC})^t \right\} \qquad (2.3.1.23.)$$

In ASKA wordt K_{red} op de volgende manier bepaald[7,8]:

$$K_{red} = K_{CC} - T_{LC}^{t} \cdot T_{LC} \qquad (2.3.1.24.)$$

Hierin is:

$$T_{LC} = C_L^{-t} \cdot K_{LC} \qquad (2.3.1.25.)$$

$$T = C_L^{-1} \cdot T_{LC} \qquad (2.3.1.26.)$$

met C_L de Cholesky-faktor van K_{LL}:

$$K_{LL} = C_L^{t} \cdot C_L \qquad (2.3.1.27.)$$

(hierbij is C_L een "rechtsboven-driehoeksmatrix")

Om in een later stadium terug te komen op het oorspronkelijke systeem, moeten de resultaten teruggetransformeerd worden m.b.v. vergelijking (2.3.1.8.).

In hoeverre aan de veronderstellingen, die aan het reduktieproces ten grondslag liggen, voldaan is, zal in zeer belangrijke mate bepaald worden door de belasting op het beschouwde systeem, de massaverdeling en stijfheden van het systeem maar ook en vooral door de keuze van de te elimineren vrijheidsgraden. Anders gezegd: bij een systeem met een gegeven keuze van de vrijheidsgraden (vektor u), gegeven belasting (vektor f), gegeven massaverdeling (matrix M) en gegeven stijfheden (matrix K) moeten de te elimineren vrijheidsgraden zo gekozen worden, dat zo goed mogelijk aan de genoemde veronderstellingen voldaan wordt.

Hieruit kunnen enige globale regels voor de keuze van de te elimineren vrijheidsgraden worden afgeleid:

a. de keuze moet in ieder geval zodanig zijn, dat de matrix K_{LL} positief-definiet is.
b. als op een vrijheidsgraad een uitwendige, niet als verwaarloosbaar klein te beschouwen kracht werkt, mag die vrijheidsgraad niet geëlimineerd worden.

c. bij systemen met min of meer homogene massa- en stijfheidsverdeling moeten de te elimineren vrijheidsgraden gelijkmatig over het systeem gespreid worden.
d. bij systemen met min of meer homogene massaverdeling waarin delen voorkomen die relatief stijf (slap) zijn, kunnen relatief veel (weinig) te elimineren vrijheidsgraden gekozen worden in die stijve (slappe) delen.
e. bij systemen met min of meer homogene stijfheidsverdeling waarin delen voorkomen met relatief veel (weinig) massa kunnen relatief weinig (veel) te elimineren vrijheidsgraden gekozen worden in die delen met veel (weinig) massa.

De bovenstaande regels zijn niet erg konkreet en geven zeker geen eenduidig antwoord op de vraag hoeveel en welke vrijheidsgraden van een gegeven systeem geëlimineerd kunnen worden, zonder dat de nauwkeurigheid van de berekende resultaten te zeer terugloopt. Bij de huidige stand van zaken is voor een efficiënt gebruik van deze reduktiemethode enige ervaring met deze methode dan ook zeker nodig.
Met de nodige omzichtigheid gehanteerd, blijkt deze methode echter een machtig hulpmiddel te zijn om voor een redelijke prijs een betrouwbaar beeld te krijgen van het dynamische gedrag van een systeem met (zeer) veel vrijheidsgraden.
(Een nuttige wenk blijkt te zijn, de externe vrijheidsgraden zodanig over de konstruktie te verdelen, dat van het systeem met onderdrukte externe vrijheidsgraden de laagste eigenfrequentie zo hoog mogelijk is.)

Voor het geval, dat er niet statisch gereduceerd wordt, kan men in ASKA twee wegen bewandelen. Men kan alle vrijheidsgraden lokaal deklareren òf alle vrijheidsgraden extern deklareren. De berekeningswijze is identiek maar aan de relevante "books" (dit zijn bepaalde data-bestanden) worden andere namen toegekend, zodat men goed op moet letten welke "processors" men aan moet roepen om het beoogde doel te bereiken.

In ASKA worden de matrices M_{red} , K_{red} en T aangemaakt m.b.v. de processor CONDEN. Voordat deze processor echter aangeroepen mag worden moeten wel de matrices M_{LL}, M_{LC}, M_{CC}, K_{LL}, K_{LC} en K_{CC} bestaan.

2.3.2. Beweging als star lichaam.

Het begrip "beweging als star lichaam" moet zeer ruim geïnterpreteerd worden: iedere door de geometrie en de ondersteuning toegelaten beweging, waarbij géén elastische energie in het systeem wordt opgehoopt, is een beweging als star lichaam. Anders gezegd: een beweging $u \neq 0$ van het systeem is een beweging als star lichaam dan en slechts dan als $U_e = \frac{1}{2} . u^t . K . u = 0$ (dus K singulier). Indien het systeem na eliminatie der lokale vrijheidsgraden één of meer bewegingen als star lichaam uit kan voeren, wordt de stijfheidsmatrix singulier, waardoor er problemen optreden bij het oplossen van het stelsel gekoppelde lineaire tweede orde differentiaalvergelijkingen (in het bijzonder bij het eigenwaardeprobleem waar ω's gelijk aan nul worden). Daarom moet de beweging als star lichaam worden geëlimineerd. Daartoe wordt het stelsel d.v.'s (2.3.1.21.):

$$M_{red} . \ddot{u}_C + K_{red} . u_C = f_{red} \qquad (2.3.2.1.)$$

met:

$$f_{red} = \tilde{f}_{red} - M_{CP} . \ddot{u}_P - K_{CP} . u_P \qquad (2.3.2.2.)$$

met semi-positief-definiete stijfheidsmatrix K_{red} gesplitst in twee stelsels differentiaalvergelijkingen. Een van deze beide stelsels zal blijken te voldoen aan de eis dat de stijfheidsmatrix hiervan positief-definiet is en kan daarom op de in hoofdstuk 2.3.3. beschreven manier worden opgelost, terwijl de oplossing van het tweede stelsel bepaald kan worden op de in dit hoofdstuk geschetste manier.
De kern van de hier te bespreken werkwijze wordt gevormd door een splitsing van de beweging van het systeem in een deel, dat de beweging als star lichaam representeert en een

deel, dat de vervormingen van het systeem representeert. Hierbij heeft men nog het grote voordeel, dat kleine elastische bewegingen en grote bewegingen als star lichaam gescheiden worden, waardoor de elastische beweging nauwkeuriger bepaald kan worden.
Veronderstelt men, dat het systeem n_R onafhankelijke bewegingen als star lichaam kan uitvoeren, dan zijn er n_R vrijheidsgraden (n_R onafhankelijke komponenten van de verplaatsingsvektor u_C of een lineaire kombinatie van deze komponenten) te kiezen, waarmee die onafhankelijke bewegingsmogelijkheden als star lichaam kunnen worden beschreven.
De gebruiker legt nu op een of andere manier n_R vektoren $\approx{u}_R(1)$, ..., $\approx{u}_R(n_R)$ vast. Deze zijn onderling onafhankelijk en (op de lengte na) eenduidig bepaald. Iedere andere beweging als star lichaam is dan een lineaire kombinatie van deze n_R vektoren.(vektor $\tilde{u}_R$)
Stel:

$$\tilde{X}_R = \left[\approx{u}_R(1) \quad \approx{u}_R(2) \quad \approx{u}_R(3) \quad \cdots\cdots \quad \approx{u}_R(n_R)\right] \qquad (2.3.2.3.)$$

$$\alpha_R = \left[\alpha(1) \quad \alpha(2) \quad \alpha(3) \quad \cdots\cdots \quad \alpha(n_R)\right] \qquad (2.3.2.4.)$$

dan geldt:

$$\tilde{u}_R = \tilde{X}_R \cdot \alpha_R \qquad (2.3.2.5.)$$

De matrix $\tilde{X}_R$ heeft rang n_R en is dus te schrijven als:

$$\tilde{X}_R = X_R \cdot P_R \qquad (2.3.2.6.)$$

Hierin is $\tilde{X}_R$ een niet orthogonale matrix met dimensie (n_C, n_R), X_R een orthogonale matrix met dimensie (n_C, n_R) en P_R een vierkante reguliere matrix met dimensie (n_R, n_R).
Met (2.3.2.6.) is nu te schrijven:

$$\tilde{u}_R = X_R \cdot P_R \cdot \alpha_R = X_R \cdot u_R \qquad (2.3.2.7.)$$

Omdat X_R kolomsgewijze orthogonaal is, geldt dus:

$$X_R^t \cdot X_R = I \qquad (2.3.2.8.)$$

In (2.3.2.7.) is u_R de getransformeerde vektor met vrijheidsgraden die de bewegingen als star lichaam vastleggen. De matrix X_R heeft als eigenschap:

$$K_{red} \cdot X_R = 0 \qquad (2.3.2.9.)$$

Het bewijs van deze eigenschap is eenvoudig.
Laat het systeem een éénparige beweging als star lichaam uitvoeren, dan geldt: $u_C = \tilde{u}_R = X_R \cdot u_R$; $\ddot{u}_C = 0$, terwijl de krachtsvektor f gelijk is aan nul, omdat voor deze beweging zonder vervormingen geen uitwendige belasting nodig is.
Uit $M_{red} \cdot \ddot{u}_C + K_{red} \cdot u_C = f_{red}$ volgt dan echter $K_{red} \cdot u_C = K_{red} \cdot X_R \cdot u_R = 0$ en omdat deze relatie moet gelden voor iedere willekeurige éénparige beweging als star lichaam (dus voor iedere willekeurige éénparig met t veranderende vektor u_R) moet $K_{red} \cdot X_R$ een nulmatrix zijn.

De werkelijke verplaatsingsvektor $u_C = u_C(t)$ van het systeem zal in het algemeen verschillen van de vektor $\tilde{u}_R$ die immers alleen de verplaatsingen t.g.v. de beweging als star lichaam bevat.

Het uitgangspunt in ASKA is dat u_C in totaal n_C onderling onafhankelijke vrijheidsgraden heeft, zodat men kan schrijven:

$$u_C = S \cdot \tilde{u}_C \qquad (2.3.2.10.)$$

Hierin hebben zowel u_C als $\tilde{u}_C$, n_C onafhankelijke komponenten en moet S dus een vierkante, reguliere matrix zijn.
Kiest men nu:

$$\tilde{u}_C = \begin{bmatrix} u_E \\ u_R \end{bmatrix} \qquad (2.3.2.11.)$$

waarbij u_R; n_R komponenten en u_E; $n_C - n_R = n_E$ komponenten heeft.

Men definieert:

$$S = \left[S_E \,\vdots\, X_R\right] \qquad (2.3.2.12.)$$

met vooralsnog onbekende matrix S_E en vektor u_E. Dan geldt:

$$u_C = S_E \cdot u_E + X_R \cdot u_R = \tilde{u}_E + \tilde{u}_R \qquad (2.3.2.13.)$$

met:

$$\tilde{u}_E = S_E \cdot u_E \qquad (2.3.2.14.)$$

S_E en u_E zijn in principe nog vrij te kiezen mits S_E de rang n_E heeft. Dan is nl. $S_E^t \cdot S_E$ een vierkante (n_E, n_E) matrix, die regulier is.
Uit (2.3.2.13.) volgt dan eenvoudig:

$$u_E = (S_E^t \cdot S_E)^{-1} \cdot S_E^t \cdot (u_C - \tilde{u}_R) \qquad (2.3.2.15.)$$

Uit de bewegingsvergelijking (2.3.2.1.) en de vergelijkingen (2.3.2.10.) t/m (2.3.2.12.) volgt nu na voorvermenigvuldiging met S^t (reguliere vierkante matrix met orde n):

$$S^t \cdot M_{red} \cdot S \cdot \ddot{\tilde{u}}_C + S^t \cdot K_{red} \cdot S \cdot \tilde{u}_C = S^t \cdot f_{red} \qquad (2.3.2.16.)$$

Omdat de matrix S regulier is verandert hierdoor de oplossing $\tilde{u}_C$ niet.
Vergelijking (2.3.2.16.) uitgeschreven levert:

$$\begin{bmatrix} S_E^t \cdot M_{red} \cdot S_E & S_E^t \cdot M_{red} \cdot X_R \\ X_R^t \cdot M_{red} \cdot S_E & X_E^t \cdot M_{red} \cdot X_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_E \\ \ddot{u}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_E^t \cdot K_{red} \cdot S_E & S_E^t \cdot K_{red} \cdot X_R \\ X_R^t \cdot K_{red} \cdot S_E & X_R^t \cdot K_{red} \cdot X_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_E \\ u_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_E^t \\ X_R^t \end{bmatrix} \cdot f_{red} \qquad (2.3.2.17.)$$

Als er een S_E gevonden kan worden (en dat kan) zodat:

$$S_E^t \cdot M_{red} \cdot X_R = 0 \qquad (2.3.2.18.)$$

dan is vergelijking (2.3.2.17.) met gebruikmaking van (2.3.2.9.) te schrijven als:

$$\begin{bmatrix} S_E^t \cdot M_{red} \cdot S_E & 0 \\ 0 & X_R^t \cdot M_{red} \cdot X_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_E \\ \ddot{u}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_E^t \cdot K_{red} \cdot S_E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_E \\ u_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_E^t \\ X_R^t \end{bmatrix} \cdot f_{red} = \begin{bmatrix} f_E \\ f_R \end{bmatrix} \quad (2.3.2.19.)$$

<u>of</u>:

$$\begin{bmatrix} M_{EE} & 0 \\ 0 & M_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_E \\ \ddot{u}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{EE} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_E \\ u_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_E \\ f_R \end{bmatrix} \quad (2.3.2.20.)$$

<u>met</u>:

$$M_{EE} = S_E^t \cdot M_{red} \cdot S_E \quad (2.3.2.21.)$$

$$M_{RR} = X_R^t \cdot M_{red} \cdot X_R \quad (2.3.2.22.)$$

$$K_{EE} = S_E^t \cdot K_{red} \cdot S_E \quad (2.3.2.23.)$$

$$f_E = S_E^t \cdot f_{red} \quad (2.3.2.24.)$$

$$f_R = X_R^t \cdot f_{red} \quad (2.3.2.25.)$$

Bij de beweging als star lichaam speelt volgens vergelijking (2.3.2.20.) alleen de massa een rol, hetgeen overeenkomt met de werkelijkheid.

Tot nu toe is geëist, dat S_E voldoet aan devolgende voorwaarden:

<u>a</u>. S_E matrix van orde (n_C, n_E) met rang n_E.

<u>b</u>. $S_E^t \cdot M_{red} \cdot X_R = 0$.

Van de $n_C * n_E$ komponenten van S_E zijn er door voorwaarde <u>a</u> n_E afhankelijk geworden. Door voorwaarde <u>b</u> $n_E * n_R$. Hierdoor blijven er nog $n_C * n_E - n_E - n_E * n_R$ onafhankelijke komponenten over. Aangezien $n_C = n_E + n_R$ zijn dit $n_E^2 - n_E$ onafhankelijke komponenten.

Hierdoor kan aan S_E nog een extra eis worden opgelegd nl.:

$$S_E^t \cdot S_E = I \quad (2.3.2.26.)$$

Hierdoor worden nog $\frac{1}{2} * n_E * (n_E - 1)$ komponenten afhankelijk.

Ook aan eis (2.3.2.26.) kan nog voldaan worden indien $n_E \geqslant 1$, wat natuurlijk voor elk elastisch systeem geldt. Voor het geval dat $n_E > 1$, is hiermee S_E nog niet geheel bepaald, maar kan er met behulp van de Householdermethode een S_E bepaald worden[8].

Om uit vergelijking (2.3.2.20.) op te lossen:

$$M_{RR} \cdot \ddot{u}_R = X_R^t \cdot f_{red} \qquad (2.3.2.27.)$$

wordt in ASKA de matrix M_{RR} in diagonaalvorm gebracht, zodat een ontkoppeld stelsel differentiaalvergelijkingen ontstaat. Dit gebeurt door de orthonormale eigenvektoren Q_R van M_{RR} te bepalen[8].
Stelt men λ_i , q_i eigenwaarde resp. eigenvektor behorende bij het eigenwaardeprobleem

$$(M_{RR} - \lambda_i . I).q_i = 0 \qquad (2.3.2.28.)$$

met M_{RR} een symmetrische positief-definiete matrix, dan is:

$$Q_R = \left[q_1 \quad q_2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad q_{n_R} \right] \qquad (2.3.2.29.)$$

en geldt:

$$Q_R^t \cdot M_{red} \cdot Q_R = \Lambda_R \qquad (2.3.2.30.)$$

Hierbij is Λ_R een diagonaalmatrix met als komponenten op de diagonaal λ_1, λ_2, ..., λ_{n_R}.

Waarom het in ASKA zo omslachtig gebeurt, is niet erg duidelijk, als men bedenkt, dat indien M_{RR} positief-definiet is, dit met Choleski geschreven kan worden als:

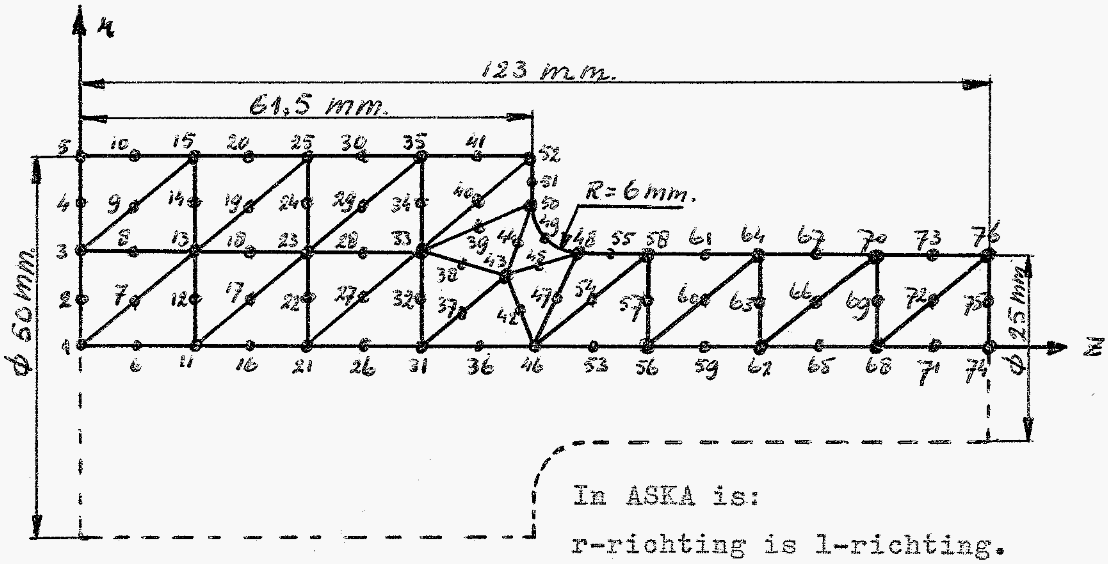
$$M_{RR} = L_R^t \cdot L_R \qquad (2.3.2.31.)$$

met:

$$\tilde{\eta}_R = L_R \cdot u_R \qquad (2.3.2.32.)$$

3. DOORREKENEN VAN DE MECHANISCHE TRANSFORMATOR MET ASKA.

3.1. INLEIDING.



In ASKA is:
r-richting is 1-richting.
z-richting is 2-richting.

Figuur 3.1.1.

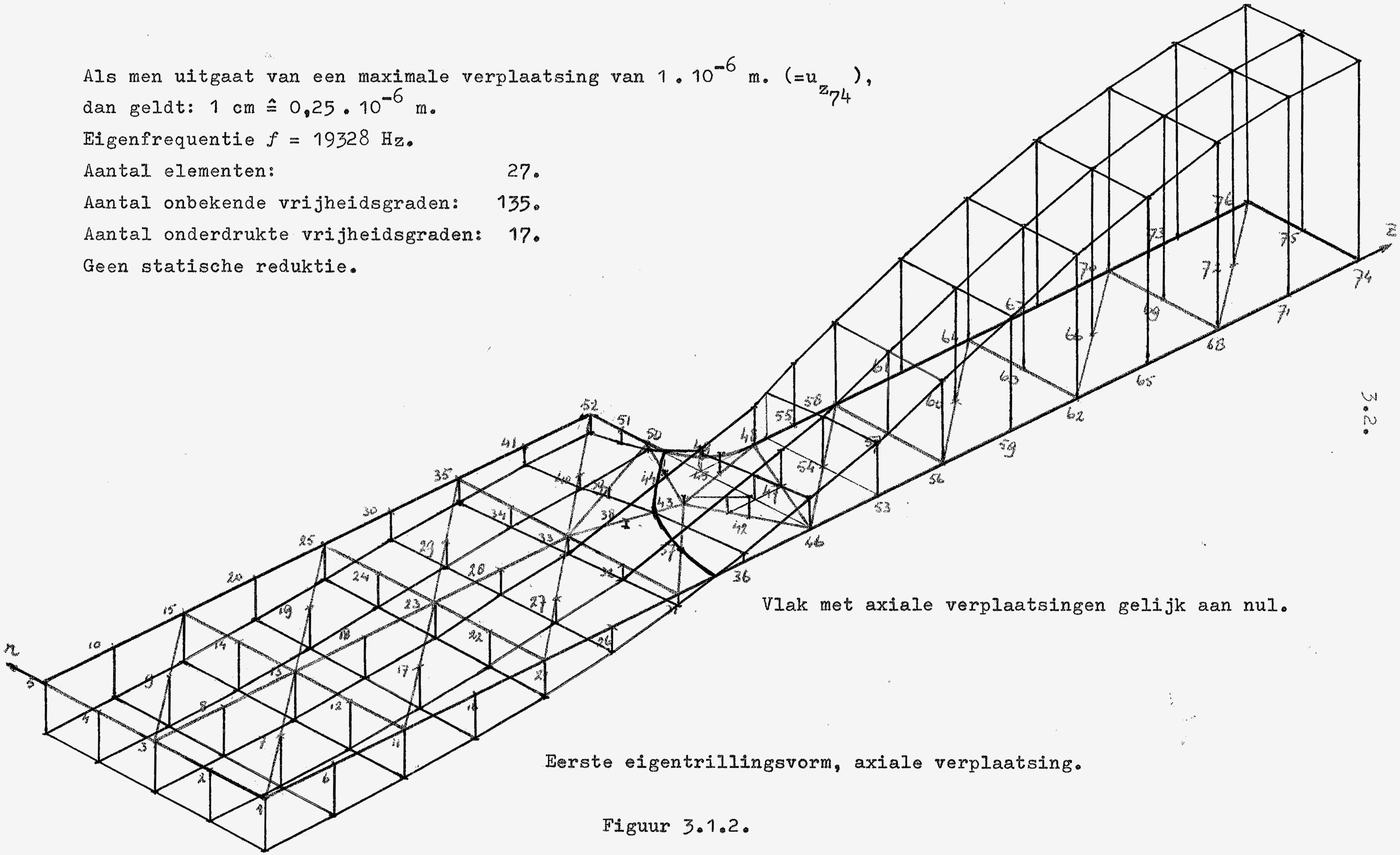
De mechanische transformator wordt in TRIAX6 elementen verdeeld volgens figuur 3.1.1.. Deze verdeling is tamelijk grof, maar zodanig dat zeker goede benaderingen verwacht mogen worden voor de laagste eigentrillingsvormen van het vrije én van het ingeklemde systeem, wat met deze verdeling en de eigenschappen van het TRIAX6 element aannemelijk is. Aangezien de laagste eigenfrequentie bekend moet zijn omdat dat de frequentie is waarmee het beginvlak wordt aangestoten, zal deze eerst worden bepaald van het geheel vrije systeem (dus nergens krachten voorgeschreven en ook geen voorgeschreven axiale verplaatsingen bij $z = 0$ of $z = L$).
Hiertoe worden alle vrijheidsgraden lokaal gedeklareerd, behalve de vrijheidsgraden die liggen op $r = 0$ in radiale richting. (Er wordt dus geen statische reduktie toegepast.) Gezien het feit dat het materiaal op de as zijn samenhang niet verliest, moeten deze punten in r-richting op hun plaats blijven, zodat deze vrijheidsgraden voorgeschreven en gelijk aan nul (onderdrukt) gedeklareerd worden.
Bij dit probleem is er echter nog een bewegingsmogelijkheid als star lichaam in de z-richting. Deze bewegingsmogelijkheid als star lichaam wordt geëlimineerd op de in hoofdstuk 2.3.2. beschreven manier.

Als men uitgaat van een maximale verplaatsing van $1 \cdot 10^{-6}$ m. ($=u_{z_{74}}$),
dan geldt: 1 cm $\hat{=}$ $0{,}25 \cdot 10^{-6}$ m.

Eigenfrequentie f = 19328 Hz.

Aantal elementen:	27.
Aantal onbekende vrijheidsgraden:	135.
Aantal onderdrukte vrijheidsgraden:	17.

Geen statische reduktie.

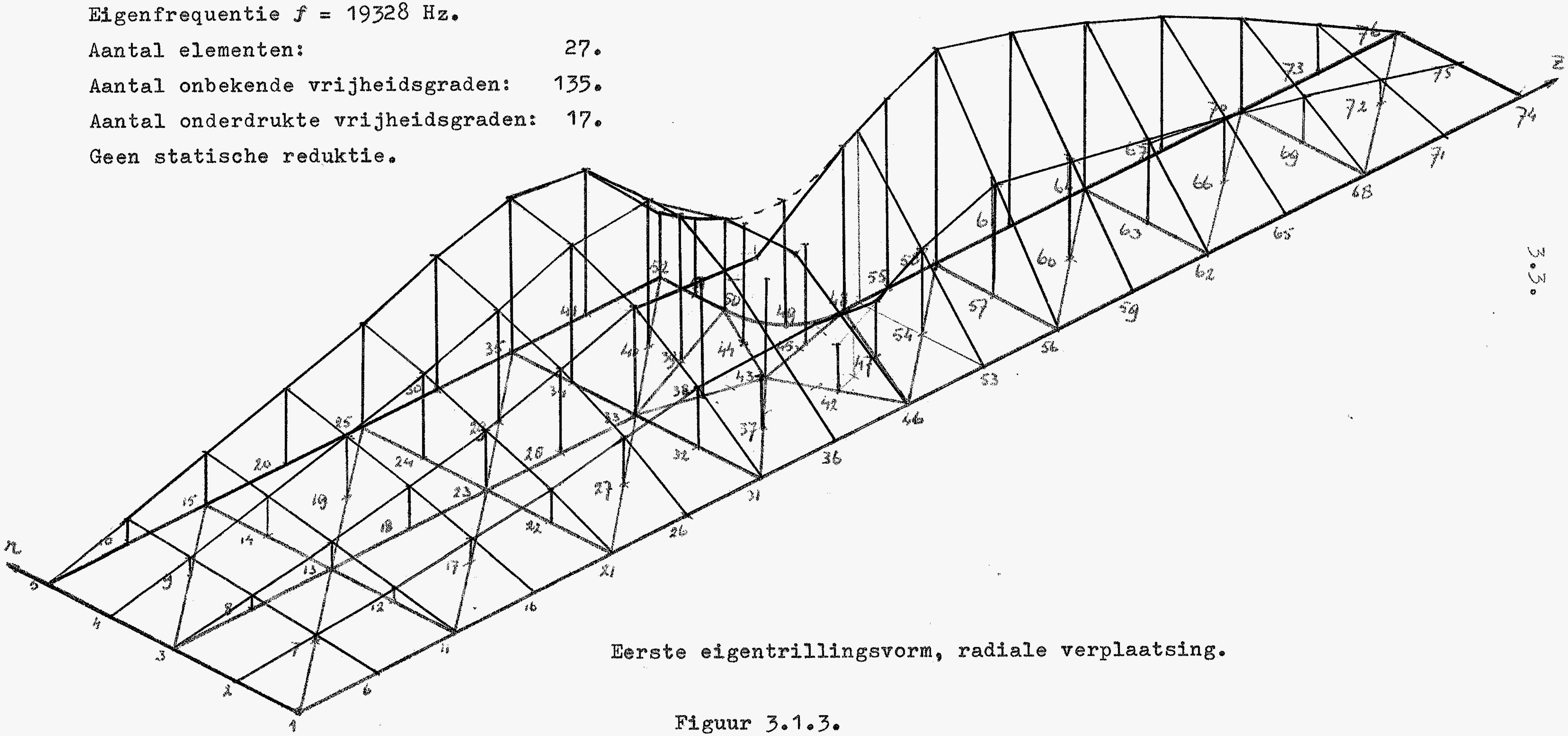


Vlak met axiale verplaatsingen gelijk aan nul.

Eerste eigentrillingsvorm, axiale verplaatsing.

Figuur 3.1.2.

Als men uitgaat van een maximale verplaatsing van $1 \cdot 10^{-6}$ m. (= $u_{z_{74}}$),
dan geldt: 1cm $\hat{=}$ $0{,}025 \cdot 10^{-6}$ m.
Positieve waarden impliceren negatieve verplaatsingen.
Eigenfrequentie f = 19328 Hz.
Aantal elementen: 27.
Aantal onbekende vrijheidsgraden: 135.
Aantal onderdrukte vrijheidsgraden: 17.
Geen statische reduktie.



Eerste eigentrillingsvorm, radiale verplaatsing.

Figuur 3.1.3.

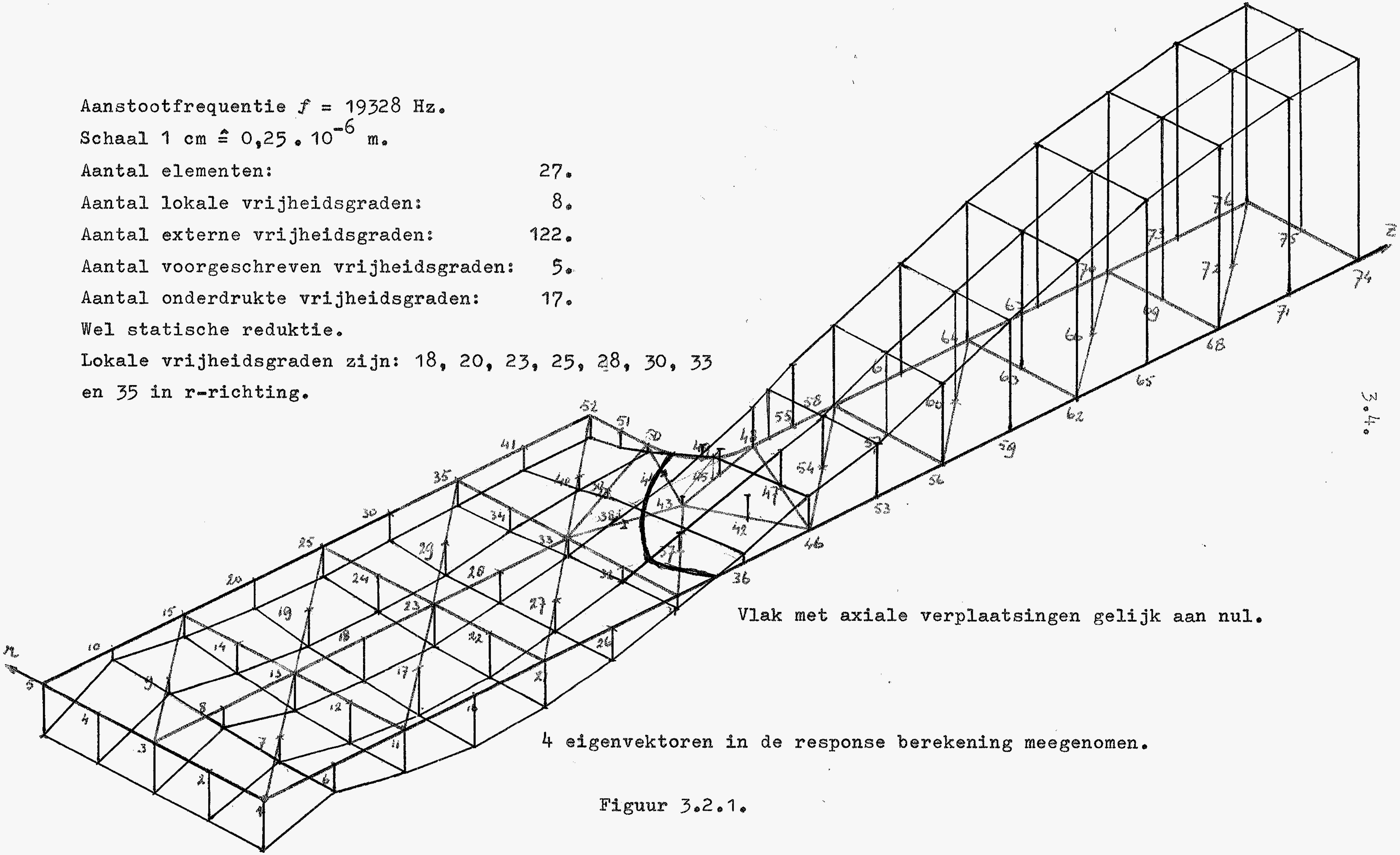
Aanstootfrequentie f = 19328 Hz.

Schaal 1 cm $\hat{=}$ 0,25 . 10^{-6} m.

Aantal elementen:	27.
Aantal lokale vrijheidsgraden:	8.
Aantal externe vrijheidsgraden:	122.
Aantal voorgeschreven vrijheidsgraden:	5.
Aantal onderdrukte vrijheidsgraden:	17.

Wel statische reduktie.

Lokale vrijheidsgraden zijn: 18, 20, 23, 25, 28, 30, 33 en 35 in r-richting.



Vlak met axiale verplaatsingen gelijk aan nul.

4 eigenvektoren in de response berekening meegenomen.

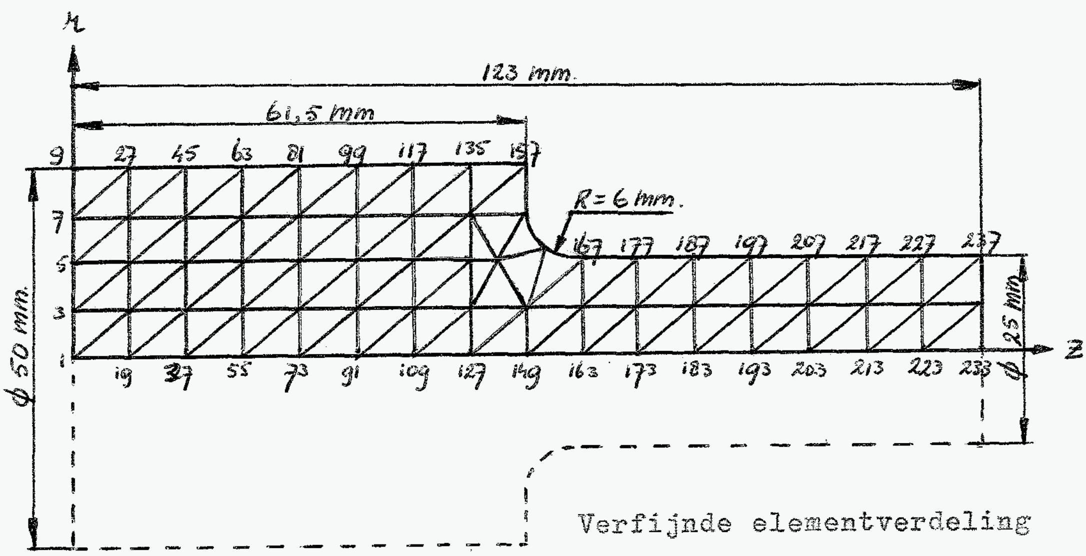
Figuur 3.2.1.

Het resultaat van deze berekening aan het probleem van figuur 3.1.1. is: $\omega_1 = 1.2144 \cdot 10^5$ rad/sec. of de frequentie $f = 19328$ Hz. met als axiale en radiale komponenten van de eerste eigentrillingsvorm figuur 3.1.2. resp. 3.1.3..

3.2. DE RESPONSEBEREKENING.

Nu van de voorgeschreven verplaatsing de frequentie bekend is, kan het uiteindelijke probleem worden opgelost. Bij dit probleem werd een klein aantal vrijheidsgraden geëlimineerd (statische reduktie) en voor de responseberekening werden slechts vier eigenwaarden en hun bijbehorende eigenvektoren meegenomen (dynamische reduktie). De resultaten voor de verplaatsingen in axiale richting zijn in figuur 3.2.1. te zien. Ten opzichte van figuur 3.1.2. zijn de afwijkingen behoorlijk groot, vooral in de buurt van z = 0.
Deze afwijkingen komen hoofdzakelijk voort van het dynamische reduktieproces. De invloed van het aantal meegenomen eigenvektoren in de responseberekening wordt nu nader onderzocht aan een probleem met een wat fijnere elementverdeling.

3.3. DE INVLOED VAN HET AANTAL MEEGENOMEN EIGENVEKTOREN.



Figuur 3.3.1.

Van het systeem volgens figuur 3.3.1. wordt nu de responseberekening uitgevoerd door respectievelijk 1, 8 en 14 eigenwaarden mee te nemen. Om echter het aantal vrijheidsgraden te beperken is er statisch gekondenseerd en wel zodanig, dat de vrijheidsgraden in de meeste tussenpunten gereduceerd zijn. De resultaten hiervan zijn weergegeven in de figuren 3.3.2. t/m 3.3.4..
Deze resultaten komen slecht overeen met de te verwachten resultaten en wel slechter naarmate men korter bij de plaats komt waar de verplaatsingen voorgeschreven zijn.
Uit de figuren 3.3.5. t/m 3.3.8. blijkt dat door toename van 8 naar 14 mee te nemen eigenvektoren, de absolute en relatieve fouten nabij het aangestoten voorvlak, niet noemenswaardig verkleind worden. Dit verschijnsel is voor een ééndimensionaal probleem wat nader onderzocht. (Zie appendix C.)
Hieruit volgen echter geen vuistregels voor het aantal mee te nemen eigenwaarden en eigenvektoren, zodat het zinvol is, dat dit verschijnsel eens wat verder uitgewerkt wordt. Hiervoor is echter in het kader van deze opdracht geen ruimte meer.
Verder kan men door het vergelijken van de figuren 3.2.1. en 3.3.4. konkluderen, dat het gesignaleerde verschijnsel niet toe te schrijven is aan een te grove elementverdeling. Verfijning van de elementen geeft nl. geen verbetering van het verplaatsingsveld.

3.4. EERSTE EIGENVEKTOR ALS VERPLAATSINGSVELD.

Om het oorspronkelijke probleem nu toch tot een oplossing te brengen is het in dit geval mogelijk, om de eerste eigentrillingsvorm van het vrijtrillende systeem om te zetten in een verplaatsingsveld en uitgaande van dit verplaatsingsveld langs statische weg de spanningen te bepalen. Hiertoe wordt uitgegaan van de verfijnde verdeling en wordt een groot gedeelte van de vrijheidsgraden in de tussenpunten geëlimineerd m.b.v. statische reduktie. Daarna wordt van het vrije systeem de beweging als star lichaam geëlimineerd, één eigenwaarde bepaald met de bijbehorende eigenvektor. De gesplitste beweging wordt teruggetransformeerd naar het oorspronkelijke systeem en deze eigenvektor wordt omgezet in een verplaatsings-

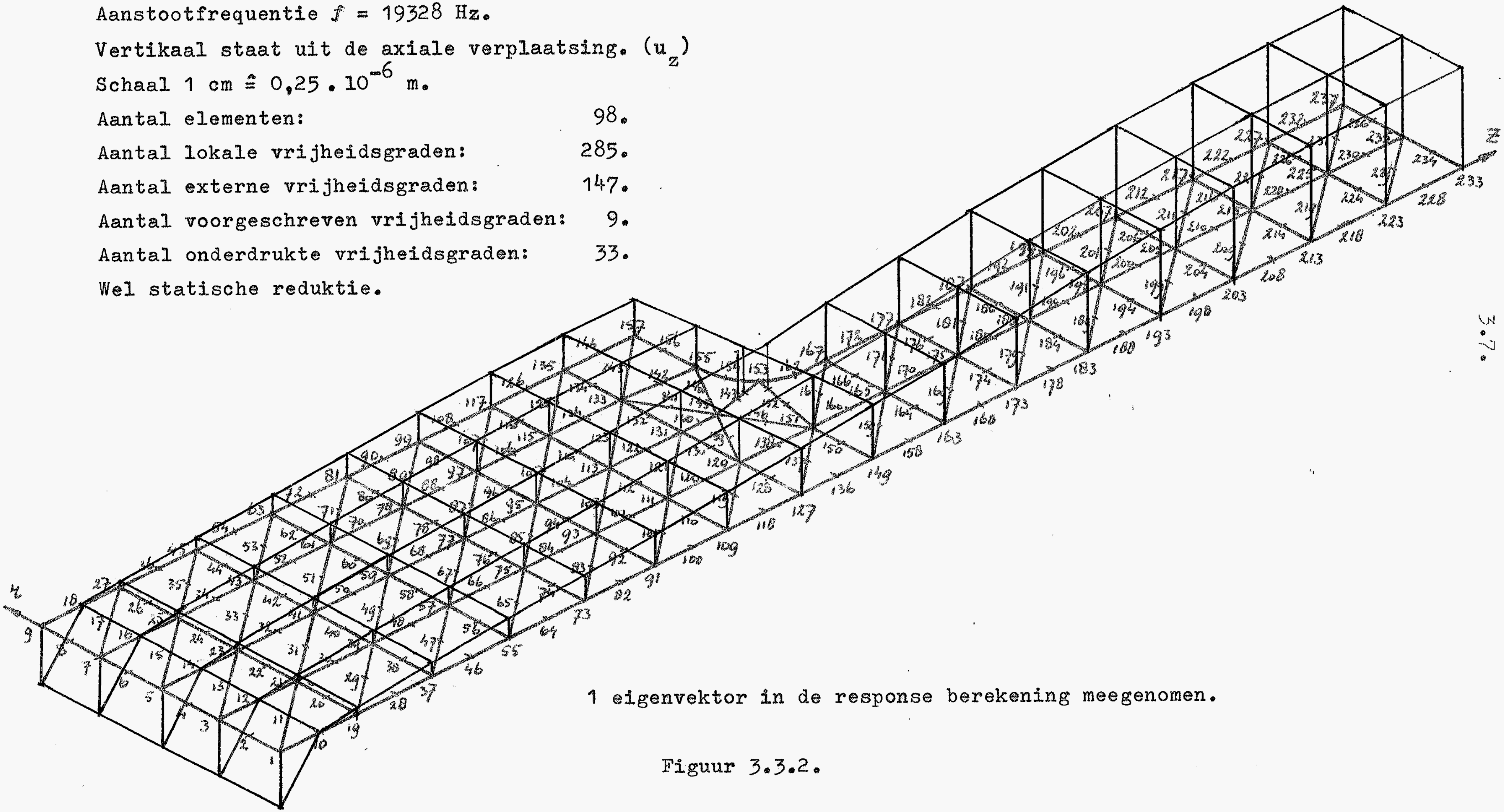
Aanstootfrequentie f = 19328 Hz.

Vertikaal staat uit de axiale verplaatsing. (u_z)

Schaal 1 cm $\hat{=}$ $0{,}25 \cdot 10^{-6}$ m.

Aantal elementen:	98.
Aantal lokale vrijheidsgraden:	285.
Aantal externe vrijheidsgraden:	147.
Aantal voorgeschreven vrijheidsgraden:	9.
Aantal onderdrukte vrijheidsgraden:	33.

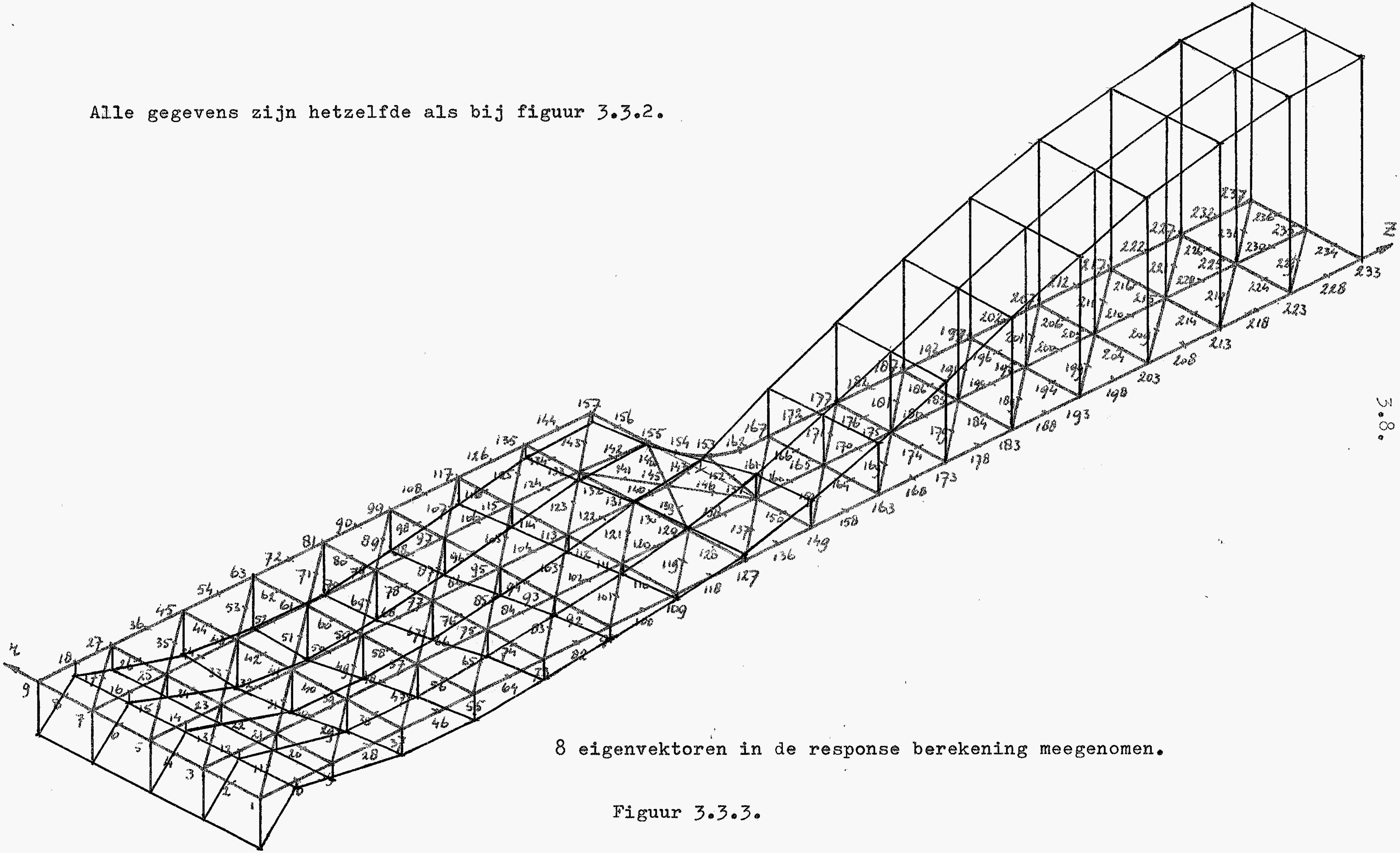
Wel statische reduktie.



1 eigenvektor in de response berekening meegenomen.

Figuur 3.3.2.

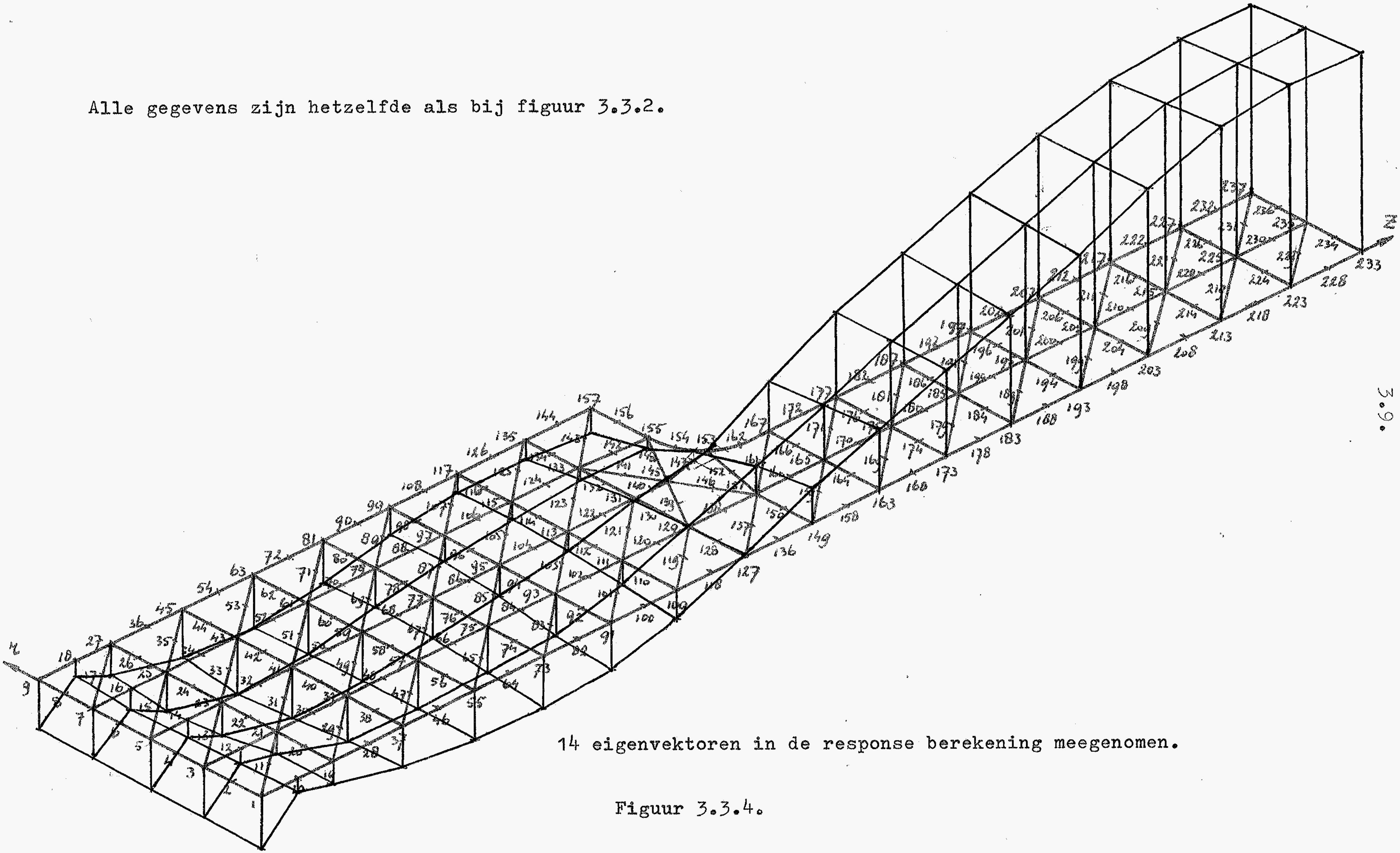
Alle gegevens zijn hetzelfde als bij figuur 3.3.2.



8 eigenvektoren in de response berekening meegenomen.

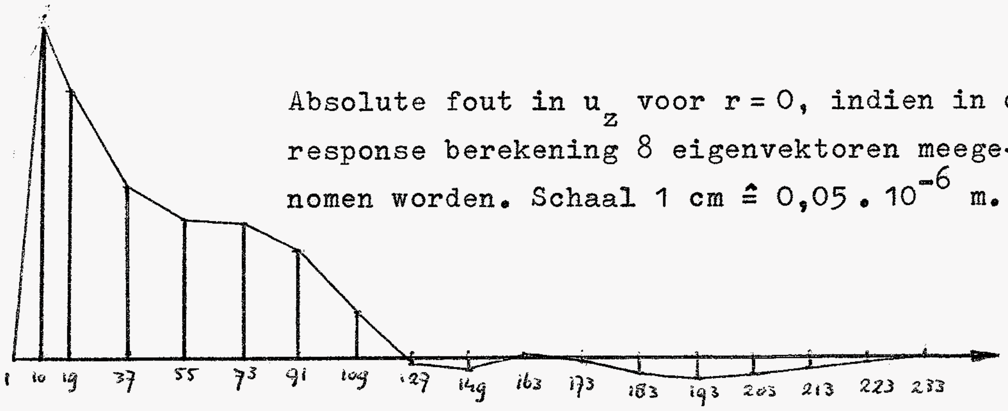
Figuur 3.3.3.

Alle gegevens zijn hetzelfde als bij figuur 3.3.2.



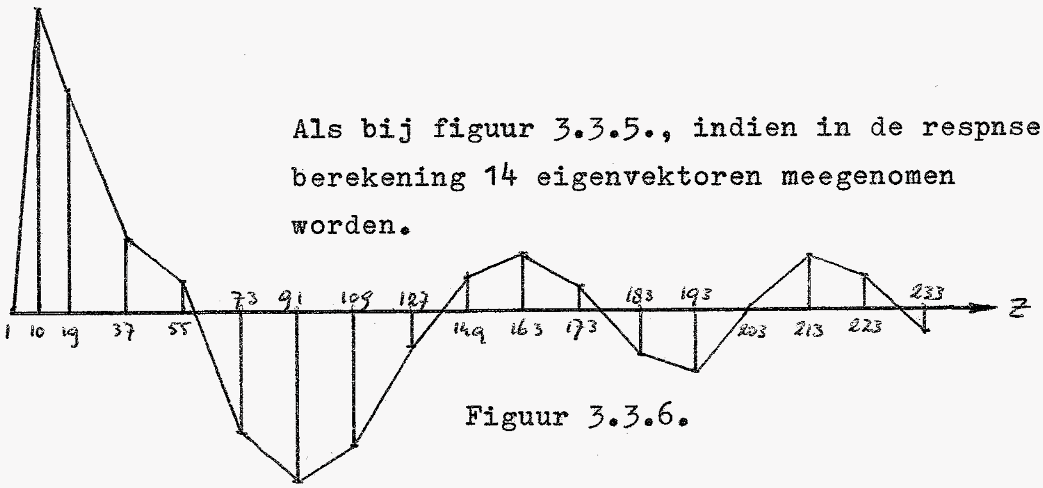
14 eigenvektoren in de response berekening meegenomen.

Figuur 3.3.4.



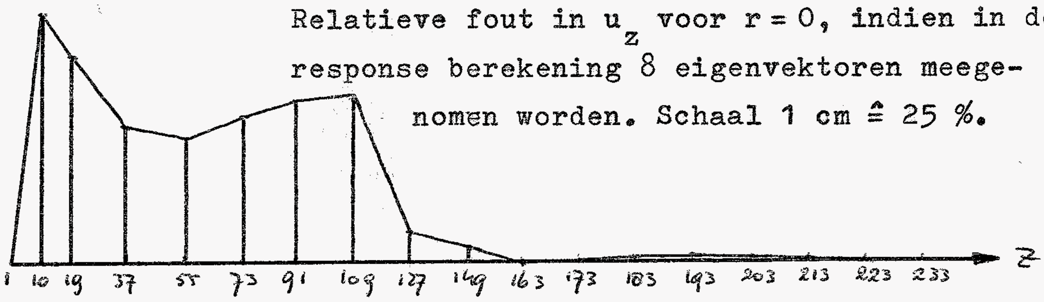
Absolute fout in u_z voor $r = 0$, indien in de response berekening 8 eigenvektoren meegenomen worden. Schaal 1 cm $\hat{=}$ 0,05 . 10^{-6} m.

Figuur 3.3.5.



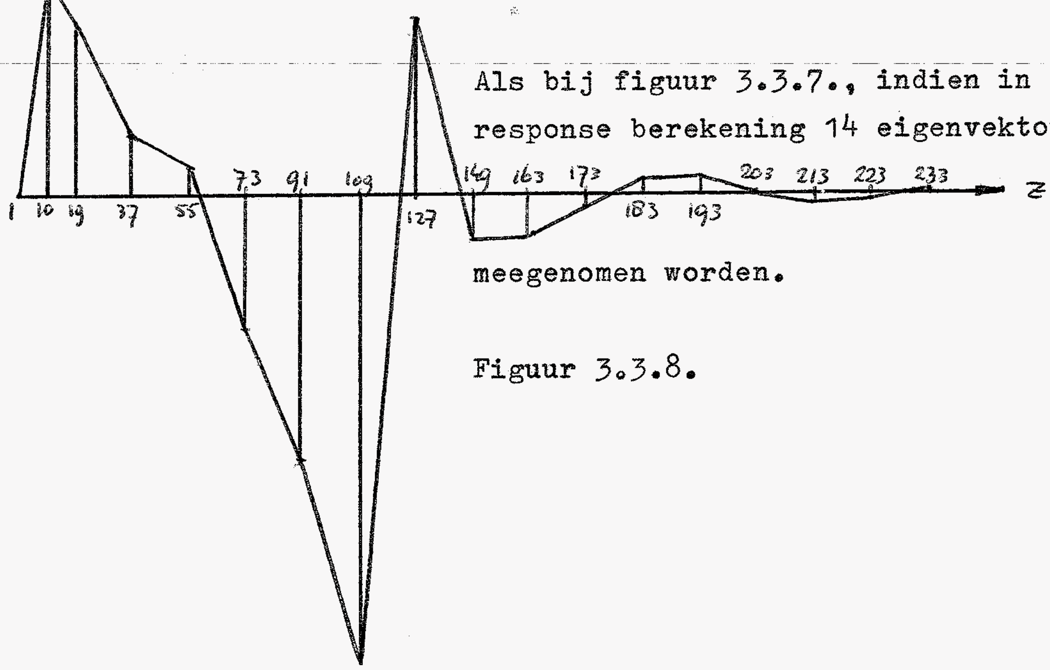
Als bij figuur 3.3.5., indien in de respnse berekening 14 eigenvektoren meegenomen worden.

Figuur 3.3.6.



Relatieve fout in u_z voor $r = 0$, indien in de response berekening 8 eigenvektoren meegenomen worden. Schaal 1 cm $\hat{=}$ 25 %.

Figuur 3.3.7.



Als bij figuur 3.3.7., indien in de response berekening 14 eigenvektoren meegenomen worden.

Figuur 3.3.8.

Opm.: Absolute fout is hier gedefinieerd als: u(vrij trillende systeem) - u(response berekening).

Relatieve fout = $\dfrac{\text{Absolute fout}}{\text{u(vrij trillend systeem)}}$.

Verplaatsingsveld direkt afgeleid uit de laagste eigentrillingsvorm van het vrij trillende systeem.

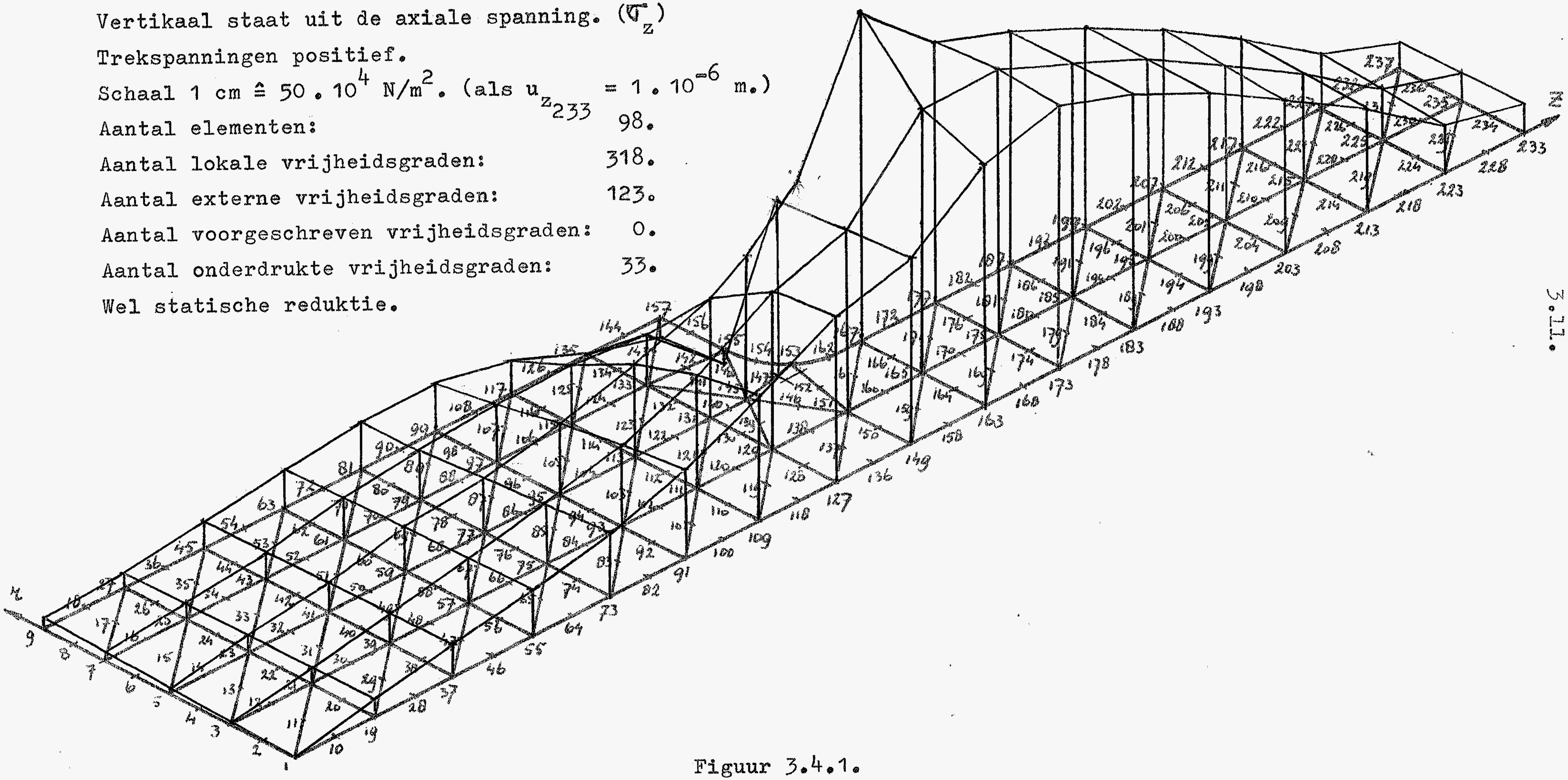
Vertikaal staat uit de axiale spanning. (σ_z)

Trekspanningen positief.

Schaal 1 cm $\hat{=}$ 50 . 10^4 N/m^2. (als $u_{z_{233}}$ = 1 . 10^{-6} m.)

Aantal elementen:	98.
Aantal lokale vrijheidsgraden:	318.
Aantal externe vrijheidsgraden:	123.
Aantal voorgeschreven vrijheidsgraden:	0.
Aantal onderdrukte vrijheidsgraden:	33.

Wel statische reduktie.



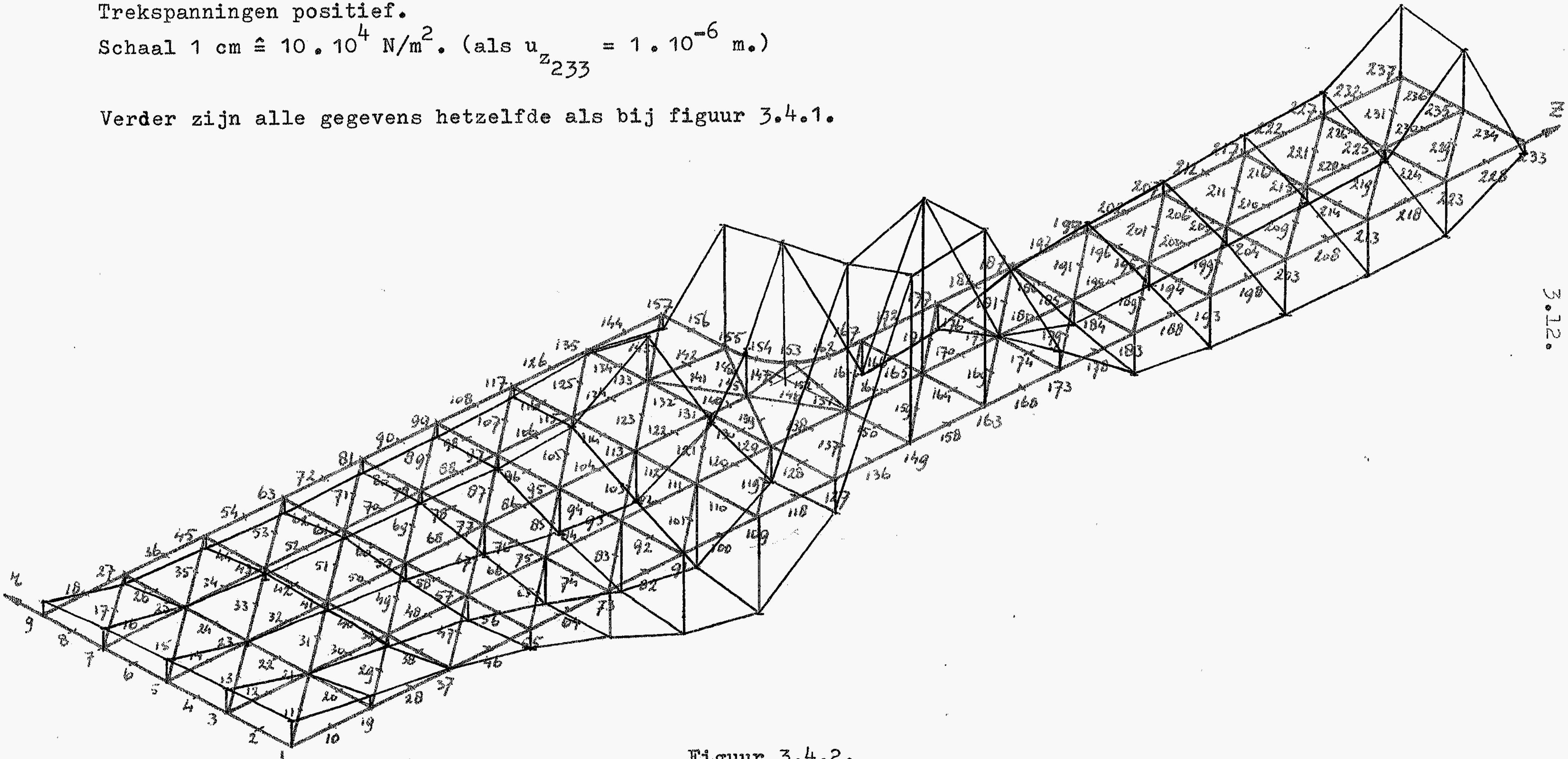
Figuur 3.4.1.

Vertikaal staat uit de radiale spanning. (σ_r)

Trekspanningen positief.

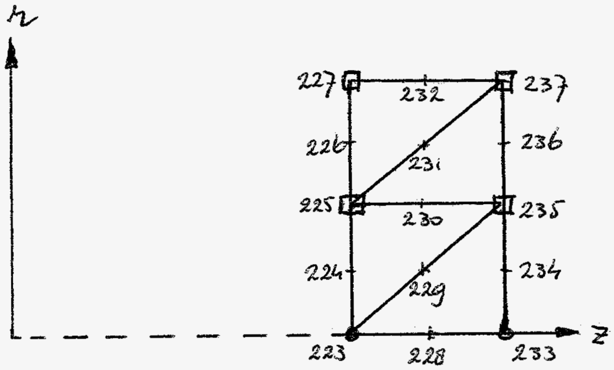
Schaal 1 cm $\hat{=}$ 10 . 10^4 N/m^2. (als $u_{z_{233}} = 1 \cdot 10^{-6}$ m.)

Verder zijn alle gegevens hetzelfde als bij figuur 3.4.1.



Figuur 3.4.2.

veld. De in absolute waarde grootste verplaatsing wordt hierbij genormeerd op één. De m.b.v. de statische reduktie geëlimineerde verplaatsingen worden bepaald en uitgaande van dit totale verplaatsingsveld worden de spanningen per element en de gemiddelde spanningen in de knooppunten berekend. De resultaten van de spanningen in de knooppunten zijn uitgezet in figuur 3.4.1. en 3.4.2.. Een in het oog springende afwijking is dat de spanningen in axiale richting voor het eindvlak van nul verschillen. Dit is te verklaren uit het feit, dat op de punten 228 t/m 232 statische reduktie toegepast is en tengevolge hiervan is de verplaatsing van deze punten een lineaire kombinatie van andere (niet gekondenseerde punten) uit de omgeving.



□ = externe vrijheidsgraden in r en z-richting.
● = externe vrijheidsgraden in z-richting.

Figuur 3.4.3.

Bekijkt men bijv. punt 228, dan zou men verwachten dat de verplaatsing in z-richting (0,990647) groter is dan het gemiddelde van de verplaatsingen in z-richting van de punten 223 en 233 (0,990647). Uit de berekening blijkt deze echter kleiner te zijn. De verschillen zijn relatief klein. Om tot de spanningen te komen,moet het verplaatsingsveld gedifferentiëerd worden. Daardoor ontstaan de gesignaleerde afwijkingen. Deze effekten zijn uiteraard te verkleinen door ter plaatse minder te kondenseren. In een volgende berekening zijn dan ook de vrijheidsgraden in knooppunt 10, 12, 14, 16, 18, 230 en 232 in z-richting niet gereduceerd, alsmede enkele vrijheidsgraden in de omgeving van de afronding. Verder verloopt de berekening analoog aan de voorgaande. De axiale spanningen zijn weergegeven in figuur 3.4.4.. De radiale spanningen zijn nagenoeg gelijk aan die van figuur 3.4.2..

Verplaatsingsveld direkt afgeleid uit de laagste eigentrillingsvorm van het vrij trillende systeem.

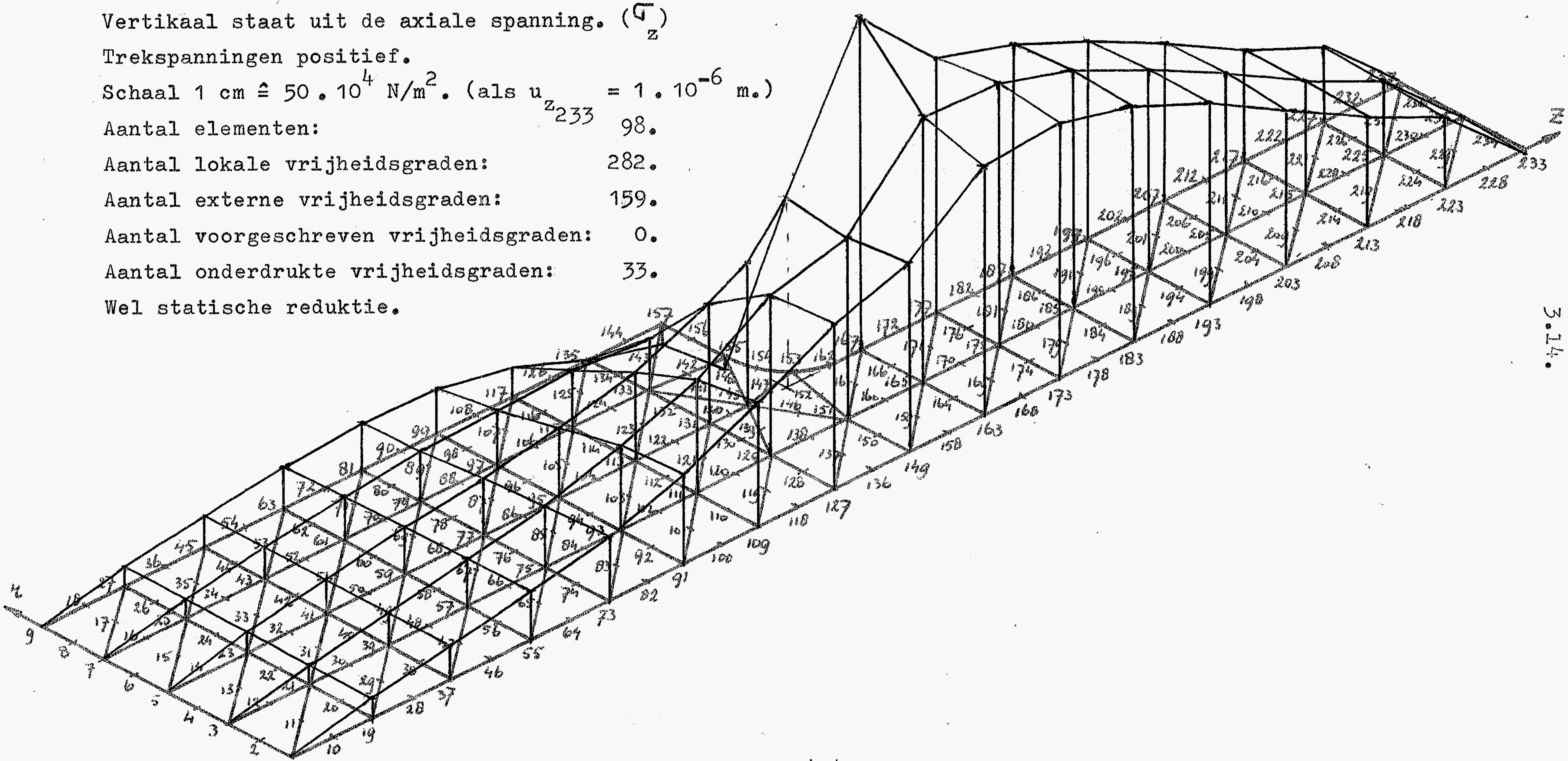
Vertikaal staat uit de axiale spanning. (σ_z)

Trekspanningen positief.

Schaal 1 cm $\hat{=}$ $50 \cdot 10^4$ N/m^2. (als $u_{z_{233}} = 1 \cdot 10^{-6}$ m.)

Aantal elementen:	98.
Aantal lokale vrijheidsgraden:	282.
Aantal externe vrijheidsgraden:	159.
Aantal voorgeschreven vrijheidsgraden:	0.
Aantal onderdrukte vrijheidsgraden:	33.

Wel statische reduktie.



Figuur 3.4.4.

Ook nu blijven er aan de randen afwijkingen ontstaan, ook al zijn deze kleiner. De vraag is nu hoe nauwkeurig het gevonden spanningsveld is. Als men nl. de radiale spanning bijv. in knooppunt 187 bekijkt, (deze zou nul moeten zijn) dan blijkt deze redelijk aan de verwachting te voldoen. ($\sigma_r = -0,384 \cdot 10^4$ t.o.v. $(\sigma_r)_{max} = 0,7283 \cdot 10^6$ in knooppunt 153 of t.o.v. $(\sigma_z)_{max} = 2,966 \cdot 10^6$) Maar als men ziet hoe deze spanning opgebouwd is, dan is deze bepaald door het gemiddelde te nemen van de spanningen van de afzonderlijke elementen in knooppunt 187. Deze blijken te zijn: $\sigma_r = + 6,658 \cdot 10^4$; $\sigma_r = + 3,170 \cdot 10^4$; $\sigma_r = -10,98 \cdot 10^4$, zodat het gemiddelde uitkomt op $(\sigma_r)_{gem} = -0,384 \cdot 10^4$. De vraag is dan natuurlijk, welke waarde men nog mag hechten aan deze uitkomst.

Opmerking: De spanningen zijn gegeven in N/m^2, als knooppunt 233 een verplaatsing heeft van 10^{-6}m.

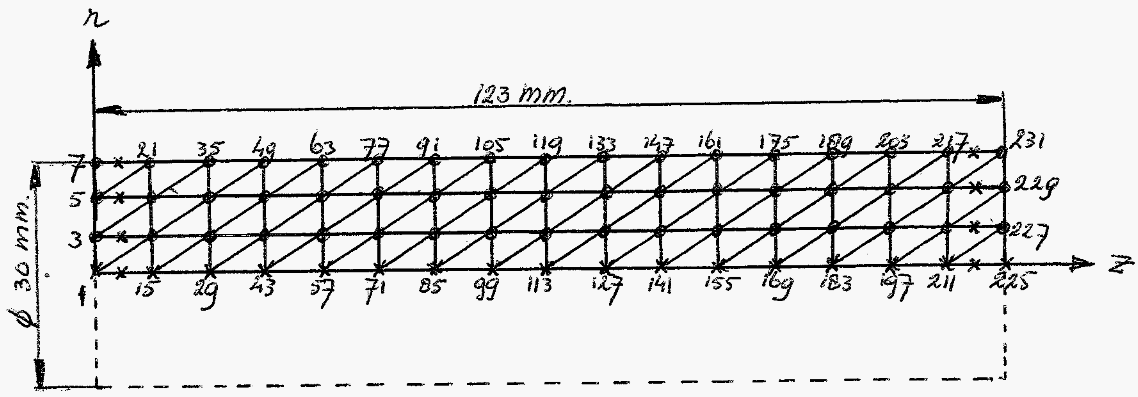
3.5. OVERGANG OP EEN EENVOUDIGER PROBLEEM.

Op grond van het voorgaande is er gezocht naar een soortgelijk probleem, waaraan echter analytisch de verplaatsingen en spanningen bepaald kunnen worden. Hiervoor is een cylindrische staaf gekozen (in feite een trafo met een transformatieverhouding gelijk aan één), die in elementen verdeeld is volgens figuur 3.5.1.. Hiervan zijn in de berekening weer de meeste tussenpunten geëlimineerd m.b.v. statische reduktie, behalve de vrijheidsgraden in de knooppunten 8,10,12,14,218,220,222 en 224 in z-richting. De analytische oplossingen zijn samen met de afleiding hiervan te vinden in appendix D. De resultaten van de analytische oplossing zijn weergegeven in figuur 3.5.2. t/m 3.5.5..

Het met ASKA bepaalde verplaatsingsveld is goed te noemen. De afwijkingen van de verplaatsingen van de niet gereduceerde vrijheidsgraden zijn in absolute waarde kleiner dan $4 \cdot 10^{-10}$, (dit ten opzichte van $(u_z)_{225} = 1 \cdot 10^{-6}$). De afwijkingen van de verplaatsingen in radiale richting van de wel gereduceerde vrijheidsgraden zijn in absolute waarde kleiner dan $18 \cdot 10^{-10}$ en van de verplaatsingen in axiale richting kleiner dan $56 \cdot 10^{-10}$. (Zie figuur 3.5.6. en 3.5.7..) Uit de figuren 3.5.6. en 3.5.7. blijkt, dat de afwijkingen groter worden naarmate de massatermen in het systeem een grotere rol gaan spelen,

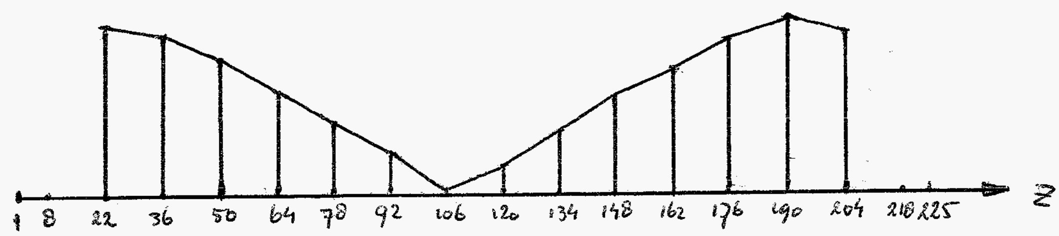
∘ = externe vrijheidsgraden in r en z-richting.

x = externe vrijheidsgraden in z-richting.



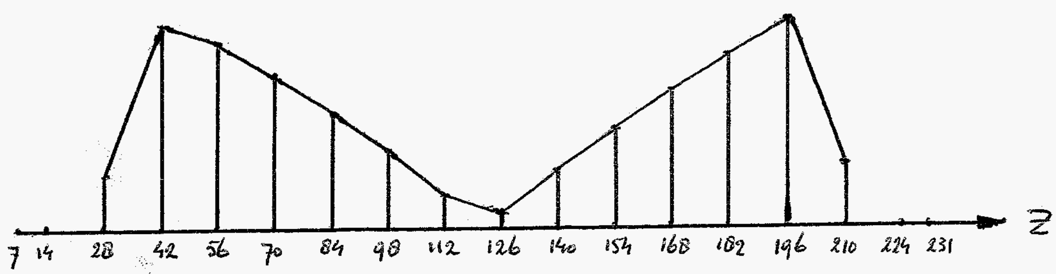
"Regelmatige" elementverdeling.

Figuur 3.5.1.



Absolute fout in u_z voor $r = 0$ in de gereduceerde punten. Schaal 1 cm $\hat{=}$ $20 \cdot 10^{-10}$ m.

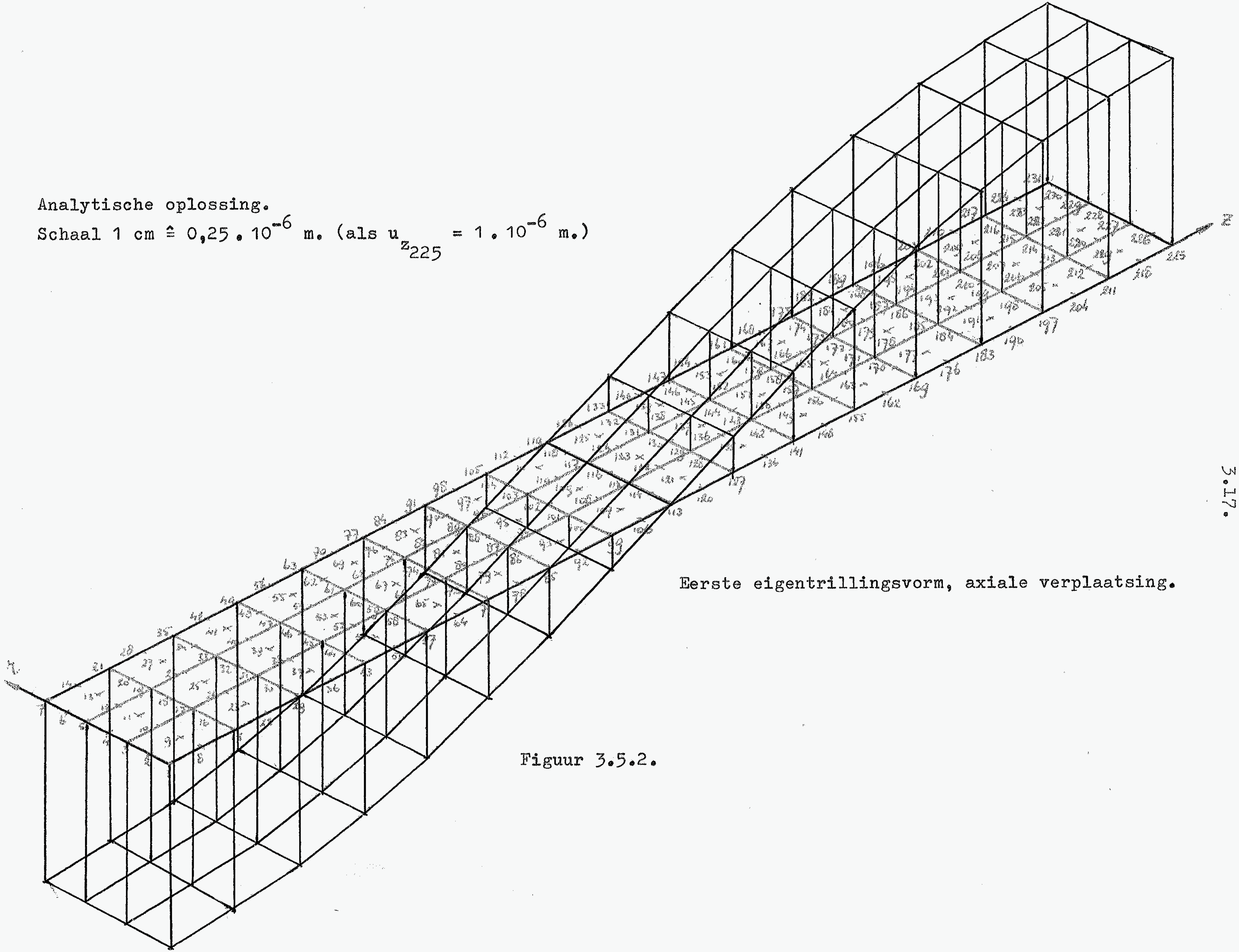
Figuur 3.5.6.



Als bij figuur 3.5.6. echter voor $r = R$.

Figuur 3.5.7.

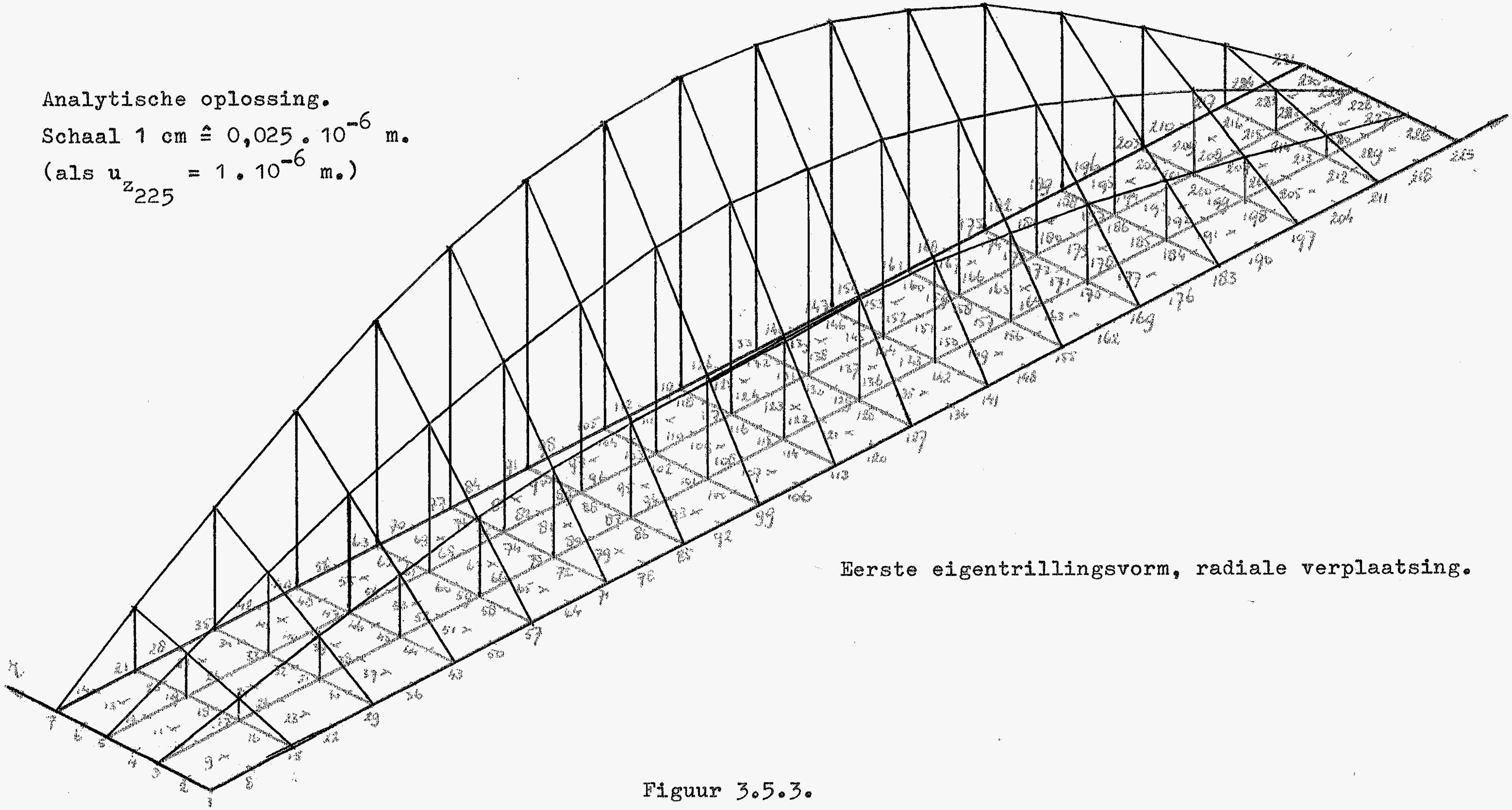
Analytische oplossing.
Schaal 1 cm $\hat{=}$ 0,25 . 10^{-6} m. (als $u_{z_{225}}$ = 1 . 10^{-6} m.)



Eerste eigentrillingsvorm, axiale verplaatsing.

Figuur 3.5.2.

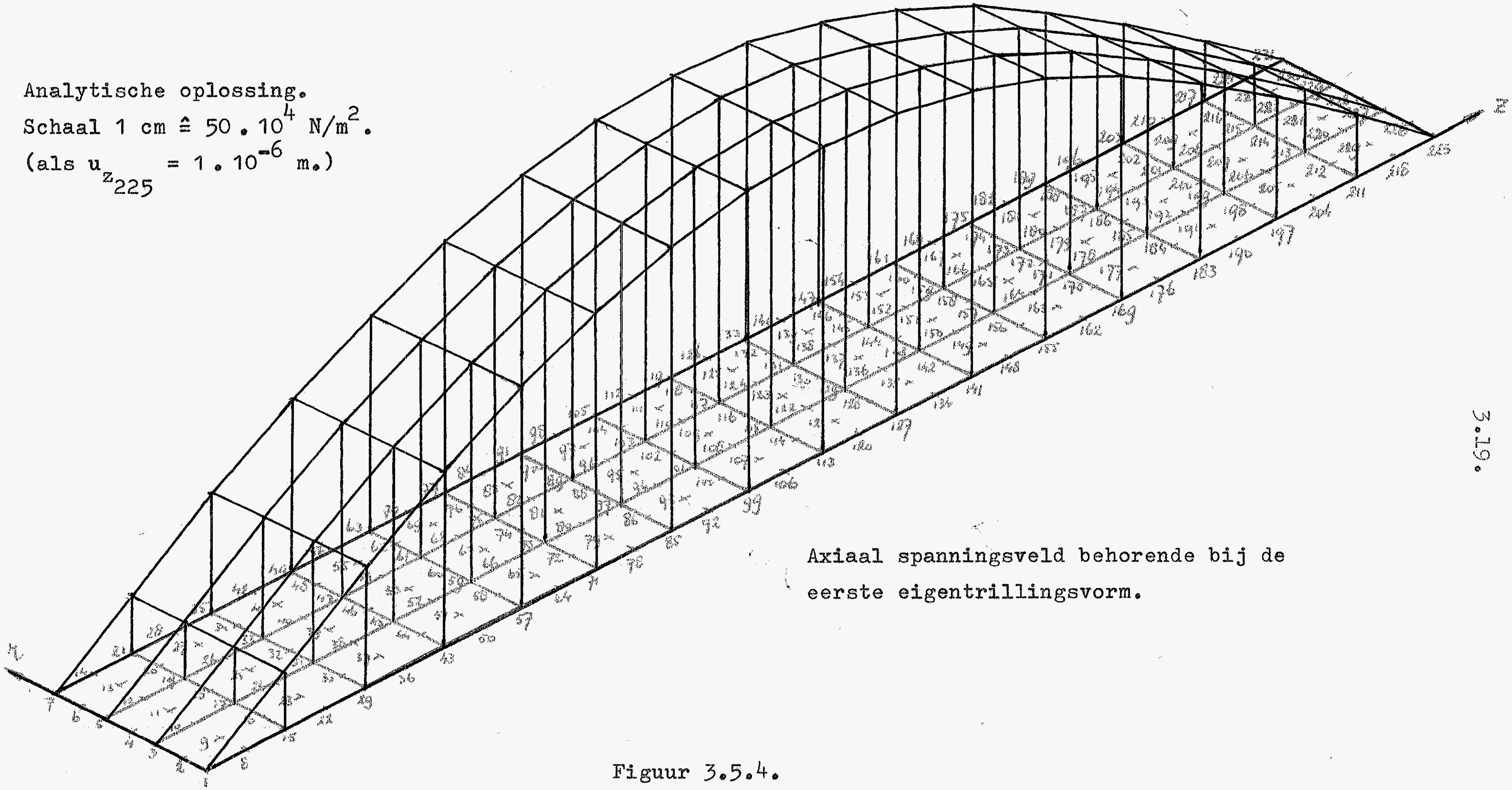
Analytische oplossing.
Schaal 1 cm $\hat{=}$ 0,025 . 10^{-6} m.
(als $u_{z_{225}}$ = 1 . 10^{-6} m.)



Eerste eigentrillingsvorm, radiale verplaatsing.

Figuur 3.5.3.

Analytische oplossing.
Schaal 1 cm $\hat{=}$ 50 . 10^4 N/m^2.
(als $u_{z_{225}}$ = 1 . 10^{-6} m.)

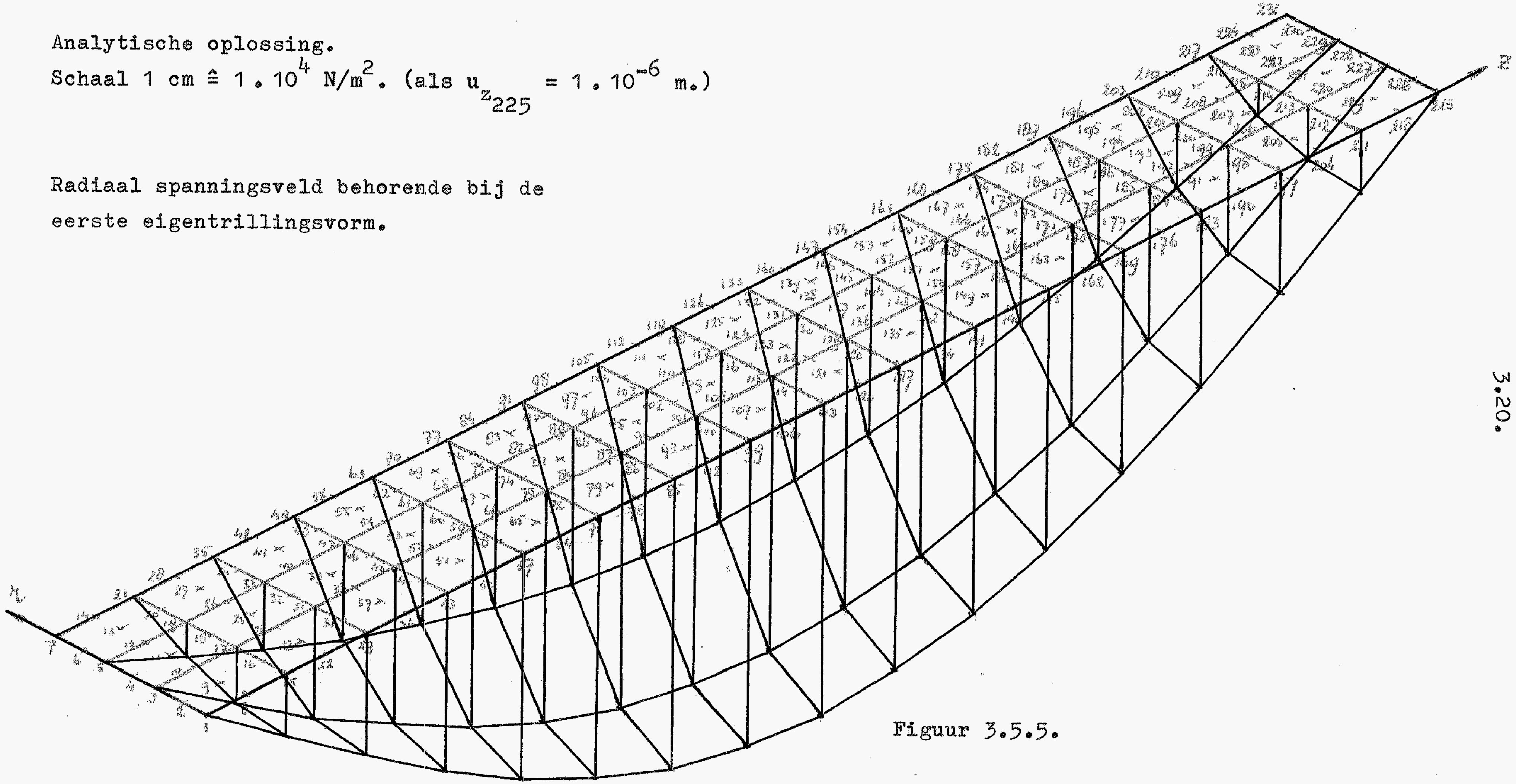


Axiaal spanningsveld behorende bij de eerste eigentrillingsvorm.

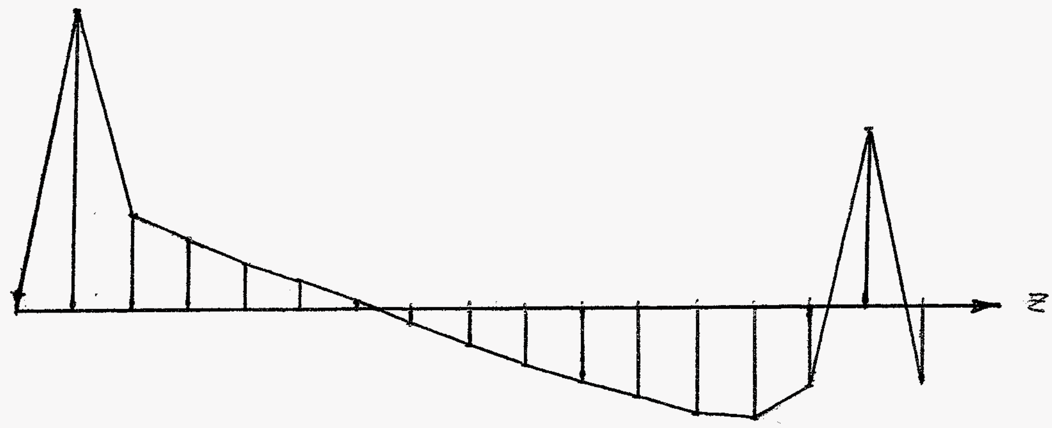
Figuur 3.5.4.

Analytische oplossing.
Schaal 1 cm $\hat{=}$ 1 . 10^4 N/m^2. (als $u_{z_{225}}$ = 1 . 10^{-6} m.)

Radiaal spanningsveld behorende bij de eerste eigentrillingsvorm.

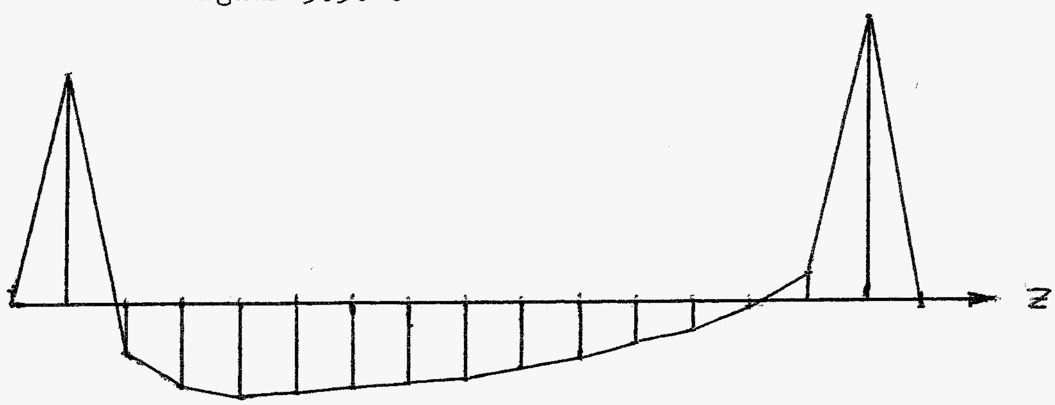


Figuur 3.5.5.



Absolute fout in σ_z voor r = 0, bij "regelmatige" verdeling. Schaal 1 cm $\hat{=}$ 5 . 10^4 N/m^2.

Figuur 3.5.8.



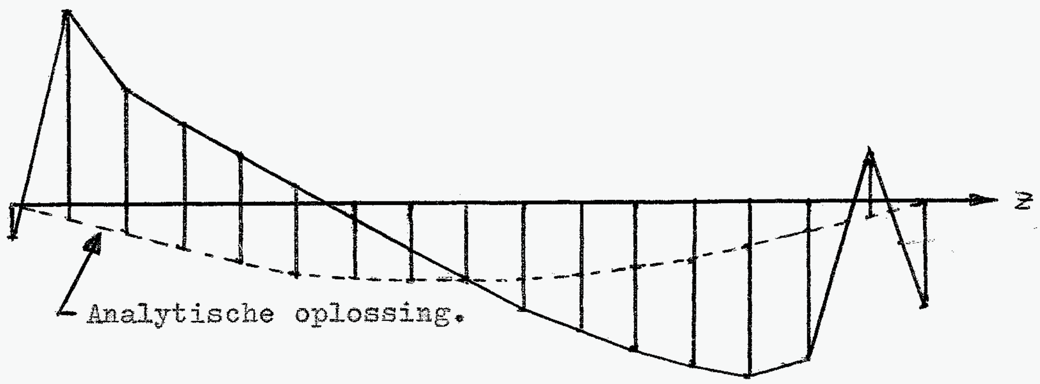
Als bij figuur 3.5.8., echter voor r = R.

Figuur 3.5.9.

wat ook wel te verwachten is, gezien de aannamen die ten grondslag liggen aan het statische reduktieproces. De meest in het oog springende afwijkingen van de resultaten uit ASKA met de analytische oplossing zijn wel:

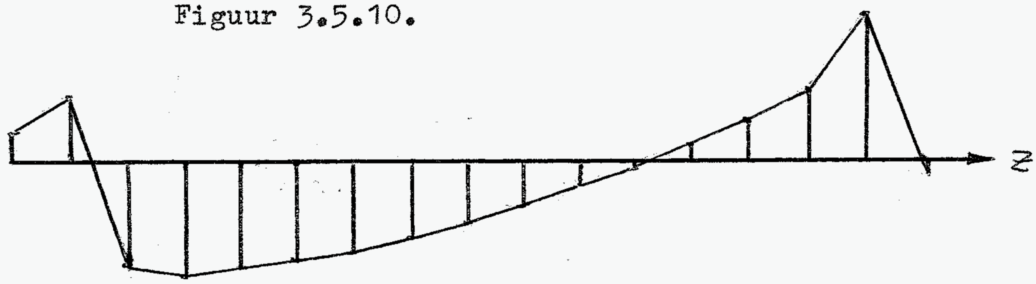
a. Te grote axiale spanningen in de knooppunten 15, 17, 19, 21, 211, 213, 215 en 217. (Zie figuur 3.5.8. en 3.5.9.; hiervan zijn de afwijkingen van de analytische oplossing uitgezet voor r = 0 resp. r = R.) Dit verschijnsel is ook al gevonden in figuur 3.4.4..

b. Grote afwijkingen in de radiale spanningen. Het meest imponerende is wel de a-symmetrische ligging van de radiale spanningen t.o.v. het vlak z = ½.L. (Zie figuur 3.5.10. en 3.5.11.; hierin zijn de radiale spanningen uitgezet voor r = 0 resp. r = R.)



Radiale spanning σ_r voor $r = 0$, bij "regelmatige" verdeling. Schaal 1 cm $\hat{=}$ $5 \cdot 10^4$ N/m^2.

Figuur 3.5.10.

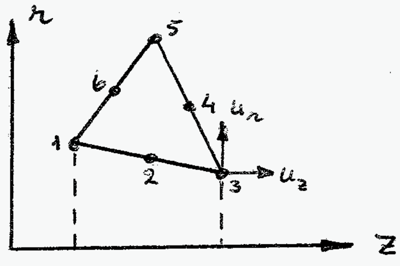


Als bij figuur 3.5.10., echter voor $r = R$.

Figuur 3.5.11.

Op grond hiervan lijkt het zinvol om eens wat dieper in te gaan op de spanningsberekening.

3.6. BEREKENING VAN DE REKKEN EN DE SPANNINGEN M.B.V. ASKA.



Figuur 3.6.1.

Van een TRIAX6 element worden in ASKA op de volgende manier de rekken en de spanningen bepaald.

$$\varepsilon_{r_1} = \frac{1}{D}\Big\{3(z_3-z_5)u_{r_1} + 4(z_5-z_1)u_{r_2} - (z_5-z_1)u_{r_3} - (z_1-z_3)u_{r_5} + 4(z_1-z_3)u_{r_6}\Big\} \quad (3.6.1.)$$

$$\varepsilon_{z_1} = \frac{1}{D}\Big\{3(r_5-r_3)u_{z_1} + 4(r_1-r_5)u_{z_2} - (r_1-r_5)u_{z_3} - (r_3-r_1)u_{z_5} + 4(r_3-r_1)u_{z_6}\Big\} \quad (3.6.2.)$$

$$\varepsilon_{t_1} = \frac{u_{r_1}}{r_1} \quad \text{voor } r \neq 0 \; ; \quad \varepsilon_{t_1} = \varepsilon_{r_1} \quad \text{voor } r = 0 \quad (3.6.3.)$$

$$\gamma_{rz_1} = \frac{1}{D}\Big\{3(z_3-z_5)u_{z_1} + 4(z_5-z_1)u_{z_2} - (z_5-z_1)u_{z_3} - (z_1-z_3)u_{z_5} + 4(z_1-z_3)u_{z_6} + 3(r_5-r_3)u_{r_1} + 4(r_1-r_5)u_{r_2} - (r_1-r_5)u_{r_3} - (r_3-r_1)u_{r_5} + 4(r_3-r_1)u_{r_6}\Big\} \quad (3.6.4.)$$

Hierin is:

$$D = r_1(z_3-z_5) + r_3(z_5-z_1) + r_5(z_1-z_3) \quad (3.6.5.)$$

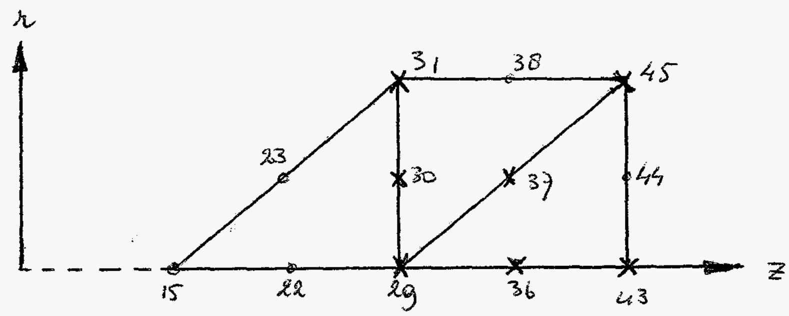
$$\sigma_{r_1} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big\{(1-\nu)\varepsilon_{r_1} + \nu\varepsilon_{z_1} + \nu\varepsilon_{t_1}\Big\} \quad (3.6.6.)$$

$$\sigma_{z_1} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big\{(1-\nu)\varepsilon_{z_1} + \nu\varepsilon_{t_1} + \nu\varepsilon_{r_1}\Big\} \quad (3.6.7.)$$

$$\sigma_{t_1} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big\{(1-\nu)\varepsilon_{t_1} + \nu\varepsilon_{r_1} + \nu\varepsilon_{z_1}\Big\} \quad (3.6.8.)$$

$$\tau_{rz_1} = \frac{E}{2(1+\nu)}\,\gamma_{rz_1} \quad (3.6.9.)$$

De rekken en spanningen in de knooppunten 3 en 5 kunnen worden gevonden door cyclische verwisseling.

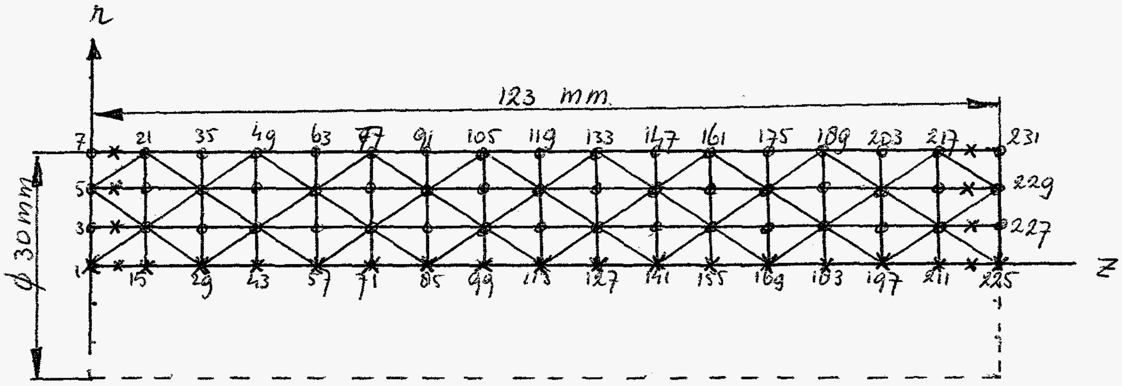


Figuur 3.6.2.

Wil men in knooppunt 29 de radiale rek bepalen, dan spelen volgens (3.6.1.) voor element a alleen de radiale verplaatsingen in de punten 29,30 en 31 een rol. Voor element b spelen de radiale verplaatsingen van dezelfde punten een rol.
Voor element c spelen echter de radiale verplaatsingen van de punten 36, 37, 43 en 45 een rol.
Zo ziet men dat de gemiddelde radiale rek bepaald wordt uit radiale verplaatsingen van punten, die een z-koördinaat hebben, die groter is of gelijk aan de z-koördinaat van het punt 29 zelf. Met de overige rekken is iets soortgelijks aan de hand, waardoor kennelijk deze regelmatige elementverdeling leidt tot de a-symmetrische ligging van de radiale spanningen.
Verder dient opgemerkt te worden, dat t.g.v. de statische reduktie in de verplaatsingen van de tussenpunten al grotere afwijkingen zitten, dan in de overige punten. (Zie hoofdstuk 3.5..)
In de spanningsberekening blijken deze tussenpunten nog een grotere rol te spelen dan de hoekpunten. Om toch de radiale spanningen (die kleiner zijn t.o.v. de axiale spanningen) wat nauwkeuriger te bepalen, wordt de elementverdeling veranderd.

3.7. EEN NIEUWE ELEMENTVERDELING.

Om de in hoofdstuk 3.5. en 3.6. gesignaleerde moeilijkheden te omzeilen, worden de elementen symmetrisch gelegd t.o.v. het vlak $z = \frac{1}{2}.L$ en om per helft deze effekten te verminderen, zijn de elementen "om en om" gelegd. (Zie figuur 3.7.1..)
M.b.v. statische reduktie zijn dezelfde vrijheidsgraden geëlimineerd als in figuur 3.5.1.. De resultaten zijn uitgezet in de figuren 3.7.2. t/m 3.7.5.. De spanningen in de knooppunten 15, 43, 71 enz. zijn op een andere manier bepaald, dan de



Elementvèrdeling "om en om".

° = externe vrijheidsgraden in r en z-richting.

✗ = externe vrijheidsgraden in z-richting.

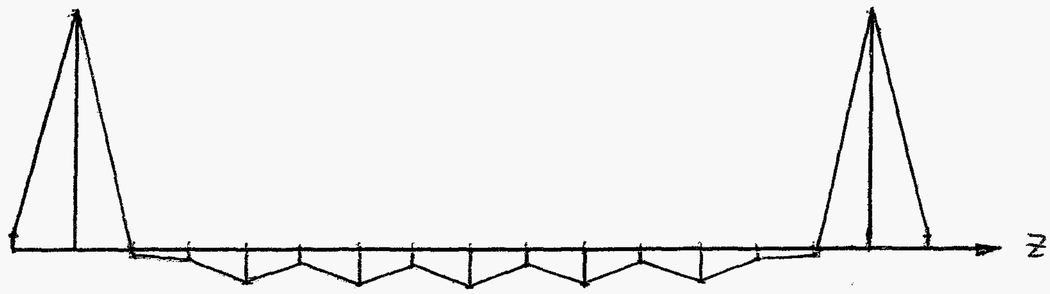
Figuur3.7.1.

spanningen in de knooppunten 29, 57, 85 enz.. Dit is aan de resultaten te zien. De afwijkingen zijn echter al een stuk minder dan bij de andere elementverdeling, maar voor $r = R$ zijn de radiale spanningen nog niet verwaarloosbaar t.o.v. de overige radiale spanningen. (Zie figuur 3.7.5..) Ook de spreiding in spanningen in de elementen, die een bepaald knooppunt gemeenschappelijk hebben, is tamelijk groot. Bij bijv. knooppunt 43 (waar twee elementen samenkomen) is de radiale spanning bepaald uit het gemiddelde van: $-19,7 \cdot 10^4$ en $+12,7 \cdot 10^4$, zodat deze uitkomt op $-3,5 \cdot 10^4$. Voor knooppunt 57 geldt analoog het gemiddelde van: $+2 \cdot 10^4$; $-3,2 \cdot 10^4$; $-0,9 \cdot 10^4$; $-10,7 \cdot 10^4$ wat uitkomt op $-3,2 \cdot 10^4$.

om na te gaan of deze spreiding veroorzaakt wordt door te grove elementverdeling of door het statische reduktieproces, is dit probleem nog een keer doorgerekend zonder statische reduktie.

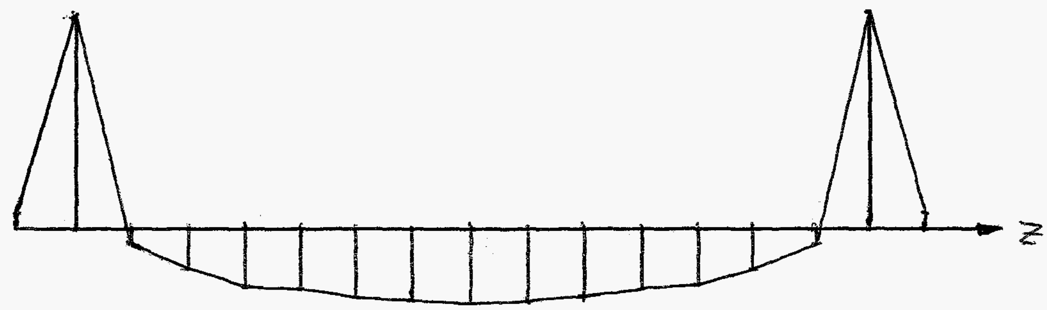
3.8. DE NIEUWE ELEMENTVERDELING ZONDER STATISCHE REDUKTIE.

Om het aantal vrijheidsgraden toch wat te beperken, is besloten om slechts de helft van het probleem door te rekenen, gezien de symmetrie t.o.v.het vlak $z = \frac{1}{2}.L$.



Absolute fout in de axiale spanning σ_z voor r = 0, bij elementverdeling "om en om". Schaal 1 cm $\hat{=}$ 5 . 10^4 N/m^2.

Figuur 3.7.2.

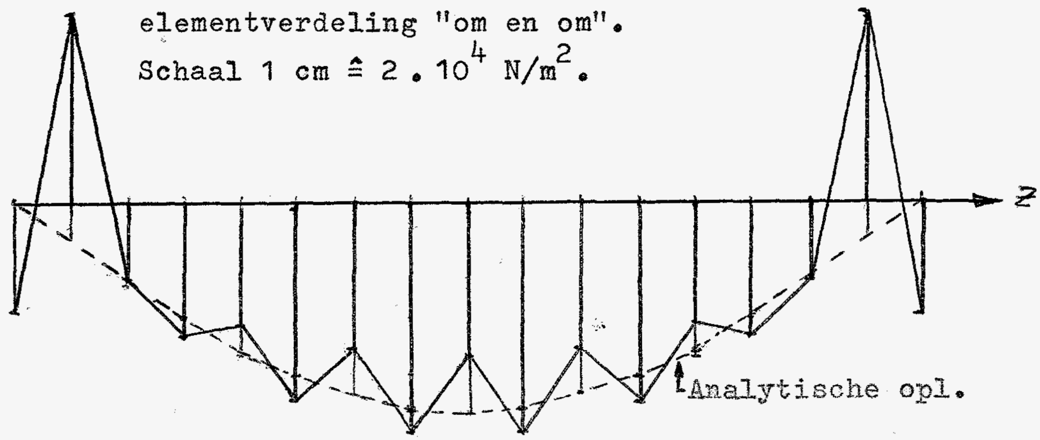


Als bij figuur 3.7.2., echter voor r = R.

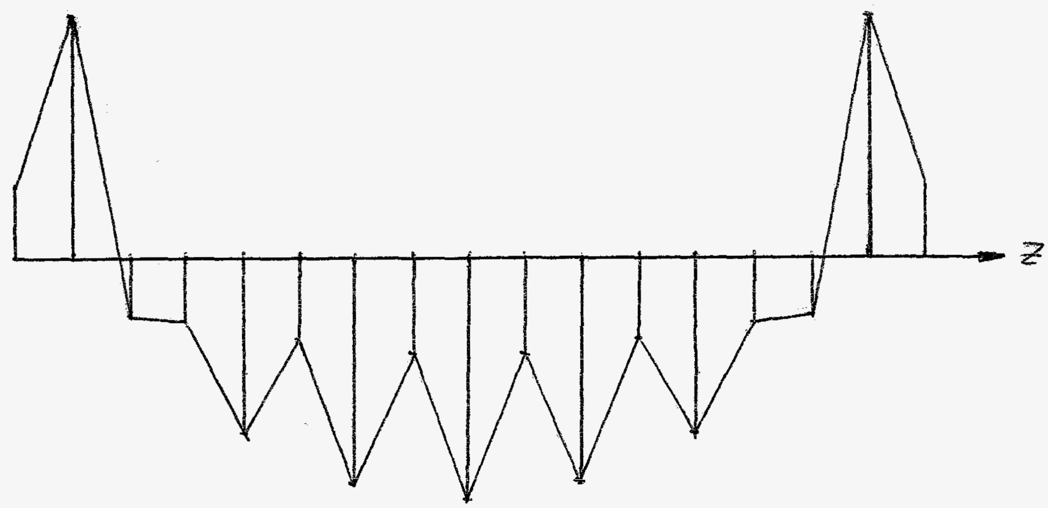
Figuur 3.7.3.

Hiertoe worden de verplaatsingen in de knooppunten 113 t/m 119 in axiale richting onderdrukt (dus voorgeschreven en gelijk aan nul). Bij dit probleem is nu ook geen beweging als star lichaam meer mogelijk. De resultaten zijn uitgezet in de figuren 3.8.1. t/m 3.8.4.. De waarden komen zeer goed met de analytisch bekende waarden overeen. Dat de spanningen in de knooppunten 15, 43, 71 enz. op een andere manier bepaald zijn dan de spanningen in de knooppunten 29, 57, 85 enz. is aan de resultaten nog steeds te merken. De spreiding in spanningen in de elementen, die een bepaald knooppunt gemeenschappelijk hebben, is veel kleiner geworden. Bijv. in knooppunt 43; -2,9 . 10^4, (gemiddelde van -2,9 . 10^4 en -2,9 . 10^4), of in knooppunt 57; -4,3 . 10^4 (gemiddelde van -5,1 . 10^4, -4,9 . 10^4, -3,6 . 10^4 en -3,8 . 10^4). Verder zijn de radiale spanningen aan de rand ook een orde kleiner geworden t.o.v. de waarden bij dezelfde verdeling met statische reduktie.

Radiale spanning σ_r voor $r = 0$, bij elementverdeling "om en om".
Schaal 1 cm $\hat{=}$ 2 . 10^4 N/m^2.



Figuur 3.7.4.



Als bij figuur 3.7.4., echter voor $r = R$.

Figuur 3.7.5.

3.9. VERGELIJKING VAN DE VERSCHILLENDE METHODEN.

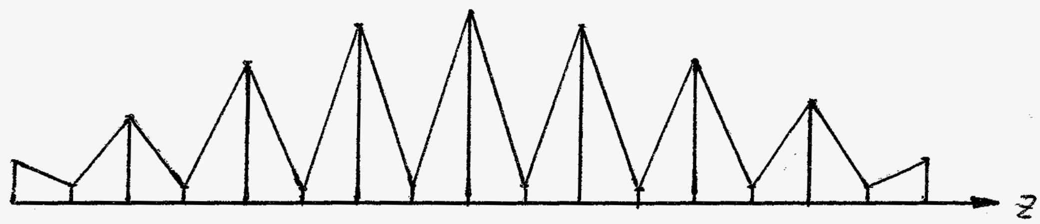
In de tabel op blz. 3.29. zijn de radiale spanningen uitgezet van de in de voorgaande hoofdstukken bepaalde methoden voor de knooppunten op r=0 en r=R.

Kolom A geeft de resultaten uit de analytische berekening.

Kolom B geeft de resultaten uit de berekening met ASKA, met de elementverdeling "om en om", zonder statische reduktie.

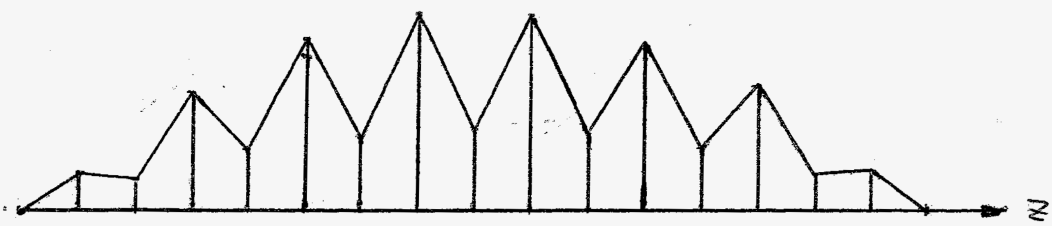
Kolom C geeft de resultaten uit de berekening met ASKA, met de elementverdeling "om en om", met statische reduktie.

Kolom D geeft de resultaten uit de berekening met ASKA, met de "regelmatige" elementverdeling van figuur 3.5.1., met statische reduktie.



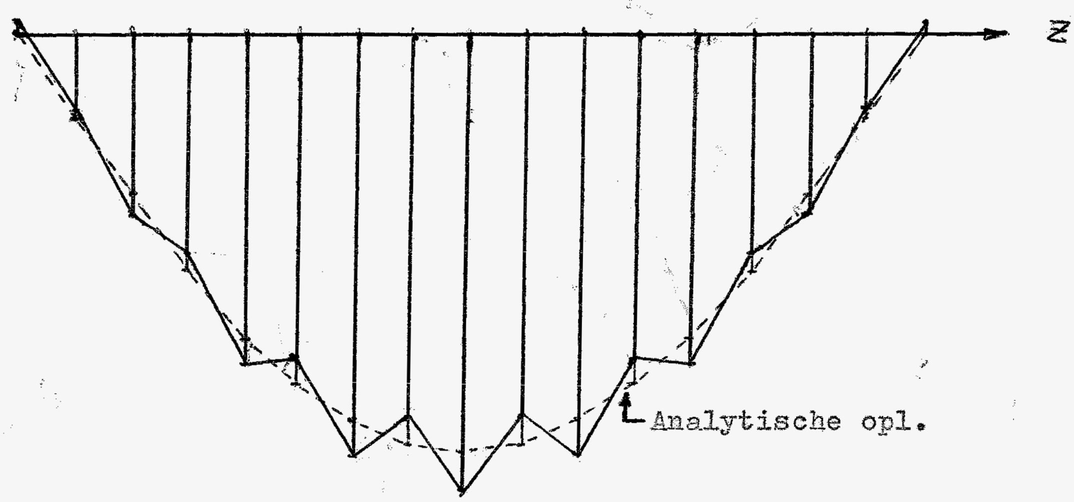
Absolute fout in σ_z voor r = 0, bij elementverdeling "om en om", zonder statische reduktie. Schaal 1 cm $\hat{=}$ 0,5 . 10^4 N/m^2.

Figuur 3.8.1.



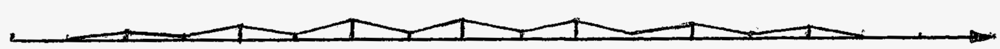
Als bij figuur 3.8.1., echter voor r = R.

Figuur 3.8.2.



σ_r voor r = 0, bij elementverdeling "om en om", zonder statische reduktie. Schaal 1 cm $\hat{=}$ 1 . 10^4 N/m^2.

Figuur 3.8.3.



Als bij figuur 3.8.3., echter voor r = R.

Figuur 3.8.4.

	r = 0			
Knooppunt	A	B	C	D
1	$0{,}0$	$0{,}2 \cdot 10^4$	$-2{,}9 \cdot 10^4$	$-2{,}1 \cdot 10^4$
15	$-1{,}1 \cdot 10^4$	$-1{,}0 \cdot 10^4$	$5{,}3 \cdot 10^4$	$12{,}8 \cdot 10^4$
29	$-2{,}2 \cdot 10^4$	$-2{,}4 \cdot 10^4$	$-2{,}0 \cdot 10^4$	$7{,}6 \cdot 10^4$
43	$-3{,}1 \cdot 10^4$	$-2{,}9 \cdot 10^4$	$-3{,}5 \cdot 10^4$	$5{,}5 \cdot 10^4$
57	$-4{,}0 \cdot 10^4$	$-4{,}3 \cdot 10^4$	$-3{,}2 \cdot 10^4$	$3{,}1 \cdot 10^4$
71	$-4{,}6 \cdot 10^4$	$-4{,}3 \cdot 10^4$	$-5{,}1 \cdot 10^4$	$1{,}1 \cdot 10^4$
85	$-5{,}1 \cdot 10^4$	$-5{,}6 \cdot 10^4$	$-3{,}8 \cdot 10^4$	$-1{,}0 \cdot 10^4$
99	$-5{,}4 \cdot 10^4$	$-5{,}0 \cdot 10^4$	$-6{,}0 \cdot 10^4$	$-3{,}1 \cdot 10^4$
113	$-5{,}5 \cdot 10^4$	$-6{,}0 \cdot 10^4$	$-4{,}1 \cdot 10^4$	$-5{,}1 \cdot 10^4$
127	$-5{,}4 \cdot 10^4$	$-5{,}0 \cdot 10^4$	$-6{,}0 \cdot 10^4$	$-7{,}0 \cdot 10^4$
141	$-5{,}1 \cdot 10^4$	$-5{,}6 \cdot 10^4$	$-3{,}8 \cdot 10^4$	$-8{,}5 \cdot 10^4$
155	$-4{,}6 \cdot 10^4$	$-4{,}3 \cdot 10^4$	$-5{,}1 \cdot 10^4$	$-9{,}8 \cdot 10^4$
169	$-4{,}0 \cdot 10^4$	$-4{,}3 \cdot 10^4$	$-3{,}2 \cdot 10^4$	$-10{,}9 \cdot 10^4$
183	$-3{,}1 \cdot 10^4$	$-2{,}9 \cdot 10^4$	$-3{,}5 \cdot 10^4$	$-11{,}4 \cdot 10^4$
197	$-2{,}2 \cdot 10^4$	$-2{,}4 \cdot 10^4$	$-2{,}0 \cdot 10^4$	$-10{,}6 \cdot 10^4$
211	$-1{,}1 \cdot 10^4$	$-1{,}0 \cdot 10^4$	$5{,}3 \cdot 10^4$	$3{,}2 \cdot 10^4$
225	$0{,}0$	$0{,}2 \cdot 10^4$	$-2{,}9 \cdot 10^4$	$-7{,}1 \cdot 10^4$
	r = R			
7	$0{,}0$	$0{,}02 \cdot 10^4$	$2{,}0 \cdot 10^4$	$1{,}7 \cdot 10^4$
21	$0{,}0$	$0{,}04 \cdot 10^4$	$6{,}5 \cdot 10^4$	$4{,}0 \cdot 10^4$
35	$0{,}0$	$0{,}11 \cdot 10^4$	$-1{,}5 \cdot 10^4$	$-7{,}1 \cdot 10^4$
49	$0{,}0$	$0{,}05 \cdot 10^4$	$-1{,}6 \cdot 10^4$	$-7{,}4 \cdot 10^4$
63	$0{,}0$	$0{,}18 \cdot 10^4$	$-4{,}7 \cdot 10^4$	$-7{,}2 \cdot 10^4$
77	$0{,}0$	$0{,}06 \cdot 10^4$	$-2{,}1 \cdot 10^4$	$-6{,}5 \cdot 10^4$
91	$0{,}0$	$0{,}24 \cdot 10^4$	$-5{,}9 \cdot 10^4$	$-5{,}9 \cdot 10^4$
105	$0{,}0$	$0{,}07 \cdot 10^4$	$-2{,}4 \cdot 10^4$	$-5{,}1 \cdot 10^4$
119	$0{,}0$	$0{,}25 \cdot 10^4$	$-6{,}4 \cdot 10^4$	$-4{,}0 \cdot 10^4$
133	$0{,}0$	$0{,}07 \cdot 10^4$	$-2{,}4 \cdot 10^4$	$-2{,}9 \cdot 10^4$
147	$0{,}0$	$0{,}24 \cdot 10^4$	$-5{,}9 \cdot 10^4$	$-1{,}6 \cdot 10^4$
161	$0{,}0$	$0{,}06 \cdot 10^4$	$-2{,}1 \cdot 10^4$	$-2{,}9 \cdot 10^4$
175	$0{,}0$	$0{,}18 \cdot 10^4$	$-4{,}7 \cdot 10^4$	$0{,}9 \cdot 10^4$
189	$0{,}0$	$0{,}05 \cdot 10^4$	$-1{,}6 \cdot 10^4$	$2{,}6 \cdot 10^4$
203	$0{,}0$	$0{,}11 \cdot 10^4$	$-1{,}5 \cdot 10^4$	$4{,}5 \cdot 10^4$
217	$0{,}0$	$0{,}04 \cdot 10^4$	$6{,}5 \cdot 10^4$	$9{,}5 \cdot 10^4$
231	$0{,}0$	$0{,}02 \cdot 10^4$	$2{,}0 \cdot 10^4$	$-0{,}6 \cdot 10^4$
	Eigenfrequenties in Hz.			
	20026	20025	20088	20090

3.10. GLOBALE KOSTEN VAN HET REKENEN MET ASKA.

Voor het rekenen op de IBM 370/168 geldt bij Philips op dit moment de volgende prijs:

$$\text{Kosten} = \left(1 + \frac{\text{progr. size}}{500}\right) . \text{ASU} . \frac{\text{tarief}}{3600} \quad \text{(in gulden)} \qquad (3.10.1.)$$

Het tarief voor de IBM 370/168 is overdag ƒ520,-- en 's nachts ƒ380,-- en:

$$\text{ASU} \approx 6{,}5 . \text{CPU} + \frac{\text{I/O}}{34} \quad \text{(in gulden)} \qquad (3.10.2.)$$

CPU en I/O in sec..
Voor het rekenen met ASKA blijkt de program-size 384 te zijn, zodat bij nachttarief geldt:

$$\text{Kosten} \approx 0{,}2 . \text{ASU} \qquad (3.10.3.)$$

Hierboven betaalt de gebruiker nog z.g. packagekosten nl. ongeveer ƒ60,-- per ASKA-aanroep en een bepaald bedrag per ASU. Een indruk te geven van de CPU-tijd is erg moeilijk, omdat deze sterk afhangt van de gebruikte "processors" en van het aantal vrijheidsgraden waarmee gerekend wordt.

De "duurste" processor, die in de voorgaande programma's gebruikt is, is de processor NATMOD.
De CPU-tijd is hiervoor globaal:

$$\text{CPU} = 20 . \left(\frac{n}{100}\right)^3 + 2 . \left(\frac{n}{100}\right)^2 . w + \left(\frac{n}{100}\right)^2 . v \qquad (3.10.4.)$$

Hierin is: n het aantal externe vrijheidsgraden,
w het aantal eigenwaarden,
v het aantal eigenvektoren.

Ook het statische reduktieproces, waarin nogal wat matrix-vermenigvuldigingen zitten, vergt vrij veel rekentijd. Bijv. bij een probleem met 302 lokale vrijheidsgraden en 127 externe, is voor de processor CONDEN nodig: 92 CPU (dus ongeveer 600 ASU).

Men moet wel bedenken, dat de bandbreedte van K_{LL} hierbij van bijzonder groot belang is. Het doorrekenen van het in hoofdstuk 3.5. beschreven probleem, met 302 lokale en 127 externe vrijheidsgraden, kostte 1223 ASU. (Ongeveer ƒ245,-- zonder packagekosten.) Het probleem van hoofdstuk 3.7., 1220 ASU en dat van hoofdstuk 3.8., 1468 ASU. (Hierin 214 vrijheidsgraden zonder statische reduktie.)
Doorrekenen van een soortgelijk probleem als dat van hoofdstuk 3.8., maar met ongeveer twee keer zoveel vrijheidsgraden, zou waarschijnlijk meer dan 10000 ASU kosten, dus meer dan ƒ2000,-- exklusief packagekosten.
Om een indruk te geven van besparingen, die optreden door in een probleem statische reduktie toe te passen, volgt uit het volgende voorbeeld.
Bij een probleem met 300 vrijheidsgraden zonder statische reduktie kosten 5 eigenvektoren ongeveer 675 CPU-sec.. Bij hetzelfde probleem, gereduceerd tot 125 vrijheidsgraden, kosten 5 eigenvektoren ongeveer 65 CPU-sec. en het statische reduktieproces ongeveer 100 CPU-sec., zodat men in totaal ongeveer 4 keer zo snel (en dus ook 4 keer zo goedkoop) tot resultaten komt. Hierdoor gaat de nauwkeurigheid echter omlaag.

4. KONKLUSIES.

4.1. ASPEKTEN BIJ DYNAMISCH REDUCEREN.

Zijn bij een dynamisch probleem op bepaalde plaatsen de verplaatsingen voorgeschreven, dan moet men erg voorzichtig zijn met het dynamische reduktieproces. Hoe groot de fout is, die optreedt door niet alle eigenwaarden en eigenvektoren mee te nemen, is moeilijk te voorspellen. Wel is duidelijk, dat de fouten groter worden, naarmate men in de konstruktie dichter bij de plaats, waar de verplaatsingen voorgeschreven zijn. Nader onderzoek naar dit verschijnsel is gewenst.

4.2. ASPEKTEN BIJ STATISCH REDUCEREN.

Indien men bij dynamische problemen in spanningen geïnteresseerd is, moet men ook met het statische reduktieproces erg voorzichtig zijn. Leidt de aanname, die eraan ten grondslag ligt, nl. dat de traagheidstermen $M_{LL} \cdot \ddot{u}_L + M_{LC} \cdot \ddot{u}_C$ klein zijn t.o.v. de termen $K_{LL} \cdot u_L$ en $K_{LC} \cdot u_C$, slechts tot fouten in de verplaatsingen van hoogstens enkele procenten, in de spanningsberekening kunnen hierdoor fouten ontstaan van vele tientallen procenten. Het is mogelijk de resultaten nog te verbeteren met het z.g. "Verbeterd Rayleigh Quotiënt". (Zie intern verslag Groep Technische Mechanica Nr: WE 74-4, van A. de Kraker.)
Dit is in ASKA echter niet mogelijk.
Het is ook mogelijk, dat de berekende spanningen beter worden, als niet de vrijheidsgraden in de tussenpunten, maar de vrijheidsgraden in de hoekpunten van de elementen geëlimineerd zouden worden. Dit is echter niet onderzocht.

4.3. ASPEKTEN M.B.T. DE SPANNINGSBEREKENING IN HET TRIAX6 ELEMENT.

Bij het berekenen van de spanningen in het TRIAX6 element treden er, afhankelijk van de elementverdeling, grote verschillen op (zie hoofdstuk 3.6. en 3.7.). Hierbij dient echter opgemerkt te worden, dat gestreefd is om de relatief kleine radiale spanningen nog nauwkeurig te bepalen. (De maximale radiale spanning is ongeveer 2% van de maximale axiale spanning voor de cilindrische staaf.) Misschien kan de methode om uit het verplaatsingsveld van het TRIAX6 element de spanningen te bepalen nog wat verbeterd worden.

Door het konstrueren van een kontinu spanningsveld m.b.v. de met ASKA bepaalde spanningen kan dit spanningsveld verbeterd worden. (De spanningen zijn over de elementgrenzen diskontinu.) Deze mogelijkheid is in het ASKA-programma niet aanwezig.

4.4. INVLOED VAN DE AFRONDING.

Als men bij zo'n bicilindrische transformator de invloed van de grootte van de afronding op de optredende spanningen na wil gaan, dan moet men waarschijnlijk overgaan op een veel fijnere elementverdeling (wat dus veel meer rekentijd vergt).

4.5. WAARDE VAN ASKA.

Gezien het voorgaande mag men aannemen, dat met ASKA goede resultaten bereikt worden, zolang men niet (of althans minder) geïnteresseerd is in spanningen die klein zijn t.o.v. de overige spanningen. (Dit wil voor dit konkrete geval zeggen indien men minder geïnteresseerd is in σ_r dan in σ_z.)
Wat verplaatsingen aangaat zijn de resultaten (zowel met als zonder statische reduktie) goed te noemen. Een mogelijkheid om tot betere resultaten te komen is wellicht het intensiever gebruik maken van faciliteiten uit ASKA bijv. substructuring en het rekenen met verdeelde belasting (traagheidstermen benaderd in rekening brengen bij spanningsberekening en berekening van u_L uit u_E).
Het rekenen met het dynamische gedeelte van ASKA is wel relatief duur, maar misschien kunnen bepaalde oplosprocessen nog geöptimaliseerd worden.
Verder is het erg moeilijk, zo niet onmogelijk voor de gebruiker, om bepaalde manipulaties die niet standaard in ASKA aanwezig zijn uit te voeren.

APPENDIX A.

HET STATISCHE REDUKTIEPROCES NADER BEKEKEN.

Aangezien in (2.3.1.3.) $\ddot{u}_S = 0$ en $u_S = 0$ is voor een gedeelte van dat stelsel te schrijven:

$$\begin{bmatrix} M_{LL} & M_{LC} & M_{LP} \\ M^t_{LC} & M_{CC} & M_{CP} \\ M^t_{LP} & M_{CP} & M_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_L \\ \ddot{u}_C \\ \ddot{u}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LC} & K_{LP} \\ K^t_{LC} & K_{CC} & K_{CP} \\ K^t_{LP} & K_{CP} & K_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ u_C \\ u_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L \\ f_C \\ f_P \end{bmatrix} \tag{A.1.}$$

Definieert men nu:

$$\bar{u}_C = \begin{bmatrix} u_C \\ u_P \end{bmatrix} \tag{A.2.}$$

dan is (A.1.) te herschrijven als:

$$\begin{bmatrix} M_{LL} & M_{LC} \\ M^t_{LC} & M_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_L \\ \ddot{u}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LC} \\ K^t_{LC} & K_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L \\ f_C \end{bmatrix} \tag{A.3.}$$

als men definieert $\bar{M}_{LC} = \begin{bmatrix} M_{LC} & M_{LP} \end{bmatrix}$ enz..

Definieert men verder:

$$u_L = -\bar{T} \cdot \bar{u}_C \tag{A.4.}$$

$$\bar{T} = K^{-1}_{LL} \cdot \bar{K}_{LC} = K^{-1}_{LL} \cdot \begin{bmatrix} K_{LC} & K_{LP} \end{bmatrix} \tag{A.5.}$$

en

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} -\bar{T} \\ I \end{bmatrix} \tag{A.6.}$$

dan geldt:

$$\bar{M}_{red} \cdot \ddot{\bar{u}}_C + \bar{K}_{red} \cdot \bar{u}_C = \bar{f}_{red} \tag{A.7.}$$

met:

$$\bar{M}_{red} = \tilde{T}^t \cdot \begin{bmatrix} M_{LL} & \bar{M}_{LC} \\ \bar{M}^t_{LC} & \bar{M}_{CC} \end{bmatrix} \cdot \tilde{T} \tag{A.8.}$$

$$\bar{K}_{red} = \tilde{\bar{T}}^t \cdot \begin{bmatrix} K_{LL} & \bar{K}_{LC} \\ \bar{K}^t_{LC} & \bar{K}_{CC} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\bar{T}} \tag{A.9.}$$

en

$$\bar{f}_{red} = \tilde{\bar{T}}^t \cdot \begin{bmatrix} f_L \\ \bar{f}_C \end{bmatrix} \tag{A.10.}$$

Uitschrijven geeft:

$$\bar{M}_{red} = \bar{T}^t \cdot M_{LL} \cdot \bar{T} - \bar{T}^t \cdot \bar{M}_{LC} - \bar{M}^t_{LC} \cdot \bar{T} + \bar{M}_{CC} \tag{A.11.}$$

$$\bar{M}_{red} = \begin{bmatrix} M_{CC} & M_{CP} \\ M^t_{CP} & M_{PP} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M^t_{LC} \\ M^t_{LP} \end{bmatrix} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot \begin{bmatrix} K_{LC} & K_{LP} \end{bmatrix} + \\ - \begin{bmatrix} K^t_{LC} \\ K^t_{LP} \end{bmatrix} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot \begin{bmatrix} M_{LC} & M_{LP} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^t_{LC} \\ K^t_{LP} \end{bmatrix} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot M_{LL} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot \begin{bmatrix} K_{LC} & K_{LP} \end{bmatrix} \tag{A.12.}$$

Definieert men nu, zoals in hoofdstuk 2.3.1. gebeurd is

$$T = K^{-1}_{LL} \cdot K_{LC} \tag{2.3.1.9.}$$

dan geldt:

$$\bar{M}_{red} = \left[\begin{array}{l|l} M_{CC} - M_{LC} \cdot T + & M_{CP} - M^t_{LC} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot K_{LP} + \\ - T^t \cdot M_{LC} + T^t \cdot M_{LL} \cdot T & - K^t_{LC} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot M_{LP} + \\ & + K^t_{LC} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot M_{LL} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot K_{LP} \\ \hline M^t_{CP} - M^t_{LP} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot K_{LC} + & M_{PP} - M^t_{LP} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot K_{LP} + \\ - K^t_{LP} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot M_{LC} + & - K^t_{LP} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot M_{LP} + \\ + K^t_{LP} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot M_{LL} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot K_{LC} & + K^t_{LP} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot M_{LL} \cdot K^{-1}_{LL} \cdot K_{LP} \end{array}\right] \tag{A.13.}$$

$$\bar{K}_{red} = \bar{K}_{CC} - \bar{K}^t_{LC} \cdot \bar{T} - \bar{T}^t \cdot \bar{K}_{LC} + \bar{T}^t \cdot K_{LL} \cdot \bar{T} \tag{A.14.}$$

$$\bar{K}_{red} = \begin{bmatrix} K_{CC} & K_{CP} \\ K_{CP}^t & K_{PP} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{LC}^t \\ K_{LP}^t \end{bmatrix} \cdot K_{LL}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} K_{LC} & K_{LP} \end{bmatrix} + \qquad \text{(A.15.)}$$

$$- \begin{bmatrix} K_{LC}^t \\ K_{LP}^t \end{bmatrix} \cdot K_{LL}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} K_{LC} & K_{LP} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{LC}^t \\ K_{LP}^t \end{bmatrix} \cdot K_{LL}^{-1} \cdot K_{LL} \cdot K_{LL}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} K_{LC} & K_{LP} \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_{red} = \begin{bmatrix} K_{CC} & K_{CP} \\ K_{CP}^t & K_{PP} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{LC}^t \\ K_{LP}^t \end{bmatrix} \cdot K_{LL}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} K_{LC} & K_{LP} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.16.)}$$

$$\bar{K}_{red} = \left[\begin{array}{c|c} K_{CC} - K_{LC}^t \cdot K_{LL}^{-1} \cdot K_{LC} & K_{CP} - K_{LC}^t \cdot K_{LL}^{-1} \cdot K_{LP} \\ \hline K_{CP}^t - K_{LP}^t \cdot K_{LL}^{-1} \cdot K_{LC} & K_{PP} - K_{LP}^t \cdot K_{LL}^{-1} \cdot K_{LP} \end{array}\right] \qquad \text{(A.17.)}$$

$$\bar{f}_{red} = \bar{f}_C - \bar{T}^t \cdot f_L \qquad \text{(A.18.)}$$

$$\bar{f}_{red} = \begin{bmatrix} f_C \\ f_P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{LC}^t \\ K_{LP}^t \end{bmatrix} \cdot K_{LL}^{-1} \cdot f_L \qquad \text{(A.19.)}$$

$$\bar{f}_{red} = \begin{bmatrix} f_C - K_{LC}^t \cdot K_{LL}^{-1} \cdot f_L \\ f_P - K_{LP}^t \cdot K_{LL}^{-1} \cdot f_L \end{bmatrix} \qquad \text{(A.20.)}$$

Gaat men nu terug naar de oude vrijheidsgraden u_C en u_P, dan vindt men met M_{red}, K_{red} en f_{red} zoals gedefinieerd in hoofdstuk 2.3.1., $M_{LP} = 0$ en $K_{LP} = 0$:

$$\begin{bmatrix} M_{red} & M_{CP} \\ M_{CP}^t & M_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_C \\ \ddot{u}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{red} & K_{CP} \\ K_{CP}^t & K_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ u_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{red} \\ f_P \end{bmatrix} \qquad \text{(A.21.)}$$

Hiermee verloopt alles weer identiek met het in hoofdstuk 2.3.1. afgeleide.

APPENDIX B.

OPLOSSEN VAN DE DIFFERENTIAALVERGELIJKING: $\ddot{\eta} + \omega^2 . \eta = \varphi(t)$ VOOR VOOR WILLEKEURIGE FUNKTIE $\varphi(t)$ MET GEGEVEN $\eta(t_o)$ en $\dot{\eta}(t_o)$.

$$\ddot{\eta} + \omega^2 . \eta = \varphi(t) \tag{B.1.}$$

De oplossing van het homogene deel van de vergelijking is te schrijven als:

$$\eta_H(t) = A . \cos(\omega . t) + B . \sin(\omega . t) \tag{B.2.}$$

met A en B nader te bepalen konstanten.

We proberen voor de partikuliere oplossing:

$$\eta_P(t) = \int_{\tau=t_o}^{t} \frac{\sin\{\omega . (t-\tau)\}}{\omega} . \varphi(\tau) . d\tau \tag{B.3.}$$

Algemeen geldt, als:

$$f(t) = \int_{a}^{t} g(t, \tau) . d\tau \tag{B.4.}$$

dan is:

$$\frac{df(t)}{dt} = \Big\{ g(t, \tau) \Big\}_{\tau=t} + \int_{a}^{t} \frac{\partial g(t, \tau)}{\partial t} . d\tau \tag{B.5.}$$

Nu wordt:

$$\dot{\eta}_P(t) = \left\{ \frac{\sin\{\omega . (t-\tau)\} . \varphi(\tau)}{\omega} \right\}_{\tau=t} + \int_{\tau=t_o}^{t} \cos\{\omega . (t-\tau)\} . \varphi(\tau) . d\tau \tag{B.6.}$$

en:

$$\ddot{\eta}_P(t) = \Big\{ \cos\{\omega . (t-\tau)\} . \varphi(\tau) \Big\}_{\tau=t} - \int_{\tau=t_o}^{t} \omega . \sin\{\omega . (t-\tau)\} . \varphi(\tau) . d\tau \tag{B.7.}$$

Substitutie levert:

$$\ddot{\eta}_P + \omega^2 . \eta_P = \Big\{ \cos\{\omega . (t-\tau)\} . \varphi(\tau) \Big\}_{\tau=t} = \varphi(t) \qquad (B.8.)$$

Dus de partikuliere oplossing B.3. voldoet.
De totale oplossing is nu:

$$\eta(t) = \eta_H(t) + \eta_P(t) \qquad (B.9.)$$

$$\eta(t) = A . \cos(\omega . t) + B . \sin(\omega . t) + \int_{\tau=t_0}^{t} \frac{\sin\{\omega . (t-\tau)\}}{\omega} . \varphi(\tau) . d\tau \qquad (B.10.)$$

voor $t = t_0$ is $\eta = \eta(t_0)$ en $\mathring{\eta} = \mathring{\eta}(t_0)$.

Uit deze voorwaarden zijn de konstanten A en B te bepalen.

$$A = \cos(\omega . t_0) . \eta(t_0) - \frac{\sin(\omega . t_0)}{\omega} . \mathring{\eta}(t_0) \qquad (B.11.)$$

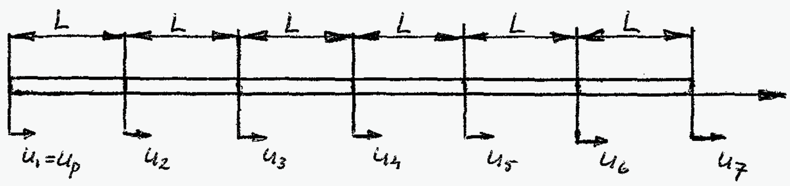
$$B = \sin(\omega . t_0) . \eta(t_0) + \frac{\cos(\omega . t_0)}{\omega} . \mathring{\eta}(t_0) \qquad (B.12.)$$

De totale oplossing wordt nu:

$$\boxed{\eta(t) = \int_{\tau=t_0}^{t} \frac{\sin\{\omega . (t-\tau)\}}{\omega} . \varphi(\tau) . d\tau + \frac{\sin\{\omega . (t-t_0)\}}{\omega} . \mathring{\eta}(t_0) + \cos\{\omega . (t-t_0)\} . \eta(t_0)} \qquad (B.13.)$$

APPENDIX C.

EENDIMENSIONAAL PROBLEEM MET HARMONISCH VERANDERENDE VOORGESCHREVEN VERPLAATSING.



6 staafelementen.

Figuur C.1.

In knooppunt 1 van het eenvoudige systeem volgens figuur 1 wordt de verplaatsing voorgeschreven, nl. $u_p = \hat{u}_p \cdot \sin(\omega_p \cdot t)$ met ω_p de eigenhoekfrequentie van het vrijtrillende systeem.
Voor de stijfheidsmatrix van één element geldt:

$$K^{(i)} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{C.1.}$$

Voor de massamatrix van één element geldt:

$$M^{(i)} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{C.2.}$$

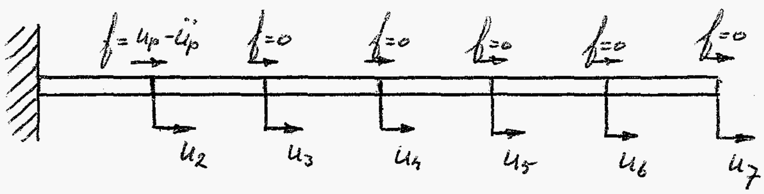
Hierin is: E is elasticiteitsmodulus
A is dwarsdoorsnede
ρ is massadichtheid

Voor de eenvoud wordt $\frac{E \cdot A}{L} = 1$ en $\frac{\rho \cdot A \cdot L}{6} = 1$ gesteld.
Hierbij is ω_p te bepalen. (ω_p = 0,216208 uit berekening, theoretisch 0,213758; dus fout ca. 1%)
De bewegingsvergelijkingen van het systeem volgens figuur C.1. worden nu:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_5 \\ \ddot{u}_6 \\ \ddot{u}_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{C.3.}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_5 \\ \ddot{u}_6 \\ \ddot{u}_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_p - \ddot{u}_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (C.4.)$$

Om de onbekende verplaatsingen u_2 t/m u_7 te vinden moet dit stelsel bewegingsvergelijkingen opgelost worden.



Figuur C.2.

Het probleem volgens figuur C.2. heeft echter hetzelfde stelsel bewegingsvergelijkingen.
Van bovenstaand stelsel vergelijkingen zijn de eigenhoekfrequenties:

	van gediskreti-seerde systeem.	van kontinue systeem.	relatieve fout in %.
ω_1	0,107185	0,106879	0,3
ω_2	0,328929	0,320637	2,6
ω_3	0,572824	0,534396	7,2
ω_4	0,850276	0,748154	13,6
ω_5	1,14908	0,961912	19,5
ω_6	1,37882	1,175671	17,3

De theoretische eigenhoekfrequenties zijn bepaald met:

$$\omega_n = \frac{\pi(2 \cdot n - 1)}{2 \cdot L_{tot}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (C.5.)$$

De bijbehorende theoretische matrix van eigenvektoren is te bepalen m.b.v.:

$$\overline{X}_{ni} = \sin\left\{\frac{(2.n - 1).\pi.i}{12}\right\} \qquad (C.6.)$$

De matrix van eigenvektoren met eigenschap (2.3.3.21.) voor zowel het gediskretiseerde als het kontinue systeem is:

$$X = \begin{bmatrix} 0,57241 & -0,53340 & 0,45804 & -0,35147 & 0,22094 & -0,07536 \\ 1,10581 & -0,75434 & 0,23710 & 0,18193 & -0,31246 & 0,14558 \\ 1,56386 & -0,53340 & -0,33531 & 0,25729 & 0,22094 & -0,20589 \\ 1,91532 & 0,00000 & -0,41067 & -0,31512 & 0,00000 & 0,25216 \\ 2,13627 & 0,53340 & 0,12273 & -0,09418 & -0,22094 & -0,28125 \\ 2,21163 & 0,75434 & 0,47420 & 0,36387 & 0,31246 & 0,29117 \end{bmatrix}$$

De eigentrillingsvormen zijn weergegeven in figuur C.3.. Uit de zes eigentrillingsvormen moet door een lineaire kombinatie de eerste eigentrillingsvorm van het vrijtrillende systeem gevormd worden met uitzondering van punt 1. Dit zijn in feite zes onafhankelijke vergelijkingen met zes onbekenden, waardoor de onbekende koëfficiënten op te lossen zijn. Neemt men echter een lineaire kombinatie van minder eigentrillingsvormen, dan ontstaan er afwijkingen waardoor de werkelijke trillingsvorm slechter beschreven wordt.

De bewegingsvergelijkingen zijn nu m.b.v. de substitutie $u = X.\eta$ te schrijven als een ontkoppeld stelsel.

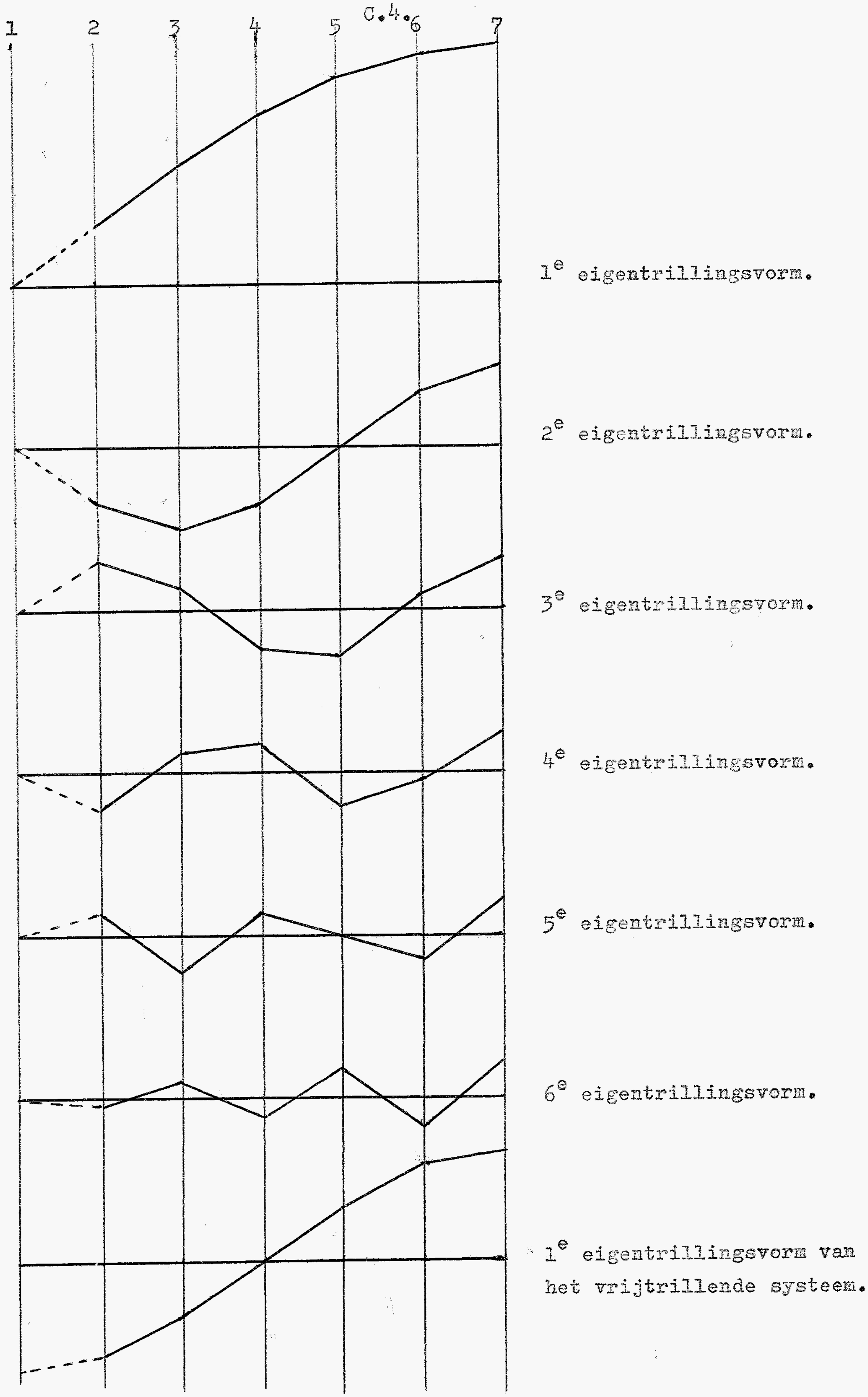
$$\Lambda.\ddot{\eta} + I.\eta = X^t . f \qquad (C.7.)$$

of

$$\frac{1}{\omega_i^2} . \ddot{\eta}_i + \eta_i = X_i^t . f \qquad (C.8.)$$

Vult men de numerieke resultaten in, dan is:

$$\begin{aligned} 87,04262 . \ddot{\eta}_1 + \eta_1 &= 0,57241 . (u_p - \ddot{u}_p) \\ 9,24263 . \ddot{\eta}_2 + \eta_2 &= -0,53340 . (u_p - \ddot{u}_p) \\ 3,04760 . \ddot{\eta}_3 + \eta_3 &= 0,45804 . (u_p - \ddot{u}_p) \\ 1,38319 . \ddot{\eta}_4 + \eta_4 &= -0,35147 . (u_p - \ddot{u}_p) \\ 0,75736 . \ddot{\eta}_5 + \eta_5 &= 0,22094 . (u_p - \ddot{u}_p) \\ 0,52600 . \ddot{\eta}_6 + \eta_6 &= -0,07536 . (u_p - \ddot{u}_p) \end{aligned}$$


1
2
3
4
5
6
7
1^e eigentrillingsvorm.
2^e eigentrillingsvorm.
3^e eigentrillingsvorm.
4^e eigentrillingsvorm.
5^e eigentrillingsvorm.
6^e eigentrillingsvorm.
1^e eigentrillingsvorm van
het vrijtrillende systeem.

Figuur C.3.

Stelt men:

$$u_p = \sin(\omega_p \cdot t) \text{ met } \omega_p = 0{,}216208 \tag{C.9.}$$

$$\ddot{u}_p = -\omega_p^2 \cdot \sin(\omega_p \cdot t) \tag{C.10.}$$

$$u_p - \ddot{u}_p = (1+\omega_p^2) \cdot \sin(\omega_p \cdot t) = 1{,}04675 \cdot \sin(\omega_p \cdot t) \tag{C.11.}$$

Voor de "steady - state - response" wordt alleen een partikuliere oplossing gezocht.
Stelt men:

$$\eta_i = a_i \cdot \sin(\omega_p \cdot t) \tag{C.12.}$$

dan is:

$$\ddot{\eta}_i = -\omega_p^2 \cdot a_i \cdot \sin(\omega_p \cdot t) \tag{C.13.}$$

Zo wordt de algemene gedaante van de i^e komponent:

$$\left\{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_i^2}\right\} \cdot a_i \cdot \sin(\omega_p \cdot t) = X_{1i} \cdot (1+\omega_p^2) \cdot \sin(\omega_p \cdot t) \tag{C.14.}$$

Of:

$$a_i = X_{1i} \cdot \frac{\omega_i^2(1+\omega_p^2)}{\omega_i^2 - \omega_p^2} \tag{C.15.}$$

Nu is:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \cdot \eta_j = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \cdot a_j \cdot \sin(\omega_p \cdot t) \tag{C.16.}$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \cdot X_{1j} \cdot \frac{\omega_j^2 \cdot (1+\omega_p^2)}{\omega_j^2 - \omega_p^2} \cdot \sin(\omega_p \cdot t) \tag{C.17.}$$

Worden niet alle eigenvektoren meegenomen, maar bijv. q stuks, dan is de fout in u_i:

$$\delta(u_i) = \sum_{j=q+1}^{n} X_{ij} \cdot X_{1j} \cdot \frac{\omega_j^2 \cdot (1+\omega_p^2)}{\omega_j^2 - \omega_p^2} \cdot \sin(\omega_p \cdot t) \tag{C.18.}$$

Voor dit konkrete geval is:

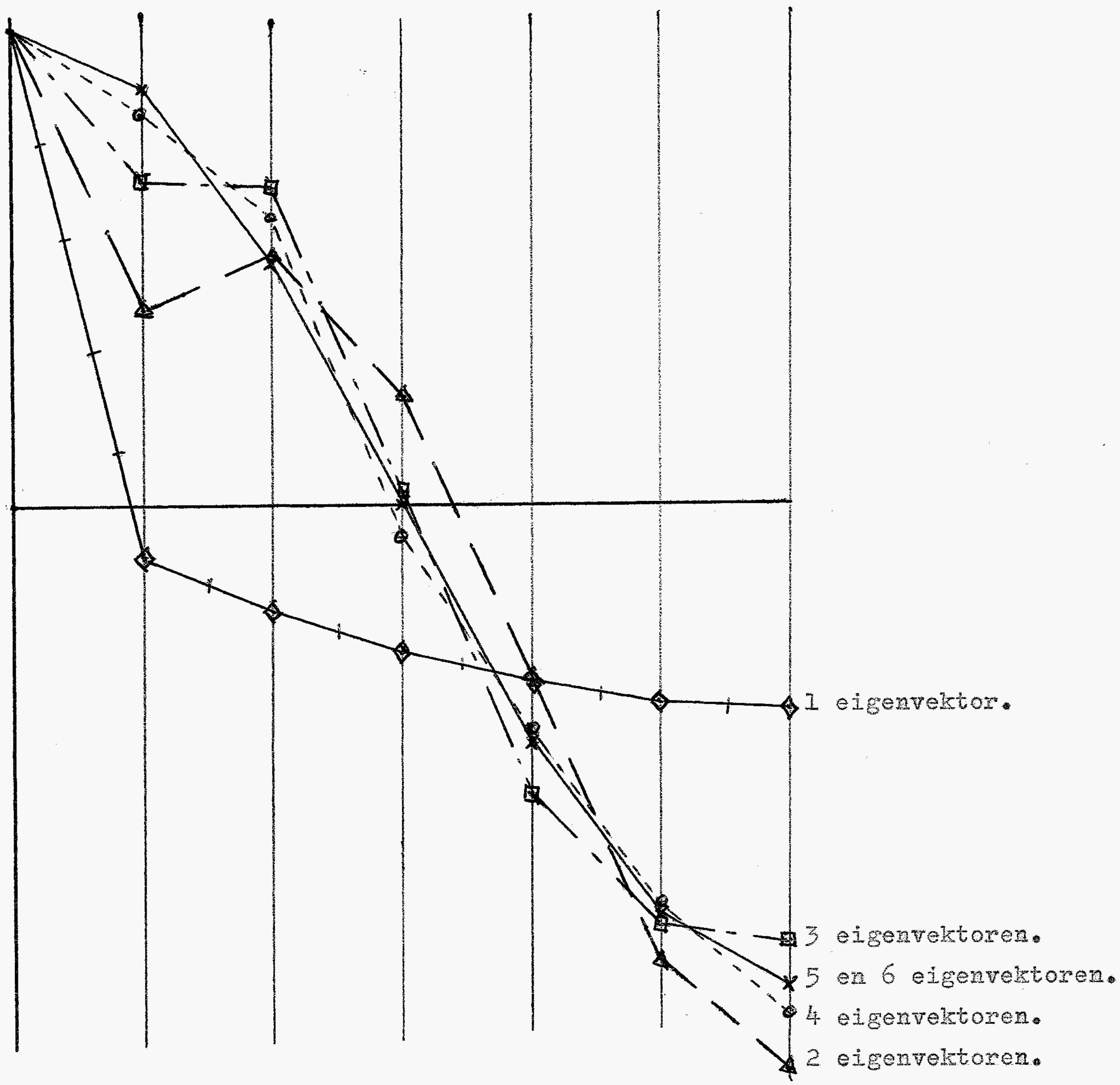
$a_1 = -0,19524$
$a_2 = -0,98308$
$a_3 = 0,55911$
$a_4 = -0,39333$
$a_5 = 0,23976$
$a_6 = -0,08087$

En vindt men voor de verplaatsingen in afhankelijkheid tot het aantal meegenomen eigenvektoren het volgende:

	Aantal in de berekening meegenomen eigenvektoren.					
	6	5	4	3	2	1
u_2	0,8660	0,8599	0,8070	0,6687	0,4126	-0,1118
u_3	0,5000	0,5118	0,5867	0,6582	0,5257	-0,2159
u_4	0,0000	-0,0107	-0,0696	0,0316	0,2191	-0,3053
u_5	-0,5000	-0,4796	-0,4796	-0,6036	-0,3739	-0,3739
u_6	-0,8660	-0,8888	-0,8358	-0,8728	-0,9415	-0,4171
u_7	-1,0000	-0,9765	-1,0514	-0,9083	-1,1734	-0,4318

Worden alle eigenvektoren in de berekening opgenomen, dan heeft men voor de diskrete punten de exakte resultaten. Als er één eigenvektor in deze berekening niet meegenomen wordt, dan zijn de gemaakte fouten al enkele procenten van de grootst optredende verplaatsing. Worden uit dit verplaatsingsveld de spanningen bepaald, dan kunnen de fouten die hierin optreden al een orde groter zijn. Als men minder eigenvektoren in de berekening meeneemt, worden de resultaten nog onnauwkeuriger. De gemaakte fout is meestal moeilijk af te schatten. Dit komt omdat de eigenvektoren, die niet in de berekening meegenomen worden, ook niet bepaald worden.

In figuur C.4. is het effekt van het aantal in de berekening meegenomen eigenvektoren op het verplaatsingsveld te zien. Het knooppunt 1 krijgt uiteraard de voorgeschreven verplaatsingsamplitude.

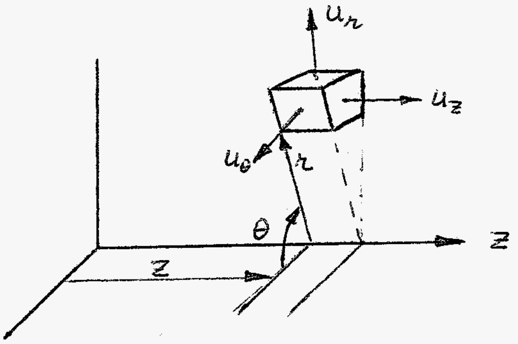

1 eigenvektor.
3 eigenvektoren.
5 en 6 eigenvektoren.
4 eigenvektoren.
2 eigenvektoren.

Figuur C.4.

APPENDIX D.

TRILLINGEN IN CIRKELCILINDRISCHE STAVEN.

In verband met de verifikatie van de resultaten uit het ASKA programma wordt hier een analytische oplossing voor een cirkelcilindrische staaf afgeleid[9].



Figuur D.1.

In het algemeen worden de bewegingsvergelijkingen in de drie richtingen (r, z en θ) gegeven door:

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \cdot \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} + 2\mu \cdot \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} \qquad \text{(D.1.)}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} - 2\mu \cdot \frac{\partial \omega_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \qquad \text{(D.2.)}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot \omega_\theta)}{\partial r} + \frac{2\mu}{r} \cdot \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \qquad \text{(D.3.)}$$

met:

$$\Delta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \text{(D.4.)}$$

$$\omega_r = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right\} \qquad \text{(D.5.)}$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right\} \qquad \text{(D.6.)}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2r} \left\{ \frac{\partial (r \cdot u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\} \qquad \text{(D.7.)}$$

De spanningen worden gegeven door:

$$\sigma_r = \lambda \cdot \Delta + 2\mu \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \text{(D.8.)}$$

$$\sigma_\theta = \lambda \cdot \Delta + 2\mu \cdot \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \qquad \text{(D.9.)}$$

$$\sigma_z = \lambda \cdot \Delta + 2\mu \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \text{(D.10.)}$$

$$\tau_{r\theta} = \mu\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)\right\} \tag{D.11.}$$

$$\tau_{rz} = \mu\left\{\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right\} \tag{D.12.}$$

$$\tau_{z\theta} = \mu\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right\} \tag{D.13.}$$

Volgens L. Pochhammer[9] zijn de verplaatsingen een harmonische funktie van z en van t, mits de straal R van de cilinder klein is t.o.v. de golflengte van de in de cilinder optredende trilling. In overeenstemming hiermee kan men schrijven:

$$u_r = \bar{u}_r \cdot e^{i(\gamma z + \omega t)} \tag{D.14.}$$

$$u_\theta = \bar{u}_\theta \cdot e^{i(\gamma z + \omega t)} \tag{D.15.}$$

$$u_z = \bar{u}_z \cdot e^{i(\gamma z + \omega t)} \tag{D.16.}$$

waarin $\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$ en $\bar{u}_z$ uitsluitend nog funkties zijn van r en θ.
In het onderhavige probleem, speelt alleen de laagste longitudinale eigentrillingsvorm van het vrij trillende systeem een rol, zodat geldt:

$$\bar{u}_\theta \equiv 0 \tag{D.17.}$$

$$\bar{u}_r = \bar{u}_r(r) \tag{D.18.}$$

$$\bar{u}_z = \bar{u}_z(r) \tag{D.19.}$$

met als randvoorwaarden:

$$\sigma_r = 0 \quad \text{voor} \quad r = R \tag{D.20.}$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad \text{voor} \quad r = R \tag{D.21.}$$

$$\sigma_z = 0 \quad \text{voor} \quad z = 0 \tag{D.22.}$$

$$\sigma_z = 0 \quad \text{voor} \quad z = L \tag{D.23.}$$

$$\tau_{rz} = 0 \qquad \text{voor} \qquad z = 0 \tag{D.24.}$$

$$\tau_{rz} = 0 \qquad \text{voor} \qquad z = L \tag{D.25.}$$

Uit bovenstaande vergelijkingen kan men afleiden, dat:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial r} + h^2 \cdot \Delta = 0 \tag{D.26.}$$

$$\frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} - \frac{\omega_\theta}{r^2} + k^2 \cdot \omega_\theta = 0 \tag{D.27.}$$

met:

$$h^2 = \frac{\omega^2 \cdot \rho}{\lambda + 2\mu} - \gamma^2 \tag{D.28.}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 \cdot \rho}{\mu} - \gamma^2 \tag{D.29.}$$

Hierin is:

$$\Delta = \left\{ \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_r}{r} + i \cdot \gamma \cdot \bar{u}_z \right\} \cdot e^{i(\gamma z + \omega t)} \tag{D.30.}$$

$$\omega_\theta = \left\{ \frac{i \cdot \gamma \cdot \bar{u}_r}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} \right\} \cdot e^{i(\gamma z + \omega t)} \tag{D.31.}$$

De oplossing van differentiaalvergelijking (D.26.) is van de vorm:

$$\Delta = C_1 \cdot J_0(h \cdot r) \tag{D.32.}$$

De oplossing van differentiaalvergelijking (D.27.) van de vorm:

$$\omega_\theta = C_2 \cdot J_1(k \cdot r) \tag{D.33.}$$

Hierin zijn J_0 en J_1 z.g. Besselfunkties[10].
Deze zijn als volgt gedefinieerd:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \cdot n!} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \ldots \right\} \tag{D.34.}$$

Om nu te voldoen aan de vergelijkingen (D.30.) en (D.31.) moeten de verplaatsingen van de volgende vorm zijn:

$$\bar{u}_r = A \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left\{ J_0(h \cdot r) \right\} + C \cdot \gamma \cdot J_1(k \cdot r) \qquad \text{(D.35.)}$$

$$\bar{u}_z = A \cdot i \cdot \gamma \cdot J_0(h \cdot r) + \frac{i \cdot C}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left\{ r \cdot J_1(k \cdot r) \right\} \qquad \text{(D.36.)}$$

Voor een cilinder met een spanningsvrij buitenoppervlak (voor r = R) zijn de konstanten A en C niet meer willekeurig te kiezen, maar zijn ze aan elkaar gekoppeld door de randvoorwaarden (D.20.) en (D.21.). Hieruit volgt:

$$\sigma_{r(r=R)} = A\left\{ 2\mu \cdot \frac{\partial^2 J_0(h \cdot R)}{\partial R^2} - \frac{\omega^2 \rho \cdot \lambda}{\lambda + 2\mu} J_0(h \cdot R) \right\} + 2\mu \cdot C \cdot \gamma \cdot \frac{\partial J_1(k \cdot R)}{\partial R} = 0 \qquad \text{(D.37.)}$$

$$\tau_{rz(r=R)} = 2 i \mu \cdot A \cdot \gamma \frac{\partial J_0(h \cdot R)}{\partial R} + i\mu \cdot C\left(2\gamma^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu}\right) \cdot J_1(k \cdot R) = 0 \qquad \text{(D.38.)}$$

Elimineert men uit (D.37.) en (D.38.) de konstante C, dan moet nog gelden:

$$A\left\{ 2\mu \frac{\partial^2 J_0(h \cdot R)}{\partial R^2} - \frac{\omega^2 \rho \lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot J_0(h \cdot R) - \frac{4\mu\gamma^2}{\left(2\gamma^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu}\right) \cdot J_1(k \cdot R)} \cdot \frac{\partial J_0(h \cdot R)}{\partial R} \right\} = 0 \qquad \text{(D.39.)}$$

Vergelijking (D.39.) wordt ook wel frequentievergelijking genoemd. Als nu de termen h^2R^2 en k^2R^2 klein zijn t.o.v. 1, dan kan men de frequentievergelijking benaderen door de Besselfunkties als volgt af te kappen:

$$J_0(h \cdot R) = 1 - \tfrac{1}{4} h^2 \cdot R^2 + \tfrac{1}{64} h^4 \cdot R^4 \qquad \text{(D.40.)}$$

$$J_1(k \cdot R) = \tfrac{1}{2} \cdot k \cdot R \left(1 - \tfrac{1}{8} k^2 \cdot R^2\right) \qquad \text{(D.41.)}$$

Dit ingevuld in vergelijking (D.39.) geeft:

$$\left(\frac{\omega^2 \rho}{\mu} - 2\gamma^2\right) \cdot k \cdot R \cdot \left(1 - \tfrac{1}{8} k^2 R^2\right)\left\{ h^2\left(1 - \tfrac{3}{8} h^2 R^2\right) + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\omega^2 \rho}{(\lambda + 2\mu)}\left(1 - \tfrac{1}{4} h^2 R^2 + \tfrac{1}{64} h^4 R^4\right) \right\} +$$

$$+ 2\gamma^2 \cdot k \cdot R\left(1 - \tfrac{1}{8} h^2 R^2\right)\left(1 - \tfrac{3}{8} k^2 R^2\right) = 0 \qquad \text{(D.42.)}$$

Als men de termen met $\mathbf{R}^2$ verwaarloost, vindt men in eerste benadering:

$$\omega = \gamma \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \text{(D.43.)}$$

met:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \qquad \text{(elasticiteitsmodulus)} \qquad (D.44.)$$

Neemt men echter de termen met R^2 mee, maar verwaarloost men de termen met R^4, dan vindt men in tweede benadering:

$$\omega = \gamma \left(1 - \frac{\nu^2 \cdot \gamma^2 \cdot R^2}{4}\right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (D.45.)$$

met:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \qquad \text{(dwarskontraktiekoëf.)} \qquad (D.46.)$$

Vult men de randvoorwaarden (D.22.) t/m (D.25.) in, in de uitdrukkingen voor de spanningen σ_z en τ_{rz}, dan ontstaat een oplossing van de vorm:

$$u_r = A_n \left\{ \frac{\partial J_0(h \cdot r)}{\partial r} - \frac{2n^2\pi^2}{L^2\left(2\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \frac{\omega_n^2 \cdot \rho}{\mu}\right)} \cdot \frac{J_1(k \cdot r)}{J_1(k \cdot R)} \cdot \frac{\partial J_0(h \cdot R)}{\partial R} \right\} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z}{L}\right) \cdot \cos(\omega_n t + \varepsilon). \qquad (D.47.)$$

$$u_z = \frac{n \cdot \pi}{L} A_n \left[J_0(h \cdot r) - \frac{2}{\left(2\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \frac{\omega_n^2 \cdot \rho}{\mu}\right) \cdot J_1(k \cdot R)} \cdot \frac{\partial J_0(h \cdot R)}{\partial R} \cdot \left\{ \frac{\partial J_1(k \cdot r)}{\partial r} + \frac{J_1(k \cdot r)}{r} \right\} \right] * $$

$$* \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z}{L}\right) \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \varepsilon). \qquad (D.48.)$$

Hierin is:

$$\gamma = \frac{n \cdot \pi}{L} \qquad (D.49.)$$

$$\omega_n = \frac{n \cdot \pi}{L}\left(1 - \frac{\nu^2 \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot R^2}{4L^2}\right) \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (D.50.)$$

$n = 1$ geeft de laagste eigentrillingsvorm van het vrij trillende systeem en hiervoor voldoen de afgeleide formules het best i.v.m. de eis, dat R klein moet zijn t.o.v. de golflengte van de in de cilinder optredende trilling.

Voor het konkrete probleem, dat ook met ASKA doorgerekend is, gelden de volgende gegevens:

$E = 1{,}08 \cdot 10^{11}$ N/m^2 $\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}$ $\mu = 4 \cdot 10^{10}$ N/m^2

$\nu = 0{,}35$ $\lambda = \frac{28}{3} \cdot 10^{10}$ N/m^2

$\rho = 4410$ kg/m^3

$L = 0{,}123$ m $\qquad R = 0{,}015$ m

Uit de berekeningen volgt dan:

$\omega = 1{,}25829 \cdot 10^5$ rad/sec. $\qquad f = 20026{,}3$ Hz.

Stelt men:

$$u_r = \hat{u}_r \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{L}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varepsilon) \quad [m] \tag{D.51.}$$

$$u_z = \hat{u}_z \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{L}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varepsilon) \quad [m] \tag{D.52.}$$

$$\sigma_r = \hat{\sigma}_r \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{L}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varepsilon) \quad [N/m^2] \tag{D.53.}$$

$$\sigma_\theta = \hat{\sigma}_\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{L}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varepsilon) \quad [N/m^2] \tag{D.54.}$$

$$\sigma_z = \hat{\sigma}_z \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{L}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varepsilon) \quad [N/m^2] \tag{D.55.}$$

$$\tau_{rz} = \hat{\tau}_{rz} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{L}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varepsilon) \quad [N/m^2] \tag{D.56.}$$

Dan is uitgaande van $\hat{u}_{z(r=0)} = -1 \cdot 10^{-6}$ m.:

	r = 0,0 m.	r = 0,005 m.	r = 0,010 m.	r = 0,015 m.
$\hat{u}_r$	0,0	$-0{,}0456 \cdot 10^{-6}$	$-0{,}0906 \cdot 10^{-6}$	$-0{,}1343 \cdot 10^{-6}$
$\hat{u}_z$	$-1{,}0000 \cdot 10^{-6}$	$-0{,}9970 \cdot 10^{-6}$	$-0{,}9882 \cdot 10^{-6}$	$-0{,}9738 \cdot 10^{-6}$
$\hat{\sigma}_r$	$-5{,}5179 \cdot 10^4$	$-4{,}8897 \cdot 10^4$	$-3{,}0173 \cdot 10^4$	$0{,}0616 \cdot 10^4$
$\hat{\sigma}_\theta$	$-5{,}5179 \cdot 10^4$	$-5{,}2380 \cdot 10^4$	$-4{,}4003 \cdot 10^4$	$-3{,}0111 \cdot 10^4$
$\hat{\sigma}_z$	$271{,}98 \cdot 10^4$	$271{,}48 \cdot 10^4$	$270{,}00 \cdot 10^4$	$267{,}57 \cdot 10^4$
$\hat{\tau}_{rz}$	0,0	$0{,}0787 \cdot 10^4$	$0{,}0981 \cdot 10^4$	0,0

Opmerking: Uit de berekening blijkt $\hat{\sigma}_{r(r=R)}$ niet precies nul te zijn. Dit wordt veroorzaakt, door de benaderingen, die in de frequentievergelijking ingevoerd zijn. Deze afwijking is echter verwaarloosbaar klein.

Hierdoor is $\ddot{\tilde{\eta}}_R$ op te lossen uit:

$$\ddot{\tilde{\eta}}_R = L_R^{-t} \cdot X_R^t \cdot f_{red} \qquad (2.3.2.33.)$$

In ASKA wordt door de substitutie van:

$$u_R = Q_R \cdot \eta_R \qquad (2.3.2.34.)$$

de beweging als star lichaam bepaald uit:

$$\ddot{\eta}_R = \Lambda_R^{-1} \cdot Q_R^t \cdot X_R^t \cdot f_{red} \qquad (2.3.2.35.)$$

Op de oplossing van dit stelsel vergelijkingen zal in hoofdstuk 2.3.9. verder worden ingegaan.

De m.b.v. (2.3.2.23.) verkregen stijfheidsmatrix K_{EE} is regulier en de eigenwaarde-analyse geeft de eigenvektoren van het elastische systeem. Voor de fysische interpretatie moeten de resultaten teruggetransformeerd worden naar het oorspronkelijke systeem.(m.b.v. processor RIGBAK)

In ASKA worden de matrices X_R, S_E, K_{EE}, M_{EE} en Λ_R aangemaakt m.b.v. de processor RIGID. Hiermee wordt tevens gekontroleerd of de door de gebruiker opgegeven beweging als star lichaam ook inderdaad een beweging als star lichaam is.
M.b.v. de processor RIGINI worden uit de beginvoorwaarden van het oorspronkelijke systeem de beginvoorwaarden berekend, die nodig zijn voor de beweging als star lichaam.

De bewegingsmogelijkheden als star lichaam moeten door de gebruiker opgegeven worden in de A.P.C.-data. Dit gebeurt m.b.v. de invoerkaarten:

```
$RMOD  N=1  X=1  U=0          (header card)
       1  2  0  0             (data card)
```

Op de z.g. "header card" wordt vermeld:

$: om aan te geven, dat het invoergegevens betreft.

RMOD: om het type invoergegevens aan te geven.

N : is een getal, waarmee de gebruiker definieert voor welk net de invoergegevens bestemd zijn. (Men kan een probleem nl. indelen in meerdere netten, waaraan min of meer los van elkaar, kan worden gerekend; z.g. "substructuring".)

X : geeft aan hoeveel (onafhankelijke) bewegingsmogelijkheden als star lichaam gedeklareerd worden. Omdat elke bewegingsmogelijkheid als star lichaam op een nieuwe "data card" gedefinieerd moet worden, geeft X dus ook aan hoeveel "data cards" volgen.

U : geeft aan hoeveel subsystemen er zijn met deze bewegingsmogelijkheden als star lichaam.

Op de "data card" komen vier getallen:

1[e] getal geeft aan de hoeveelste bewegingsmogelijkheid als star lichaam het is (loopt dus van 1 tot X).

2[e] getal geeft de soort beweging aan, bijv. translatie en in welke richting of rotatie en om welke as (zie tabel).

3[e] en 4[e] getal (kp 1 en kp 2) geeft de knooppunten aan waaruit m.b.v. de bijbehorende koördinaten de richting van de beweging bepaald kan worden, omdat de as van de beweging als star lichaam door deze twee knooppunten moet gaan.

	soort	kp 1 = kp 2 = 0	kp 1 = kp 2 $\neq$ 0 of kp 1 = 0 en kp 2 $\neq$ 0 of kp 1 $\neq$ 0 en kp 2 = 0	kp 1 $\neq$ kp 2 en kp 1 $\neq$ 0 en kp 2 $\neq$ 0
trans- latie	1 2 3	in de (1) richting (2) van de as (3)	in de richting (1) van de as (2) (3)	in de richting door kp 1 en kp 2. *)
ro- tatie	4 5 6	rotatie- (1) as is (2) (3)	rotatieas gaat (1) door kp $\neq$ 0 en (2) parallel aan as (3)	rotatieas gaat door kp 1 en kp 2 **)

kp = knooppunt.

*) in dit geval betekent soort = 1 of 2 of 3 precies hetzelfde.

**) in dit geval betekent soort = 4 of 5 of 6 precies hetzelfde.

Dus zodra er bijv. een translatie in de 2-richting mogelijk is, dan kan men op de data card één van de volgende kombinaties vermelden:

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & p & 0 \\ 1 & 2 & 0 & p \\ 1 & 2 & p & p \end{array}\right\} \quad p = \text{willekeurig knooppunt.}$$

Met alle vier de kombinaties wordt hetzelfde bereikt.

Is er een rotatie mogelijk om knooppunt p parallel aan de 3-as, dan kan men dat op één van de volgende manieren vermelden:

```
1   6   p   0
1   6   0   p
1   6   p   p
```

Hier wordt met alle drie de kombinaties hetzelfde bereikt.

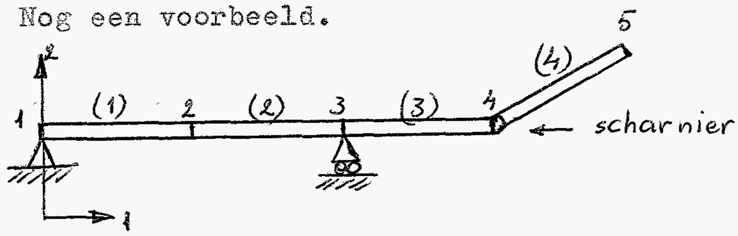
Voor het **voorbeeld** uit hoofdstuk 2.2.3.1. kan niet het hele systeem, maar slechts een gedeelte ervan een beweging als star lichaam uitvoeren nl. element 2 kan in 1-richting bewegen.
Hiervoor zien de A.P.C.-data kaarten er als volgt uit:

```
$RMOD  N = 1  X = 1  U = 1
       1   1   0   0
$RSUB  N = 1  I = 1  X = 2
       2   3
```

Op de "header card" die begint met $RSUB is:
N: netnummer.
I: geeft aan over de hoeveelste bewegingsmogelijkheid als star lichaam het gaat, gedefinieerd met $RMOD.
X: geeft aan hoeveel knooppunten bij deze beweging betrokken zijn.

Op de "data card" worden dan de knooppunten vermeld, die bij de beweging betrokken zijn. De vrijheidsgraden, die hiermee overeenkomen moeten van het type "lokaal" of "extern" zijn.

Nog een voorbeeld.



Figuur 2.3.2.1.

Konstruktie opgebouwd uit staafelementen.
Vrijheidsgraden per knooppunt: 3 verplaatsingen en
3 hoekverdraaiingen.
Element (4) is in knooppunt 4 scharnierend verbonden met element (3).

```
$RMOD  N = 1  X = 1  U = 1
       1    6    4    0
$RSUB  N = 1  I = 1  X = 2
       4    5
```

2.3.3. Oplossen van het eigenwaardeprobleem.

Het op te lossen stelsel is van de vorm:

$$M_{xx} \cdot \ddot{u}_x + K_{xx} \cdot u_x = f_x \qquad (2.3.3.1.)$$

De te onderscheiden gevallen zijn:

a. geen reduktie en geen eliminatie van de beweging als star lichaam, dan is:

$$M_{xx} = M_{LL} \; ; \; K_{xx} = K_{LL} \text{ en } f_x = f_L - M_{LP} \cdot \ddot{u}_P - K_{LP} \cdot u_P$$

b. wel reduktie maar geen beweging als star lichaam, dan is:

$$M_{xx} = M_{red} \; ; \; K_{xx} = K_{red} \text{ en } f_x = f_{red}$$

c. wel of geen reduktie maar wel eliminatie van de beweging als star lichaam, dan is:

$$M_{xx} = M_{EE} \; ; \; K_{xx} = K_{EE} \text{ en } f_x = f_E$$

Van vergelijkingen (2.3.3.1.) worden eerst de homogene vergelijkingen opgelost:

$$M_{xx} \cdot \ddot{u}_x + K_{xx} \cdot u_x = 0 \qquad (2.3.3.2.)$$

Als nu K_{xx} symmetrisch en positief-definiet is, kan dit probleem worden opgelost met de hieronder beschreven methode.

Het is bekend, dat de oplossing van een stelsel lineaire tweede orde differentiaalvergelijkingen met konstante koëfficiënten van de volgende vorm zal zijn:

$$u(t) = v \cdot e^{s.t} \qquad (2.3.3.3.)$$

waarbij de vektor v en de skalaire grootheid s niet van t afhangen.

Substitutie levert:

$$(s^2 \cdot M_{xx} + K_{xx}) \cdot v \cdot e^{s.t} = 0 \qquad (2.3.3.4.)$$

Deze relatie moet gelden voor iedere t en dus moet ook gelden:

$$(s^2 \cdot M_{xx} + K_{xx}) \cdot v = 0 \qquad (2.3.3.5.)$$

Voor alle waarden van s waarvoor de matrix $(s^2 \cdot M_{xx} + K_{xx})$ regulier is, heeft dit stelsel slechts één oplossing, nl. $v = 0$. Deze triviale oplossing is echter oninteressant, omdat uit $v = 0$ met (2.3.3.3.) direkt volgt dat $u = u(t)$ voor alle t gelijk is aan nul. Er wordt echter naar niet triviale, dus van nul verschillende oplossingen voor $u = u(t)$ gezocht. Deze kunnen echter alleen optreden als de matrix $(s^2 \cdot M_{xx} + K_{xx})$ singulier is.

Dus moet gelden:

$$\det(s^2 \cdot M_{xx} + K_{xx}) = 0 \qquad (2.3.3.6.)$$

Definieert men nu:

$$\lambda = -\frac{1}{s^2} \qquad (s \neq 0) \qquad (2.3.3.7.)$$

dan gaat (2.3.3.6.) over in:

$$\det(M_{xx} - \lambda . K_{xx}) = 0 \qquad (2.3.3.8.)$$

Laat λ_1, λ_2, ..., λ_{n_x} oplossingen van deze n_x^e-graads vergelijking zijn, dan mag men zonder enige beperking van de algemeenheid eisen, dat de oplossingen als volgt genummerd zijn:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots\ldots\ldots \geq \lambda_{n_x} > 0 \qquad (2.3.3.9.)$$

Laat v_i de bij λ_i behorende eigenvektor zijn, dus:

$$(M_{xx} - \lambda_i \cdot K_{xx}) \cdot v_i = 0 \qquad (2.3.3.10.)$$

dan kan men definiëren; de matrix van eigenvektoren:

$$X = \left[v_1 \quad v_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad v_{n_x} \right] \qquad (2.3.3.11.)$$

en de diagonaalmatrix van eigenwaarden:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \emptyset \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdot & \\ \emptyset & & & \cdot \lambda_{n_x} \end{bmatrix} \qquad (2.3.3.12.)$$

De eigenvektoren zitten zodanig in de matrix X opgeborgen, dat geldt:

$$X(i,j) = v_j(i) \quad \text{voor } i,j = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n_x \qquad (2.3.3.13.)$$

In ASKA wordt het eigenwaardeprobleem:

$$(M_{xx} - \lambda . K_{xx}) . v = 0 \qquad (2.3.3.14.)$$

getransformeerd naar:

$$(A_{xx} - \lambda . I) . \tilde{v} = 0 \qquad (2.3.3.15.)$$

Hierbij veranderen niet de eigenwaarden λ_1, λ_2, ..., λ_n, maar wel de eigenvektoren v, en wel volgens:

$$v = C_x . \tilde{v} \qquad (2.3.3.16.)$$

Hierin is C_x een "rechtsbovendriehoeksmatrix" ook wel Cholesky-faktor genoemd en wel zodanig, dat:

$$C_x^t . C_x = K_{xx} \qquad (2.3.3.17.)$$

M.b.v. deze C_x is A_{xx} uit (2.3.3.15.) te schrijven als:

$$A_{xx} = C_x^{-t} . M_{xx} . C_x^{-1} \qquad (2.3.3.18.)$$

Aangezien M_{xx} (semi)positief-definiet is en K_{xx} positief-definiet, is A_{xx} ook semi positief-definiet. Bovendien is A_{xx} symmetrisch, dus alle $\lambda_i > 0$ en eigenvektoren onderling orthogonaal (eventueel orthogonaal te kiezen indien $\lambda_i = \lambda_j$) zodat $\tilde{v}_j . \tilde{v}_i = \delta_{ij}$.
Dan volgt:

$$\tilde{X}^t . A_{xx} . \tilde{X} = \Lambda \qquad (2.3.3.19.)$$

$$\tilde{X}^t . \tilde{X} = I \qquad (2.3.3.20.)$$

en dus ook:

$$X^t . K_{xx} . X = I \qquad (2.3.3.21.)$$

$$X^t . M_{xx} . X = \Lambda \qquad (2.3.3.22.)$$

In (2.3.3.19.) is $\tilde{X}$ gedefinieerd als:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \ldots\ldots & \tilde{v}_{n_x} \end{bmatrix}$$

In ASKA wordt de matrix A_{xx} opgelost m.b.v. de methode van Cholesky[7,8]. Dit gebeurt als volgt:

a. uit (2.3.3.17.) wordt C_x opgelost.

b. uit de vergelijking:

$$C_x^t \cdot D_{xx}^t = M_{xx}^t = M_{xx} \qquad (2.3.3.23.)$$

wordt de matrix D_{xx} opgelost.

c. uit de vergelijking:

$$C_x^t \cdot A_{xx} = D_{xx} \qquad (2.3.3.24.)$$

wordt de matrix A_{xx} opgelost.

Van het stelsel (2.3.3.15.) worden de eerste p eigenwaarden en bijbehorende eigenvektoren bepaald bijv. m.b.v. de Householder methode. Hiertoe wordt de matrix A_{xx} getransformeerd naar een symmetrische bandmatrix B_{xx}, die op haar beurt weer wordt getransformeerd naar een tri-diagonale matrix E_{xx}, waarvan de eigenwaarden en eigenvektoren nummeriek op een relatief eenvoudige wijze kunnen worden bepaald. Hierna vindt terugtransformatie van de eigenvektoren van de matrix E_{xx} naar het oorspronkelijke systeem plaats.[8]

M.b.v. de processor NATMOD (N1E, NE, A1E, AE, N1X, NX) wordt in ASKA het gewenste aantal eigenwaarden en eigenvektoren bepaald. Hierin is:

N1E: de index van de grootste eigenwaarde die berekend moet worden.

NE : het aantal opeenvolgende eigenwaarden dat berekend moet worden.

A1E: de laagste algebraïsche grens voor de te berekenen eigenwaarden. (alleen nodig indien N1E en NE nul ingevoerd wordt)

AE : Het algebraïsche interval waarin de eigenwaarden berekend moeten worden. ($A1E \leq \lambda_i \leq A1E + AE$)

NlE: de index van de eerste eigenvektor die bepaald moet worden (komt overeen met λ_{N1X}), NlE $\leq$ NlX en NlX + NX $\leq$ NlE + NE.

NX : het aantal eigenvektoren.

2.3.4. Overgang op natuurlijke koördinaten.

Het oorspronkelijke stelsel differentiaalvergelijkingen (2.3.3.1.) bestaat uit n_x gekoppelde differentiaalvergelijkingen. Dit stelsel kan in een veel eenvoudigere vorm gebracht worden, door over te gaan op de z.g. natuurlijke koördinaten $\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots, \eta_{n_x}$, die de komponenten zijn van de vektor η.

Deze vektor wordt gedefinieerd door:

$$u_x(t) = X . \eta(t) \qquad (2.3.4.1.)$$

Omdat de kolommen van de matrix X bestaan uit de eigenvektoren $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{n_x}$ kan i.p.v. (2.3.4.1.) ook geschreven worden:

$$u_x(t) = \sum_{i=1}^{n_x} \eta_i(t) . v_i \qquad (2.3.4.2.)$$

Hieruit volgt direkt, dat η_i geïnterpreteerd kan worden als de tijdsafhankelijke faktor, die de bijdrage van de i^e-eigentrillingsvorm tot de totale oplossing $u = u(t)$ bepaalt.

Wordt (2.3.4.1.) ingevuld in (2.3.3.1.) en wordt deze relatie vóórvermenigvuldigd met X^t, dan ontstaat:

$$X^t . M_{xx} . X . \ddot{\eta} + X^t . K_{xx} . X . \eta = X^t . f_x \qquad (2.3.4.3.)$$

Op grond van (2.3.3.21.) en (2.3.3.22.) geldt dus:

$$\Lambda . \ddot{\eta} + I . \eta = R(t) \qquad (2.3.4.4.)$$

$$R(t) = X^t . f_x \qquad (2.3.4.5.)$$

Het stelsel (2.3.4.4.) is veel eenvoudiger dan (2.3.3.1.) omdat (2.3.4.4.) een stelsel is van n_x ontkoppelde d.v.'s.

2.3.5. Dynamische kondensatie.

De response $u_x(t)$ kan volgens (2.3.4.2.) uitgedrukt worden als een lineaire tijdsafhankelijke kombinatie van de eigentrillingsvormen v_i (8):

$$u_x(t) = v_1 \cdot \eta_1(t) + v_2 \cdot \eta_2(t) + \ldots . + v_p \cdot \eta_p(t) \qquad (2.3.5.1.)$$

Deze relatie is "exakt" voor $p = n_x$ met n_x de orde van de vektoren u_x en v_i. Indien niet alle eigenvektoren worden meegenomen, maar slechts p (met $p < n_x$), dan vindt z.g. dynamische kondensatie plaats.

Twee hoofdkriteria, die het aantal mee te nemen eigenvektoren (p) bepalen, zodanig dat een redelijke benadering voor de verplaatsingsvektor u_x wordt bereikt zijn:

a. Hoeveel eigentrillingsvormen v_i zijn fysisch relevant? T.g.v. de bij de diskretisatie geïntroduceerde benaderingen hebben de hogere trillingsvormen fysisch geen betekenis en $p \leq \frac{1}{2} \cdot n_x$ zal in de meeste gevallen voldoende zijn. Hierbij komt nog, dat uit berekeningen aan gediskretiseerde, oorspronkelijk kontinue konstrukties is gebleken dat het aantal redelijk nauwkeurig berekende eigenwaarden en eigenvektoren bij benadering gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot n_x$ tot $\frac{1}{2} \cdot n_x$ (n_x: aantal vrijheidsgraden). Ook daarom is het niet erg zinnig om $p > \frac{1}{2} \cdot n_x$ te kiezen. Wat echter de invloed van de niet meegenomen eigentrillingsvormen is op het numerieke resultaat is over het algemeen moeilijk te voorspellen.

b. Hoe gedraagt de tijdsafhankelijke gewichtsfaktor $\eta_i(t)$ zich, juist voor de hogere eigentrillingsvormen?

Bij problemen met voorgeschreven verplaatsingen hebben de daarbij bepaalde eigentrillingsvormen (de eigenvektoren) fysisch gezien weinig of niets te maken met het door te rekenen probleem. Dit komt, omdat hierbij de eigentrillingsvormen bepaald worden van een systeem, waarbij de voorgeschreven verplaatsingen in de berekeningsmethode behandeld worden als voorgeschreven verplaatsingen gelijk aan nul. Dit zal nog verduidelijkt worden in appendix C.

Wordt geaksepteerd, dat niet alle eigenvektoren meegenomen behoeven te worden, dan leidt dit tot de transformatie:

$$u_x = X \cdot \eta(t) \qquad (2.3.5.2.)$$

waarin u_x en η vektoren zijn met n_x resp. p komponenten, terwijl X een matrix is van orde (n_x , p). Deze matrix X ontstaat door de laatste $(n_x - p)$ kolommen, dus de eigenvektoren v_{p+1}, v_{p+2}, ..., v_{n_x}, te verwijderen uit de oorspronkelijke matrix X van orde (n_x , n_x).

2.3.6. Beginvoorwaarden.

Aangezien de beginvoorwaarden door de gebruiker worden gegeven als $u_x(t_o)$ en $\dot{u}_x(t_o)$ is het nodig deze om te zetten in het η - systeem, dus om te werken tot $\eta(t_o)$ en $\dot{\eta}(t_o)$.

Voor het geval, dat alle eigenvektoren meegenomen worden is X een vierkante reguliere matrix, waarvan de inverse op een eenvoudige manier bepaald kan worden uit (2.3.3.21.):

$$X^t \cdot K_{xx} \cdot X = I \qquad (2.3.6.1.)$$

Dan is:

$$X^{-1} = X^t \cdot K_{xx} \qquad (2.3.6.2.)$$

Uit (2.3.4.1.) volgt dan met (2.3.6.2.):

$$\eta(t_o) = X^{-1} \cdot u_x(t_o) = X^t \cdot K_{xx} \cdot u_x(t_o) \qquad (2.3.6.3.)$$

$$\dot{\eta}(t_o) = X^{-1} \cdot \dot{u}_x(t_o) = X^t \cdot K_{xx} \cdot \dot{u}_x(t_o) \qquad (2.3.6.4.)$$

In "ASKA part II - Linear dynamic analysis. Lecture notes and exemple problems"(8) is afgeleid, vergelijkingen (2.3.6.3.) en (2.3.6.4.) ook gelden voor het geval, dat niet alle eigenvektoren meegenomen worden, maar slechts p.

Voor het geval, dat de bewegingsmogelijkheden als star lichaam geëlimineerd zijn, treedt er een extra moeilijkheid

op in de overgang op de η-koördinaten, omdat de beginvoorwaarden omgezet moeten worden in beginvoorwaarden voor het elastische systeem en in beginvoorwaarden voor het systeem, dat de beweging als star lichaam weergeeft.
De overgang op de η-koördinaten gaat als volgt:

$$u_C(t_o) = \begin{bmatrix} S_E & X_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_E(t_o) \\ u_R(t_o) \end{bmatrix} = S_E \cdot u_E(t_o) + X_R \cdot u_R(t_o) \qquad (2.3.6.5.)$$

of wel:

$$u_C(t_o) = S_E \cdot X \cdot \eta(t_o) + X_R \cdot Q_R \cdot \eta_R(t_o) = \tilde{u}_E(t_o) + \tilde{u}_R(t_o) \qquad (2.3.6.6.)$$

Voor het elastische systeem geldt volgens (2.3.6.3.):

$$\eta(t_o) = X^t \cdot K_{EE} \cdot u_E(t_o) \qquad (2.3.6.7.)$$

Substitutie van (2.3.2.23.) in (2.3.6.7.) geeft:

$$\eta(t_o) = X^t \cdot S_E^t \cdot K_{red} \cdot S_E \cdot u_E(t_o) \qquad (2.3.6.8.)$$

Substitueert men hierin (2.3.6.5.), dan geldt:

$$\eta(t_o) = X^t \cdot S_E^t \cdot K_{red} \cdot \left\{ u_C(t_o) - X_R \cdot u_R(t_o) \right\} \qquad (2.3.6.9.)$$

Aangezien bovendien nog geldt, dat $K_{red} \cdot X_R = 0$ (zie hoofdstuk 2.3.2.) leidt (2.3.6.9.) tenslotte tot:

$$\eta(t_o) = X^t \cdot S_E^t \cdot K_{red} \cdot u_C(t_o) \qquad (2.3.6.10.)$$

en analoog:

$$\dot{\eta}(t_o) = X^t \cdot S_E^t \cdot K_{red} \cdot \dot{u}_C(t_o) \qquad (2.3.6.11.)$$

Voor het systeem, dat de beweging als star lichaam representeert geldt:

$$u_R = Q_R \cdot \eta_R \qquad (2.3.2.34.)$$

Omdat Q_R orthonormaal is, d.w.z.:

$$Q_R^t \cdot Q_R = I \tag{2.3.6.12.}$$

geldt:

$$\eta_R = Q_R^t \cdot u_R \tag{2.3.6.13.}$$

Omdat X_R ook orthonormaal is, is (2.3.6.5.) door voorvermenigvuldiging met X_R^t om te vormen tot:

$$u_R(t_o) = X_R^t \cdot u_C(t_o) - X_R^t \cdot S_E \cdot u_E(t_o) \tag{2.3.6.14.}$$

Met (2.3.6.13.) geldt nu:

$$\eta_R(t_o) = Q_R^t \cdot X_R^t \cdot u_C(t_o) - Q_R^t \cdot X_R^t \cdot S_E \cdot u_E(t_o) \tag{2.3.6.15.}$$

Dit is met (2.3.5.2.) en (2.3.6.10.) nog te schrijven als:

$$\eta_R(t_o) = Q_R^t \cdot X_R^t \cdot u_C(t_o) - Q_R^t \cdot X_R^t \cdot S_E \cdot X \cdot X^t \cdot S_E^t \cdot K_{red} \cdot u_C(t_o) \tag{2.3.6.16.}$$

In "ASKA part II - Linear Dynamic Analysis, Lecture notes and example problems" wordt de tweede term van (2.3.6.16.) gelijk aan nul verondersteld, wat mijns inziens ten onrechte gebeurt, althans waarvan ik de juistheid niet kan bewijzen.

$\dot{\eta}_R(t_o)$ wordt geheel op analoge wijze gedefinieerd.

2.3.7. De totale elastische response.

Veronderstelt men, dat in:

$$\Lambda \cdot \ddot{\eta} + I \cdot \eta = R(t) \tag{2.3.4.4.}$$

de determinant van de diagonaalmatrix Λ ongelijk is aan nul, en dat na het elimineren van de bewegingsmogelijkheden als star lichaam, dan kan men schrijven:

$$I \cdot \ddot{\eta} + \Lambda^{-1} \cdot \eta = \Lambda^{-1} \cdot R(t) \tag{2.3.7.1.}$$

of:

$$I \cdot \ddot{\eta} + \Omega^2 \cdot \eta = \phi(t) \qquad (2.3.7.2.)$$

De i^e rij van dit stelsel representeert de differentiaal-vergelijking voor η_i , $1 \leq i \leq p$:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \cdot \eta_i = \varphi_i(t) \qquad (2.3.7.3.)$$

De oplossing hiervan kan geschreven worden als:

$$\eta_i(t) = \int_{\tau=t_o}^{t} \frac{\sin \omega_i(t-\tau)}{\omega_i} \cdot \varphi_i(\tau) \cdot d\tau + \frac{\sin \omega_i(t-t_o)}{\omega_i} \cdot \dot{\varphi}_i(t_o) + $$
$$+ \cos \omega_i(t-t_o) \cdot \varphi_i(t_o) \qquad (2.3.7.4.)$$

Voor de afleiding hiervan wordt verwezen naar appendix B.

Van (2.3.7.4.) is de eerste afgeleide naar de tijd:

$$\dot{\eta}_i(t) = \int_{\tau=t_o}^{t} \cos \omega_i(t-\tau) \cdot \varphi_i(\tau) \cdot d\tau + \cos \omega_i(t-t_o) \cdot \dot{\varphi}_i(t_o) + $$
$$- \omega_i \cdot \sin \omega_i(t-t_o) \cdot \varphi_i(t_o) \qquad (2.3.7.5.)$$

De tweede afgeleide wordt dan gevonden uit:

$$\ddot{\eta}_i(t) = \varphi_i(t) - \omega_i^2 \cdot \eta_i(t) \qquad (2.3.7.6.)$$

De integralen in vergelijking (2.3.7.4.) en (2.3.7.5.) kunnen analytisch berekend worden voor zekere typen funkties $\varphi_i(t)$ (bijv. trigonometrische funkties en polynomen). Het kan dus ook voor funkties, die voldoende nauwkeurig uitgedrukt kunnen worden door een eindige som van bovengenoemde funkties (bijv. Fourierreeksen). Voor andere funkties $\varphi_i(t)$ heeft numerieke integratie de voorkeur.
Stel, dat $\varphi_i(t)$ gedefinieerd is voor $t_o \leq t \leq t_e$ en dat de response $u_C(t)$ gevraagd wordt voor de tijdstippen[8]:

$$t_j = t_o + j \cdot \Delta t \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots, m. \qquad (2.3.7.7.)$$

met:

$$\Delta t = \frac{t_e - t_o}{m} \qquad (2.3.7.8.)$$

In ASKA wordt de response voor t_j bepaald, door de waarden van $\eta(t_{j-1})$ en $\dot{\eta}(t_{j-1})$ te beschouwen als beginvoorwaarden voor de j-de integratiestap, die uitgevoerd wordt over het interval (t_{j-1}, t_j), waarbij de integratiemethode van Gauss gebruikt wordt. Daarom moet het interval Δt verdeeld worden in een aantal delen, zodanig dat de versnellingen $\ddot{u}_C(t_j)$ voldoende nauwkeurig bepaald worden. De lengte van dit "subinterval" mag variëren van stap tot stap, maar in de meeste gevallen heeft de procedure het grootste rendement als deze lengte konstant gehouden wordt voor alle stappen. De grootte van deze "subintervallen" hangt uiteraard wel af van de maximaal optredende excitatiefrequentie en van de maximale eigenfrequentie, die in de berekening nog meegenomen wordt.

2.3.8. De "steady-state-response".

Van speciaal belang is het geval, waar de excitatiefunkties $\varphi_i(t)$ trigonometrische funkties zijn of benaderingen door een Fourierreeks met een eindig aantal termen (bijv. L termen). Dan kan $_i(t)$ geschreven worden als:

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=1}^{L} a_{ik} \cdot \sin(b_{ik} \cdot t + c_{ik}) + d_{ik} \qquad (2.3.8.1.)$$

met a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} en d_{ik} konstanten.

Onder de "steady-state-response" wordt nu verstaan, de response voor $t \to \infty$. In een reëel fysisch probleem zit altijd een bepaalde dempingsinvloed zodat men mag verwachten, dat de z.g. inschakelverschijnselen na een bepaalde tijd uitgedempt zullen zijn[8]. In feite houdt men dan van de oplossing van de differentiaalvergelijkingen alleen nog maar het partikuliere deel over.

Deze is volgens appendix B formule (B.3.):

$$\eta_p(t) = \int_{\tau=t_o}^{t} \frac{\sin\omega(t-\tau)}{\omega} \cdot \varphi(\tau) \cdot d\tau \qquad (2.3.8.2.)$$

en:

$$\dot{\eta}_p(t) = \int_{\tau=t_o}^{t} \cos\omega(t-\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot d\tau \qquad (2.3.8.3.)$$

Hieruit volgt ook, dat er voor dit geval geen beginvoorwaarden $\eta_i(t_o)$ en $\dot{\eta}_i(t_o)$ nodig zijn.

Voor een $\varphi_i(t)$ volgens (2.3.8.1.) kan de oplossing van de integralen in (2.3.7.4.) en (2.3.7.5.) zo opgeschreven worden (dit geldt uiteraard ook voor de totale elastische response). Dit geeft:

$$\eta_{SSR_i}(t) = \sum_{k=1}^{L} \left\{ \frac{a_{ik}}{(\omega_i^2 - b_{ik}^2)} \cdot \sin(b_{ik} \cdot t + c_{ik}) + \frac{d_{ik}}{\omega_i^2} \right\}$$

(2.3.8.4.)

en de eerste afgeleide naar de tijd:

$$\dot{\eta}_{SSR_i}(t) = \sum_{k=1}^{L} \left\{ \frac{a_{ik} \cdot b_{ik}}{(\omega_i^2 - b_{ik}^2)} \cdot \cos(b_{ik} \cdot t + c_{ik}) \right\} \qquad (2.3.8.5.)$$

De tweede afgeleide naar de tijd kan gevonden worden uit:

$$\ddot{\eta}_{SSR_i}(t) = \varphi_i(t) - \omega_i^2 \cdot \eta_{SSR_i}(t) \qquad (2.3.8.6.)$$

De "integratiestap" $(t - t_o)$ kan willekeurig groot gekozen worden zonder invloed op de nauwkeurigheid omdat hier toch niet echt numeriek geïntegreerd wordt.

2.3.9. De response van de beweging als star lichaam.

Om de response van de beweging als star lichaam(8) te vinden wordt in ASKA het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen opgelost (zie hoofdstuk 2.3.2.):

$$I \cdot \ddot{\eta}_R = \Lambda_R^{-1} \cdot Q_R^t \cdot X_R^t \cdot f_{red} = \phi(t) \qquad (2.3.2.35.)$$

Voor de i^e rij van (2.3.2.35.) geldt:

$$\ddot{\eta}_{R_i}(t) = \varphi_i(t) \qquad (2.3.9.1.)$$

De oplossing van (2.3.9.1.) is te schrijven als:

$$\eta_{R_i}(t) = \int_{\tau=t_o}^{t} (t-\tau)\cdot\varphi_i(\tau)\cdot d\tau + (t-t_o)\cdot\mathring{\eta}_{R_i}(t_o) + \eta_{R_i}(t_o)$$

(2.3.9.2.)

en de eerste afgeleide naar de tijd:

$$\mathring{\eta}_{R_i}(t) = \int_{\tau=t_o}^{t} \varphi_i(\tau)\cdot d\tau + \mathring{\eta}_{R_i}(t_o) \qquad (2.3.9.3.)$$

De tweede afgeleide naar de tijd kan gevonden worden met (2.3.9.2.).

Realisatie in ASKA van de in de hoofdstukken 2.3.7., 2.3.8. en 2.3.9. genoemde responseberekeningen gaat als volgt. Vóór elke responseberekening wordt de totale input, die nodig is voor de responseberekening gekontroleerd op kompatibiliteit en kompleetheid m.b.v. de processor PRERES. Voor het geval, dat men geïnteresseerd is in de totale elastische response (hoofdstuk 2.3.7.) gebruikt men verder voor de berekening van η en $\mathring{\eta}$ de processor MODRES(TA, TE, INNER). Hiermee worden η en $\mathring{\eta}$ bepaald op tijdstip TE met als beginvoorwaarden η(TA) en $\mathring{\eta}$(TA). Voor het geval, dat de integralen numeriek opgelost worden, wordt het interval (TA, TE) verdeeld in een aantal evenlange intervallen ter lengte $\left(\frac{TE - TA}{INNER}\right)$.

Indien men η en $\mathring{\eta}$ wil berekenen op N tijdstippen, die op gelijke afstanden van elkaar liggen, dan is het mogelijk dit te doen met de processor MODLUP(TS, DT, INNER, N). Hierbij wordt N maal hetzelfde gedaan als met de processor MODRES, en wel voor de tijdstippen:

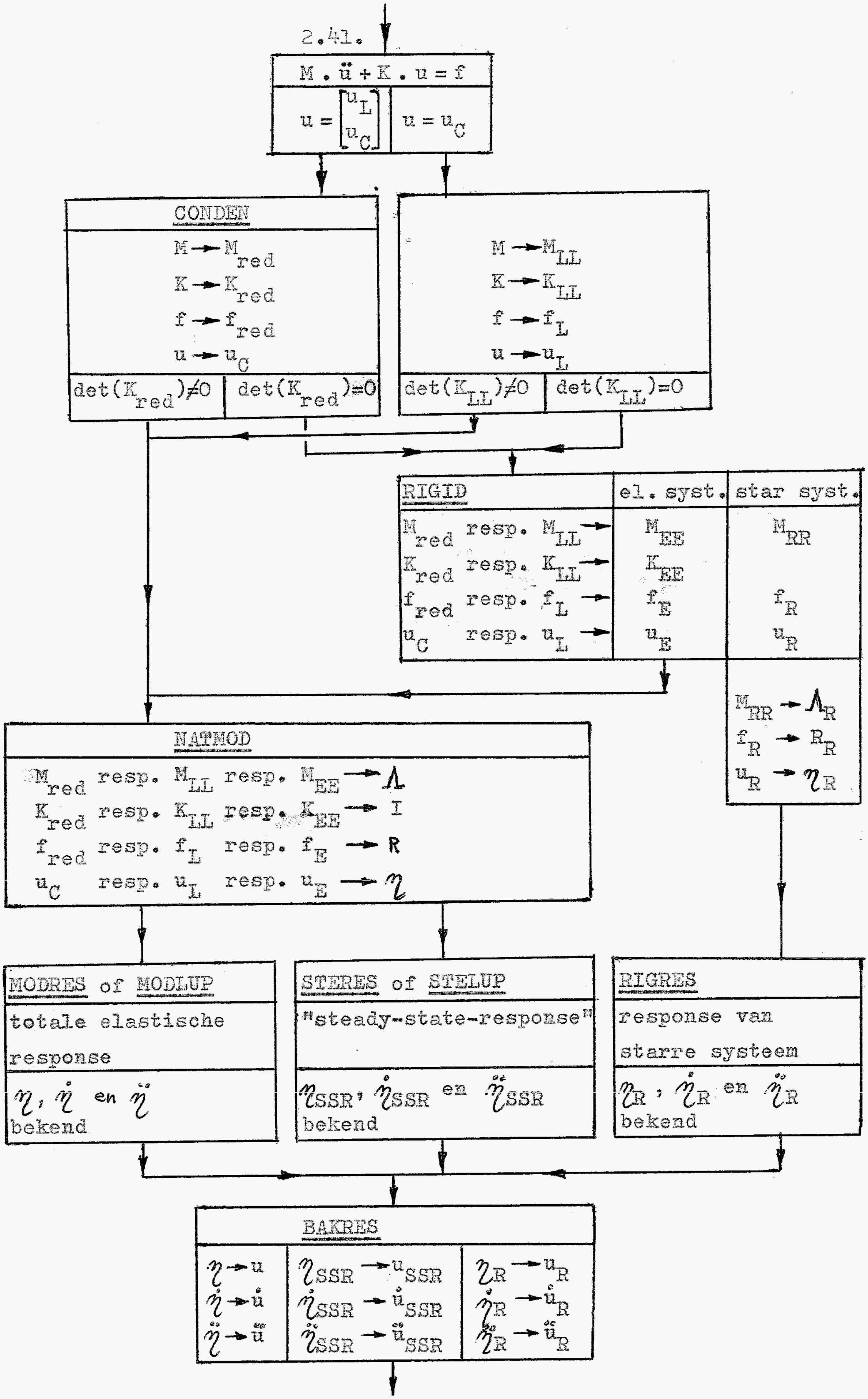
$$T = TS + P.DT \qquad P = 0, 1, 2, \ldots\ldots, N. \quad (2.3.9.4.)$$

Voor het geval, dat men geïnteresseerd is in de "steady-state-response", worden η_{SSR}(TE) en $\mathring{\eta}_{SSR}$(TE) bepaald m.b.v. de processor STERES(TE). Om deze processor aan te roepen is het uiteraard wel nodig, dat de excitatie periodiek is.

Wil men de "steady-state-response" uitvoeren op N tijdstippen, die op gelijke afstanden van elkaar liggen, dan is het mogelijk dit te doen met de processor STELUP(TS, DT, N). Dit verloopt verder geheel analoog aan de processor MODLUP(TS, DT, INNER, N) bij de totale elastische response. Voor het uitvoeren van de response van de beweging als star lichaam geldt hetzelfde als voor de totale elstische response maar hierbij wordt gebruik gemaakt van de processor RIGRES(TA, TE, INNER) i.p.v. MODRES(TA, TE, INNER). Een speciale processor om de response te bepalen op N tijdstippen is er voor dit geval niet, zodat men (als men hierin geïnteresseerd is) dan N keer de processor RIGRES aan zal moeten roepen.

2.3.10. Terugtransformatie.

Nadat de responseberekening is uitgevoerd in het η-koördinatenstelsel moeten de resultaten nog teruggetransformeerd worden in het oorspronkelijke systeem[8].
Dit wordt in ASKA gerealiseerd m.b.v. de processor BAKRES.
Voor het geval, dat er echter statisch gereduceerd is, wordt m.b.v. de processor BAKRES alleen teruggetransformeerd naar de onafhankelijke verplaatsingsgrootheden u_C.
Wil men dan ook de afhankelijke verplaatsingsgrootheden u_L berekenen, dan moet dit m.b.v. (2.3.1.8.). Deze matrixvermenigvuldiging is in ASKA uit te voeren m.b.v. de processor MULTH(4HBT , 4HSRC , 4HRSL , -1, 1, 1).
Als dit gebeurd is, zijn van de totale konstruktie alle verplaatsingen, snelheden en versnellingen bekend als funktie van de tijd en kunnen de nog onbekende krachten die optreden in de punten waar verplaatsingen voorgeschreven of onderdrukt zijn bepaald worden met (2.3.1.3.).
Uit de verplaatsingen kunnen met ASKA op statische wijze ev. de spanningen en/of rekken nog bepaald worden.
Dat hierbij extra problemen op kunnen treden is niet verwonderlijk. Door de extra benaderingen van zowel statische als dynamische kondensatie moet men aanvaarden, dat er in de verplaatsingen extra fouten geïntroduceerd zijn. Omdat de spanningen evenredig zijn met de afgeleiden van de verplaatsingen (rekken) kunnen de afwijkingen in de spanningen (en rekken) dan ook aanzienlijk vergroot worden.



Schematische voorstelling van het oplosproces.

2.3.11. Voorbeeld van een A.P.C., met het beoogde doel.

Om de voorgaande hoofdstukken te verduidelijken is hier een voorbeeld opgenomen van een A.P.C., met het beoogde doel (tussen haakjes)[6,7].

```
CALL START(1,1)
CALL SA       (inlezen, verwerken en kontroleren van de
               topologische beschrijving.)
CALL INFEL    (uitvoer van informatie omtrent de elementen.)
CALL INFUNK   (uitvoer van informatie omtrent de vrijheidsgraden.)
CALL DATIN(0,4HEOF )  (inlezen, verwerken en kontroleren van
               de knooppuntskoördinaten, elasticiteitsmodulus,
               dwarskontraktiekoëfficiënt, massadichtheid enz..)
CALL ELCO     (voor elk element worden de koördinaten bepaald
               van de bij dat element behorende knooppunten en
               volgens een lokale nummering opgeslagen.)
CALL TS       (kontrole van alle belastingsonafhankelijke
               elementgegevens.)
CALL SK       (berekent voor elk element de stijfheidsmatrix.)
CALL BK       (bouwt de totale stijfheidsmatrix op.)
CALL INFBK    (geeft informatie over de totale stijfheidsmatrix.)
CALL SM       (berekent voor elk element de massamatrix.)
CALL BM       (bouwt de totale massamatrix op.)
CALL INFBM    (geeft informatie over de totale massamatrix.)
CALL CONDEN   (statische reduktie van het probleem, indien in
               de topologische beschrijving zowel lokale als
               externe vrijheidsgraden voorkomen.)
CALL DYNIN(0,4HEOF )  (invoer van dynamische gegevens, zoals
               bewegingsmogelijkheden als star lichaam, begin-
               voorwaarden, waarden voor voorgeschreven krach-
               ten of verplaatsingen, gekoncentreerde massa's
               enz..)
CALL RIGID    (elimineren van de bewegingsmogelijkheden als
               star lichaam.)
CALL NATMOD(1,N,0.0,0.0,1,N)  (berekening van de eerste N
               eigenwaarden en eigenvektoren van het probleem.)
CALL RIGBAK   (terugsubstitutie van het systeem waar de bewe-
               gingsmogelijkheden als star lichaam geëlimineerd
               zijn naar het oorspronkelijke systeem.)
```

CALL FREQEX (geeft informatie over de eerste N met NATMOD bepaalde eigenwaarden, met de daarbij bepaalde eigenhoekfrequenties en eigenfrequenties.)

CALL RVEX2 (geeft de bijbehorende eigenvektoren van het oorspronkelijke systeem zodanig genormeerd, dat de grootst voorkomende waarde één is.)

CALL PRERES (kontroleert alle invoergegevens voor de response-analyse op kompatibiliteit en kompleetheid en bepaalt de bij het gediagonaliseerde systeem behorende grootheden zoals bijv. de beginvoorwaarden.)

CALL INFRES (geeft alle voor de bebruiker belangrijke informatie, die te maken heeft met de response-analyse, zoals het aantal elastische vrijheidsgraden, het aantal bewegingsmogelijkheden als star lichaam, het aantal eigenwaarden dat in de response-berekening meegenomen wordt, het aantal voorgeschreven verplaatsingen en hoe deze van de tijd afhangen, het aantal tijdsafhankelijke krachten enz..)

CALL STERES(TE) (berekening van de "steady-state-response" op tijdstip TE in het η-koördinatenstelsel.)

CALL BAKRES (terugtransformatie van de berekende grootheden van het η- in het u-koördinatenstelsel.)

CALL REFBUK(4HSRL)
CALL REFBUK(4HSRC)
CALL REFBUK(4HUSR)
(vernietiging van een aantal bestaande "books".)

CALL ALTLAB(4HQS ,4HSRC) (verandering van de naam van het "book" QS in SRC.)

CALL MULTH(4HBT ,4HSRC ,4HSRL ,-1,1,1) (matrixvermenigvuldiging $u_L = - T . u_C$, i.v.m. terugtransformatie.)

CALL ALTLAB(4HQP ,4HSRP)

CALL USR (omzetten van verplaatsingen van de vrijheidsgraden van interne naar externe representatie.)

CALL DATEX(0,4HUSR) (uitvoer van de verplaatsingen van de vrijheidsgraden in externe representatie.)

CALL SP (omzetten van de totale verplaatsingsvektor in verplaatsingen per element.)

```
CALL BP        (uit de verplaatsingen per element wordt m.b.v.
               de stijfheidsmatrix per element de krachts-
               vektor per element bepaald.)
CALL BRR       (uit de krachtsvektoren per element worden de
               resulterende knooppuntskrachten bepaald.)
CALL UBRR      (omzetten van de resulterende knooppuntskrach-
               ten van interne naar externe representatie.)
CALL DATEX(0,4HUBRR)  (uitvoer van de resulterende knoop-
               puntskrachten in externe representatie.)
CALL ST        (de spanningen worden elementsgewijze bepaald.)
CALL SIGEX(0,0)  (uitvoer van deze spanningen per element.)
CALL NPST      (bepaalt de gemiddelde spanningen in de knoop-
               punten uit de elementsgewijze bepaalde spanningen.)
CALL DATEX(0,4HNPST)  (uitvoer van de gemiddelde berekende
               spanningen per knooppunt.)
EXITT(0)      }
STOP          } (afsluiten van de A.P.C..)
END           }
```

APPENDIX E.

Relevante uitvoer van een ASKA programma.

```
APC-CARD READ:          CALL START(1,1)
APC-CARD READ:          CALL SA
APC-CARD READ:          CALL SET(4HBIAS,5)
APC-CARD READ:          CALL INFEL
APC-CARD READ:          CALL INFUNK
APC-CARD READ:          CALL PATA
APC-CARD READ:          CALL DATIN(0,4HEOF )
APC-CARD READ:          CALL ELCO
APC-CARD READ:          CALL TS
APC-CARD READ:          CALL SK
APC-CARD READ:          CALL BK
APC-CARD READ:          CALL INFBK
APC-CARD READ:          CALL SM
APC-CARD READ:          CALL BM
APC-CARD READ:          CALL INFEM
APC-CARD READ:          CALL CONDEN
APC-CARD READ:          CALL DYNIN(0,4HEOF )
APC-CARD READ:          CALL RIGID
APC-CARD READ:          CALL NATMOD(1,1,0.,0.,1,1)
APC-CARD READ:          CALL RIGBAK
APC-CARD READ:          CALL FREQEX
APC-CARD READ:          CALL RVEX1
APC-CARD READ:          CALL RVEX2
APC-CARD READ:          CALL SP
APC-CARD READ:          CALL BP
APC-CARD READ:          CALL BRR
APC-CARD READ:          CALL UBRR
APC-CARD READ:          CALL DATEX(0,4HUBRR)
APC-CARD READ:          CALL ST
APC-CARD READ:          CALL STGEX(0,0)
APC-CARD READ:          CALL NPST
APC-CARD READ:          CALL DATEX(0,4HNPST)
APC-CARD READ:          CALL EXITT(0)
APC-CARD READ:          STOP
APC-CARD READ:          END
APC-CARD READ: ƒ

  ACCU               NET    ****
======
  1000       1.   TOPOLOGICAL DESCRIPTION
  1001       2.   NET     (1)(231)(GOLFGELEIDER A  30MM.)
  1002       3.   TRIAX6  (1)(8)(1,28)(8,28)(15,28)(16,28)(17,28)(9,28)
  1002       4.   R        (2)(0)(14)(14)(14)(7)(0)(7)
  1002       5.   RR       (2)(0)(0)(4)(0)(4)(0)(4)(0)(4)(0)(4)(0)(4)(0)
  1003       6.   TRIAX6  (1)(8)(1,28)(9,28)(17,28)(10,28)(3,28)(2,28)
  1003       7.   R        (2)(0)(16)(14)(12)(20)(28)(22)
  1003       8.   RR       (2)(0)(0)(4)(0)(4)(0)(4)(0)(4)(0)(4)(0)(4)(0)
  1004       9.   TRIAX6  (1)(8)(3,28)(10,28)(17,28)(11,28)(5,28)(4,28)
  1004      10.   R        (2)(0)(14)(14)(14)(21)(28)(21)
  1005      11.   TRIAX6  (1)(8)(5,28)(11,28)(17,28)(18,28)(19,28)(12,28)
  1005      12.   R        (2)(0)(12)(14)(16)(8)(0)(6)
  1006      13.   SUPPRESS (1)(33)(1,7)
  1007      14.   EXTERNAL (2)(17)(1,14)
  1008      15.   EXTERNAL (1,2)(17)(3,14)
  1009      16.   EXTERNAL (1,2)(17)(5,14)
  1010      17.   EXTERNAL (1,2)(17)(7,14)
  1011      18.   EXTERNAL (2)(4)(8,2)
  1012      19.   EXTERNAL (2)(4)(218,2)
  1013      20.   END NET
  1014      21.   END TOPOLOGICAL DESCRIPTION

     1.366 SEC RUN TIME FOR ACCU                                0 ERROR(S
```

INFNET NET 1
======

CHARACTERISTICS OF NET 1, GOLFGELEIDER A 30MM.

231	NODAL POINTS	96	ELEMENTS
302	UNKNOWNS IN STRUCTURE	8	PARTITIONS
127	EXTERNAL FREEDOMS	4	PARTITIONS
0	PRESCRIBED FREEDOMS	0	PARTITIONS
33	SUPPRESSED FREEDOMS	1	PARTITIONS

76 NODAL POINTS CONTAIN EXTERNAL FREEDOMS

2 FREEDOMS PER NODE PROVIDED
3 CO-ORDINATES PER NODE PROVIDED

0.005 SEC RUN TIME FOR INFNET 0 ERROR(S

INFEL NET 1
======

ELEMENTS IN NET 1, GOLFGELEIDER A 30MM.

GROUP/NR.	TYPE		1 16	2 17	3 18	4 19	5 20	6 21	7 22	8 23	9 24	10 25	11 26
1/ 1	TRIAX6	I	1	8	15	16	17	9					
1/ 2	TRIAX6	I	29	36	43	44	45	37					
1/ 3	TRIAX6	I	57	64	71	72	73	65					
1/ 4	TRIAX6	I	85	92	99	100	101	93					
1/ 5	TRIAX6	I	113	120	127	128	129	121					
1/ 6	TRIAX6	I	141	148	155	156	157	149					
1/ 7	TRIAX6	I	169	176	183	184	185	177					
1/ 8	TRIAX6	I	197	204	211	212	213	205					
1/ 9	TRIAX6	I	15	22	29	23	17	16					
1/ 10	TRIAX6	I	43	50	57	51	45	44					
1/ 11	TRIAX6	I	71	78	85	79	73	72					
1/ 12	TRIAX6	I	99	106	113	107	101	100					
1/ 13	TRIAX6	I	127	134	141	135	129	128					
1/ 14	TRIAX6	I	155	162	169	163	157	156					
1/ 15	TRIAX6	I	183	190	197	191	185	184					
1/ 16	TRIAX6	I	211	218	225	219	213	212					
1/ 17	TRIAX6	I	5	12	19	20	21	13					
1/ 18	TRIAX6	I	33	40	47	48	49	41					
1/ 19	TRIAX6	I	61	68	75	76	77	69					
1/ 20	TRIAX6	I	89	96	103	104	105	97					
1/ 21	TRIAX6	I	117	124	131	132	133	125					
1/ 22	TRIAX6	I	145	152	159	160	161	153					
1/ 23	TRIAX6	I	173	180	187	188	189	181					
1/ 24	TRIAX6	I	201	208	215	216	217	209					
1/ 25	TRIAX6	I	19	26	33	27	21	20					
1/ 26	TRIAX6	I	47	54	61	55	49	48					
1/ 27	TRIAX6	I	75	82	89	83	77	76					
1/ 28	TRIAX6	I	103	110	117	111	105	104					
1/ 29	TRIAX6	I	131	138	145	139	133	132					
1/ 30	TRIAX6	I	159	166	173	167	161	160					
1/ 31	TRIAX6	I	187	194	201	195	189	188					
1/ 32	TRIAX6	I	215	222	229	223	217	216					
1/ 33	TRIAX6	I	1	9	17	10	3	2					
1/ 34	TRIAX6	I	29	37	45	38	31	30					
1/ 35	TRIAX6	I	57	65	73	66	59	58					
1/ 36	TRIAX6	I	85	93	101	94	87	86					

1/	37	TRIAX6	1	113	121	129	122	115	114
1/	38	TRIAX6	1	141	149	157	150	143	142
1/	39	TRIAX6	1	169	177	185	178	171	170
1/	40	TRIAX6	1	197	205	213	206	199	198
1/	41	TRIAX6	1	17	23	29	30	31	24
1/	42	TRIAX6	1	45	51	57	58	59	52
1/	43	TRIAX6	1	73	79	85	86	87	80
1/	44	TRIAX6	1	101	107	113	114	115	108
1/	45	TRIAX6	1	129	135	141	142	143	136
1/	46	TRIAX6	1	157	163	169	170	171	164
1/	47	TRIAX6	1	185	191	197	198	199	192
1/	48	TRIAX6	1	213	219	225	226	227	220
1/	49	TRIAX6	1	5	13	21	14	7	6
1/	50	TRIAX6	1	33	41	49	42	35	34
1/	51	TRIAX6	1	61	69	77	70	63	62
1/	52	TRIAX6	1	89	97	105	98	91	90
1/	53	TRIAX6	1	117	125	133	126	119	118
1/	54	TRIAX6	1	145	153	161	154	147	146
1/	55	TRIAX6	1	173	181	189	182	175	174
1/	56	TRIAX6	1	201	209	217	210	203	202
1/	57	TRIAX6	1	21	27	33	34	35	28
1/	58	TRIAX6	1	49	55	61	62	63	56
1/	59	TRIAX6	1	77	83	89	90	91	84
1/	60	TRIAX6	1	105	111	117	118	119	112
1/	61	TRIAX6	1	133	139	145	146	147	140
1/	62	TRIAX6	1	161	167	173	174	175	168
1/	63	TRIAX6	1	189	195	201	202	203	196
1/	64	TRIAX6	1	217	223	229	230	231	224
1/	65	TRIAX6	1	3	10	17	11	5	4
1/	66	TRIAX6	1	31	38	45	39	33	32
1/	67	TRIAX6	1	59	66	73	67	61	60
1/	68	TRIAX6	1	87	94	101	95	89	88
1/	69	TRIAX6	1	115	122	129	123	117	116
1/	70	TRIAX6	1	143	150	157	151	145	144
1/	71	TRIAX6	1	171	178	185	179	173	172
1/	72	TRIAX6	1	199	206	213	207	201	200
1/	73	TRIAX6	1	17	24	31	32	33	25
1/	74	TRIAX6	1	45	52	59	60	61	53
1/	75	TRIAX6	1	73	80	87	88	89	81
1/	76	TRIAX6	1	101	108	115	116	117	109
1/	77	TRIAX6	1	129	136	143	144	145	137
1/	78	TRIAX6	1	157	164	171	172	173	165
1/	79	TRIAX6	1	185	192	199	200	201	193
1/	80	TRIAX6	1	213	220	227	228	229	221
1/	81	TRIAX6	1	5	11	17	18	19	12
1/	82	TRIAX6	1	33	39	45	46	47	40
1/	83	TRIAX6	1	61	67	73	74	75	68
1/	84	TRIAX6	1	89	95	101	102	103	96
1/	85	TRIAX6	1	117	123	129	130	131	124
1/	86	TRIAX6	1	145	151	157	158	159	152
1/	87	TRIAX6	1	173	179	185	186	187	180
1/	88	TRIAX6	1	201	207	213	214	215	208
1/	89	TRIAX6	1	17	25	33	26	19	18
1/	90	TRIAX6	1	45	53	61	54	47	46
1/	91	TRIAX6	1	73	81	89	82	75	74
1/	92	TRIAX6	1	101	109	117	110	103	102
1/	93	TRIAX6	1	129	137	145	138	131	130
1/	94	TRIAX6	1	157	165	173	166	159	158
1/	95	TRIAX6	1	185	193	201	194	187	186
1/	96	TRIAX6	1	213	221	229	222	215	214

0.116 SEC RUN TIME FOR INFEL 0 ERROR(S

DATIN NET 1

======

1-	*DATA [illegible]			
2-	*NPCO N=1 C=2			
3-		1	0.0	0.0
4-		3	0.005	0.0
5-		5	0.01	0.0
6-		7	0.015	0.0
7-		15	0.0	0.0079
8-		17	0.005	0.0079
9-		19	0.01	0.0079
10-		21	0.015	0.0079
11-		29	0.0	0.0158
12-		31	0.005	0.0158
13-		33	0.01	0.0158
14-		35	0.015	0.0158
15-		43	0.0	0.0237
16-		45	0.005	0.0237
17-		47	0.01	0.0237
18-		49	0.015	0.0237
19-		57	0.0	0.0315
20-		59	0.005	0.0315
21-		61	0.01	0.0315
22-		63	0.015	0.0315
23-		71	0.0	0.039
24-		73	0.005	0.039
25-		75	0.01	0.039
26-		77	0.015	0.039
27-		85	0.0	0.0465
28-		87	0.005	0.0465
29-		89	0.01	0.0465
30-		91	0.015	0.0465
31-		99	0.0	0.054
32-		101	0.005	0.054
33-		103	0.01	0.054
34-		105	0.015	0.054
35-		113	0.0	0.0615
36-		115	0.005	0.0615
37-		117	0.01	0.0615
38-		119	0.015	0.0615
39-		127	0.0	0.069
40-		129	0.005	0.069
41-		131	0.01	0.069
42-		133	0.015	0.069
43-		141	0.0	0.0765
44-		143	0.005	0.0765
45-		145	0.01	0.0765
46-		147	0.015	0.0765
47-		155	0.0	0.084
48-		157	0.005	0.084
49-		159	0.01	0.084
50-		161	0.015	0.084
51-		169	0.0	0.0915
52-		171	0.005	0.0915
53-		173	0.01	0.0915
54-		175	0.015	0.0915
55-		183	0.0	0.0993
56-		185	0.005	0.0993

```
57-          187    0.01         0.0993
58-          189    0.015        0.0993
59-          197    0.0          0.1072
60-          199    0.005        0.1072
61-          201    0.01         0.1072
62-          203    0.015        0.1072
63-          211    0.0          0.1151
64-          213    0.005        0.1151
65-          215    0.01         0.1151
66-          217    0.015        0.1151
67-          225    0.0          0.123
68-          227    0.005        0.123
69-          229    0.01         0.123
70-          231    0.015        0.123

71-     JEMOD  N=1 G=A C=2
72-            1   1.08E11   0.35

73-     JDENS  N=1 G=A C=1
74-            1   4410.

75-     JEOF

  0.520 SEC RUN TIME FOR  DATII                                   0 ERROR(S

DYNIN              NET        1
======

  1-     JDATA

  2-     JRMOD  N=1 X=1 U=0
  3-            1  2  0  0

  4-     JEOF

  0.045 SEC RUN TIME FOR  DYNIN                                   0 ERROR(S

FREQEX                        1
======

MODE     EIGENVALUE          COMPLEX CIRCULAR FREQUENCY               FREQUENCY
..................................................................................

  1    0.62772482E-10  (  0.0            ,  0.12621625E+06)    0.20087934E+05

                                                 EIGENVALUES FROM DOUB

  0.019 SEC RUN TIME FOR   FREQEX                                  0 ERROR(S)
```

RPRINT NET 1
======

PRINTOUT OF RESPONSE BOOK **USR**

ROW	NP-DFR	1
*		
2-	1- 2	-0.100000E+01
3-	2- 1	-0.345050E-03
4-	2- 2	-0.994087E+00
5-	3- 1	0.573649E-04
6-	3- 2	-0.996979E+00
7-	4- 1	-0.328762E-04
8-	4- 2	-0.987357E+00
9-	5- 1	0.993913E-04
10-	5- 2	-0.988140E+00
11-	6- 1	-0.755970E-04
12-	6- 2	-0.976577E+00
13-	7- 1	0.559859E-04
14-	7- 2	-0.973601E+00
*		
16-	8- 2	-0.994864E+00
17-	9- 1	-0.244413E-02
18-	9- 2	-0.987986E+00
19-	10- 1	-0.473427E-02
20-	10- 2	-0.991936E+00
21-	11- 1	-0.688381E-02
22-	11- 2	-0.982386E+00
23-	12- 1	-0.914760E-02
24-	12- 2	-0.983084E+00
25-	13- 1	-0.115047E-01
26-	13- 2	-0.970736E+00
27-	14- 1	-0.137167E-01
28-	14- 2	-0.968672E+00
*		
30-	15- 2	-0.979639E+00
31-	16- 1	-0.474159E-02
32-	16- 2	-0.971829E+00
33-	17- 1	-0.916182E-02
34-	17- 2	-0.976744E+00
35-	18- 1	-0.133254E-01
36-	18- 2	-0.966893E+00
37-	19- 1	-0.181968E-01
38-	19- 2	-0.968037E+00
39-	20- 1	-0.229224E-01
40-	20- 2	-0.955172E+00
41-	21- 1	-0.269740E-01
42-	21- 2	-0.953840E+00
*		
44-	22- 2	-0.950363E+00
45-	23- 1	-0.612657E-02
46-	23- 2	-0.945985E+00
47-	24- 1	-0.135442E-01
48-	24- 2	-0.946557E+00
49-	25- 1	-0.212295E-01
50-	25- 2	-0.940465E+00
51-	26- 1	-0.270096E-01
52-	26- 2	-0.938049E+00
53-	27- 1	-0.327055E-01
54-	27- 2	-0.929383E+00
55-	28- 1	-0.401424E-01
56-	28- 2	-0.924315E+00
*		
58-	29- 2	-0.919516E+00
59-	30- 1	-0.897168E-02
60-	30- 2	-0.912465E+00
61-	31- 1	-0.179323E-01
62-	31- 2	-0.916749E+00
63-	32- 1	-0.267648E-01
64-	32- 2	-0.906176E+00
65-	33- 1	-0.356291E-01
66-	33- 2	-0.908647E+00
67-	34- 1	-0.442247E-01
68-	34- 2	-0.895836E+00
69-	35- 1	-0.528344E-01
70-	35- 2	-0.895334E+00
*		
72-	36- 2	-0.871649E+00
73-	37- 1	-0.115281E-01
74-	37- 2	-0.867144E+00
75-	38- 1	-0.217536E-01
76-	38- 2	-0.867831E+00
77-	39- 1	-0.316048E-01
78-	39- 2	-0.861986E+00
79-	40- 1	-0.431344E-01
80-	40- 2	-0.860213E+00
81-	41- 1	-0.545831E-01
82-	41- 2	-0.851945E+00
83-	42- 1	-0.640375E-01
84-	42- 2	-0.847435E+00
*		
86-	43- 2	-0.822074E+00
87-	44- 1	-0.129995E-01
88-	44- 2	-0.814495E+00
89-	45- 1	-0.259641E-01
90-	45- 2	-0.819655E+00
91-	46- 1	-0.387104E-01
92-	46- 2	-0.810517E+00
93-	47- 1	-0.515696E-01
94-	47- 2	-0.812376E+00
95-	48- 1	-0.640146E-01
96-	48- 2	-0.800635E+00
97-	49- 1	-0.764654E-01
98-	49- 2	-0.800499E+00
*		
100-	50- 2	-0.758189E+00
101-	51- 1	-0.139928E-01
102-	51- 2	-0.754163E+00
103-	52- 1	-0.291886E-01
104-	52- 2	-0.755109E+00
105-	53- 1	-0.444941E-01
106-	53- 2	-0.750036E+00
107-	54- 1	-0.581185E-01
108-	54- 2	-0.748342E+00
109-	55- 1	-0.714862E-01
110-	55- 2	-0.741050E+00
111-	56- 1	-0.862170E-01
112-	56- 2	-0.737448E+00

*		
114-	57- 2	-0.693204E+00
115-	58- 1	-0.163928E-01
116-	58- 2	-0.687822E+00
117-	59- 1	-0.328624E-01
118-	59- 2	-0.691135E+00
119-	60- 1	-0.499812E-01
120-	60- 2	-0.683076E+00
121-	61- 1	-0.652958E-01
122-	61- 2	-0.685030E+00
123-	62- 1	-0.809642E-01
124-	62- 2	-0.675289E+00
125-	63- 1	-0.968364E-01
126-	63- 2	-0.675006E+00
*		
128-	64- 2	-0.618828E+00
129-	65- 1	-0.180921E-01
130-	65- 2	-0.615613E+00
131-	66- 1	-0.352794E-01
132-	66- 2	-0.616087E+00
133-	67- 1	-0.520996E-01
134-	67- 2	-0.611779E+00
135-	68- 1	-0.700300E-01
136-	68- 2	-0.610755E+00
137-	69- 1	-0.877630E-01
138-	69- 2	-0.604781E+00
139-	70- 1	-0.103900E+00
140-	70- 2	-0.601566E+00
*		
142-	71- 2	-0.543361E+00
143-	72- 1	-0.191706E-01
144-	72- 2	-0.538423E+00
145-	73- 1	-0.382801E-01
146-	73- 2	-0.541762E+00
147-	74- 1	-0.570514E-01
148-	74- 2	-0.535754E+00
149-	75- 1	-0.760323E-01
150-	75- 2	-0.536954E+00
151-	76- 1	-0.943888E-01
152-	76- 2	-0.529240E+00
153-	77- 1	-0.112736E+00
154-	77- 2	-0.529103E+00
*		
156-	78- 2	-0.458720E+00
157-	79- 1	-0.196194E-01
158-	79- 2	-0.456241E+00
159-	80- 1	-0.399782E-01
160-	80- 2	-0.457004E+00
161-	81- 1	-0.603053E-01
162-	81- 2	-0.453901E+00
163-	82- 1	-0.795217E-01
164-	82- 2	-0.452834E+00
165-	83- 1	-0.984318E-01
166-	83- 2	-0.448346E+00
167-	84- 1	-0.117970E+00
168-	84- 2	-0.446364E+00
*		
170-	85- 2	-0.373677E+00
171-	86- 1	-0.210792E-01
172-	86- 2	-0.370785E+00
173-	87- 1	-0.422935E-01
174-	87- 2	-0.372556E+00
175-	88- 1	-0.631822E-01
176-	88- 2	-0.368237E+00
177-	89- 1	-0.840318E-01
178-	89- 2	-0.369268E+00
179-	90- 1	-0.104176E+00
180-	90- 2	-0.364035E+00
181-	91- 1	-0.124622E+00
182-	91- 2	-0.363862E+00
*		
184-	92- 2	-0.282327E+00
185-	93- 1	-0.217850E-01
186-	93- 2	-0.280905E+00
187-	94- 1	-0.431819E-01
188-	94- 2	-0.280945E+00
189-	95- 1	-0.642924E-01
190-	95- 2	-0.278957E+00
191-	96- 1	-0.857868E-01
192-	96- 2	-0.278606E+00
193-	97- 1	-0.107006E+00
194-	97- 2	-0.275911E+00
195-	98- 1	-0.127273E+00
196-	98- 2	-0.274269E+00
*		
198-	99- 2	-0.190312E+00
199-	100- 1	-0.224183E-01
200-	100- 2	-0.188584E+00
201-	101- 1	-0.447661E-01
202-	101- 2	-0.189752E+00
203-	102- 1	-0.667200E-01
204-	102- 2	-0.187650E+00
205-	103- 1	-0.889150E-01
206-	103- 2	-0.188068E+00
207-	104- 1	-0.110381E+00
208-	104- 2	-0.185368E+00
209-	105- 1	-0.131838E+00
210-	105- 2	-0.185318E+00
*		
212-	106- 2	-0.950858E-01
213-	107- 1	-0.223194E-01
214-	107- 2	-0.945163E-01
215-	108- 1	-0.448277E-01
216-	108- 2	-0.949056E-01
217-	109- 1	-0.671647E-01
218-	109- 2	-0.943051E-01
219-	110- 1	-0.891105E-01
220-	110- 2	-0.939190E-01
221-	111- 1	-0.110743E+00
222-	111- 2	-0.929531E-01
223-	112- 1	-0.132206E+00
224-	112- 2	-0.927684E-01

*			
226-	113-	2	-0.190463E-06
227-	114-	1	-0.227125E-01
228-	114-	2	-0.191570E-06
229-	115-	1	-0.455968E-01
230-	115-	2	-0.192002E-06
231-	116-	1	-0.681168E-01
232-	116-	2	-0.188826E-06
233-	117-	1	-0.905951E-01
234-	117-	2	-0.188740E-06
235-	118-	1	-0.112313E+00
236-	118-	2	-0.186547E-06
237-	119-	1	-0.134355E+00
238-	119-	2	-0.186081E-06
*			
240-	120-	2	0.950847E-01
241-	121-	1	-0.223194E-01
242-	121-	2	0.945153E-01
243-	122-	1	-0.448277E-01
244-	122-	2	0.949045E-01
245-	123-	1	-0.671647E-01
246-	123-	2	0.943041E-01
247-	124-	1	-0.891105E-01
248-	124-	2	0.939180E-01
249-	125-	1	-0.110743E+00
250-	125-	2	0.929521E-01
251-	126-	1	-0.132200E+00
252-	126-	2	0.927674E-01
*			
254-	127-	2	0.190310E+00
255-	128-	1	-0.224183E-01
256-	128-	2	0.188583E+00
257-	129-	1	-0.447661E-01
258-	129-	2	0.189750E+00
259-	130-	1	-0.667200E-01
260-	130-	2	0.187649E+00
261-	131-	1	-0.889151E-01
262-	131-	2	0.188066E+00
263-	132-	1	-0.110381E+00
264-	132-	2	0.185367E+00
265-	133-	1	-0.131838E+00
266-	133-	2	0.185316E+00
*			
268-	134-	2	0.282326E+00
269-	135-	1	-0.217850E-01
270-	135-	2	0.280904E+00
271-	136-	1	-0.431819E-01
272-	136-	2	0.280944E+00
273-	137-	1	-0.642924E-01
274-	137-	2	0.278956E+00
275-	138-	1	-0.857868E-01
276-	138-	2	0.278605E+00
277-	139-	1	-0.107096E+00
278-	139-	2	0.275910E+00
279-	140-	1	-0.127273E+00
280-	140-	2	0.274268E+00

*			
282-	141-	2	0.373677E+00
283-	142-	1	-0.210792E-01
284-	142-	2	0.370784E+00
285-	143-	1	-0.422935E-01
286-	143-	2	0.372556E+00
287-	144-	1	-0.631822E-01
288-	144-	2	0.368237E+00
289-	145-	1	-0.840318E-01
290-	145-	2	0.369268E+00
291-	146-	1	-0.104176E+00
292-	146-	2	0.364035E+00
293-	147-	1	-0.124622E+00
294-	147-	2	0.363862E+00
*			
296-	148-	2	0.458720E+00
297-	149-	1	-0.196194E-01
298-	149-	2	0.456240E+00
299-	150-	1	-0.399782E-01
300-	150-	2	0.457003E+00
301-	151-	1	-0.603053E-01
302-	151-	2	0.453901E+00
303-	152-	1	-0.795218E-01
304-	152-	2	0.452833E+00
305-	153-	1	-0.984319E-01
306-	153-	2	0.448346E+00
307-	154-	1	-0.117970E+00
308-	154-	2	0.446363E+00
*			
310-	155-	2	0.543360E+00
311-	156-	1	-0.191766E-01
312-	156-	2	0.538423E+00
313-	157-	1	-0.382801E-01
314-	157-	2	0.541762E+00
315-	158-	1	-0.570514E-01
316-	158-	2	0.535754E+00
317-	159-	1	-0.760323E-01
318-	159-	2	0.536953E+00
319-	160-	1	-0.943888E-01
320-	160-	2	0.529239E+00
321-	161-	1	-0.112736E+00
322-	161-	2	0.529102E+00
*			
324-	162-	2	0.618828E+00
325-	163-	1	-0.180921E-01
326-	163-	2	0.615613E+00
327-	164-	1	-0.352794E-01
328-	164-	2	0.616087E+00
329-	165-	1	-0.520997E-01
330-	165-	2	0.611779E+00
331-	166-	1	-0.700300E-01
332-	166-	2	0.610755E+00
333-	167-	1	-0.877630E-01
334-	167-	2	0.604780E+00
335-	168-	1	-0.103900E+00
336-	168-	2	0.601565E+00

*			
338-	169-	2	0.693203E+00
339-	170-	1	-0.163928E-01
340-	170-	2	0.687824E+00
341-	171-	1	-0.328624E-01
342-	171-	2	0.691135E+00
343-	172-	1	-0.490812E-01
344-	172-	2	0.683075E+00
345-	173-	1	-0.652958E-01
346-	173-	2	0.685030E+00
347-	174-	1	-0.809642E-01
348-	174-	2	0.675289E+00
349-	175-	1	-0.968365E-01
350-	175-	2	0.675805E+00
*			
352-	176-	2	0.758188E+00
353-	177-	1	-0.139928E-01
354-	177-	2	0.754162E+00
355-	178-	1	-0.291886E-01
356-	178-	2	0.755108E+00
357-	179-	1	-0.444941E-01
358-	179-	2	0.750036E+00
359-	180-	1	-0.581185E-01
360-	180-	2	0.748342E+00
361-	181-	1	-0.714862E-01
362-	181-	2	0.741050E+00
363-	182-	1	-0.862170E-01
364-	182-	2	0.737447E+00
*			
366-	183-	2	0.822073E+00
367-	184-	1	-0.128995E-01
368-	184-	2	0.814494E+00
369-	185-	1	-0.259641E-01
370-	185-	2	0.819654E+00
371-	186-	1	-0.387104E-01
372-	186-	2	0.810517E+00
373-	187-	1	-0.515696E-01
374-	187-	2	0.812376E+00
375-	188-	1	-0.640146E-01
376-	188-	2	0.800634E+00
377-	189-	1	-0.764654E-01
378-	189-	2	0.800499E+00
*			
380-	190-	2	0.871648E+00
381-	191-	1	-0.115281E-01
382-	191-	2	0.867144E+00
383-	192-	1	-0.217535E-01
384-	192-	2	0.867830E+00
385-	193-	1	-0.316847E-01
386-	193-	2	0.861986E+00
387-	194-	1	-0.431343E-01
388-	194-	2	0.860212E+00
389-	195-	1	-0.545881E-01
390-	195-	2	0.851944E+00
391-	196-	1	-0.640370E-01
392-	196-	2	0.847435E+00
*			
394-	197-	2	0.919515E+00
395-	198-	1	-0.897167E-02
396-	198-	2	0.912464E+00
397-	199-	1	-0.179323E-01
398-	199-	2	0.916748E+00
399-	200-	1	-0.267648E-01
400-	200-	2	0.906175E+00
401-	201-	1	-0.356291E-01
402-	201-	2	0.908646E+00
403-	202-	1	-0.442246E-01
404-	202-	2	0.895835E+00
405-	203-	1	-0.528344E-01
406-	203-	2	0.895333E+00
*			
408-	204-	2	0.950362E+00
409-	205-	1	-0.612656E-02
410-	205-	2	0.945984E+00
411-	206-	1	-0.135441E-01
412-	206-	2	0.946556E+00
413-	207-	1	-0.212295E-01
414-	207-	2	0.940464E+00
415-	208-	1	-0.278095E-01
416-	208-	2	0.938048E+00
417-	209-	1	-0.327855E-01
418-	209-	2	0.929382E+00
419-	210-	1	-0.401423E-01
420-	210-	2	0.924314E+00
*			
422-	211-	2	0.979638E+00
423-	212-	1	-0.474158E-02
424-	212-	2	0.971828E+00
425-	213-	1	-0.916181E-02
426-	213-	2	0.976744E+00
427-	214-	1	-0.133254E-01
428-	214-	2	0.966892E+00
429-	215-	1	-0.181968E-01
430-	215-	2	0.968036E+00
431-	216-	1	-0.229223E-01
432-	216-	2	0.955171E+00
433-	217-	1	-0.269739E-01
434-	217-	2	0.953839E+00
*			
436-	218-	2	0.994863E+00
437-	219-	1	-0.244413E-02
438-	219-	2	0.987985E+00
439-	220-	1	-0.473426E-02
440-	220-	2	0.991935E+00
441-	221-	1	-0.688380E-02
442-	221-	2	0.982385E+00
443-	222-	1	-0.914758E-02
444-	222-	2	0.983083E+00
445-	223-	1	-0.115847E-01
446-	223-	2	0.970735E+00
447-	224-	1	-0.137167E-01
448-	224-	2	0.968671E+00

```
   *
450-   225- 2    0.999999E+00          456-   228- 2    0.987356E+00
451-   226- 1   -0.345043E-03          457-   229- 1    0.994337E-04
452-   226- 2    0.994086E+00          458-   229- 2    0.988139E+00
453-   227- 1    0.573812E-04          459-   230- 1   -0.755558E-04
454-   227- 2    0.996978E+00          460-   230- 2    0.976076E+00
455-   228- 1   -0.328455E-04          461-   231- 1    0.560259E-04
                                       462-   231- 2    0.973600E+00

    0.423 SEC RUN TIME FOR    RPRINT                                  0 ERROR(S

ELEMENTAL STRESSES, NET       1

NODE        SIGRR           SIGZZ           SIGTT           SIGRZ

        GROUP        1, NR        1, TYPE TRIAX6    , LOADING CASE      1
  1    -0.3064E+11    -0.1897E+11    -0.3064E+11     0.1969E+12
 15    -0.4398E+11     0.5234E+12    -0.4398E+11     0.2267E+12
 17     0.5667E+11     0.6413E+12     0.4638E+11    -0.2270E+12

        GROUP        1, NR        2, TYPE TRIAX6    , LOADING CASE      1
 29     0.3623E+11     0.1311E+13     0.3628E+11     0.1248E+12
 43    -0.1969E+12     0.1241E+13    -0.1969E+12     0.2232E+12
 45    -0.4543E+11     0.1515E+13    -0.4655E+11    -0.2143E+12

        GROUP        1, NR        3, TYPE TRIAX6    , LOADING CASE      1
 57     0.1949E+11     0.2140E+13     0.1949E+11     0.9008E+11
 71    -0.1562E+12     0.2080E+13    -0.1562E+12     0.1452E+12
 73    -0.5973E+11     0.2246E+13    -0.6169E+11    -0.1426E+12

        GROUP        1, NR        4, TYPE TRIAX6    , LOADING CASE      1
 85     0.5400E+10     0.2625E+13     0.5399E+10     0.4101E+11
 99    -0.9663E+11     0.2592E+13    -0.9663E+11     0.5080E+11
101    -0.6898E+11     0.2628E+13    -0.7124E+11    -0.5536E+11

        GROUP        1, NR        5, TYPE TRIAX6    , LOADING CASE      1
113    -0.9120E+10     0.2730E+13    -0.9121E+10    -0.1374E+11
127    -0.2322E+11     0.2728E+13    -0.2322E+11    -0.5080E+11
129    -0.6846E+11     0.2629E+13    -0.7072E+11     0.3973E+11

        GROUP        1, NR        6, TYPE TRIAX6    , LOADING CASE      1
141    -0.2224E+11     0.2439E+13    -0.2224E+11    -0.6654E+11
155     0.5348E+11     0.2469E+13     0.5348E+11    -0.1452E+12
157    -0.5815E+11     0.2249E+13    -0.6011E+11     0.1292E+12

        GROUP        1, NR        7, TYPE TRIAX6    , LOADING CASE      1
169    -0.3203E+11     0.1792E+13    -0.3203E+11    -0.1095E+12
183     0.1273E+12     0.1843E+13     0.1273E+12    -0.2232E+12
185    -0.3670E+11     0.1531E+13    -0.3782E+11     0.2049E+12

        GROUP        1, NR        8, TYPE TRIAX6    , LOADING CASE      1
197    -0.7094E+11     0.8152E+12    -0.7094E+11    -0.1169E+12
211     0.1503E+12     0.8842E+12     0.1503E+12    -0.2267E+12
213     0.4466E+11     0.6190E+12     0.3438E+11     0.2085E+12

        GROUP        1, NR        9, TYPE TRIAX6    , LOADING CASE      1
 15     0.1503E+12     0.8842E+12     0.1503E+12     0.2267E+12
 29    -0.7098E+11     0.8152E+12    -0.7098E+11     0.1169E+12
 17     0.4468E+11     0.6190E+12     0.3440E+11    -0.2085E+12

        GROUP        1, NR       10, TYPE TRIAX6    , LOADING CASE      1
 43     0.1273E+12     0.1843E+13     0.1273E+12     0.2232E+12
 57    -0.3204E+11     0.1792E+13    -0.3204E+11     0.1095E+12
 45    -0.3668E+11     0.1531E+13    -0.3780E+11    -0.2048E+12
```

ASKA VERSION 6.0.P IBM 370/168 ISA PHILIPS RES.LABS. IMPLEMENT

GOLFGELEIDER A 30MM.

ELEMENTAL STRESSES, NET 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
GROUP 1, NR 11, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
71	0.5348E+11	0.2469E+13	0.5348E+11	0.1452E+12
85	-0.2224E+11	0.2439E+13	-0.2224E+11	0.6655E+11
73	-0.5811E+11	0.2249E+13	-0.6007E+11	-0.1292E+12
GROUP 1, NR 12, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
99	-0.2323E+11	0.2728E+13	-0.2323E+11	0.5080E+11
113	-0.9117E+10	0.2730E+13	-0.9117E+10	0.1374E+11
101	-0.6846E+11	0.2629E+13	-0.7071E+11	-0.3974E+11
GROUP 1, NR 13, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
127	-0.9664E+11	0.2592E+13	-0.9664E+11	-0.5080E+11
141	0.5410E+10	0.2625E+13	0.5410E+10	-0.4101E+11
129	-0.6899E+11	0.2628E+13	-0.7124E+11	0.5536E+11
GROUP 1, NR 14, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
155	-0.1563E+12	0.2080E+13	-0.1563E+12	-0.1452E+12
169	0.1949E+11	0.2140E+13	0.1949E+11	-0.9008E+11
157	-0.5975E+11	0.2246E+13	-0.6171E+11	0.1426E+12
GROUP 1, NR 15, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
183	-0.1969E+12	0.1241E+13	-0.1969E+12	-0.2232E+12
197	0.3631E+11	0.1311E+13	0.3631E+11	-0.1248E+12
185	-0.4548E+11	0.1515E+13	-0.4659E+11	0.2143E+12
GROUP 1, NR 16, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
211	-0.4395E+11	0.5235E+12	-0.4395E+11	-0.2267E+12
225	-0.3062E+11	-0.1893E+11	-0.3062E+11	-0.1969E+12
213	0.5665E+11	0.6412E+12	0.4636E+11	0.2270E+12
GROUP 1, NR 17, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
5	-0.2019E+11	-0.8518E+10	-0.8974E+10	0.1869E+12
19	-0.4729E+11	0.5206E+12	-0.3086E+11	0.2075E+12
21	0.7266E+11	0.6184E+12	0.4766E+11	-0.2096E+12
GROUP 1, NR 18, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
33	0.9446E+11	0.1416E+13	0.1438E+12	0.9824E+11
47	-0.2207E+12	0.1140E+13	-0.2351E+12	0.1906E+12
49	-0.5181E+11	0.1450E+13	-0.6110E+11	-0.2010E+12
GROUP 1, NR 19, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
61	0.5848E+11	0.2196E+13	0.8376E+11	0.8462E+11
75	-0.1517E+12	0.2005E+13	-0.1724E+12	0.1132E+12
77	-0.5569E+11	0.2175E+13	-0.6998E+11	-0.1425E+12
GROUP 1, NR 20, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
89	0.1929E+11	0.2626E+13	0.1831E+11	0.5282E+11
103	-0.6663E+11	0.2551E+13	-0.9090E+11	0.2369E+11
105	-0.5562E+11	0.2561E+13	-0.7227E+11	-0.6632E+11

ASKA VERSION 6.0.P IBM 370/168 ISA PHILIPS RES. & ABS. IMPLEMEN

GOLFGELEIDER A 30MM.

ELEMENTAL STRESSES, NET 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
GROUP 1, NR 21, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
117	-0.2260E+11	0.2676E+13	-0.4964E+11	0.1380E+11
131	0.2766E+11	0.2726E+13	0.3379E+10	-0.6917E+11
133	-0.4788E+11	0.2576E+13	-0.6453E+11	0.1914E+11
GROUP 1, NR 22, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
145	-0.6116E+11	0.2339E+13	-0.1104E+12	-0.2723E+11
159	0.1179E+12	0.2506E+13	0.9719E+11	-0.1522E+12
161	-0.3334E+11	0.2216E+13	-0.4763E+11	0.1020E+12
GROUP 1, NR 23, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
173	-0.9352E+11	0.1655E+13	-0.1587E+12	-0.6146E+11
187	0.1971E+12	0.1916E+13	0.1827E+12	-0.2168E+12
189	-0.1118E+11	0.1526E+13	-0.2048E+11	0.1736E+12
GROUP 1, NR 24, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
201	-0.1303E+12	0.6833E+12	-0.1912E+12	-0.7741E+11
215	0.1947E+12	0.9700E+12	0.2111E+12	-0.2079E+12
217	0.9166E+11	0.6537E+12	0.6667E+11	0.1808E+12
GROUP 1, NR 25, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
19	0.1947E+12	0.9700E+12	0.2111E+12	0.2079E+12
33	-0.1303E+12	0.6833E+12	-0.1913E+12	0.7741E+11
21	0.9168E+11	0.6538E+12	0.6669E+11	-0.1808E+12
GROUP 1, NR 26, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
47	0.1971E+12	0.1916E+13	0.1827E+12	0.2167E+12
61	-0.9353E+11	0.1655E+13	-0.1587E+12	0.6149E+11
49	-0.1113E+11	0.1526E+13	-0.2043E+11	-0.1735E+12
GROUP 1, NR 27, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
75	0.1179E+12	0.2506E+13	0.9717E+11	0.1522E+12
89	-0.6115E+11	0.2339E+13	-0.1104E+12	0.2723E+11
77	-0.3331E+11	0.2216E+13	-0.4760E+11	-0.1020E+12
GROUP 1, NR 28, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
103	0.2764E+11	0.2726E+13	0.3368E+10	0.6917E+11
117	-0.2258E+11	0.2676E+13	-0.4964E+11	-0.1380E+11
105	-0.4788E+11	0.2576E+13	-0.6453E+11	-0.1914E+11
GROUP 1, NR 29, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
131	-0.6663E+11	0.2551E+13	-0.9090E+11	-0.2369E+11
145	0.1979E+11	0.2626E+13	0.1832E+11	-0.5282E+11
133	-0.5562E+11	0.2561E+13	-0.7227E+11	0.6633E+11
GROUP 1, NR 30, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
159	-0.1517E+12	0.2405E+13	-0.1724E+12	-0.1132E+12
173	0.5852E+11	0.2196E+13	0.8380E+11	-0.8462E+11
161	-0.5569E+11	0.2175E+13	-0.6998E+11	0.1425E+12

ASKA VERSION 6.0.P IBM 370/168 ISA PHILIPS RES. LABS. IMPLEMEN

GOLFGELEIDER A 30MM.

ELEMENTAL STRESSES, MET 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
GROUP 1, NR 31, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
187	-0.2207E+12	0.1140E+13	-0.2351E+12	-0.1906E+12
201	0.9446E+11	0.1416E+13	0.1438E+12	-0.9825E+11
189	-0.5183E+11	0.1450E+13	-0.6113E+11	0.2010E+12
GROUP 1, NR 32, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
215	-0.4738E+11	0.5206E+12	-0.3087E+11	-0.2075E+12
229	-0.2019E+11	-0.8520E+10	-0.8975E+10	-0.1869E+12
217	0.7263E+11	0.6184E+12	0.4764E+11	0.2096E+12
GROUP 1, NR 33, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
1	-0.2738E+11	0.3786E+11	-0.2738E+11	0.1692E+12
17	-0.1173E+11	0.5462E+12	-0.1084E+11	-0.1935E+12
3	0.5415E+11	0.2869E+11	0.3024E+11	-0.1671E+12
GROUP 1, NR 34, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
29	0.3710E+11	0.1177E+13	0.3710E+11	0.1923E+12
45	-0.1514E+12	0.1184E+13	-0.1993E+12	-0.8871E+11
31	0.2090E+12	0.1494E+13	0.2087E+12	-0.1959E+12
GROUP 1, NR 35, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
57	-0.8939E+10	0.2002E+13	-0.8939E+10	0.1483E+12
73	-0.1178E+12	0.2034E+13	-0.1561E+12	-0.6685E+11
59	0.1189E+12	0.2256E+13	0.1213E+12	-0.1452E+12
GROUP 1, NR 36, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
85	-0.4216E+11	0.2515E+13	-0.4216E+11	0.8172E+11
101	-0.7202E+11	0.2562E+13	-0.9557E+11	-0.3084E+11
87	0.2930E+11	0.2660E+13	0.2462E+11	-0.7142E+11
GROUP 1, NR 37, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
113	-0.7289E+11	0.2661E+13	-0.7289E+11	0.4239E+10
129	-0.1621E+11	0.2718E+13	-0.2148E+11	0.9339E+10
115	-0.7908E+11	0.2680E+13	-0.7443E+11	0.1198E+11
GROUP 1, NR 38, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
141	-0.9311E+11	0.2421E+13	-0.9311E+11	-0.7384E+11
157	0.4195E+11	0.2480E+13	0.5573E+11	0.4821E+11
143	-0.1671E+12	0.2312E+13	-0.1628E+12	0.9364E+11
GROUP 1, NR 39, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
169	-0.1070E+12	0.1820E+13	-0.1070E+12	-0.1418E+12
185	0.9898E+11	0.1876E+13	0.1303E+12	0.7760E+11
171	-0.2339E+12	0.1601E+13	-0.2314E+12	0.1626E+12
GROUP 1, NR 40, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1				
197	-0.8236E+11	0.9551E+12	-0.8236E+11	-0.1902E+12
213	0.1398E+12	0.9428E+12	0.1810E+12	0.8480E+11
199	-0.2558E+12	0.6307E+12	-0.2561E+12	0.2037E+12

```
**ASKA** VERSION  6.?.P IBM 370/168 ISA          PHILIPS RES.LABS. IMPLEMENT

GOLFGELEIDER A   30MM.

ELEMENTAL STRESSES, NET      1
 NODE       SIGRR          SIGZZ          SIGTT          SIGRZ

         GROUP      1, NR     41, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE      1
   17   0.1398E+12     0.9428E+12     0.1810E+12    -0.8482E+11
   29  -0.8235E+11     0.9551E+12    -0.8235E+11     0.1903E+12
   31  -0.2558E+12     0.6307E+12    -0.2561E+12    -0.2037E+12

         GROUP      1, NR     42, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE      1
   45   0.9893E+11     0.1876E+13     0.1302E+12    -0.7761E+11
   57  -0.1070E+12     0.1820E+13    -0.1070E+12     0.1418E+12
   59  -0.2338E+12     0.1601E+13    -0.2314E+12    -0.1626E+12

         GROUP      1, NR     43, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE      1
   73   0.4193E+11     0.2480E+13     0.5571E+11    -0.4823E+11
   85  -0.9311E+11     0.2421E+13    -0.9311E+11     0.7386E+11
   87  -0.1671E+12     0.2312E+13    -0.1628E+12    -0.9365E+11

         GROUP      1, NR     44, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE      1
  101  -0.1621E+11     0.2718E+13    -0.2148E+11    -0.9340E+10
  113  -0.7289E+11     0.2661E+13    -0.7289E+11    -0.4239E+10
  115  -0.7909E+11     0.2680E+13    -0.7444E+11    -0.1198E+11

         GROUP      1, NR     45, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE      1
  129  -0.7203E+11     0.2562E+13    -0.9558E+11     0.3084E+11
  141  -0.4216E+11     0.2515E+13    -0.4216E+11    -0.8173E+11
  143   0.2031E+11     0.2660E+13     0.2463E+11     0.7144E+11

         GROUP      1, NR     46, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE      1
  157  -0.1178E+12     0.2034E+13    -0.1561E+12     0.6687E+11
  169  -0.8941E+10     0.2002E+13    -0.8941E+10    -0.1483E+12
  171   0.1188E+12     0.2256E+13     0.1213E+12     0.1452E+12

         GROUP      1, NR     47, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE      1
  185  -0.1514E+12     0.1184E+13    -0.1993E+12     0.8872E+11
  197   0.3710E+11     0.1177E+13     0.3710E+11    -0.1924E+12
  199   0.2090E+12     0.1494E+13     0.2087E+12     0.1959E+12

         GROUP      1, NR     48, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE      1
  213  -0.1172E+11     0.5462E+12    -0.1082E+11     0.1936E+12
  225  -0.2739E+11     0.3786E+11    -0.2739E+11    -0.1692E+12
  227   0.5416E+11     0.2869E+11     0.3024E+11     0.1671E+12

         GROUP      1, NR     49, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE      1
    5  -0.2852E+10     0.2392E+11     0.8448E+10     0.1751E+12
   21  -0.5620E+10     0.5359E+12    -0.8605E+10    -0.1819E+12
    7   0.1958E+11     0.1001E+11     0.1076E+11    -0.1792E+12

         GROUP      1, NR     50, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE      1
   33   0.2577E+11     0.1118E+13     0.1556E+11     0.2133E+12
   49  -0.9261E+11     0.1178E+13    -0.1707E+12    -0.9428E+11
   35   0.2170E+12     0.1473E+13     0.2109E+12    -0.1977E+12
```

```
**ASKA** VERSION 6.0.P IBM 370/168 ISA          PHILIPS RES.LABS. IMPLEMENT

GOLFGELEIDER A  30MM.

ELEMENTAL STRESSES, NET      1

NODE      SIGRR          SIGZZ          SIGTT          SIGRZ

          GROUP      1, NR    51, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE     1
  61   0.5370E+10     0.1956E+13    -0.1886E+11     0.1712E+12
  77  -0.5442E+11     0.2009E+13    -0.1275E+12    -0.8102E+11
  63   0.1299E+12     0.2218E+13     0.1247E+12    -0.1370E+12

          GROUP      1, NR    52, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE     1
  89  -0.5743E+10     0.2490E+13    -0.3823E+11     0.1023E+12
 105  -0.1767E+11     0.2521E+13    -0.7315E+11    -0.4958E+11
  91   0.3438E+11     0.2612E+13     0.2883E+11    -0.5578E+11

          GROUP      1, NR    53, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE     1
 117  -0.1925E+11     0.2660E+13    -0.5424E+11     0.2007E+11
 133   0.2207E+11     0.2667E+13    -0.7989E+10    -0.1161E+11
 119  -0.6389E+11     0.2628E+13    -0.6991E+11     0.3256E+11

          GROUP      1, NR    54, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE     1
 145  -0.2999E+11     0.2444E+13    -0.6247E+11    -0.6505E+11
 161   0.5866E+11     0.2427E+13     0.5837E+11     0.2807E+11
 147  -0.1531E+12     0.2264E+13    -0.1586E+12     0.1162E+12

          GROUP      1, NR    55, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE     1
 173  -0.4282E+11     0.1866E+13    -0.6706E+11    -0.1415E+12
 189   0.9116E+11     0.1829E+13     0.1215E+12     0.6050E+11
 175  -0.2231E+12     0.1563E+13    -0.2283E+12     0.1845E+12

          GROUP      1, NR    56, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE     1
 201  -0.3389E+11     0.1007E+13    -0.4409E+11    -0.2011E+12
 217   0.1015E+12     0.9056E+12     0.1583E+12     0.8010E+11
 203  -0.2479E+12     0.6093E+12    -0.2539E+12     0.2165E+12

          GROUP      1, NR    57, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE     1
  21   0.1014E+12     0.9056E+12     0.1583E+12    -0.8012E+11
  33  -0.3390E+11     0.1007E+13    -0.4410E+11     0.2011E+12
  35  -0.2478E+12     0.6094E+12    -0.2539E+12    -0.2165E+12

          GROUP      1, NR    58, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE     1
  49   0.9114E+11     0.1829E+13     0.1214E+12    -0.6050E+11
  61  -0.4281E+11     0.1866E+13    -0.6704E+11     0.1415E+12
  63  -0.2230E+12     0.1563E+13    -0.2283E+12    -0.1845E+12

          GROUP      1, NR    59, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE     1
  77   0.5863E+11     0.2427E+13     0.5834E+11    -0.2808E+11
  89  -0.2999E+11     0.2444E+13    -0.6247E+11     0.6505E+11
  91  -0.1530E+12     0.2264E+13    -0.1586E+12    -0.1162E+12

          GROUP      1, NR    60, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE     1
 135   0.2206E+11     0.2667E+13    -0.7999E+10     0.1161E+11
 117  -0.1925E+11     0.2660E+13    -0.5424E+11    -0.2007E+11
 119  -0.6389E+11     0.2628E+13    -0.6990E+11    -0.3255E+11
```

```
**ASKA** VERSION  6.0.? IBM 370/168 ISA            PHILIPS RES.LABS. IMPLEMENTA

GOLFGELEIDER A  30MM.

ELEMENTAL STRESSES, NET      1

NODE      SIGRR          SIGZZ          SIGTT          SIGRZ

          GROUP       1, NR     61, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE        1
 133   -0.1768E+11     0.2521E+13    -0.7315E+11     0.4958E+11
 145   -0.5753E+10     0.2498E+13    -0.3823E+11    -0.1023E+12
 147    0.3439E+11     0.2612E+13     0.2884E+11     0.5579E+11

          GROUP       1, NR     62, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE        1
 161   -0.5442E+11     0.2009E+13    -0.1275E+12     0.8103E+11
 173    0.5363E+10     0.1956E+13    -0.1888E+11    -0.1713E+12
 175    0.1299E+12     0.2218E+13     0.1246E+12     0.1370E+12

          GROUP       1, NR     63, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE        1
 189   -0.9263E+11     0.1178E+13    -0.1707E+12     0.9429E+11
 201    0.2577E+11     0.1118E+13     0.1556E+11    -0.2133E+12
 203    0.2170E+12     0.1473E+13     0.2109E+12     0.1977E+12

          GROUP       1, NR     64, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE        1
 217   -0.5606E+10     0.5360E+12    -0.8590E+10     0.1819E+12
 229   -0.2877E+10     0.2388E+11     0.8423E+10    -0.1751E+12
 231    0.1955E+11     0.9968E+10     0.1074E+11     0.1792E+12

          GROUP       1, NR     65, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE        1
   3   -0.1364E+11    -0.7835E+10    -0.6279E+10     0.1868E+12
  17    0.8288E+10     0.5570E+12    -0.5833E+08     0.1919E+12
   5    0.1369E+11     0.2360E+10     0.6690E+10    -0.1878E+12

          GROUP       1, NR     66, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE        1
  31    0.2186E+12     0.1499E+13     0.2138E+12     0.2368E+12
  45   -0.1077E+12     0.1208E+13    -0.1758E+12     0.7759E+11
  33   -0.7058E+10     0.1084E+13    -0.7926E+10    -0.2012E+12

          GROUP       1, NR     67, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE        1
  59    0.1388E+12     0.2267E+13     0.1321E+12     0.1864E+12
  73   -0.8177E+11     0.2054E+13    -0.1367E+12     0.5387E+11
  61   -0.4337E+11     0.1924E+13    -0.4694E+11    -0.1469E+12

          GROUP       1, NR     68, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE        1
  87    0.4620E+11     0.2674E+13     0.3856E+11     0.1062E+12
 101   -0.5156E+11     0.2573E+13    -0.8456E+11     0.1669E+11
  89   -0.5928E+11     0.2467E+13    -0.6498E+11    -0.6981E+11

          GROUP       1, NR     69, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE        1
 115   -0.5115E+11     0.2695E+13    -0.5940E+11     0.1198E+11
 129   -0.1329E+11     0.2719E+13    -0.1986E+11    -0.2233E+11
 117   -0.6967E+11     0.2649E+13    -0.7579E+11     0.1588E+11

          GROUP       1, NR     70, TYPE TRIAX6   , LOADING CASE        1
 143   -0.1412E+12     0.2326E+13    -0.1488E+12    -0.8393E+11
 157    0.2708E+11     0.2472E+13     0.4772E+11    -0.5816E+11
 145   -0.7082E+11     0.2447E+13    -0.7571E+11     0.9927E+11
```

ASKA VERSION 6.0.P IBM 370/168 ISA PHILIPS RES.LABS. IMPLEMENTA

GOLFGELEIDER A 30MM.

ELEMENTAL STRESSES, NET 1

GROUP 1, NR 71, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
171	-0.2139E+12	0.1612E+13	-0.2207E+12	-0.1691E+12
185	0.6890E+11	0.1859E+13	0.1141E+12	-0.8270E+11
173	-0.6641E+11	0.1881E+13	-0.6998E+11	0.1701E+12

GROUP 1, NR 72, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
199	-0.2462E+12	0.6359E+12	-0.2509E+12	-0.2290E+12
213	0.9451E+11	0.9184E+12	0.1566E+12	-0.8576E+11
201	-0.3661E+11	0.1029E+13	-0.3748E+11	0.2116E+12

GROUP 1, NR 73, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
17	0.9453E+11	0.9185E+12	0.1567E+12	0.8575E+11
31	-0.2462E+12	0.6358E+12	-0.2510E+12	0.2291E+12
33	-0.3659E+11	0.1029E+13	-0.3746E+11	-0.2116E+12

GROUP 1, NR 74, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
45	0.6884E+11	0.1859E+13	0.1140E+12	0.8269E+11
59	-0.2139E+12	0.1612E+13	-0.2207E+12	0.1691E+12
61	-0.6639E+11	0.1881E+13	-0.6996E+11	-0.1701E+12

GROUP 1, NR 75, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
73	0.2708E+11	0.2472E+13	0.4772E+11	0.5814E+11
87	-0.1412E+12	0.2326E+13	-0.1488E+12	0.8393E+11
89	-0.7003E+11	0.2447E+13	-0.7572E+11	-0.9928E+11

GROUP 1, NR 76, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
101	-0.1321E+11	0.2719E+13	-0.1987E+11	0.2233E+11
115	-0.5115E+11	0.2695E+13	-0.5940E+11	-0.1198E+11
117	-0.6967E+11	0.2449E+13	-0.7579E+11	-0.1588E+11

GROUP 1, NR 77, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
129	-0.5157E+11	0.2573E+13	-0.8456E+11	-0.1668E+11
143	0.4621E+11	0.2574E+13	0.3857E+11	-0.1062E+12
145	-0.5929E+11	0.2467E+13	-0.6498E+11	0.6981E+11

GROUP 1, NR 78, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
157	-0.8175E+11	0.2054E+13	-0.1367E+12	-0.5387E+11
171	0.1388E+12	0.2267E+13	0.1320E+12	-0.1864E+12
173	-0.4340E+11	0.1924E+13	-0.4697E+11	0.1469E+12

GROUP 1, NR 79, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
185	-0.1077E+12	0.1208E+13	-0.1758E+12	-0.7758E+11
199	0.2186E+12	0.1499E+13	0.2139E+12	-0.2368E+12
201	-0.7083E+10	0.1084E+13	-0.7949E+10	0.2013E+12

GROUP 1, NR 80, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
213	0.8310E+10	0.5576E+12	-0.3578E+08	-0.1919E+12
227	-0.1363E+11	-0.7805E+10	-0.6262E+10	-0.1868E+12
229	0.1367E+11	0.2318E+10	0.6668E+10	0.1879E+12

ASKA VERSION 6.0.P IBM 370/168 ISA PHILIPS RES.LABS. IMPLEMENTA

GULFGELEIDER A 30MM.

ELEMENTAL STRESSES, NET 1

GROUP 1, NR 81, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
5	0.1665E+10	0.3218E+10	0.2783E+10	-0.1866E+12
17	0.5947E+11	0.6053E+12	0.3479E+11	0.2078E+12
19	-0.5856E+11	0.5146E+12	-0.3692E+11	-0.1969E+12

GROUP 1, NR 82, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
33	0.1078E+12	0.1423E+13	0.1510E+12	-0.7279E+11
45	-0.6958E+11	0.1446E+13	-0.7894E+11	0.1710E+12
47	-0.2535E+12	0.1123E+13	-0.2528E+12	-0.2079E+12

GROUP 1, NR 83, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
61	0.6745E+11	0.2201E+13	0.8859E+11	-0.4946E+11
73	-0.6715E+11	0.2194E+13	-0.8230E+11	0.1054E+12
75	-0.2019E+12	0.1978E+13	-0.1994E+12	-0.1476E+12

GROUP 1, NR 84, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
89	0.2366E+11	0.2628E+13	0.2067E+11	-0.1363E+11
101	-0.5929E+11	0.2602E+13	-0.7688E+11	0.2804E+11
103	-0.1252E+12	0.2519E+13	-0.1225E+12	-0.6752E+11

GROUP 1, NR 85, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
117	-0.2354E+11	0.2676E+13	-0.5015E+11	0.2383E+11
129	-0.4329E+11	0.2632E+13	-0.6088E+11	-0.5325E+11
131	-0.3097E+11	0.2694E+13	-0.2819E+11	0.2204E+11

GROUP 1, NR 86, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
145	-0.6729E+11	0.2335E+13	-0.1137E+12	0.5787E+11
157	-0.2105E+11	0.2280E+13	-0.3621E+11	-0.1270E+12
159	0.6764E+11	0.2479E+13	0.7012E+11	0.1086E+12

GROUP 1, NR 87, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
173	-0.1045E+12	0.1649E+13	-0.1646E+12	0.8088E+11
185	0.6546E+10	0.1588E+13	-0.2807E+10	-0.1859E+12
187	0.1643E+12	0.1898E+13	0.1650E+12	0.1817E+12

GROUP 1, NR 88, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
201	-0.1330E+12	0.6819E+12	-0.1927E+12	0.7866E+11
213	0.1121E+12	0.7031E+12	0.8744E+11	-0.1737E+12
215	0.1834E+12	0.9639E+12	0.2050E+12	0.1965E+12

GROUP 1, NR 89, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
17	0.1122E+12	0.7032E+12	0.8747E+11	0.1737E+12
33	-0.1330E+12	0.6819E+12	-0.1927E+12	-0.7864E+11
19	0.1834E+12	0.9639E+12	0.2050E+12	-0.1965E+12

GROUP 1, NR 90, TYPE TRIAX6 , LOADING CASE 1

NODE	SIGRR	SIGZZ	SIGTT	SIGRZ
45	0.6575E+10	0.1588E+13	-0.2779E+10	0.1859E+12
61	-0.1045E+12	0.1649E+13	-0.1646E+12	-0.8087E+11
47	0.1643E+12	0.1899E+13	0.1650E+12	-0.1817E+12

```
**ASKA** VERSION  6.0.P IBM 370/168 ISA                PHILIPS RES.LABS. IMPLEMENTA

GOLFGELEIDER A  30MM.

ELEMENTAL STRESSES, NET        1

 NODE      SIGRR          SIGZZ          SIGTT          SIGRZ

         GROUP       1, NR    91, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE       1
  73   -0.2104E+11    0.2280E+13    -0.3620E+11    0.1270E+12
  89   -0.6728E+11    0.2335E+13    -0.1137E+12   -0.5787E+11
  75    0.6764E+11    0.2479E+13     0.7012E+11   -0.1086E+12

         GROUP       1, NR    92, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE       1
 101   -0.4329E+11    0.2632E+13    -0.6088E+11    0.5325E+11
 117   -0.2354E+11    0.2676E+13    -0.5015E+11   -0.2383E+11
 103   -0.3096E+11    0.2694E+13    -0.2819E+11   -0.2204E+11

         GROUP       1, NR    93, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE       1
 129   -0.5930E+11    0.2602E+13    -0.7689E+11   -0.2803E+11
 145    0.2367E+11    0.2628E+13     0.2068E+11    0.1362E+11
 131   -0.1252E+12    0.2519E+13    -0.1225E+12    0.6752E+11

         GROUP       1, NR    94, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE       1
 157   -0.6717E+11    0.2194E+13    -0.8232E+11   -0.1054E+12
 173    0.6748E+11    0.2201E+13     0.8862E+11    0.4945E+11
 159   -0.2020E+12    0.1978E+13    -0.1995E+12    0.1476E+12

         GROUP       1, NR    95, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE       1
 185   -0.6960E+11    0.1446E+13    -0.7895E+11   -0.1710E+12
 201    0.1078E+12    0.1423E+13     0.1510E+12    0.7279E+11
 187   -0.2536E+12    0.1123E+13    -0.2528E+12    0.2078E+12

         GROUP       1, NR    96, TYPE TRIAX6  , LOADING CASE       1
 213    0.5945E+11    0.6953E+12     0.3477E+11   -0.2077E+12
 229    0.1675E+10    0.3234E+10     0.2792E+10    0.1866E+12
 215   -0.5861E+11    0.5145E+12    -0.3697E+11    0.1969E+12

                                                                       0 ERROR(S
      0.445 SEC RUN TIME FOR   SIGEX
 NPST              NET       1
======
                                                                       0 ERROR(S
      0.310 SEC RUN TIME FOR   NPST
 DATEX             NET       1
======
```

ASKA VERSION 6.8.P IBM 370/168 ISA PHILIPS RES.LABS. IMPLEMENTA

GOLFGELEIDER A 30MM.

NPST	NEI 1	LOADING CASE 1			
1	-0.29012E+11	0.94489E+10	-0.29012E+11	0.18306E+12	0.0
	0.31939E+12				
*					
3	0.20255E+11	0.10429E+11	0.11978E+11	0.98730E+10	0.0
	0.19395E+11				
*					
5	-0.19221E+10	0.52455E+10	0.22366E+10	-0.31285E+10	0.0
	0.82598E+10				
*					
7	0.19575E+11	0.10010E+11	0.10758E+11	-0.17915E+12	0.0
	0.31043E+12				
*					
15	0.53161E+11	0.70381E+12	0.53161E+11	0.22674E+12	0.0
	0.75998E+12				
*					
17	0.62984E+11	0.69166E+12	0.66230E+11	-0.68384E+10	0.0
	0.62717E+12				
*					
19	0.68052E+11	0.74226E+12	0.87083E+11	0.54968E+10	0.0
	0.66496E+12				
*					
21	0.65042E+11	0.67843E+12	0.66003E+11	-0.16311E+12	0.0
	0.67489E+12				
*					
29	-0.19984E+11	0.10645E+13	-0.19984E+11	0.15607E+12	0.0
	0.11177E+13				
*					
31	-0.18568E+11	0.10649E+13	-0.21138E+11	0.16557E+11	0.0
	0.10851E+13				
*					
33	-0.14107E+11	0.10553E+13	-0.20383E+11	0.32176E+10	0.0
	0.10726E+13				
*					
35	-0.15432E+11	0.10410E+13	-0.21476E+11	-0.20711E+12	0.0
	0.11105E+13				
*					

```
GOLFGELEIDER A  30MM.

NPSI               NET          LOADING CASE
----                1                1

   43      -0.34832E+11    0.15420E+13   -0.34832E+11    0.22319E+12    0.0
             0.16235E+13
    *
   45      -0.29550E+11    0.15259E+13   -0.37106E+11   -0.85409E+10    0.0
             0.15593E+13
    *
   47      -0.28222E+11    0.15194E+13   -0.35053E+11    0.44562E+10    0.0
             0.15516E+13
    *
   49      -0.16102E+11    0.14957E+13   -0.32688E+11   -0.13233E+12    0.0
             0.15374E+13
    *
   57      -0.32127E+11    0.19385E+13   -0.32127E+11    0.12241E+12    0.0
             0.19820E+13
    *
   59      -0.47528E+11    0.19337E+13   -0.49665E+11    0.11914E+11    0.0
             0.19824E+13
    *
   61      -0.27414E+11    0.19159E+13   -0.44219E+11    0.14511E+10    0.0
             0.19518E+13
    *
   63      -0.46546E+11    0.18905E+13   -0.51836E+11   -0.16075E+12    0.0
             0.19596E+13
    *
   71      -0.51378E+11    0.22746E+13   -0.51379E+11    0.14521E+12    0.0
             0.23395E+13
    *
   73      -0.42071E+11    0.22511E+13   -0.53697E+11   -0.53077E+10    0.0
             0.22990E+13
    *
   75      -0.42031E+11    0.22421E+13   -0.51141E+11    0.23082E+10    0.0
             0.22887E+13
    *
   77      -0.21200E+11    0.22069E+13   -0.46696E+11   -0.88405E+11    0.0
             0.22462E+13
    *
```

ASKA VERSION 6.0.P IBM 370/168 ISA PHILIPS RES.LABS. IMPLEMENTA

GOLFGELEIDER A 30MM.

NPST	NEL 1	LOADING CASE 1			
85	-0.38026E+11	0.25001E+13	-0.38026E+11	0.65784E+11	0.0
	0.25406E+13				
*					
87	-0.60439E+11	0.24931E+13	-0.62097E+11	0.62544E+10	0.0
	0.25544E+13				
*					
89	-0.31315E+11	0.24720E+13	-0.53317E+11	0.85196E+09	0.0
	0.25143E+13				
*					
91	-0.59332E+11	0.24376E+13	-0.64882E+11	-0.86004E+11	0.0
	0.25041E+13				
*					
99	-0.59928E+11	0.26601E+13	-0.59929E+11	0.50804E+11	0.0
	0.27215E+13				
*					
101	-0.49128E+11	0.26328E+13	-0.62649E+11	-0.18711E+10	0.0
	0.26888E+13				
*					
103	-0.48795E+11	0.26223E+13	-0.59544E+11	0.82336E+09	0.0
	0.26765E+13				
*					
105	-0.24778E+11	0.25812E+13	-0.54486E+11	-0.30859E+11	0.0
	0.26215E+13				
*					
113	-0.41002E+11	0.26954E+13	-0.41003E+11	0.42912E+06	0.0
	0.27364E+13				
*					
115	-0.65119E+11	0.26879E+13	-0.66916E+11	0.15258E+06	0.0
	0.27539E+13				
*					
117	-0.33763E+11	0.26651E+13	-0.57456E+11	0.84838E+06	0.0
	0.27108E+13				
*					
119	-0.63893E+11	0.26280E+13	-0.69905E+11	0.11530E+07	0.0
	0.26945E+13				
*					

ASKA VERSION 6.0.P IBM 370/168 ISA PHILIPS RES.LABS. IMPLEMENTA

GOLFGELEIDER A 30MM.

NPST	NET 1	LOADING CASE 1			
127	-0.59928E+11	0.26601E+13	-0.59929E+11	-0.50804E+11	0.0
	0.27215E+13				
*					
129	-0.49130E+11	0.26328E+13	-0.62652E+11	0.18712E+10	0.0
	0.26888E+13				
*					
131	-0.48797E+11	0.26223E+13	-0.59546E+11	-0.82487E+09	0.0
	0.26765E+13				
*					
133	-0.24777E+11	0.25812E+13	-0.54486E+11	0.30859E+11	0.0
	0.26215E+13				
*					
141	-0.38026E+11	0.25001E+13	-0.38026E+11	-0.65781E+11	0.0
	0.25486E+13				
*					
143	-0.60436E+11	0.24931E+13	-0.62094E+11	-0.62509E+10	0.0
	0.25544E+13				
*					
145	-0.31316E+11	0.24720E+13	-0.53318E+11	-0.85425E+09	0.0
	0.25143E+13				
*					
147	-0.59333E+11	0.24376E+13	-0.64884E+11	0.86008E+11	0.0
	0.25041E+13				
*					
155	-0.51387E+11	0.22745E+13	-0.51388E+11	-0.14521E+12	0.0
	0.23395E+13				
*					
157	-0.42075E+11	0.22511E+13	-0.53702E+11	0.53118E+10	0.0
	0.22998E+13				
*					
159	-0.42041E+11	0.22420E+13	-0.51153E+11	-0.23041E+10	0.0
	0.22886E+13				
*					
161	-0.21196E+11	0.22069E+13	-0.46694E+11	0.88404E+11	0.0
	0.22462E+13				
*					

GOLFGELEIDER A 30MM.

NPST	NEL 1	LOADING CASE 1			
169	-0.32129E+11	0.19385E+13	-0.32129E+11	-0.12242E+12	0.0
	0.19820E+13				
*					
171	-0.47551E+11	0.19337E+13	-0.49688E+11	-0.11912E+11	0.0
	0.19824E+13				
*					
173	-0.27409E+11	0.19159E+13	-0.44215E+11	-0.14479E+10	0.0
	0.19518E+13				
*					
175	-0.46573E+11	0.18905E+13	-0.51859E+11	0.16077E+12	0.0
	0.19596E+13				
*					
183	-0.34831E+11	0.15420E+13	-0.34831E+11	-0.22318E+12	0.0
	0.16235E+13				
*					
185	-0.29552E+11	0.15259E+13	-0.37108E+11	0.85377E+10	0.0
	0.15593E+13				
*					
187	-0.28225E+11	0.15194E+13	-0.35056E+11	-0.44600E+10	0.0
	0.15510E+13				
*					
189	-0.16118E+11	0.14957E+13	-0.32703E+11	0.13234E+12	0.0
	0.15373E+13				
*					
197	-0.19976E+11	0.10645E+13	-0.19976E+11	-0.15608E+12	0.0
	0.11177E+13				
*					
199	-0.18562E+11	0.10649E+13	-0.21132E+11	-0.16559E+11	0.0
	0.10851E+13				
*					
201	-0.14104E+11	0.10553E+13	-0.20379E+11	-0.32171E+10	0.0
	0.10726E+13				
*					
203	-0.15442E+11	0.10409E+13	-0.21486E+11	0.20710E+12	0.0
	0.11185E+13				
*					

```
**ASKA** VERSION  6.0.P IBM 370/168 TSA            PHILIPS RES.LABS. IMPLEMENTA

GOLFGELEIDER A  30MM.

NPST                  NET            LOADING CASE
----                   I                  I

      211        0.53172E+11   0.70383E+12   0.53172E+11  -0.22674E+12   0.0
                 0.75999E+12

        *
      213        0.62973E+11   0.69164E+12   0.66219E+11   0.68399E+10   0.0
                 0.62716E+12

        *
      215        0.68035E+11   0.74223E+12   0.87067E+11  -0.54928E+10   0.0
                 0.66495E+12

        *
      217        0.65035E+11   0.67842E+12   0.65996E+11   0.16311E+12   0.0
                 0.67488E+12

        *
      225       -0.29003E+11   0.94639E+10  -0.29003E+11  -0.18306E+12   0.0
                 0.31940E+12

        *
      227        0.20264E+11   0.10444E+11   0.11987E+11  -0.98716E+10   0.0
                 0.19391E+11

        *
      229       -0.19317E+10   0.52269E+10   0.22272E+10   0.31305E+10   0.0
                 0.62566E+10

        *
      231        0.19552E+11   0.99680E+10   0.10736E+11   0.17916E+12   0.0
                 0.31044E+12


    0.211 SEC RUN TIME FOR   DATEX                                    0 ERROR(S)
```