

## MASTER

### Analyse van een elastisch scharnier

sterkte- en stijfheids-berekeningen van een elastisch scharnier bestaande uit het materiaal tussen twee cirkelvormige gaten van gelijke diameter

Bouter, F.H.

*Award date:*  
1972

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

ANALYSE VAN EEN  
ELASTISCH SCHARNIER

F. H. BOUTER

WE. 68.27

---

ANALYSE VAN EEN  
ELASTISCH SCHARNIER

STERKTE- EN STYFHEIDS-BEREKENINGEN VAN EEN ELASTISCH  
SCHARNIER BESTAANDE UIT HET MATERIAAL TUSSEN TWEE  
CIRKELVORMIGE GATEN VAN GELYKE DIAMETER.

EINDHOVEN, JUNI 1968



F. H. BOUTER

## Afstudeeropdracht.

Door Prof. Ir. W. van der Flock is een onderzoek gedaan over de stijfheid en sterkte van "een elastisch Scharnier bestaande uit het materiaal tussen twee cirkelvormige gaten van gelijke diameter."

Bij de theoretische beschrijving werd uitgegaan van de elementaire buigingstheorie voor balken; de experimenten hadden betrekking op enkele stalen proefstukken.

Gevraagd wordt een kritische analyse van bovengenoemde constructie.

Gebruik moet worden gemaakt van theoretische - en experimentele methoden.

---

w. g.

Prof. Ir. W.L. Someyer.



## Inhouds-opgave

Hoofdstuk	Titel	blz.
I	Inleiding	1
II	Definitie van een elastisch scharnier	3
III	Spanningsverdeling in het elastisch scharnier t.g.v. een buigend moment in het vlak van het scharnier	
III-1	Oplossings-methode	6
III-2	Benadering van het gegeven scharnier	8
III-3	Het elliptisch coördinaten-stelsel	9
III-4	Spanningsfunctie F in het elliptisch coördinaten-stelsel	12
III-5	Randvoorwaarden	13
III-6	Afleiding van de spanningen in het scharnier	15
III-7	Kerffactor	19
IV	Stijfheid van het scharnier	
IV-1	Energie-beschouwingen	22
IV-2	Nummerieke berekening van de spanningen	24
IV-3	Nummerieke berekening van de elastische energie	29
V	Het experiment	
V-1	Doel van het experiment	36
V-2	Proefopstelling	36
V-3	Bepaling van de afmetingen van de modellen.	37
V-4	Uitvoering van het experiment	
V-4-1	Spanningsmetingen	40
V-4-2	Hoekverdraaiings-metingen	43

## Vervolg Inhouds-opgave

Hoofdstuk	Titel	blz
V-5	Meetresultaten	
V-5.1	Resultaten spanningsmetingen	45
V-5.2	Resultaten hoekverdraaiings-metingen	53
VI	Conclusies	60
VII	Suggesties	60
Bijlage I		62
Foto's 1 t/m 5		64 t/m 68

---

GRAFIEKEN: I t/m XXI

## Literatuur-opgave

Neuber, Kerbspannungslehre, 2<sup>e</sup> druk  
Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, 2<sup>e</sup> druk.  
FROCHT, Photo-elasticity Volume 1  
Dwight, Tables of integrals and other mathematical data  
Peterson, Stress Concentration Design Factors  
Proc. Soc. Experimental Stress Analysis Vol 6, number 1, 1948  
Collegedictaat Wiskunde IV  
Brekelmans I<sub>1</sub>-rapport WE 67-24  
Fynwerk NV, Bulletin 51, 1964 : Homalite CR-79.

## I. Inleiding.

Het elastisch scharnier, zoals dit door Prof. Ir. W. van der Floek in de praktijk wordt toegepast, bestaat uit een plaat of strip waarin, op korte afstand van elkaar twee gaten van gelijke diameter zijn geboord; naar de randen van de plaat of strip toe zijn de gaten opengezaagd. (zie fig 1)

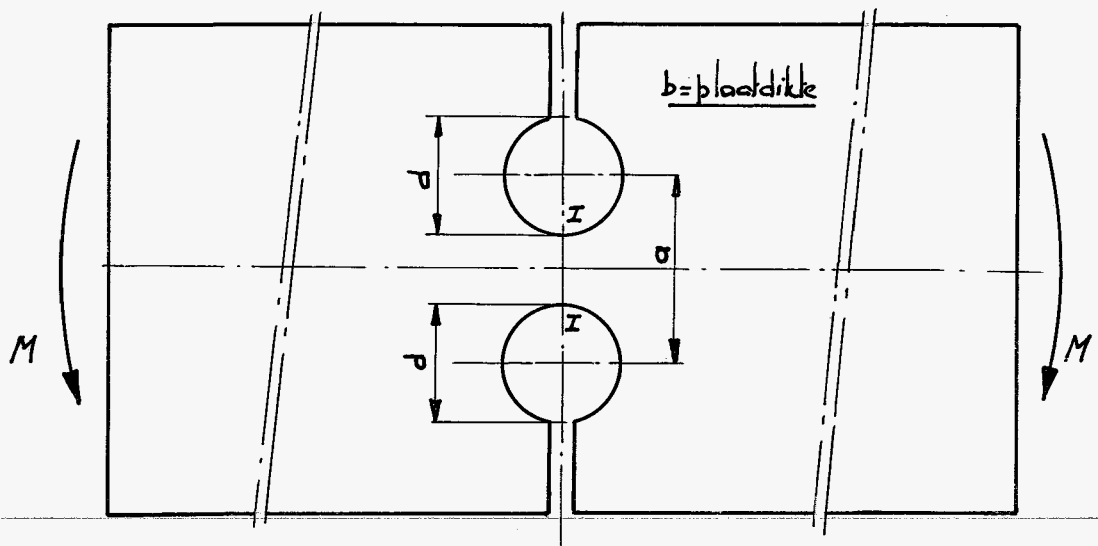


fig 1.

Het materiaal tussen de twee gaten vormt het eigenlijke elastische scharnier.

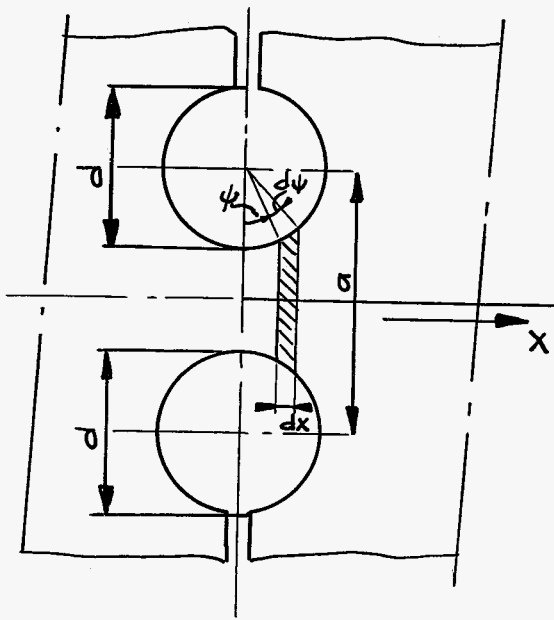
Door een moment uit te oefenen zoals in fig 1 aangegeven scharniert de ene helft elastisch ten opzichte van de andere helft.

De stijfheid kan men beïnvloeden door, bij een gegeven plaatdikte en materiaalsoort, de hartafstand van de twee gaten te variëren.

Door Prof. van der Floek is de stijfheid, gedefinieerd als  $M/\varphi$ , als functie van de verhouding  $d/a$  berekend en experimenteel bepaald. Bij de berekening is uitgegaan van de elementaire buigingstheorie voor balken.

Tevens is, alleen theoretisch, de maximaal optredende spanning bepaald, onder de aanname dat de spanningverdeling in de symmetrie-doorsnede  $I-I$  lineair is.

Hieronder volgt een korte samenvatting van deze berekeningen.



Verondersteld wordt:  $a-d < \frac{1}{2}d$ ,  
dus  $d/a > \frac{2}{3}$ .

Om buiging uit het vlak van tekening te voorkomen wordt gesteld  $b > a-d$ .  
 $b$  = materiaaldikte.

fig. 2.

a. Berekening van de stijfheid.

Voor een balkje met lengte  $dx$  geldt:

$$d\varphi = \frac{M}{EI} dx \quad I = \frac{1}{2}bh^3 \quad \text{met } h = a-d\cos\psi \quad (\text{zie fig 2})$$

$$x = \frac{1}{2}d\sin\psi \rightarrow dx = \frac{1}{2}d\cos\psi d\psi.$$

$$d\varphi = \frac{\frac{1}{2}Md\cos\psi d\psi}{\frac{1}{2}Eb(a-d\cos\psi)^3} \quad \pi/2$$

$$\text{Geïntegreerd geeft: } \varphi = \frac{6Md}{Eb} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\psi d\psi}{(a-d\cos\psi)^3}$$

Hierbij is aangenomen dat alleen het materiaal tussen de gaten vervormt.

Deze integraal uitgewerkt levert: (Gecorrigeerd; zie blz 62)

$$\frac{\varphi}{M} a^2 b E = \frac{6d/a}{(1-d^2/a^2)^2} \left[ \frac{d^2}{a^2} + \frac{6d}{a} \frac{1}{\sqrt{1-d^2/a^2}} \arctan \sqrt{\frac{1+d/a}{1-d/a}} + 2 \right] \quad (1)$$

b. Op tredende maximale spanning.

De maximale spanning treedt op in de symmetrie-doorsnede. Het weerstandsmoment tegen buiging bedraagt daar  $\frac{1}{6}b(a-d)^2$ .

Aannemende dat de spanningsverdeling lineair is volgt voor de maximale spanning aan de rand van de gaten

$$\frac{\sigma_{\max}}{M} a^2 b = \frac{6}{(1-d/a)^2} \quad (2)$$

De beide dimensieloze uitdrukkingen (1) en (2) worden tot een derde vergelijking gecombineerd

$$\frac{\varphi \cdot E}{\sigma_{\max}} = \frac{d/a}{(1+d/a)^2} \left[ d^2/a^2 + 6d/a \sqrt{1-d^2/a^2} \arctan \sqrt{\frac{a+d}{a-d}} + 2 \right] \quad (3)$$

De vergelijkingen (1), (2) en (3) zijn in grafiek XXI in beeld gebracht.

Tevens is in deze grafiek het resultaat van de hoekverdraaiingsmetingen, gedaan aan stalen proefstukken met  $b=5\text{ mm}$  en  $d=8\text{ mm}$  en variërende hartafstand  $a$ , weergegeven.

Geconcludeerd wordt dat de theorie binnen de gestelde beperkingen redelijk in overeenstemming is met de werkelijkheid.

Tot zover de berekeningen vlgz. Prof. van der Ploek.

In dit rapport zal getracht worden de exacte spanningsverdeling, optredend ten gevolge van een buigend moment, te berekenen. In het bijzonder zullen we de spanningsverdeling in de symmetrische doorsnede beschouwen.

Door middel van energiebeschouwingen zal een uitspraak gedaan worden over de optredende hoekverdraaiing ten gevolge van een buigend moment.

Deze theorieën zijn experimenteel geverifieerd. Hiertoe zijn met behulp van de optische bank metingen verricht aan Homalite-modellen van het elastisch scharnier.

## II Definitie van een elastisch scharnier.

Het is duidelijk, dat naarmate de verhouding  $d/a$  kleiner wordt het scharnier stijver wordt; om een zekere hoekverdraaiing te verkrijgen zal een groter moment uitgeoefend moeten worden.

Bij een gegeven striphoogte  $H$  en lengte  $l$  van de uiteinden van het scharnier (zie fig 3) zullen, bij een groter benodigd moment ten gevolge van een grotere hartafstand van de gaten, de uiteinden van het scharnier merkbaar mee gaan vervormen.

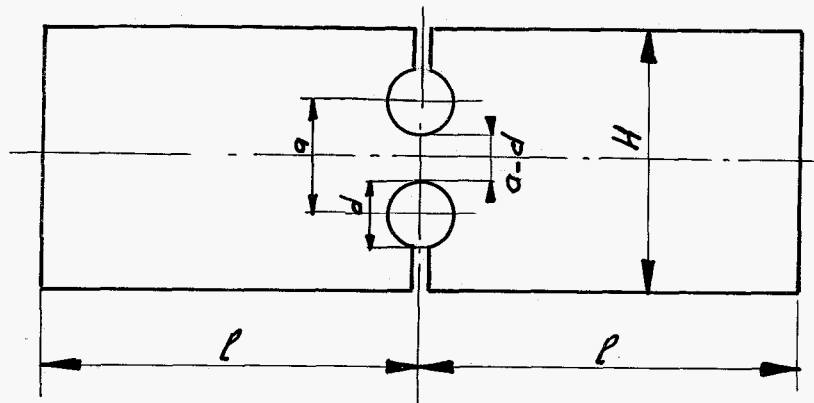


fig 3.

We zullen, om tot een definitie van een elastisch scharnier te komen, een eis gaan stellen aan de opbreedende vervorming van de uiteinden van het scharnier.

Naar analogie van het "normale", niet-elastische scharnier schematiseren we het elastisch scharnier als volgt. (fig 4)

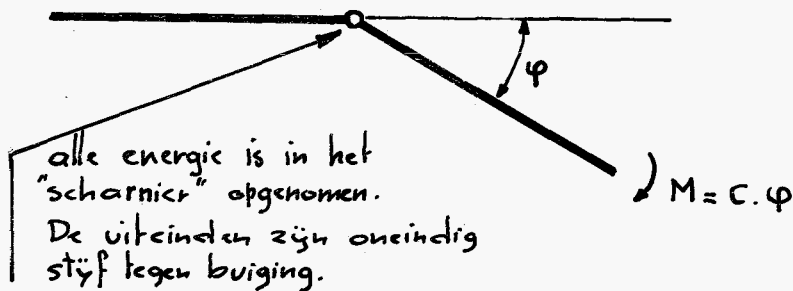


fig. 4.

alle energie is in het "scharnier" opgenomen.  
De uiteinden zijn oneindig stijf tegen buiging.

We zouden dit een ideaal elastisch scharnier willen noemen.

In het geval dat de uiteinden mee vervormen krijgen we de volgende situatie (fig 5).

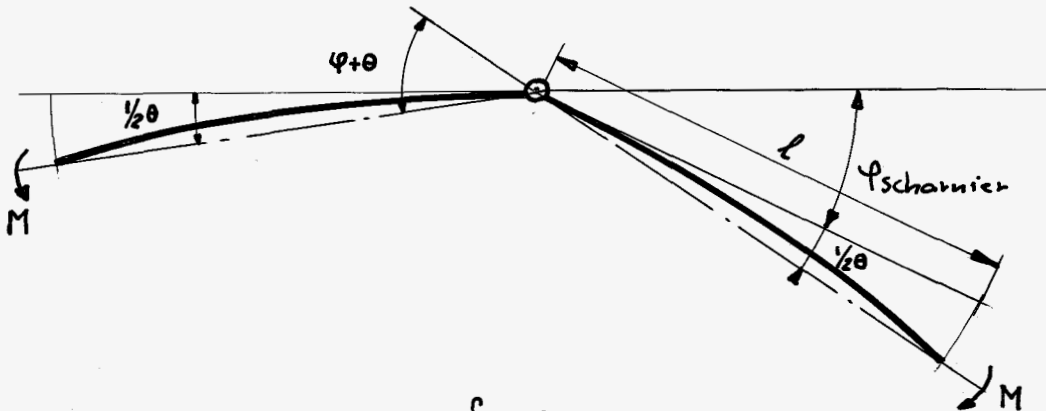


fig. 5.

Het is eenvoudig in te zien dat:  $\frac{1}{2}\theta = \frac{M \cdot \frac{1}{2}l}{EI}$

We meten in dit geval als hoekverdraaiing van het scharnier ten gevolge van het moment  $M$ :  $\varphi + 2 \cdot \frac{1}{2}\theta = \varphi + \theta$ .

Definitie:

Per definitie stellen we, dat van een elastisch scharnier gesproken kan worden als geldt:

$$\theta \leq 0.05 \varphi_{\text{scharnier}}$$

(4)

Hieruit volgt, bij een gegeven lengte en hoogte van de scharnieruiteinden, een maximale verhouding van de afstand  $a-d$  tot de hoogte  $H$  (zie fig 3), waarbij we nog kunnen spreken van een elastisch scharnier.

Bij de bepaling van de afmetingen van de modellen en de uitvoering van het experiment zullen we van bovengenoemde definitie gebruik maken.

### III. Spanningsverdeling in het elastisch scharnier ten gevolge van een buigend moment in het vlak van het scharnier.

#### III.1 Oplossings-methode

Opmerking: 1) We leggen een x-y assenkruis met de oorsprong in het middelpunt van het scharnier. (fig 6)

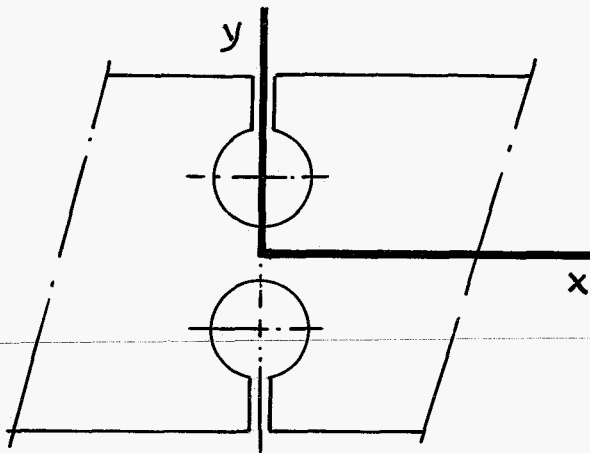


fig. 6

- 2) vlakspanningstoestand; alleen in het x-y-vlak werken spanningen.
- 3) Spanningen en deformaties zijn alle betrokken op de onvervormde toestand.

We zullen de spanningsverdeling berekenen door een spanningsfunctie  $F$  te zoeken die voldoet aan de bi-potentiaal vergelijking  $\nabla^4 F = 0$  en aan de gegeven randvoorwaarden van het probleem.

De spanningen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  en  $\tau_{xy}$  vinden we dan door deze functie  $F$  te differentiëren naar respectievelijk  $y$ ,  $x$  en  $x$  en  $y$ .<sup>1)</sup>

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} ; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} . \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Timoshenko and Goodier: Theory of Elasticity; 2e druk  
Hoofdstuk 2, par. 13 t/m 16.



Bij het zoeken naar een geschikte spanningsfunctie zullen we gebruik maken van de volgende stelling: 1)

Stelling:

Zij gegeven  $\phi_0(x, y)$ , die voldoet aan  $\nabla^2 \phi_0 = 0$ ,  
 Zij gegeven  $\phi_1(x, y)$ , die voldoet aan  $\nabla^2 \phi_1 = 0$ ,

( $\phi_0$  en  $\phi_1$  zijn dan zogenaamde harmonische functies)

dan is  $F = \phi_0 + x\phi_1$  een functie die voldoet aan  $\nabla^4 F = 0$ .

Bewijs:

$$F = \phi_0 + x\phi_1, \text{ bepaal } \nabla^2 F = \nabla^2(\phi_0 + x\phi_1)$$

$$\nabla^2(\phi_0 + x\phi_1) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\phi_0 + x\phi_1) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\phi_0) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(x\phi_1) =$$

Gegeven is  $\nabla^2 \phi_0 = 0$ , dus

$$\nabla^2 F = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(x\phi_1) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\phi_1) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x\phi_1) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(x\phi_1) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial y}(x\phi_1) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \phi_1 + x \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ x \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right] =$$

$$= \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + x \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = \frac{2\partial \phi_1}{\partial x} + x \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right)$$

Gegeven is  $\nabla^2 \phi_1 = 0$ , dus

$$\nabla^2 F = \frac{2\partial \phi_1}{\partial x}$$

Nu is  $\frac{2\partial \phi_1}{\partial x}$  zelf ook weer een harmonische functie want

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\text{Dus als } \nabla^2 \phi_0 = 0 \text{ en } \nabla^2 \phi_1 = 0, \text{ dan } \nabla^4 F = \nabla^2(\nabla^2(\phi_0 + x\phi_1)) = 0 \quad (6)$$

Deze functie F kunnen we dus eventueel als een spanningsfunctie gebruiken.

1) Timoshenko and Goodier: Theory of Elasticity; 2<sup>e</sup> druk  
 Hoofdstuk 7, par 56

### III.2 Benadering van het gegeven elastisch scharnier

Voor de bepaling van de spanningsverdeling in het elastisch scharnier en in het bijzonder de spanningsverdeling op de symmetrie-doorsnede I.I (zie fig 1) is een benadering ingeroerd.

Het gegeven model is vervangen door een strip van de zelfde dikte en hoogte met in plaats van twee opengezaagde cirkelvormige gaten twee hyperbolisch gevormde inkepingen. (zie fig 7)

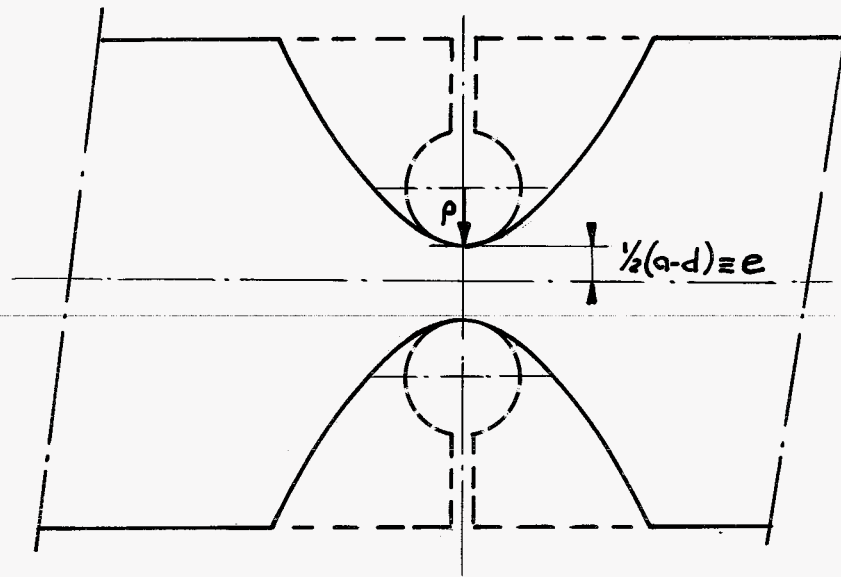


Fig 7.

De hyperbolen zijn zodanig aangepast, dat de topradius gelijk is aan de straal van cirkelvormige gaten; tevens passen ze in een zogenaamd elliptisch-coördinaten stelsel.

Het voordeel van deze benadering en het invoeren van een elliptisch-coördinatenstelsel is een aanzienlijke vereenvoudiging van de berekeningen.

Op grond van literatuurgegevens<sup>1)</sup>, die zeggen dat voor de spanningsverdeling in de symmetrie doorsnede alleen de verhouding  $e/p$  van belang is, is deze benadering ingevoerd. In hoeverre dit juist is zal experimenteel worden onderzocht.

<sup>1)</sup> Neuber, Kerbspannungslehre; 2<sup>e</sup> druk  
Hoofdstuk IV, par 2.

### III-3 Het elliptisch coördinatenstelsel

Door de transformatie

$$\begin{aligned} x &= c \sinh \xi \cos \eta \\ y &= c \cosh \xi \sin \eta \end{aligned} \quad (9)$$

gaan we van het Cartesisch coördinatenstelsel  $(x, y)$  over in een kromlijinig orthogonaal coördinatenstelsel  $(\xi, \eta)$

$\xi = \text{constant}$  geeft een stelsel ellipsen met brandpunten  $(x, y) = (0, \pm c)$

$$\left(\frac{x}{c \sinh \xi}\right)^2 + \left(\frac{y}{c \cosh \xi}\right)^2 = 1 \quad (10)$$

$\eta = \text{constant}$  geeft een stelsel hyperbolen, met de zelfde brandpunten als van de ellipsen:  $(x, y) = (0, \pm c)$

$$\left(\frac{y}{c \sin \eta}\right)^2 - \left(\frac{x}{c \cos \eta}\right)^2 = 1 \quad (11)$$

In fig. 8 is dit elliptisch coördinatenstelsel in beeld gebracht

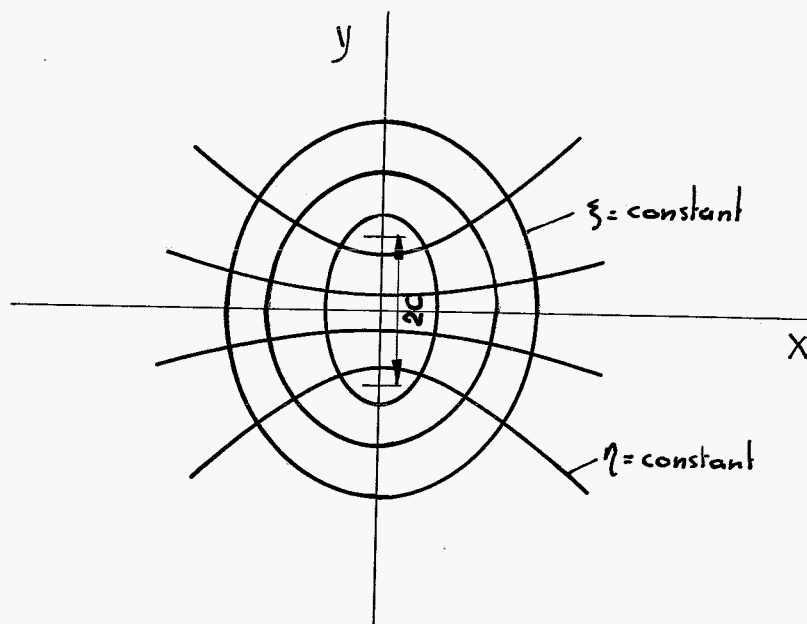


fig. 8

Met  $\eta = \eta_0$  beschrijven we juist de rand van de inketsing van ons model.

Dat het aldus verkregen coördinatenstelsel inderdaad orthogonaal is volgt uit:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{met } \underline{x} = (x, y) \quad (12)$$

Dit betekent, dat in een snijpunt van twee parameterkrommen  $\eta = \text{constant}$  en  $\xi = \text{constant}$  de vectoren  $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi}$  en  $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta}$ , die in dat punt de richting van de raaklijnen aan de respectievelijke krommen geven, loodrecht op elkaar staan.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi} \right) \cdot \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta} \right) &= \begin{pmatrix} c \cosh \xi \cos \eta \\ c \sinh \xi \sin \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -c \sinh \xi \sin \eta \\ c \cosh \xi \cos \eta \end{pmatrix} \\ &= -c^2 \sinh \xi \cosh \xi \sin \eta \cos \eta + c^2 \sinh \xi \cosh \xi \sin \eta \cos \eta = 0 \end{aligned}$$

De vectoren  $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi}$  en  $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta}$  staan onderling loodrecht op elkaar; willen ze dienen als basisvectoren in het kromlijnige coördinatenstelsel, dan zullen het orthogonale eenheidsvectoren moeten zijn.

We normeren de vectoren  $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi}$  en  $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta}$ : dat wil zeggen, delen door hun respectievelijke lengte; de zogenaamde schaalfactor  $h$ .

$$\begin{aligned} h_\xi &= \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi} \right| = \sqrt{c^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta + c^2 \sinh^2 \xi \sin^2 \eta} \\ &= c \sqrt{\cosh^2 \xi \cos^2 \eta + \sinh^2 \xi (1 - \cos^2 \eta)} = c \sqrt{\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_\eta &= \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta} \right| = \sqrt{c^2 \sinh^2 \xi \sin^2 \eta + c^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta} \\ &= c \sqrt{\sinh^2 \xi (1 - \cos^2 \eta) + \cosh^2 \xi \cos^2 \eta} = c \sqrt{\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta} \end{aligned}$$

Het blijkt dat de beide schaalfactoren gelijk zijn:

$$h_\xi = h_\eta = h = c \sqrt{\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta} \quad (13)$$

Men spreekt in dit geval van een isometrisch coördinatenstelsel.

De basisvectoren van dit elliptisch coördinatenstelsel worden dus

$$\frac{1}{h} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi} \quad \text{en} \quad \frac{1}{h} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta} \quad (14)$$

Als er een vector  $\underline{a}$  gegeven is, worden zijn componenten in  $\xi$ -en  $\eta$ -richting als volgt geschreven

$$a_{\xi} = \frac{1}{h} \left( \underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi} \right) \quad \text{en} \quad a_{\eta} = \frac{1}{h} \left( \underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta} \right) \quad (15)$$

We zullen nu nog nagaan hoe de in de volgende hoofdstukken te gebruiken operator  $\nabla^2$  in dit coördinatenstelsel gedefinieerd wordt.

Hiertoe maken we gebruik van de definitie van "divergentie" in kromlijnige coördinaten<sup>1)</sup>

$$\operatorname{div} \underline{a} = \frac{1}{h_{\xi} h_{\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_{\eta} a_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_{\xi} a_{\eta}) \right\}, \quad (16)$$

en van de definitie van  $\nabla^2 \varphi$ :  $\nabla^2 \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ .

Grad  $\varphi$  ontbonden in  $\xi$ -en  $\eta$ -richting, gebruik makend van (15):

$$(\operatorname{grad} \varphi)_{\xi} = \frac{1}{h} \left( \operatorname{grad} \varphi, \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi};$$

$$\text{zo ook } (\operatorname{grad} \varphi)_{\eta} = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}.$$

laten we de operator "div" op  $(\operatorname{grad} \varphi)$  werken, met  $h_{\xi} = h_{\eta} = h$ , dan luidt de operator  $\nabla^2$  in kromlijnige coördinaten

$$\bar{\nabla}^2 \varphi = \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( h \cdot \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h \cdot \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right\} = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right)$$

De operator  $\nabla^2$  in het elliptisch coördinatenstelsel wordt dus als volgt gedefinieerd:

$$\bar{\nabla}^2 = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \quad (17)$$

1). Colledge dictaat: Wiskunde IV, Hoofdstuk V, §4.

### III-4 Spanningsfunctie F in het elliptisch coördinaten-systeem

Dank zij de formele overeenstemming van de Laplace-vergelijking in Cartesische- en isometrische coördinaten kunnen we de harmonische functie in het elliptisch coördinatenstelsel op dezelfde manier definiëren:

Zij  $\phi(\xi, \eta)$  een oplossing van

$$\bar{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = 0,$$

dan is  $\phi(\xi, \eta)$  een harmonische functie.

Ook hier geldt, dat een functie  $F = F(\xi, \eta)$ , gedefinieerd als  $F = \phi_0(\xi, \eta) + \alpha \phi(\xi, \eta)$ , met  $\alpha = c \sinh \xi \cos \eta$  voldoet aan de biidentical-vergelijking

$$\bar{\nabla}^4 F = \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \left[ \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) \right] = 0 \quad \text{indien } \phi_0 \text{ en } \phi_1 \quad (18)$$

harmonische functies zijn.

We tonen dit aan:

$$F = \phi_0 + \alpha \phi_1; \quad \text{bepaal } \bar{\nabla}^2 F = \bar{\nabla}^2 (\phi_0 + \alpha \phi_1).$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 (\phi_0 + \alpha \phi_1) &= \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) (\phi_0 + \alpha \phi_1) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) (\alpha \cdot \phi_1) = \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\alpha \phi_1) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (\alpha \phi_1) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \cdot \phi_1 + \alpha \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \cdot \phi_1 + \alpha \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} \phi_1 + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} \phi_1 + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} \right\} = \\ &= \frac{2}{h^2} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right\}, \quad \text{want } \left( \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} \right) \alpha = 0 \\ &\qquad \qquad \qquad \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{met } \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = c \cosh \xi \cos \eta \quad \text{en} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = -c \sinh \xi \sin \eta$$

$$\text{wordt } \bar{\nabla}^2 F = 2 \left( \frac{c \cosh \xi \cos \eta}{h^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} - \frac{c \sinh \xi \sin \eta}{h^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right)$$

Door differentiatie van  $x = \sinh \xi \cos \eta$   
 en  $y = \cosh \xi \sin \eta$   
 naar  $x$  vinden we

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{c \cosh \xi \cos \eta}{h^2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{c \sinh \xi \sin \eta}{h^2} \quad (19)$$

$$\text{Hiermede wordt } \bar{\nabla}^2 F = 2 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x}.$$

Deze functie is zelf ook weer een harmonische functie, want

$$\bar{\nabla}^2 \left( 2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) = \frac{2}{h^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) = \frac{2}{h^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} \right) = 0$$

$$\text{dus } \bar{\nabla}^2 \left( 2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) = \bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 F = 0 \quad \text{als } \bar{\nabla}^2 \phi_0 = 0 \quad \text{en} \quad \bar{\nabla}^2 \phi_1 = 0.$$

Zijn we in staat een spanningsfunctie  $F$  te vinden die voldoet aan de vergelijking  $\bar{\nabla}^2 F = 0$  en aan de randvoorwaarden van het probleem, dan vinden we de spanningen als volgt:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \text{en} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (20)$$

Via de coördinaten transformatie (9) kennen we  $F(\xi, \eta)$  immers ook als  $F = F(x, y)$

Op bovengenoemde randvoorwaarden zullen we nu nader ingaan.

### III.5 Randvoorwaarden

Bij het zoeken naar een geschikte spanningsfunctie heeft het voordeel de randvoorwaarden in de spanningsfunctie zelf uit te drukken, zodat niet eerst de spanningen behoeven worden afgeleid.

We beschouwen een plaatmateriaal met een eenheidsdikte  $dz=1$  en hebben daarop een kromme getekend tussen de punten A en B (zie fig 9)

We stellen dat het materiaal links-boven de kromme ① op het materiaal rechts-onder ② de krachten  $X, Y$  en een moment  $M$  uitoefent; in de figuur aangegeven met  $X_{1,2}, Y_{1,2}$  en  $M_{1,2}$

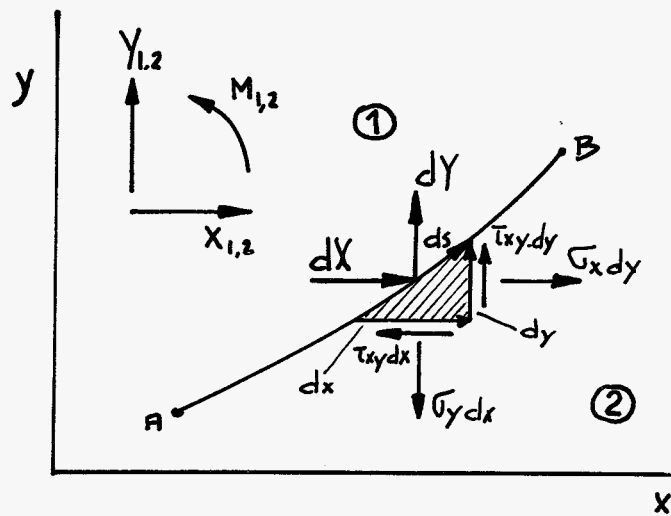


fig. 9

Op een driehoekig infinitesimaal elementje met zijden  $dx$  en  $dy$ , evenwijdig lopend aan de respectievelijk  $x$ - en  $y$ -as en  $ds$  werken de volgende krachten:  
 een kracht uitgeoefend door materiaal ①, gegeven door zijn ontbondenen  $dX$  en  $dY$ , werkend op het vlakje  $ds$ ,  
 krachten ten gevolge van de spanningen in het materiaal ② op de vlakjes  $dx$  en  $dy$ : respectievelijk  $\sigma_{ydx}$ ,  $\tau_{ydx}$  en  $\sigma_{xdy}$ ,  $\tau_{xdy}$ .

Evenwicht van het elementje levert:

$$\begin{aligned} \text{In } x\text{-richting} &: dX + \sigma_{xdy} - \tau_{ydx} = 0 \\ \text{In } y\text{-richting} &: dY - \sigma_{ydx} + \tau_{xdy} = 0 \end{aligned}$$

Maken we gebruik van (20) dan wordt

$$\begin{aligned} dX &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx = -d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\ \text{en } dY &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dy = +d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

We gaan nu door integratie van  $dX$  en  $dY$  over de ononderbroken kromme tussen A en B de totale kracht bepalen die het materiaal links van de kromme ① uitoefent op het materiaal rechts van de kromme ②

$$\text{Dan moet } X_{1,2} = \int_A^B dX = - \int_A^B d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_B + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_A \quad (21)$$



$$\text{Evenzo} \quad Y_{1,2} = \int_A^B dy = \int_A^B d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_A \quad (22)$$

Voor het totale moment vinden we

$$\begin{aligned} M_{1,2} \text{ (t.o.v. } (x,y)=(0,0)) &= \int_A^B [x dy - y dx] = \\ &= \int_A^B \left[ x d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + y d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \right] = \int_A^B d\left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F\right) = \\ &= \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F\right)_B - \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F\right)_A \end{aligned} \quad (23)$$

Voor een onbelaste rand geldt:  $X_{1,2} = Y_{1,2} = M_{1,2} = 0$

$$\text{dus} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \text{constant} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \text{constant} \quad (24)$$

We kunnen nu, met behulp van de in voorgaande hoofdstukken afgeleiden gegevens, het probleem: "de spanningsverdeling in een elastisch scharnier ten gevolge van een buigend moment in het vlak" oplossen.

### III.6 Afleiding van de spanningsverdeling in het scharnier

We gaan de spanningsverdeling bepalen voor een hyperbolisch gekerfde plaat zoals in hoofdstuk III.2 gesteld is (fig. 7)

In navolging van Neuber<sup>1)</sup> stellen we

$$\phi_0 = A \cosh 2\xi \sin 2\eta + B\eta \quad \text{en} \quad \phi_1 = -4\frac{A}{c} \sinh \xi \sin \eta \quad (25)$$

<sup>1)</sup> Neuber, Kerbspannungslehre; 2<sup>e</sup> druk  
Hoofdstuk IV, par. 2.

$\phi_0$  en  $\phi_1$  zijn harmonische functies want:

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \eta^2} = 4A \cosh 2\xi \sin 2\eta - 4A \cosh 2\xi \sin 2\eta = 0$$

$$\text{en } \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} = -\frac{4A \sinh \xi \sin \eta}{c} + \frac{4A \sinh \xi \cos \eta}{c} = 0$$

Volgens (18) is dan  $F = \phi_0 + \alpha \phi_1$  een functie die voldoet aan de bi-potential vergelijking  $\nabla^4 F = 0$ .

De spanningsfunctie luidt:

$$F = A \cosh 2\xi \sin 2\eta + B\eta + \alpha \cdot \left(-\frac{4A \sinh \xi \sin \eta}{c}\right)$$

met  $\alpha = c \sinh \xi \cos \eta$  wordt

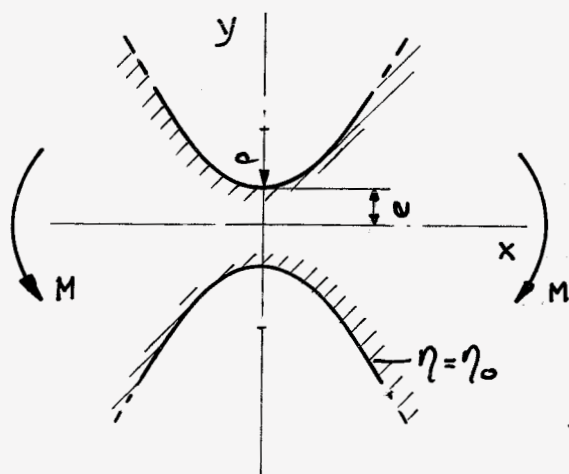
$$F = A \cosh 2\xi \sin 2\eta + B\eta - 4A \sinh \xi \sin \eta \cos \eta$$

$$= A \cosh 2\xi \sin 2\eta + B\eta - A \sin 2\eta (\cosh 2\xi - 1)$$

$$\underline{F = A \sin 2\eta + B\eta.}$$

(26)

Randvoorwaarden.



De randen van de inkeping zijn spanningloos. Dan geldt voor  $\eta = +\eta_0$  en  $\eta = -\eta_0$  volgens (24)

dat  $\frac{\partial F}{\partial x} = \text{constant}$  en  $\frac{\partial F}{\partial y} = \text{constant}$  moeten zijn.

fig. 10.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-c \sinh \xi \sin \eta}{h^2} (2A \cos 2\eta + B) \quad (27)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{c \cosh \xi \cos \eta}{h^2} (2A \cos 2\eta + B) \quad (28)$$

De partiële afgeleiden  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  en  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$  vinden we door differentiatie van de coördinaten-transformatie formules (9).

Voor  $\eta = \pm \eta_0$  worden de uitdrukkingen (27) en (28) gelijk aan nul als we stellen

$$B = -2A \cos 2\eta_0. \quad (29)$$

We voldoen dan aan de randvoorwaarden:  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0 = \text{constant}$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 = \text{constant.}$$

Uit (21) en (22) zien we direct dat  $X_{1,2}$  en  $Y_{1,2}$  gelijk aan nul zijn: op het symmetrievlak  $x=0$  wordt door het linkerdeel van het scharnier geen normaalkracht en geen dwarskracht uitgeoefend.

Wel werkt er het moment  $M$ ; via (23) vinden we een tweede vergelijking voor het bepalen van de constanten  $A$  en  $B$  in de gestelde spanningfunctie.

$$\begin{aligned} \text{Vergelijking (23): } M_{1,2} &= \left( x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F \right)_{\eta=\eta_0} - \left( x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F \right)_{\eta=-\eta_0} \\ &= - (F)_{\eta=\eta_0} + (F)_{\eta=-\eta_0} = -2 (A \sin 2\eta_0 + B \eta_0) \end{aligned}$$

In de afleiding van (23) was  $M_{1,2}$  het moment per eenheid van dikte van de plaat, dus  $M_{1,2} = \frac{M}{b}$

$$\frac{M}{b} = -2 (A \sin 2\eta_0 + B \eta_0)$$

$$\text{met (29)} \quad \frac{M}{b} = -2A (\sin 2\eta_0 - 2\eta_0 \cos 2\eta_0) \quad (30)$$

Met behulp van (20) vinden we de spanningen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  en  $\tau_{xy}$ .

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$\frac{\partial F}{\partial y}$  kennen we uit (28), waarbij erop gelet dient te worden dat  $h^2$  ook een functie van  $\xi$  en  $\eta$  is (zie (13)).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left[ \frac{2A \cos 2\eta + B}{c} \right] \left[ \frac{(\sinh \xi \cos \eta \frac{\partial \xi}{\partial y} - \cosh \xi \sin \eta \frac{\partial \eta}{\partial y})(\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)}{(\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)^2} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cosh \xi \cos \eta (2 \sinh \xi \cos \eta \frac{\partial \xi}{\partial y} - 2 \cos \eta \sin \eta \frac{\partial \eta}{\partial y})}{(\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)^2} \right] + \\ &\quad + \frac{\cosh \xi \cos \eta}{\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta} \left( -\frac{4A}{c} \sin 2\eta \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x = & \left[ \frac{2A \cos 2\eta + B}{c} \right] \left[ \frac{(\sinh^2 \xi \cos \eta \sin \eta - \cosh^2 \xi \sin \eta \cos \eta)(\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)}{c (\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)^3} + \right. \\ & \left. - \frac{2 \cosh \xi \cos \eta (\sinh^2 \xi \cosh \xi \sin \eta - \cos^2 \eta \sin \eta \cosh \xi)}{c (\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)^3} \right] + \\ & - \frac{4A \cosh^2 \xi \cos^2 \eta \sin 2\eta}{c^2 (\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)^2} \\ \bar{\sigma}_x = & \left[ \frac{2A \cos 2\eta + B}{c^2 h^4} \right] \left[ -\sin \eta \cos \eta - \frac{2 \cosh^2 \xi \sin \eta \cos \eta (\sinh^2 \xi - \cos^2 \eta)}{h^2} \right] + \\ & - \frac{4A \cosh^2 \xi \cos^2 \eta \sin 2\eta}{c^2 h^4} \end{aligned} \quad (31)$$

Op dezelfde manier vinden we  $\bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_y = & \left[ \frac{2A \cos 2\eta + B}{c^2 h^4} \right] \left[ -\sin \eta \cos \eta + \frac{2 \sinh^2 \xi \sin \eta \cos \eta (\cosh^2 \xi + \sin^2 \eta)}{h^2} \right] + \\ & - \frac{4A \sinh^2 \xi \sin^2 \eta \sin 2\eta}{c^2 h^4} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} :$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy} = & \left[ \frac{2A \cos 2\eta + B}{c^2 h^4} \right] \left[ +\sinh \xi \cosh \xi - \frac{2 \sin^2 \eta \sinh \xi \cosh \xi (\sinh^2 \xi - \cos^2 \eta)}{h^2} \right] \\ & - \frac{A \sinh 2\xi \sin^2 2\eta}{c^2 h^4} \end{aligned} \quad (33)$$

Uit (9) volgt dat voor de symmetrie doorsnede  $X=0$  geldt:  
 $\xi=0$

De spanningsverdeling op de symmetrie-doorsnede wordt:

$$\bar{\sigma}_x = \left[ \frac{2A \cos 2\eta + B}{c^2 \cos^2 \eta} \right] \cdot \left[ -\sin \eta \cos \eta + 2 \sin \eta \cos \eta \right] - \frac{4A \sin \eta}{c^2 \cos^2 \eta}$$

met (29) gesubstitueerd:

$$\bar{\sigma}_x = \left[ \frac{A \sin 2\eta}{c^2 \cos^2 \eta} \right] \cdot \left[ -4 + \frac{\cos 2\eta - \cos 2\eta_0}{\cos^2 \eta} \right] \quad (34)$$

$$\sigma_y = \left[ \frac{A \sin 2\eta}{c^2 \cos^4 \eta} \right] [\cos 2\eta_0 - \cos 2\eta] \quad (35)$$

$$T_{xy} = 0 \quad (36)$$

Hiermede is de gehele spanningverdeling in het qua vorm benaderde elastisch scharnier bekend.

De te volgen metingen zullen plaatsvinden aan modellen van het gegeven scharnier; dus met twee cirkelvormige gaten.

Uit de meetresultaten zal de spanningverdeling op de symmetrie-doorsnede bepaald worden.

Door vergelijking van de beide spanningverdelingen op de symmetrie-doorsnede zullen we een uitspraak doen in hoeverre de benadering van het gegeven elastisch scharnier door een hyperbolisch gekerfde strip (zie fig 7) aanvaardbaar is.

Tot slot van dit hoofdstuk zullen we de kerffactor  $K$ , gedefinieerd als  $\sigma_{x \max} / p$  ( $p$  is de maximale spanning bij een lineaire spanningverdeling op de symmetrie-doorsnede), bepalen.

### III-7 Kerffactor.

Voor een lineaire spanningverdeling geldt:  $p = \frac{M}{I} \cdot e$ .

$$p = \frac{12 M e}{b (2e)^3} = \frac{3 M}{2 b e^2} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \text{Uit (34) vinden we voor } \sigma_{x \max} &= \left[ \frac{A \sin 2\eta_0}{c^2 \cos^4 \eta_0} \right] \left[ -4 + \frac{\cos 2\eta_0 - \cos 2\eta_0}{\cos^2 \eta_0} \right] \\ &= \frac{-4 A \sin 2\eta_0}{c^2 \cos^2 \eta_0} \quad (38) \end{aligned}$$

De constante  $A$  bepalen we uit (30) :  $A = -\frac{M}{b} \frac{1}{2(\sin 2\eta_0 - 2\eta_0 \cos 2\eta_0)}$

Uit (37) volgt  $\frac{M}{b} = \frac{2 e^2}{3} p$ ; Uit (9) volgt voor  $x=0$  :  $e = c \sin \eta_0$ .

Beide uitdrukkingen gesubstitueerd in de formule voor  $A$  geeft:

$$A = -p \frac{c^2 \sin^2 \eta_0}{3(\sin 2\eta_0 - 2\eta_0 \cos 2\eta_0)} \quad (39)$$

Substitueer (39) in (38); dit geeft

$$\bar{v}_{x \max} = 4 \tan^2 \eta_0 \frac{\sin 2\eta_0}{3 (\sin 2\eta_0 - 2\eta_0 \cos 2\eta_0)} \cdot p$$

$$\text{De kerffactor } K = \frac{\bar{v}_{x \max}}{p} = \frac{4 \tan^2 \eta_0 \sin 2\eta_0}{3 (\sin 2\eta_0 - 2\eta_0 \cos 2\eta_0)} \quad (40)$$

We bepalen de kromming van de hyperbool  $\eta = \eta_0$  voor  $x=0$  en dus  $\xi=0$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\text{Uit (9) : } y = c \cosh \xi \sin \eta_0$$

$$y' = c \sinh \xi \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \sin \eta_0$$

$$y'' = c \sin \eta_0 \left[ \sinh \xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \cosh \xi \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\text{Voor } x = \xi = 0 : \begin{aligned} y' &= 0 \\ y'' &= c \sin \eta_0 \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\xi=0}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Met (19) wordt } y'' = \frac{c \sin \eta_0}{c^2 \cos^2 \eta_0}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin \eta_0}{c \cos^2 \eta_0}$$

$$\text{met } e = c \sin \eta_0 \text{ wordt: } \frac{e}{\rho} = \tan^2 \eta_0 \quad (41)$$

Uit (41) kan eenvoudig afgeleid worden:

$$\cos \eta_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{e}{\rho} + 1}} \quad \text{en} \quad \sin \eta_0 = \sqrt{\frac{e/\rho}{e/\rho + 1}} \quad (42)$$

Substitueren we (41) en (42) in (40) dan krijgen we de volgende uitdrukking voor de kerffactor

$$K = \frac{4 \cdot \frac{e}{\rho} \sqrt{\frac{e}{\rho}}}{3 \left[ \sqrt{\frac{e}{\rho}} + \left( \frac{e}{\rho} - 1 \right) \arctan \sqrt{\frac{e}{\rho}} \right]} \quad (43)$$

De verhouding  $e/\rho$  blijkt een karakteristieke maat te zijn voor de kerffactor.

In het limietgeval :  $\rho \rightarrow \infty$  blijkt de keffactor tot de waarde 1 te naderen.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\rho \rightarrow \infty} K &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{4 e^{\rho} \sqrt{e^{\rho}}}{3 [\sqrt{e^{\rho}} + (e^{\rho} - 1)(\sqrt{e^{\rho}} - \frac{1}{3} e^{\rho} \sqrt{e^{\rho}} + \dots)]} \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{4 e^{\rho}}{3 [1 + (e^{\rho} - 1)(1 - \frac{1}{3} e^{\rho})]} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{4 e^{\rho}}{3 [\frac{4}{3} e^{\rho} - \frac{1}{3} (e^{\rho})^2]} \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{4}{3(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} e^{\rho})} = 1
 \end{aligned}$$

## IV Stijfheid van het scharnier.

### IV-1 Energie-beschouwingen.

In principe kunnen we uit de nu bekende spanningsverdeling de, ten gevolge van het aangebrachte uitwendig moment  $M$ , opgehoapte elastische energie berekenen.

Voor de vlakspanningtoestand is de elastische energie per volume eenheid:

$$W_{vol} = \frac{1}{2} (\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}) \quad (44)$$

$$\text{Met Hooke : } \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy}$$

$$\text{wordt } W_{vol} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 - \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y$$

De totaal in het scharnier opgehoapte elastische energie

$$\text{bedraagt : } W = \int_V W_{vol} dV = \int_V \left\{ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 - \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y \right\} dV \quad (45)$$

Mede gelet op de gegeven definitie van een elastisch-scharnier (4) nemen we aan dat alle energie zich bevindt in het materiaal gelegen tussen  $x = \pm \frac{1}{2}d$  en de randen, gegeven door  $\eta = \pm \eta_0$ . Verder nemen we aan dat de spanningen over de materiaaldikte constant zijn.

De integratie-grenzen voor de volume-integraal liggen hiermede vast.

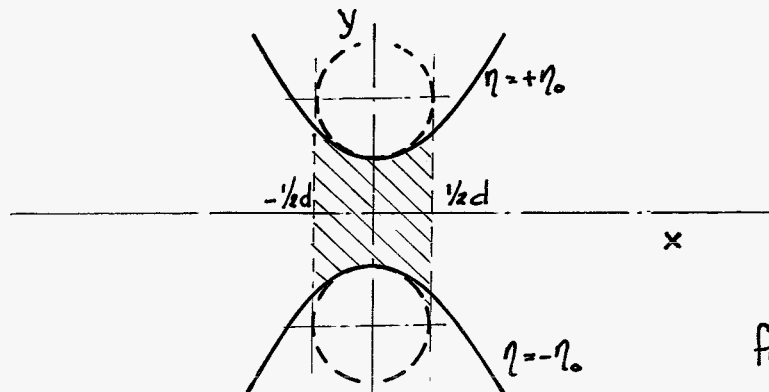


fig 11.



De hoekverdraaiing kunnen we berekenen met:  $\varphi = \frac{dW}{dM}$  (46)

De stijfheid van het scharnier,  $M/\varphi$ , is hiermede bepaald.

Bij de uitvoering van deze berekeningen stuiten we op grote moeilijkheden; wegens de gecompliceerde uitdrukkingen voor de spanningen (31), (32) en (33) kunnen we de integraal (45) niet uitrekenen.

Via een energie-beschouwing zal getracht worden een benaderingsmethode te vinden om de stijfheid van het scharnier te bepalen.

We zullen de energie-beschouwing houden voor een "benaderd" scharnier met de volgende karakteristieke afmetingen:

$$\begin{aligned} \rho (= \text{topradius van de hyperbool}) &= 8 \text{ mm} \\ e (= \text{halve hoogte, damwand}) &= 4.5 \text{ mm} \\ b (= \text{plaatdikte}) &= 6 \text{ mm} \end{aligned}$$

Dit zijn afmetingen, behorend bij één van de "gegeven" modellen waaraan gemeten is, dus met een gatdiameter  $d=16 \text{ mm}$ .

In drie doorsneden:  $x=0$ ,  $x=4$  en  $x=8 \text{ mm}$  (fig 11) wordt de elastische energie in een volume-elementje  $h \times b \times \Delta x$  numeriek uitgerekend, uitgaande van de exacte spanningsverdeling. Bij het uitrekenen en in grafiek brengen van de spanningen in deze drie doorsneden van het scharnier constateren we, dat de spanningsverdeling de lineaire spanningsverdeling enigszins benadert;  $\sigma_x$  ongeveer lineair,  $\sigma_y$  en  $\tau_{xy}$  klein tov.  $\sigma_x$ .

Hierdoor geïnspireerd gaan we voor de zelfde drie doorsneden de elastische energie in een volume-elementje  $h \times b \times \Delta x$  berekenen, uitgaande van een aangenomen lineaire spanningsverdeling.

Tot slot zullen we voor het "gegeven" scharnier, uitgaande van de lineaire spanningsverdeling in negen doorsneden:  $x=0, 1, 2, \dots, 8 \text{ mm}$  de energie per volume-eenheid  $h \times b \times \Delta x$  berekenen.

De resultaten zullen in grafiek gebracht worden.

Op au de hand van de verkregen resultaten zullen we een benaderingsmethode voor het berekenen van de hoekverdraaiing  $\varphi$  van het scharnier, ten gevolge van een moment in het vlak van het scharnier, voorstellen.

Alvorens tot de energie-berekeningen over te gaan, worden in het nu volgende hoofdstuk de spanningen in de drie doorsneden  $x=0$ ;  $x=4$  en  $x=8 \text{ mm}$  numeriek uitgerekend.

IV-2 Numerieke berekening van de spanningen.

We bepalen eerst de waarde van de drie constanten A, B en c die in de formules (31), (32) en (33) voor de spanningen voorkomen.

Bepaling c: Uit (9) volgt voor  $(x,y) = (0, 4.5)$  :  $4.5 = c \sin \eta_0$ .

Uit (42) volgt voor  $e = 4.5 \text{ mm}$   
 $\rho = 8.0 \text{ mm}$

$$\sin \eta_0 = 0.6 ; \quad \cos \eta_0 = 0.8.$$

De waarde van c wordt:  $c = \frac{4.5}{0.6} = 7.5 \text{ mm}$

Bepaling A :

$$\text{Met (39) wordt } A = \frac{-p \cdot c^2 \sin^2 \eta_0}{3(\sin 2\eta_0 - 2\eta_0 \cos 2\eta_0)} = \frac{-p * 56.25 * 0.36}{3(0.96 - 2 * 0.64 * 0.28)} = \underline{\underline{-11.25 p}} \text{ [kgf]}$$

Bepaling B:

$$\text{Met (29) wordt } B = -2A \cos 2\eta_0 = 22.5 * 0.28 p = \underline{\underline{+6.23 p}} \text{ [kgf]}$$

Met (9), de coördinaten-transformatie formules, worden de waarden van de in de formules (31), (32) en (33) voorkomende functies van  $\xi$  en  $\eta$  in de te berekenen punten  $(x,y)$  bepaald.

De resultaten zijn in onderstaande tabel (tabel 1) vermeld.

	$\sin \eta$	$\sin^2 \eta$	$\cos \eta$	$\cos^2 \eta$	$\sinh \xi$	$\sinh^2 \xi$	$\cosh \xi$	$\cosh^2 \xi$
$x = 0$ $y = 0$	0	0	1	1	0	0	1	1
$x = 0$ $y = 2.25$	0.3	0.09	0.95	0.91	0	0	1	1
$x = 0$ $y = 4.5$	0.6	0.36	0.8	0.64	0	0	1	1
$x = 4$ $y = 0$	0	0	1	1	0.533	0.284	1.33	1.284
$x = 4$ $y = 2.7$	0.315	0.099	0.949	0.901	0.56	0.32	1.15	1.32
$x = 4$ $y = 5.4$	0.6	0.36	0.8	0.64	0.667	0.44	1.20	1.44

	$\sin \eta$	$\sin^2 \eta$	$\cos \eta$	$\cos^2 \eta$	$\sinh \xi$	$\sinh^2 \xi$	$\cosh \xi$	$\cosh^2 \xi$
$x=8$ $y=0$	0	0	1	1	1.067	1.138	1.462	2.138
$x=8$ $y=3.75$	0.778	0.114	0.941	0.886	1.12	1.264	1.502	2.264
$x=8$ $y=7.5$	0.6	0.36	0.8	0.64	1.370	1.781	1.670	2.781

TABEL 1

We gaan nu over tot het berekenen van de spanningen.

$$\sigma_x = \left[ \frac{2A \cos 2\eta + B}{c^2 (\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)^2} \right] \left[ -\sin \eta \cos \eta - \frac{2 \cosh^2 \xi \sin \eta \cos \eta (\sinh^2 \xi - \cos^2 \eta)}{\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta} \right] - \frac{4A \cosh^2 \xi \cos^2 \eta \sin 2\eta}{c^2 (\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)^2}$$

$$(x, y) = (0, 0) \quad \sigma_x = \underline{0 \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (0, 2.25) \quad \sigma_x = p \left( \frac{-22.5 * 0.82 + 6.27}{56.25 (0 + 0.91)^2} \right) (0.3 * 0.95) + p \frac{45 * 2 * 0.285}{56.25 * 0.91} =$$

$$= \underline{0.43 p \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (0, 4.5) \quad \sigma_x = p \cdot \frac{45 * 2 * 0.6 * 0.8}{56.25 * 0.64} = \underline{1.2 p \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (4, 0) \quad \sigma_x = \underline{0 \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (4, 2.7) \quad \sigma_x = p \left( \frac{-22.5 * 0.80 + 6.27}{56.25 * (0.72 + 0.90)^2} \right) \left( -0.299 - \frac{2 * 1.32 * 0.299 (0.32 - 0.90)}{0.72 + 0.90} \right) +$$

$$+ p \frac{45 * 1.32 * 0.90 * 2 * 0.299}{56.25 (0.72 + 0.90)^2} = \underline{0.795 \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (4, 5.4) \quad \sigma_x = p \frac{45 * 1.44 * 0.64 * 2 * 0.48}{56.25 (0.44 + 0.64)^2} = \underline{0.60 \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (8, 0) \quad \sigma_x = \underline{0 \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (8, 3.75) \quad \sigma_x = p \left( \frac{-22.5 \times 0.82 + 6.23}{56.25(1.26 + 0.89)^2} \right) \left( -0.378 \times 0.941 - \frac{2 \times 2.26 \times 0.378 \times 0.941(1.26 - 0.89)}{1.26 + 0.89} \right) \\ + p \frac{45 \times 2.26 \times 0.89 \times 2 \times 0.378 \times 0.941}{56.25(1.26 + 0.89)^2} = \underline{0.24 p \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (8, 7.5) \quad \sigma_x = p \frac{45 \times 2.78 \times 0.64 \times 2 \times 0.48}{56.25(1.78 + 0.64)^2} = \underline{0.24 p \text{ kgf/mm}^2}$$

$$\sigma_y = \left[ \frac{2A \cos 2\eta + B}{c^2 (\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)^2} \right] \left[ -\sin \eta \cos \eta + \frac{2 \sinh^2 \xi \sin \eta \cos \eta (\cosh^2 \xi + \sin^2 \eta)}{\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta} \right] + \\ - \frac{4A \sinh^2 \xi \sin^2 \eta \sin 2\eta}{c^2 (\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)^2}$$

$$(x, y) = (0, 0) \quad \sigma_y = \underline{0 \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (0, 2.25) \quad \sigma_y = p \left( \frac{-22.5 \times 0.82 + 6.23}{56.25(0.91)^2} \right) (-0.3 \times 0.95) = \underline{0.07 p \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (0, 4.5) \quad \sigma_y = \underline{0 \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (4, 0) \quad \sigma_y = \underline{0 \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (4, 2.7) \quad \sigma_y = p \left( \frac{-22.5 \times 0.80 + 6.23}{56.25(0.32 + 0.90)^2} \right) \left( -0.95 \times 0.32 - \frac{2 \times 0.32 \times 0.95 \times 0.32(1.32 + 0.1)}{0.32 + 0.90} \right) \\ + p \frac{45 \times 0.32 \times 0.1 \times 2 \times 0.95 \times 0.32}{56.25(0.32 + 0.90)^2} = \underline{0.01 p \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (4, 5.4) \quad \sigma_y = p \frac{45 \times 0.44 \times 0.36 \times 2 \times 0.48}{56.25(0.44 + 0.64)^2} = \underline{0.105 p \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (8, 0) \quad \sigma_y = \underline{0 \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (8, 3.75) \quad \sigma_y = p \left( \frac{-22.5 \times 0.77 + 6.23}{56.25(1.26 + 0.89)^2} \right) \left( -0.34 \times 0.94 - \frac{2 \times 1.26 \times 0.34 \times 0.94(2.26 + 0.11)}{1.26 + 0.89} \right) \\ + p \frac{45 \times 1.26 \times 0.11 \times 2 \times 0.34 \times 0.94}{56.25(1.26 + 0.89)^2} = \underline{0.06 p \text{ kgf/mm}^2}$$

$$(x, y) = (8, 7,5) \quad \sigma_y = p \cdot \frac{45 \times 1,78 \times 0,76 \times 2 \times 0,48}{56,25 (1,78 + 0,64)^2} = \underline{\underline{0,085 p \text{ kgf/mm}^2}}$$

$$\tau_{xy} = \left[ \frac{2A \cos 2\eta + B}{c^2 (\sinh^2 \eta + \cos^2 \eta)^2} \right] \left[ \sinh \eta \cosh \eta - \frac{2 \sin^2 \eta \sinh \eta \cosh \eta (\sinh^2 \eta - \cos^2 \eta)}{\sinh^2 \eta + \cos^2 \eta} \right] + \frac{-A \sinh 2\eta \sin^2 2\eta}{c^2 (\sinh^2 \eta + \cos^2 \eta)^2}$$

$$(x, y) = (0, 0) \quad \tau_{xy} = 0 \text{ kgf/mm}^2$$

$$(x, y) = (0, 2,25) \quad \tau_{xy} = 0 \text{ kgf/mm}^2$$

$$(x, y) = (0, 4,5) \quad \tau_{xy} = 0 \text{ kgf/mm}^2$$

$$(x, y) = (4, 0) \quad \tau_{xy} = p \left( \frac{-22,5 + 6,23}{56,25 (0,28 + 1)^2} \right) (0,533 \times 1,33) = \underline{\underline{-0,12 p \text{ kgf/mm}^2}}$$

$$(x, y) = (4, 2,7) \quad \tau_{xy} = p \left( \frac{-22,5 \times 0,80 + 6,23}{56,25 (0,72 + 0,90)^2} \right) \left( 0,56 \times 1,15 - \frac{2 \times 0,09 \times 0,56 \times 1,15 (0,72 - 0,90)}{0,72 + 0,90} \right) + p \frac{45 \times 0,56 \times 1,15 \times 0,09 \times 0,90 \times 2}{56,25 (0,72 + 0,90)^2} = \underline{\underline{0 \text{ kgf/mm}^2}}$$

$$(x, y) = (4, 5,4) \quad \tau_{xy} = p \cdot \frac{11,25 \times 2 \times 1,2 \times 0,667 \times 4 \times 0,48 \times 0,48}{56,25 (0,44 + 0,64)^2} = \underline{\underline{0,25 p \text{ kgf/mm}^2}}$$

$$(x, y) = (8, 0) \quad \tau_{xy} = p \left( \frac{-22,5 + 6,23}{56,25 (1,14 + 1)^2} \right) (1,07 \times 1,46) = \underline{\underline{-0,10 p \text{ kgf/mm}^2}}$$

$$(x, y) = (8, 3,75) \quad \tau_{xy} = p \left( \frac{-22,5 \times 0,77 + 6,23}{56,25 (1,26 + 0,89)^2} \right) \left( 1,12 \times 1,50 - \frac{2 \times 0,11 \times 1,12 \times 1,50 (1,26 - 0,89)}{1,26 + 0,89} \right) + p \frac{11,25 \times 2 \times 1,12 \times 1,50 \times 4 \times 0,11 \times 0,89}{56,25 (1,26 + 0,89)^2} = \underline{\underline{0 \text{ kgf/mm}^2}}$$

$$(x, y) = (8, 7,5) \quad \tau_{xy} = p \cdot \frac{11,25 \times 2 \times 1,33 \times 1,67 \times 4 \times 0,64 \times 0,76}{56,25 (1,78 + 0,64)^2} = \underline{\underline{0,14 p \text{ kgf/mm}^2}}$$

De verkregen resultaten zijn in tabel 2 samengevat en daarna in grafiek gebracht (grafieken nr I t/m II).

Door elk van de series van drie punten is een vloeiende kromme gelegd, waarvan verondersteld wordt dat deze het spanningsverloop in de betreffende doorsnede weergeeft

X=0	$\sigma_x$	y=0	0	$\sigma_x = 0.18py + 0.004py^3$
		y=2.25	0.43 p	
		y=4.5	1.2 p	
	$\sigma_y$	0	0	$\sigma_y = 0.04py - 0.002py^3$
		2.25	0.07 p	
		4.5	0	
	$\tau_{xy}$	0	0	$\tau_{xy} = 0$
		2.25	0	
		4.5	0	
X=4	$\sigma_x$	y=0	0	$\sigma_x = 0.16py - 0.0006py^3$
		y=2.7	0.395 p	
		y=5.4	0.60 p	
	$\sigma_y$	0	0	$\sigma_y = 0.0006py^3$
		2.7	0.01 p	
		5.4	0.105 p	
	$\tau_{xy}$	0	-0.12 p	$\tau_{xy} = -0.12p + 0.0003py^4$
		2.7	0	
		5.4	0.25 p	
X=8	$\sigma_x$	y=0	0	$\sigma_x = 0.085py - 0.0004py^3$
		y=3.75	0.24 p	
		y=7.5	0.24 p	
	$\sigma_y$	0	0	$\sigma_y = +0.01py - 0.0004py^3$
		3.75	0.06 p	
		7.5	0.085 p	
	$\tau_{xy}$	0	-0.10 p	$\tau_{xy} = -0.10p + 0.004py^2$
		3.75	0 p	
		7.5	0.14 p	

TABEL 2.

Voor de berekening van de energie met (45) wenschen we de spanningen als functie van y te kennen. Daartoe benaderen we de gevonden spanningsverloopen met zo goed mogelijk aansluitende polynomen in y.

De gevogde methode zal, voor één kromme, hieronder gegeven worden.

Constructie van  $\sigma_x$  voor  $x=0$  :

We stellen :  $\sigma_x = a y + b y^3$ . Dit grafiek  $\sigma_x = \sigma_x(y)$   $x=0$

meten we de helling op van de kromme voor  $y=0$ .

We vinden  $\frac{0,18 p}{1}$ . Hiermede hebben we  $a$  bepaald.

$\sigma_x$  wordt :  $\sigma_x = 0,18 p y + b y^3$ . Verder kennen we de waarde van  $\sigma_x$  voor  $y=4,5$  :  $\sigma_x = 1,2 p$

Uit de vergelijking :  $1,2 p = 0,18 p \times 4,5 + b 4,5^3$  vinden we  $b$  :

$$b = \frac{1,2 - 0,18 \times 4,5}{4,5^3} p = 0,004 p$$

$\sigma_x$ -verloop over de doorsnede  $x=0$  als functie van  $y$  wordt

$$\sigma_x = 0,18 p y + 0,004 p y^3$$

Ter controle zijn voor deze benaderde spanningverlopen telkens voor 6  $y$ -waarden de respectievelijke spanningen uitgerekend en in de grafieken weergegeven. We constateren een goede overeenstemming met het werkelijke spanningsverloop.

In tabel 2 zijn de benaderingsfuncties voor  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  en  $\tau_{xy}$  voor de drie beschouwde doorsneden vermeld.

#### IV-3 Numerieke berekening van de elastische energie

Met (45) schrijven we voor de energie per reepje  $\Delta x$  om  $x=0$

$$W_{x=0}^* \equiv \left( \frac{W}{\Delta x} \right)_{x=0} = 2b \left\{ \int_{y=0}^{y=4,5} \left( \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 - \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y \right) dy \right\}$$

$$\text{met } \left. \begin{aligned} \frac{1}{E} &= 0,476 \cdot 10^{-4} \text{ kg}^{-1} \text{ mm}^2 \\ \frac{1}{G} &= 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ kg}^{-1} \text{ mm}^2 \\ \frac{2\nu}{E} &= 0,28 \cdot 10^{-4} \text{ kg}^{-1} \text{ mm}^2 \end{aligned} \right\} \text{ materiaalconstanten voor STAAL.}$$

Dit tabel 2 lezen we, voor  $x=0$

$$\sigma_x = 0.18py + 0.004py^3 \rightarrow \sigma_x^2 = 324 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 + 16 \cdot 10^{-6} p^2 y^6 + 14.4 \cdot 10^{-4} p^2 y^4$$

$$\sigma_y = 0.04py - 0.002py^3 \rightarrow \sigma_y^2 = 16 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 + 4 \cdot 10^{-6} p^2 y^6 - 1.6 \cdot 10^{-4} p^2 y^4$$

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 340 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 + 20 \cdot 10^{-6} p^2 y^6 + 12.8 \cdot 10^{-4} p^2 y^4 +$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_x \sigma_y = 72 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 - 2 \cdot 10^{-4} p^2 y^4 - 8 \cdot 10^{-6} p^2 y^6$$

Hiermede wordt

$$\begin{aligned} W_{x=0}^* &= 6 \times 0.476 \cdot 10^{-4} \int_0^{4.5} (340 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 + 20 \cdot 10^{-6} p^2 y^6 + 12.8 \cdot 10^{-4} p^2 y^4) dy + \\ &+ 6 \times 1.25 \cdot 10^{-4} \int_0^{4.5} 0 \cdot dy - 6 \times 0.28 \cdot 10^{-4} \int_0^{4.5} (72 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 - 2 \cdot 10^{-4} p^2 y^4 - 8 \cdot 10^{-6} p^2 y^6) dy = \\ &= \underline{\underline{4.42 \cdot 10^{-4} p^2}} \quad [ \text{kgf} \cdot \text{mm} / \text{mm} ] \end{aligned}$$

Voor  $x=4 \text{ mm}$ :

$$\sigma_x = 0.16py - 0.0006py^3 \rightarrow \sigma_x^2 = 256 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 - 0.36 \cdot 10^{-6} p^2 y^6 - 192 \cdot 10^{-6} p^2 y^4$$

$$\sigma_y = 0.0006py^3 \rightarrow \sigma_y^2 = \frac{0.36 \cdot 10^{-6} p^2 y^6}{256 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 - 192 \cdot 10^{-6} p^2 y^4} +$$

$$\tau_{xy} = -0.12p + 0.0003py^4 \rightarrow \tau_{xy}^2 = 144 \cdot 10^{-4} p^2 + 0.09 \cdot 10^{-6} p^2 y^8 - 72 \cdot 10^{-6} p^2 y^4$$

$$\sigma_x \sigma_y = 96 \cdot 10^{-6} p^2 y^4 - 0.36 \cdot 10^{-6} p^2 y^6$$

$$\begin{aligned} W_{x=4}^* &= 6 \times 0.476 \cdot 10^{-4} \int_0^{5.4} (256 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 - 156 \cdot 10^{-6} p^2 y^4) dy + \\ &+ 6 \times 1.25 \cdot 10^{-4} \int_0^{5.4} (144 \cdot 10^{-4} p^2 + 0.09 \cdot 10^{-6} p^2 y^8 - 72 \cdot 10^{-6} p^2 y^4) dy + \\ &- 6 \times 0.28 \cdot 10^{-4} \int_0^{5.4} (96 \cdot 10^{-6} p^2 y^4 - 0.36 \cdot 10^{-6} p^2 y^6) dy = \\ &= \underline{\underline{2.28 \cdot 10^{-4} p^2}} \quad [ \text{kgf} \cdot \text{mm} / \text{mm} ] \end{aligned}$$



Voor  $x=8$  mm

$$\sigma_x = 0.085 p y - 0.0004 p y^3 \rightarrow \sigma_x^2 = 72.25 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 - 0.16 \cdot 10^{-6} p^2 y^6 - 68 \cdot 10^{-6} p^2 y^4$$

$$\sigma_y = -0.01 p y + 0.0004 p y^3 \rightarrow \sigma_y^2 = \frac{10^{-4} p^2 y^2 + 0.16 \cdot 10^{-6} p^2 y^6 - 8 \cdot 10^{-6} p^2 y^4}{+}$$

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 72.25 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 - 76 \cdot 10^{-6} p^2 y^4$$

$$\tau_{xy} = -0.10 p + 0.004 p y^2 \rightarrow \tau_{xy}^2 = 100 \cdot 10^{-4} p^2 + 0.16 \cdot 10^{-4} p^2 y^4 - 8 \cdot 10^{-4} p^2 y^2$$

$$\sigma_x \sigma_y = -0.5 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 + 26 \cdot 10^{-6} p^2 y^4 - 0.16 \cdot 10^{-6} p^2 y^6$$

$$W_{x=8}^* = 6 \times 0.476 \cdot 10^{-4} \int_{y=0}^{y=7.5} (72.25 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 - 76 \cdot 10^{-6} p^2 y^4) dy +$$

$$+ 6 \times 1.25 \cdot 10^{-4} \int_{y=0}^{y=7.5} (100 \cdot 10^{-4} p^2 + 0.16 \cdot 10^{-4} p^2 y^4 - 8 \cdot 10^{-4} p^2 y^2) dy +$$

$$- 6 \times 0.28 \cdot 10^{-4} \int_{y=0}^{y=7.5} (-0.5 \cdot 10^{-4} p^2 y^2 + 26 \cdot 10^{-6} p^2 y^4 - 0.16 \cdot 10^{-6} p^2 y^6) dy =$$

$$= \underline{\underline{0.75 \cdot 10^{-4} p^2}} \left[ \text{kgf mm} / \text{mm} \right]$$

Energie berekening uitgaande van een lineaire spanningsverdeling in het benaderde scharnier.

Voor  $x=0$  :  $\sigma_x = \frac{M}{I} \cdot y$   $p = \frac{M}{I} \cdot 4.5 \text{ kgf mm}^{-2}$

Hieruit volgt  $\sigma_x = \frac{1}{4.5} p y = 0.222 p y \text{ kgf mm}^{-2}$

De energie wordt  $W_{x=0}^* = \frac{2b}{2E} \int_{y=0}^{y=4.5} \sigma_x^2 dy$

$$= 6 \times 0.476 \cdot 10^{-4} \int_{y=0}^{y=4.5} (0.222 p y)^2 dy = \underline{\underline{4.28 \cdot 10^{-4} p^2}}$$

Voor  $x=4$  mm  $\sigma_x = 0.222 \cdot \left(\frac{9}{10.8}\right)^3 p y = 0.128 p y \text{ kgf mm}^{-2}$

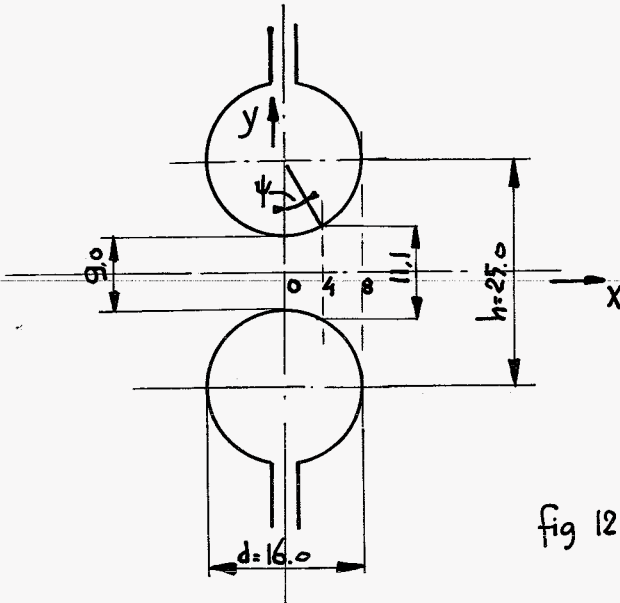
$$W_{x=4}^* = 6 \times 0.476 \cdot 10^{-4} \int_{y=0}^{y=5.4} (0.128 p y)^2 dy = \underline{\underline{2.45 \cdot 10^{-4} p^2}}$$

Voor  $x=8 \text{ mm}$   $\sigma_x = 0.222 * \left(\frac{9}{17}\right)^3 p y = 0.048 p y \text{ kgf/mm}^{-2}$

$$W_{x=8}^* = 6 * 0.476 * 10^{-4} \int_{y=0}^{y=7.5} (0.048 p y)^2 dy = \underline{\underline{0.92 * 10^{-4} p^2}}$$

Energie-berekening uitgaande van het gegeven scharnier en een lineaire spanningsverdeling

Met figuur 12 bepalen we de integratie grenzen voor  $y$ .



$x=0$   $h = 9.0 \text{ mm}$

$x=4 \text{ mm}$   $h = 9.0 + 2 * 8 * (1 - \cos 30^\circ) = 11.1 \text{ mm}$

$x=8 \text{ mm}$   $h = 9.0 + 2 * 8.0 = 25.0 \text{ mm}$

$$W^* = 2 * b * \frac{1}{2E} \int_{y=0}^{y=\frac{h}{2}} \sigma_x^2 dy.$$

fig 12.

Alleen voor de doorsneden  $x=0, 4$  en  $8 \text{ mm}$  is de berekening hieronder neergeschreven; de resultaten voor de andere doorsneden zijn direct in grafiek I weergegeven.

Voor  $x=0$   $\sigma_x = 0.222 p y \text{ kgf/mm}^{-2}$

$$W_{x=0}^* = \underline{\underline{4.28 * 10^{-4} p^2}} \text{ [kgf*mm/mm]}$$

Voor  $x=4 \text{ mm}$ :  $\sigma_x = 0.222 * \left(\frac{9}{11.1}\right)^3 p y = 0.118 p y \text{ kgf/mm}^{-2}$

$$W_{x=4}^* = 6 * 0.476 * 10^{-4} \int_{y=0}^{5.55} (0.118 p y)^2 dy = \underline{\underline{2.28 * 10^{-4} p^2}}$$

Voor  $x=8 \text{ mm}$ :  $\sigma_x = 0.222 * \left(\frac{9}{25}\right)^3 p y = 0.01 p y \text{ kgf/mm}^{-2}$

$$W_{x=8}^* = 6 * 0.476 * 10^{-4} \int_{y=0}^{12.5} (0.01 p y)^2 dy = \underline{\underline{0.20 * 10^{-4} p^2}}$$

De berekende waarden van  $W^*$  zijn in onderstaande tabel 3 samengevat.

	$x=0$ mm	$x=4$ mm	$x=8$ mm
	$W^* [kgfmm/mm]$	$W^* [kgfmm/mm]$	$W^* [kgfmm/mm]$
exacte sp.verd "hyperbool"	$4.42 \cdot 10^{-4} p^2$	$2.28 \cdot 10^{-4} p^2$	$0.75 \cdot 10^{-4} p^2$
lineaire sp.verd "hyperbool"	$4.28 \cdot 10^{-4} p^2$	$2.45 \cdot 10^{-4} p^2$	$0.92 \cdot 10^{-4} p^2$
lineaire sp.verd "gegeven" scharn.	$4.28 \cdot 10^{-4} p^2$	$2.28 \cdot 10^{-4} p^2$	$0.20 \cdot 10^{-4} p^2$

TABEL 3

In grafiek X zijn deze waarden uitgezet.

Voor het "gegeven" scharnier zijn voor meerdere  $x$ -waarden de energieën per volume-eenheden uitgerekend en in beeld gebracht. Het oppervlak onder de door de punten getrokken kromme stelt voor de totale hoeveelheid opgehoopte elastische energie in één helft van het scharnier, uitgaande van een lineaire spanningverdeling.

We constateren dat de totale hoeveelheid energie in één helft van het benaderde scharnier ca 10% groter is dan in het gegeven scharnier. Zoals te verwachten was neemt voor grotere  $x$ -waarden de energie per volume-elementje in het "benaderde" scharnier toe t.o.v de energie per volume-elementje in het "gegeven" scharnier.

Als tweede punt constateren we dat de totale energie-hoeveelheden uitgaande van de exacte-, respectievelijk lineaire spanningverdeling voor het benaderde scharnier onderling slechts minder dan 5% verschillen. Reeds eerder is opgemerkt dat de exacte spanningverdeling enigszins op de lineaire spanningverdeling lijkt.

Op grond van deze resultaten stellen we dat we de energie, en daarmee de hoekverdraaiing van het scharnier op 5% nauwkeurig kunnen benaderen door uit te gaan van de lineaire spanningverdeling in het gegeven scharnier. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>. zie blz 59 voor confrontatie van deze stelling met de praktijk

Deze benaderingsmethode heeft ook Prof. van der Floek toegepast.

|| We zullen daarom voor de bepaling van de stijfheid van de verschillende scharnieren de berekeningsresultaten van Prof. van der Floek gebruiken.

In de inleiding van dit rapport is de berekeningsmethode aangegeven.

In grafiek XXI is de grootte  $\frac{\varphi}{M} \cdot a^2 b E$  als functie van de karakteristieke verhouding  $d/a$  uitgezet.

#### OPMERKING:

Uitgaande van de hoeveelheid energie in het "gegeven" scharnier, die we door opmeten van het oppervlak onder de getrokken kromme in GRAFIEK X kunnen berekenen, kunnen we ter controle de bijbehorende hoekverdraaiing hieruit bepalen.

De gevonden waarde moet overeenstemmen met de hoekverdraaiing voor een scharnier met  $d/a = 0.64$ , berekend volgens de benaderingsmethode van Prof. van der Floek; immers in beide gevallen is uitgegaan van een lineaire spanningverdeling.

We verdelen het oppervlak onder de kromme in tien, even brede verticale stukken.

De kromme, die elk stuk aan de bovenkant afsluit, vervangen we door een rechte. Daarna bepalen we de gemiddelde hoogte van elk blok; waarmee we het oppervlak door  $O = \sum_{i=1}^{10} h_i \cdot b$  kennen.

$h_i$  = gemiddelde hoogte van een blok

$b$  = breedte van een blok

$$\begin{aligned} \text{We vinden: } W &= 0.8 (4.25 + 4.15 + 3.70 + 3.15 + 2.55 + 2.00 + 1.50 + 1.05 + \\ &\quad + 0.70 + 0.35) 10^{-4} p^2 \\ &= 18.72 \cdot 10^{-4} p^2 \text{ kgfmm.} \end{aligned}$$

$$\text{De energie in het gehele scharnier } W = 37.44 \cdot 10^{-4} p^2 \text{ kgfmm}$$

$$\text{Mcl. } p = \frac{M}{I_0} \cdot e \text{ (volgens 37)}$$

$$p = \frac{12 M \cdot 4.5}{6 (9)^3} = \frac{M}{81} \text{ kgfcm}^{-2} \quad \rightarrow W = W(M) = \frac{37.44 \cdot 10^{-4} M^2}{(81)^2}$$

$$\text{Hoekverdraaiing } \varphi \text{ vinden we met (46): } \varphi = \frac{dW}{dM} = \frac{74.88 \cdot 10^{-4} M}{(81)^2}$$

De dimensieloze uitdrukking voor de stijfheid wordt

$$\frac{\varphi}{M} a^2 b E = \frac{74.88 \cdot 10^{-4} \cdot 625 \cdot 6 \cdot 2.1 \cdot 10^9}{(81)^2} = \underline{\underline{89.88}}$$

Volgens de berekeningen van Prof. van der Poek vinden we voor de verhouding  $d/a = 0.64$  :  $\frac{Q}{M} a^3 b E = \underline{\underline{88.9}}$ , een verschil van slechts 1%.

## V Het experiment

### V-1 Doel van het experiment.

Het experiment had tot doel de spanningen in de symmetrie-doorsnede en de hoekverdraaiing van het scharnier, optredend ten gevolge van een buigend moment in het vlak van het scharnier, te bepalen.

### V-2 Proef opstelling.

Het experiment is met behulp van de optische bank uitgevoerd. Met een 4-punts. buigproef opstelling wordt het vereiste buigend moment in het vlak van het scharnier verkregen. In onderstaande figuur (fig 13) is de opstelling, met de belangrijkste afmetingen, geschetst.

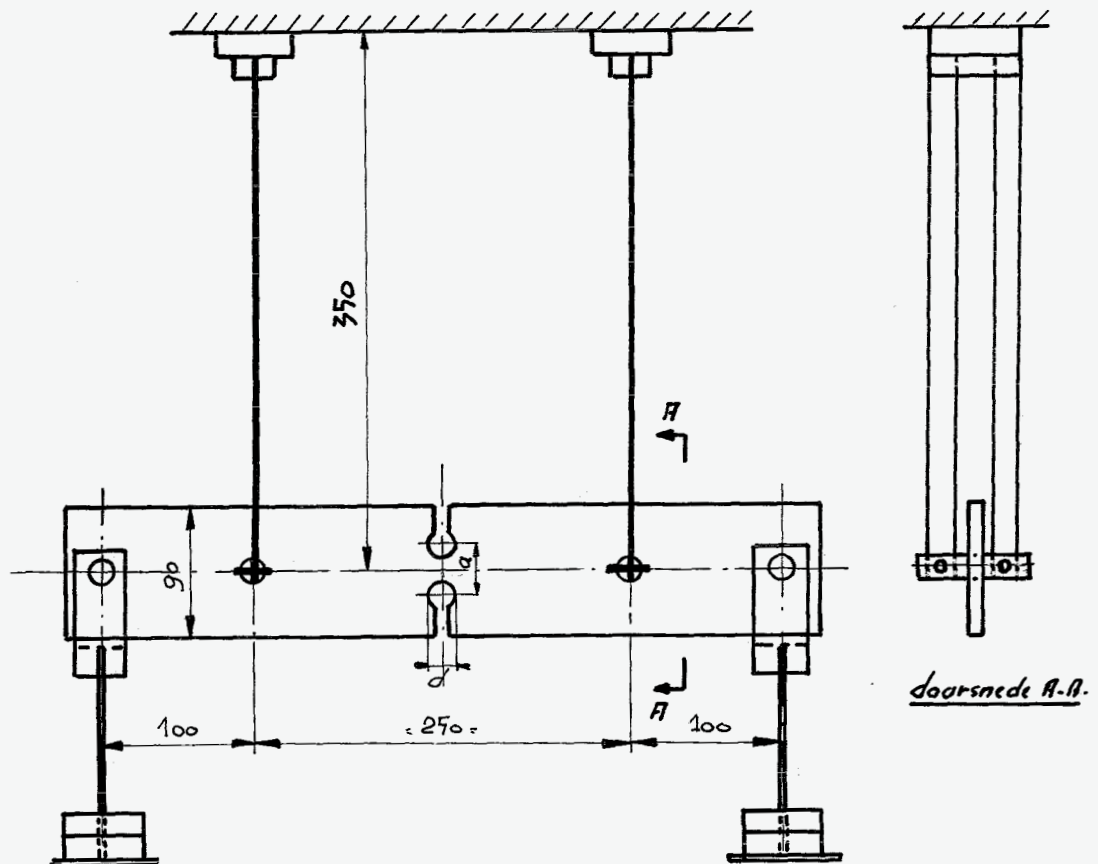


fig 13

Het essentiële van deze opstelling is dat, door de oplegpunten te bevestigen aan twee lange, zijdelings slappe bladveren, géén horizontale reactiekrachten door de oplegpunten op het scharnier kunnen worden uitgeoefend tijdens de vervorming; de oplegpunten kunnen vrij mee naar binnen verplaatsen.

Door op de aan beide zijden hangende plateaus gewichten te plaatsen kunnen we een buigend moment in het scharnier aan brengen tot maximaal 100 kgfcm.

Het eigen gewicht van de beide plateaus bedraagt 0.375 kgf.

De modellen zijn vervaardigd van "Homalite", CR 39. de afmetingen worden in het volgende hoofdstuk gegeven.

### V-3 Bepaling van de afmetingen van de modellen

De afmetingen van de modellen worden door de volgende eisen vastgelegd:

- 1<sup>e</sup> aan de gestelde definitie van een elastisch scharnier (4) moet worden voldaan;
- 2<sup>e</sup> de diameter van de opengezaagde gaten moet zodanig zijn, dat machinale bewerking ervan (frezen) nog mogelijk is
- 3<sup>e</sup> Het model moet "passen" in de gekozen meetopstelling.

Uitgaande van punt 2 komen we tot een gatdiameter:  $d = 16 \text{ mm}$

Uit de opspan inrichting volgt dat we een vrije meetlengte ter beschikking hebben van  $l = 2 \times 100 \text{ mm}$ ;

De maximale hoogte van het scharnier bedraagt:  $h = 90 \text{ mm}$

Met deze gegevens kunnen we de verhouding  $d/a$  gaan bepalen, uitgaande van de gestelde definitie:

$$\theta \leq 0.09 \varphi_{\text{scharnier}}$$

Om de orde van grootte te kennen van de optredende hoekverdraaiing  $\varphi$  is gebruik gemaakt van de formule zoals die gegeven is door Prof. van der Floek.

Voor verschillende verhoudingen van  $d/a$  is de grootte  $\frac{\varphi}{M} a^2 b E$  uitgerekend. We noemen de uitkomst  $\alpha$ ; dan is

$$\varphi = \frac{\alpha M}{a^2 b E} \quad (\text{Ter herinnering: } b = \text{plaatdikte})$$

Vit  $\theta \leq 0.05 \varphi$  scharnier volgt (zie Hoofdstuk II)

$$\frac{Ml}{EI_{\text{strip}}} \leq 5 \cdot 10^{-2} \frac{\alpha}{a^2} \frac{M}{bE}$$

met de gegeven afmetingen krijgen we

$$\frac{1200}{H^3} \frac{M}{bE} \leq 5 \cdot 10^{-2} \frac{\alpha}{a^2} \frac{M}{bE}$$

$$\frac{1200}{H^3} \leq 5 \cdot 10^{-2} \frac{\alpha}{a^2} \rightarrow H^3 \geq \frac{a^2}{\alpha} 2.4 \cdot 10^4.$$

Nemen we voor H de, in verband met de constructie van de proefopstelling, maximale waarde:  $H = 90 \text{ mm}$ , dan volgt uit boven genoemde ongelijkheid de minimale waarde voor  $d/a$  waarbij nog aan de gestelde definitie wordt voldaan.

d = 16 mm		l = 100 mm			
d/a	$\alpha$	a	$a^2/\alpha$	$H^3$	H [mm]
0	0	$\infty$			
0.2	4.35	80	$1.47 \cdot 10^3$	$3.5 \cdot 10^7$	328
0.4	19.8	40	$0.81 \cdot 10^2$	$1.9 \cdot 10^6$	124
0.5	40.5	32	$0.25 \cdot 10^2$	$0.6 \cdot 10^6$	84
0.6	92	26.6	$7.7 \cdot 10^0$	$18.5 \cdot 10^4$	57
0.7	234	21	$1.9 \cdot 10^0$	$4.5 \cdot 10^4$	35
0.8	758	20	$0.53 \cdot 10^0$	$1.3 \cdot 10^4$	24
1.0	$\infty$	16	0	0	0

} Toelaatbaar

TABEL 4

We zien hieruit dat de minimaal toelaatbare waarde voor  $d/a$  0.5 bedraagt



Op grond van deze beschouwingen zijn we tot de volgende waarden van  $d/a$  gekomen voor de vier door te meten modellen

$\frac{d}{a} = 0.8$	$\rightarrow a = 20$	hoogte damwand : $20 - 16 = 4$ mm
$\frac{d}{a} = 0.64$	$\rightarrow a = 25$	" " : $25 - 16 = 9$ "
$\frac{d}{a} = 0.5$	$\rightarrow a = 32$	" " : $32 - 16 = 16$ "
$\frac{d}{a} = 0.4$	$\rightarrow a = 40$	" " : $40 - 16 = 24$ "

TABEL 5

De laatste verhouding is als niet toelaatbaar grensgeval meegenomen om de gestelde definitie te verifiëren.

Als 5<sup>e</sup> model is, voor de verhouding  $d/a = 0.64$  een model gemaakt van het benaderde scharnier, dus met hyperbolisch gevormde randen.

De afmetingen en vorm van de hyperbool, die de rand van het proefstuk beschrijft vinden we met (11)

$$\left(\frac{y}{c \sin \eta_0}\right)^2 - \left(\frac{x}{c \cos \eta_0}\right)^2 = 1$$

Voor  $d/a = 0.64$  met  $d = 16$  mm wordt  $e = 4.5$  mm (zie fig 7)  
en  $p = 8$  mm

uit (42) volgt

$$\sin^2 \eta_0 = \frac{e}{e+p} = 0.36$$

$$\cos^2 \eta_0 = \frac{p}{e+p} = 0.64$$

De waarde van  $c$  bedraagt, voor dit geval : 7.5 mm (zie berekening op blz 24)

Hiermede wordt de vergelijking van de hyperbool

$$x^2 = 1.78 y^2 - 36.03.$$

Uitgaande van deze vergelijking is een maal geconstrueerd, met behulp waarvan het model gefabriceerd is.

## V-4. Uitvoering van het experiment

### V-4.1 De spanningsmetingen

Zoals reeds vermeld zijn de metingen verricht met behulp van de optische bank

Voor wat de spanningsmetingen betreft is alleen van de bank gebruik gemaakt om een foto te verkrijgen van het isochromaten-beeld in het belaste Homalite-model. Hiertoe zijn met circulair gepolariseerd, monochromatisch licht donker-veld-opnamen gemaakt.

Belichting:  $\frac{1}{5}$  sec; diafragma objectief: 16; diafragma voor lichtbron: pen naar beneden gericht.

Het fotografisch materiaal was: O 23, (Agfa-Gevaert) 18x24 cm.

De foto's zijn direct, na de vervaardiging van het model en na het aanbrengen van de belasting, gemaakt. Hiermee is zoveel mogelijk het randeffect en het kruipeffect geëlimineerd.

De eigenlijke meting bestaat uit het tellen en plaatsbepalen (t.o.v. het hart van het scharnier) van de hele orden in de symmetrie-doorsnede.

Dit gebeurt met de Askania-meetloupe; op deze manier kunnen we de fringes op  $\pm 0,1$  mm nauwkeurig vastleggen

Het meten van onderdelen van orden heeft nauwelijks zin, daar de fringes in de symmetrie-doorsnede op gemiddeld 1 mm van elkaar liggen.

De verkregen meetwaarden zijn direct in grafiek gebracht.

De kromme, getrokken door deze meetpunten stelt voor het verloop van  $|\sigma_1 - \sigma_2|$  (de absolute waarde van het verschil van de hoofdspansingen) over de symmetrie-doorsnede. Voor de symmetrie doorsnede geldt  $\sigma_1 = \sigma_x$  en  $\sigma_2 = \sigma_y$ , daar  $\tau_{xy} = 0$ .

De bepaling van  $\sigma_x$  en  $\sigma_y$  afzonderlijk gebeurt grafisch, met behulp van de constructie van FROCHT<sup>1)2)</sup> Voor deze methode is het nodig de ligging van het z.g.n. Cubic-point<sup>1)2)</sup> op de symmetrie-doorsnede te kennen. Vanaf het isokline-scherf meten we dit punt op uit het isokline beeld van het belaste scharnier.

De constructie van FROCHT, alsmede de definitie van het Cubic-point zijn in onder aan deze bladzijde vermelde literatuur-opgaven uitvoerig beschreven.

Ter orientatie zal hier in het kort het basisprincipe van de constructie worden vermeld.

1) FROCHT; Photo-elasticity Vol I, Hoofdstuk 7

2) BREKELMANS; I<sub>1</sub>-rapport WE 67-24 Hoofdstuk 3.22. blz 38 e.v.

De constructie van Frocht komt op het volgende neer.

Stel we kennen van een kromme  $y = f(x)$  voor een zekere beginwaarde voor  $x$ , zeg  $x=0$ , de bijbehorende  $y$ -waarde en de helling van die kromme in dat punt:  $y' = f'(0)$   
 Weten we bovendien voor een andere  $x$ -waarde de helling van die kromme, dan kunnen we voor die tweede  $x$ -waarde de bijbehorende  $y$ -waarde als volgt benaderen:

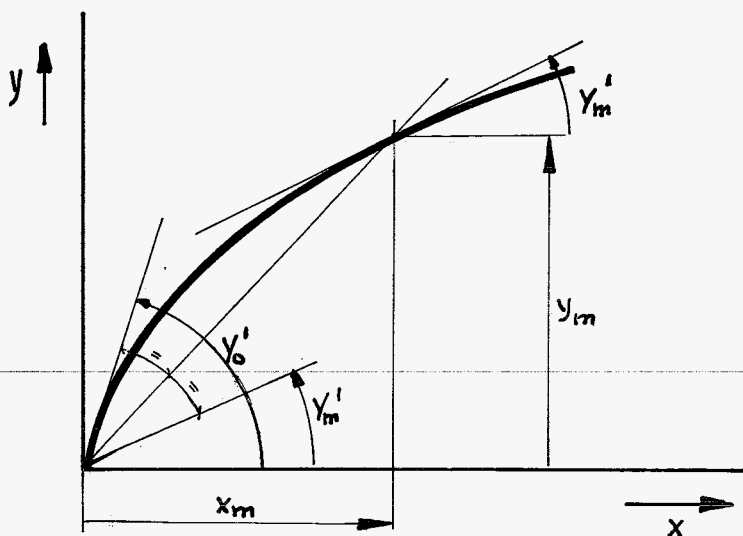


fig 14.

Gegeven van de kromme  $y = f(x)$  in  $(x, y) = (0, 0) \rightarrow y = 0$   
 $y' = y'_0$   
 in  $(x, y) = (x_m, y_m) \rightarrow y' = y'_m$

dan geldt  $y_m \approx \frac{y'_m + y'_0}{2} \cdot x_m$

Bewijs: Ontwikkel  $y = f(x)$  in een Taylor-reeks rond  $x=0$

$$\begin{aligned} y_m &= y_0 + y'_0 x_m + \frac{y''_0 x_m^2}{2!} + \dots \\ &= y_0 + y'_0 x_m + \frac{y'_m - y'_0}{x_m} \cdot \frac{x_m^2}{2} + \dots \\ &= y_0 + y'_0 x_m + \frac{y'_m - y'_0}{2} x_m + \dots \\ &\approx y_0 + \frac{y'_m + y'_0}{2} x_m. \end{aligned}$$

Toegepast, voor de bepaling van het  $\sigma_1$ - en  $\sigma_2$ -verloop in de symmetrie-doorsnede uitgaande van het gemeten  $|\sigma_1 - \sigma_2|$ -verloop, krijgen we het volgende:

Van het  $\sigma_1$ - en  $\sigma_2$ -verloop kennen we de waarde in het randpunt:  $|\sigma_1| = |\sigma_1 - \sigma_2|$   
 $\sigma_2 = 0.$

Uit de zogenaamde Saint-Maxwell vergelijkingen (dit zijn de evenwichtsvergelijkingen langs spanningslijnen) kunnen de hellingen van de raaklijnen aan de respectievelijke  $\sigma_1$ - en  $\sigma_2$ -krommen in het randpunt bepaald worden.

Bovendien kennen we voor het Cupic-point (dit is het punt op de symmetrie-doorsnede waar een isokline de spanningslijnen loodrecht snijdt) de helling van de raaklijnen aan de respectievelijke krommen.

Van de beide krommen weten we nu in het randpunt de grootte van de spanning en de helling van de raaklijn; in een tweede punt op de symmetrie-doorsnede weten we de respectievelijke hellingen.

Met de constructie van Frocht construeren we voor het Cupic-point de grootte van respectievelijk  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$ .

Dezelfde constructie wordt toegepast vanuit het tegenoverliggende randpunt.

Met deze gegevens kunnen we het  $\sigma_1$ - en  $\sigma_2$ -verloop over de symmetrie-doorsnede tekenen.

De uit de metingen verkregen spanningsverdeling op de symmetrie-doorsnede voor het "gegeven" scharnier zal worden vergeleken met de exacte spanningsverdeling op de symmetrie-doorsnede voor het "benaderde" scharnier.

### V.4.2 De Hoekverdraaiingsmetingen.

Deze metingen zijn geheel met de optische bank uitgevoerd, zonder gebruikmaking van meetklokjes of andere extra benodigde meetinstrumenten.

Principe van de meting.

Op het Homalite-model worden drie zwarte, zuiver ronde meetstippen van ca 0,5 mm doorsnede aangebracht op plaatsen zoals in fig 15 is aangegeven.

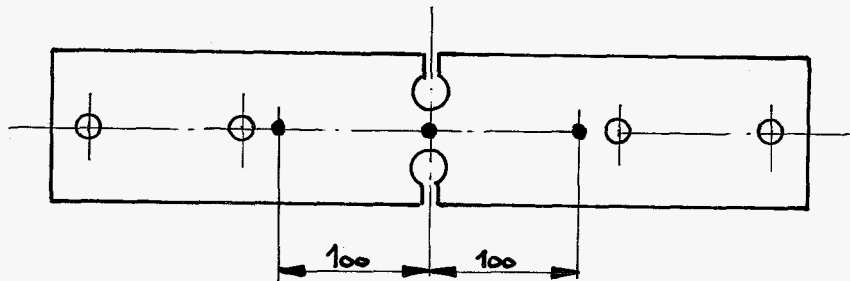
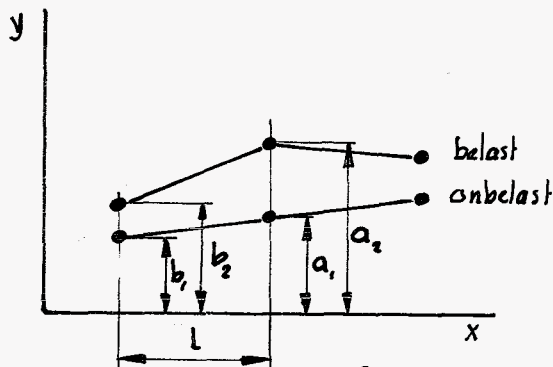


fig 15

In onbelaste toestand meten we met behulp van de fotocel, nauwkeurig op  $\pm 0,01$  mm, de plaats van deze stippen. De verkregen waarden, per punt een horizontale- en verticale coördinaat waarde, noemen we onze referentie-waarden

In belaste toestand meten we opnieuw de plaats van de stippen. Uit het verschil in plaats van de meetstippen t.o.v. de respectievelijke referentie-waarden kunnen we nu heel eenvoudig de hoek  $\varphi$  berekenen.

Ter verduidelijking een voorbeeld:



$$\frac{1}{2} \varphi = \frac{(a_2 - a_1) - (b_2 - b_1)}{l}$$

fig. 16

Het positioneren van de meetstippen met de fotocel gaat als volgt.

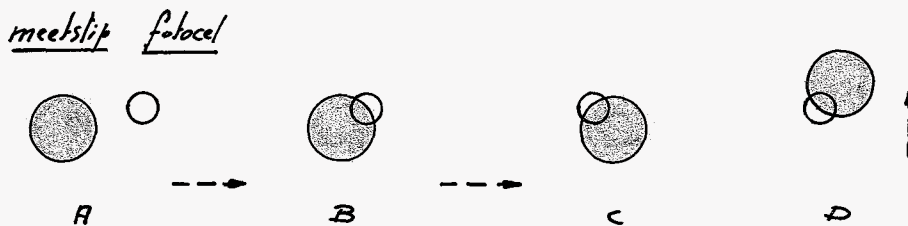


fig 17

Het model wordt zodanig verplaatst in het verticale vlak, dat de meetstip in de directe omgeving van het hart van de optische as komt te liggen. De afbeelding van de meetstip ligt dan in de directe omgeving van de fotocel (zie fig 17-A). We controleren dit via het beeld op het isokline-scherm; met een meetkruis op het scherm is de plaats van de fotocel gemarkeerd.

Na deze grof instelling op het isokline scherm wordt de projectie spiegel verdraaid; het licht valt nu via het model rechtstreeks op de fotocel, de wijzer van de „Photovoltmeter“ van de optische bank staat vol uit.

We verplaatsen het model alléén in horizontale richting tot de afbeelding van de meetstip de fotocel gedeeltelijk bedekt (fig 17-B). De wijzer van de Photovoltmeter staat nu in de buurt van de minimum-stand. De coördinaat-waarde lezen we af op de horizontale afleeslineaal.

Het model wordt nu in dezelfde richting horizontaal verplaatst, tot de wijzer weer in de zelfde stand komt te staan (fig 17-C). Het gemiddelde van de hierbij behorende coördinaat-waarde en de coördinaat-waarde behorende bij stand B geeft de horizontale coördinaat-waarde van het hart van de meetstip.

Vanuit stand C bewegen we het model nu alléén verticaal tot we weer dezelfde wijzerstand waarnemen (fig 17-D).

Op dezelfde manier bepalen we de verticale coördinaat-waarde van het hart van de meetstip.

De positie van de meetstip is hiermede vastgelegd.

Het is duidelijk, daar de meetstippen met het vervormen van het schermier in het verticale vlak rotieren, de stippen, met deze manier van meten, cirkel symmetrisch moeten zijn.

Met behulp van „Instant flettering“ worden de meetstippen op de Homalite modellen aangebracht.

Het grote voordeel van deze meetmethode is dat dezelfde opstelling als benodigd voor de spanningmetingen gebruikt kan worden, zonder gebruikmaking van extra benodigde meetinstrumenten.

De berekende  $\varphi$ -waarden kunnen behelpt zijn een fout van maximaal 5% ten gevolge van de medervervorming van de uiteinden van het scharnier.

Immers, in het principe van de meting ligt ten grondslag dat de uiteinden geheel onvervormd blijven, terwijl we, volgens de definitie (4) een uiteinde-vervorming van 5% van de hoekverdraaiing toestaan.

Het blijft uiteraard mogelijk de berekende  $\varphi$ -waarde hierop te corrigeren; wij hebben dit niet gedaan.

## V.5 Meetresultaten

### V.5.1 Resultaten spanningmetingen

Foto 1 (zie blz 64)	scharnier met $d/a = 0.4$	$M_b = 83 \text{ kgfcm}$
Foto 2 ( " 65)	" " $d/a = 0.5$	$M_b = 63.75 \text{ kgfcm}$
Foto 3 ( " 66)	" " $d/a = 0.64$	$M_b = 23.75 \text{ "}$
Foto 4 ( " 67)	" " $d/a = 0.8$	$M_b = 5.00 \text{ "}$
Foto 5 ( " 68)	scharnier met hyperbool	$p/a = 0.64$ $M_b = 23.75 \text{ kgfcm.}$

Uit deze foto's is het verloop van  $|\sigma_1 - \sigma_2|$  over de symmetrie-doorsnede opgemeten en in de grafieken XI t/m XV in beeld gebracht.

In deze grafieken is met behulp van de constructie van Frocht het  $\sigma_1$ - en  $\sigma_2$ -verloop over de symmetrie-doorsnede getekend.

In de grafieken XVI t/m XX zijn deze geconstrueerde spanningen nogmaals getekend, om te kunnen worden vergeleken met de als maatstaf dienende lineaire spanningverdeling.

Met  $K = \frac{\sigma_{x \max}}{p}$  (zie III.6) vinden we de kerffactor.

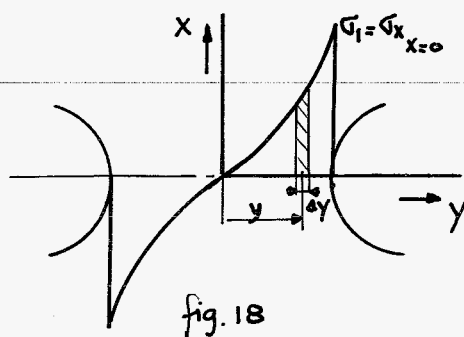
$$p = \frac{M}{I_0} \cdot e \quad [\text{kgfmm}^{-2}]$$

We vinden  $p$  uitgedrukt in  $[\text{kgfmm}^{-2}]$  terwijl we de geconstrueerde  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  kennen in [orden].

We zullen, om de beide spanningen met elkaar te kunnen vergelijken de omrekeningsfactor, orde  $\rightarrow$  spanning, bereken

Uit het geconstrueerde  $\sigma_1$ -verloop over de symmetrie-doorsnede bepalen we het resulterend moment.

$$M_{\text{result}} = \sum_{y=-a}^{y=a} (\sigma_1) * y \cdot b \cdot \Delta y$$



$\Delta y = 0.2 \text{ mm}$  genomen

$b = \text{plaatdikte ter plaatse} = 6.0 \text{ mm}$

We vinden  $M_{\text{result}}$  in  $[\text{orde} * \text{mm}^3]$

Voor  $d/a = 0.64$  wordt  $M_{\text{result}} = 719.50 * 6.0 * 0.2 = 863.4 \text{ orde mm}^3$

$M_{\text{belasting}}$  voor  $d/a = 0.64$ :  $M_{\text{belast}} = 237.5 \text{ kgfmm}$

Uit  $M_{\text{result}} = M_{\text{belast}}$  volgt

$$863.4 \text{ orde mm}^3 = 237.5 \text{ kgfmm}$$

dus  $1 \text{ orde} = \frac{237.5}{863.4} = 0.275 \text{ kgfmm}^{-2}$

Dezelfde berekening uitgeroerd voor  $d/a = 0.8$  levert

$M_{\text{result}} = 304.84 * 0.1 * 6.0 = 182.9 \text{ orde mm}^3$  ( $\Delta y = 0.1 \text{ mm}$ )  
 $M_{\text{belast}} = 50.0 \text{ kgfmm}$



Hieruit volgt 1 orde = 0,273 kgfmm<sup>-2</sup>

De omrekeningsfactor bepalen we uit het gemiddelde van de twee geronden waarden:

$$1 \text{ orde} = 0,274 \text{ kgfmm}^{-2}$$

Berekening p:

$$d/a = 0.4 \quad p = \frac{830,0 \times 12}{\sqrt{12 \times 6 \times (24)^3}} \times \frac{1}{0,274} = \underline{\underline{5,29 \text{ orde}}}$$

$$d/a = 0.5 \quad p = \frac{637,5 \times 8}{\sqrt{12 \times 6 \times (16)^3}} \times \frac{1}{0,274} = \underline{\underline{9,10 \text{ orde}}}$$

$$d/a = 2p/a = 0.64 \quad p = \frac{237,5 \times 4,5}{\sqrt{12 \times 6 \times (9)^3}} \times \frac{1}{0,274} = \underline{\underline{10,70 \text{ orde}}}$$

$$d/a = 0.8 \quad p = \frac{50,0 \times 2}{\sqrt{12 \times 6 \times 4^3}} \times \frac{1}{0,274} = \underline{\underline{11,41 \text{ orde}}}$$

Met deze waarden voor p zijn in de respectievelijke grafieken XVI t/m XX de lineaire spanningsverdelingen geïkend.

Bij de berekening van de kerffactoren is voor  $\sqrt{x_{\max}}$  de gemiddelde waarde genomen van de in de grafieken XII t/m XVI geconstrueerde waarden.

Berekening van de kerffactoren

$$d/a = 0.4 \quad \sqrt{x_{\max}}_{\text{gem}} = \frac{8+8}{2} = 8 \text{ orde} \quad K = \frac{8}{5,29} = 1,51$$

$$d/a = 0.5 \quad \sqrt{x_{\max}}_{\text{gem}} = \frac{12,8+12,6}{2} = 12,7 \quad K = \frac{12,7}{9,1} = 1,39$$

$$d/a = 0.64 \quad \sqrt{x_{\max}}_{\text{gem}} = \frac{13,0+12,8}{2} = 12,9 \quad K = \frac{12,9}{10,70} = 1,21$$

$$d/a = 0.8 \quad \sqrt{x_{\max}}_{\text{gem}} = \frac{13,0+13,0}{2} = 13,0 \quad K = \frac{13,0}{11,41} = 1,14$$

$$2p/a = 0.64 \quad \sqrt{x_{\max}}_{\text{gem}} = \frac{13,0+13,0}{2} = 13,0 \quad K = \frac{13,0}{10,70} = 1,21$$

Met (43) bepalen we de theoretisch te verwachten kerffactoren voor de overeenkomstige "benaderde" scharnieren.

$$K = \frac{4 \cdot \epsilon/\rho \sqrt{\epsilon/\rho}}{3 [\sqrt{\epsilon/\rho} + (\epsilon/\rho - 1) \arctan \sqrt{\epsilon/\rho}]}$$
 (43)

$d/a$	$\epsilon/\rho$	$\epsilon/\rho - 1$	$\sqrt{\epsilon/\rho}$	$\arctan \sqrt{\epsilon/\rho}$	$K$	$K_{\text{gemeten}}$
0.4	1.5	0.5	1.22	0.885	1.47	1.51
0.5	1.0	0	1	0.785	1.33	1.39
0.64	0.56	-0.44	0.75	0.642	1.20	1.21
0.8	0.25	-0.75	0.5	0.463	1.09	1.14
$2\rho/a = 0.64$	0.56	-0.44	0.75	0.642	1.20	1.21

TABEL 6

In tabel 6, laatste kolom, zijn de uit de metingen berekende K-waarden vermeld. De gemeten K-waarden liggen alle hoger dan de theoretische K-waarden.

Berekenen we de maximaal optredende waarde van  $\sigma_x(x=0)$  met in rekening gebracht de "K-gemeten", dan vinden we een waarde voor  $\sigma_{x \max}$  die gemiddeld 4% boven de theoretisch te verwachten waarde van  $\sigma_{x \max}$  ligt. In onderstaande tabel zijn de spanningen expliciet uitgerekend.

$d/a$	$p = \frac{M}{I_0} \cdot e$ $\text{kgf.mm}^{-2}$	$\sigma_{x \max}$ theorie $\text{kgf.mm}^{-2}$	$\sigma_{x \max}$ gemeten $\text{kgf.mm}^{-2}$
0.4	1.45	2.13	2.19
0.5	2.49	3.32	3.47
0.64	2.93	3.52	3.58
0.8	3.13	3.41	3.56
$2\rho/a = 0.64$	2.93	3.52	3.58

TABEL 7

We zullen trachten, via een kwalitatieve beschouwing, een verklaring te geven voor het feit dat de gemeten en berekende  $\sigma_{x \max}$ -waarden groter zijn dan de theoretisch te verwachten  $\sigma_{x \max}$ -waarden.

Uit de literatuur<sup>1)</sup> is het volgende verband tussen de spanning en aantal fringes voor CR-39 (ons gebruikte Homalite) bekend (zie fig 19).

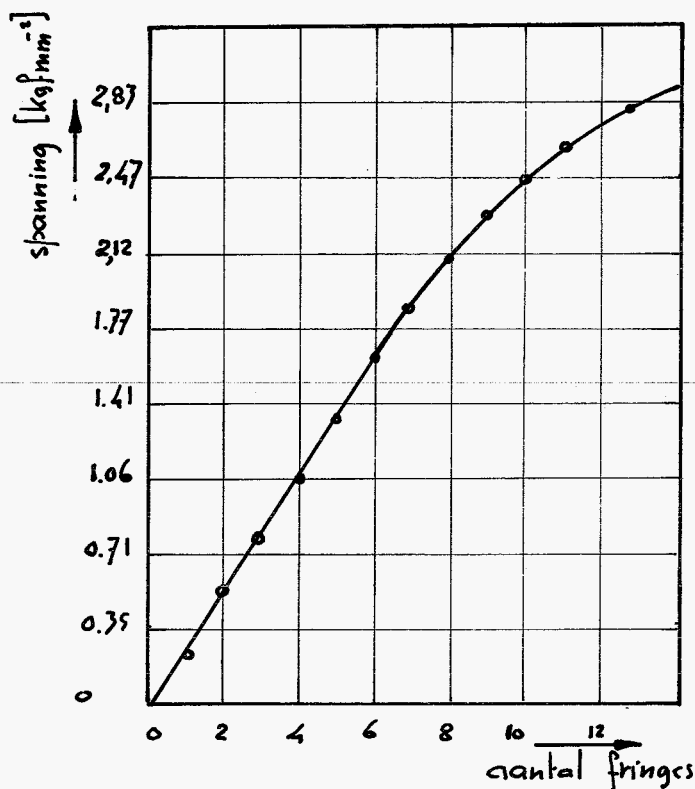


fig 19.

We constateren dat bij een spanning van ca  $2 \text{ kgf/mm}^2$  het lineaire verband tussen de spanning en het aantal optredende fringes ophoudt. Boven deze spanning wordt het materiaal "gevoeliger".

Bij de uitgevoerde experimenten ligt de  $\sigma_{x \max}$  omstreeks  $3.3 \text{ kgf/mm}^2$

1). Proc. Soc. Experimental Stress Analysis Vol 6, number 1, 1948  
"Properties of Columbia Resin CR-39" D.J. Coolidge, page 74/82.

Op de weerszijde, langs de randen van de gaten, zal een gedeelte van het materiaal zich in dit niet-lineaire gebied bevonden hebben.

Gemiddeld genomen zal het materiaal gevoelig(er) geworden zijn; de omrekeningsfactor zal in dit geval worden

$$1 \text{ orde} < 0,274 \text{ kgfmm}^{-2}$$

Dit houdt in dat de berekende  $p$ -waarden, in orden, groter worden en dien ten gevolge de berekende  $K$ -factoren kleiner worden.

De berekende waarden van  $\sigma_{x \max}$  zullen ook kleiner worden.

In de grafieken XVIII en XIX, de spanningsverdeling op de symmetrie-doorsnede voor respectievelijk  $d/a = 0,64$  en  $2p/a = 0,64$  is tevens de exacte spanningsverdeling aangegeven.

Door vergelijking hiermede krijgen we een indruk van de nauwkeurigheid van de constructie van Focht.

Voor  $d/a = 0,64$ : het geconstrueerde  $\sigma_x$ -verloop is gelijk aan de exacte spanningsverdeling voor  $\sigma_x$ .  
de  $\sigma_{y \max}$  waarde ligt ca 15% hoger dan de exacte waarde.

Voor  $2p/a = 0,64$ :  $\sigma_x$ -geconstrueerd heeft maximale afwijking van +5% t.o.v.  $\sigma_x$ -exact.  
Het  $\sigma_y$ -verloop vertoont geen afwijking.

Voor deze twee gevallen mogen we concluderen dat de constructie voor wat betreft het  $\sigma_x$ -verloop een fout van maximaal 5% kan geven.

De geconstrueerde  $\sigma_{y \max}$ -waarde kan 15% fout liggen.

Bij deze beschouwing is ervan uitgegaan dat de gemeten  $I_{G_1-G_2}$ -kromme exact is.

Tevens moet opgemerkt worden, dat bij de constructie zelf al gemiddeld is om een nauwkeuriger resultaat te verkrijgen; per doorsnede wordt de constructie immers tweemaal uitgevoerd; het gemiddelde resultaat is in de grafieken XVI t/m XX weer gegeven.

De maximaal optredende spanning  $\sigma_{x_{\max}} \underset{x=0}{}$  stelt een beperking aan de hoekverdraaiing van het scharnier.

$$\sigma_{x_{\max}} \underset{x=0}{=} \sigma_m = K \frac{M}{W}, \text{ waarin } K \text{ de kerffactor}$$

voor stelt en  $W$  het weerstandsmoment tegen buiging van de doorsnede  $x=0$ .

$$W = \frac{I}{e} = \frac{b(a-d)^3}{12 \cdot \frac{1}{2}(a-d)} = \frac{b(a-d)^2}{6}$$

Een dimensieloze uitdrukking voor de maximale spanning wordt

$$\frac{\sigma_m}{M} a^2 b = \frac{6K}{(1-d/a)^2} \quad (47)$$

met (43) 
$$\frac{\sigma_m}{M} a^2 b = \frac{8}{(1-d/a)^2} \cdot \frac{e/\rho \sqrt{e/\rho}}{[\sqrt{e/\rho} + (e/\rho - 1) \arctan \sqrt{e/\rho}]}$$

$$\frac{\sigma_m a^2 b}{M} = \frac{8 \sqrt{1-d/a}}{[1-d/a][d/a \sqrt{1-d/a} + (1-2d/a) \sqrt{d/a} \cdot \arctan \sqrt{1-d/a}]} \quad (48)$$

Combineren we de dimensieloze uitdrukking voor de hoekverdraaiing (1) met (47) dan vinden we :

$$\frac{\varphi E}{\sigma_m} = \frac{1}{K} \frac{d/a}{(1+d/a)^2} \left[ \frac{d^2/a^2}{\sqrt{1-d^2/a^2}} + 6 \frac{d/a}{\sqrt{1-d^2/a^2}} \arctan \sqrt{\frac{1+d/a}{1-d/a}} + 2 \right] \quad (49)$$

In grafiek **XXI** zijn deze uitdrukkingen (48) en (49) in beeld gebracht.

Tot slot worden in onderstaande tabel de gemeten en berekende kerffactoren vergeleken met de theoretische kerffactor (vlg. Neuber) en de kerffactor voor deze gerallen volgens Peterson.<sup>1)</sup>  
(De kerffactoren uit Peterson zijn gebaseerd op Neuber's theorie)

<sup>1)</sup> Peterson : Stress Concentration Design Factors  
pag. 141 . fig 122

$d/a$	$K_{Neuber}$	$K_{Peterson}$	$K_{v.d.Hoek}$	$K_{gemeten}$
0.4	1.47	1.46	1	1.51
0.5	1.33	1.35	1	1.39
0.64	1.20	1.21	1	1.21
0.8	1.09	1.10	1	1.14

TABEL 8.

Naarmate het scharnier een "echter" scharnier wordt, dat wil zeggen  $d/a \rightarrow 1$ , wordt de fout in de berekening van de maximaal optredende spanning vlg. Prof. v.d.Hoek. kleiner.

## V.5.2 Resultaten hoekverdraaiings-metingen

In verband met de sterk optredende kruip van het gebruikte materiaal zijn de metingen zo snel mogelijk ná het aanbrengen van de belasting uitgeoerd.

Voor het dimensieloos maken van de hoekverdraaiingswaarde moet de grootte van de elasticiteits-modulus van het Homalite CR-39 bekend zijn.

Volgens de fabrieksopgave<sup>1)</sup> bedraagt de E-waarde voor buiging, bij 25°C

$E = 2.5 - 3.3 \times 10^5 \text{ psi}$ , hetgeen overeenkomt met  $E = 175 - 233 \text{ kgfmm}^{-2}$

Wij zullen de gemiddelde waarde nemen en het spreidingsgebied om deze waarde in de grafiek aangeven.

Dus:  $E = 204 \text{ kgfmm}^{-2}$

OPMERKING:

De grote spreiding in de opgegeven E-waarde is waarschijnlijk te wijten aan de sterke tijd-afhankelijkheid van de elasticiteits-modulus van dit materiaal.

### Meetresultaten

Volgens de in V.4.B beschreven methode zijn de x-y-coördinaten van de drie meetstippen, aan te duiden met L (links), M (midden) en R (rechts), bij verschillende belastingen gemeten

$$d/a = 0.4$$

$M = 0 \text{ kgfcm}$ , coördinaatwaarden in mm; x = vert. coörd.;  
y = hor. coörd.

	$y_1$	$y_2$	$y_{\text{gem}}$	$x_1$	$x_2$	$x_{\text{gem}}$
L	67.74	68.08	67.91	80.94	81.27	81.105
M	167.97	167.60	167.785	80.64	80.00	80.32
R	268.11	267.82	267.965	80.18	80.46	80.32

<sup>1)</sup> N.V. Fijnwerk, bulletin 51: Homalite CR-39, pag. 4.

Vervolg  $d/a = 0.4$

$M = 19.00 \text{ kgfcm}$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	67.87	68.07	67.97	80.95	81.23	81.09
M	167.72	168.03	167.875	80.86	81.12	80.99
R	268.15	267.91	268.03	80.25	80.45	80.35

$M = 43.00 \text{ kgfcm}$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	67.91	68.18	68.045	80.97	81.17	81.12
M	167.84	168.08	167.96	81.11	81.35	81.23
R	267.97	268.20	268.085	80.25	80.52	80.385

TABEL 9.

$d/a = 0.5$

$M = 0 \text{ kgfcm}$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	65.63	66.02	65.825	79.47	79.90	79.685
M	165.86	165.49	165.675	79.11	79.52	79.315
R	265.84	265.72	265.58	78.57	79.11	78.84

$M = 23.75 \text{ kgfcm}$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	66.74	67.12	66.93	79.57	79.97	79.77
M	166.58	166.95	166.765	79.69	80.02	79.855
R	266.34	267.01	266.675	79.08	78.64	78.86



Vervolg  $d/a = 0.5$

$M = 43.75 \text{ kgf}\cdot\text{cm}$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	66.80	67.22	67.01	79.74	79.99	79.865
M	166.64	167.09	166.865	80.55	80.23	80.39
R	266.47	267.01	266.74	78.69	79.24	78.965

Tabel 10

$d/a = 0.64$

$M = 0 \text{ kgf}\cdot\text{cm}$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	63.42	63.86	63.64	80.35	80.74	80.545
M	163.54	163.19	163.365	80.19	79.90	80.045
R	262.98	263.70	263.34	79.10	79.78	79.44

$M = 13.75 \text{ kgf}\cdot\text{cm}$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	63.63	64.07	63.87	80.56	81.00	80.78
M	163.35	163.77	163.54	81.27	81.57	81.42
R	263.27	263.88	263.555	79.37	80.01	79.69

$M = 23.75 \text{ kgf}\cdot\text{cm}$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	63.78	64.20	63.99	80.80	81.16	80.98
M	163.50	163.89	163.695	82.24	82.63	82.435
R	263.40	264.03	263.715	80.07	79.72	79.895

Vervolg  $d/a = 0.64$

$M = 0 \text{ kgfcm}$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	63.44	63.83	63.635	80.40	80.72	80.56
M	163.21	163.55	163.38	80.02	80.28	80.15
R	263.11	263.69	263.40	79.68	79.19	79.435

TABEL II

$d/a = 0.8$

$M = 0 \text{ kgfcm}$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	62.70	63.19	62.945	79.57	80.22	79.895
M	163.03	162.75	162.89	79.65	79.35	79.50
R	262.48	262.84	262.66	79.15	79.35	79.25

$M = 3.75 \text{ kgfcm}$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	63.17	63.72	63.445	80.16	80.66	80.41
M	163.22	163.48	163.35	81.99	82.27	82.13
R	263.09	263.43	263.26	79.71	80.00	79.855

$M = 5.00 \text{ kgfcm}$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	63.36	63.80	63.58	80.44	80.85	80.645
M	163.38	163.63	163.505	83.15	83.41	83.28
R	263.16	263.54	263.35	80.00	80.20	80.10

Vervolg  $d/a = 0.8$

$M = 0 \text{ kg/cm}$

	$y_1$	$y_2$	$y_{gem}$	$x_1$	$x_2$	$x_{gem}$
L	62.45	62.92	62.685	79.74	80.19	79.965
M	162.50	162.74	162.62	79.62	79.84	79.73
R	262.35	262.67	262.51	79.22	79.50	79.76

TABEL 12

$2p/a = 0.64$  ( benaderd schavnier )

$M = 0 \text{ kg/cm}$

	$y_1$	$y_2$	$y_{gem}$	$x_1$	$x_2$	$x_{gem}$
L	67.79	68.21	68.00	80.33	80.71	80.52
M	167.77	168.15	167.96	80.37	79.88	80.105
R	267.82	268.16	267.99	79.74	80.06	79.90

$M = 13.75 \text{ kg/cm}$

	$y_1$	$y_2$	$y_{gem}$	$x_1$	$x_2$	$x_{gem}$
L	68.09	68.30	68.195	80.60	81.02	80.81
M	167.99	168.38	168.185	81.45	81.95	81.70
R	268.39	268.04	268.215	80.02	80.41	80.215

$M = 23.75 \text{ kg/cm}$

	$y_1$	$y_2$	$y_{gem}$	$x_1$	$x_2$	$x_{gem}$
L	68.23	68.51	68.37	80.90	81.25	80.075
M	168.17	168.49	168.33	83.26	82.82	83.04
R	268.18	268.51	268.345	80.68	80.29	80.485

Vervolg  $2p/a = 0.64$  (benaderd scharnier)

$M = 0$  kgfcm.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{gem}$	$X_1$	$X_2$	$X_{gem}$
L	67.84	68.17	68.005	80.75	80.72	80.575
M	167.87	168.10	167.965	80.00	80.79	80.195
R	267.88	268.21	268.045	79.77	80.07	79.92

TABEL 13

We berekenen uit deze waarnemingen de dimensieloos gemaakte hoekverdraaiing  $\frac{\varphi}{M} a^2 b E$ .  
(zie fig 17)

	$M$ kgfmm	$\tan \varphi$	$\varphi$ [rad]	$\frac{\varphi}{M} a^2 b E$
$d/a = 0.8$	37.5	0.0444	0.0444	497 - 662
	50.0	0.0568	0.0568	477 - 635
$d/a = 0.64$	137.5	0.02265	0.02265	108 - 144
	237.5	0.0389	0.0389	107 - 143
$d/a = 0.5$	237.5	0.00975	0.00975	44 - 59
	437.5	0.01845	0.01845	45 - 60
$d/a = 0.4$	190.0	0.01325	0.01325	117 - 156
	430.0	0.01745	0.01745	68 - 90
$2p/a = 0.64$	137.5	0.0226	0.0226	108 - 143
	237.5	0.0389	0.0389	107 - 143

TABEL 14

De gevonden meetresultaten zijn in grafiek XXI weergegeven. Tevens zijn in deze grafiek de meetresultaten van Prof. van der Floek vermeld.

Van de in tabel 14 gevonden resultaten voor  $\frac{Q}{M} a^2 b E$  is telkens per " $d/a$ -verhouding" het gemiddelde genomen.

We kunnen uit de gevonden meetresultaten, geconfronteerd met de theorie, het volgende concluderen:

- Alle gevonden  $\frac{Q}{M} a^2 b E$  waarden liggen boven de theoretische kromme.
- Procentueel neemt de afwijking toe naarmate  $d/a$  kleiner wordt.
- Voor  $d/a = 0.4$  constateren we een zeer grote afwijking

Als oorzaken noemen we:

- 1<sup>e</sup> Naarmate de verhouding  $d/a$  kleiner wordt, raken we meer en meer van de gestelde definitie (4) af.  
De doorbuiging van de uiteinden gaat dan een grotere rol spelen.  
Het scharnier met  $d/a = 0.4$  voldeed geheel niet aan de definitie.
- 2<sup>e</sup> De theorie is gebaseerd op het geconstateerde feit dat de spanningsverdeling op de doorsnede  $x=0$ ;  $x=4$  en  $x=8$  mm van het scharnier met  $d/a = 0.64$  de lineaire spanningsverdeling dicht benadert.  
Naarmate  $d/a$  kleiner wordt (zie de kerffactoren) gaat de spanningsverdeling meer van de lineaire spanningsverdeling afwijken.
- 3<sup>e</sup> Waarschijnlijk de grootste fout wordt gemaakt, bij de opstelling van de theorie, door de aanname te doen dat alle energie zich bevindt tussen de grenzen  $-1/2d \leq x \leq +1/2d$ .  
Een aanschouwing van de foto's 1  $\frac{1}{m} \leq$  leert ons dat naarmate  $d/a$  kleiner wordt dit zeker niet meer het geval is.

## VI Conclusies

Samenvattend kunnen we het volgende concluderen.

De benadering van het gegeven scharnier door een scharnier met hyperbolisch gevormde inkepingen (topradius van de hyperbool is gelijk genomen aan de straal van de cirkelvormige inkeping van het originele scharnier) geeft voor de symmetrie-doorsnede de exacte spanningsverdeling in het gegeven scharnier.

Bij de bepaling van  $\bar{\sigma}_{\max}$ , welke een beperking oplegt aan de toelaatbare hoekverdraaiing, constateren we een spanningsverhoging van 10 tot 50%, voor respectievelijke grote en kleine waarden van  $d/a$ , ten opzichte van de  $\bar{\sigma}_{\max \text{ lineair}}$ . Het invoeren van de kerffactor, zoals die in dit rapport is gedefinieerd, moet dan ook zeker niet nagelaten worden.

Voor de bepaling van de hoekverdraaiing van het gegeven scharnier is bovengenoemde benadering minder zinvol. Als eerste benadering kan de hoekverdraaiing, optredend ten gevolge van een buigend moment in het vlak van het scharnier, berekend worden door uit te gaan van een lineaire spanningsverdeling in het gegeven scharnier. Dit is de theorie van Prof. van der Hooek.

## VII Suggesties.

Een van de belangrijkste punten is tot hoever de spanningsconcentratie ten gevolge van de plaatselijke verkleining van de materiaaldoorsnede doorwerkt.

Zoals reeds opgemerkt is, zeker voor kleinere waarden van  $d/a$ , de aanname dat alles zich afspeelt tussen  $-1/2d \leq x \leq 1/2d$  niet houdbaar. Uitgaande van de metingen met behulp van de optische bank gedaan, zijn we in staat een electrisch analogon van het gegeven scharnier door te meten.

Met deze twee experimenten samen kunnen we de gehele spanningsverdeling vinden.

Hieruit zouden we de integratiegrenzen kunnen bepalen voor de integraal waarmee we de energie of hoekverdraaiing willen berekenen.

Theoretisch kunnen we de spanningsberekeningen verfijnen door niet het gegeven scharnier te vervangen door een benaderd scharnier maar het originele scharnier te beschouwen met invoering van zogenaamde bi-polaire coördinaten. Deze coördinaten beschrijven de cirkelranden van het scharnier.

Tot slot nog enkele opmerkingen op meet-technisch gebied.

1<sup>e</sup> Boven  $\bar{\sigma} = 2 \text{ kg/mm}^2$  gaat het lineaire verband tussen  $|\sigma_1 - \sigma_2|$  en het aantal optrekkende fringes voor Homolite CR-39 verloren.

Dit betekent dat we bij foto-elastische metingen aan CR-39 niet boven de 8 fringes mogen komen, willen we van dit lineaire gedrag gebruik maken.

2<sup>e</sup> Gezien de grote spreiding in de opgegeven waarde van de elasticiteits-modulus van dit materiaal (geldt voor alle kunststoffen) verdient het misschien de voorkeur de hoekverdraaiings-metingen ter verificatie van de theorie uitte voeren met stalen- of ander metalen modellen, daar de E dan vrij nauwkeurig vast ligt. Een andere mogelijkheid is de elasticiteits-modulus van de kunststof onder de zelfde condities (wat betreft tijd, temperatuur en vochtigheid) als waaronder het eigenlijke experiment plaatsvindt zelf te bepalen.

Bylage I

Afleiding van (1), uitgaande van de integraal

$$\varphi = \frac{6Md}{Eb} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos \psi d\psi}{(a-d\cos\psi)^3}$$

stel  $\tan \frac{1}{2}\psi = t$  en  $\frac{a-d}{a+d} = p^2$ , dan wordt

$$\varphi = \frac{12Md}{bE(a+d)^3} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^4)}{(p^2+t^2)^3} dt$$

$$\frac{\varphi a^2 b E}{M} = \frac{12a^2 d}{(a+d)^3} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^4)}{(p^2+t^2)^3} dt$$

Beschouwen we de integraal  $\int_{-1}^1 \frac{1-t^4}{(p^2+t^2)^3} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{(p^2+t^2)^3} dt - \int_{-1}^1 \frac{t^4}{(p^2+t^2)^3} dt$

Uit H.B. Dwight: Tables of integrals and other mathematical data vinden we

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(p^2+t^2)^3} dt = \frac{1}{2p^2(p^2+1)^2} + \frac{3}{4p^4(p^2+1)} + \frac{3}{4p^5} \arctan \frac{1}{p}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{t^4}{(p^2+t^2)^3} dt = \frac{p^2}{2(p^2+1)^2} - \frac{5}{4(p^2+1)} + \frac{3}{4p} \arctan \frac{1}{p}$$

met  $p^2 = \frac{a-d}{a+d}$  wordt

$$\begin{aligned} \frac{\varphi a^2 b E}{M} &= \frac{12a^2 d}{(a+d)^3} \left[ \frac{(a+d)^3}{8(a-d)a^2} + \frac{3(a+d)^2}{8a(a-d)^2} - \frac{(a-d)(a+d)}{8a^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5(a+d)}{8} + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{a+d}{a-d}} \cdot \left( \left( \frac{a+d}{a-d} \right)^2 - 1 \right) \arctan \sqrt{\frac{a+d}{a-d}} \right] \\ &= \frac{12 \frac{d}{a} (1-\frac{d}{a})^2}{(1+\frac{d}{a})^3 (1-\frac{d}{a})^2} \left[ \frac{(1+\frac{d}{a})^3}{8(1-\frac{d}{a})} + \frac{3(1+\frac{d}{a})^2}{8(1-\frac{d}{a})^2} - \frac{1-\frac{d}{a}}{8} + \frac{5(1+\frac{d}{a})}{8} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{1+\frac{d}{a}}{1-\frac{d}{a}}} \left( \frac{(1+\frac{d}{a})^2}{(1-\frac{d}{a})^2} - 1 \right) \arctan \sqrt{\frac{1+\frac{d}{a}}{1-\frac{d}{a}}} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\varphi a^2 b E}{M} &= \frac{12 d/a (1+d/a)(1-d/a)^2}{(1+d/a)^3 (1-d/a)^2} \left[ \frac{(1+d/a)^2}{8(1-d/a)} + \frac{3(1+d/a)^2}{8(1-d/a)^2} - \frac{1-d/a}{8} + \frac{5}{8} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{1+d/a}{1-d/a}} \cdot \left( \frac{1+d/a}{(1-d/a)^2} - \frac{1}{1+d/a} \right) \arctan \sqrt{\frac{1+d/a}{1-d/a}} \right] \\
&= \frac{12 d/a}{8(1-d^2/a^2)^2} \left[ (1+d/a)(1-d/a) + 3(1+d/a)^2 - (1-d/a)^3 + 5(1-d/a)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 6 \sqrt{\frac{1+d/a}{1-d/a}} \cdot \left( 1+d/a - \frac{(1-d/a)^2}{1+d/a} \right) \arctan \sqrt{\frac{1+d/a}{1-d/a}} \right] \\
&= \frac{3/2 d/a}{(1-d^2/a^2)^2} \left[ (1+d/a)^2(4-d/a) + (1-d/a)^2(4+d/a) + \right. \\
&\quad \left. + 6 \sqrt{\frac{1+d/a}{1-d/a}} \cdot \frac{4 d/a}{1+d/a} \arctan \sqrt{\frac{1+d/a}{1-d/a}} \right] \\
\frac{\varphi a^2 b E}{M} &= \frac{6 d/a}{(1-d^2/a^2)^2} \left[ \frac{d^2}{a^2} + 2 + 6 \frac{d}{a} \frac{1}{\sqrt{1-d^2/a^2}} \arctan \sqrt{\frac{1+d/a}{1-d/a}} \right] \quad (1)
\end{aligned}$$

.64.

foto 1

.65.

foto 2.

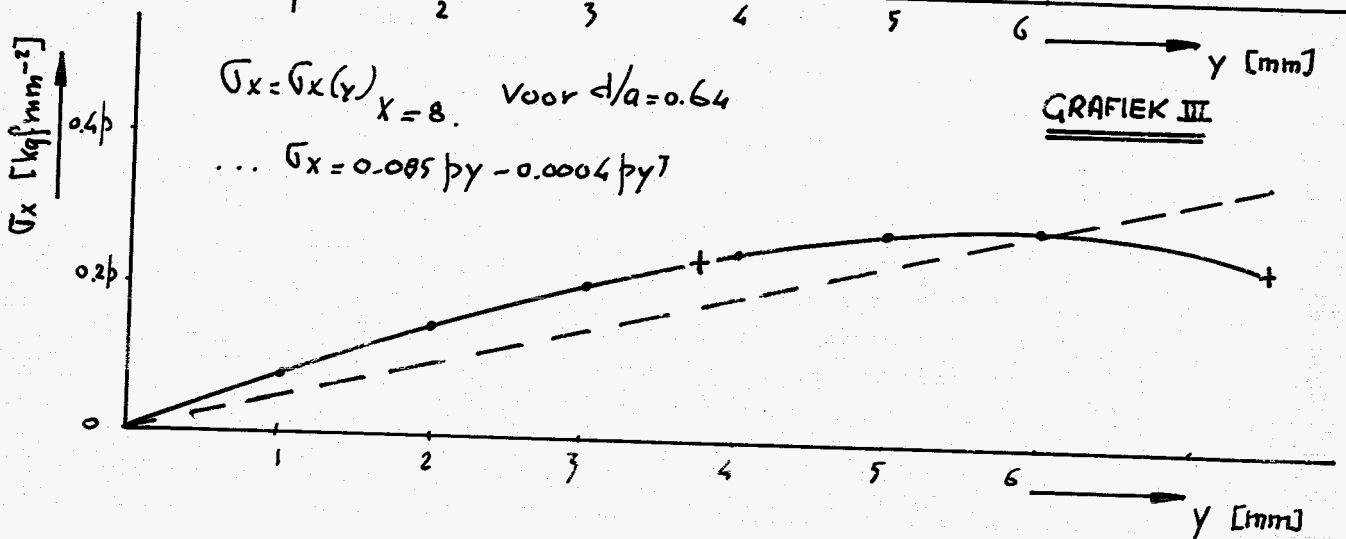
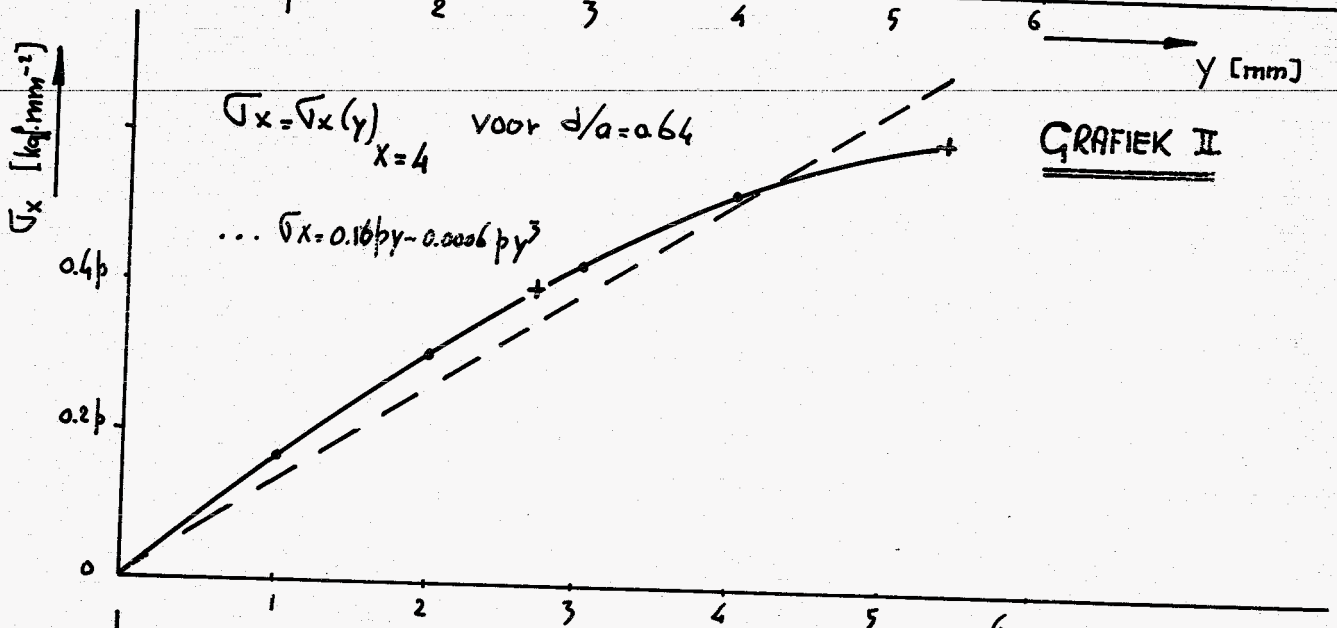
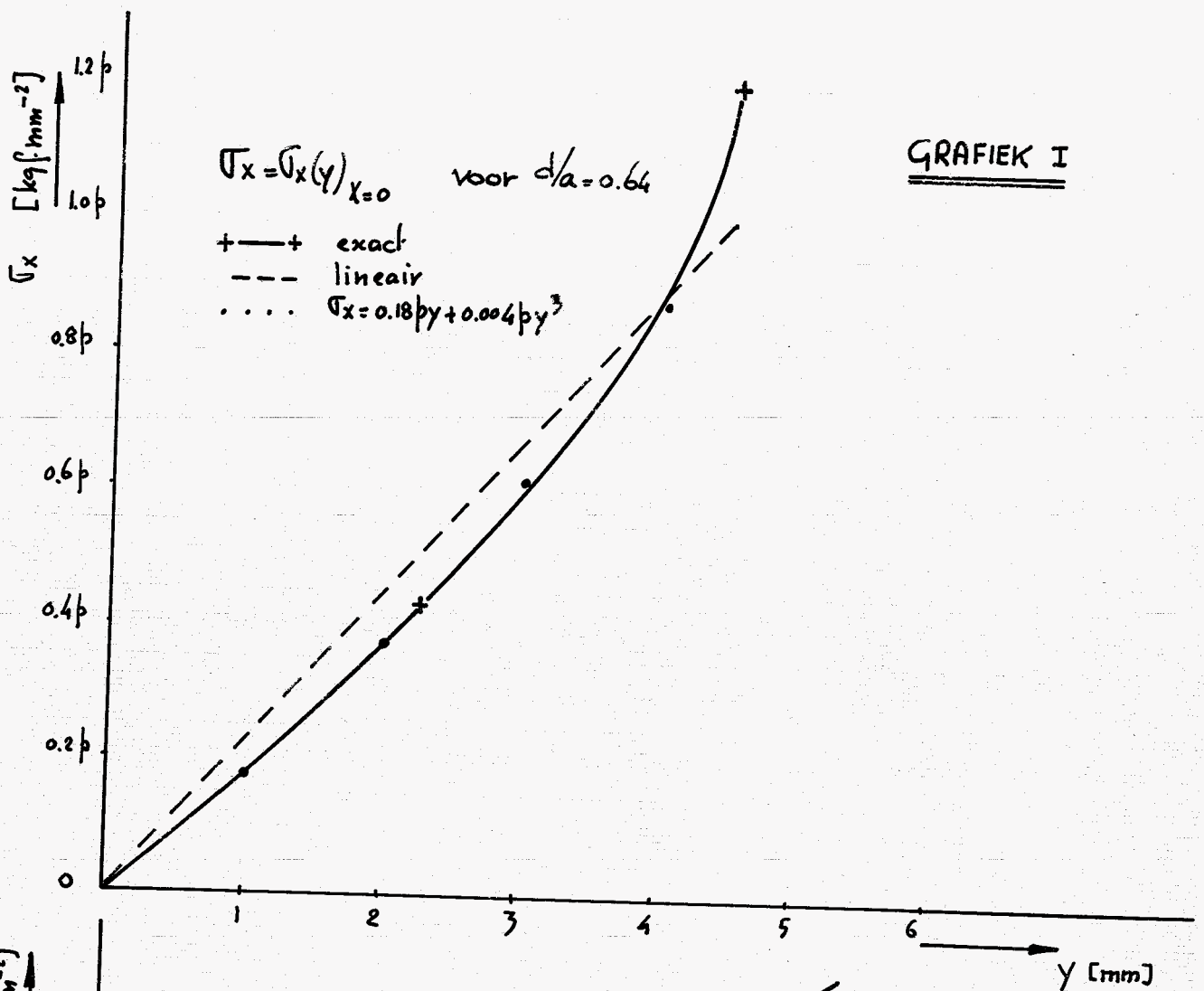
.66.

foto 3.

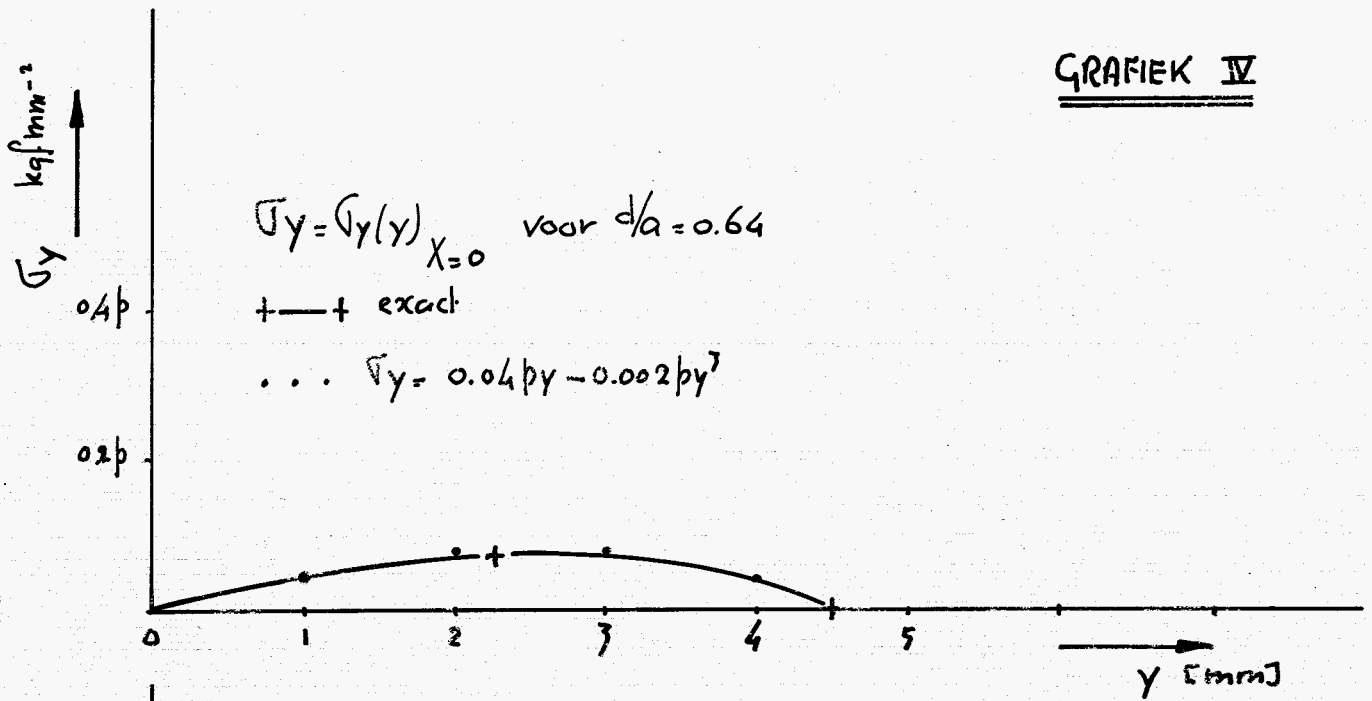
.67-

foto 4

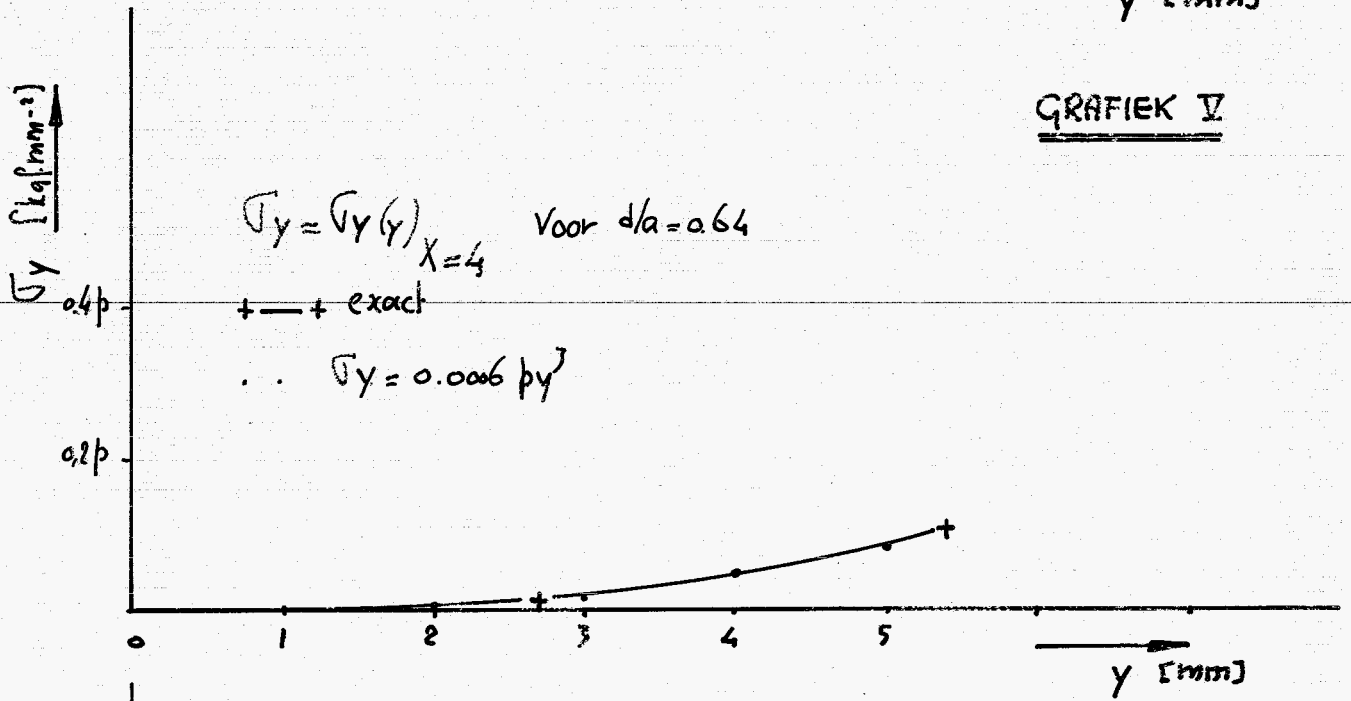




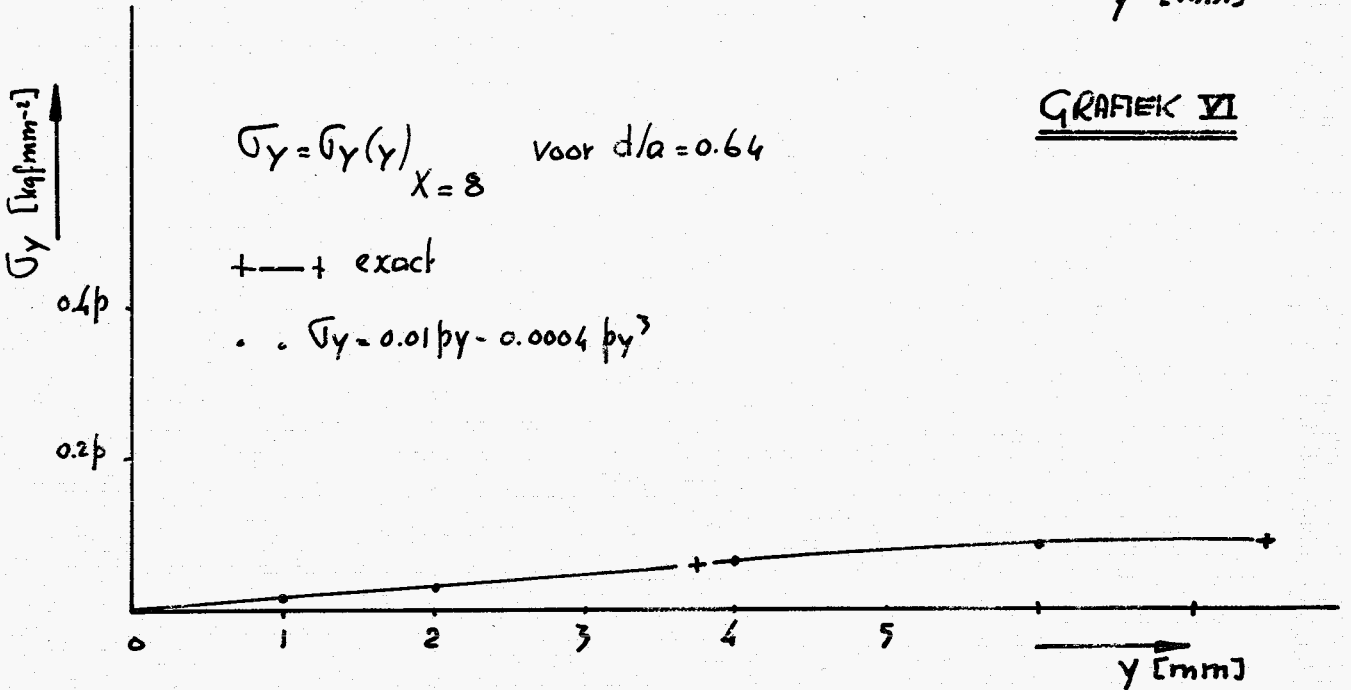
GRAFIEK IV



GRAFIEK V

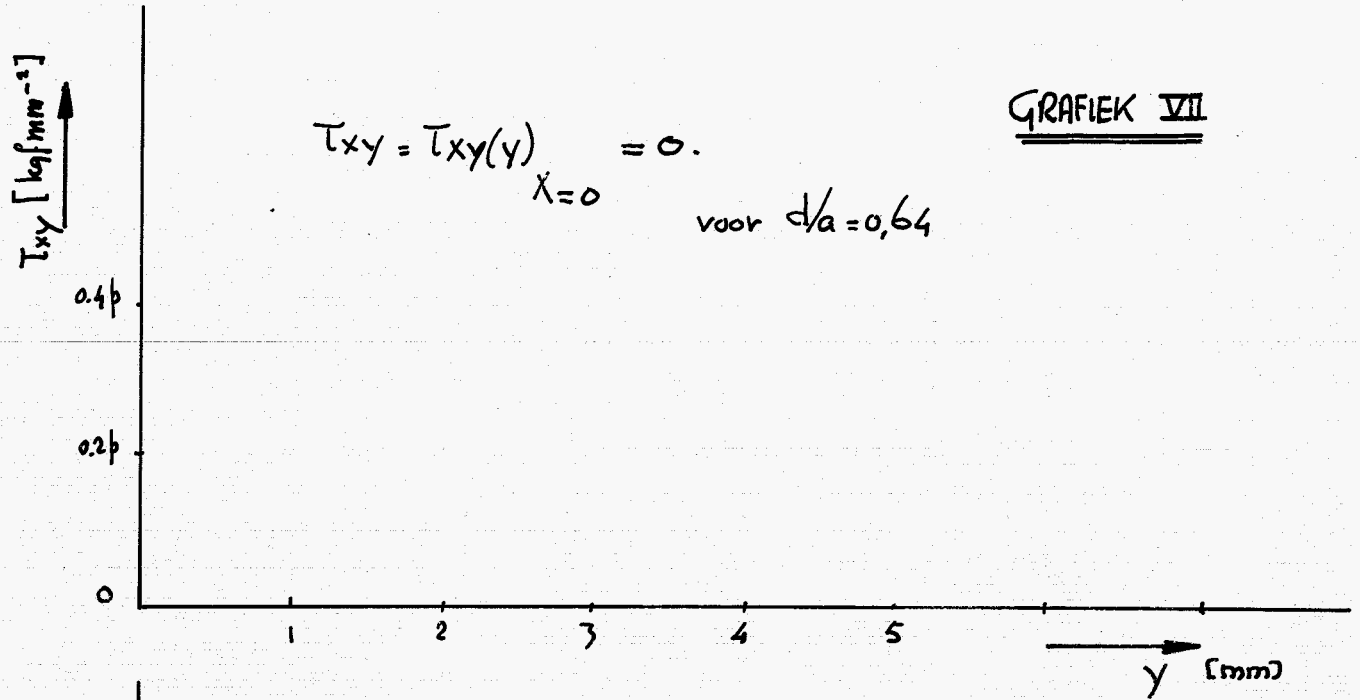


GRAFIEK VI

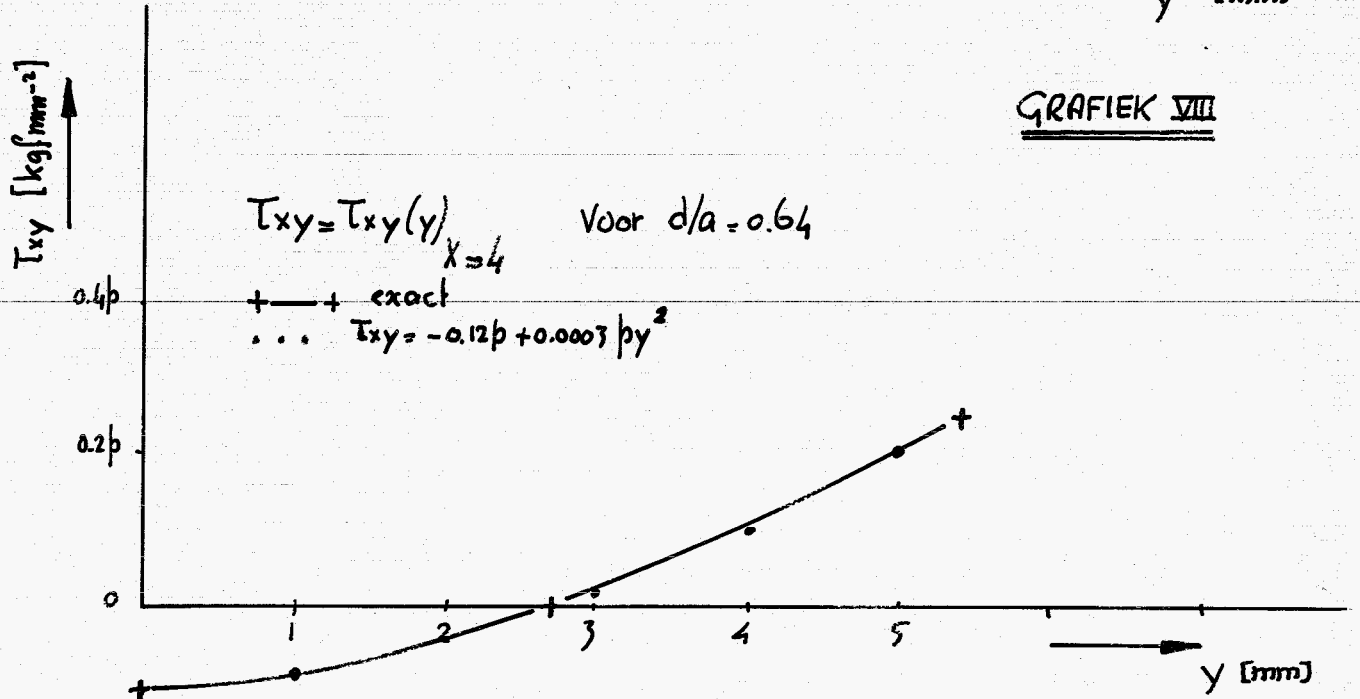




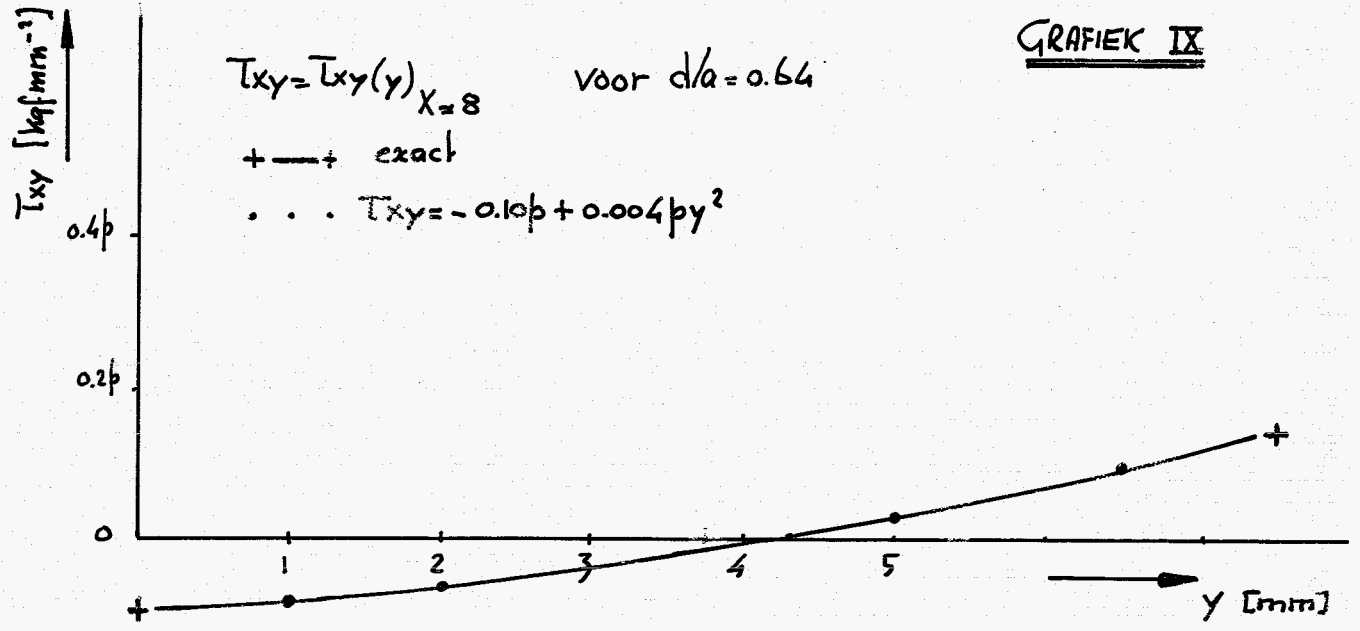
GRAFIEK VII



GRAFIEK VIII



GRAFIEK IX



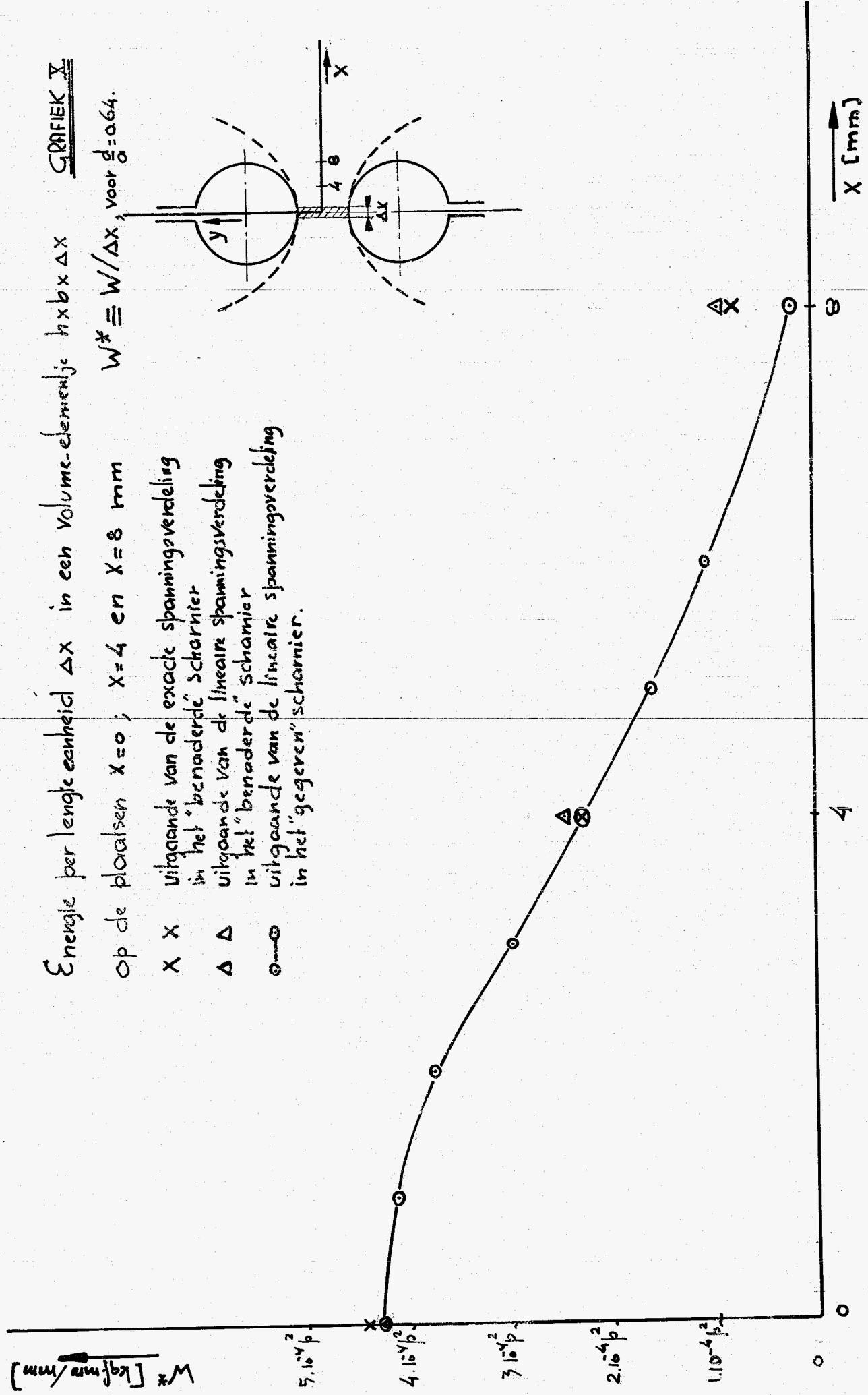
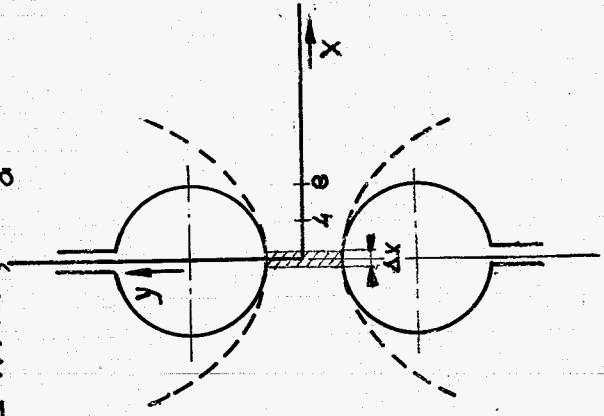
GRAFIEK X

Energie per lengte eenheid  $\Delta X$  in een volumeelementje  $h \times b \times \Delta X$

$W^* \equiv W/\Delta X$ , voor  $g = 0.64$ .

Op de plaatsen  $X=0$ ;  $X=4$  en  $X=8$  mm

- X X uitgaande van de exacte spanningsverdeling in het "benaderde" scharnier
- $\Delta$   $\Delta$  uitgaande van de lineaire spanningsverdeling in het "benaderde" scharnier
- $\circ$   $\circ$  uitgaande van de lineaire spanningsverdeling in het "gegeven" scharnier.

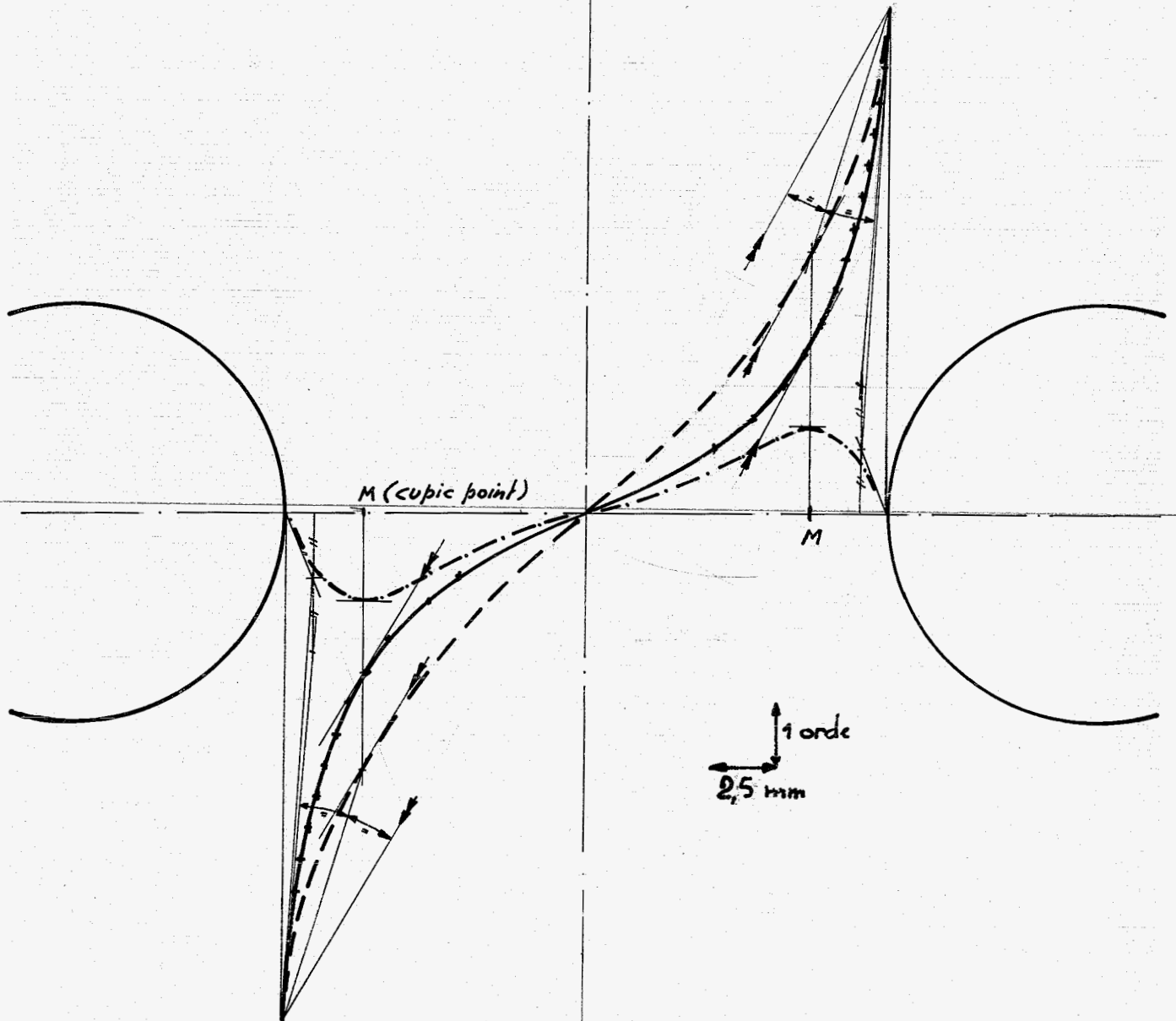


GRAFIEK XI

Constructie  $\sigma_1$ - en  $\sigma_2$ -verloop  
uit de gemeten  $|\sigma_1 - \sigma_2|$  kromme op  
sym. doorsnede:  $d/a = 0,4$ .

$M = 83,0 \text{ kg/cm}$

---+--- gemeten  $|\sigma_1 - \sigma_2|$   
- - - - - geconstrueerd  $\sigma_1$   
- · - · - " "  $\sigma_2$



M (cubic point)

M

↑ 1 cm  
← 2,5 mm

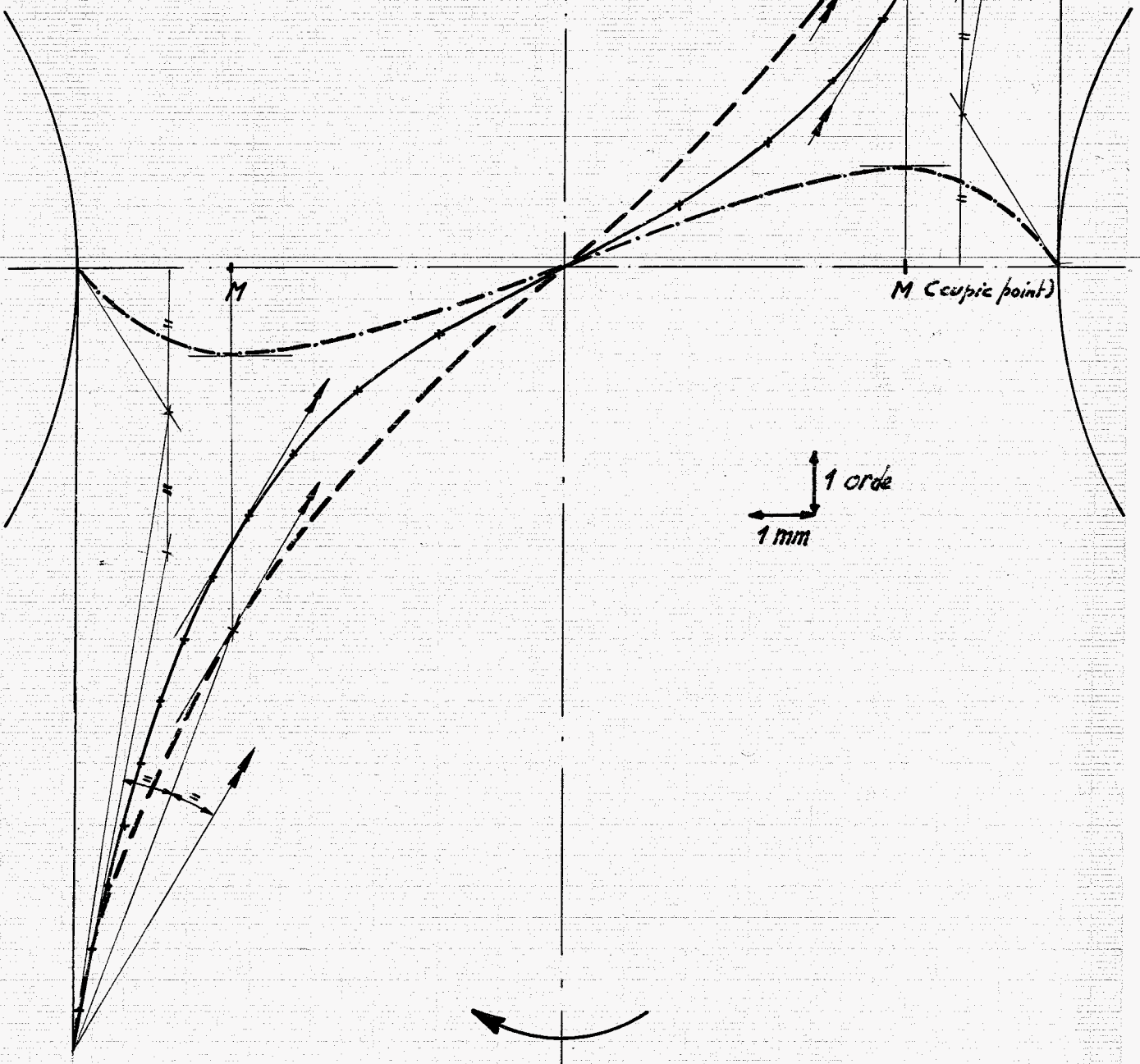
GRAFIEK XII

$M = 67.75 \text{ kg/cm}$

Constructie van  $\sigma_1$ - en  $\sigma_2$ -verloop.  
uit de gemeten  $|\sigma_1 - \sigma_2|$ -kromme  
op de sym. doorsnede.

$d/a = 0,5$

- ++++ gemeten  $|\sigma_1 - \sigma_2|$
- geconstrueerd  $\sigma_1$
- .-.- "  $\sigma_2$



1 orde  
1 mm



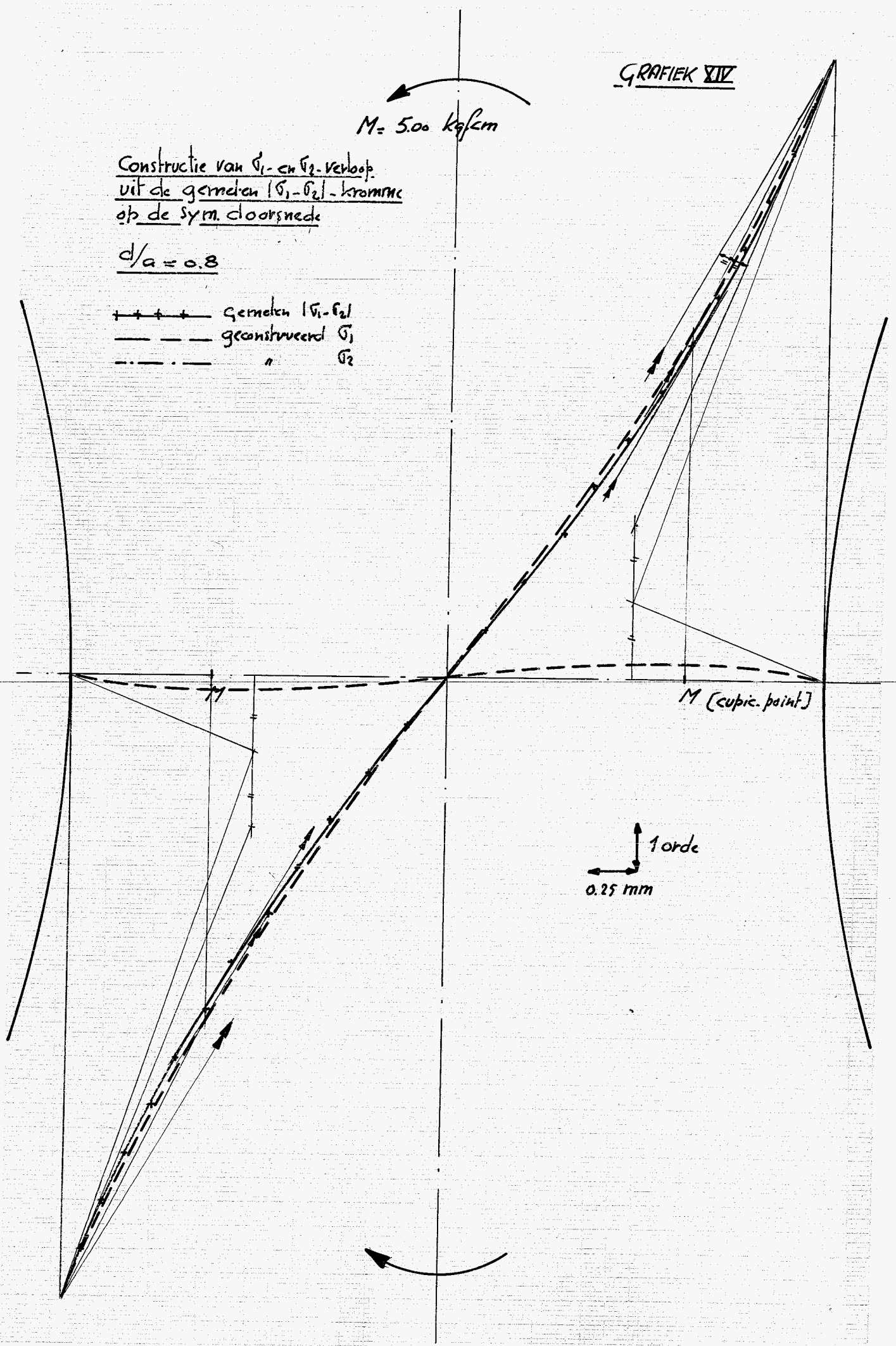
GRAFIEK XIV

$M = 5.00 \text{ kg/cm}$

Constructie van  $\sigma_1$ - en  $\sigma_2$ -verloop  
uit de gemeten  $|\sigma_1 - \sigma_2|$ -kromme  
op de sym. doorsnede

$d/a = 0.8$

- +++++ gemeten  $|\sigma_1 - \sigma_2|$
- geconstrueerd  $\sigma_1$
- ..... " "  $\sigma_2$



M (cubic point)

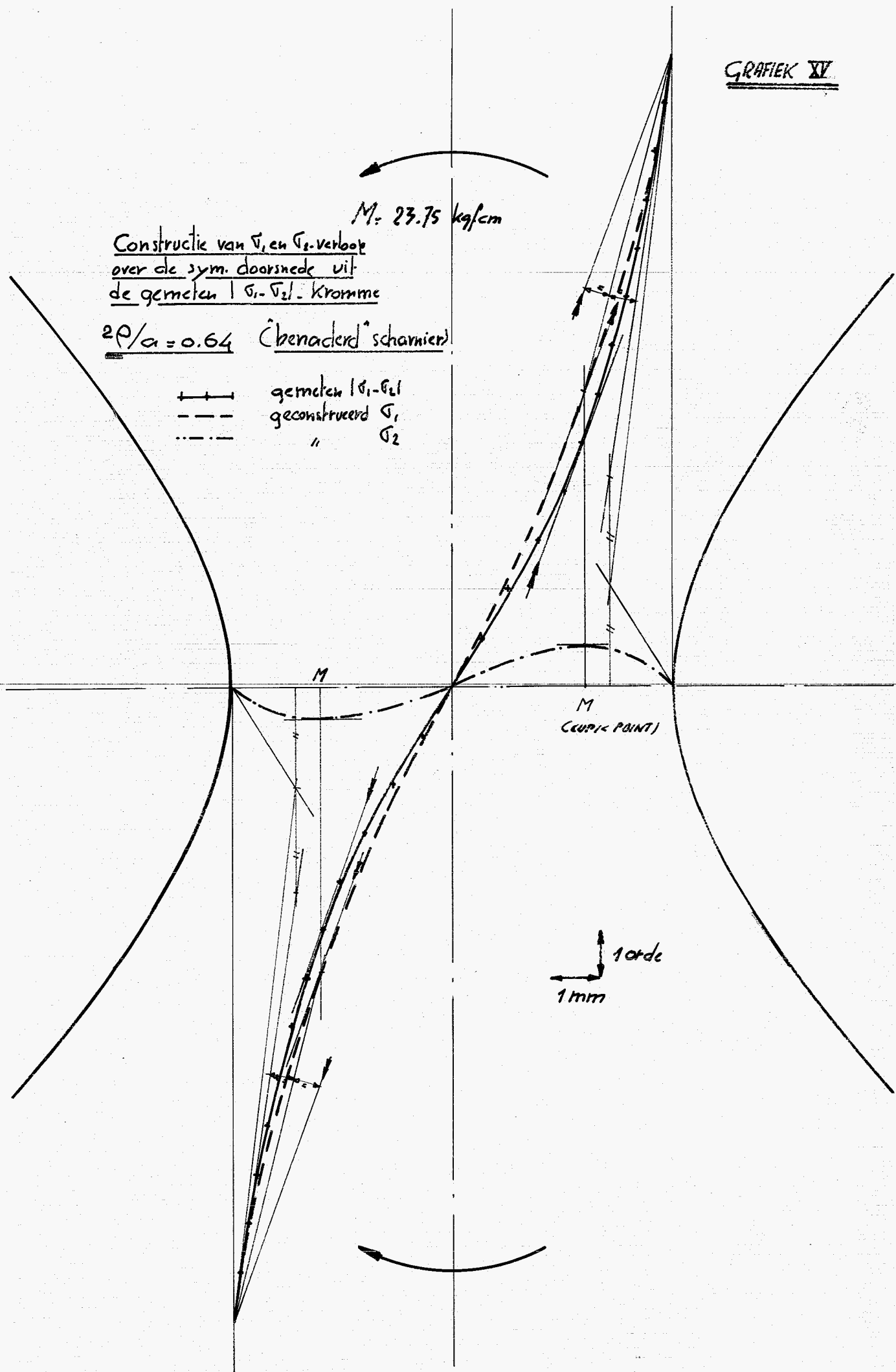
1 orde  
0.25 mm

$M = 23.75 \text{ kg/cm}$

Constructie van  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$ -verloop  
 over de sym. doorsnede uit  
 de gemeten  $|\sigma_1 - \sigma_2|$ -kromme

$\frac{2\rho}{a} = 0.64$  (benaderd scharnier)

- +—+— gemeten  $|\sigma_1 - \sigma_2|$
- - - - - geconstrueerd  $\sigma_1$
- · · · · "  $\sigma_2$



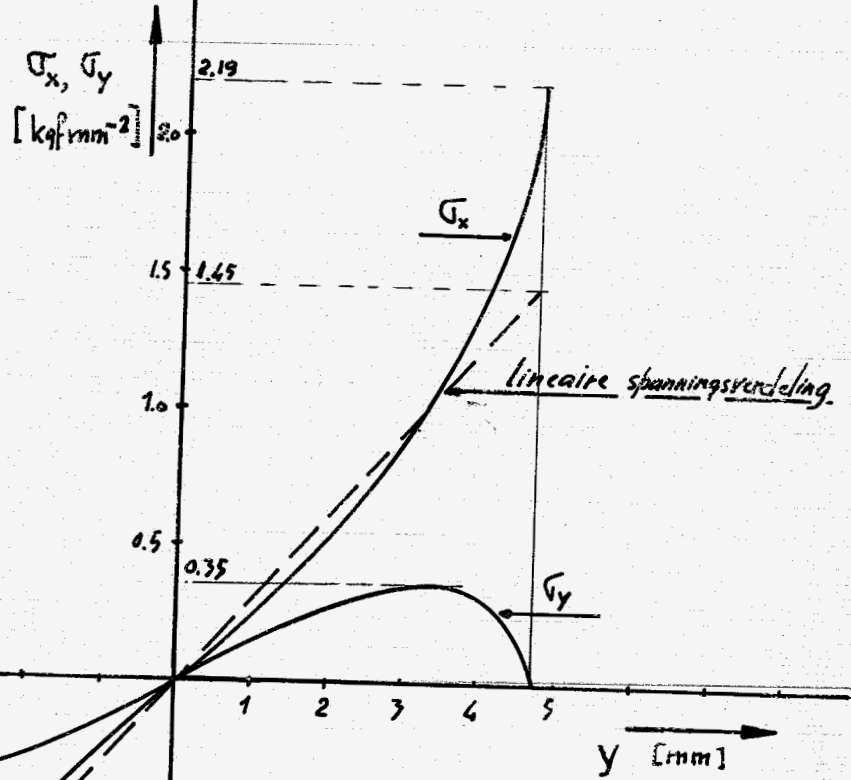
1 cm  
 1 mm

M

M  
 (CRUPIC POINT)

GRAFIEK XVI

$M = 83.0 \text{ kgfmm}$



Verloop van  $\sigma_x$  en  $\sigma_y$  over de  
Symmetrie-ddoorsnede

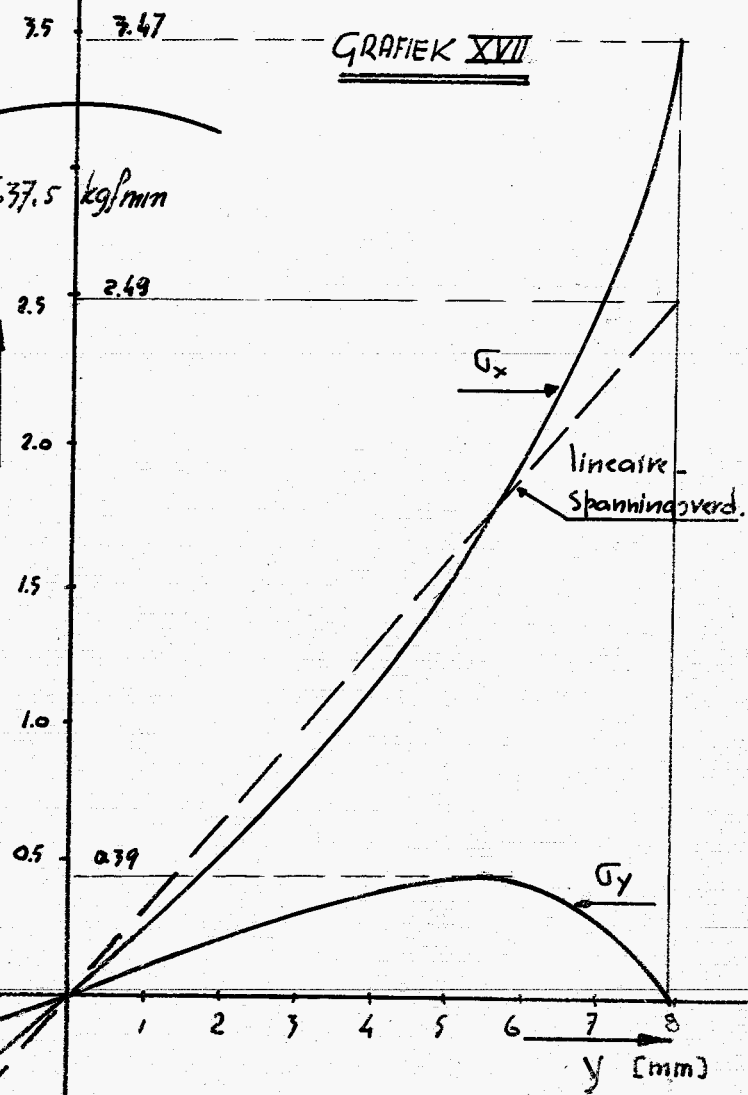
$d/a = 0.4.$



GRAFIEK XVII

$M = 637.5 \text{ kgfmm}$

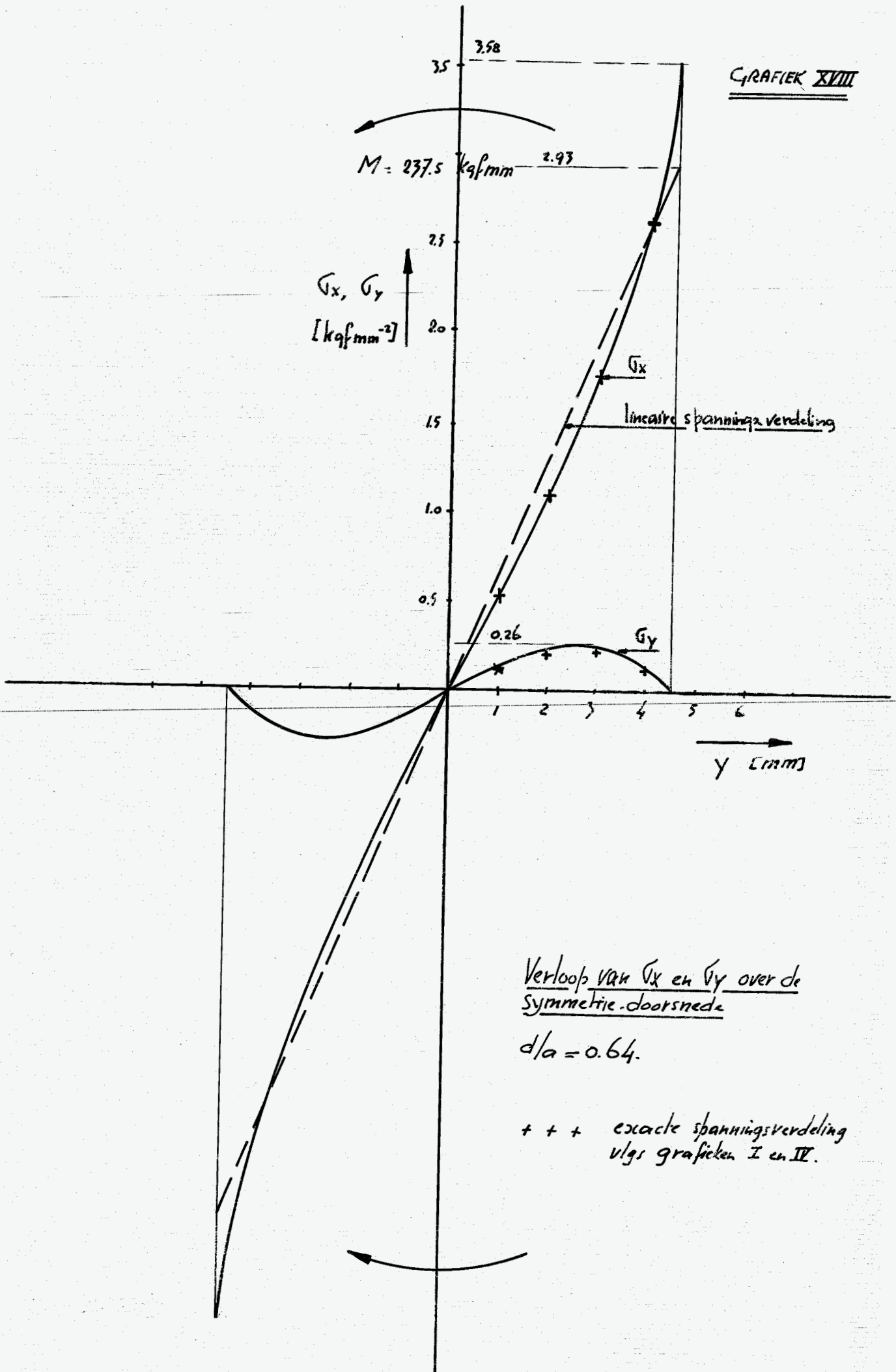
$\sigma_x, \sigma_y$   
[kgfmm<sup>2</sup>]



lineaire Spanningsverd.

Verloop van  $\sigma_x$  en  $\sigma_y$  over de symmetrie-doorsnede

$d/a = 0.5$



Verloop van  $\sigma_x$  en  $\sigma_y$  over de symmetrie-doorsnede

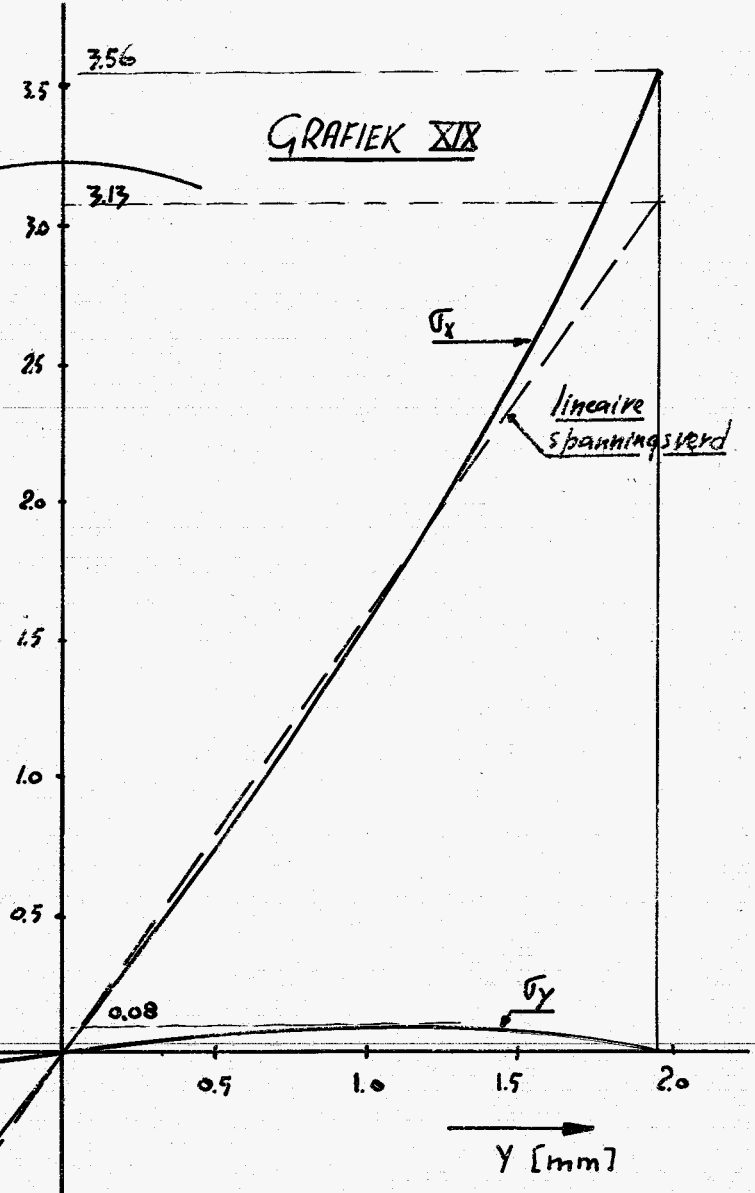
$d/a = 0.64.$

+ + + exacte spanningverdeling vlg grafieken I en II.

GRAFIEK XIX

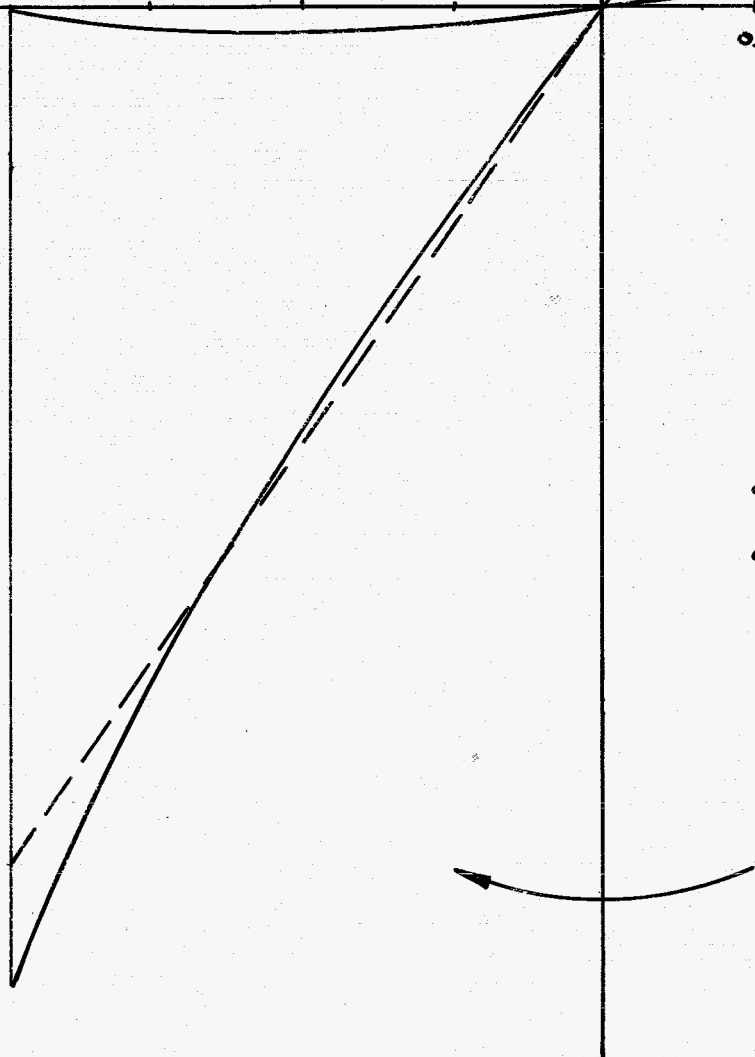
$M = 50.0 \text{ kgf/mm.}$

$\sigma_x, \sigma_y$   
[kgf/mm<sup>2</sup>]



Verloop van  $\sigma_x$  en  $\sigma_y$  over de symmetrie-doorsnede

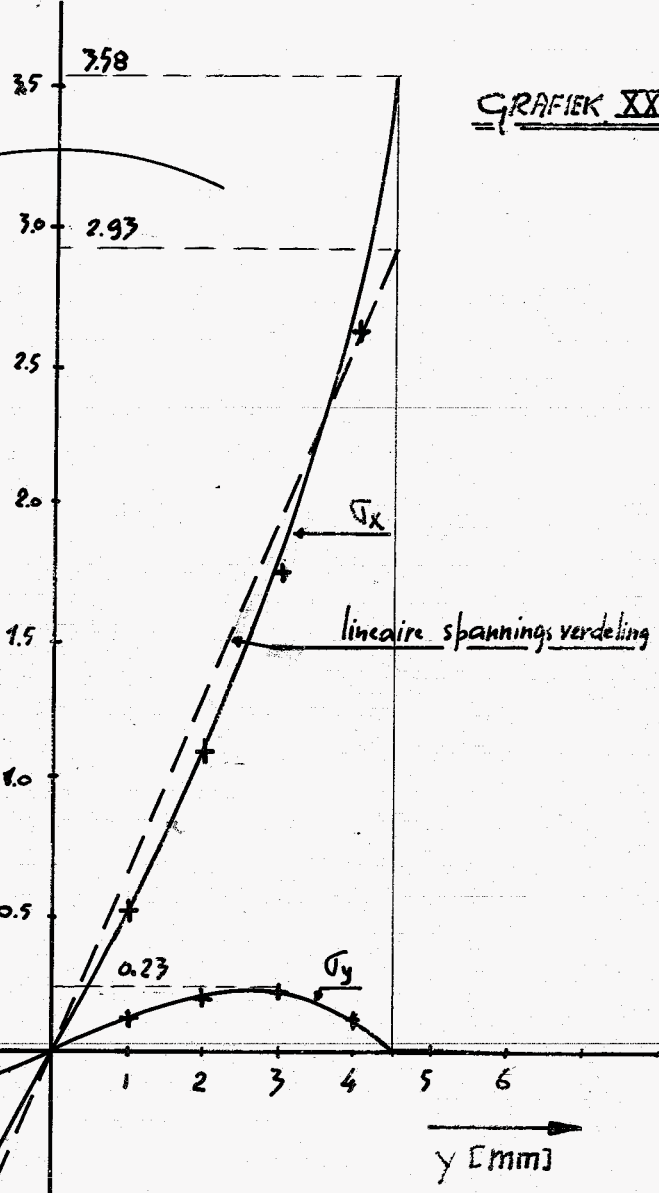
$d/a = 0.8$



GRAFIEK XX

$M = 237.5 \text{ kgfmm}$

$\sigma_x, \sigma_y$   
[kgfmm<sup>-2</sup>]



Verloop  $\sigma_x$  en  $\sigma_y$  over de symmetrie-doorsnede

$2p/a = 0.64$  (Benaderd scharnier)

+ + + (exacte spanningsverdeling) vlg grafiek I en II)

GRAFIEK XXI

Stijfheid van het elastisch scharnier  
als functie van de verhouding  $d/a$ .

