Analyse van de spanningsverdeling in een met vloeistof gevulde cirkel-cilindrische koker met vrije uiteinden, door twee zadels ondersteund

Brekelmans, W.A.M.

Award date:
1968

WE-68-20

AFSTUDEEROPDRACHT

ANALYSE VAN DE SPANNINGSVERDELING IN EEN MET VLOEISTOF GEVULDE CIRKEL - CILINDRISCHE KOKER MET VRIJE UITEINDEN, DOOR TWEE ZADELS ONDERSTEUND.

W.A.M. BREKELMANS.

EINDHOVEN, JUNI 1968.

Bijlage I bij

Analyse van de spanningsverdeling in een met vloeistofgevulde cirkel-cilindrische koker met vrije uiteinden, door twee zadels ondersteund.

Computerprogramma 05062438

W.A.M. Brekelmans WE 68/20

AFSTUDEEROPDRACHT

ANALYSE VAN DE SPANNINGSVERDELING IN EEN MET VLOEISTOF GEVULDE CIRKELCILINDRISCHE KOKER MET VRYE UITEINDEN, DOOR TWEE ZADELS ONDERSTELUND.

W.A.M. BREKELMANS

WE 68/20

EINDHOVEN, JUNI 1968.

1. Inhoudsopgave.

2. Afstudeeropdracht.

Gevraagd wordt om een studie te maken van berekeningsmethoden die gebruikt kunnen worden bij het ontwerp van een vloeistoftank - chassis combinatie voor wegvervoer.

Een belangrijk aspect is: minimum gewicht bij veilig bedrijf.

Na een oriënteringsperiode, waarbij gebruik moet worden gemaakt van contact met fabrikanten, kan de opgave begrensd worden tot een detail - probleem naar keuze uit het onderhavige gebied. Het detailprobleem moet dan zo mogelijk theoretisch en experimenteel worden geanalyseerd.

22 januari 1968,

w.g. Prof. ir. W.L. Esmeyer.

3. Literatuurlijst

1. Stresses in shells, Wilhelm Flügge.
   Springer-Verlag. Berlin, 1960.

2. Collegediktaat: „Wiskunde III a"
   Technische Hogeschool. Eindhoven, 1964.

3. Über die durch Unebenheiten der Fahrbahn hervorgerufene Verdrehung von Strassenfahrzeugen, Dr.-Ing. Karl Erz, Ulm/Donau.
   Automobiltechnische Zeitschrift, 1957.

4. Tankwagens voor wegvervoer.
   Ned. Ver. „De rijwiel- en automobiel-industrie" Amsterdam, 1959.

5. Stresses in large horizontal cylindrical pressure vessels on two saddle supports, L. P. Zick.
   Welding Research Supplement, September 1951.

6. „Perspex" Acrylic Materials Properties.
   Imperial Chemical Industries Limited, Plastics Division, Welwyn Garden City, Herts, England.

7. Computerprogramma 05061627:
   Het verwerken van rozettemetingen met automaat, J. D. Janssen, oktober 1967.

8. An improvement on Donnell's approximation for thin-walled circular cylinders, L. S. D. Morley.
   Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, volume XII 1959.

9. The accuracy of Donnell's Equations, N. J. Hoff.
   Journal of applied mechanics September 1955.

4. Inleiding.

Bij het ontwerp van een vloeistoftank-chassis combinatie moet rekening worden gehouden met allerlei eisen, die aan deze combinatie worden gesteld.

Daar de combinatie voor wegvervoer bestemd is, moet hij voldoen aan een aantal wettelijke voorschriften, veelal veiligheidsvoorzorgmaatregelen, die vaak afhankelijk zijn van de vloeistof, welke met deze combinatie moet worden vervoerd. Wat dat betreft zijn er bepalingen omtrent de uitwendige afmetingen, de as- en wieldruk, de wanddikte van de tank voor verschillende materiaalsoorten, het al dan niet noodzakelijk zijn van tussenschotten of slingerschotten loodrecht op de rijrichting, de compartimentsinhoud, etc.

Behalve dit stelt de gebruiker eisen aan het uiterlijk van de combinatie, aan de doelmatigheid ervan, zoals de toegankelijkheid in de tank zelf, de mogelijkheid om de tank geheel te ledigen, etc, en eisen van economische aard, betreffende de totale kostprijs, de levensduur en het totale gewicht versus de maximale inhoud.

Rekening houdend met al deze eisen moet de ontwerper een zo gunstig mogelijke keuze doen uit diverse materialen en allerlei wijzen van vormgeving.

Wat de materiaalkeuze betreft worden eisen gesteld aan de kostprijs, het soortelijk gewicht versus de sterkte, de bewerkbaarheid, de lasbaarheid, de corrosieweerstand, etc.

Terwijl in het verleden steeds normaal constructiestaal werd toegepast, gaat men steeds meer over op het gebruik van lichtmetalen. Vooral de Al Zn Mg-legeringen hebben bekendheid verworven, daar hun goede eigenschappen ook na het lassen bewaard blijven. Na vele experimenten schijnen „Unidur" (Zwitserland) en „Constructal" (Duitsland) wel de beste eigenschappen te hebben.

Wat de vormgeving betreft moet allereerst een keuze worden gemaakt tussen:

a) de niet-zelfdragende constructie, waarbij de tank op een dragend chassis is bevestigd, dat een gedeelte van de belasting opneemt.

b) de zelfdragende constructie, waarbij het chassis wordt gevormd door de tank zelf en waarbij dus de tank zelf de totale belasting op moet nemen.

Bij de zelfdragende constructie worden hogere eisen gesteld aan de sterkte-eigenschappen van de tank, maar het voordeel is, dat in het algemeen het totale gewicht bij eenzelfde inhoud kleiner zal zijn.

Vervolgens moet een keuze worden gemaakt voor de vorm van de tankdoorsnede, loodrecht op de lengteas, die nog verschillend kan zijn van plaats tot plaats, voor de vorm van een eventueel chassis, voor de vorm en plaats van alle andere constructieonderdelen en voor de wanddikte, die eveneens kan variëren.

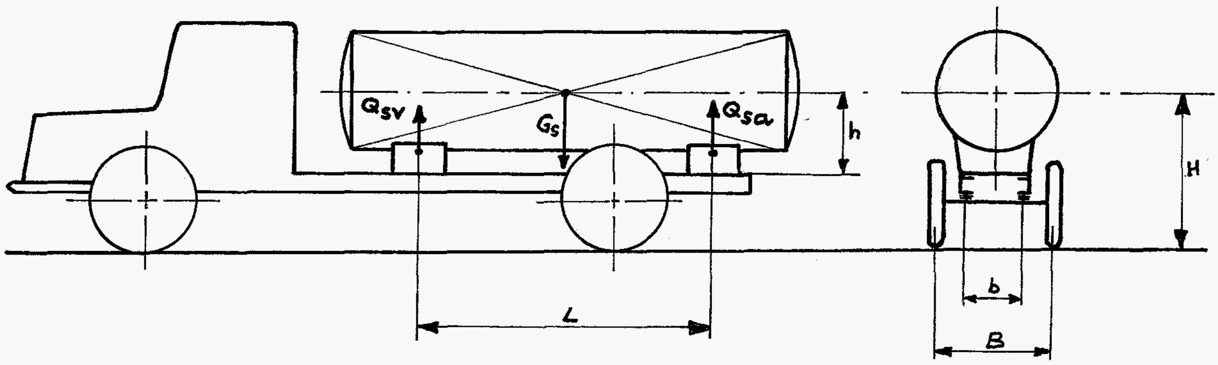
Hierbij zal veelvuldig gebruik gemaakt moeten worden van sterkteberekeningen, omdat de in de constructie optredende ideële spanning, vermenigvuldigd met een veiligheidsfactor, de maximaal, voor het gebruikte materiaal toegelaten spanning, niet mag overschrijden.

Voor deze sterkteberekeningen is een analyse van de belasting noodzakelijk.

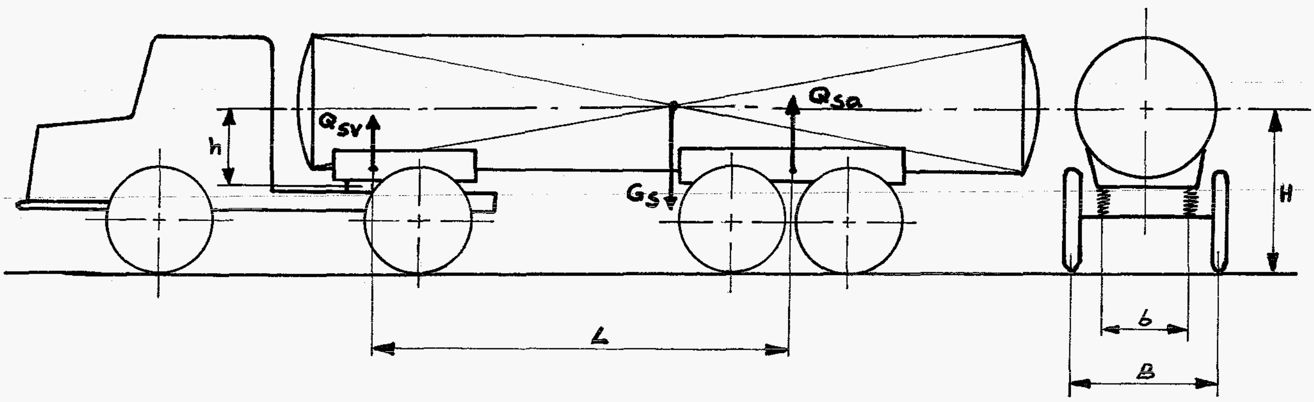
De op de tank-chassis combinatie werkende belasting is een combinatie van een aantal afzonderlijk te beschouwen belastingsgevallen, die elk hun eigen oorzaak hebben.

Vóórdat we deze belastingsgevallen gaan beschouwen, is eerst een vereenvoudigd model noodzakelijk van het voertuig.

a) Niet zelfdragende constructiewijze.



b) Zelfdragende constructiewijze.



G_s: totaal gewicht van de tank plus inhoud.

Q_{sv}: statische oplegreactie ten gevolge van G_s, ter plaatse van de voorondersteuning.

Q_{sa}: statische oplegreactie ten gevolge van G_s, ter plaatse van de achterondersteuning.

H: hoogte van de hartlijn van de tank boven de grond.

h: hoogte van de hartlijn van de tank boven het chassis bij op een dragend chassis bevestigde tank of boven de koppeling bij zelfdragende tankopleggers.

L: afstand tussen voor- en achtersteunpunt van de tank.

$m = L/H$.

$n = L/k$.

B: spoorbreedte, hart op hart wielen.

b: veerafstand, hart op hart veren.

d: diameter van de koppelingschotel.

De te beschouwen belastingsgevallen:

1. Het tweevoud van de statische belasting gevormd door het maximale gewicht van de tank plus de inhoud, ofwel een verticale kracht van $2\ G_s$.

   De oplegreacties bij de voor- en achterondersteuning zullen hierbij respectievelijk bedragen: $2\ Q_{sv}$ en $2\ Q_{sa}$.

   Dit betekent dat rekening is gehouden met een „stootfactor" in verticale richting ter grootte van 2, ofwel met een verticale versnelling gelijk aan de zwaartekrachtsversnelling.

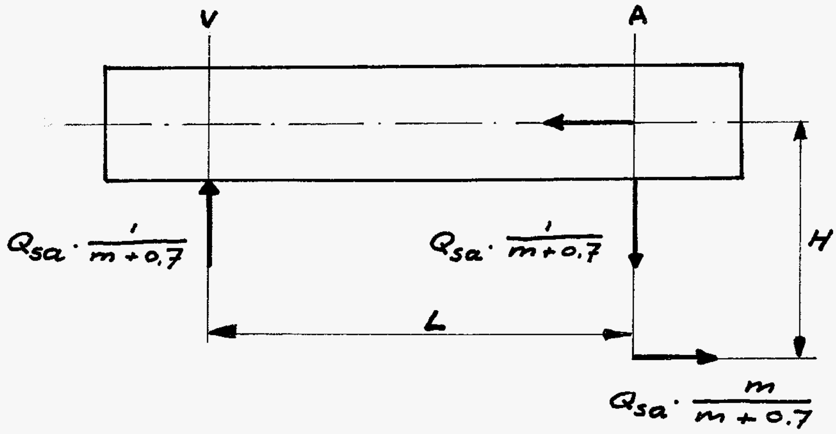
2. De belasting, die wordt veroorzaakt door vertragings (rem)- krachten.

   Deze vertragingskracht is gebaseerd op een adhesie- coëfficient van maximaal 0,7 en tevens wordt een horizontale stootfactor ter grootte van 1,43 in rekening gebracht.

   a) Bij niet-zelfdragende constructies resulteert dit in een horizontale, achterwaarts-gerichte kracht van $0,7 \cdot 1,43 \cdot G_s = G_s$, die, indien de tank aan de voorzijde zowel als aan de achterzijde zodanig met het chassis is verbonden, dat langskrachten kunnen worden overgebracht, in de verhouding van de oplegreacties Q_{sv} en Q_{sa} over beide steunpunten wordt verdeeld.

b) Bij zelfdragende tankwaertuigen moet rekening worden gehouden met het feit dat eventueel de vertragingskracht óf alleen op het achtersteunpunt (alleen achterwielen geremd) óf alleen op het voorsteunpunt (alleen de trekker wordt geremd) aangrijpt.

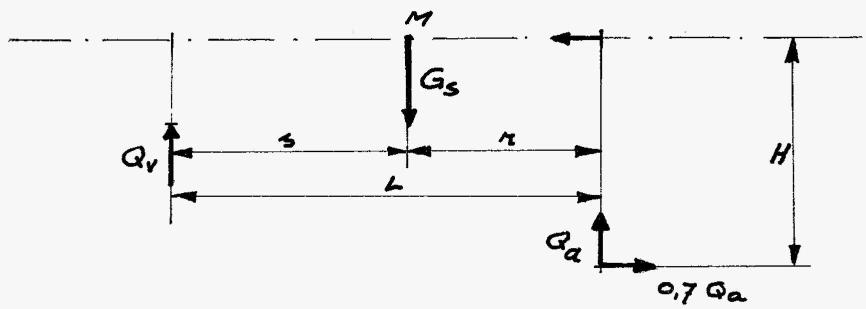
Wanneer alleen achter wordt geremd krijgen we de volgende situatie:



Bij de bepaling van deze reacties is aangenomen dat de resultante van de, tengevolge van de vertragingskracht optredende massareactie, op de hartlijn van de tank ligt.

Deze reacties worden als volgt berekend:

Met de factor 1.43 wordt voorlopig geen rekening gehouden.



Vertikaal evenwicht: $Q_a + Q_v = G_s$

Momentenevenwicht om M: $Q_v \cdot s - Q_a \cdot r - 0{,}7\, Q_a \cdot H = 0$

$$(0{,}7 \cdot H + L)\, Q_a = G_s \cdot s = Q_{sa} \cdot L$$

$$\rightarrow Q_a = Q_{sa} \cdot \frac{m}{0{,}7 + m}$$

De extra kracht die tengevolge van de reactieverschuiving in het voorste steunpunt aangrijpt is dus:

$$Q_v - Q_{sv} = G_s - Q_{sa} \cdot \frac{m}{0,7+m} - \cancel{G_s} + Q_{sa} =$$

$$= Q_{sa} \cdot \frac{0,7}{0,7+m} . \quad \text{(naar boven gericht)}$$

Deze extra kracht in het achterste steunpunt is:

$$Q_a - Q_{sa} = Q_{sa} \cdot \frac{-0,7}{0,7+m} . \quad \text{(naar boven gericht)}$$

De wrijvingskracht is:

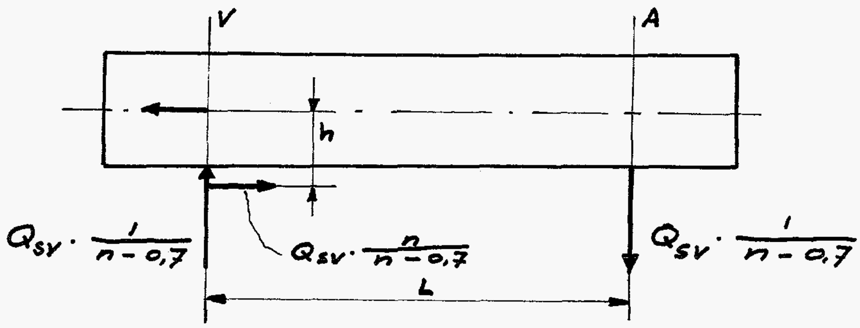
$$0,7 \cdot Q_a = 0,7 \cdot Q_{sa} \cdot \frac{m}{0,7+m} .$$

Wanneer we nu nog rekening houden met de aangenomen stootfactor van 1,43 worden deze krachten respectievelijk:

$$Q_{sa} \cdot \frac{1}{m+0,7} , \quad Q_{sa} \cdot \frac{-1}{m+0,7} , \quad Q_{sa} \cdot \frac{m}{m+0,7} ,$$

zoals reeds was medegedeeld.

Wanneer alleen de trekker remt kunnen we door een analoge berekening afleiden, dat de volgende situatie ontstaat:



Deze belastingstoestanden zijn i.h.a. voor de tank ongunstiger dan een vertragingskracht, die over beide steunpunten is verdeeld, dus bij remming op alle wielen.

Voor beide toestanden is aangenomen dat de trekker door eigen beremming zijn eigen gewicht in de nodige mate vertraagd.

3. De zijdelingse belasting, die bestaat uit de traagheidskrachten bij het beschrijven van bochten (centrifugaalkrachten) en bij eventuele zijdelingse stoten tegen de wielen t.g.v. oneffenheden van de weg, in combinatie met de statische belasting door G_S.

In concreto bestaat deze zijdelingse belasting uit een horizontaal in zijdelingse richting en ter hoogte van de hartlijn van de tank aangrijpende belasting ter grootte van:

$$0.5 \cdot \frac{B}{H} \cdot G_S \text{ met een maximum van } 0{,}7 \cdot G_S.$$

Dit maximum ontstaat bij zijdelings slippen, waarbij dus weer is aangenomen, dat de wrijvingscoëfficient gelijk is aan 0,7.
In de meeste gevallen zal dit maximum echter nooit bereikt worden omdat een kleinere zijdelingse belasting reeds aanleiding tot kantelen geeft.

4. Een wringend moment, dat over de lengte tussen het voor- en achtersteunpunt, op de tank werkt en dat veroorzaakt wordt door oneffenheden van de weg.

Dit wringend moment wordt, onder toepassing van een stootfactor 2 gebaseerd op de veronderstelling dat èèn der voorveren bij een niet zelf-dragende tankwagen of een der achterveren van de trekker in het geval van een oplegger, geheel is ontlast.

Dit wringend moment heeft een grootte van:

$1{,}75 \cdot Q_{SV} \cdot d$ in het geval van zelfdragende tankoplegger met een maximum van $Q_{SV} \cdot b$, wanneer de tankoplegger niet is voorzien van een koppeling welke een beweging om de langsas van tenminste 8° naar beide zijden toelaat.
Wanneer de koppeling niet in staat is om een moment over te brengen tengevolge van voldoende beweegbaarheid om de langsas, dan behoeft geen rekening te worden gehouden met het optreden van een wringend moment.

De wringspanningen, welke door de dynamische traagheidsinvloed, in de wand van een cilindrische, met vloeistof of korrelige stof gevulde tank kunnen optreden, zijn in het algemeen van te verwaarlozen grootte.

Voor op een dragend chassis bevestigde tanks is moeilijk vast te stellen van welke grootte-orde het wringend moment in de tank zal zijn, daar dit geheel afhankelijk is van de verhouding van de torsiestijfheden van het chassis enerzijds en de tank anderzijds.
Voor de berekening van de torsiestijfheid van het chassis, die uiteraard afhankelijk is van de vorm en van de gebruikte profielen, wordt verwezen naar een artikel van K. Erz, dat is genoemd in hoofdstuk 3.
Het lijkt echter een veilige veronderstelling dat het wringend moment in de tank niet groter zal zijn dan de voor zelfdragende tanks aangenomen waarde.

Bij de berekening van de maximaal-optredende spanningen moet worden verondersteld dat verschillende der in het voorgaande omschreven belastingsgevallen hun invloed gelijktijdig zullen doen gelden. In dit verband kunnen de navolgende gecombineerde belastingstoestanden tenslotte aan de sterkteberekening ten grondslag worden gelegd:

1+4 : verticale gewichtsbelasting met inbegrip van de stootfactor 2, gecombineerd met wringing.

1+2 : verticale gewichtsbelasting met inbegrip van de stootfactor 2, gecombineerd met de invloed van de (rem) vertraging.

3 : zijdelingse belasting, gecombineerd met de statische verticale gewichtsbelasting.

Voor elk van deze combinaties moet dus een volledige sterkteberekening worden uitgevoerd.

De wijze waarop een sterkteberekening in de praktijk plaats vindt, is vaak van uiterst eenvoudige aard, waarbij met allerlei facetten geen rekening wordt gehouden.
Dit kan ook moeilijk anders omdat de wijze van ondersteuning van de tank, de vele toevoegingen als verstevigingen, mangaten, tussenschotten, etc. en de vorm van de dwarsdoorsnede (wanddikte variaties) een min of meer exacte berekeningsmethode onmogelijk maken.
De sterkte-berekening bestaat dan ook meestal uit een toepassing van gewone balkentheorie, eventueel met enige specifieke uitbreidingen.
Ondanks de vereenvoudigingen waarvan dan wordt uitgegaan, blijkt deze berekeningswijze in het algemeen toch te voldoen

Na een gesprek met de Hr Smulders van „van Doorne's Aanhangwagenfabriek N.V. (DAF)" werd duidelijk dat zich soms nog wel moeilijkheden voordeden met betrekking op

a) optredende instabiliteiten, in concreto het plooien van de tankwand.

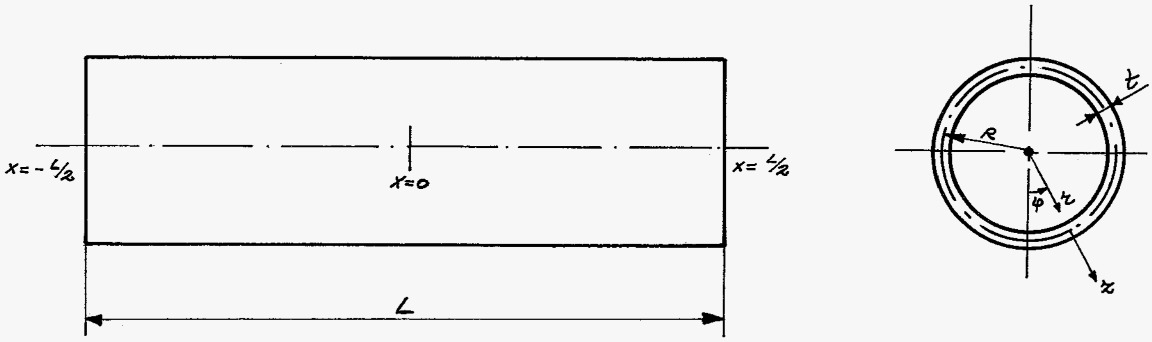
b) spanningsconcentraties in de buurt van de ondersteuningen van de tank, afhankelijk van de vorm van de ondersteuning.

Als onderwerp van deze afstudeeropdracht is dan ook gekozen : een spanningsanalyse van een met vloeistof gevulde tank, die door twee zadels wordt ondersteund.
Hierbij wordt afgezien van alle constructie-onderdelen, die in of op de tank zijn bevestigd, die de berekening gecompliceerder maken, of van de genoemde belastingsmogelijkheden.

Allereerst is hiervoor een behandeling en uitwerking van de schalentheorie noodzakelijk, waarbij we ons reeds hebben beperkt tot een cirkelvormige doorsnede met constante wanddikte en waarbij we ons nog meer beperkingen zullen opleggen, om de berekening uitvoerbaar te maken.

5. De algemene theorie voor cirkel-cilindrische schalen

We voeren cilinder-coördinaten in, zoals in de onderstaande figuur is aangegeven.



De cilindrische koker wordt in het algemeen blootgesteld aan een verdeelde belasting, waarvan de componenten zijn:

p_x : kracht per oppervlakteeenheid in axiale richting, positief in positieve x-richting.

p_φ : kracht per oppervlakteeenheid in tangentiale richting, positief in positieve φ-richting.

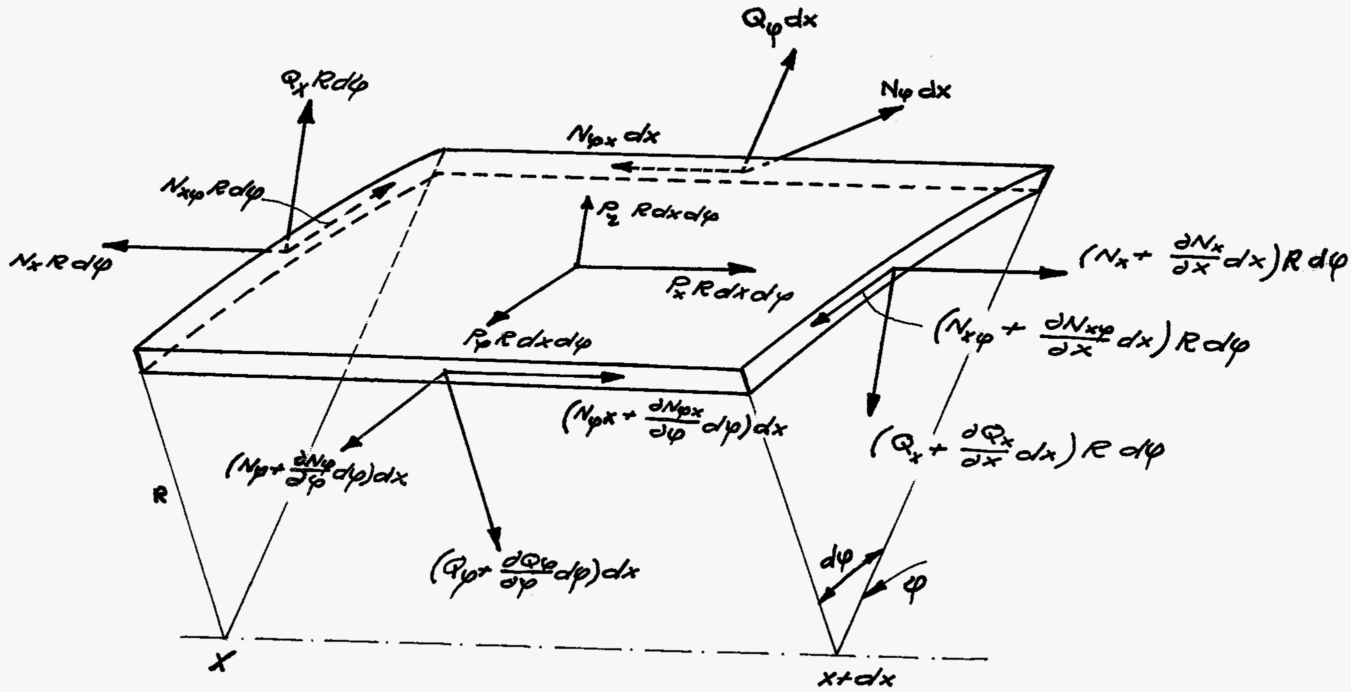
p_r : kracht per oppervlakte eenheid in radiale richting, positief naar buiten toe.

We beschouwen een infinitesimaal klein stukje uit de koker begrensd door de coördinaten: x, $x + dx$, φ, $\varphi + d\varphi$ en met dikte t (wanddikte).

Op de volgende bladzijde is dit stukje getekend en tevens de krachten en momenten, die op dit stukje werken.

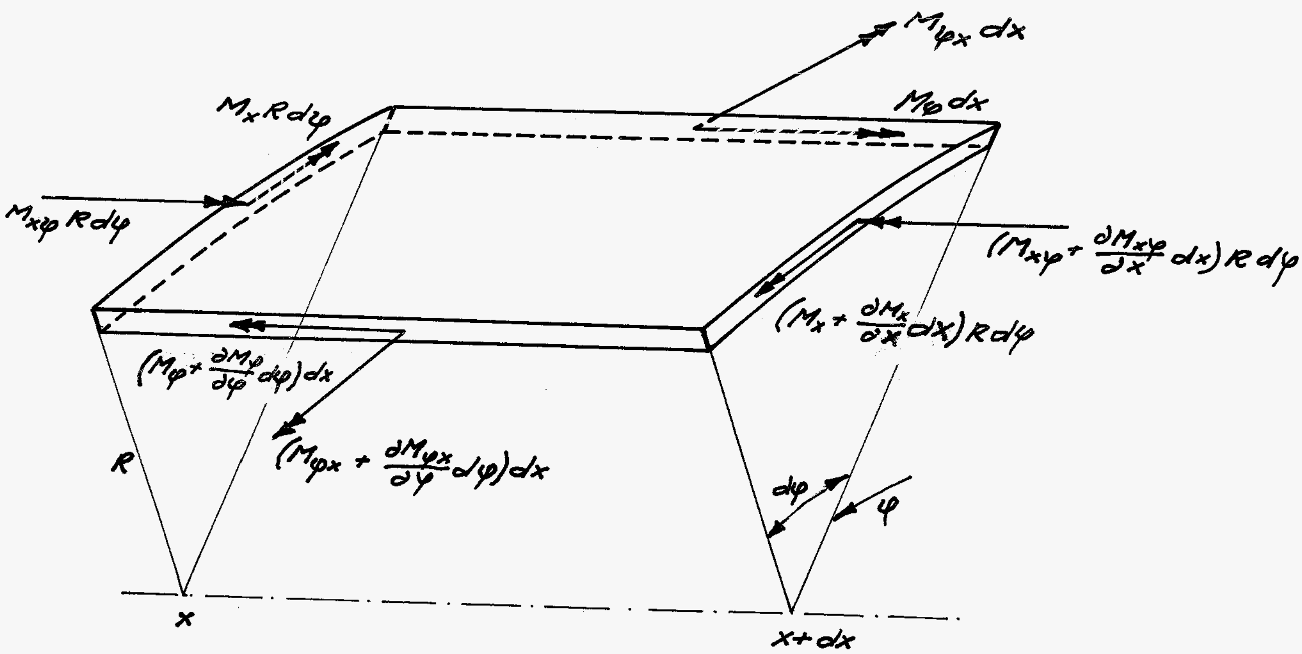
De buigende momenten per lengteeenheid: M_{xz} en $M_{\varphi z}$ worden verwaarloosd, omdat deze klein zijn ten opzichte van de andere momenten. Daarom zijn ze ook niet aangegeven in de volgende figuur.

Krachten:



N_x, N_φ, Q_x, Q_φ, $N_{x\varphi}$, $N_{\varphi x}$ zijn krachten die op een doorsnede werken, per eenheid van lengte van die doorsnede.

Momenten:



M_x, M_φ, $M_{x\varphi}$, $M_{\varphi x}$ zijn momenten die op een doorsnede werken, per lengteeenheid van die doorsnede.

5.1. De evenwichtsvergelijkingen.

De krachten en momenten, die op het elementje werken moeten voldoen aan de zes evenwichtsvergelijkingen.

1) Σ krachten in x-richting = 0

$$-N_x R d\varphi - N_{\varphi x} dx + \left(N_{\varphi x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi\right) dx + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) R d\varphi + P_x R dx d\varphi = 0$$

$$\longrightarrow R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + R \cdot P_x = 0 \qquad (I)$$

2) Σ krachten in φ-richting = 0

$$-N_\varphi dx - N_{x\varphi} R d\varphi + \left(N_{x\varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} dx\right) R d\varphi + \left(N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi\right) dx - Q_\varphi dx d\varphi + P_\varphi R dx d\varphi = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - Q_\varphi + R \cdot P_\varphi = 0 \qquad (II)$$

3) Σ krachten in r-richting = 0

$$Q_x R d\varphi + Q_\varphi dx - \left(Q_\varphi + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi\right) dx - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) R d\varphi - N_\varphi dx d\varphi + P_r R dx d\varphi = 0$$

$$\longrightarrow R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + N_\varphi - R \cdot P_r = 0 \qquad (III)$$

4) Σ momenten met vector in x-richting = 0

$$M_{x\varphi} R d\varphi - \left(M_{x\varphi} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} dx\right) R d\varphi + M_\varphi dx - \left(M_\varphi + \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi\right) dx + Q_\varphi dx \cdot R d\varphi = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - R Q_\varphi = 0 \qquad (IV)$$

5) Σ momenten met vector in φ-richting = 0

$$-M_x R d\varphi + \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) R d\varphi - M_{\varphi x} dx + \left(M_{\varphi x} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi\right) dx - Q_x R d\varphi dx = 0$$

$$\longrightarrow R \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} - R Q_x = 0 \qquad (V)$$

6) Σ momenten met vector in r-richting = 0

$$-M_{\varphi x} dx d\varphi - N_{x\varphi} R d\varphi dx + N_{\varphi x} dx R d\varphi = 0$$

$$\longrightarrow M_{\varphi x} - N_{\varphi x} \cdot R + N_{x\varphi} \cdot R = 0 \qquad (VI)$$

Uit de gevonden evenwichtsvergelijkingen kunnen we gemakkelijk Q_x en Q_φ elimineren met behulp van vergelijking (IV) en (V). Daarna houden we de vier nu volgende vergelijkingen over:

$$R\,\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + R\cdot p_x = 0 \qquad (VII)$$

$$R\,\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + R^2\,\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - R\,\frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + R^2 p_\varphi = 0 \qquad (VIII)$$

$$R\;N_\varphi + R^2\,\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + R\,\frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial x\,\partial \varphi} + R\,\frac{\partial^2 M_{\varphi x}}{\partial x\,\partial \varphi} - R^2 p_r = 0 \qquad (IX)$$

$$R\,N_{x\varphi} - R\,N_{\varphi x} + M_{\varphi x} = 0 \qquad (X)$$

Omdat dit een stelsel is van 4 vergelijkingen met 8 onbekenden is het probleem niet statisch bepaald en het is dus noodzakelijk om de deformaties te gaan bekijken.

5.2. De deformaties.

De deformatie van de koker kan worden beschreven door de drie verplaatsingscomponenten u_A, v_A, w_A van een willekeurig punt A met coördinaten: x, φ, z, waarin z de afstand is tot het middenvlak.

u_A : axiale verplaatsing, positief in positieve x-richting

v_A : tangentiale verplaatsing over de cirkel met straal $R+z$, positief bij toenemende φ

w_A : radiale verplaatsing, naar buiten toe positief.

De bepaling van u_A, v_A en w_A als functie van de coördinaten x, φ en z is een probleem met een drie-dimensionale spanningstoestand.
Het wordt een vraagstuk uit de schalentheorie, wanneer we eenvoudige kinematische relaties leggen tussen u_A, v_A, w_A en u, v, w, die de overeenkomstige verplaatsingen aangeven van een punt van het middenvlak met dezelfde coördinaten x en φ.
Dergelijke relaties kunnen worden gevonden door o.a. gebruik te maken van het feit dat de wanddikte, t, klein is ten opzichte van de straal R.

We gaan uit van de volgende aannamen:

1) vlakken die vóór deformatie loodrecht staan op het middenvlak ($r = R$), blijven na deformatie vlak en loodrecht op het middenvlak. (stekelheidprincipe van Bernoulli)

2) voor alle beschouwingen van de vervormingen is er geen verandering van de afstand z van een punt A. tot het middenvlak bij deformatie van de koker; voor alle beschouwingen van de spanningen wordt de radiale spanning, σ_z, verwaarloosd ten opzichte van de spanningen σ_φ en σ_x

3) alle verplaatsingen zijn te verwaarlozen ten opzichte van de straal van ~~het~~ middenvlak van de koker, R, en de eerste afgeleiden van deze verplaatsingen zijn te verwaarlozen ten opzichte van 1.

Opmerkingen bij deze aannamen.

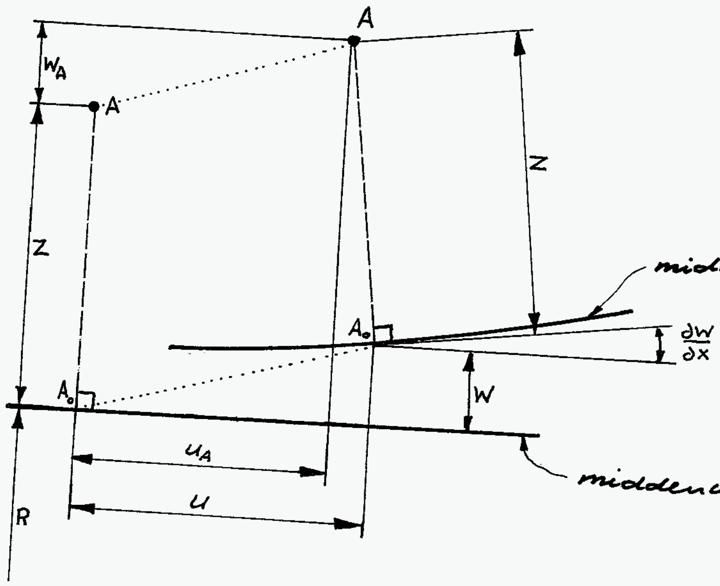
Aanname 1 houdt in dat we de deformatie (afschuiving) ten gevolge van de dwarskrachten Q_x en Q_φ verwaarlozen. Dit is toegestaan wanneer geldt dat $t \ll R$.

Aanname 2 kan, behalve als $\nu = 0$, niet juist zijn, hetgeen duidelijk blijkt na toepassing van de wet van Hooke. Wanneer de wanddikte klein is ten opzichte van de straal R, is zowel spanning als rek in z richting zonder veel betekenis en ondanks het feit, dat de aanname in principe niet juist is, kan men hem toch toepassen.

Aanname 3 is noodzakelijk om de te bepalen differentiaalvergelijkingen lineair te houden.

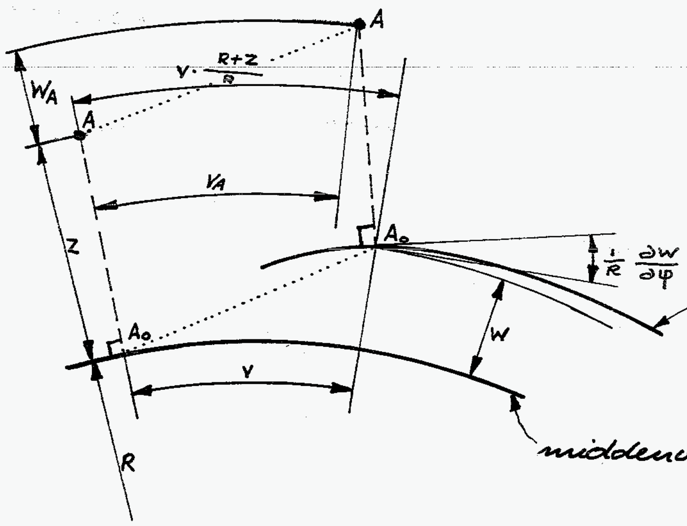
Met behulp van deze aannamen kunnen we nu de verplaatsingen van een punt A, op afstand z van het middenvlak, uitdrukken in de verplaatsingen van het punt A_0 van het middenvlak ($z=0$), dat dezelfde x- en φ- coördinaten heeft als A.

We beschouwen een doorsnede: φ = constant van de schaalwand:



$$u_A = u - z \cdot \sin\frac{\partial w}{\partial x} = u - z\frac{\partial w}{\partial x}$$

We beschouwen een doorsnede: x = constant van de schaalwand.



$$v_A = \frac{R+z}{R} \cdot v - \frac{z}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

Het verschil tussen w en w_A wordt alleen veroorzaakt door de hoekverdraaiingen: $\frac{\partial w}{\partial x}$ en $1/R\,\frac{\partial w}{\partial \varphi}$ en is evenredig met $(1-\cos)$ van deze hoeken. Omdat dit te verwaarlozen is geldt:

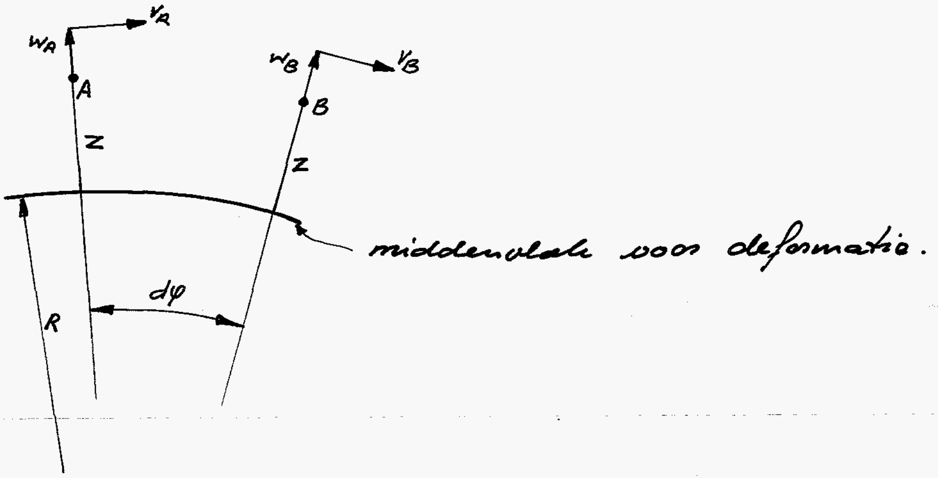
$$w_A = w$$

We gaan nu de rekken en de afschuiving in het punt A uitdrukken in de verplaatsingen u, v en w van het punt A_0 van het middenvlak.

$\underline{\underline{\varepsilon_{x_A}}}$ geeft de rek weer van een rechtlijnig stukje dx, die wordt veroorzaakt door het verschil tussen de verplaatsingen u en $u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$ van de uiteinden.

$$\rightarrow \varepsilon_{x_A} = \frac{\partial u_A}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$\underline{\underline{\varepsilon_{\varphi_A}}}$ is de rek van een kromlijnig stukje $(R+z)d\varphi$ in omtreksrichting.



Oorspronkelijke lengte van het kromlijnig stukje AB : $(R+z)d\varphi$

Wanneer we aannemen dat $w_A = w_B$ ($d\varphi$ klein) geldt voor de lengte van AB na deformatie:

$$(R+z+w_A)d\varphi + v_B - v_A$$

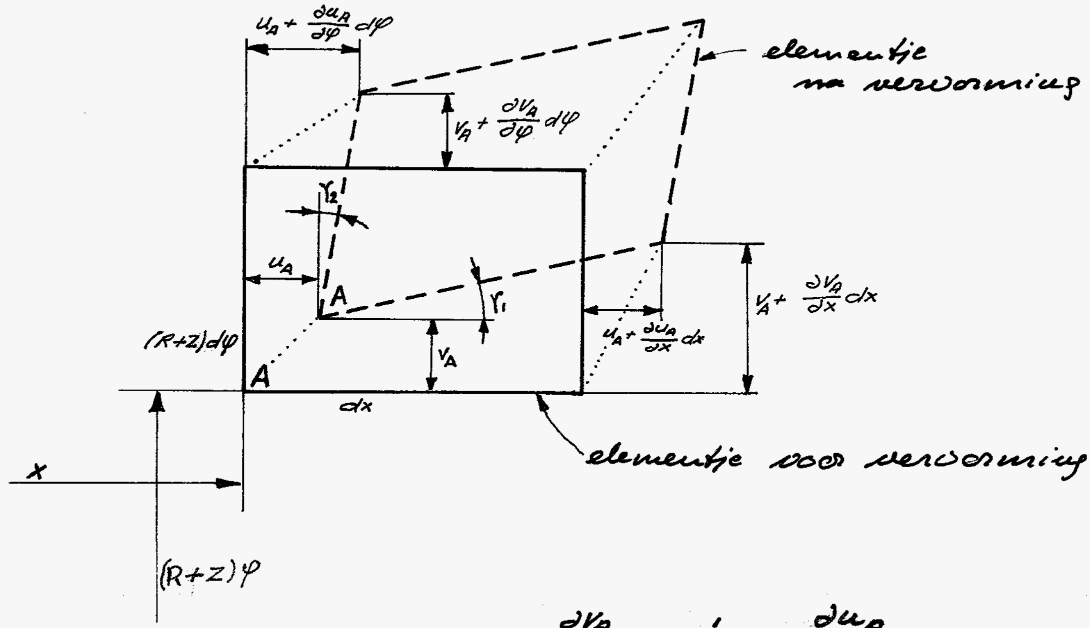
$$\varepsilon_{\varphi_A} = \frac{(R+z+w_A)d\varphi + v_B - v_A - (R+z)d\varphi}{(R+z)d\varphi} =$$

$$= \frac{w_A}{R+z} + \frac{v_B - v_A}{d\varphi}\cdot\frac{1}{R+z} = \frac{w_A}{R+z} + \frac{1}{R+z}\frac{\partial v_A}{\partial\varphi}$$

$$\rightarrow \varepsilon_{\varphi_A} = \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{w}{R+z} - \frac{z}{R(R+z)}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}$$

$\gamma_{x\varphi_A}$ geeft de afschuiving weer van een elementje begrensd door de coördinaten x, $x+dx$, φ, $\varphi+d\varphi$ op afstand z van het middenvlak.

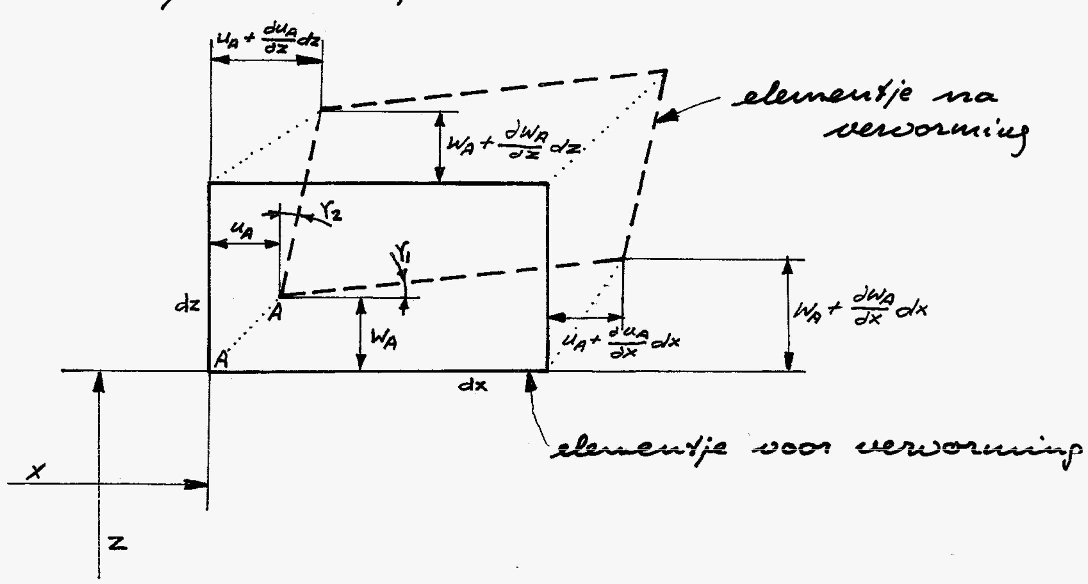
Dit gebogen elementje wordt terwille van de eenvoud hieronder vlak weergegeven:



$$\gamma_{x\varphi_A} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v_A}{\partial x} + \frac{1}{R+z} \cdot \frac{\partial u_A}{\partial \varphi}$$

$$\rightarrow \gamma_{x\varphi_A} = \frac{1}{R+z}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{R+z}{R}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2Rz+z^2}{R(R+z)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial \varphi}$$

γ_{xz_A} geeft de afschuiving weer van een elementje begrensd door de coördinaten x, $x+dx$, z, $z+dz$ bij constante φ coördinaat

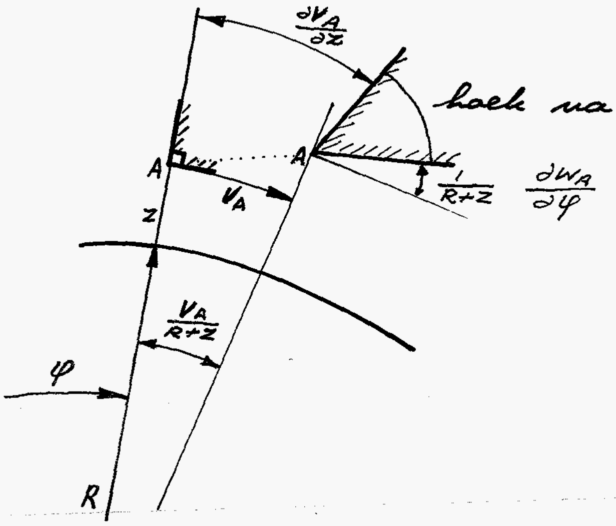


$$\gamma_{xz_A} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial w_A}{\partial x} + \frac{\partial u_A}{\partial z}$$

$$\longrightarrow \gamma_{xz_A} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$\underline{\underline{\gamma_{\varphi z_A}}}$ geeft de afschuiving van een elementje begrensd door de coördinaten φ, $\varphi + d\varphi$, z, $z+dz$ bij constante x-coördinaat.

Hiertoe bekijken een oorspronkelijke rechte hoek, zoals onderstaande tekening aangeeft.



$$\gamma_{\varphi z_A} = \frac{1}{R+z} \cdot \frac{\partial w_A}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_A}{\partial z} - \frac{v_A}{R+z}$$

$$\longrightarrow \gamma_{\varphi z_A} = \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{R} + \frac{z}{(R+z)R} \frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

$$= \left\{ \frac{1}{R+z} - \frac{1}{R} + \frac{z}{R(R+z)} \right\} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0$$

$\underline{\underline{\varepsilon_{z_A}}}$ is de rek in radiale richting van een rechtlijnig stukje dz.

Bij de aannamen is over ε_{z_A} reeds een en ander medegedeeld, zodat herhaling ervan nu onnodig is.

5.3. Spanningen en snedegrootheden.

De wet van Hooke levert een verband tussen de rekken en de spanningen, waardoor de spanningen uitgedrukt kunnen worden in de verplaatsingen u, v en w van het middenvlak.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\varphi\right)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_x\right)$$

$$\tau_{x\varphi} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{x\varphi}$$

$$\rightarrow \quad \sigma_{x_A} = \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R+z} - \frac{z}{R(R+z)}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right\} \qquad \text{(XI)}$$

$$\sigma_{\varphi_A} = \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R+z} - \frac{z}{R(R+z)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right\} \qquad \text{(XII)}$$

$$\tau_{x\varphi_A} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left\{\frac{1}{R+z}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{R+z}{R}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2Rz+z^2}{R(R+z)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \varphi}\right\} \qquad \text{(XIII)}$$

De snedegrootheden kunnen worden uitgedrukt in de spanningen als volgt:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{x_A}\left(1+\frac{z}{R}\right)dz \qquad N_\varphi = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\varphi_A}\,dz$$

$$N_{x\varphi} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{x\varphi_A}\left(1+\frac{z}{R}\right)dz \qquad N_{\varphi x} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\varphi x_A}\,dz$$

$$M_x = -\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{x_A}\left(1+\frac{z}{R}\right)z\,dz \qquad M_\varphi = -\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\varphi_A}\,z\,dz$$

$$M_{x\varphi} = -\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{x\varphi_A}\left(1+\frac{z}{R}\right)z\,dz \qquad M_{\varphi x} = -\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\varphi x_A}\,z\,dz$$

In deze vergelijkingen gaan we (XI), (XII) en (XIII) substitueren en we vinden dan de medegrootheden uitgedrukt in de verplaatsingen van het middenvlak.

$$N_x = \frac{E}{1-\nu^2}\int_{-t/2}^{t/2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R+z} - \frac{z}{R(R+z)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right\}\left(1+\frac{z}{R}\right)dz =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot t - \frac{1}{12}\cdot\frac{t^3}{R}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu t}{R}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\nu t}{R}w\right]$$

We definieren: $D = \dfrac{Et}{1-\nu^2}$ en $K = \dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

$$N_x = D\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{R}w\right) + K\left(-\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (\mathrm{XIV})$$

$$N_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\int_{-t/2}^{t/2}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R+z} - \frac{z}{R(R+z)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right\}dz =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{t}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w\ln\frac{R+t/2}{R-t/2} + \left(-\frac{t}{R} + \ln\frac{R+t/2}{R-t/2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu t\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

De uitdrukking: $\ln\dfrac{R+t/2}{R-t/2}$ kunnen we vereenvoudigen door te bedenken dat: $t \ll R$

$$\ln\frac{R+t/2}{R-t/2} = \ln\frac{1+t/2R}{1-t/2R} = \ln(1+t/2R) - \ln(1-t/2R)$$

$$\ln(1+t/2R) = t/2R - 1/2\,(t/2R)^2 + 1/3\,(t/2R)^3 - \ldots\ldots$$

$$\ln(1-t/2R) = -t/2R - 1/2\,(t/2R)^2 - 1/3\,(t/2R)^3 - \ldots\ldots$$

$$\ln\frac{R+t/2}{R-t/2} = 2(t/2R) + 2/3\,(t/2R)^3 - \ldots\ldots$$

$$= t/R + \frac{1}{12}\frac{t^3}{R^3}$$

$$N_\varphi = D\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R}\right) + K\left(\frac{w}{R^3} + \frac{1}{R^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) \qquad (\mathrm{XV})$$

Het feit dat machten van 1/R met een exponent groter of gelijk aan 5 worden verwaarloosd betekent alleen dat de factor K, die op verschillende plaatsen verschijnt, niet steeds dezelfde waarde heeft, maar enigszins fluctueerd. Deze fluctuaties zijn echter zo klein, dat we er geen rekening mee behoeven te houden.

Op analoge wijze kunnen de overige snede-grootheden worden verkregen:

$$N_{x\varphi} = D \cdot \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + K \cdot \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}\right) \qquad (\underline{XVI})$$

$$N_{\varphi x} = D \cdot \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + K\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{R^3}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}\right) \qquad (\underline{XVII})$$

$$M_x = K\left(-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\nu}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) \qquad (\underline{XVIII})$$

$$M_\varphi = K\left(\frac{w}{R^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) \qquad (\underline{XIX})$$

$$M_{x\varphi} = K(1-\nu)\left(-\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}\right) \qquad (\underline{XX})$$

$$M_{\varphi x} = K(1-\nu)\left(\frac{1}{2R^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{2R}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}\right) \qquad (\underline{XXI})$$

Met behulp van $(\underline{IV})$ en $(\underline{V})$ drukken we ook Q_x en Q_φ uit in de verplaatsingen van het middenvlak.

$$Q_x = K\left\{-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{1+\nu}{2R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2}\right\} \qquad (\underline{XXII})$$

$$Q_\varphi = K\left\{-\frac{1-\nu}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^3}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{1}{R^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3}\right\} \qquad (\underline{XXIII})$$

We gaan nu vergelijking $(\underline{XIV})$ t/m $(\underline{XXI})$ met onbekenden u, v, en w substitueren in vergelijking $(\underline{VII})$ t/m $(\underline{X})$.

We krijgen dan vier vergelijkingen in de drie onbekenden u, v, w. Het schijnt dus, dat we een vergelijking te veel hebben en dat het probleem overbepaald is. We hoeven ons echter geen zorgen te maken.
Vergelijking (X) levert een identiteit op voor ieder willekeurig verplaatsingsveld.
We houden dus drie vergelijkingen over voor de drie onbekenden u, v en w.

Vergelijking (VII) levert:

$$D\left(R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\varphi}+\nu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+$$
$$+K\left(\frac{1-\nu}{2R^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{1-\nu}{2R^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial\varphi^2}\right)+RP_x=0$$

Deze vergelijking gaan we dimensieloos maken met behulp van de volgende transformatie:

$$\bar{u}=\frac{u}{R}\qquad \bar{v}=\frac{v}{R}\qquad \bar{w}=\frac{w}{R}$$

$$\bar{x}=\frac{x}{R}\qquad \bar{\varphi}=\varphi\qquad \bar{P}_x=\frac{RP_x}{D}=\frac{R(1-\nu^2)}{E\cdot t}P_x$$

$$k=\frac{K}{DR^2}=\frac{t^2}{12R^2}$$

$$\rightarrow\quad \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{\varphi}^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}\partial\bar{\varphi}}+\nu\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}+$$
$$+k\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{\varphi}^2}-\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{x}^3}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{\varphi}^2}\right)+\bar{P}_x=0$$

(XXIV)

Vergelijking (VIII) levert op deze manier:

$$\frac{1+\nu}{2}\cdot\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}\partial\bar{\varphi}}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{\varphi}^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{\varphi}}+$$
$$+k\left(\frac{3}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{3-\nu}{2}\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{x}^2\partial\bar{\varphi}}\right)+\bar{P}_\varphi=0\qquad\text{(XXV)}$$

met $\bar{P}_\varphi=\frac{R(1-\nu^2)}{E\cdot t}P_\varphi$

Vergelijking (IX) levert:

$$\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\varphi}} + \bar{w} + k\Big(\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x}\,\partial \bar{\varphi}^2} - \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x}^3} - \frac{3-\nu}{2}\frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{\varphi}} +$$

$$+ \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + 2\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{\varphi}^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{\varphi}^4} + 2\frac{\partial \bar{w}^2}{\partial \bar{\varphi}^2} + \bar{w}\Big) - \bar{P}_r = 0 \qquad (\underline{\overline{XXVI}})$$

$$\text{met } \bar{P}_r = \frac{R(1-\nu^2)}{E \cdot t} P_r$$

Het stelsel vergelijkingen: $(\underline{\overline{XXIV}})$, $(\underline{\overline{XXV}})$ en $(\underline{\overline{XXVI}})$ is een stelsel van drie differentiaalvergelijkingen in drie onbekenden: $\bar{u}$, $\bar{v}$ en $\bar{w}$.
Wanneer $\bar{P}_x$, $\bar{P}_\varphi$ en $\bar{P}_r$ als functie van $\bar{x}$ en $\bar{\varphi}$ bekend zijn kunnen $\bar{u}$, $\bar{v}$, en $\bar{w}$ in principe als functie van $\bar{x}$ en $\bar{\varphi}$ bepaald worden met behulp van de randvoorwaarden.
In het algemeen bestaan $\bar{u}(\bar{x},\bar{\varphi})$, $\bar{v}(\bar{x},\bar{\varphi})$ en $\bar{w}(\bar{x},\bar{\varphi})$ uit een combinatie van de oplossing van het homogene deel der differentiaalvergelijkingen en een particuliere oplossing.

De oplossing van het homogene deel geven we aan met index H, de particuliere oplossing met index P.

$$\bar{u} = \bar{u}_H + \bar{u}_P$$
$$\bar{v} = \bar{v}_H + \bar{v}_P$$
$$\bar{w} = \bar{w}_H + \bar{w}_P$$

5.4. Het homogene gedeelte der differentiaalvergelijkingen.

De differentiaalvergelijkingen zijn lineair, want ze hebben constante coëfficienten.
Twee verschillende oplossingen kunnen we dan ook superponeren.

Wanneer we rekening houden met de symmetrie ten opzichte van het vlak $\bar{\varphi}=0$ kunnen we schrijven:

$$\bar{u}_H = \bar{u}_{0H} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_{mH} \cos m\bar{\varphi} \qquad \bar{u}_{0H} = \bar{u}_{0H}(\bar{x}) \quad \bar{u}_{mH} = \bar{u}_{mH}(\bar{x})$$

$$\bar{v}_H = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{v}_{mH} \sin m\bar{\varphi} \qquad \bar{v}_{mH} = \bar{v}_{mH}(\bar{x})$$

$$\bar{w}_H = \bar{w}_{0H} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_{mH} \cos m\bar{\varphi} \qquad \bar{w}_{0H} = \bar{w}_{0H}(\bar{x}) \quad \bar{w}_{mH} = \bar{w}_{mH}(\bar{x})$$

We beschouwen eerst het gedeelte van deze oplossing dat onafhankelijk is $\overline{\varphi}$:

$$\overline{u} = \overline{u}_{OH}(\overline{x})$$
$$\overline{v} = 0$$
$$\overline{w} = \overline{w}_{OH}(\overline{x})$$

We substitueren deze waarden in ($\underline{XXIV}$), ($\underline{XXV}$) en ($\underline{XXVI}$) met $\overline{P}_x = \overline{P}_\varphi = \overline{P}_r = 0$

($\underline{XXIV}$) geeft : $\dfrac{d^2\overline{u}_{OH}}{d\overline{x}^2} + \nu \dfrac{d\overline{w}_{OH}}{d\overline{x}} + k\left(-\dfrac{d^3\overline{w}_{OH}}{d\overline{x}^3}\right) = 0$

($\underline{XXV}$) geeft een identiteit : $0 = 0$

($\underline{XXVI}$) geeft : $\nu \dfrac{d\overline{u}_{OH}}{d\overline{x}} + \overline{w}_{OH} + k\left(-\dfrac{d^3\overline{u}_{OH}}{d\overline{x}^3} + \dfrac{d^4\overline{w}_{OH}}{d\overline{x}^4} + \overline{w}_{OH}\right) = 0$

De twee verkregen differentiaalvergelijkingen in $\overline{u}_{OH}$ en $\overline{w}_{OH}$ zijn lineair en kunnen worden opgelost door de volgende exponentiële functies:

$$\overline{u}_{OH} = A_0 e^{\lambda_0 \overline{x}} \qquad A_0 : \text{constante}$$

$$\overline{w}_{OH} = C_0 e^{\lambda_0 \overline{x}} \qquad C_0 : \text{constante}$$

Substitutie van deze functies in de twee differentiaalvergelijkingen geeft twee homogene vergelijkingen voor de constanten A_0 en C_0:

$$[\lambda_0^2] A_0 + [\nu\lambda_0 - k\lambda_0^3] C_0 = 0$$

$$[\nu\lambda_0 - k\lambda_0^3] A_0 + [1 + k(\lambda_0^4 + 1)] C_0 = 0$$

Voor A_0 en C_0 beiden ongelijk aan nul is het nodig dat de determinant van de coëfficienten gelijk is aan nul:

$$\begin{vmatrix} \lambda_0^2 & \nu\lambda_0 - k\lambda_0^3 \\ \nu\lambda_0 - k\lambda_0^3 & 1 + k(\lambda_0^4+1) \end{vmatrix} = 0$$

$$\longrightarrow \lambda_0^2\left[(k-k^2)\lambda_0^4 + 2k\nu\lambda_0^2 + (1+k-\nu^2)\right] = 0$$

Deze vergelijking is zonder meer op te lossen :

$\lambda_{01} = 0 \qquad \lambda_{03} = \lambda_{03}$

$\lambda_{02} = 0 \qquad \lambda_{04} = \lambda_{04}$

$\lambda_{05} = \lambda_{05}$

$\lambda_{06} = \lambda_{06}$

$$\rightarrow \quad \overline{u}_{0_H} = A_{01} + A_{02}\overline{x} + A_{03}e^{\lambda_{03}\overline{x}} + A_{04}e^{\lambda_{04}\overline{x}} + A_{05}e^{\lambda_{05}\overline{x}} + A_{06}e^{\lambda_{06}\overline{x}}$$

$$\rightarrow \quad \overline{w}_{0_H} = C_{01} + C_{02}\overline{x} + C_{03}e^{\lambda_{03}\overline{x}} + C_{04}e^{\lambda_{04}\overline{x}} + C_{05}e^{\lambda_{05}\overline{x}} + C_{06}e^{\lambda_{06}\overline{x}}$$

Er bestaat een eenvoudig verband tussen C_{01} t/m C_{06} en A_{01} t/m A_{06}

$$C_{01} = \frac{-\nu}{1+k} A_{02}$$

$$C_{02} = 0$$

$$C_{0i} = \frac{-\lambda_{0i}^2}{\nu\lambda_{0i} - k\lambda_{0i}^3} A_{0i} \qquad \text{met } i = 3 \text{ t/m } 6$$

Op de constanten A_{01} t/m A_{06} na is nu dit gedeelte van de homogene oplossing bepaald.

We beschouwen nu de algemene term uit het gedeelte van de homogene oplossing dat wel afhankelijk is van $\overline{\varphi}$:

$$\left.\begin{aligned} \overline{u} &= \overline{u}_{m_H}(\overline{x}) \cos m\overline{\varphi} \\ \overline{v} &= \overline{v}_{m_H}(\overline{x}) \sin m\overline{\varphi} \\ \overline{w} &= \overline{w}_{m_H}(\overline{x}) \cos m\overline{\varphi} \end{aligned}\right\} \quad m = 1 \ldots\ldots \infty$$

Voor elke waarde van m zoeken we nu $\overline{u}_{m_H}$, $\overline{v}_{m_H}$ en $\overline{w}_{m_H}$ als functies van $\overline{x}$, zodanig dat aan de differentiaalvergelijkingen is voldaan.

Bovenstaande formules gaan we daartoe substitueren in de vergelijkingen ($\underline{\underline{XXIV}}$), ($\underline{\underline{XXV}}$) en ($\underline{\underline{XXVI}}$) met $\overline{P}_x = \overline{P}_\varphi = \overline{P}_r = 0$.

($\underline{\underline{XXIV}}$) geeft:

$$\frac{d^2\overline{u}_{m_H}}{d\overline{x}^2} - \frac{1-\nu}{2} m^2 \overline{u}_{m_H} + \frac{1+\nu}{2} m \frac{d\overline{v}_{m_H}}{d\overline{x}} + \nu \frac{d\overline{w}_{m_H}}{d\overline{x}} +$$

$$+ k\left(-\frac{1-\nu}{2} m^2 \overline{u}_{m_H} - \frac{d^3\overline{w}_{m_H}}{d\overline{x}^3} - \frac{1-\nu}{2} m^2 \frac{d\overline{w}_{m_H}}{d\overline{x}}\right) = 0$$

($\underline{\underline{XXV}}$) geeft:

$$-\frac{1+\nu}{2} m \frac{d\overline{u}_{m_H}}{d\overline{x}} - m^2 \overline{v}_{m_H} + \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2\overline{v}_{m_H}}{d\overline{x}^2} - m\overline{w}_{m_H} +$$

$$+ k\left(\tfrac{3}{2}(1-\nu) \frac{d^2\overline{v}_{m_H}}{d\overline{x}^2} + \frac{3-\nu}{2} m \frac{d^2\overline{w}_{m_H}}{d\overline{x}^2}\right) = 0$$

($\underline{\text{XXVI}}$) geeft:

$$\nu \frac{d\bar{u}_{mH}}{d\bar{x}} + m\bar{v}_{mH} + \bar{w}_{mH} + k\left(-\frac{1-\nu}{2} m^2 \frac{d\bar{u}_{mH}}{d\bar{x}} - \frac{d^3\bar{u}_{mH}}{d\bar{x}^3} - \frac{3-\nu}{2} m \frac{d^2\bar{v}_{mH}}{d\bar{x}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{d^4\bar{w}_{mH}}{d\bar{x}^4} - 2m^2 \frac{d^2\bar{w}_{mH}}{d\bar{x}^2} + m^4 \bar{w}_{mH} - 2m^2 \bar{w}_{mH} + \bar{w}_{mH}\right) = 0$$

De drie verkregen lineaire differentiaalvergelijkingen kunnen worden opgelost door de volgende exponentiële functies:

$$\bar{u}_{mH} = A_m e^{\lambda_m \bar{x}} \qquad A_m : \text{constante}$$

$$\bar{v}_{mH} = B_m e^{\lambda_m \bar{x}} \qquad B_m : \text{constante}$$

$$\bar{w}_{mH} = C_m e^{\lambda_m \bar{x}} \qquad C_m : \text{constante}$$

Substitutie van deze formules in de vergelijkingen geeft drie homogene vergelijkingen voor de constanten A_m, B_m en C_m:

$$\left[\lambda_m^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 (1+k)\right] A_m + \left[\frac{1+\nu}{2} \lambda_m m\right] B_m + \left[\nu\lambda_m - k\left(\lambda_m^3 + \frac{1-\nu}{2} \lambda_m m^2\right)\right] C_m = 0$$

$$\left[\frac{1+\nu}{2} \lambda_m m\right] A_m + \left[-\frac{1-\nu}{2} \lambda_m^2 + m^2 - 3/2(1-\nu) k \lambda_m^2\right] B_m + \left[m - \frac{3-\nu}{2} k \lambda_m^2 m\right] C_m = 0$$

$$\left[\nu\lambda_m - k\left(\lambda_m^3 + \frac{1-\nu}{2} \lambda_m m^2\right)\right] A_m + \left[m - \frac{3-\nu}{2} k \lambda_m^2 m\right] B_m + \left[1 + k\left(\lambda_m^4 - 2\lambda_m^2 m^2 + m^4 - 2m^2 + 1\right)\right] C_m = 0$$

Voor waarden van A_m. B_m en C_m ongelijk aan nul, is het nodig dat de determinant van de coëfficienten van deze vergelijkingen gelijk is aan nul.
Dit geeft dan een vergelijking voor λ_m van de achtste graad.
Helaas is deze vergelijking niet zonder meer op te lossen.
Met behulp van numeriehe methoden zijn echter de acht wortels van deze vergelijking te bepalen.

Bij een bepaalde wortel λ_{mi} $(i = 1 \text{ t/m } 8)$ kunnen we B_{mi} en C_{mi} als functie van A_{mi} bepalen. Het verband is van de volgende vorm:

$$B_{mi} = \eta_{mi} A_{mi} \quad \text{en} \quad C_{mi} = \zeta_{mi} A_{mi}$$

η_{mi} en ζ_{mi} zijn te bepalen uit de drie vergelijkingen voor A_m, B_m en C_m door substitutie van λ_{mi}

Voor $\bar{u}_{mH}$, $\bar{v}_{mH}$ en $\bar{w}_{mH}$ vinden we dan:

$$\bar{u}_{mH} = \sum_{i=1}^{8} A_{mi} \, e^{\lambda_{mi} \bar{x}}$$

$$\bar{v}_{mH} = \sum_{i=0}^{8} \eta_{mi} A_{mi} \, e^{\lambda_{mi} \bar{x}}$$

$$\bar{w}_{mH} = \sum_{i=0}^{8} \zeta_{mi} A_{mi} \, e^{\lambda_{mi} \bar{x}}$$

Door sommatie van deze formules over m en door combinatie met het gedeelte van de homogene oplossing, dat onafhankelijk was van φ, vinden we de totale homogene oplossing:

$$\bar{u}_H = A_{01} + A_{02}\bar{x} + \sum_{j=3}^{6} A_{0j} e^{\lambda_{0j}\bar{x}} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{8} A_{mi} e^{\lambda_{mi}\bar{x}} \right\} \cos m\varphi$$

$$\bar{v}_H = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{8} \eta_{mi} A_{mi} e^{\lambda_{mi}\bar{x}} \right\} \sin m\varphi$$

$$\bar{w}_H = \frac{-\nu}{1+k} A_{02} + \sum_{j=3}^{6} \frac{-\lambda_{0j}^{2} A_{0j}}{\nu\lambda_{0j} - k\,\lambda_{0j}^{3}} e^{\lambda_{0j}\bar{x}} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{8} \zeta_{mi} A_{mi} e^{\lambda_{mi}\bar{x}} \right\} \cos m\varphi$$

In deze vergelijkingen komen de nog onbekende: A_{0j} met $j = 1$ t/m 6 en A_{mi} met $i = 1$ t/m 8, $m = 1$ t/m ∞ voor.
Deze constanten zullen bepaald moeten worden met behulp van de randvoorwaarden.

Voordat we dit kunnen doen is het nodig dat we de particuliere oplossing eveneens kennen, omdat uiteraard de totale oplossing: $\bar{u}_H + \bar{u}_P$, $\bar{v}_H + \bar{v}_P$, $\bar{w}_H + \bar{w}_P$ aan de randvoorwaarden moet voldoen.

We gaan nu dus de particuliere oplossing beschouwen.

5.5. De particuliere oplossing

Het is eenvoudig een particuliere oplossing te vinden wanneer we de gegeven oppervlakte belasting : $\overline{P_x}$, $\overline{P_\varphi}$ en $\overline{P_r}$ ontwikkelen in een Fourierreeks.

Gebruik makend van de symmetrie ten opzichte van het vlak $\overline{\varphi}=0$ en het vlak $\overline{x}=0$ kunnen we schrijven:

$$\overline{P_x} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_{xon}} \sin \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_{xmn}} \cos m\overline{\varphi} \sin \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

$$\overline{P_\varphi} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{P_{\varphi mn}} \sin m\overline{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

$$\overline{P_r} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{P_{ron}} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{P_{rmn}} \cos m\overline{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

met $\overline{P_{xon}}$, $\overline{P_{ron}}$, $\overline{P_{xmn}}$, $\overline{P_{\varphi mn}}$, $\overline{P_{rmn}}$ bekende constanten

Als oplossing voor $\overline{u_p}$, $\overline{v_p}$ en $\overline{w_p}$ proberen we:

$$\overline{u_p} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_{onp} \sin \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_{mnp} \cos m\overline{\varphi} \sin \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

$$\overline{v_p} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{v}_{mnp} \sin m\overline{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

$$\overline{w_p} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{W}_{onp} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{W}_{mnp} \cos m\overline{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

We beschouwen eerst het gedeelte van de particuliere oplossing, onafhankelijk van $\overline{\varphi}$ met $n=0$

$$\rightarrow \overline{P_x} = 0 \qquad \overline{P_\varphi} = 0 \qquad \overline{P_r} = \overline{P_{roo}} \qquad \text{met} \qquad \overline{u} = 0 \qquad \overline{v} = 0 \qquad \overline{w} = \overline{W}_{oop}$$

Substitutie hiervan in ($\underline{\overline{XXIV}}$), ($\underline{\overline{XXV}}$) en ($\underline{\overline{XXVI}}$) geeft respectievelijk:

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\overline{P_{roo}} = [1+k]\overline{W}_{oop} \longrightarrow \overline{W_{oop}} = \frac{\overline{P_{roo}}}{1+k}$$

We beschouwen nu hetzelfde gedeelte voor alle andere waarden van n.
Daaruit nemen we de algemene term.

$$\overline{P_x} = \overline{P}_{xon} \sin \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} \qquad \text{voor} \quad n = 1 \ldots\ldots \infty$$

$$\overline{P_\varphi} = 0$$

$$\overline{P_r} = \overline{P}_{ron} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} \qquad \text{voor} \quad n = 1 \ldots\ldots \infty$$

Als oplossing hoort daarbij: $\overline{u} = \overline{u}_{onp} \sin \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$

$$\overline{v} = 0$$

$$\overline{w} = \overline{w}_{onp} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

Substitutie geeft respectievelijk:

$$\overline{P}_{xon} = \left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 \right] \overline{u}_{onp} + \left[\gamma \left(\frac{2\pi R}{L}\right) n + k \left(\frac{2\pi R}{L}\right)^3 n^3 \right] \overline{w}_{onp}$$

$$0 = 0$$

$$\overline{P}_{ron} = \left[\gamma \left(\frac{2\pi R}{L}\right) n + k \left(\frac{2\pi R}{L}\right)^3 n^3 \right] \overline{u}_{onp} + \left[1 + k \left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4 + k \right] \overline{w}_{onp}$$

Hieruit zijn $\overline{w}_{onp}$ en $\overline{u}_{onp}$ op te lossen, voor $n = 1 \ldots\ldots \infty$.

We bekijken nu het gedeelte van de particuliere oplossing dat wel afhankelijk is van $\overline{\varphi}$ met $n = 0$.
Daaruit nemen we weer de algemene term:

$$\overline{P_x} = 0$$

$$\overline{P_\varphi} = \overline{P}_{\varphi mo} \sin m\overline{\varphi} \qquad m = 1 \ldots\ldots \infty$$

$$\overline{P_r} = \overline{P}_{rmo} \cos m\overline{\varphi} \qquad m = 1 \ldots\ldots \infty$$

De hierbij behorende oplossing is:

$$\overline{u} = 0$$

$$\overline{v} = \overline{v}_{mop} \sin m\overline{\varphi}$$

$$\overline{w} = \overline{w}_{mop} \cos m\overline{\varphi}$$

Substitutie in de differentiaalvergelijkingen geeft respectievelijk:

$$0 = 0$$

$$\overline{P_{\varphi_{m0}}} = [m^2]\,\overline{V_{m0p}} + [m]\,\overline{W_{m0p}}$$

$$\overline{P_{r_{m0}}} = [m]\,\overline{V_{m0p}} + [1 + km^4 - 2km^2 + k]\,\overline{W_{m0p}}$$

Voor $m = 1 \dots \infty$ zijn hieruit eenvoudig $\overline{W_{m0p}}$ en $\overline{V_{m0p}}$ op te lossen.

Tenslotte bekijken we betreffende gedeelte van de particuliere oplossing voor alle andere waarden van n, die zijn toegelaten:

De algemene term is:

$$\overline{P_x} = \overline{P_{x_{mn}}} \cos m\overline{\varphi} \sin \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} \qquad \begin{matrix} m = 1 \dots \infty \\ n = 1 \dots \infty \end{matrix}$$

$$\overline{P_\varphi} = \overline{P_{\varphi_{mn}}} \sin m\overline{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} \qquad \begin{matrix} m = 1 \dots \infty \\ n = 1 \dots \infty \end{matrix}$$

$$\overline{P_r} = \overline{P_{r_{mn}}} \cos m\overline{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} \qquad \begin{matrix} m = 1 \dots \infty \\ n = 1 \dots \infty \end{matrix}$$

het hierbij horend gedeelte van de oplossing is:

$$\overline{u} = \overline{u_{mnp}} \cos m\overline{\varphi} \sin \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

$$\overline{v} = \overline{V_{mnp}} \sin m\overline{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

$$\overline{w} = \overline{W_{mnp}} \cos m\overline{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

Dit gaan we weer substitueren in de differentiaalvergelijkingen: ($\underline{\underline{XXIV}}$), ($\underline{\underline{XXV}}$) en ($\underline{\underline{XXVI}}$).

($\underline{\underline{XXIV}}$) geeft:

$$\overline{P_{x_{mn}}} = \left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + \frac{1-\nu}{2} m^2 (1+k)\right]\overline{u_{mnp}} + \left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right) mn\right]\overline{V_{mnp}} +$$

$$\left[\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right)n + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^3 n^3 - k\cdot\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right) nm^2\right]\overline{W_{mnp}}$$

($\underline{\overline{XXV}}$) geeft:

$$\overline{P}_{\varphi_{mn}} = \left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)nm\right]\overline{u}_{mnp} + \left[m^2 + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2(1+3k)\right]\overline{V}_{mnp} + \left[m + \frac{3-\nu}{2}k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m\right]\overline{W}_{mnp}$$

($\underline{\overline{XXVI}}$) geeft:

$$\overline{P}_{r_{mn}} = \left[\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right)n - k\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)nm^2 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^3 n^3\right]\overline{u}_{mnp} + \left[m + k\frac{3-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m\right]\overline{V}_{mnp} +$$

$$+ \left[1 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4 + 2k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m^2 + km^4 - 2km^2 + k\right]\overline{W}_{mnp}$$

Uit deze drie vergelijkingen zijn $\overline{u}_{mnp}$, $\overline{V}_{mnp}$ en $\overline{W}_{mnp}$ op te lossen voor elke toegelaten waarde van m en n.

De totale particuliere oplossing is hiermede dus bekend.

We schrijven deze iets anders:

$$\overline{u}_p = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_{onp} \sin\frac{2\pi R}{L}n\overline{x} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_{mnp} \cos m\overline{\varphi} \sin\frac{2\pi R}{L}n\overline{x}$$

$$\overline{V}_p = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{V}_{mnp} \sin m\overline{\varphi} \cos\frac{2\pi R}{L}n\overline{x}$$

$$\overline{W}_p = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{W}_{onp} \cos\frac{2\pi R}{L}n\overline{x} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{W}_{mnp} \cos m\overline{\varphi} \cos\frac{2\pi R}{L}n\overline{x}$$

ofwel:

$$\overline{u}_p = \overline{u}_{op} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u}_{mp} \cos m\overline{\varphi}$$

met $\overline{u}_{op} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_{onp} \sin\frac{2\pi R}{L}n\overline{x}$ en $\overline{u}_{mp} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_{mnp} \sin\frac{2\pi R}{L}n\overline{x}$

$\overline{V}_p = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{V}_{mp} \sin m\overline{\varphi}$ met $\overline{V}_{mp} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{V}_{mnp} \cos\frac{2\pi R}{L}n\overline{x}$

$$\overline{W}_p = \overline{W}_{op} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{W}_{mp} \cos m\overline{\varphi}$$

met $\overline{W}_{op} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{W}_{onp} \cos\frac{2\pi R}{L}n\overline{x}$ en $\overline{W}_{mp} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{W}_{mnp} \cos\frac{2\pi R}{L}n\overline{x}$

Ook de homogene oplossing schrijven we in een dergelijke vorm: de oorspronkelijke vorm:

$$\overline{u}_H = \overline{u}_{oH} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u}_{mH} \cos m\varphi$$

$$\text{met} \quad \overline{u}_{oH} = A_{o1} + A_{o2}\overline{x} + \sum_{j=3}^{6} A_{oj}\, e^{\lambda_{oj}\overline{x}}$$

$$\text{en} \quad \overline{u}_{mH} = \sum_{i=1}^{8} A_{mi}\, e^{\lambda_{mi}\overline{x}}$$

$$\overline{v}_H = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{v}_{mH} \sin m\varphi$$

$$\text{met} \quad \overline{v}_{mH} = \sum_{i=1}^{8} \eta_{mi} A_{mi}\, e^{\lambda_{mi}\overline{x}}$$

$$\overline{w}_H = \overline{w}_{oH} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{w}_{mH} \cos m\varphi$$

$$\text{met} \quad \overline{w}_{oH} = \frac{-\nu}{1+k} A_{o2} + \sum_{j=3}^{6} \frac{-\lambda_{oj}^2 A_{oj}}{\nu\lambda_{oj} - k\lambda_{oj}^3}\, e^{\lambda_{oj}\overline{x}}$$

$$\overline{w}_{mH} = \sum_{i=1}^{8} \zeta_{mi} A_{mi}\, e^{\lambda_{mi}\overline{x}}$$

Als totale oplossing vinden we dan:

$$\overline{u} = \overline{u}_H + \overline{u}_p = (\overline{u}_{oH} + \overline{u}_{op}) + \sum_{m=1}^{\infty} (\overline{u}_{mH} + \overline{u}_{mp}) \cos m\varphi$$

$$\overline{v} = \overline{v}_H + \overline{v}_p = \sum_{m=1}^{\infty} (\overline{v}_{mH} + \overline{v}_{mp}) \sin m\varphi$$

$$\overline{w} = \overline{w}_H + \overline{w}_p = (\overline{w}_{oH} + \overline{w}_{op}) + \sum_{m=1}^{\infty} (\overline{w}_{mH} + \overline{w}_{mp}) \cos m\varphi$$

Deze totale oplossing moet voldoen aan de randvoorwaarden. Aan beide zijden van de koker, m.a.w. voor $x = \pm l/2$ kunnen we eisen stellen, òf aan de verplaatsingen, òf aan de snedegrootheden, òf aan een combinatie van beiden.

Voordat we de randvoorwaarden gaan beschouwen zullen we eerst een vereenvoudigd systeem construeren, door het doen van enige verwaarlozingen, die de berekeningen aanzienlijk zullen vereenvoudigen.

5.6. Het vereenvoudigde systeem.

We kunnen een vereenvoudigd systeem verkrijgen door gebruik te maken van het feit dat de wanddikte t van de koker te verwaarlozen is ten opzichte van de straal R, ofwel $t/R \ll 1$.

We voeren dit in de formules (XI), (XII) en (XIII) en bij de substitutie van deze formules ter verkrijging van de snedegrootheden.

We krijgen dan:

$$N_x = D\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{R}w\right)$$

$$N_\varphi = D\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R}\right)$$

$$N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = D\,\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$M_x = K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$M_\varphi = K\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$M_{x\varphi} = M_{\varphi x} = K(1-\nu)\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \varphi}\right)$$

Met behulp van (IV) en (V) bepalen we Q_x en Q_φ

$$Q_x = K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial \varphi^2}\right)$$

$$Q_\varphi = K\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial \varphi} + \frac{1}{R^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3}\right)$$

Het is jammer dat door het invoeren van deze vereenvoudigingen niet meer is voldaan aan de zesde evenwichtsvergelijking (VI) omdat er geen verschil meer is tussen $N_{x\varphi}$ en $N_{\varphi x}$. We mogen in het algemeen tenminste niet aannemen dat $M_{\varphi x}$ gelijk is aan nul.
In het algemeen zullen kleine veranderingen van $N_{x\varphi}$ en $N_{\varphi x}$ voldoende zijn om het evenwicht te handhaven.

Ondanks dit nadeel zullen we gewoon verder gaan met de vereenvoudigde theorie zonder dieper in te gaan op eventuele consequenties.

De drie differentiaalvergelijkingen in u, v en w krijgen we nu door substitutie van bovenstaande formules in (VII), (VIII) en (IX).

(VII) levert wanneer we de formules dimensieloos maken:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}\partial \varphi} + \nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{p}_x = 0$$

(VIII) levert op dezelfde wijze:

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi} - k\left(\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \varphi^3}\right) + \bar{p}_\varphi = 0$$

(IX) geeft zo:

$$\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \bar{w} + k\left(\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + 2\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \varphi^4}\right) - \bar{p}_r = 0$$

Wanneer we de tweede vergelijking vergelijken met de erbij behorende exacte vergelijking, zien we dat de buigingsterm (met k) aanzienlijk is gewijzigd. Deze buigingsterm kan daarom niet belangrijk zijn en we zullen hem dan ook in deze vergelijking verwaarlozen.

De uiteindelijke vorm voor de drie differentiaal vergelijkingen in u, v en w wordt dan:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}\partial \varphi} + \nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{p}_x = 0 \qquad (\underline{XXVII})$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi} + \bar{p}_\varphi = 0 \qquad (\underline{XXVIII})$$

$$\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \bar{w} + k\left(\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + 2\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \varphi^4}\right) - \bar{p}_r = 0 \qquad (\underline{XXIX})$$

We gaan nu op dezelfde wijze te werk als bij het niet vereenvoudigde systeem, met andere woorden: we bepalen respectievelijk de homogene en de particuliere oplossing.
De totale oplossing wordt dan:

$$\bar{u} = \bar{u}_H + \bar{u}_P$$

$$\bar{v} = \bar{v}_H + \bar{v}_P$$

$$\bar{w} = \bar{w}_H + \bar{w}_P$$

5.7. De homogene oplossing.

We kunnen weer schrijven als oplossing:

$$\bar{u}_H = \bar{u}_{oH} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_{mH} \cos m\varphi \qquad \bar{u}_{oH} = \bar{u}_{oH}(\bar{x}) \qquad \bar{u}_{mH} = \bar{u}_{mH}(\bar{x})$$

$$\bar{v}_H = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{v}_{mH} \sin m\varphi \qquad \bar{v}_{mH} = \bar{v}_{mH}(\bar{x})$$

$$\bar{w}_H = \bar{w}_{oH} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_{mH} \cos m\varphi \qquad \bar{w}_{oH} = \bar{w}_{oH}(\bar{x}) \qquad \bar{w}_{mH} = \bar{w}_{mH}(\bar{x})$$

Allereerst beschouwen we het gedeelte van deze oplossing dat onafhankelijk is van φ en daartoe substitueren we in ($\overline{\underline{XXVII}}$), ($\overline{\underline{XXVIII}}$) en ($\overline{\underline{XXIX}}$) met $\bar{P}_x = \bar{P}_\varphi = \bar{P}_r = 0$ de volgende functies:

$$\bar{u} = \bar{u}_{oH}$$
$$\bar{v} = 0$$
$$\bar{w} = \bar{w}_{oH}$$

($\overline{\underline{XXVII}}$) geeft: $$\frac{d^2\bar{u}_{oH}}{d\bar{x}^2} + \nu \frac{d\bar{w}_{oH}}{d\bar{x}} = 0$$

($\overline{\underline{XXVIII}}$) geeft een identiteit: $0 = 0$

($\overline{\underline{XXIX}}$) geeft: $$\nu \frac{d\bar{u}_{oH}}{d\bar{x}} + w_{oH} + k \frac{d^4\bar{w}_{oH}}{d\bar{x}^4} = 0$$

De twee verkregen differentiaalvergelijkingen in $\bar{u}_{oH}$ en $\bar{w}_{oH}$ zijn lineair en kunnen worden opgelost door:

$$\bar{u}_{oH} = A_o e^{\lambda_o \bar{x}} \qquad A_o : \text{constante.}$$

$$\bar{w}_{oH} = C_o e^{\lambda_o \bar{x}} \qquad C_o : \text{constante.}$$

Substitutie in de differentiaalvergelijkingen geeft twee homogene vergelijkingen voor A_o en C_o, die alleen een niet triviale oplossing hebben als aan de karakteristieke vergelijking is voldaan:

$$\begin{vmatrix} \lambda_o^2 & \nu\lambda_o \\ \nu\lambda_o & 1 + k\lambda_o^4 \end{vmatrix} = 0$$

$$k\lambda_0^{\,6} + (1-\nu^2)\lambda_0^{\,2} = 0$$

$\lambda_{01} = 0$

$\lambda_{02} = 0$

λ_{03} t/m λ_{06} zijn te berekenen uit:

$$\lambda_0^{\,4} + \frac{1-\nu^2}{k} = 0 \qquad \text{ofwel.}$$

$$\lambda_0^{\,4} + \mu^4 = 0 \qquad \text{met} \quad \mu = \sqrt[4]{\frac{1-\nu^2}{k}}$$

$$\lambda_0^{\,4} = \mu^4 \cdot e^{(2l+1)\pi i} \qquad l = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

$$\lambda_0 = \mu\, e^{\frac{(2l+1)\pi i}{4}} \qquad l = 0, 1, 2, 3$$

$$\lambda_{03} = \mu/\sqrt{2} \cdot (1+i)$$

$$\lambda_{04} = \mu/\sqrt{2} \cdot (1-i)$$

$$\lambda_{05} = \mu/\sqrt{2} \cdot (-1+i)$$

$$\lambda_{06} = \mu/\sqrt{2} \cdot (-1-i)$$

$$\overline{u}_{0H} = A_{01} + A_{02}\overline{x} + e^{\mu/\sqrt{2}\,\overline{x}}\left(A_{03}e^{\frac{i\mu\overline{x}}{\sqrt{2}}} + A_{04}e^{\frac{-i\mu\overline{x}}{\sqrt{2}}}\right) + $$

$$+ e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}}\left(A_{05}e^{\frac{i\mu\overline{x}}{\sqrt{2}}} + A_{06}e^{-\frac{i\mu\overline{x}}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$\overline{w}_{0H} = C_{01} + C_{02}\overline{x} + e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}}\left(C_{03}e^{\frac{i\mu\overline{x}}{\sqrt{2}}} + C_{04}e^{-\frac{i\mu\overline{x}}{\sqrt{2}}}\right) +$$

$$+ e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}}\left(C_{05}e^{\frac{i\mu\overline{x}}{\sqrt{2}}} + C_{06}e^{\frac{-i\mu\overline{x}}{\sqrt{2}}}\right)$$

Het verband tussen A_{0i} en C_{0i} wordt:

$C_{01} = -\nu A_{02}$

$C_{02} = 0$

$$C_{0i} = \frac{-\lambda_{0i}}{\nu} A_{0i} \qquad \text{voor} \quad i = 3 \text{ t/m } 6$$

We bekijken alleen kokers, die volkomen symmetrisch zijn ten opzichte van het vlak $\bar{x} = 0$, zowel in vorm, in ondersteuning en in belasting.

$$\rightarrow \quad \bar{u}_{0H}(\bar{x}_1) = - \bar{u}_{0H}(-\bar{x}_1) \text{ voor alle } \bar{x}_1$$

$$\rightarrow \quad A_{01} = 0$$

$$A_{03} = -A_{06} \quad \rightarrow \quad C_{03} = C_{06}$$

$$A_{04} = -A_{05} \quad \rightarrow \quad C_{04} = C_{05}$$

Het onderlinge verband tussen de C_{0i} blijkt ook wanneer we weer de symmetrie beschouwen, nl uit:

$$\bar{W}_{0H}(\bar{x}_1) = W_{0H}(-\bar{x}_1) \text{ voor alle } \bar{x}_1$$

Het resultaat van de symmetriebeschouwing is:

$$\bar{u}_{0H} = A_{02}\bar{x} + e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\left(A_{03}e^{i\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}} + A_{04}e^{-i\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\right) + \\ - e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\left(A_{04}e^{i\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}} + A_{03}e^{-i\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\right)$$

$$\bar{w}_{0H} = -\nu A_{02} + e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\left(\frac{-\mu(1+i)A_{03}}{\nu\sqrt{2}}e^{i\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}} + \frac{-\mu(1-i)A_{04}}{\nu\sqrt{2}}e^{-i\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\right) + \\ + e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\left(\frac{-\mu(1-i)A_{04}}{\nu\sqrt{2}}e^{i\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}} + \frac{-\mu(1+i)A_{03}}{\nu\sqrt{2}}e^{-i\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\right)$$

Wanneer bij de berekeningen eventueel een computer ingeschakeld moet worden kunnen we met deze complexe schrijfwijze niets beginnen.

We definieren daarom:

$$a_{01} = A_{02}$$

$$a_{02} = A_{03} + A_{04}$$

$$a_{03} = (A_{03} - A_{04})\, i$$

Hiermede:

$$\bar{u}_{0H} = a_{01}\bar{x} + e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\left(a_{02}\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x} + a_{03}\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}\right) +$$
$$+ e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\left(-a_{02}\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x} + a_{03}\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}\right)$$

$$\bar{w}_{0H} = -\nu a_{01} + \frac{\mu}{\gamma\sqrt{2}} e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\left((-a_{02}-a_{03})\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x} + (a_{02}-a_{03})\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}\right) +$$
$$+ \frac{\mu}{\gamma\sqrt{2}} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\left((-a_{02}-a_{03})\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x} + (-a_{02}+a_{03})\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}\right)$$

Het gedeelte van de homogene oplossing, dat onafhankelijk is van $\bar{\varphi}$, hebben we nu in de vorm waarin we hem willen hebben.

Van de rest van de homogene oplossing substitueren we de algemene term in de differentiaalvergelijkingen. We substitueren dus:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_{mH}(\bar{x})\cos m\bar{\varphi} \\ \bar{v} &= \bar{v}_{mH}(\bar{x})\sin m\bar{\varphi} \\ \bar{w} &= \bar{w}_{mH}(\bar{x})\cos m\bar{\varphi} \end{aligned}\right\} m = 1 \ldots\ldots \infty$$

($\underline{\overline{XXVII}}$) geeft: $\frac{d^2\bar{u}_{mH}}{d\bar{x}^2} - \frac{1-\nu}{2}m^2\bar{u}_{mH} + \frac{1+\nu}{2}m\frac{d\bar{v}_{mH}}{d\bar{x}} + \nu\frac{d\bar{w}_{mH}}{d\bar{x}} = 0$

($\underline{\overline{XXVIII}}$) geeft: $-\frac{1+\nu}{2}m\frac{d\bar{u}_{mH}}{d\bar{x}} - m^2\bar{v}_{mH} + \frac{1-\nu}{2}\frac{d^2\bar{v}_{mH}}{d\bar{x}^2} - m\bar{w}_{mH} = 0$

($\underline{\overline{XXIX}}$) geeft: $\nu\frac{d\bar{u}_{mH}}{d\bar{x}} + m\bar{v}_{mH} + \bar{w}_{mH} + k\left(\frac{d^4\bar{w}_{mH}}{d\bar{x}^4} - 2m^2\frac{d^2\bar{w}_{mH}}{d\bar{x}^2} + m^4\bar{w}_{mH}\right) = 0$

De verkregen differentiaalvergelijkingen zijn lineair en kunnen worden opgelost door de volgende exponentiële functies:

$\bar{u}_{mH} = A_m e^{\lambda_m\bar{x}}$ A_m: constante

$\bar{v}_{mH} = B_m e^{\lambda_m\bar{x}}$ B_m: constante

$\bar{w}_{mH} = C_m e^{\lambda_m\bar{x}}$ C_m: constante

De karakteristieke vergelijking (8^{ste} machts vergelijking in λ_m) wordt dan:

$$\begin{vmatrix} (\lambda_m^2 - \frac{1-\nu}{2}m^2) & (\frac{1+\nu}{2}m\lambda_m) & (\nu\lambda_m) \\ (-\frac{1+\nu}{2}\lambda_m m) & (-m^2 + \frac{1-\nu}{2}\lambda_m^2) & (-m) \\ (\nu\lambda_m) & (m) & (1 + k\lambda_m^4 - 2km^2\lambda_m^2 + km^4) \end{vmatrix} = 0$$

Ofwel:

$$\left(\lambda_m^2-\frac{1-\nu}{2}m^2\right)\left(\frac{1-\nu}{2}\lambda_m^2\right)+\left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2\lambda_m^2 m^2-\frac{1+\nu}{2}\nu\lambda_m^2 m^2-\frac{1+\nu}{2}\nu\lambda_m^2 m^2+$$

$$-\nu^2\lambda_m^2\left(-m^2+\frac{1-\nu}{2}\lambda_m^2\right)+k\left(\lambda_m^4-2m^2\lambda_m^2+m^4\right)\left\{\left(\lambda_m^2-\frac{1-\nu}{2}m^2\right)\left(\frac{1-\nu}{2}\lambda_m^2-m^2\right)+\left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2\lambda_m^2 m^2\right\}=0$$

$$\longrightarrow\quad (1-\nu^2)\lambda_m^4+k\left(\lambda_m^2-m^2\right)^4=0$$

Deze vergelijking is goed oplosbaar.

$$\left(\frac{1-\nu^2}{k}\right)\lambda_m^4=-\left(\lambda_m^2-m^2\right)^4$$

Stel: $\mu=\sqrt[4]{\frac{1-\nu^2}{k}}$ (positief) $\longrightarrow$ $(\mu\lambda_m)^4=-(\lambda_m^2-m^2)^4$

$$\longrightarrow\quad \mu\lambda_m=(\lambda_m^2-m^2)\,e^{i\frac{(2l+1)\pi}{4}}\qquad \text{met } l=0,1,2,3$$

$$\mu\lambda_m=(\lambda_m^2-m^2)(\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2})(1\pm i)$$

$$\lambda_m^2-\frac{\mu}{\frac{1}{2}\sqrt{2}(\pm 1\pm i)}\lambda_m-m^2=0$$

Wanneer we stellen:

$$\varkappa_m=\sqrt{2m^2+\tfrac{1}{2}\sqrt{16m^4+\mu^4}}=\sqrt{2m^2+\sqrt{4m^4+\frac{1-\nu^2}{4k}}}$$

geldt:

$$\lambda_{m_1}=\tfrac14\mu\sqrt{2}+\tfrac12\varkappa_m+i\left(\tfrac14\mu\sqrt{2}+\tfrac14\mu^2/\varkappa_m\right)$$

$$\lambda_{m_2}=\tfrac14\mu\sqrt{2}+\tfrac12\varkappa_m-i\left(\tfrac14\mu\sqrt{2}+\tfrac14\mu^2/\varkappa_m\right)$$

$$\lambda_{m_3}=-\tfrac14\mu\sqrt{2}-\tfrac12\varkappa_m+i\left(\tfrac14\mu\sqrt{2}+\tfrac14\mu^2/\varkappa_m\right)$$

$$\lambda_{m_4}=-\tfrac14\mu\sqrt{2}-\tfrac12\varkappa_m-i\left(\tfrac14\mu\sqrt{2}+\tfrac14\mu^2/\varkappa_m\right)$$

$$\lambda_{m_5}=\tfrac14\mu\sqrt{2}-\tfrac12\varkappa_m+i\left(\tfrac14\mu\sqrt{2}-\tfrac14\mu^2/\varkappa_m\right)$$

$$\lambda_{m_6}=\tfrac14\mu\sqrt{2}-\tfrac12\varkappa_m-i\left(\tfrac14\mu\sqrt{2}-\tfrac14\mu^2/\varkappa_m\right)$$

$$\lambda_{m_7}=-\tfrac14\mu\sqrt{2}+\tfrac12\varkappa_m+i\left(\tfrac14\mu\sqrt{2}-\tfrac14\mu^2/\varkappa_m\right)$$

$$\lambda_{m_8}=-\tfrac14\mu\sqrt{2}+\tfrac12\varkappa_m-i\left(\tfrac14\mu\sqrt{2}-\tfrac14\mu^2/\varkappa_m\right)$$

De vorm waarin de λ_m's nu zijn geschreven ziet er nogal ingewikkeld uit. Door het invoeren van enige constanten zullen we deze vorm vereenvoudigen:

$$\psi_{m_1} = \tfrac{1}{4}\mu\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\varkappa_m = \tfrac{1}{4}\sqrt[4]{4\cdot\frac{1-\nu^2}{k}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2m^2+\sqrt{4m^4+\frac{1-\nu^2}{4k}}}$$

$$\psi_{m_2} = \tfrac{1}{4}\mu\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\varkappa_m = \tfrac{1}{4}\sqrt[4]{4\,\frac{1-\nu^2}{k}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2m^2+\sqrt{4m^4+\frac{1-\nu^2}{4k}}}$$

$$\omega_{m_1} = \tfrac{1}{4}\mu\sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\mu^2/\varkappa_m = \tfrac{1}{4}\sqrt[4]{4\,\frac{1-\nu^2}{k}} + \frac{\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{k}}}{\sqrt{2m^2+\sqrt{4m^4+\frac{1-\nu^2}{4k}}}}$$

$$\omega_{m_2} = \tfrac{1}{4}\mu\sqrt{2} - \tfrac{1}{4}\mu^2/\varkappa_m = \tfrac{1}{4}\sqrt[4]{4\,\frac{1-\nu^2}{k}} - \frac{\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{k}}}{\sqrt{2m^2+\sqrt{4m^4+\frac{1-\nu^2}{4k}}}}$$

Hiermee:

$$\lambda_{m_1} = \psi_{m_1} + i\omega_{m_1} \qquad \lambda_{m_5} = \psi_{m_2} + i\omega_{m_2}$$

$$\lambda_{m_2} = \psi_{m_1} - i\omega_{m_1} \qquad \lambda_{m_6} = \psi_{m_2} - i\omega_{m_2}$$

$$\lambda_{m_3} = -\psi_{m_1} + i\omega_{m_1} \qquad \lambda_{m_7} = -\psi_{m_2} + i\omega_{m_2}$$

$$\lambda_{m_4} = -\psi_{m_1} - i\omega_{m_1} \qquad \lambda_{m_8} = -\psi_{m_2} - i\omega_{m_2}$$

We kennen nu de λ_m's uit de karakteristieke vergelijking.

Voor elke λ_m: λ_{m_i} bestaat er een verband tussen A_{m_i}, B_{m_i} en C_{m_i} zoals reeds was aangegeven bij de niet vereenvoudigde theorie.

$$B_{m_i} = \eta_{m_i} A_{m_i} \quad \text{en} \quad C_{m_i} = \xi_{m_i} A_{m_i}$$

Dit verband zullen we nu vastleggen:

$$\left(\lambda_{m_i}^2 - \frac{1-\nu}{2}m^2\right)A_{m_i} + \left(\frac{1+\nu}{2}m\lambda_{m_i}\right)B_{m_i} + (\nu\lambda_{m_i})C_{m_i} = 0$$

$$\left(-\frac{1+\nu}{2}\lambda_{m_i}m\right)A_{m_i} + \left(-m^2 + \frac{1-\nu}{2}\lambda_{m_i}^2\right)B_{m_i} + (-m)C_{m_i} = 0$$

$$(\nu\lambda_{m_i})A_{m_i} + (m)B_{m_i} + \left(1 + k\lambda_{m_i}^4 - 2km^2\lambda_{m_i}^2 + km^4\right)C_{m_i} = 0$$

Uit de eerste twee vergelijkingen kunnen we C_{m_i} elimineren:

$$\left(\lambda_{m_i}^2 m - \frac{1-\nu}{2} m^3 - \frac{1+\nu}{2}\nu\lambda_{m_i}^2 m\right)A_{m_i} + \left(\frac{1+\nu}{2} m^2 \lambda_{m_i} - \nu\lambda_{m_i} m^2 + \frac{1-\nu}{2}\nu\lambda_{m_i}^3\right)B_{m_i} = 0$$

$$\rightarrow \quad \eta_{m_i} = \frac{B_{m_i}}{A_{m_i}} = \frac{-\lambda_{m_i}^2 m(2+\nu) + m^3}{\lambda_{m_i} m^2 + \nu\lambda_{m_i}^3}$$

Met de tweede vergelijking volgt dan:

$$C_{m_i} = \left(-\frac{1+\nu}{2}\lambda_{m_i}\right)A_{m_i} + \frac{\left(-m^2 + \frac{1-\nu}{2}\lambda_{m_i}^2\right)}{m} \cdot \frac{-\lambda_{m_i}^2 m(2+\nu) + m^3}{\lambda_{m_i} m^2 + \nu\lambda_{m_i}^3} A_{m_i}$$

$$\rightarrow \quad \zeta_{m_i} = \frac{C_{m_i}}{A_{m_i}} = \frac{-\lambda_{m_i}^4 + 2\lambda_{m_i}^2 m^2 - m^4}{\lambda_{m_i} m^2 + \nu\lambda_{m_i}^3}$$

We gaan nu de oplossingen bekijken voor $\overline{u}_{mH}$, $\overline{v}_{mH}$ en $\overline{w}_{mH}$

$$\overline{u}_{mH} = e^{\psi_{m_1}\overline{x}}\left(A_{m_1} e^{i\omega_{m_1}\overline{x}} + A_{m_2} e^{-i\omega_{m_1}\overline{x}}\right) +$$

$$+ e^{-\psi_{m_1}\overline{x}}\left(A_{m_3} e^{i\omega_{m_1}\overline{x}} + A_{m_4} e^{-i\omega_{m_1}\overline{x}}\right) +$$

$$+ e^{\psi_{m_2}\overline{x}}\left(A_{m_5} e^{i\omega_{m_2}\overline{x}} + A_{m_6} e^{-i\omega_{m_2}\overline{x}}\right) +$$

$$+ e^{-\psi_{m_2}\overline{x}}\left(A_{m_7} e^{i\omega_{m_2}\overline{x}} + A_{m_8} e^{-i\omega_{m_2}\overline{x}}\right)$$

We bekijken alleen kokers, die volkomen symmetrisch zijn ten opzichte van het vlak $\overline{x}=0$, zowel in vorm, in ondersteuning en wat de belasting betreft.

$$\rightarrow \quad \overline{u}_{mH}(\overline{x}_1) = -\overline{u}_{mH}(-\overline{x}_1) \quad \text{voor alle } \overline{x}_1$$

$\rightarrow A_{m_1} = -A_{m_4} \quad \rightarrow B_{m_1} = B_{m_4}$ en $C_{m_1} = C_{m_4}$

$A_{m_2} = -A_{m_3} \quad \rightarrow B_{m_2} = B_{m_3}$ en $C_{m_2} = C_{m_3}$

$A_{m_5} = -A_{m_8} \quad \rightarrow B_{m_5} = B_{m_8}$ en $C_{m_5} = C_{m_8}$

$A_{m_6} = -A_{m_7} \quad \rightarrow B_{m_6} = B_{m_7}$ en $C_{m_6} = C_{m_7}$

Het onderlinge verband tussen de B_{mi} en het onderlinge verband tussen C_{mi} blijkt ook wanneer we weer de symmetrie beschouwen al uit:

$$\overline{V}_{mH}(\overline{x}_1) = \overline{V}_{mH}(-\overline{x}_1) \quad \text{voor alle } \overline{x}_1$$

$$\overline{W}_{mH}(\overline{x}_1) = \overline{W}_{mH}(-\overline{x}_1) \quad \text{voor alle } \overline{x}_1$$

Resumerend krijgen we voor de oplossing van de homogene vergelijkingen, die wel afhankelijk is van $\overline{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\overline{u}_{mH} = {} & e^{\psi_{m1}\overline{x}}\left(A_{m1} e^{i\omega_{m1}\overline{x}} + A_{m2} e^{-i\omega_{m1}\overline{x}}\right) + \\ & + e^{-\psi_{m1}\overline{x}}\left(-A_{m2} e^{i\omega_{m1}\overline{x}} - A_{m1} e^{-i\omega_{m1}\overline{x}}\right) + \\ & + e^{\psi_{m2}\overline{x}}\left(A_{m5} e^{i\omega_{m2}\overline{x}} + A_{m6} e^{-i\omega_{m2}\overline{x}}\right) + \\ & + e^{-\psi_{m2}\overline{x}}\left(-A_{m6} e^{i\omega_{m2}\overline{x}} - A_{m5} e^{-i\omega_{m2}\overline{x}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{V}_{mH} = {} & e^{\psi_{m1}\overline{x}}\left(\eta_{m1} A_{m1} e^{i\omega_{m1}\overline{x}} + \eta_{m2} A_{m2} e^{-i\omega_{m1}\overline{x}}\right) + \\ & + e^{-\psi_{m1}\overline{x}}\left(\eta_{m2} A_{m2} e^{i\omega_{m1}\overline{x}} + \eta_{m1} A_{m1} e^{-i\omega_{m1}\overline{x}}\right) + \\ & + e^{\psi_{m2}\overline{x}}\left(\eta_{m5} A_{m5} e^{i\omega_{m2}\overline{x}} + \eta_{m6} A_{m6} e^{-i\omega_{m2}\overline{x}}\right) + \\ & + e^{-\psi_{m2}\overline{x}}\left(\eta_{m6} A_{m6} e^{i\omega_{m2}\overline{x}} + \eta_{m5} A_{m5} e^{-i\omega_{m2}\overline{x}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{W}_{mH} = {} & e^{\psi_{m1}\overline{x}}\left(\zeta_{m1} A_{m1} e^{i\omega_{m1}\overline{x}} + \zeta_{m2} A_{m2} e^{-i\omega_{m1}\overline{x}}\right) + \\ & + e^{-\psi_{m1}\overline{x}}\left(\zeta_{m2} A_{m2} e^{i\omega_{m1}\overline{x}} + \zeta_{m1} A_{m1} e^{-i\omega_{m1}\overline{x}}\right) + \\ & + e^{\psi_{m2}\overline{x}}\left(\zeta_{m5} A_{m5} e^{i\omega_{m2}\overline{x}} + \zeta_{m6} A_{m6} e^{-i\omega_{m2}\overline{x}}\right) + \\ & + e^{-\psi_{m2}\overline{x}}\left(\zeta_{m6} A_{m6} e^{i\omega_{m2}\overline{x}} + \zeta_{m5} A_{m5} e^{-i\omega_{m2}\overline{x}}\right)\end{aligned}$$

Wanneer we bij de berekeningen eventueel de computer nodig hebben is het bovenstaande stelsel ongeschikt voor verwerking. Daarom gaan we de schrijfwijze enigszins veranderen.

We definiëren:

$$a_{m_1} = A_{m_1} + A_{m_2}$$
$$a_{m_2} = (A_{m_1} - A_{m_2})\,i$$
$$a_{m_3} = A_{m_5} + A_{m_6}$$
$$a_{m_4} = (A_{m_5} - A_{m_6})\,i$$

Hiermee wordt $\bar{u}_{m_H}$:

$$\bar{u}_{m_H} = e^{\Psi_{m_1}\bar{x}}\left\{a_{m_1}\cos\omega_{m_1}\bar{x} + a_{m_2}\sin\omega_{m_1}\bar{x}\right\} + e^{-\Psi_{m_1}\bar{x}}\left\{-a_{m_1}\cos\omega_{m_1}\bar{x} + a_{m_2}\sin\omega_{m_1}\bar{x}\right\} +$$
$$+ e^{\Psi_{m_2}\bar{x}}\left\{a_{m_3}\cos\omega_{m_2}\bar{x} + a_{m_4}\sin\omega_{m_2}\bar{x}\right\} + e^{-\Psi_{m_2}\bar{x}}\left\{-a_{m_3}\cos\omega_{m_2}\bar{x} + a_{m_4}\sin\omega_{m_2}\bar{x}\right\}$$

We definiëren eveneens:

$$b_{m_1} = (\eta_{m_1}A_{m_1} + \eta_{m_2}A_{m_2})$$
$$b_{m_2} = (\eta_{m_1}A_{m_1} - \eta_{m_2}A_{m_2})\,i$$
$$b_{m_3} = (\eta_{m_5}A_{m_5} + \eta_{m_6}A_{m_6})$$
$$b_{m_4} = (\eta_{m_5}A_{m_5} - \eta_{m_6}A_{m_6})\,i$$

Hiermee wordt $\bar{v}_{m_H}$:

$$\bar{v}_{m_H} = e^{\Psi_{m_1}\bar{x}}\left\{b_{m_1}\cos\omega_{m_1}\bar{x} + b_{m_2}\sin\omega_{m_1}\bar{x}\right\} + e^{-\Psi_{m_1}\bar{x}}\left\{b_{m_1}\cos\omega_{m_1}\bar{x} - b_{m_2}\sin\omega_{m_1}\bar{x}\right\} +$$
$$+ e^{\Psi_{m_2}\bar{x}}\left\{b_{m_3}\cos\omega_{m_2}\bar{x} + b_{m_4}\sin\omega_{m_2}\bar{x}\right\} + e^{-\Psi_{m_2}\bar{x}}\left\{b_{m_3}\cos\omega_{m_2}\bar{x} - b_{m_4}\sin\omega_{m_2}\bar{x}\right\}$$

We kunnen $b_{m_1}, b_{m_2}, b_{m_3}$ en b_{m_4} uitdrukken in $a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}$ en a_{m_4}:

$$b_{m_1} = \eta_{m_1}A_{m_1} + \eta_{m_2}A_{m_2} = \left(\frac{\eta_{m_1}+\eta_{m_2}}{2}\right)\left(A_{m_1}+A_{m_2}\right) + \left(\frac{\eta_{m_1}-\eta_{m_2}}{2}\right)\left(A_{m_1}-A_{m_2}\right) =$$
$$= \frac{\eta_{m_1}+\eta_{m_2}}{2}\,a_{m_1} + \frac{\eta_{m_1}-\eta_{m_2}}{2i}\,a_{m_2}$$

$$\eta_{m_1} = \frac{-\lambda_{m_1}^2 m(2+\nu) + m^3}{\lambda_{m_1}m^2 + \nu\lambda_{m_1}^3} = \frac{-(\Psi_{m_1}+i\omega_{m_1})^2 m(2+\nu) + m^3}{(\Psi_{m_1}+i\omega_{m_1})m^2 + \nu(\Psi_{m_1}+i\omega_{m_1})^3}$$

$$\eta_{m_2} = \frac{-\lambda_{m_2}^2 m(2+\nu) + m^3}{\lambda_{m_2}m^2 + \nu\lambda_{m_2}^3} = \frac{-(\Psi_{m_1}-i\omega_{m_1})^2 m(2+\nu) + m^3}{(\Psi_{m_1}-i\omega_{m_1})m^2 + \nu(\Psi_{m_1}-i\omega_{m_1})^3}$$

$$\frac{\eta_{m_1}+\eta_{m_2}}{2} = \frac{1}{2(\psi_{m_1}+i\omega_{m_1})(\psi_{m_1}-i\omega_{m_1})}\cdot\frac{\left\{-(\psi_{m_1}+i\omega_{m_1})^2 m(2+\nu)+m^3\right\}\left\{(\psi_{m_1}-i\omega_{m_1})m^2+\nu(\psi_{m_1}-i\omega_{m_1})^3\right\}}{\left\{m^2+\nu(\psi_{m_1}+i\omega_{m_1})^2\right\}\left\{m^2+\nu(\psi_{m_1}-i\omega_{m_1})^2\right\}} +$$

$$+\frac{1}{2(\psi_{m_1}+i\omega_{m_1})(\psi_{m_1}-i\omega_{m_1})}\cdot\frac{\left\{-(\psi_{m_1}-i\omega_{m_1})^2 m(2+\nu)+m^3\right\}\left\{(\psi_{m_1}+i\omega_{m_1})m^2+\nu(\psi_{m_1}+i\omega_{m_1})^3\right\}}{\left\{m^2+\nu(\psi_{m_1}+i\omega_{m_1})^2\right\}\left\{m^2+\nu(\psi_{m_1}-i\omega_{m_1})^2\right\}} =$$

$$= \frac{\psi_{m_1} m}{\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2}\cdot\frac{-(2+\nu)m^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)-(2+\nu)\nu(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2+m^4+\nu m^2\psi_{m_1}^2-3m^2\nu\omega_{m_1}^2}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2)+\nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2} =$$

$$= \frac{\psi_{m_1} m}{\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2}\cdot\frac{m^4-2m^2\psi_{m_1}^2-(2+4\nu)m^2\omega_{m_1}^2-(2+\nu)\nu(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2)+\nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}$$

$$\frac{\eta_{m_1}-\eta_{m_2}}{2i} = \frac{\omega_{m_1} m}{\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2}\cdot\frac{-(2+\nu)m^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)+(2+\nu)\nu(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2-m^4+\nu m^2\omega_{m_1}^2-3\nu m^2\psi_{m_1}^2}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2)+\nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2} =$$

$$= \frac{\omega_{m_1} m}{\omega_{m_1}^2+\psi_{m_1}^2}\cdot\frac{-m^4-(2+4\nu)m^2\psi_{m_1}^2-2m^2\omega_{m_1}^2+(2+\nu)\nu(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2)+\nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}$$

$$b_{m_1} = \left(\frac{m}{\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2}\right)(\psi_{m_1}a_{m_1}-\omega_{m_1}a_{m_2}) + \frac{m\left[-2m^2-2\nu m^2-(2+2\nu)\nu(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)\right](\psi_{m_1}a_{m_1})}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2)+\nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2} +$$

$$-\frac{m\left[2m^2+2\nu m^2-(2+2\nu)\nu(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)\right](\omega_{m_1}a_{m_2})}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2)+\nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}$$

$$\rightarrow b_{m_1} = \left\{\frac{m}{\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2}-\frac{2m(1+\nu)\nu(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2)+\nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}\right\}(\psi_{m_1}a_{m_1}-\omega_{m_1}a_{m_2}) - \frac{2m^3(1+\nu)(\psi_{m_1}a_{m_1}+\omega_{m_1}a_{m_2})}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2)+\nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}$$

$$b_{m_2} = (\eta_{m_1}A_{m_1}-\eta_{m_2}A_{m_2})\,i = \left(\frac{\eta_{m_1}+\eta_{m_2}}{2}\right)i(A_{m_1}-A_{m_2}) + \left(\frac{\eta_{m_1}-\eta_{m_2}}{2}\right)i(A_{m_1}+A_{m_2}) =$$

$$= \left(\frac{\eta_{m_1}+\eta_{m_2}}{2}\right)a_{m_2} - \left(\frac{\eta_{m_1}-\eta_{m_2}}{2i}\right)a_{m_1}$$

$$\rightarrow b_{m_2} = \left\{\frac{m}{\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2}-\frac{2m(1+\nu)\nu(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2)+\nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}\right\}(\psi_{m_1}a_{m_2}+\omega_{m_1}a_{m_1}) - \frac{2m^3(1+\nu)(\psi_{m_1}a_{m_2}-\omega_{m_1}a_{m_1})}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2)+\nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}$$

$$b_{m3} = \left(\eta_{m5} A_{m5} + \eta_{m6} A_{m6}\right) = \left(\frac{\eta_{m5} + \eta_{m6}}{2}\right)\left(A_{m5} + A_{m6}\right) + \left(\frac{\eta_{m5} - \eta_{m6}}{2}\right)\left(A_{m5} - A_{m6}\right) =$$

$$= \frac{\eta_{m5} + \eta_{m6}}{2}\, a_{m3} + \frac{\eta_{m5} - \eta_{m6}}{2i}\, a_{m4}$$

$$\eta_{m5} = \frac{-\lambda_{m5}^2 m (2+\nu) + m^3}{\lambda_{m5} m^2 + \nu \lambda_{m5}^3} = \frac{-(\psi_{m2} + i\omega_{m2})^2 m (2+\nu) + m^3}{(\psi_{m2} + i\omega_{m2}) m^2 + \nu (\psi_{m2} + i\omega_{m2})^3}$$

$$\eta_{m6} = \frac{-\lambda_{m6}^2 m (2+\nu) + m^3}{\lambda_{m6} m^2 + \nu \lambda_{m6}^3} = \frac{-(\psi_{m2} - i\omega_{m2})^2 m (2+\nu) + m^3}{(\psi_{m2} - i\omega_{m2}) m^2 + \nu (\psi_{m2} - i\omega_{m2})^3}$$

$$\rightarrow b_{m3} = \left\{\frac{m}{\psi_{m2}^2 + \omega_{m2}^2} - \frac{2m(1+\nu)\nu(\psi_{m2}^2 + \omega_{m2}^2)}{m^4 + \nu m^2 (2\psi_{m2}^2 - 2\omega_{m2}^2) + \nu^2 (\psi_{m2}^2 + \omega_{m2}^2)^2}\right\}\left(\psi_{m2} a_{m3} - \omega_{m2} a_{m4}\right) - \frac{2m^3 (1+\nu)(\psi_{m2} a_{m3} + \omega_{m2} a_{m4})}{m^4 + \nu m^2 (2\psi_{m2}^2 - 2\omega_{m2}^2) + \nu^2 (\psi_{m2}^2 + \omega_{m2}^2)^2}$$

$$b_{m4} = \left(\eta_{m5} A_{m5} - \eta_{m6} A_{m6}\right) i = \left(\frac{\eta_{m5} + \eta_{m6}}{2}\right) i \left(A_{m5} - A_{m6}\right) + \left(\frac{\eta_{m5} - \eta_{m6}}{2}\right) i \left(A_{m5} + A_{m6}\right) =$$

$$= \frac{\eta_{m5} + \eta_{m6}}{2}\, a_{m4} - \frac{\eta_{m5} - \eta_{m6}}{2i}\, a_{m3}$$

$$\rightarrow b_{m4} = \left\{\frac{m}{\psi_{m2}^2 + \omega_{m2}^2} - \frac{2m(1+\nu)\nu(\psi_{m2}^2 + \omega_{m2}^2)}{m^4 + \nu m^2 (2\psi_{m2}^2 - 2\omega_{m2}^2) + \nu^2 (\psi_{m2}^2 + \omega_{m2}^2)^2}\right\}\left(\psi_{m2} a_{m4} + \omega_{m2} a_{m3}\right) - \frac{2m^3 (1+\nu)(\psi_{m2} a_{m4} - \omega_{m2} a_{m3})}{m^4 + \nu m^2 (2\psi_{m2}^2 - 2\omega_{m2}^2) + \nu^2 (\psi_{m2}^2 + \omega_{m2}^2)^2}$$

We definieren nu: $c_{m1} = \left(\zeta_{m1} A_{m1} + \zeta_{m2} A_{m2}\right)$

$$c_{m2} = \left(\zeta_{m1} A_{m1} - \zeta_{m2} A_{m2}\right) i$$

$$c_{m3} = \left(\zeta_{m5} A_{m5} + \zeta_{m6} A_{m6}\right)$$

$$c_{m4} = \left(\zeta_{m5} A_{m5} - \zeta_{m6} A_{m6}\right) i$$

Hiermede geldt voor $\overline{w}_{mH}$:

$$\overline{w}_{mH} = e^{\psi_{m1}\overline{x}}\left\{c_{m1} \cos \omega_{m1}\overline{x} + c_{m2} \sin \omega_{m1}\overline{x}\right\} + e^{-\psi_{m1}\overline{x}}\left\{c_{m1} \cos \omega_{m1}\overline{x} - c_{m2} \sin \omega_{m1}\overline{x}\right\} +$$

$$+ e^{\psi_{m2}\overline{x}}\left\{c_{m3} \cos \omega_{m2}\overline{x} + c_{m4} \sin \omega_{m2}\overline{x}\right\} + e^{-\psi_{m2}\overline{x}}\left\{c_{m3} \cos \omega_{m2}\overline{x} - c_{m4} \sin \omega_{m2}\overline{x}\right\}$$

Op overeenkomstige wijze als b_{m_i} uitgedrukt werd in a_{m_i}, drukken we nu c_{m_i} uit in a_{m_i} voor $i = 1$ tm 4

$$c_{m_1} = \zeta_{m_1} A_{m_1} + \zeta_{m_2} A_{m_2} = \left(\frac{\zeta_{m_1}+\zeta_{m_2}}{2}\right)(A_{m_1}+A_{m_2}) + \left(\frac{\zeta_{m_1}-\zeta_{m_2}}{2}\right)(A_{m_1}-A_{m_2})$$

$$= \frac{\zeta_{m_1}+\zeta_{m_2}}{2} a_{m_1} + \frac{\zeta_{m_1}-\zeta_{m_2}}{2i} a_{m_2}$$

$$\zeta_{m_1} = \frac{-\lambda_{m_1}^4 + 2\lambda_{m_1}^2 m^2 - m^4}{\lambda_{m_1} m^2 + \nu\lambda_{m_1}^3} = \frac{-(\lambda_{m_1}^2 - m^2)^2}{\lambda_{m_1} m^2 + \nu\lambda_{m_1}^3} = \frac{-(\psi_{m_1}^2 - \omega_{m_1}^2 + 2i\psi_{m_1}\omega_{m_1} - m^2)^2}{(\psi_{m_1} + \omega_{m_1} i)m^2 + \nu(\psi_{m_1} + i\omega_{m_1})^3}$$

$$\zeta_{m_2} = \frac{-\lambda_{m_2}^4 + 2\lambda_{m_2}^2 m^2 - m^4}{\lambda_{m_2} m^2 + \nu\lambda_{m_2}^3} = \frac{-(\lambda_{m_2}^2 - m^2)^2}{\lambda_{m_2} m^2 + \nu\lambda_{m_2}^3} = \frac{-(\psi_{m_1}^2 - \omega_{m_1}^2 - 2i\psi_{m_1}\omega_{m_1} - m^2)^2}{(\psi_{m_1} - \omega_{m_1} i)m^2 + \nu(\psi_{m_1} - i\omega_{m_1})^3}$$

$$\frac{\zeta_{m_1}+\zeta_{m_2}}{2} = \frac{1}{2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)} \cdot \frac{-(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2+2i\psi_{m_1}\omega_{m_1}-m^2)^2\{m^2+\nu(\psi_{m_1}-i\omega_{m_1})^2\}(\psi_{m_1}-i\omega_{m_1})}{\{m^2+\nu(\psi_{m_1}-i\omega_{m_1})^2\}\{m^2+\nu(\psi_{m_1}+i\omega_{m_1})^2\}} +$$

$$+ \frac{1}{2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)} \cdot \frac{-(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2-2i\psi_{m_1}\omega_{m_1}-m^2)^2\{m^2+\nu(\psi_{m_1}+i\omega_{m_1})^2\}(\psi_{m_1}+i\omega_{m_1})}{\{m^2+\nu(\psi_{m_1}-i\omega_{m_1})^2\}\{m^2+\nu(\psi_{m_1}+i\omega_{m_1})^2\}} =$$

$$= -\psi_1\left[\frac{m^2}{\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2} + \frac{-m^2(1+\nu)^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2) + 2m^2(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2) + \nu(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2 - (2+\nu)m^4}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2) + \nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}\right]$$

$$\frac{\zeta_{m_1}-\zeta_{m_2}}{2i} = \omega_1\left[\frac{m^2}{\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2} + \frac{-m^2(1+\nu)^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2) - 2m^2(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2) - \nu(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2 + (2+\nu)m^4}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2) + \nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}\right]$$

$$\rightarrow c_{m_1} = \frac{m^2(-\psi_{m_1} a_{m_1} + \omega_{m_1} a_{m_2})}{\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2} + \frac{m^2(1+\nu)^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)(\psi_{m_1} a_{m_1} - \omega_{m_1} a_{m_2}) - \left[2m^2(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2) + \nu(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2 - (2+\nu)m^4\right](\psi_{m_1} a_{m_1} + \omega_{m_1} a_{m_2})}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2) + \nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}$$

$$c_{m_2} = (\zeta_{m_1} A_{m_1} - \zeta_{m_2} A_{m_2})\, i = \left(\frac{\zeta_{m_1}+\zeta_{m_2}}{2}\right) i (A_{m_1} - A_{m_2}) + \left(\frac{\zeta_{m_1}-\zeta_{m_2}}{2}\right) i (A_{m_1}+A_{m_2}) =$$

$$= \left(\frac{\zeta_{m_1}+\zeta_{m_2}}{2}\right) a_{2m} - \left(\frac{\zeta_{m_1}-\zeta_{m_2}}{2i}\right) a_{1m}$$

$$\rightarrow c_{m_2} = \frac{m^2(-\psi_{m_1} a_{m_2} - \omega_{m_1} a_{m_1})}{\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2} + \frac{m^2(1+\nu)^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)(\psi_{m_1} a_{m_2} + \omega_{m_1} a_{m_1}) - \left[2m^2(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2) + \nu(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2 - (2+\nu)m^4\right](\psi_{m_1} a_{m_2} - \omega_{m_1} a_{m_1})}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m_1}^2-2\omega_{m_1}^2) + \nu^2(\psi_{m_1}^2+\omega_{m_1}^2)^2}$$

$$c_{m3} = \xi_{m5} A_{m5} + \xi_{m6} A_{m6} = \left(\frac{\xi_{m5}+\xi_{m6}}{2}\right)(A_{m5}+A_{m6}) + \left(\frac{\xi_{m5}-\xi_{m6}}{2}\right)(A_{m5}-A_{m6}) =$$

$$= \frac{\xi_{m5}+\xi_{m6}}{2}\, a_{m3} + \frac{\xi_{m5}-\xi_{m6}}{2i}\, a_{m4}$$

$$\xi_{m5} = \frac{-\lambda_{m5}^4 + 2\lambda_{m5}^2 m^2 - m^4}{\lambda_{m5} m^2 + \nu\lambda_{m5}^3} = \frac{-(\lambda_{m5}^2 - m^2)^2}{\lambda_{m5} m^2 - \nu\lambda_{m5}^3} = \frac{-\left(\psi_{m2}^2 - \omega_{m2}^2 + 2i\psi_{m2}\omega_{m2} - m^2\right)^2}{(\psi_{m2}+\omega_{m2} i)m^2 + \nu(\psi_{m2}+i\omega_{m2})^3}$$

$$\xi_{m6} = \frac{-\lambda_{m6}^4 + 2\lambda_{m6}^2 m^2 - m^4}{\lambda_{m6} m^2 + \nu\lambda_{m6}^3} = \frac{-(\lambda_{m6}^2 - m^2)^2}{\lambda_{m6} m^2 - \nu\lambda_{m6}^3} = \frac{-\left(\psi_{m2}^2 - \omega_{m2}^2 - 2i\psi_{m2}\omega_{m2} - m^2\right)^2}{(\psi_{m2}-\omega_{m2} i)m^2 + \nu(\psi_{m2}-i\omega_{m2})^3}$$

$$\rightarrow c_{m3} = \frac{m^2(-\psi_{m2} a_{m3} + \omega_{m2} a_{m4})}{\psi_{m2}^2 + \omega_{m2}^2} + \frac{m^2(1+\nu)^2(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)(\psi_{m2} a_{m3} - \omega_{m2} a_{m4}) - \left[2m^2(\psi_{m2}^2-\omega_{m2}^2) + \nu(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)^2 - (2+\nu)m^4\right](\psi_{m2} a_{m3} + \omega_{m2} a_{m4})}{m^4 + \nu m^2(2\psi_{m2}^2 - 2\omega_{m2}^2) + \nu^2(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)^2}$$

$$c_{m4} = \left(\xi_{m5} A_{m5} - \xi_{m6} A_{m6}\right) i = \left(\frac{\xi_{m5}+\xi_{m6}}{2}\right) i (A_{m5}-A_{m6}) + \left(\frac{\xi_{m5}-\xi_{m6}}{2}\right) i (A_{m5}+A_{m6}) =$$

$$= \frac{\xi_{m5}+\xi_{m6}}{2}\, a_{m4} - \frac{\xi_{m5}-\xi_{m6}}{2i}\, a_{m3}$$

$$\rightarrow c_{m4} = \frac{m^2(-\psi_{m2} a_{m4} - \omega_{m2} a_{m3})}{\psi_{m2}^2 + \omega_{m2}^2} + \frac{m^2(1+\nu)^2(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)(\psi_{m2} a_{m4} + \omega_{m2} a_{m3}) - \left[2m^2(\psi_{m2}^2-\omega_{m2}^2) + \nu(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)^2 - (2+\nu)m^4\right](\psi_{m2} a_{m4} - \omega_{m2} a_{m3})}{m^4 + \nu m^2(2\psi_{m2}^2 - 2\omega_{m2}^2) + \nu^2(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)^2}$$

Met de bepaling van b_{mi} en c_{mi} als functie van a_{mi} blijven er voor elke waarde van m, slechts vier constanten over in dit gedeelte van de homogene oplossing, nl a_{m1}, a_{m2}, a_{m3} en a_{m4}.
Deze constanten zullen bepaald moeten worden met behulp van de randvoorwaarden bij $\bar{x} = l/2R$.
De constanten, die nog bepaald moeten worden uit het gedeelte van de homogene oplossing, dat onafhankelijk is van $\bar{\varphi}$, zullen tevens met deze randvoorwaarden berekend moeten worden.
Voordat we dit kunnen doen is het noodzakelijk dat we de particuliere oplossing kennen.

5.8. De particuliere oplossing

Evenals bij de meer algemene theorie, die eerder is behandeld geldt voor de particuliere oplossing:

$$\bar{u}_p = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{onp} \sin \frac{2\pi R}{L} n\bar{x} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{mnp} \cos m\bar{\varphi} \sin \frac{2\pi R}{L} n\bar{x}$$

$$\bar{v}_p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_{mnp} \sin m\bar{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\bar{x}$$

$$\bar{w}_p = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_{onp} \cos \frac{2\pi R}{L} n\bar{x} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_{mnp} \cos m\bar{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\bar{x}$$

We beperken ons tot die belastingsgevallen waarvoor geldt:

$$\bar{P}_x = \bar{P}_\varphi = 0$$

Eerst beschouwen we het gedeelte van de particuliere oplossing, dat onafhankelijk is van $\bar{\varphi}$ met $n=0$.

In de vereenvoudigde differentiaalvergelijkingen ($\underline{\underline{XXVII}}$), ($\underline{\underline{XXVIII}}$) en ($\underline{\underline{XXIX}}$) substitueren we:

$$\bar{P}_r = \bar{P}_{r_{oo}} \quad \text{en} \quad \begin{aligned} \bar{u} &= 0 \\ \bar{v} &= 0 \\ \bar{w} &= \bar{w}_{oop} \end{aligned}$$

Dit geeft: $\quad \bar{w}_{oop} = \bar{P}_{r_{oo}}$

We beschouwen nu hetzelfde gedeelte van de particuliere oplossing voor alle andere waarden van n. Daaruit nemen we de algemene term:

$$\bar{P}_r = \bar{P}_{r_{on}} \cos \frac{2\pi R}{L} n\bar{x} \qquad \begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_{onp} \sin \frac{2\pi R}{L} n\bar{x} \\ \bar{v} &= 0 \\ \bar{w} &= \bar{w}_{onp} \cos \frac{2\pi R}{L} n\bar{x} \end{aligned}$$

voor $n = 1 \cdots\cdots\cdots \infty$

Deze termen moeten we substitueren in ($\underline{\underline{XXVII}}$), ($\underline{\underline{XXVIII}}$) en ($\underline{\underline{XXIX}}$).

Dit geeft respectievelijk:

$$0 = \left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2\right] \overline{u}_{onp} + \left[\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right) n\right] \overline{W}_{onp}$$

$$0 = 0$$

$$\overline{P}_{r_{on}} = \left[\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right) n\right] \overline{u}_{onp} + \left[1 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4\right] \overline{W}_{onp}$$

$$\longrightarrow \quad \overline{W}_{onp} = \frac{\overline{P}_{r_{on}}}{1-\nu^2 + k\cdot\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} \qquad n = 1 \ldots\ldots \infty$$

$$\overline{u}_{onp} = \frac{-\nu \overline{P}_{r_{on}}}{(1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right) n + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^5 n^5} \qquad n = 1 \ldots\ldots \infty$$

We beschouwen nu het gedeelte van de particuliere oplossing dat wel afhankelijk is van φ met $n = 0$. Daaruit nemen we de algemene term:

$$\overline{P}_r = \overline{P}_{r_{mo}} \cos m\varphi \qquad \begin{aligned} \overline{u} &= 0 \\ \overline{v} &= \overline{v}_{mop} \sin m\varphi \\ \overline{w} &= \overline{w}_{mop} \cos m\varphi \end{aligned}$$

voor $m = 1 \ldots\ldots \infty$

Substitutie in de differentiaalvergelijkingen geeft:

$$0 = 0$$

$$0 = \left[m^2\right] \overline{v}_{mop} + \left[m\right] \overline{w}_{mop}$$

$$\overline{P}_{r_{mo}} = \left[m\right] \overline{v}_{mop} + \left[1 + k m^4\right] \overline{w}_{mop}$$

$$\longrightarrow \quad \overline{w}_{mop} = \frac{1}{k m^4} \overline{P}_{r_{mo}} \qquad m = 1 \ldots\ldots \infty$$

$$\overline{v}_{mop} = \frac{-1}{k m^5} \overline{P}_{r_{mo}} \qquad m = 1 \ldots\ldots \infty$$

Nu beschouwen we de rest (andere n) van dit gedeelte. De algemene term is:

$$\overline{P}_r = \overline{P}_{r_{mn}} \cos m\varphi \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} \qquad \begin{aligned} \overline{u} &= \overline{u}_{mnp} \cos m\varphi \sin \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} \\ \overline{v} &= \overline{v}_{mnp} \sin m\varphi \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} \\ \overline{w} &= \overline{w}_{mnp} \cos m\varphi \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} \end{aligned}$$

Dit geldt voor $n = 1 \ldots \infty$ en $m = 1 \ldots \infty$.

Bij substitutie in de vergelijkingen volgt respectievelijk:

$$\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + \frac{1-\nu}{2} m^2\right]\bar{u}_{mnp} + \left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right) n \cdot m\right]\bar{v}_{mnp} + \left[\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right)n\right]\bar{w}_{mnp} = \bar{P}_{x_{mn}}$$

$$\left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right) n \cdot m\right]\bar{u}_{mnp} + \left[m^2 + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2\right]\bar{v}_{mnp} + \left[m\right]\bar{w}_{mnp} = \bar{P}_{\varphi_{mn}}$$

$$\left[\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right)n\right]\bar{u}_{mnp} + \left[m\right]\bar{v}_{mnp} + \left[1 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4 + 2k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m^2 + k m^4\right]\bar{w}_{mnp} = \bar{P}_{r_{mn}}$$

Dit zijn drie vergelijkingen in de drie onbekenden: $\bar{u}_{mnp}$, $\bar{v}_{mnp}$ en $\bar{w}_{mnp}$, die we op zullen lossen.

We hadden ons reeds beperkt tot die belastingsgevallen waarvoor $\bar{P}_x$ en $\bar{P}_\varphi$ nul zijn en dus:

$$\bar{P}_{x_{mn}} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{P}_{\varphi_{mn}} = 0$$

$$\bar{u}_{mnp} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)nm\right] & \left[\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right)n\right] \\ 0 & \left[m^2 + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2\right] & \left[m\right] \\ \bar{P}_{r_{mn}} & \left[m\right] & \left[1 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4 + 2k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m^2 + k m^4\right] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + \frac{1-\nu}{2} m^2\right] & \left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)nm\right] & \left[\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right)n\right] \\ \left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)nm\right] & \left[m^2 + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2\right] & \left[m\right] \\ \left[\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right)n\right] & \left[m\right] & \left[1 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4 + 2k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m^2 + k m^4\right] \end{vmatrix}}$$

$$\bar{u}_{mnp} = \frac{\left\{\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right) n m^2 - \nu \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^3 n^3\right\}\bar{P}_{r_{mn}}}{k\,\frac{1-\nu}{2}\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\,\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2\pi R}{L}\right) n m^2 - \nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^3 n^3}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}\,\bar{P}_{r_{mn}}$$

$$\bar{V}_{mnp} = \frac{\begin{vmatrix} \left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + \frac{1-\nu}{2} m^2\right] & 0 & \left[\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right) n\right] \\ \left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right) nm\right] & 0 & \left[m\right] \\ \left[\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right) n\right] & \bar{P}_{r_{mn}} & \left[1 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4 + 2k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m^2 + k m^4\right] \end{vmatrix}}{k\,\frac{1-\nu}{2}\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\,\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}$$

$$\bar{V}_{mnp} = \frac{\left\{\frac{(\nu-1)(\nu+2)}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m - \frac{1-\nu}{2} m^3\right\} \bar{P}_{r_{mn}}}{k\,\frac{1-\nu}{2}\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\,\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} =$$

$$= \frac{(\nu+2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m - m^3}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} \cdot \bar{P}_{r_{mn}}$$

$$\bar{W}_{mnp} = \frac{\begin{vmatrix} \left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + \frac{1-\nu}{2} m^2\right] & \left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right) nm\right] & 0 \\ \left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right) nm\right] & \left[m^2 + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2\right] & 0 \\ \left[\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right) n\right] & \left[m\right] & \bar{P}_{r_{mn}} \end{vmatrix}}{k\,\frac{1-\nu}{2}\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\,\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}$$

$$\bar{W}_{mnp} = \frac{\left\{\frac{1-\nu}{2} m^4 + \frac{1-\nu}{2} \cdot 2\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m^2 + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4\right\} \bar{P}_{r_{mn}}}{k\,\frac{1-\nu}{2}\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\,\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^2}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} \cdot \bar{P}_{r_{mn}}$$

$\bar{U}_{mnp}$, $\bar{V}_{mnp}$ en $\bar{W}_{mnp}$ zijn nu bekend.

Hiermede is dan de particuliere oplossing bekend.

Hiervoor geldt:

$$\overline{u_p} = \overline{u_{op}} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u_{mp}} \cos m\overline{\varphi}$$

$$\overline{u_{op}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\nu \overline{P_{ron}}}{(1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)n + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^5 n^5} \cdot \sin \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

$$\overline{u_{mp}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\left(\frac{2\pi R}{L}\right)nm^2 - \nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^3 n^3\right\} \overline{P_{rmn}}}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} \sin \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

$$\overline{v_p} = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{v_{mp}} \sin m\overline{\varphi}$$

$$\overline{v_{mp}} = -\frac{\overline{P_{rmo}}}{k m^5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{(\nu+2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m - m^3\right\} \overline{P_{rmn}}}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} \cdot \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

$$\overline{w_p} = \overline{w_{op}} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{w_{mp}} \cos m\overline{\varphi}$$

$$\overline{w_{op}} = \overline{P_{roo}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{P_{ron}}}{1-\nu^2 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

$$\overline{w_{mp}} = \frac{\overline{P_{rmo}}}{k m^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^2 \overline{P_{rmn}}}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

We wisten dat voor de homogene oplossing gold:

$$\overline{u_H} = \overline{u_{oH}} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u_{mH}} \cos m\overline{\varphi}$$

$$\overline{v_H} = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{v_{mH}} \sin m\overline{\varphi}$$

$$\overline{w_H} = \overline{w_{oH}} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{w_{mH}} \cos m\overline{\varphi}$$

In $\overline{u_{oH}}$ en $\overline{w_{oH}}$ nog drie constanten: a_{o1}, a_{o2} en a_{o3}

In $\overline{u_{mH}}$, $\overline{v_{mH}}$ en $\overline{w_{mH}}$ voor iedere m nog vier constanten: a_{m1}, a_{m2}, a_{m3} en a_{m4}

De totale oplossing is nu bepaald:

$$\bar{u} = \bar{u}_{oH} + \bar{u}_{op} + \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{u}_{mH} + \bar{u}_{mp}) \cos m\bar{\varphi}$$

$$\bar{v} = \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{v}_{mH} + \bar{v}_{mp}) \sin m\bar{\varphi}$$

$$\bar{w} = \bar{w}_{oH} + \bar{w}_{op} + \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{w}_{mH} + \bar{w}_{mp}) \cos m\bar{\varphi}$$

Het is nu dus tijd om de nog niet bepaalde constanten, die op de vorige pagina zijn genoemd, met behulp van de randvoorwaarden te berekenen.

5.9. De randvoorwaarden.

Aangezien we een koker zullen beschouwen waarvan de randen ($\bar{x} = \pm L/2R$) „vrij" zijn, zullen we alleen de bij een vrije rand behorende randvoorwaarden beschouwen.

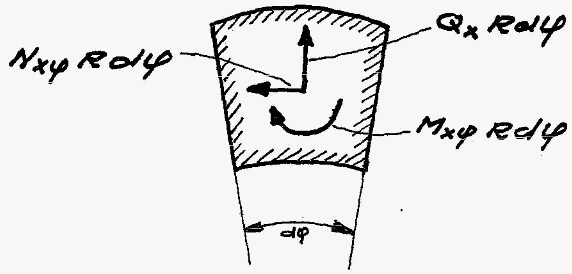
We verwachten dat moet gelden:

$$N_{x\varphi}(\bar{x} = \pm L/2R) = N_x(\bar{x} = \pm L/2R) = Q_x(\bar{x} = \pm L/2R) = 0$$

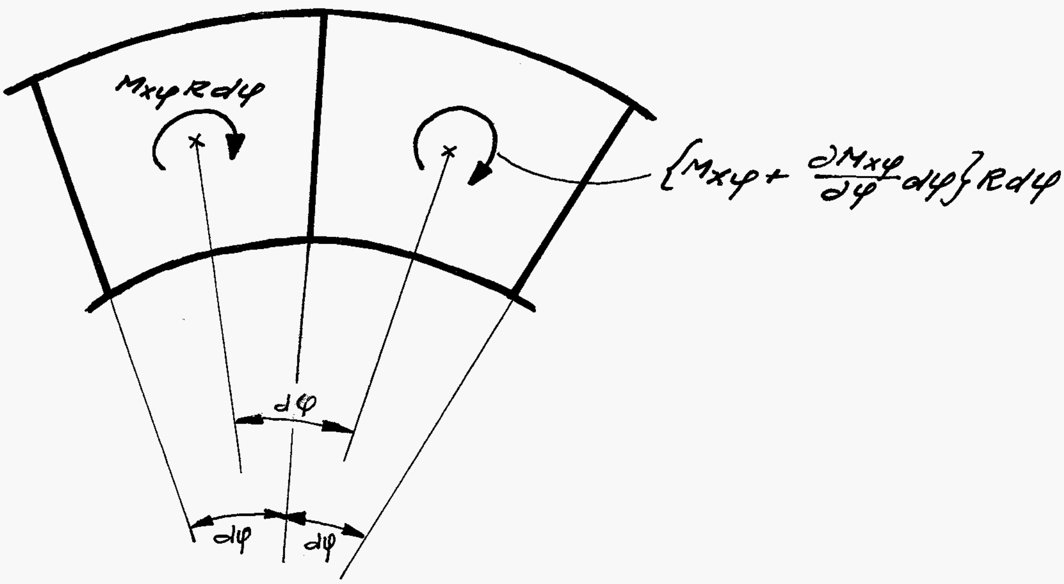
$$M_x(\bar{x} = \pm L/2R) = M_{x\varphi}(\bar{x} = \pm L/2R) = 0$$

Omdat volledige symmetrie ten opzichte van $\bar{x} = 0$ aanwezig is, en omdat dit overal al is gebruikt, behoeven we alleen de randvoorwaarden bij $\bar{x} = L/2R$ in aanmerking te nemen.
Voor elke waarde van $\bar{\varphi}$ hebben we dus vijf randvoorwaarden, terwijl we i.h.a. slechts vier onbekenden: a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}, a_{m_4} moeten bepalen.
Volgens Kirchhof zijn de genoemde randvoorwaarden echter gekoppeld, zodat er geen reden is tot ongerustheid.

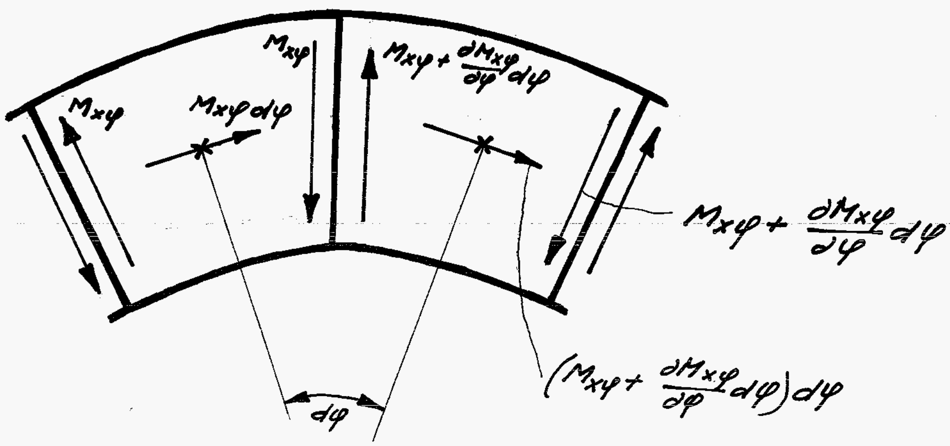
Het moment $M_{x\varphi}$ is namelijk te zien als een combinatie van een kracht per lengteeenheid in de richting van $N_{x\varphi}$ en een kracht per lengte eenheid in de richting van Q_x



We beschouwen alleen $M_{x\varphi}$



Het bovenstaande systeem is equivalent met het nu volgende:



De gekoppelde randvoorwaarden worden dus:

$$Q_x R d\varphi + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi = 0$$

ofwel: $$Q_x + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} = 0$$

$$N_{x\varphi} R d\varphi - M_{x\varphi} d\varphi = 0$$

ofwel: $$N_{x\varphi} - \frac{1}{R} M_{x\varphi} = 0$$

De randvoorwaarden die we gebruiken zijn dus:

$$\bar{x} = l/2R \rightarrow \quad N_x = 0 \qquad (\underline{XXX})$$

$$M_x = 0 \qquad (\underline{XXXI})$$

$$Q_x + \frac{1}{R}\frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} = 0 \qquad (\underline{XXXII})$$

$$N_{x\varphi} - \frac{1}{R} M_{x\varphi} = 0 \qquad (\underline{XXXIII})$$

Deze randvoorwaarden gaan we uitdrukken in de dimensieloze verplaatsingen: $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.

Uit ($\underline{XXX}$) volgt:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} = l/2R \\ \text{alle } \bar{\varphi}\end{array}\right\} \quad \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} + \nu\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \nu \bar{w} = 0$$

Wanneer we stellen:

$$\bar{u}_0^* = \bar{u}_{0H} + \bar{u}_{0p}$$

$$\bar{u}_m^* = \bar{u}_{mH} + \bar{u}_{mp}$$

$$\bar{v}_m^* = \bar{v}_{mH} + \bar{v}_{mp}$$

$$\bar{w}_0^* = \bar{w}_{0H} + \bar{w}_{0p}$$

$$\bar{w}_m^* = \bar{w}_{mH} + \bar{w}_{mp}$$

$\bar{x} = l/2R$

$$\frac{d\bar{u}_0^*}{d\bar{x}} + \nu \bar{w}_0^* + \left\{\frac{d\bar{u}_m^*}{d\bar{x}} + \nu m \bar{v}_m^* + \nu \bar{w}_m^*\right\} \cos m\bar{\varphi} = 0$$

Aangezien dit moet gelden voor elke $\bar{\varphi}$ kunnen we concluderen:

$$\bar{x} = l/2R \quad : \quad \frac{d\bar{u}_0^*}{d\bar{x}} + \nu \bar{w}_0^* = 0 \qquad (\underline{XXXIV}\ a)$$

$$\bar{x} = l/2R \quad : \quad \frac{d\bar{u}_m^*}{d\bar{x}} + \nu m \bar{v}_m^* + \nu \bar{w}_m^* = 0 \qquad (\underline{XXXIV}\ b)$$

Op dezelfde wijze geeft $(\underline{\mathrm{XXXI}})$:

$$\bar{x} = {}^{l}/{}_{2R} \quad : \quad \frac{d^2 \bar{W}_o^*}{d\bar{x}^2} = 0 \qquad (\underline{\mathrm{XXXV}}\ a)$$

$$\bar{x} = {}^{l}/{}_{2R} \quad : \quad \frac{d^2 \bar{W}_m^*}{d\bar{x}^2} - \nu m^2 \bar{W}_m^* = 0 \qquad (\underline{\mathrm{XXXV}}\ b)$$

Evenzo geeft $(\underline{\mathrm{XXXII}})$:

$$\bar{x} = {}^{l}/{}_{2R} \quad : \quad \frac{d^3 \bar{W}_o^*}{d\bar{x}^3} = 0 \qquad (\underline{\mathrm{XXXVI}}\ a)$$

$$\bar{x} = {}^{l}/{}_{2R} \quad : \quad \frac{d^3 \bar{W}_m^*}{d\bar{x}^3} - (2-\nu) m^2 \frac{d\bar{W}_m^*}{d\bar{x}} = 0 \qquad (\underline{\mathrm{XXXVI}}\ b)$$

Tenslotte geeft $(\underline{\mathrm{XXXIII}})$:

$$\bar{x} = {}^{l}/{}_{2R} \qquad 0 = 0$$

$$\bar{x} = {}^{l}/{}_{2R} \qquad -m\bar{u}_m^* + \frac{d\bar{v}_m^*}{d\bar{x}} + 2km \frac{d\bar{W}_m^*}{d\bar{x}} = 0 \qquad (\underline{\mathrm{XXXVII}}\ b)$$

Voor de constanten a_{01}, a_{02} en a_{03} hebben we uiteindelijk drie vergelijkingen over gehouden waaruit ze bepaald moeten worden, namelijk: $(\underline{\mathrm{XXXIV}}\ a)$, $(\underline{\mathrm{XXXV}}\ a)$ en $(\underline{\mathrm{XXXVI}}\ a)$.

Voor elke waarde van m met $m = 1 \ldots\ldots \infty$ hebben we vier vergelijkingen om de constanten a_{m1}, a_{m2}, a_{m3} en a_{m4} te bepalen namelijk: $(\underline{\mathrm{XXXIV}}\ b)$, $(\underline{\mathrm{XXXV}}\ b)$, $(\underline{\mathrm{XXXVI}}\ b)$ en $(\underline{\mathrm{XXXVII}}\ b)$.

Er is nu niets meer wat de bepaling van deze constanten in de weg kan staan, zodat we over kunnen gaan tot de substitutie in de randvoorwaarden van eerder verkregen formules.

5.10. Bepaling van de constanten

We bepalen eerst de constanten uit het gedeelte van de oplossing, dat onafhankelijk is van $\bar{\varphi}$, met andere woorden: a_{01}, a_{02} en a_{03}

Uit ($\overline{XXXIV}$ a) volgt:

$$\bar{x} = L/2R \rightarrow \frac{d\overline{u_{oH}}}{d\bar{x}} + \nu \overline{w_{oH}} + \frac{d\overline{u_{op}}}{d\bar{x}} + \nu \overline{w_{op}} = 0$$

Dit geeft:

$$a_{01} + \frac{\mu}{\sqrt{2}} e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R}} \left\{ (a_{02} + a_{03}) \cos \frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R} + (a_{03} - a_{02}) \sin \frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R} \right\} +$$

$$+ \frac{\mu}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R}} \left\{ (a_{02} + a_{03}) \cos \frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R} + (-a_{03} + a_{02}) \sin \frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R} \right\} +$$

$$-\nu^2 a_{01} + \frac{\mu}{\sqrt{2}} e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R}} \left\{ (-a_{02} - a_{03}) \cos \frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R} + (a_{02} - a_{03}) \sin \frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R} \right\} +$$

$$+ \frac{\mu}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R}} \left\{ (-a_{02} - a_{03}) \cos \frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R} + (-a_{02} + a_{03}) \sin \frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R} \right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\nu \overline{P_{ron}} \cdot (-1)^n}{1 - \nu^2 + k \left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} +$$

$$+ \nu \overline{P_{roo}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu \overline{P_{ron}} \; (-1)^n}{1 - \nu^2 + k \left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} = 0$$

$$\rightarrow \quad (1-\nu^2)\, a_{01} + \nu \overline{P_{roo}} = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{a_{01} = -\frac{\nu \overline{P_{roo}}}{1-\nu^2}}$$

Uit ($\overline{XXXV}$ a) volgt:

$$\bar{x} = \frac{L}{2R} \rightarrow \frac{d^2 \overline{w_{oH}}}{d\bar{x}^2} + \frac{d^2 \overline{w_{op}}}{d\bar{x}^2} = 0$$

Dit geeft:

$$\frac{\mu^3}{\nu\sqrt{2}} e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R}} \left\{(a_{02}-a_{03}) \cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R} + (a_{02}+a_{03}) \sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R}\right\} +$$

$$\frac{\mu^3}{\nu\sqrt{2}} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R}} \left\{(a_{02}-a_{03}) \cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R} + (-a_{02}-a_{03}) \sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R}\right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 \cdot \overline{P}_{ron} \cdot (-1)^n}{1-\nu^2 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} = 0$$

Uit ($\overline{XXXVI}$ a) volgt

$$\overline{x} = \frac{L}{2R} \rightarrow \frac{d^3 \overline{w}_{oH}}{d\overline{x}^3} + \frac{d^3 \overline{w}_{op}}{d\overline{x}^3} = 0$$

Dit geeft:

$$\frac{\mu^4}{\nu} e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R}} \left\{ a_{02} \cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2R} + a_{03} \sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\frac{L}{2R}\right\} +$$

$$+ \frac{\mu^4}{\nu} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\frac{L}{2R}} \left\{ -a_{02} \cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\frac{L}{2R} + a_{03} \sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\frac{L}{2R}\right\} = 0$$

Uit de vergelijkingen verkregen uit ($\overline{XXXV}$ a) en ($\overline{XXXVI}$ a) moeten we a_{02} en a_{03} op lossen.

Het resultaat is:

$$\boxed{a_{02} = \frac{-\left(e^{\frac{\mu L}{2R\sqrt{2}}} - e^{-\frac{\mu L}{2R\sqrt{2}}}\right)\sin\frac{\mu L}{2R\sqrt{2}}}{e^{\frac{\mu L}{R\sqrt{2}}} + e^{-\frac{\mu L}{R\sqrt{2}}} + 2\cos\frac{\mu L}{R\sqrt{2}}} \cdot \frac{\nu\sqrt{2}}{\mu^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 \cdot \overline{P}_{ron} \cdot (-1)^n}{1-\nu^2 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}}$$

$$\boxed{a_{03} = \frac{\left(e^{\frac{\mu L}{2R\sqrt{2}}} + e^{-\frac{\mu L}{2R\sqrt{2}}}\right)\cos\frac{\mu L}{2R\sqrt{2}}}{e^{\frac{\mu L}{R\sqrt{2}}} + e^{-\frac{\mu L}{R\sqrt{2}}} + 2\cos\frac{\mu L}{R\sqrt{2}}} \cdot \frac{\nu\sqrt{2}}{\mu^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 \overline{P}_{ron} (-1)^n}{1-\nu^2 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}}$$

Hiermede zijn a_{01}, a_{02} en a_{03} bepaald.

Het zal blijken dat de overzichtelijkheid van de formules wordt bevorderd wanneer we enkele nieuwe factoren invoeren, in de formules voor b_{m1}, b_{m2}, b_{m3}, b_{m4}, c_{m1}, c_{m2}, c_{m3} en c_{m4} :

DEF:

$$b_{m1}^{*} = \left\{ \frac{m\psi_{m1}}{\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2} - \frac{2m(1+\nu)\nu(\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2)\psi_{m1} + 2m^2(1+\nu)\psi_{m1}}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m1}^2-2\omega_{m1}^2)+\nu^2(\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2)^2} \right\}$$

$$b_{m2}^{*} = \left\{ \frac{-m\omega_{m1}}{\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2} - \frac{-2m(1+\nu)\nu(\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2)\omega_{m1} + 2m^3(1+\nu)\omega_{m1}}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m1}^2-2\omega_{m1}^2)+\nu^2(\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2)^2} \right\}$$

$$b_{m3}^{*} = \left\{ \frac{m\psi_{m2}}{\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2} - \frac{2m(1+\nu)\nu(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)\psi_{m2} + 2m^3(1+\nu)\psi_{m2}}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m2}^2-2\omega_{m2}^2)+\nu^2(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)^2} \right\}$$

$$b_{m4}^{*} = \left\{ \frac{-m\omega_{m2}}{\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2} - \frac{-2m(1+\nu)\nu(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)\omega_{m2} + 2m^3(1+\nu)\omega_{m2}}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m2}^2-2\omega_{m2}^2)+\nu^2(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)^2} \right\}$$

$$b_{m1} = b_{m1}^{*}a_{m1} + b_{m2}^{*}a_{m2} \qquad b_{m3} = b_{m3}^{*}a_{m3} + b_{m4}^{*}a_{m4}$$

$$b_{m2} = -b_{m2}^{*}a_{m1} + b_{m1}^{*}a_{m2} \qquad b_{m4} = -b_{m4}^{*}a_{m3} + b_{m3}^{*}a_{m4}$$

DEF :

$$c_{m1}^{*} = \left\{ \frac{-m^2\psi_{m1}}{\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2} + \frac{m^2(1+\nu)^2(\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2)\psi_{m1} - \left[2m^2(\psi_{m1}^2-\omega_{m1}^2)+\nu(\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2)^2-(2+\nu)m^4\right]\psi_{m1}}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m1}^2-2\omega_{m1}^2)+\nu^2(\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2)^2} \right\}$$

$$c_{m2}^{*} = \left\{ \frac{m^2\omega_{m1}}{\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2} + \frac{-m^2(1+\nu)^2(\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2)\omega_{m1} - \left[2m^2(\psi_{m1}^2-\omega_{m1}^2)+\nu(\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2)^2-(2+\nu)m^4\right]\omega_{m1}}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m1}^2-2\omega_{m1}^2)+\nu^2(\psi_{m1}^2+\omega_{m1}^2)^2} \right\}$$

$$c_{m3}^{*} = \left\{ \frac{-m^2\psi_{m2}}{\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2} + \frac{m^2(1+\nu)^2(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)\psi_{m2} - \left[2m^2(\psi_{m2}^2-\omega_{m2}^2)+\nu(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)^2-(2+\nu)m^4\right]\psi_{m2}}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m2}^2-2\omega_{m2}^2)+\nu^2(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)^2} \right\}$$

$$c_{m4}^{*} = \left\{ \frac{m^2\omega_{m2}}{\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2} + \frac{-m^2(1+\nu)^2(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)\omega_{m2} - \left[2m^2(\psi_{m2}^2-\omega_{m2}^2)+\nu(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)^2-(2+\nu)m^4\right]\omega_{m2}}{m^4+\nu m^2(2\psi_{m2}^2-2\omega_{m2}^2)+\nu^2(\psi_{m2}^2+\omega_{m2}^2)^2} \right\}$$

$$c_{m1} = c_{m1}^{*}a_{m1} + c_{m2}^{*}a_{m2} \qquad c_{m3} = c_{m3}^{*}a_{m3} + c_{m4}^{*}a_{m4}$$

$$c_{m2} = -c_{m2}^{*}a_{m1} + c_{m1}^{*}a_{m2} \qquad c_{m4} = -c_{m4}^{*}a_{m3} + c_{m3}^{*}a_{m4}$$

We bepalen nu de constanten uit het gedeelte van de oplossing dat wel afhankelijk is van $\overline{\varphi}$, met andere woorden, voor $m = 1 \ldots\ldots \infty$ bepalen we a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3} en a_{m_4}

Uit ($\overline{XXXIV}$ b) volgt:

$$\overline{x} = L/2R \rightarrow \frac{d\overline{u}_{mH}}{d\overline{x}} + \nu m \overline{V}_{mH} + \nu \overline{W}_{mH} + \frac{d\overline{u}_{mp}}{d\overline{x}} + \nu m \overline{V}_{mp} + \nu \overline{W}_{mp} = 0$$

Dit geeft:

$$e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left\{\psi_{m_1} a_{m_1} \cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R} + \psi_{m_1} a_{m_2} \sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R} - \omega_{m_1} a_{m_1} \sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R} + \omega_{m_1} a_{m_2} \cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right\} +$$

$$+ e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left\{\psi_{m_1} a_{m_1} \cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R} - \psi_{m_1} a_{m_2} \sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R} + \omega_{m_1} a_{m_1} \sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R} + \omega_{m_1} a_{m_2} \cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right\} +$$

$$+ e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left\{\psi_{m_2} a_{m_3} \cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R} + \psi_{m_2} a_{m_4} \sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R} - \omega_{m_2} a_{m_3} \sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R} + \omega_{m_2} a_{m_4} \cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right\} +$$

$$+ e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left\{\psi_{m_2} a_{m_3} \cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R} - \psi_{m_2} a_{m_4} \sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R} + \omega_{m_2} a_{m_3} \sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R} + \omega_{m_2} a_{m_4} \cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right\} +$$

$$+ \nu m\left[e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left\{b_{m_1} \cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R} + b_{m_2} \sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right\} + e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left\{b_{m_1} \cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R} - b_{m_2} \sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right\}\right] +$$

$$+ \nu m\left[e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left\{b_{m_3} \cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R} + b_{m_4} \sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right\} + e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left\{b_{m_3} \cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R} - b_{m_4} \sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right\}\right] +$$

$$+ \nu\left[e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left\{c_{m_1} \cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R} + c_{m_2} \sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right\} + e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left\{c_{m_1} \cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R} - c_{m_2} \sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right\}\right] +$$

$$+ \nu\left[e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left\{c_{m_3} \cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R} + c_{m_4} \sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right\} + e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left\{c_{m_3} \cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R} - c_{m_4} \sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right\}\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\left(\frac{2\pi R}{L}\right) n m^2 - \nu \left(\frac{2\pi R}{L}\right)^3 n^3\right\} \overline{P}_{rmn}}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} \cdot \frac{2\pi R}{L} \cdot n \cdot (-1)^n +$$

$$+ \nu m\left[-\frac{\overline{P}_{rmo}}{k m^5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{(\nu+2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m - m^3\right\} \overline{P}_{rmn}}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} (-1)^n\right] +$$

$$+ \nu\left[\frac{\overline{P}_{rmo}}{k m^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^2 \overline{P}_{rmn}}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4} (-1)^n\right] = 0$$

Deze vergelijking gaan we uitwerken.

$$\to \left\{e^{\psi_{m1}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m1}\frac{L}{2R}\right)\left(\psi_{m1}a_{m1}+\omega_{m1}a_{m2}+\gamma m b_{m1}+\gamma c_{m1}\right)+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m1}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m1}\frac{L}{2R}\right)\left(\psi_{m1}a_{m2}-\omega_{m1}a_{m1}+\gamma m b_{m2}+\gamma c_{m2}\right)+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m2}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m2}\frac{L}{2R}\right)\left(\psi_{m2}a_{m3}+\omega_{m2}a_{m4}+\gamma m b_{m3}+\gamma m c_{m3}\right)+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m2}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m2}\frac{L}{2R}\right)\left(\psi_{m2}a_{m4}-\omega_{m2}a_{m3}+\gamma m b_{m4}+\gamma c_{m4}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\nu^2+2\nu+2\gamma+1)(-1)^n\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2n^2m^2\overline{P}_{rmn}}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2n^2+m^2\right]^4+(1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4n^4}=0$$

We kunnen dit schrijven als:

$$\boxed{S_{m11}a_{m1}+S_{m12}a_{m2}+S_{m13}a_{m3}+S_{m14}a_{m4}=T_{m1}}$$

met:
$$S_{m11}=\left\{e^{\psi_{m1}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m1}\frac{L}{2R}\right)\left(\psi_{m1}+\gamma m b_{m1}^*+\gamma c_{m1}^*\right)+$$
$$+\left\{e^{\psi_{m1}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m1}\frac{L}{2R}\right)\left(-\omega_{m1}-\gamma m b_{m2}^*-\gamma c_{m2}^*\right).$$

$$S_{m12}=\left\{e^{\psi_{m1}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m1}\frac{L}{2R}\right)\left(\omega_{m1}+\gamma m b_{m2}^*+\gamma c_{m2}^*\right)+$$
$$+\left\{e^{\psi_{m1}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m1}\frac{L}{2R}\right)\left(\psi_{m1}+\gamma m b_{m1}^*+\gamma c_{m1}^*\right).$$

$$S_{m13}=\left\{e^{\psi_{m2}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m2}\frac{L}{2R}\right)\left(\psi_{m2}+\gamma m b_{m3}^*+\gamma c_{m3}^*\right)+$$
$$+\left\{e^{\psi_{m2}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m2}\frac{L}{2R}\right)\left(-\omega_{m2}-\gamma m b_{m4}^*-\gamma c_{m4}^*\right).$$

$$S_{m14}=\left\{e^{\psi_{m2}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m2}\frac{L}{2R}\right)\left(\omega_{m2}+\gamma m b_{m4}^*+\gamma c_{m4}^*\right)+$$
$$+\left\{e^{\psi_{m2}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m2}\frac{L}{2R}\right)\left(\psi_{m2}+\gamma m b_{m3}^*+\gamma c_{m3}^*\right).$$

$$T_{m1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\nu^2+2\nu+2\gamma+1)(-1)^n\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2n^2m^2\overline{P}_{rmn}}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2n^2+m^2\right]^4+(1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4n^4}$$

Vergelijking ($\overline{\overline{XXXIV}}$ b) is nu gereduceerd tot een lineaire vergelijking in a_{mi} met constante coëfficienten.

Uit ($\overline{\overline{XXXV}}$ b) volgt:

$$\overline{x}=\frac{L}{2R}\to\frac{d^2\overline{W}_{mH}}{d\overline{x}^2}-\gamma m^2\overline{W}_{mH}+\frac{d^2\overline{W}_{mP}}{d\overline{x}^2}-\gamma m^2\overline{W}_{mP}=0$$

Dit geeft:

$$e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left\{\left[(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2)c_{m_1}+2\psi_{m_1}\omega_{m_1}c_{m_2}\right]\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R}+\left[(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2)c_{m_2}-2\psi_{m_1}\omega_{m_1}c_{m_1}\right]\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right\}+$$

$$+e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left\{\left[(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2)c_{m_1}+2\psi_{m_1}\omega_{m_1}c_{m_2}\right]\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R}+\left[-(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2)c_{m_2}+2\psi_{m_1}\omega_{m_1}c_{m_1}\right]\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right\}+$$

$$+e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left\{\left[(\psi_{m_2}^2-\omega_{m_2}^2)c_{m_3}+2\psi_{m_2}\omega_{m_2}c_{m_4}\right]\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R}+\left[(\psi_{m_2}^2-\omega_{m_2}^2)c_{m_4}-2\psi_{m_2}\omega_{m_2}c_{m_3}\right]\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right\}+$$

$$+e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left\{\left[(\psi_{m_2}^2-\omega_{m_2}^2)c_{m_3}+2\psi_{m_2}\omega_{m_2}c_{m_4}\right]\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R}+\left[-(\psi_{m_2}^2-\omega_{m_2}^2)c_{m_4}+2\psi_{m_2}\omega_{m_2}c_{m_3}\right]\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right\}+$$

$$-\nu m^2\left[e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left\{c_{m_1}\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R}+c_{m_2}\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right\}+e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left\{c_{m_1}\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R}-c_{m_2}\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right\}\right]+$$

$$-\nu m^2\left[e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left\{c_{m_3}\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R}+c_{m_4}\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right\}+e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left\{c_{m_3}\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R}-c_{m_4}\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right\}\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2n^2+m^2\right]^2\cdot\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2n^2\cdot\overline{P}_{rmn}\;(-1)^n}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2n^2+m^2\right]^4+(1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4n^4}+$$

$$-\frac{\nu\overline{P}_{rmo}}{k\,m^2}-\nu m^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2n^2+m^2\right]^2\cdot\overline{P}_{rmn}\cdot(-1)^n}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2n^2+m^2\right]^4+(1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4n^4}=0$$

$$\rightarrow\left(e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right)\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\left[(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2)c_{m_1}+2\psi_{m_1}\omega_{m_1}c_{m_2}-\nu m^2c_{m_1}\right]+$$

$$+\left(e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right)\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\left[(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2)c_{m_2}-2\psi_{m_1}\omega_{m_1}c_{m_1}-\nu m^2c_{m_2}\right]+$$

$$+\left(e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right)\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\left[(\psi_{m_2}^2-\omega_{m_2}^2)c_{m_3}+2\psi_{m_2}\omega_{m_2}c_{m_4}-\nu m^2c_{m_3}\right]+$$

$$+\left(e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right)\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\left[(\psi_{m_2}^2-\omega_{m_2}^2)c_{m_4}-2\psi_{m_2}\omega_{m_2}c_{m_3}-\nu m^2c_{m_4}\right]+$$

$$-\frac{\nu\overline{P}_{rmo}}{k\,m^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2n^2+m^2\right]^2\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2n^2+\nu m^2\right]\cdot\overline{P}_{rmn}\cdot(-1)^n}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2n^2+m^2\right]^4+(1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4n^4}=0$$

Analoog aan wat is gebeurd bij de uitwerking van vergelijking (XXXIV b) vervangen we deze vergelijking door:

$$\boxed{S_{m21}\, a_{m1} + S_{m22}\, a_{m2} + S_{m23}\, a_{m3} + S_{m24}\, a_{m4} = T_{m2}}$$

met:

$$S_{m21} = \left\{e^{\psi_{m1}\frac{L}{2R}} + e^{-\psi_{m1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos \omega_{m1}\frac{L}{2R}\right)\left[\left(\psi_{m1}^2 - \omega_{m1}^2 - \nu m^2\right)C_{m1}^* - 2\psi_{m1}\omega_{m1}\, C_{m2}^*\right] +$$
$$+ \left\{e^{\psi_{m1}\frac{L}{2R}} - e^{-\psi_{m1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin \omega_{m1}\frac{L}{2R}\right)\left[-\left(\psi_{m1}^2 - \omega_{m1}^2 - \nu m^2\right)C_{m2}^* - 2\psi_{m1}\omega_{m1}\, C_{m1}^*\right].$$

$$S_{m22} = \left\{e^{\psi_{m1}\frac{L}{2R}} + e^{-\psi_{m1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos \omega_{m1}\frac{L}{2R}\right)\left[\left(\psi_{m1}^2 - \omega_{m1}^2 - \nu m^2\right)C_{m2}^* + 2\psi_{m1}\omega_{m1}\, C_{m1}^*\right] +$$
$$+ \left\{e^{\psi_{m1}\frac{L}{2R}} - e^{-\psi_{m1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin \omega_{m1}\frac{L}{2R}\right)\left[\left(\psi_{m1}^2 - \omega_{m1}^2 - \nu m^2\right)C_{m1}^* - 2\psi_{m1}\omega_{m1}\, C_{m2}^*\right].$$

$$S_{m23} = \left\{e^{\psi_{m2}\frac{L}{2R}} + e^{-\psi_{m2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos \omega_{m2}\frac{L}{2R}\right)\left[\left(\psi_{m2}^2 - \omega_{m2}^2 - \nu m^2\right)C_{m3}^* - 2\psi_{m2}\omega_{m2}\, C_{m4}^*\right] +$$
$$+ \left\{e^{\psi_{m2}\frac{L}{2R}} - e^{-\psi_{m2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin \omega_{m2}\frac{L}{2R}\right)\left[-\left(\psi_{m2}^2 - \omega_{m2}^2 - \nu m^2\right)C_{m4}^* - 2\psi_{m2}\omega_{m2}\, C_{m3}^*\right].$$

$$S_{m24} = \left\{e^{\psi_{m2}\frac{L}{2R}} + e^{-\psi_{m2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos \omega_{m2}\frac{L}{2R}\right)\left[\left(\psi_{m2}^2 - \omega_{m2}^2 - \nu m^2\right)C_{m4}^* + 2\psi_{m2}\omega_{m2}\, C_{m3}^*\right] +$$
$$+ \left\{e^{\psi_{m2}\frac{L}{2R}} - e^{-\psi_{m2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin \omega_{m2}\frac{L}{2R}\right)\left[\left(\psi_{m2}^2 - \omega_{m2}^2 - \nu m^2\right)C_{m3}^* - 2\psi_{m2}\omega_{m2}\, C_{m4}^*\right].$$

$$T_{m2} = \frac{\nu \bar{P}_{rm0}}{k\, m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^2 \left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + \nu m^2\right] \bar{P}_{rmn} \cdot (-1)^n}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}$$

Hiermee hebben we eveneens vergelijking (XXXV b) gereduceerd tot een lineaire vergelijking in a_{m1}, a_{m2}, a_{m3} en a_{m4} waarvan de coëfficienten constant zijn.

Ook vergelijking (XXXVI b) en (XXXVII) brengen we nu in een gelijksoortige vorm.

(XXXVI b) geeft:

$$\bar{x}=\frac{L}{2R} \longrightarrow \frac{d^3\overline{W}_{mH}}{d\bar{x}^3}-(2-\nu)m^2\frac{d\overline{W}_{mH}}{d\bar{x}}+\frac{d^3\overline{W}_{mP}}{d\bar{x}^3}-(2-\nu)m^2\frac{d\overline{W}_{mP}}{d\bar{x}}=0$$

Hieruit volgt:

$$e^{\Psi_{m1}\frac{L}{2R}}\Big\{\Big[(\Psi_{m1}^3-3\Psi_{m1}\omega_{m1}^2)C_{m1}+(3\Psi_{m1}^2\omega_{m1}-\omega_{m1}^3)C_{m2}\Big]\cos\omega_{m1}\frac{L}{2R}+$$
$$+\Big[(-3\Psi_{m1}^2\omega_{m1}+\omega_{m1}^3)C_{m1}+(\Psi_{m1}^3-3\Psi_{m1}\omega_{m1}^2)C_{m2}\Big]\sin\omega_{m1}\frac{L}{2R}\Big\}+$$
$$+e^{-\Psi_{m1}\frac{L}{2R}}\Big\{\Big[(-\Psi_{m1}^3+3\Psi_{m1}\omega_{m1}^2)C_{m1}+(-3\Psi_{m1}^2\omega_{m1}+\omega_{m1}^3)C_{m2}\Big]\cos\omega_{m1}\frac{L}{2R}+$$
$$+\Big[(-3\Psi_{m1}^2\omega_{m1}+\omega_{m1}^3)C_{m1}+(\Psi_{m1}^3-3\Psi_{m1}\omega_{m1}^2)C_{m2}\Big]\sin\omega_{m1}\frac{L}{2R}\Big\}+$$
$$+e^{\Psi_{m2}\frac{L}{2R}}\Big\{\Big[(\Psi_{m2}^3-3\Psi_{m2}\omega_{m2}^2)C_{m3}+(3\Psi_{m2}^2\omega_{m2}-\omega_{m2}^3)C_{m4}\Big]\cos\omega_{m2}\frac{L}{2R}+$$
$$+\Big[(-3\Psi_{m2}^2\omega_{m2}+\omega_{m2}^3)C_{m3}+(\Psi_{m2}^3-3\Psi_{m2}\omega_{m2}^2)\Big]\sin\omega_{m2}\frac{L}{2R}\Big\}+$$
$$+e^{-\Psi_{m2}\frac{L}{2R}}\Big\{\Big[(-\Psi_{m2}^3+3\Psi_{m2}\omega_{m2}^2)C_{m3}+(-3\Psi_{m2}^2\omega_{m2}+\omega_{m2}^3)C_{m4}\Big]\cos\omega_{m2}\frac{L}{2R}+$$
$$+\Big[(-3\Psi_{m2}^2\omega_{m2}+\omega_{m2}^3)C_{m3}+(\Psi_{m2}^3-3\Psi_{m2}\omega_{m2}^2)C_{m4}\Big]\sin\omega_{m2}\frac{L}{2R}\Big\}+$$
$$-(2-\nu)m^2e^{\Psi_{m1}\frac{L}{2R}}\Big\{(\Psi_{m1}C_{m1}+\omega_{m1}C_{m2})\cos\omega_{m1}\frac{L}{2R}+(\Psi_{m1}C_{m2}-\omega_{m1}C_{m1})\sin\omega_{m1}\frac{L}{2R}\Big\}+$$
$$-(2-\nu)m^2e^{-\Psi_{m1}\frac{L}{2R}}\Big\{(-\Psi_{m1}C_{m1}-\omega_{m1}C_{m2})\cos\omega_{m1}\frac{L}{2R}+(\Psi_{m1}C_{m2}-\omega_{m1}C_{m1})\sin\omega_{m1}\frac{L}{2R}\Big\}+$$
$$-(2-\nu)m^2e^{\Psi_{m2}\frac{L}{2R}}\Big\{(\Psi_{m2}C_{m3}+\omega_{m2}C_{m4})\cos\omega_{m2}\frac{L}{2R}+(\Psi_{m2}C_{m4}-\omega_{m2}C_{m3})\sin\omega_{m2}\frac{L}{2R}\Big\}+$$
$$-(2-\nu)m^2e^{-\Psi_{m2}\frac{L}{2R}}\Big\{(-\Psi_{m2}C_{m3}-\omega_{m2}C_{m4})\cos\omega_{m2}\frac{L}{2R}+(\Psi_{m2}C_{m4}-\omega_{m2}C_{m3})\sin\omega_{m2}\frac{L}{2R}\Big\}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{\cdots\cdots\}\sin n\pi=0$$

Deze vergelijking gaan we verder uitwerken.

$$\rightarrow \left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right)\left\{\left[-3\psi_{m_1}^2\omega_{m_1}+\omega_{m_1}^3+(2-\nu)m^2\omega_{m_1}\right]C_{m_1}+\left[\psi_{m_1}^3-3\psi_{m_1}\omega_{m_1}^2-(2-\nu)m^2\psi_{m_1}\right]C_{m_2}\right\}+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right)\left\{\left[\psi_{m_1}^3-3\psi_{m_1}\omega_{m_1}^2-(2-\nu)m^2\psi_{m_1}\right]C_{m_1}+\left[3\psi_{m_1}^2\omega_{m_1}-\omega_{m_1}^3-(2-\nu)\omega_{m_1}\right]C_{m_2}\right\}+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right)\left\{\left[-3\psi_{m_2}^2\omega_{m_2}+\omega_{m_2}^3+(2-\nu)m^2\omega_{m_2}\right]C_{m_3}+\left[\psi_{m_2}^3-3\psi_{m_2}\omega_{m_2}^2-(2-\nu)m^2\psi_{m_2}\right]C_{m_4}\right\}+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right)\left\{\left[\psi_{m_2}^3-3\psi_{m_2}\omega_{m_2}^2-(2-\nu)m^2\psi_{m_2}\right]C_{m_3}+\left[3\psi_{m_2}^2\omega_{m_2}-\omega_{m_2}^3-(2-\nu)\omega_{m_2}\right]C_{m_4}\right\}=0$$

Deze vergelijking vervangen we door:

$$\boxed{S_{m31}a_{m_1}+S_{m32}a_{m_2}+S_{m33}a_{m_3}+S_{m34}a_{m_4}=T_{m_3}}$$

met $S_{m31}=\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right)\left\{\left[-3\psi_{m_1}^2\omega_{m_1}+\omega_{m_1}^3+(2-\nu)m^2\omega_{m_1}\right]C_{m_1}^*-\left[\psi_{m_1}^3-3\psi_{m_1}\omega_{m_1}^2-(2-\nu)m^2\psi_{m_1}\right]C_{m_2}^*\right\}+$

$$+\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right)\left\{\left[\psi_{m_1}^3-3\psi_{m_1}\omega_{m_1}^2-(2-\nu)m^2\psi_{m_1}\right]C_{m_1}^*-\left[3\psi_{m_1}^2\omega_{m_1}-\omega_{m_1}^3-(2-\nu)m^2\omega_{m_1}\right]C_{m_2}^*\right\}.$$

$$S_{m32}=\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right)\left\{\left[-3\psi_{m_1}^2\omega_{m_1}+\omega_{m_1}^3+(2-\nu)m^2\omega_{m_1}\right]C_{m_2}^*+\left[\psi_{m_1}^3-3\psi_{m_1}\omega_{m_1}^2-(2-\nu)m^2\psi_{m_1}\right]C_{m_1}^*\right\}+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right)\left\{\left[\psi_{m_1}^3-3\psi_{m_1}\omega_{m_1}^2-(2-\nu)m^2\psi_{m_1}\right]C_{m_2}^*+\left[3\psi_{m_1}^2\omega_{m_1}-\omega_{m_1}^3-(2-\nu)m^2\omega_{m_1}\right]C_{m_1}^*\right\}.$$

$$S_{m33}=\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right)\left\{\left[-3\psi_{m_2}^2\omega_{m_2}+\omega_{m_2}^3+(2-\nu)m^2\omega_{m_2}\right]C_{m_3}^*-\left[\psi_{m_2}^3-3\psi_{m_2}\omega_{m_2}^2-(2-\nu)m^2\psi_{m_2}\right]C_{m_4}^*\right\}+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right)\left\{\left[\psi_{m_2}^3-3\psi_{m_2}\omega_{m_2}^2-(2-\nu)m^2\psi_{m_2}\right]C_{m_3}^*-\left[3\psi_{m_2}^2\omega_{m_2}-\omega_{m_2}^3-(2-\nu)m^2\omega_{m_2}\right]C_{m_4}^*\right\}.$$

$$S_{m34}=\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right)\left\{\left[-3\psi_{m_2}^2\omega_{m_2}+\omega_{m_2}^3+(2-\nu)m^2\omega_{m_2}\right]C_{m_4}^*+\left[\psi_{m_2}^3-3\psi_{m_2}\omega_{m_2}^2-(2-\nu)m^2\psi_{m_2}\right]C_{m_3}^*\right\}+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right)\left\{\left[\psi_{m_2}^3-3\psi_{m_2}\omega_{m_2}^2-(2-\nu)m^2\psi_{m_2}\right]C_{m_4}^*+\left[3\psi_{m_2}^2\omega_{m_2}-\omega_{m_2}^3-(2-\nu)m^2\omega_{m_2}\right]C_{m_3}^*\right\}.$$

$$T_{m_3}=0$$

($\underline{\text{XXXVII}}$ b) geeft:

$$\bar{x} = \frac{L}{2R} \qquad -m\bar{u}_{mH} + \frac{d\bar{v}_{mH}}{d\bar{x}} + 2km\frac{d\bar{w}_{mH}}{d\bar{x}} - m\bar{u}_{mp} + \frac{d\bar{v}_{mp}}{d\bar{x}} + 2km\frac{d\bar{w}_{mp}}{d\bar{x}} = 0$$

Hieruit volgt:

$$-m\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left[a_{m_1}\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R} + a_{m_2}\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right] + e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left[-a_{m_1}\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R} + a_{m_2}\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right]\right\} +$$

$$-m\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left[a_{m_3}\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R} + a_{m_4}\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right] + e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left[-a_{m_3}\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R} + a_{m_4}\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right]\right\} +$$

$$+ e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left[(b_{m_1}\psi_{m_1} + b_{m_2}\omega_{m_1})\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R} + (-b_{m_1}\omega_{m_1} + b_{m_2}\psi_{m_1})\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right] +$$

$$+ e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left[(-b_{m_1}\psi_{m_1} - b_{m_2}\omega_{m_1})\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R} + (-b_{m_1}\omega_{m_1} + b_{m_2}\psi_{m_1})\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right] +$$

$$+ e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left[(b_{m_3}\psi_{m_2} + b_{m_4}\omega_{m_2})\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R} + (-b_{m_3}\omega_{m_2} + b_{m_4}\psi_{m_2})\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right] +$$

$$+ e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left[(-b_{m_3}\psi_{m_2} - b_{m_4}\omega_{m_2})\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R} + (-b_{m_3}\omega_{m_2} + b_{m_4}\psi_{m_2})\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right] +$$

$$+2km\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left[(c_{m_1}\psi_{m_1} + c_{m_2}\omega_{m_1})\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R} + (-c_{m_1}\omega_{m_1} + c_{m_2}\psi_{m_1})\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right]\right\} +$$

$$+2km\left\{e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\left[(-c_{m_1}\psi_{m_1} - c_{m_2}\omega_{m_1})\cos\omega_{m_1}\frac{L}{2R} + (-c_{m_1}\omega_{m_1} + c_{m_2}\psi_{m_1})\sin\omega_{m_1}\frac{L}{2R}\right]\right\} +$$

$$+2km\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left[(c_{m_3}\psi_{m_2} + c_{m_4}\omega_{m_2})\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R} + (-c_{m_3}\omega_{m_2} + c_{m_4}\psi_{m_2})\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right]\right\} +$$

$$+2km\left\{e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\left[(-c_{m_3}\psi_{m_2} - c_{m_4}\omega_{m_2})\cos\omega_{m_2}\frac{L}{2R} + (-c_{m_3}\omega_{m_2} + c_{m_4}\psi_{m_2})\sin\omega_{m_2}\frac{L}{2R}\right]\right\}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\{\ldots\ldots\ldots\}\sin n\pi = 0$$

Evenals in de voorgaande gevallen moeten we nu deze vergelijking gaan uitwerken en weer vervangen door een vereenvoudigde vorm.

$$\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m_1}\tfrac{L}{2R}\right)\left\{\left(-\omega_{m_1}b_{m_1}^*-\psi_{m_1}b_{m_2}^*-2km\,\omega_{m_1}c_{m_1}^*-2km\,\psi_{m_1}c_{m_2}^*\right)a_{m_1}+\right.$$

$$\left.+\left(-m-\omega_{m_1}b_{m_2}^*+\psi_{m_1}b_{m_1}^*-2km\,\omega_{m_1}c_{m_2}^*+2km\,\psi_{m_1}c_{m_1}^*\right)a_{m_2}\right\}+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m_1}\tfrac{L}{2R}\right)\left\{\left(-m+\psi_{m_1}b_{m_1}^*-\omega_{m_1}b_{m_2}^*+2km\,\psi_{m_1}c_{m_1}^*-2km\,\omega_{m_1}c_{m_2}^*\right)a_{m_1}+\right.$$

$$\left.+\left(\psi_{m_1}b_{m_2}^*+\omega_{m_1}b_{m_1}^*+2km\,\psi_{m_1}c_{m_2}^*+2km\,\omega_{m_1}c_{m_1}^*\right)a_{m_2}\right\}+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m_2}\tfrac{L}{2R}\right)\left\{\left(-\omega_{m_2}b_{m_3}^*-\psi_{m_2}b_{m_4}^*-2km\,\omega_{m_2}c_{m_3}^*-2km\,\psi_{m_2}c_{m_4}^*\right)a_{m_3}+\right.$$

$$\left.+\left(-m-\omega_{m_2}b_{m_4}^*+\psi_{m_2}b_{m_3}^*-2km\,\omega_{m_2}c_{m_4}^*+2km\,\psi_{m_2}c_{m_3}^*\right)a_{m_4}\right\}+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m_2}\tfrac{L}{2R}\right)\left\{\left(-m+\psi_{m_2}b_{m_3}^*-\omega_{m_2}b_{m_4}^*+2km\,\psi_{m_2}c_{m_3}^*-2km\,\omega_{m_2}c_{m_4}^*\right)a_{m_3}+\right.$$

$$\left.+\left(\psi_{m_2}b_{m_4}^*+\omega_{m_2}b_{m_3}^*+2km\,\psi_{m_2}c_{m_4}^*+2km\,\omega_{m_2}c_{m_3}^*\right)a_{m_4}\right\}=0$$

We vervangen dit door:

$$\boxed{S_{m41}a_{m_1}+S_{m42}a_{m_2}+S_{m43}a_{m_3}+S_{m44}a_{m_4}=T_{m4}}$$

met $S_{m41}=\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m_1}\tfrac{L}{2R}\right)\left(-\omega_{m_1}b_{m_1}^*-\psi_{m_1}b_{m_2}^*-2km\,\omega_{m_1}c_{m_1}^*-2km\,\psi_{m_1}c_{m_2}^*\right)+$

$$+\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m_1}\tfrac{L}{2R}\right)\left(-m+\psi_{m_1}b_{m_1}^*-\omega_{m_1}b_{m_2}^*+2km\,\psi_{m_1}c_{m_1}^*-2km\,\omega_{m_1}c_{m_2}^*\right).$$

$$S_{m42}=\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m_1}\tfrac{L}{2R}\right)\left(-m-\omega_{m_1}b_{m_2}^*+\psi_{m_1}b_{m_1}^*-2km\,\omega_{m_1}c_{m_2}^*+2km\,\psi_{m_1}c_{m_1}^*\right)+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_1}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m_1}\tfrac{L}{2R}\right)\left(\psi_{m_1}b_{m_2}^*+\omega_{m_1}b_{m_1}^*+2km\,\psi_{m_1}c_{m_2}^*+2km\,\omega_{m_1}c_{m_1}^*\right).$$

$$S_{m43}=\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m_2}\tfrac{L}{2R}\right)\left(-\omega_{m_2}b_{m_3}^*-\psi_{m_2}b_{m_4}^*-2km\,\omega_{m_2}c_{m_3}^*-2km\,\psi_{m_2}c_{m_4}^*\right)+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m_2}\tfrac{L}{2R}\right)\left(-m+\psi_{m_2}b_{m_3}^*-\omega_{m_2}b_{m_4}^*+2km\,\psi_{m_2}c_{m_3}^*-2km\,\omega_{m_2}c_{m_4}^*\right).$$

$$S_{m44}=\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}+e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\sin\omega_{m_2}\tfrac{L}{2R}\right)\left(-m-\omega_{m_2}b_{m_4}^*+\psi_{m_2}b_{m_3}^*-2km\,\omega_{m_2}c_{m_4}^*+2km\,\psi_{m_2}c_{m_3}^*\right)+$$

$$+\left\{e^{\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}-e^{-\psi_{m_2}\frac{L}{2R}}\right\}\left(\cos\omega_{m_2}\tfrac{L}{2R}\right)\left(\psi_{m_2}b_{m_4}^*+\omega_{m_2}b_{m_3}^*+2km\,\psi_{m_2}c_{m_4}^*+2km\,\omega_{m_2}c_{m_3}^*\right).$$

$$T_{m4}=0$$

De vier constanten : a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}, a_{m_4} kunnen nu bepaald worden uit de vier omlijste formules.

Hiertoe moeten we de matrise S, met de coëfficienten $S_{m_{ij}}$ (i : 1 t/m 4, j : 1 t/m 4) inverteren:

$$S_{m_{ij}}\, a_{m_j} = T_{m_i}$$

(Voor i resp 1, 2, 3, 4)

(De notatie houdt een sommatie in over index j)

$$\rightarrow \quad a_{m_j} = S^{-1}_{m_{ij}}\, T_{m_i}$$

Hiermede zijn dan tenslotte de constanten a_{m_i} bepaald, zodat we nu over kunnen gaan tot de numerieke uitwerking, die is toegepast op het te beschouwen probleem.

5.11 Opmerking.

In het voorgaande is steeds aangenomen dat sommeren en differentiëren steeds verwisseld mocht worden. Hiervoor is het nodig dat de gebruikte reeksen uniform convergent zijn.
Het zal blijken dat dit niet zo is omdat de functie $\overline{F}$ discontinu is.
Ter plaatse van deze discontinuiteiten zal dan het verschijnsel van Gibbs optreden. De resultaten, die we dan ook op deze plaatsen vinden, zullen van geringe waarde zijn.
Met deze onvolkomenheid zal echter geen rekening worden gehouden. We hopen dat de invloed ervan geen afbreuk zal doen aan de geldigheid van de resultaten op enige afstand van de discontinuiteiten.

6. De modelregels

Wanneer we de theorie, die in het vorige hoofdstuk werd behandeld, toe willen passen op een in werkelijkheid bestaande constructie, waarbij zo goed mogelijk is voldaan aan alle beperkingen, die we ons daarbij hebben opgelegd, in concreto: een cirkelvormige doorsnede met constante wanddikte, „oneindig" slappe eindschotten en alleen belasting in radiale richting, willen we ook de hierbij verkregen resultaten voor de spanningstoestand vergelijken met de in werkelijkheid optredende spanningen, om een idee te verkrijgen van de waarde van de theorie.

Het is echter om allerlei redenen van praktische aard ondoenlijk om het experiment uit te voeren aan een werkelijk bestaande tankconstructie en dus is het noodzakelijk om gebruik te maken van een verkleind model, dat we, indien dat mogelijk is, in belaste toestand een spanningsverdeling willen geven, die gelijkvormig is, met de spanningstoestand, die in de bestaande tank optreedt.

Allereerst zorgen we voor de geometrische gelijkvormigheid met een schaalfactor, s :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{R_{werk.}}{R_{mod.}} &= s \\ \frac{L_{werk.}}{L_{mod.}} &= s \\ \frac{t_{werk.}}{t_{mod.}} &= s \end{aligned} \right.$$

Het homogene deel van de differentiaalvergelijkingen voor de verplaatsingen ($\underline{\underline{XXIV}}$), ($\underline{\underline{XXV}}$), ($\underline{\underline{XXVI}}$) uit het vorige hoofdstuk heeft voor de werkelijkheid en voor het model dezelfde vorm wanneer geldt:

$$\nu_{werk.} = \nu_{mod.}$$

Wanneer hieraan is voldaan geldt:

$$\frac{\left[\bar{u}(\bar{x},\bar{\varphi}),\ \bar{v}(\bar{x},\bar{\varphi}),\ \bar{w}(\bar{x},\bar{\varphi})\right]_{werk.}}{\left[\bar{u}(\bar{x},\bar{\varphi}),\ \bar{v}(\bar{x},\bar{\varphi}),\ \bar{w}(\bar{x},\bar{\varphi})\right]_{mod.}} = \frac{\bar{P}_{r\,werk.}}{\bar{P}_{r\,mod.}}$$

We gaan nu de formules bekijken, waaruit de spanningen worden berekend, waarbij we afzien van de in radiale richting optredende spanningen.

Uit ($\overline{XI}$) volgt:

$$\sigma_{x_A} = \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} - \frac{z}{R}\cdot\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2} + \nu\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{\varphi}} + \frac{\bar{w}}{1+z/R} - \frac{z/R}{1+z/R}\cdot\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{\varphi}^2}\right)\right\}$$

Uit ($\overline{XII}$) volgt:

$$\sigma_{\varphi_A} = \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{\varphi}} + \frac{\bar{w}}{1+z/R} - \frac{z/R}{1+z/R}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\bar{\varphi}^2} + \nu\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} - \frac{z}{R}\cdot\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}\right)\right\}$$

Uit ($\overline{XIII}$) volgt:

$$\tau_{x\varphi_A} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left\{\frac{1}{1+z/R}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{\varphi}} + (1+z/R)\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} - \frac{2z/R + z^2/R^2}{1+z/R}\cdot\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{\varphi}}\right\}$$

We kunnen nu tenslotte zeggen:

$$\frac{\text{spanningen op bepaalde plaats in werkelijkheid}}{\text{spanningen op overeenkomstige plaats in model}} =$$

$$\frac{E_{werk.}\cdot\bar{P}_{r\,werk.}}{E_{mod.}\cdot\bar{P}_{r\,mod.}} = r$$

r is dus een gelijkvormigheidsfactor voor de grootte van de spanningen in werkelijkheid en in het model.

Voor deze factor geldt:

$$\eta = \frac{E_{werk.} \cdot \dfrac{\gamma_{werk.} \cdot R^2_{werk.}}{E_{werk.} \cdot t_{werk.}}}{E_{mod.} \cdot \dfrac{\gamma_{mod.} \cdot R^2_{mod.}}{E_{mod.} \cdot t_{mod.}}} = \frac{\gamma_{werk.}}{\gamma_{mod.}} \cdot s$$

met γ: soortelijk gewicht van de vloeistof.

De in het model optredende rekken moeten van een zodanige grootte-orde zijn dat ze goed met rekstrookjes gemeten kunnen worden, omdat we het experiment als rekstrookmeting willen uitvoeren.

Het lijkt redelijk dat de rekken in het model even groot zijn als die in werkelijkheid.

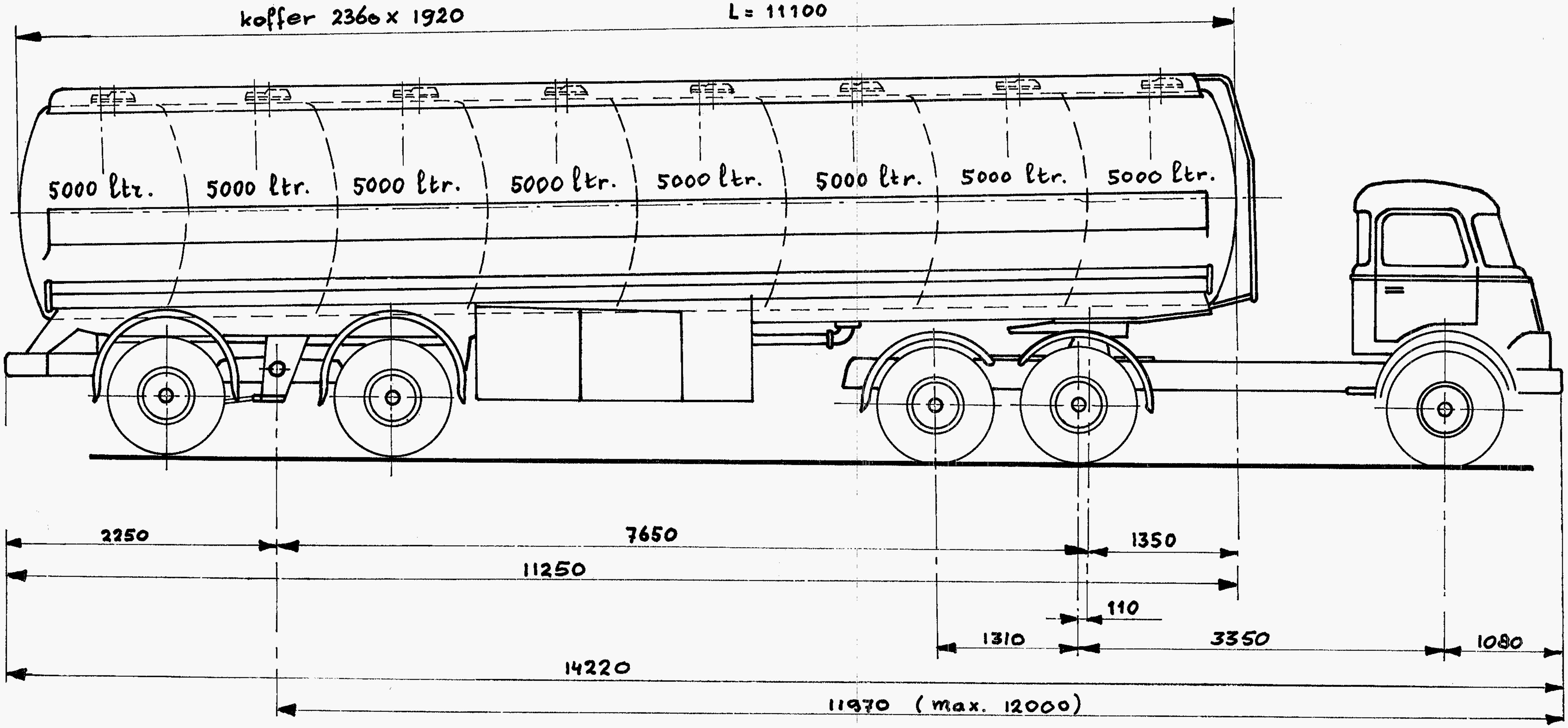
$$\rightarrow \quad \frac{E_{mod.}}{E_{werk.}} \cdot \frac{\gamma_{werk.}}{\gamma_{mod.}} \cdot \frac{R_{werk}}{R_{mod}} = 1 \quad \text{ofwel}$$

$\dfrac{E}{R \cdot \gamma}$ moet dezelfde waarde hebben zowel voor het model als voor de werkelijkheid.

Wanneer we het model van hetzelfde materiaal willen vervaardigen als de werkelijke constructie dan zijn we aangewezen op een vloeistof met een hoog soortelijk gewicht (kwik) om bij een verkleind model aan bovenstaande voorwaarde te kunnen voldoen. Het gebruik van een dergelijke vloeistof brengt echter teveel bezwaren met zich mee. Een andere mogelijkheid is dat we een materiaal gebruiken met een kleinere elasticiteitsmodulus en dat we met dezelfde vloeistof als in werkelijkheid de tank belasten.

Tenslotte kunnen we ook een combinatie van beide mogelijkheden nemen, om aan de eisen te voldoen.

Zoals zal blijken treden er echter moeilijkheden op bij de vervaardiging van een model, dat geometrisch gelijkvormig is met de werkelijkheid.



Bovenstaande tekening geeft weer, hoe een 40.000 ltr. tankoplegger er in werkelijkheid uitziet.
De oplegger, gefabriceerd bij „DAF" (type RW 20-35) is bestemd voor het vervoer van benzine.
Het gebruikte materiaal is „constructal" met een dikte van 4 mm.

Zoals de tekening op de vorige bladzijde (77) laat zien zijn voor een fictieve constructie redelijke afmetingen:

$L = 10500$ mm.
$R = 1050$ mm.
$t = 4$ mm.

Wanneer we een model zouden willen maken met $s = 7$ dan geeft dit:

$L_{mod.} = 1500$ mm.
$R_{mod.} = 150$ mm.
$t_{mod} = 0.57$ mm.

Terwijl de omvang van dit model geschikt is voor het experiment, is het onmogelijk om dit te vervaardigen met een dergelijke wanddikte. Wanneer dit wel mogelijk zou zijn geweest, hadden we bij gebruikmaking van een vloeistof met hetzelfde soortelijk gewicht als in werkelijkheid, een materiaalsoort moeten gebruiken met een elasticiteitsmodulus, die 7 maal zo klein is als die van „constructal", om aan de eis te voldoen, dat in het model ~~even grote rekken optreden als in werkelijkheid.~~

Uit het voorgaande blijkt, dat het onmogelijk is om een exact model van de werkelijkheid te vervaardigen.

Om toch de theorie te kunnen controleren denken we aan een proefstuk met dezelfde R en L, met een aanzienlijk grotere wanddikte en een aanzienlijk kleinere elasticiteitsmodulus, dan in het theoretisch ontworpen model en we hopen dat de orde van grootte van de optredende rekken in belaste toestand, dezelfde is als in werkelijkheid.

We verwachten dat bij toepassing van de theorie, de overeenkomst tussen de resultaten van de theorie en de werkelijk optredende toestand, bij dit proefstuk in elk geval ongunstiger is dan bij het theoretische model (ofwel de echte constructie), wegens de relatief grotere wanddikte.

7. Het gekozen proefstuk en het te behandelen probleem

Aangezien we voor het proefstuk een materiaalsoort wensen te gebruiken met een elasticiteitsmodulus, die aanzienlijk kleiner is, dan die van „constructal" werd gedacht aan een koker, vervaardigd van kunststof.

Besloten werd om voor de koker een „perspex" pijp te gebruiken, die in de handel verkrijgbaar is bij: „B.E.M. Wientjes- Industrie en Handelsonderneming N.V.", gevestigd te Roden (NL), met de volgende afmetingen:

$L = 1500$ mm.

$R = 148$ mm.

$t = 4$ mm.

Hieraan zijn enige nadelen verbonden, die echter onoverkomelijk waren nl:

1) Toleranties voor de buitendiameter: $+0{,}3$ - $-0{,}5$ %
2) Toleranties voor de wanddikte: 20 %

De voordelen van deze buizen zijn echter ook belangrijk, nl: de naadloosheid en kleurloosheid.

Het doel van deze opdracht was, een spanningsanalyse te geven van een tank, die met een vloeistof was gevuld, en die was opgelegd op twee zadels.

Bij de behandeling van de algemene schalentheorie, werden echter enige beperkingen ingevoerd, die nodig waren om de berekening te vereenvoudigen:

1. cirkelvormige doorsnede met constante wanddikte.
2. alleen belasting in radiale richting.
3. vrije uiteinden.

Afgezien van de toleranties in de buitendiameter en de wanddikte van de pijp, is voldaan aan de eerste beperking, die we ons hebben opgelegd.

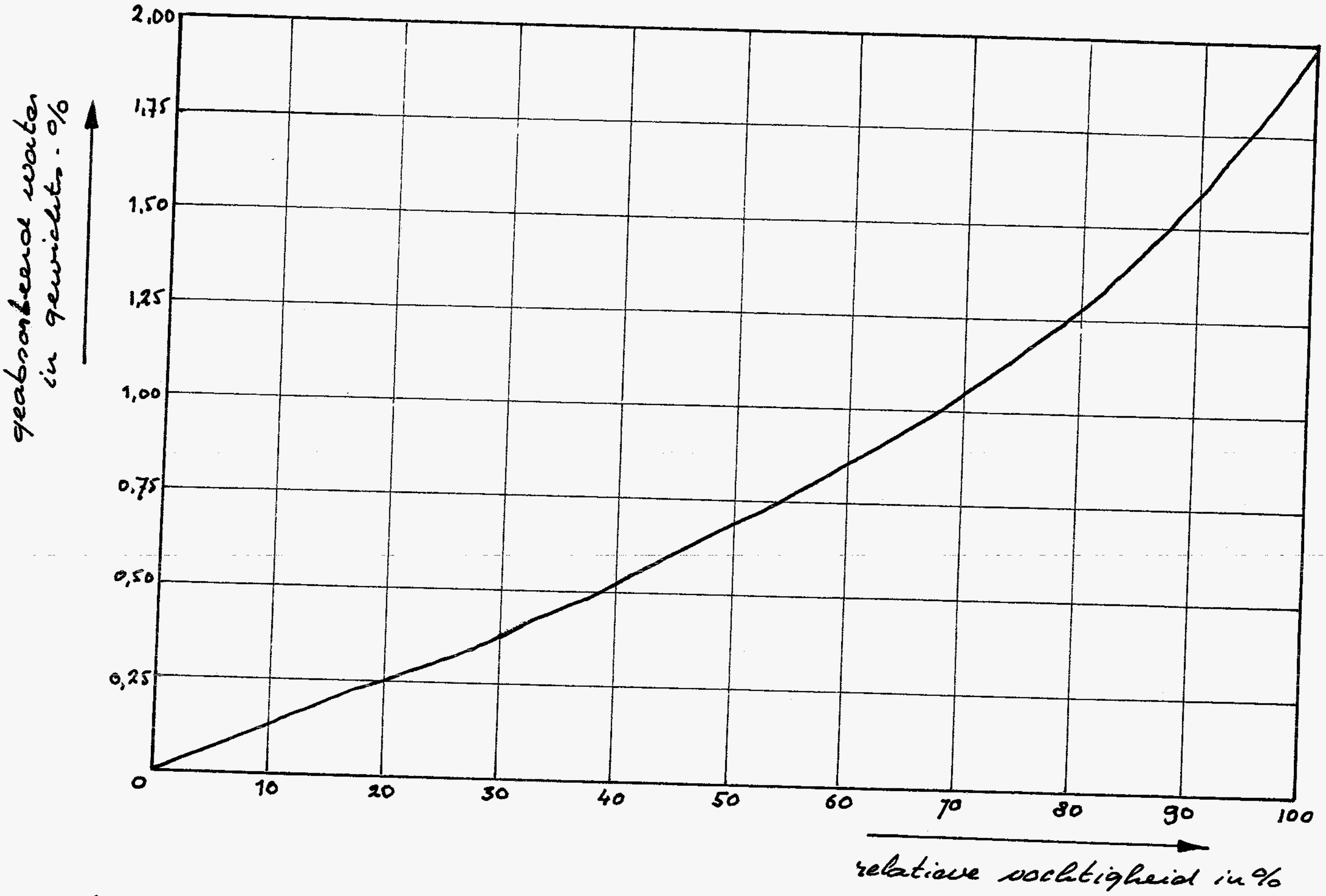
De tweede beperking is te realiseren door de wrijvingscoëfficient tussen de koker en het gedeelte van de zadels, dat met de pijp in aanraking is, zo klein mogelijk te maken.
Tevens kunnen de zadels worden opgehangen aan een staalkabel, die garandeert dat de beide resultanten van de krachten, die door de zadels op de pijp worden uitgeoefend, een verticale richting hebben en de hartlijn van de cilinder snijden.

De derde beperking is welliswaar te verwezenlijken zoals zal blijken bij de beschrijving van het experiment, maar doet afbreuk aan het doel wat we ons hebben gesteld, omdat een koker met vrije uiteinden, niet meer als een vloeistoftank is te beschouwen.
Afgezien van een axiale verdeelde belasting, die een gevolg is van de vloeistofdruk op de eindschotten, oefenen de eindschotten op de cilinderwand in belaste toestand slechts een statisch equivalente belasting uit. Wanneer de invloed hiervan op enige afstand van het uiteinde van de koker enigszins is afgenomen, wordt toch een redelijk antwoord gegeven op de vraag wat het gevolg is voor de spanningstoestand, van deze wijze van ondersteuning van een vloeistoftank. Of dit inderdaad het geval is, zal niet worden nagegaan, maar wordt toch betwijfeld.

We hopen echter dat de tendens, die de toe te passen wijze van ondersteuning geeft aan de spanningstoestand enigszins bewaard blijft en dit moet dan ook worden gezien als het praktische nut van dit onderzoek.
Uit theoretisch oogpunt blijft 't onderzoek natuurlijk even interessant.

8. De eigenschappen van „perspex".

Voor het uit te voeren experiment zijn alleen de mechanische eigenschappen van „perspex" belangrijk. Deze eigenschappen zijn eventueel afhankelijk van de temperatuur en in geringere mate van de hoeveelheid water, die door het perspex is geabsorbeerd. Daar de waterabsorbtie, zoals uit onderstaande grafiek blijkt, gering is, kunnen we de invloed hiervan volledig verwaarlozen.



De bovenstaande grafiek geeft de waterabsorbtie weer van een „perspex" plaat met een dikte van 1/16 inch in verzadigde toestand, als functie van de relatieve vochtigheid.

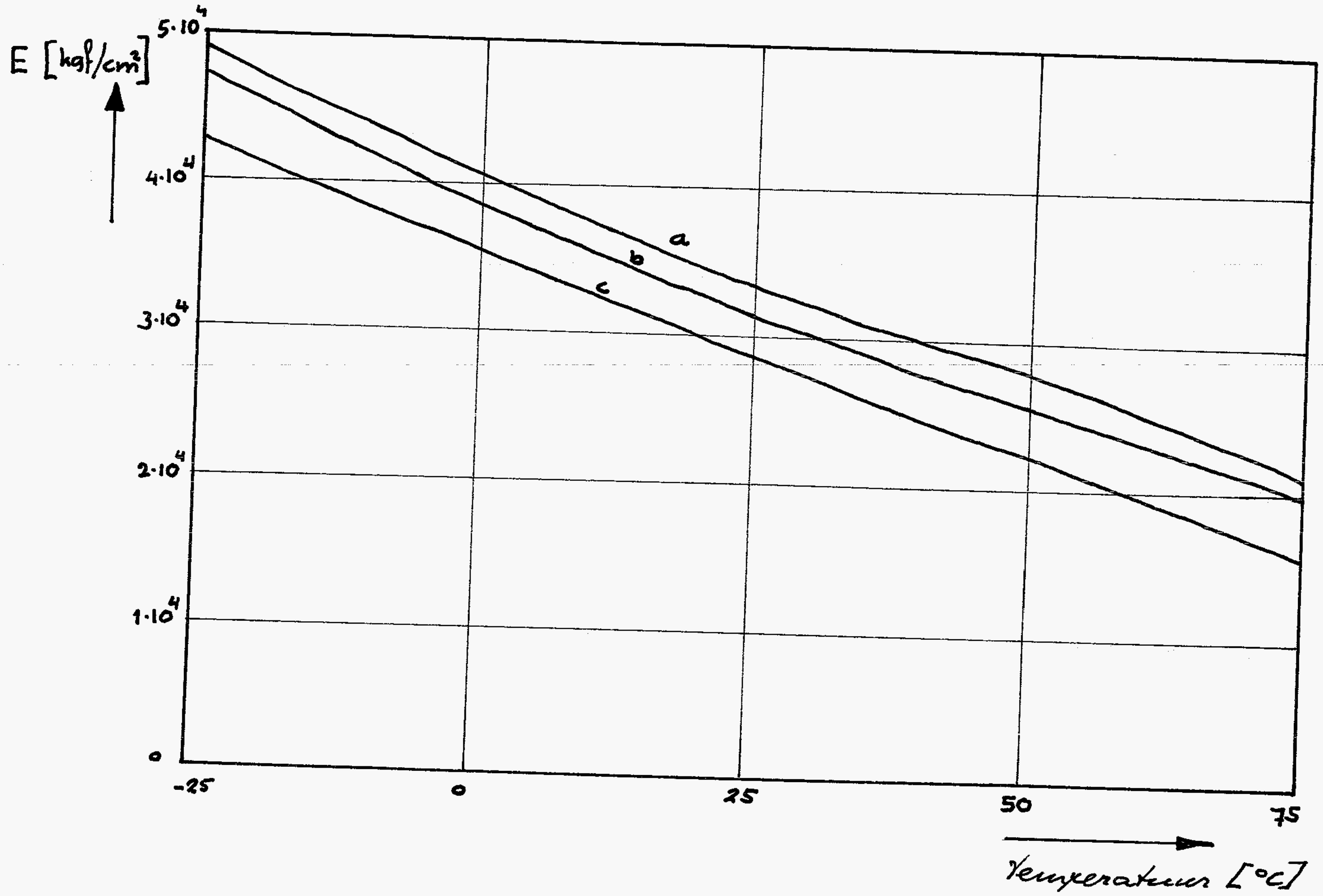
De mechanische eigenschappen, die belangrijk voor ons zijn hebben betrekking op het elastisch gedrag, vertegenwoordigd door de elasticiteitsmodulus E en de constante van Poisson, ν, en het kruipen. Ook is de treksterkte belangrijk omdat we daar met de optredende spanningen ver onder moeten blijven.

Het bleek dat we als functie van de temperatuur voor de elasticiteitsmodulus verschillende waarden kregen indien we:

a) de helling in de oorsprong in de grafiek, die het verband aangeeft tussen de spanning en de rek bij een trekstaaf, als maatgevend beschouwen.

b) de helling in de oorsprong in de grafiek, die het verband aangeeft tussen de spanning en de rek bij een drukstaaf, als maatgevend beschouwen.

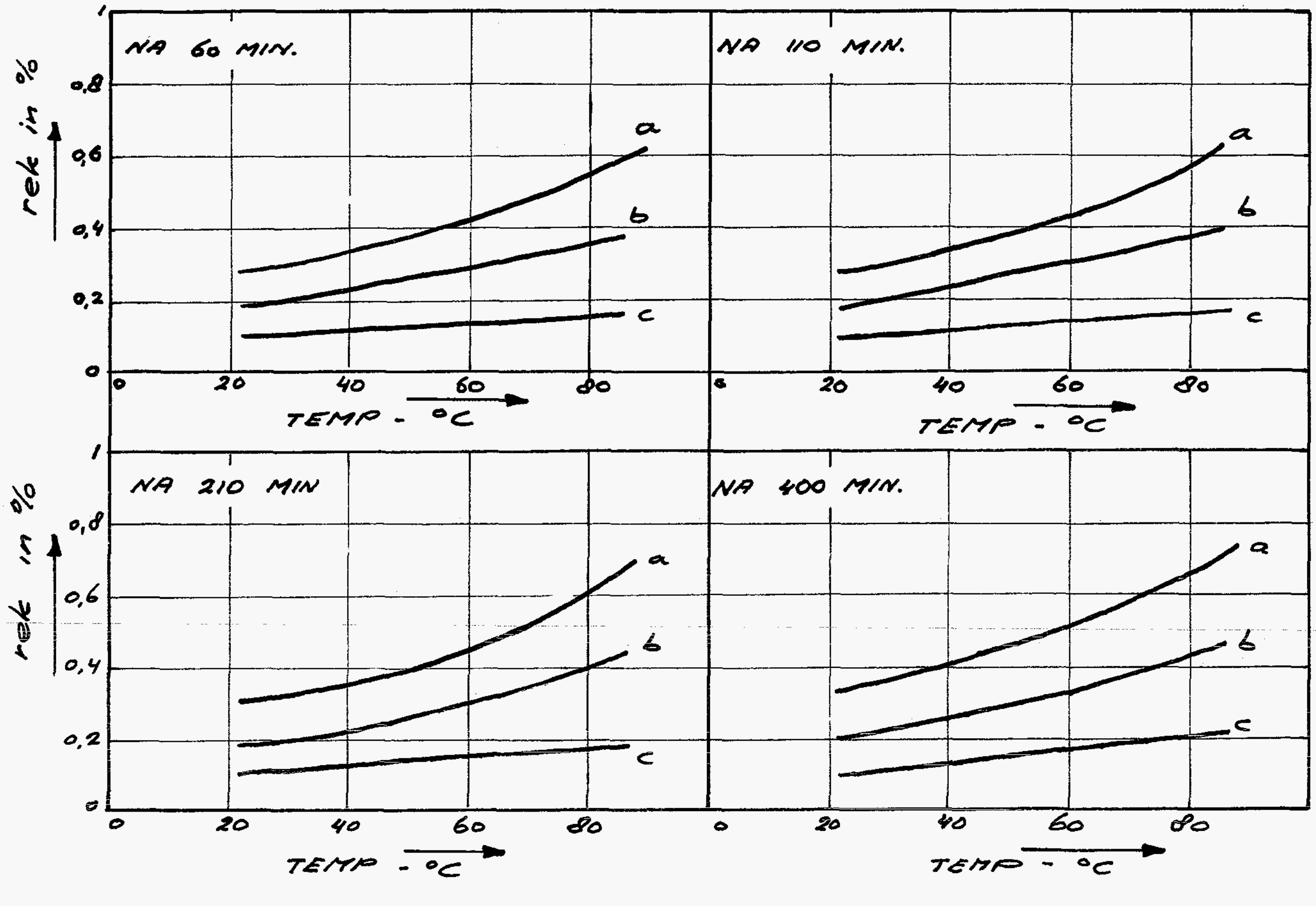
c) de spanning bij 1 % rek delen door 0,01.



We nemen nu aan dat bij kamertemperatuur (20°C – 25°C) gerekend kan worden op een gemiddelde elasticiteitsmodulus ter grootte van $3{,}0 \cdot 10^4$ kgf/cm².

Bij kamertemperatuur is de aangegeven waarde voor de dwarscontractiecoëfficient: 0,35. Voor temperaturen boven 100°C, waar grote deformaties mogelijk zijn, nadert deze coëfficient tot 0,5.

Om een indruk te krijgen van de kruipverschijnselen geven we de volgende grafieken:



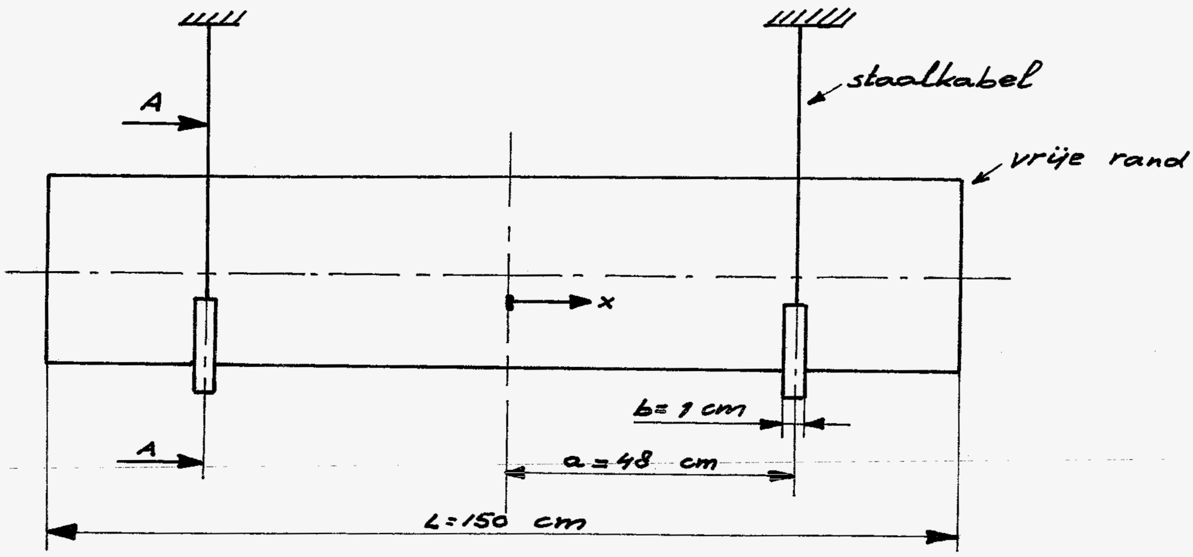
a) spanning: 140 kgf/cm²
b) spanning: 75 kgf/cm²
c) spanning: 40 kgf/cm²

Uit de bovenstaande grafieken blijkt dat we voor een korte tijd (< 400 min), bij een lage spanning (< 50 kgf/cm²) bij kamertemperatuur geen rekening behoeven te houden met eventueel optredende kruipverschijnselen.

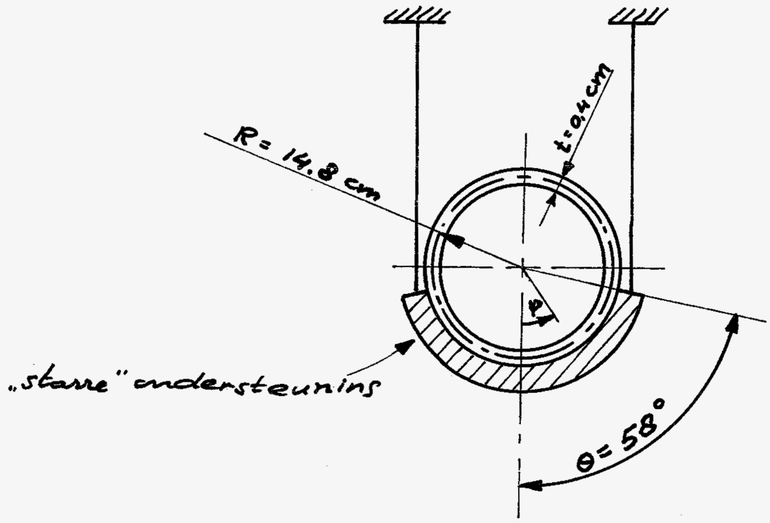
De treksterkte bij kamertemperatuur bedraagt ongeveer 800 kgf/cm². Deze waarde mag dus door de spanning nooit worden overschreden.

9. Enige numerieke gegevens van de proefopstelling.

Bij de uitwerking van de theorieën, welke in de hierna volgende hoofdstukken op het probleem zullen worden toegepast, zijn de numerieke gegevens van de proefopstelling noodzakelijk. Deze gegevens zullen in het hoofdstuk over het experiment zelf, nader worden toegelicht.
In onderstaande tekening zijn de benodigde grootheden weergegeven.
Alle maten zijn in cm aangegeven.



VOORAANZICHT



koker is geheel met vloeistof gevuld.

DOORSNEDE A-A

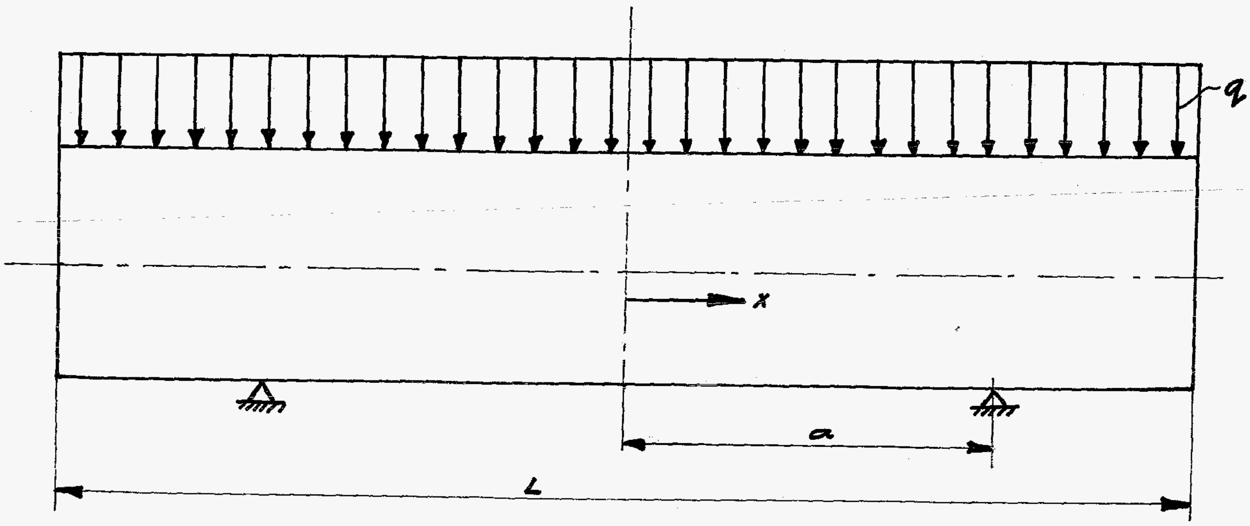
materiaal koker: „perspex" met $E = 3\cdot10^4$ kgf/cm², $\nu = 0.35$
vulvloeistof: water met soortelijk gewicht, $\gamma = 1\cdot10^{-3}$ kgf/cm³

10. Toepassing van de gewone balkentheorie.

Voor de toepassing van de gewone balkentheorie gaan we de koker in eerste instantie vervangen door een balk, die is opgelegd op twee steunpunten ter plaatse van $x = \pm a$, waarop een verdeelde belasting werkt.

Bij de berekening van deze verdeelde belasting, q, is het niet nodig om het eigen gewicht van de balk (koker) in rekening te brengen. We gaan bij het experiment namelijk uit van de situatie, dat de koker belast is door zijn eigen gewicht en we bepalen de verandering van de spanningstoestand ten gevolge van de vloeistofkolom, die op de wand werkt.

Het oorspronkelijke probleem is dus vervangen door het met behulp van onderstaande tekening weergegeven probleem.



$$q = \pi (R-t)^2 \cdot dx \cdot \gamma / dx = \pi (R-t)^2 \cdot \gamma .$$

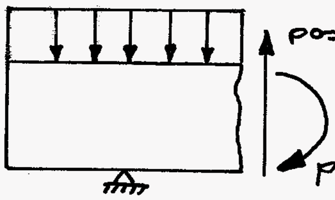
Wanneer we gebruik maken van $t \ll R$ kunnen we schrijven:

$$q = \pi R^2 \gamma .$$

Hierdoor wordt slechts een geringe fout geïntroduceerd.

We gaan nu over tot het berekenen van de snedegrootheden in een doorsnede x = constant.

We maken de volgende tekenafspraak voor de snedegrootheden:



Voor $-L/2 \leq x < -a$ geldt:

$$D(x) = (x + L/2) \cdot \pi R^2 \gamma .$$

$$M(x) = \tfrac{1}{2} (x + L/2)^2 \cdot \pi R^2 \gamma .$$

Voor $-a < x < a$ geldt:

$$D(x) = (x + L/2) \pi R^2 \gamma - L/2 \pi R^2 \gamma = x \cdot \pi \cdot R^2 \gamma .$$

$$M(x) = \tfrac{1}{2} (x + L/2)^2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \gamma - (x + a) \cdot L/2 \pi R^2 \gamma =$$

$$= (\tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{8} L^2 - a \cdot L/2) \pi R^2 \gamma .$$

Voor $a < x \leq L/2$ geldt:

$$D(x) = (x - L/2) \pi R^2 \gamma .$$

$$M(x) = + \tfrac{1}{2} (x - L/2)^2 \pi R^2 \gamma .$$

Wanneer het moment en dwarskracht in een doorsnede bekend zijn, kunnen we de normaalspanning en de schuifspanning op elke plaats in deze dwarsdoorsnede berekenen, waarbij we voor de vorm van de dwarsdoorsnede, die van de werkelijke koker nemen.
Wanneer we het verloop van de normaalspanning op een dwarsdoorsnede, over de wanddikte verwaarlozen, geldt voor de membraanspanning, die positief is in geval van trek, op een vlak x is constant in x-richting, als functie van x en φ:

$$\sigma_{m_x} = \frac{M(x) \cdot (-R \cos \varphi)}{I_{\text{t.o.v. } \varphi = \pi/2}}$$

Voor het oppervlaktetraagheidsmoment ten opzichte van de horizontale as $\varphi = \pi/2$ geldt:

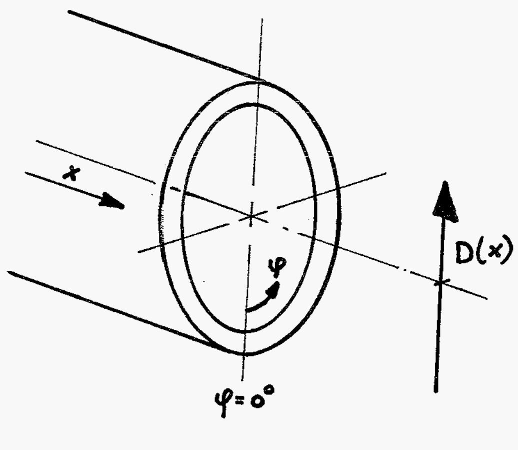
$$I_{t.o.v.\ \varphi=\pi/2} = \int_0^{2\pi} (-R\cos\varphi)^2\, t\cdot R\cdot d\varphi = \pi\cdot R^3\cdot t.$$

Dit geeft dan: $$\sigma_{mx} = -\frac{M(x)\cdot\cos\varphi}{\pi\cdot R^2\cdot t}.$$

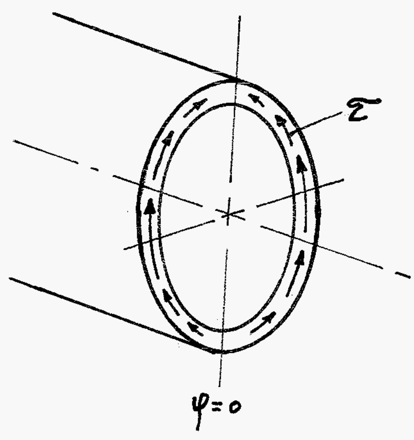
De schuifspanningsverdeling ten gevolge van de dwarskracht $D(x)$ in deze dunwandige dwarsnede kan worden berekend met de formule:

$$\tau = \frac{D(x)\cdot S_{t.o.v.\ \varphi=\pi/2}(\varphi)}{2\cdot t\cdot I_{t.o.v.\ \varphi=\pi/2}}$$

Hierin is τ de schuifspanning, die gelijkmatig over de kokerwand is verdeeld en evenwijdig is met de kokerwand, waarbij de richting wordt gegeven door middel van onderstaande tekening:



geeft:



$S_{t.o.v.\ \varphi=\pi/2}(\varphi)$ is het statisch moment ten opzichte van de as $\varphi = \pi/2$ van het gedeelte van de doorsnede tussen de rechten: $\varphi=\varphi$ en $\varphi = 2\pi-\varphi$

Hiervoor geldt:

$$S_{t.o.v.\ \varphi=\pi/2}(\varphi) = \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} (-R\cos\varphi) R\cdot t\cdot d\varphi = 2R^2 t\sin\varphi$$

voor $0 \leq \varphi \leq \pi$

Voor $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ geldt : $S_{t.o.v.\ \varphi=\pi/2}(\varphi) = -2R^2 t \sin\varphi$

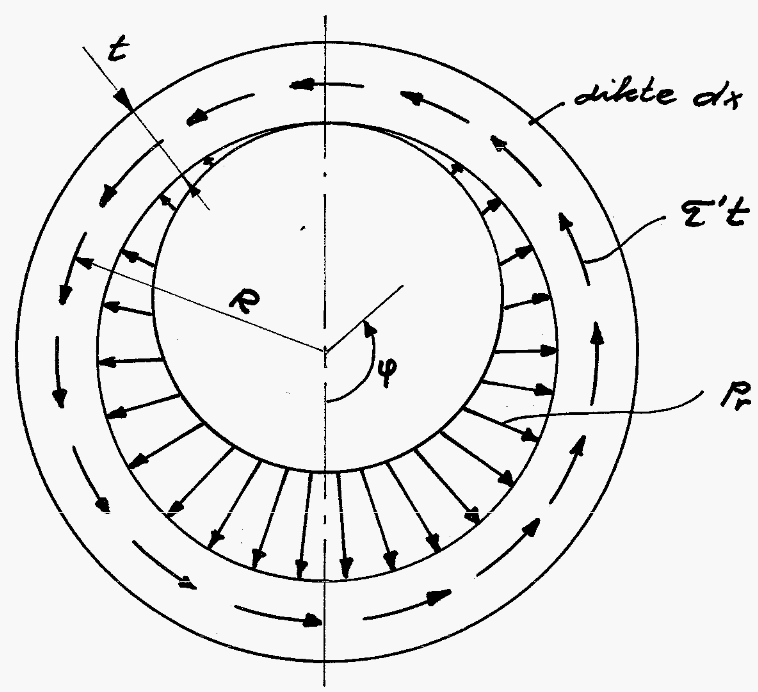
Résumerend kunnen we dus mededelen dat voor de schuifspanning geldt:

$$\tau = \frac{D(x)\cdot|\sin\varphi|}{\pi\cdot R\cdot t}$$, waarbij de richting wordt gegeven door de figuur op pagina 87.

Wanneer we aannemen dat de nu berekende schuifspanningsverdeling ook inderdaad in de werkelijkheid optreedt en we veronderstellen dat er behalve deze schuifspanning τ geen enkele andere spanning voorkomt, die in het vlak van een doorsnede x = constant werkt, dan kunnen we door een stukje dx uit de koker te beschouwen, de snedegrootheden op een vlak φ = constant berekenen, en dus de membraanspanning en maximale buigspanning in tangentiële richting, respectievelijk : $\sigma_{m\varphi}$ en $\sigma_{b\varphi}$.

Deze aannamen gelden uiteraard niet ter plaatse van de ondersteuning ($x=a$) en in hoeverre deze elders gelden blijft een vraag, waarop we alleen met behulp van het experiment een antwoord kunnen krijgen.

Het probleem is dus de snedegrootheden te bepalen in het door onderstaande tekening gegeven probleem.



$p_r \cdot dx$: lijnbelasting, die in radiale richting werkt op de binnenwand van de koker, die afhankelijk is van de vloeistofdruk.

$$p_r = (R + R\cos\varphi)\gamma$$

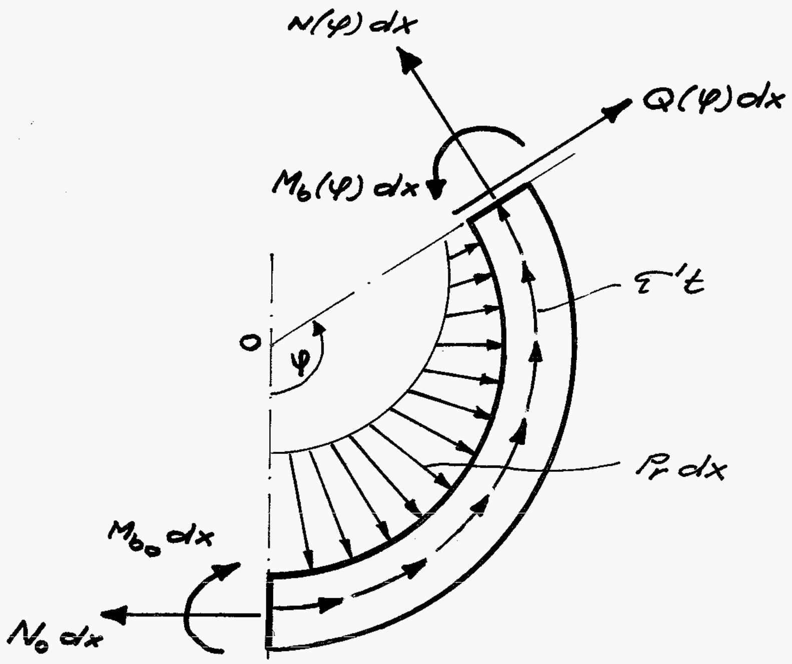
$\tau' t$: lijnbelasting, die in tangentiale richting werkt, afhankelijk van het verschil in schuifspanning op het voorvlak $(x+dx)$ en op het achtervlak (x), positief in de richting van toenemende φ.

$$0 \leq \varphi \leq \pi \quad : \quad \tau' = \frac{d\tau}{dx}dx = \frac{\frac{dD(x)}{dx}dx \cdot |\sin\varphi|}{\pi \cdot R \cdot t} = \frac{R\gamma \sin\varphi \, dx}{t}$$

$$\pi \leq \varphi \leq 2\pi \quad : \quad \tau' = -\frac{d\tau}{dx}dx = -\frac{\frac{dD(x)}{dx}dx \cdot |\sin\varphi|}{\pi \cdot R \cdot t} = \frac{R\gamma \sin\varphi \, dx}{t}$$

Omdat de belasting, die op de ring met dikte dx werkt, onafhankelijk is van de x-coördinaat, zullen eveneens de snedegrootheden en dus ook $\sigma_{m\varphi}$ en $\sigma_{b\varphi}$ bij deze berekeningsmethode onafhankelijk van x zijn.

We snijden de ring door bij $\varphi = 0$ en bij een willekeurige φ en we gaan met behulp van de evenwichtsvergelijkingen de snedegrootheden bij willekeurige φ, als functie van de snedegrootheden bij $\varphi = 0$ berekenen.



Het evenwicht in horizontale richting levert:

$$-N_o\,dx + \int_0^{\varphi}(R+R\cos\varphi)\gamma\,dx\cdot R\sin\varphi\,d\varphi + \int_0^{\varphi}R\sin\varphi\cdot\gamma\cdot dx\cdot R\cos\varphi\,d\varphi + N(\varphi)\cdot dx\cos\varphi$$
$$+\,Q(\varphi)\,dx\sin\varphi = 0$$

$$\rightarrow\; -N_o + N(\varphi)\cos\varphi + Q(\varphi)\sin\varphi + \gamma R^2(1-\cos\varphi+\sin^2\varphi) = 0$$

Het evenwicht in verticale richting levert:

$$-\int_0^{\varphi}(R+R\cos\varphi)\gamma\,dx\cdot R\cdot\cos\varphi\,d\varphi + \int_0^{\varphi}R\sin\varphi\,\gamma\,dx\cdot R\sin\varphi\,d\varphi$$
$$+\,N(\varphi)\,dx\sin\varphi - Q(\varphi)\,dx\cos\varphi = 0$$

$$\rightarrow\; N(\varphi)\sin\varphi - Q(\varphi)\cos\varphi + \gamma R^2(-\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi) = 0$$

Het momentenevenwicht om O leert ons:

$$-N_o\cdot dx\cdot R - M_{bo}\,dx + \int_0^{\varphi}R\gamma\sin\varphi\,dx\cdot R\cdot R\,d\varphi + N(\varphi)\,dx\cdot R + M_b(\varphi)\,dx = 0$$

$$\rightarrow\; -N_o\cdot R - M_{bo} + N(\varphi)\cdot R + M_b(\varphi) + \gamma R^3(1-\cos\varphi) = 0$$

Uit de eerste twee vergelijkingen elimineren we $Q(\varphi)$

$$\rightarrow\; N(\varphi) = N_o\cos\varphi + \gamma R^2(1-\cos\varphi)$$

$$\rightarrow\; Q(\varphi) = N_o\sin\varphi - 2\gamma R^2\sin\varphi$$

$$\rightarrow\; M_b(\varphi) = M_{bo} + (N_o R - 2\gamma R^3)(1-\cos\varphi)$$

We berekenen nu de elastische energie A in de ring met dikte dx. Daarna kunnen we met behulp van de stelling van Castigliano de nog onbekende N_o en M_{bo} berekenen nl. uit:

$$\frac{\partial A}{\partial N_o} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial A}{\partial M_{bo}} = 0$$

We brengen alleen de buigingsenergie in rekening

$$A = \frac{1}{2EJ} \int_0^{2\pi} (M_b\, dx)^2 R\, d\varphi$$

$$\frac{\partial A}{\partial N_0} = 0 \rightarrow \int_0^{2\pi} \left\{ M_{b_0} + (N_0 R - 2\gamma R^3)(1-\cos\varphi) \right\} . (1-\cos\varphi)\, d\varphi = 0$$

$$\rightarrow 2\pi \cdot M_{b_0} + 3\pi (N_0 R - 2\gamma R^3) = 0$$

ofwel $2 M_{b_0} + 3 N_0 R - 6\gamma R^3 = 0$

$$\frac{\partial A}{\partial M_{b_0}} = 0 \rightarrow \int_0^{2\pi} \left\{ M_{b_0} + (N_0 R - 2\gamma R^3)(1-\cos\varphi) \right\} d\varphi = 0$$

$$\rightarrow 2\pi M_{b_0} + 2\pi (N_0 R - 2\gamma R^3) = 0$$

ofwel $M_{b_0} + N_0 R - 2\gamma R^3 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} N_0 = 2\gamma R^2 \\ M_{b_0} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} N(\varphi) = \gamma R^2 (1+\cos\varphi) \\ Q(\varphi) = 0 \\ M_b(\varphi) = 0 \end{array}$$

Hiermede zijn nu de snedegrootheden bekend, en dus ook $\sigma_{m\varphi}$ en $\sigma_{b\varphi}$:

$$\sigma_{m\varphi} = N(\varphi)\, dx / t \cdot dx = \frac{\gamma R^2}{t} (1+\cos\varphi)$$

$$\sigma_{b\varphi} = M_b(\varphi)\, dx \cdot t/2 \,/\, 1/12 \cdot t^3\, dx = 6 M_b(\varphi)/t^2 = 0$$

Dit zou gelden voor elke waarde van x, behalve ter plaatse van de ondersteuning. We verwachten dan ook, dat de gevonden waarden voor $\sigma_{m\varphi}$ en $\sigma_{b\varphi}$, zeker in de omgeving van de ondersteuning, geen enkele overeenkomst met de in werkelijkheid optredende waarden zal hebben. In hoeverre er enige overeenkomst is, op enige afstand van de steunpunten, zal door vergelijking met de experimenteel gevonden waarden moeten blijken.

Omtrent de waarde van de maximale buigspanning in axiale richting geeft de nu toegepaste balkentheorie in het geheel geen resultaten.

In de onderstaande tabel zijn σ_{mx} en $\sigma_{m\varphi}$ gegeven als functie van x en φ, waarbij gebruik is gemaakt van de numerieke gegevens van de proefopstelling, zoals die in hoofdstuk 9 zijn vermeld.

σ_{mx} in kgf/cm^2

		φ						
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
x [cm]	0	1,969	1,705	0,984	0,000	-0,984	-1,705	-1,969
	10,0	1,844	1,597	0,922	0,000	-0,922	-1,597	-1,844
	20,0	1,469	1,272	0,734	0,000	-0,734	-1,272	-1,469
	30,0	0,844	0,731	0,422	0,000	-0,422	-0,731	-0,844
	40,0	-0,031	-0,027	-0,016	0,000	0,016	0,027	0,031
	46,0	-0,676	-0,586	-0,338	0,000	0,338	0,586	0,676
	50,0	-0,781	-0,677	-0,391	0,000	0,391	0,677	0,781
	60,0	-0,281	-0,244	-0,141	0,000	0,141	0,244	0,281
	70,0	-0,031	-0,027	-0,016	0,000	0,016	0,027	0,031
	75,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Omdat $\sigma_{m\varphi}$ onafhankelijk is van x hoeven we alleen de waarden van $\sigma_{m\varphi}$ als functie van φ te tabelleren.

$\sigma_{m\varphi}$ in kgf/cm^2

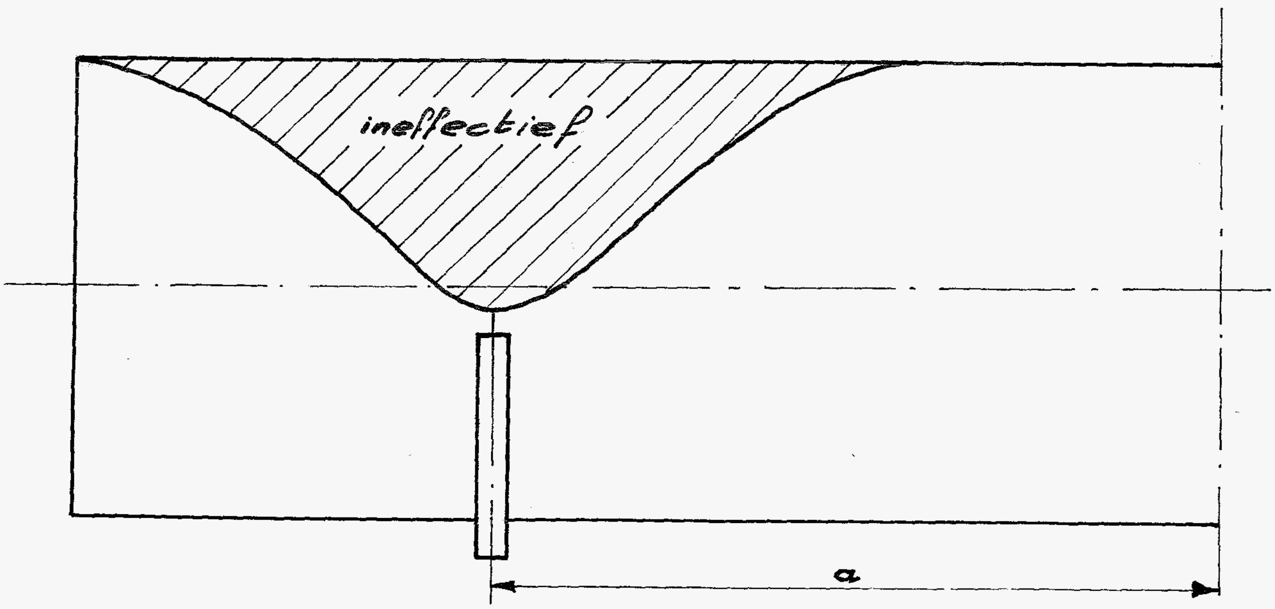
φ						
0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
1,095	1,022	0,821	0,548	0,274	0,073	0,000

De gewone balkentheorie gaan we nu enigszins uitbreiden.

11. Toepassing van een meer uitgebreide balkentheorie

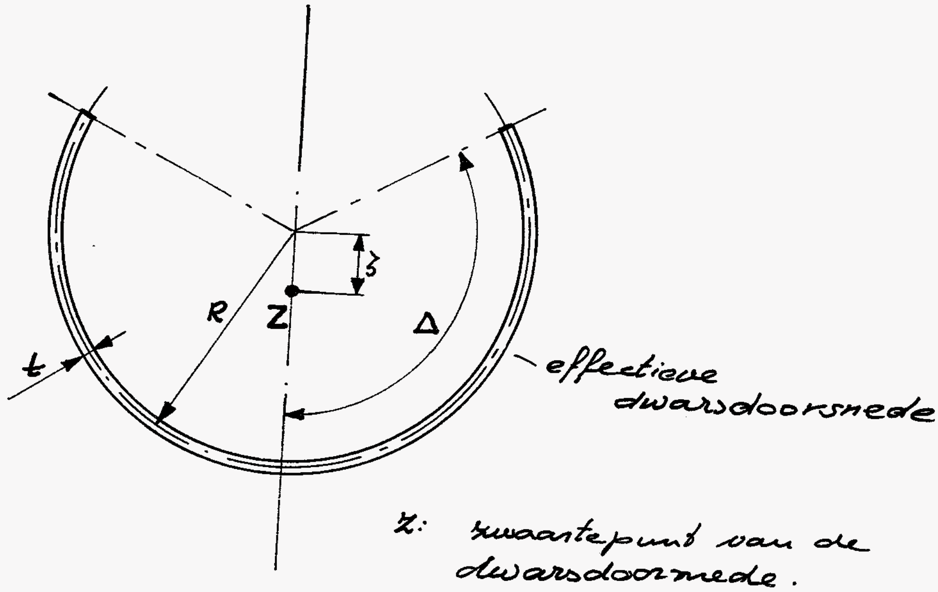
In dit hoofdstuk wordt de theorie, zoals die in het vorige hoofdstuk (10) is behandeld, uitgebreid met een aantal, meest empirische, formules, waardoor de vorm van de ondersteuning tot uiting komt in de resultaten voor de spanningen, waarvan we hopen dat ze de werkelijkheid redelijk zullen benaderen.

Door experimenten kan worden aangetoond dat een met vloeistof gevulde cilindrische koker zich gedraagt als een balk met een oppervlakte-traagheidsmoment gelijk aan $\pi \cdot R^3 \cdot t$, behalve in de buurt van de ondersteuning. In het gebied boven de zadels worden echter buigende momenten in omtrekrichting geïntroduceerd, die aldaar vervormingen van de koker veroorzaken, die dat gebied, wat betreft het gedrag als balk, ineffectief maken, zoals onderstaande tekening duidelijk tracht te maken. De breedte van dit gebied in afhankelijkheid van φ, is min of meer willekeurig gekozen.



Het effectieve gedeelte van de doorsnede kan worden weergegeven door de hoek 2Δ met $\Delta = \Delta(x)$, waarbij Δ groter wordt naarmate we verder van de ondersteuning zijn verwijderd.

We zoeken nu een uitdrukking voor het effectieve traagheidsmoment, als functie van Δ, en voor de plaats van het zwaartepunt Z van de effectieve doorsnede, vertegenwoordigd door ζ



Z: zwaartepunt van de dwarsdoorsnede.

$$2 \cdot \Delta R \cdot t \cdot \zeta = \int_{-\Delta}^{\Delta} R\cos\varphi \cdot R \cdot t \, d\varphi$$

$$\longrightarrow \zeta = R \cdot \frac{\sin\Delta}{\Delta}$$

Het traagheidsmoment I, dat we nodig zullen hebben is het traagheidsmoment ten opzichte van de horizontale rechte door het zwaartepunt.

$$I = \int_{-\Delta}^{\Delta} \left(R\cos\varphi - R\frac{\sin\Delta}{\Delta}\right)^2 R \cdot t \cdot d\varphi =$$

$$= 2R^3t \cdot \int_0^{\Delta} \left(\cos^2\varphi + \frac{\sin^2\Delta}{\Delta^2} - 2\,\frac{\sin\Delta}{\Delta}\cos\varphi\right) d\varphi =$$

$$= 2R^3t \cdot \left(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{\sin^2\Delta}{\Delta^2}\cdot\varphi - 2\,\frac{\sin\Delta}{\Delta}\sin\varphi \right)\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\Delta} =$$

$$= R^3t\left(\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\,\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}\right)$$

De waarde van Δ als functie van de x-coördinaat is in het geheel niet bekend, maar desondanks moeten we een aanname doen over deze afhankelijkheid, die redelijk is. Als enige uitgangspunt hiervoor is bekend dat bij relstroommetingen is gebleken dat ter plaatse van de ondersteuning (x=a) geldt:

$$\Delta = \theta + 1/6\,(180° - \theta) = 5/6 \cdot \theta + 30°$$

(θ in graden)

We nemen nu aan dat voor het verloop geldt, hetgeen in onderstaande tabel is aangegeven. Tevens zijn in deze tabel weergegeven de waarden van ζ/R en I/R^3t, die met behulp van Δ berekend kunnen worden.

x [cm]	Δ (grad.)	Δ (rad.)	ζ/R	I/R^3t
0.0	180	3,14	0,000	3,14
10,0	180	3,14	0,000	3,14
20,0	180	3,14	0,000	3,14
30.0	140	2,44	0,263	1,61
40.0	90	1,57	0,637	0,30
46,0	80	1,40	0,703	0,19
50,0	80	1,40	0,703	0.19
60,0	110	1,92	0,489	0.68
70,0	160	2.80	0,122	2,40
75,0	180	3,14	0,000	3,14

Aangezien we in het geheel niet weten in hoeverre dit met de werkelijkheid overeenstemt, kunnen we aan bovenstaande slechts geringe waarde hechten. We gaan echter gewoon door.

De membraanspanning in axiale richting is nu te bepalen met behulp van de formules:

$$\sigma_{m_x} = \frac{M(x) \cdot (-R\cos\varphi + \zeta)}{I} \quad \text{voor } -\Delta \leq \varphi \leq \Delta$$

$$\sigma_{m_x} = 0 \quad \text{voor andere } \varphi$$

M(x) heeft dezelfde betekenis als in het vorige hoofdstuk. De nu volgende tabel geeft de numerieke resultaten hiervan:

σ_{m_x} in kgf/cm²

		φ						
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
x [cm]	0,0	1,969	1,705	0,984	0,000	-0,984	-1,705	-1,969
	10,0	1,844	1,597	0,922	0,000	-0,922	-1,597	-1,844
	20,0	1,469	1,272	0,734	0,000	-0,734	-1,272	-1,469
	30,0	1,213	0,993	0,390	-0,432	-1,256	0,000	0,000
	40,0	-0,119	-0,075	0,045	0,208	0,000	0,000	0,000
	46,0	-3,320	-1,822	2,269	0,000	0,000	0,000	0,000
	50,0	-3,836	-2,105	2,622	0,000	0,000	0,000	0,000
	60,0	-0,664	-0,490	-0,014	0,635	0,000	0,000	0,000
	70,0	-0,036	-0,030	-0,015	0,005	0,021	0,040	0,000
	75,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Volgens deze theorie treden voor $\varphi = \pm\Delta$ discontinuïteiten op in de axiale membraanspanning. Het is niet waarschijnlijk dat dit ook in werkelijkheid zo zal zijn. Daarom zullen we dan ook in de grafieken deze discontinuïteiten vervangen door afrondingen.

Wanneer de koker rond zou blijven zou de tangentiale schuifspanning op elke doorsnede x = constant voor een bepaalde doorsnede recht evenredig zijn met $\sin\varphi$.
Wanneer echter de koker boven de zadels vrij kan vervormen, dus wanneer geen verstevigingen zijn aangebracht, werken deze schuifspanningen in de buurt van de ondersteuning slechts op een gedeelte van de dwarsdoorsnede, de effectieve dwarsdoorsnede.

In het artikel, geschreven door L.P. Zick (lit.5) wordt nu aangenomen dat de genoemde schuifspanning ter plaatse van de ondersteuning blijft variëren met $\sin\varphi$, maar slechts werkt op een effectieve dwarsdoorsnede, die begrensd wordt door de rechten: $\varphi = \pm\{\theta + 1/20\,(180^\circ - \theta)\}$ en wel zodanig, dat aan het globale evenwicht in verticale richting is voldaan.

Het is duidelijk dat hierbij niet meer is voldaan aan het locale evenwicht en daarom willen we hier een weg volgen, die dit nadeel niet bezit.

We nemen aan dat geldt:

$$\tau = \frac{D(x) \cdot S(\varphi;\Delta)}{2 \cdot t \cdot I}$$

waarbij τ is gedefinieerd, zoals op blz 87 is aangegeven.

Voor $\Delta < \varphi < 2\pi - \Delta$: $S = 0$

Voor $-\Delta < \varphi < \Delta$:

S is het statisch moment van de gedeelten, begrensd door $\varphi = \varphi$ en $\varphi = \Delta$ en begrensd door $\varphi = 2\pi - \varphi$ en $\varphi = 2\pi - \Delta$ t.o.v. de horizontale as door Z

We zoeken nu een uitdrukking voor S als functie van φ en $\Delta(x)$

Voor $0<\varphi<\Delta$ geldt: $S = 2\int_{\varphi}^{\Delta}(-R\cos\varphi+\zeta)\cdot R\cdot t\cdot d\varphi =$

$$= 2R^2t\{\sin\varphi - \sin\Delta + \zeta/R\,(\Delta-\varphi)\}$$

Voor $-\Delta<\varphi<0$ geldt: $S = 2R^2t\{-\sin\varphi - \sin\Delta + \zeta/R\,(\Delta+\varphi)\}$

Dit gecombineerd geeft, dat voor

$-\Delta<\varphi<\Delta$ geldt : $S = 2R^2t\{|\sin\varphi| - \sin\Delta + \zeta/R\,(\Delta-|\varphi|)\}$

Met behulp van : $\zeta = R\,\frac{\sin\Delta}{\Delta}$ wordt dit:

$$-\Delta<\varphi<\Delta \rightarrow S = 2R^2t\left\{|\sin\varphi| - \sin\Delta\cdot\frac{|\varphi|}{\Delta}\right\}$$

Résumerend krijgen we dan als uitdrukking voor de schuifspanning:

$$\Delta<\varphi<2\pi-\Delta \;:\; \tau = 0$$

$$-\Delta<\varphi<\Delta \;:\; \tau = \frac{D(x)\cdot\left\{|\sin\varphi| - \sin\Delta\cdot\frac{|\varphi|}{\Delta}\right\}}{R\cdot t\;\left(\Delta+\sin\Delta\cos\Delta - 2\,\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}\right)}$$

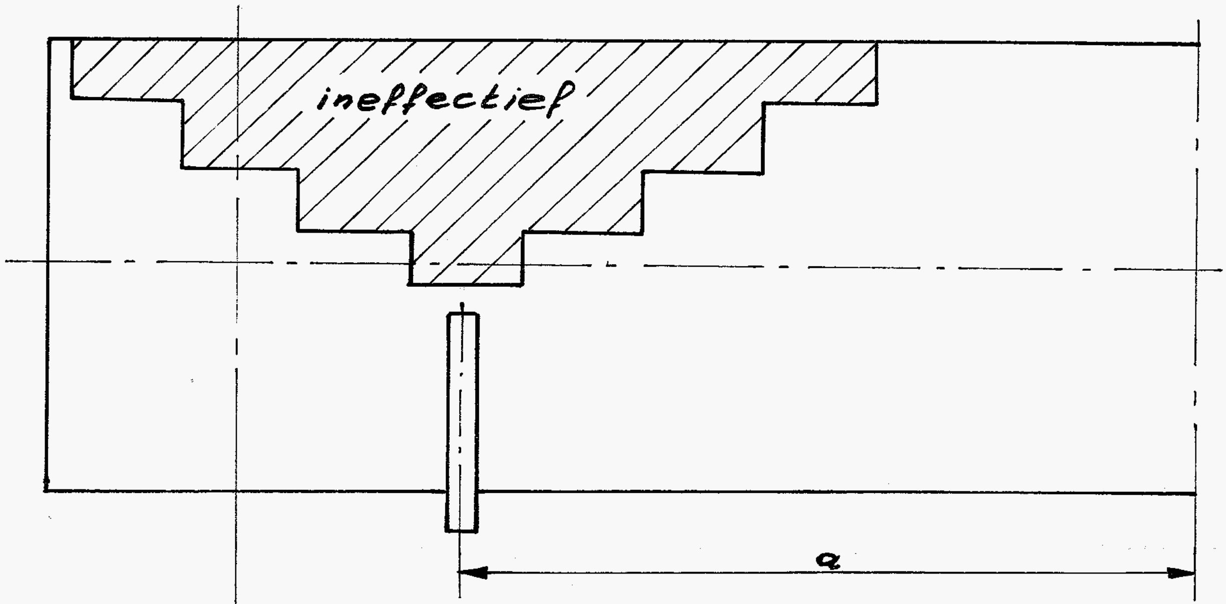
waarbij de richting wordt gegeven door de figuur op blz 87.

Ter plaatse van de ondersteuning geldt dit niet.

Op dezelfde wijze als in hoofdstuk 10 proberen we nu een uitdrukking te vinden voor $\sigma_{m\varphi}$ en $\sigma_{b\varphi}$, door aan te nemen, dat de hierboven berekende schuifspanning inderdaad in overeenstemming is met de werkelijk optredende schuifspanning en door te veronderstellen dat er behalve deze schuifspanning geen enkele spanning werkt in het vlak van een doorsnede x = constant.

We zullen zien dat er complicaties optreden, omdat de afhankelijkheid van x, van de schuifspanning τ, minder eenvoudig is als in hoofdstuk 10.

Om deze moeilijkheid op te heffen nemen we aan dat Δ constant blijft over een kleine afstand in x-richting, waarbinnen de plaats, die we beschouwen voor de spanningsberekening is bevat. Dit betekent, dat de vorm van het ineffectieve gebied, zoals dat getekend is op pagina 92 een enigszins gewijzigde vorm aanneemt, zoals onderstaande schets weergeeft.



Bovenstaande tekening geeft slechts een voorbeeld waarin we de vorm van het ineffectieve gebied kunnen wijzigen. De getrapte vorm kunnen we verfijnen en zo goed mogelijk aanpassen.

Hiervan gebruik makend geldt:

$$\Delta < \varphi < 2\pi - \Delta \qquad \tau' = 0$$

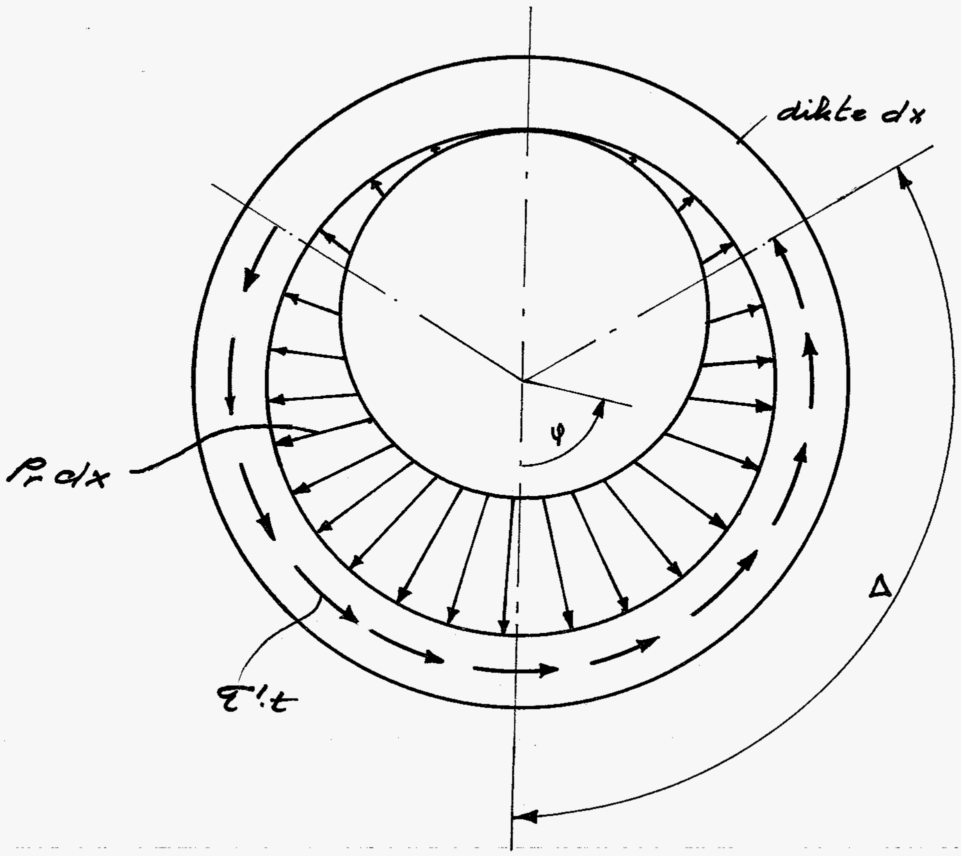
$$0 < \varphi < \Delta \qquad \tau' = \frac{d\tau}{dx} dx = \frac{\frac{dD(x)}{dx} dx \left\{ |\sin\varphi| - \sin\Delta \cdot \frac{|\varphi|}{\Delta} \right\}}{R \cdot t \cdot \left(\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\,\frac{\sin^2\Delta}{\Delta} \right)}$$

$$-\Delta < \varphi < 0 \qquad \tau' = -\frac{d\tau}{dx} dx = -\frac{\frac{dD(x)}{dx} dx \left\{ |\sin\varphi| - \sin\Delta \cdot \frac{|\varphi|}{\Delta} \right\}}{R \cdot t \cdot \left(\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\,\frac{\sin^2\Delta}{\Delta} \right)}$$

ofwel: $\Delta < \varphi < 2\pi - \Delta \qquad \tau' = 0$

$$-\Delta < \varphi < \Delta \qquad \tau' = \frac{\pi R \gamma dx}{t} \cdot \frac{\sin\varphi - \sin\Delta \cdot \frac{\varphi}{\Delta}}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\,\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}$$

In het probleem, weergegeven door onderstaande figuur moeten we dus de snedegrootheden uitrekenen.



Op analoge wijze als op blz 89 snijden we de ring door bij $\varphi=0$ en bij willekeurige φ en met behulp van de evenwichtsvergelijkingen kunnen we dan de snedegrootheden bij die willekeurige φ als functie van de snedegrootheden $N_0\,dx$ en $M_{b0}\,dx$ bij $\varphi=0$ berekenen.

Het evenwicht in horizontale richting leert ons:

$$-N_0\,dx + \int_0^{\varphi} (R+R\cos\varphi)\gamma\,dx \cdot R\sin\varphi\,d\varphi + \int_0^{\varphi} \tau'.t \cdot R\cos\varphi\,d\varphi +$$

$$+ N(\varphi)\,dx\cos\varphi + Q(\varphi)\,dx\sin\varphi = 0$$

Gezien het karakter van τ' als functie van x is het noodzakelijk om onderscheid te maken tussen de gevallen: $-\Delta < \varphi < \Delta$ en

$\Delta < \varphi < 2\pi-\Delta$

Voor $\underline{-\Delta < \varphi < \Delta}$ geldt:

$$-N_0 + \int_0^{\varphi} (R + R\cos\varphi)\cdot\gamma\cdot R\sin\varphi\, d\varphi + \int_0^{\varphi} \frac{R^2\gamma\cdot\pi\,(\sin\varphi\cos\varphi - \sin\Delta\cdot\frac{\varphi}{\Delta}\cdot\cos\varphi)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\,\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\, d\varphi +$$
$$+ N(\varphi)\cos\varphi + Q(\varphi)\sin\varphi = 0$$

$$\rightarrow -N_0 + N(\varphi)\cos\varphi + Q(\varphi)\sin\varphi + \gamma R^2(1 - \cos\varphi + 1/2\sin^2\varphi) +$$
$$+ \pi\gamma R^2\left(\frac{1/2\sin^2\varphi - \frac{\sin\Delta}{\Delta}\,(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\,\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\right) = 0 \quad \text{(a)}$$

Voor $\underline{\Delta < \varphi < 2\pi - \Delta}$ geldt:

$$-N_0 + \int_0^{\varphi} (R + R\cos\varphi)\cdot\gamma\cdot R\cdot\sin\varphi\, d\varphi + \int_0^{\Delta} \frac{R^2\gamma\cdot\pi\,(\sin\varphi\cos\varphi - \sin\Delta\cdot\frac{\varphi}{\Delta}\cos\varphi)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\,\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\, d\varphi +$$
$$+ N(\varphi)\cos\varphi + Q(\varphi)\sin\varphi = 0$$

$$\rightarrow -N_0 + N(\varphi)\cos\varphi + Q(\varphi)\sin\varphi + \gamma R^2(1 - \cos\varphi + 1/2\sin^2\varphi) +$$
$$+ \pi\gamma R^2\left(\frac{-1/2\sin^2\Delta - \frac{\sin\Delta}{\Delta}\,(\cos\Delta - 1)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\,\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\right) = 0 \quad \text{(b)}$$

Het evenwicht in horizontale richting leert ons:

$$-\int_0^{\varphi} (R + R\cos\varphi)\gamma\, dx\, R\cos\varphi\, d\varphi + \int_0^{\varphi} \tau' t\cdot R\cdot\sin\varphi\, d\varphi +$$
$$N(\varphi)\, dx\sin\varphi - Q(\varphi)\, dx\cos\varphi = 0$$

Voor $\underline{-\Delta < \varphi < \Delta}$ geldt:

$$-\int_0^{\varphi} (R + R\cos\varphi)\gamma R\cos\varphi\, d\varphi + \int_0^{\varphi} \frac{R^2\gamma\pi\,(\sin^2\varphi - \sin\Delta\cdot\frac{\varphi}{\Delta}\sin\varphi)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\,\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\, d\varphi + N(\varphi)\sin\varphi - Q(\varphi)\cos\varphi = 0$$

$$\rightarrow N(\varphi)\sin\varphi - Q(\varphi)\cos\varphi + \gamma R^2(-\sin\varphi - 1/4\sin 2\varphi - 1/2\varphi) +$$
$$+ \pi\gamma R^2\left(\frac{1/2\varphi - 1/4\sin 2\varphi - \frac{\sin\Delta}{\Delta}\cdot(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\,\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\right) = 0 \quad \text{(c)}$$

Voor $\underline{\Delta < \varphi < 2\pi - \Delta}$ geldt:

$$-\int_0^{\varphi}(R+R\cos\varphi)\gamma\cdot R\cdot\cos\varphi\, d\varphi + \int_0^{\Delta}\frac{R^2\gamma\pi\left(\sin^2\varphi - \sin\Delta\cdot\frac{\varphi}{\Delta}\sin\varphi\right)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\, d\varphi + N(\varphi)\sin\varphi - Q(\varphi)\cos\varphi = 0$$

$$\rightarrow \quad N(\varphi)\sin\varphi - Q(\varphi)\cos\varphi + \gamma R^2\left(-\sin\varphi - \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi\right) + \tfrac{1}{2}\pi\gamma R^2 = 0 \qquad \text{(d)}$$

Het momenten evenwicht om O leert ons:

$$-N_0\, dx\cdot R - M_{b_0}\, dx + \int_0^{\varphi}\tau' t\cdot R\cdot R\, d\varphi + N(\varphi)\, dx\cdot R + M_b(\varphi)\, dx = 0$$

Voor $\underline{-\Delta < \varphi < \Delta}$ geldt:

$$-N_0\cdot R - M_{b_0} + M_b(\varphi) + N(\varphi)\cdot R + \int_0^{\varphi}\frac{\gamma R^3\pi\left(\sin\varphi - \sin\Delta\cdot\frac{\varphi}{\Delta}\right)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\, d\varphi = 0$$

$$\rightarrow \quad -N_0\cdot R - M_{b_0} + M_b(\varphi) + N(\varphi)R + \gamma R^3\pi\left(\frac{1-\cos\varphi - \frac{\sin\Delta}{\Delta}\cdot\frac{1}{2}\varphi^2}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\right) = 0 \qquad \text{(e)}$$

Voor $\underline{\Delta < \varphi < 2\pi - \Delta}$ geldt:

$$-N_0\cdot R - M_{b_0} + M_b(\varphi) + N(\varphi)\cdot R + \int_0^{\Delta}\frac{\gamma R^3\pi\left(\sin\varphi - \sin\Delta\cdot\frac{\varphi}{\Delta}\right)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\, d\varphi = 0$$

$$\rightarrow \quad -N_0\cdot R - M_{b_0} + M_b(\varphi) + N(\varphi)\cdot R + \gamma R^3\pi\left(\frac{1-\cos\Delta - \frac{1}{2}\Delta\sin\Delta}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\right) = 0 \qquad \text{(f)}$$

We beginnen nu met het bepalen van de mede-grootheden $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ en $M_b(\varphi)$ voor $-\Delta < \varphi < \Delta$ uit de evenwichtsvergelijkingen.

(a) + (c) geeft:

$$N(\varphi) - N_0\cos\varphi + \gamma R^2\left(\cos\varphi - \cos^2\varphi + \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi - \tfrac{1}{4}\sin\varphi\sin 2\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi\right) +$$

$$+\pi\gamma R^2\left(\frac{\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{\sin\Delta}{\Delta}(\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi - \cos\varphi) + \tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi - \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi\sin\varphi - \frac{\sin\Delta}{\Delta}(\sin^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\right) = 0$$

$$\rightarrow N(\varphi)-N_0\cos\varphi+\gamma R^2(\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi-1)+\pi\gamma R^2\left(\frac{\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi-\frac{\sin\Delta}{\Delta}\cdot(1-\cos\varphi)}{\Delta+\sin\Delta\cos\Delta-2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\right)=0$$

$$\rightarrow N(\varphi)=N_0\cos\varphi-\gamma R^2(\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi-1)-\pi\gamma R^2\left(\frac{\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi-\frac{\sin\Delta}{\Delta}(1-\cos\varphi)}{\Delta+\sin\Delta\cos\Delta-2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\right)$$

$$\rightarrow Q(\varphi)=N_0\sin\varphi+\gamma R^2(-\tfrac{3}{2}\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi\cos\varphi)+\pi\gamma R^2\left(\frac{\tfrac{1}{2}\varphi\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\sin\varphi-\frac{\sin\Delta}{\Delta}(\sin\varphi-\varphi)}{\Delta+\sin\Delta\cos\Delta-2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\right)$$

Combinatie hiervan met e geeft:

$$M_b(\varphi)=M_{b_0}+N_0R(1-\cos\varphi)+\gamma R^3(\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi-1)+\pi\gamma R^3\left(\frac{\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi-1+\cos\varphi-\frac{\sin\Delta}{\Delta}(1-\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi^2)}{\Delta+\sin\Delta\cos\Delta-2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\right)$$

We doen nu hetzelfde voor $\Delta<\varphi<2\pi-\Delta$

b + d geeft

$$N(\varphi)-N_0\cos\varphi+\gamma R^2(\cos\varphi-\cos^2\varphi+\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\cos\varphi-\sin^2\varphi-\tfrac{1}{4}\sin 2\varphi\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi)+$$
$$+\pi\gamma R^2\left(\frac{-\tfrac{1}{2}\sin^2\Delta\cos\varphi-\frac{\sin\Delta}{\Delta}(\cos\Delta-1)\cos\varphi}{\Delta+\sin\Delta\cos\Delta-2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}+\tfrac{1}{2}\sin\varphi\right)$$

$$\rightarrow N(\varphi)=N_0\cos\varphi-\gamma R^2(\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi-1)-\pi\gamma R^2\left(\frac{-\tfrac{1}{2}\sin^2\Delta\cos\varphi-\frac{\sin\Delta}{\Delta}(\cos\Delta-1)\cos\varphi}{\Delta+\sin\Delta\cos\Delta-2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}+\tfrac{1}{2}\sin\varphi\right)$$

$$\rightarrow Q(\varphi)=N_0\sin\varphi+\gamma R^2(-\tfrac{3}{2}\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi\cos\varphi)+\pi\gamma R^2\left(\frac{\tfrac{1}{2}\sin^2\Delta\sin\varphi-\frac{\sin\Delta}{\Delta}(1-\cos\Delta)\sin\varphi}{\Delta+\sin\Delta\cos\Delta-2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}+\tfrac{1}{2}\cos\varphi\right)$$

Combinatie hiervan met f geeft:

$$M_b(\varphi)=M_{b_0}+N_0R(1-\cos\varphi)+\gamma R^3(\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi-1)+$$
$$+\pi\gamma R^3\cdot\left(\frac{-1+\cos\Delta+\tfrac{1}{2}\Delta\sin\Delta-\tfrac{1}{2}\sin^2\Delta\cos\varphi-\frac{\sin\Delta}{\Delta}(\cos\Delta-1)\cos\varphi+\tfrac{1}{2}\Delta\sin\varphi+\tfrac{1}{2}\sin\Delta\cos\Delta\sin\varphi-\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}\sin\varphi}{\Delta+\sin\Delta\cos\Delta-2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}}\right)$$

Analoog aan wat is gebeurd in het vorige hoofdstuk gaan we nu de elastische energie A in de ring met dikte dx berekenen, waarna met behulp van de stelling van Castigliano N_0 en M_{b_0} worden berekend uit:

$$\frac{\partial A}{\partial N_0}=0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial A}{\partial M_{b_0}}=0$$

Ook hier brengen we alleen de energie tengevolge van de buiging in rekening.

$$A = 2\int_0^{\pi} (M_b\, dx)^2 / 2EJ \cdot R\, d\varphi =$$

$$= \frac{dx^2 \cdot R}{EJ} \cdot \left\{ \int_0^{\Delta} M_b^2\, d\varphi + \int_{\Delta}^{\pi} M_b^2\, d\varphi \right\}$$

$$\frac{\partial A}{\partial N_0} = 0 \rightarrow \int_0^{\pi} \left\{ M_{b0} + N_0 R(1-\cos\varphi) + \gamma R^3(\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi - 1) \right\} (1-\cos\varphi)\, d\varphi +$$

$$+ \int_0^{\Delta} \pi\gamma R^3 \left\{ \frac{\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi - 1 + \cos\varphi - \frac{\sin\Delta}{\Delta}(1-\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi^2)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}} \right\} (1-\cos\varphi)\, d\varphi +$$

$$+ \int_{\Delta}^{\pi} \pi\gamma R^3 \left\{ \frac{\begin{array}{l} -1 + \cos\Delta + \tfrac{1}{2}\Delta\sin\Delta - \tfrac{1}{2}\sin^2\Delta\cos\varphi - \frac{\sin\Delta}{\Delta}(\cos\Delta - 1)\cos\varphi + \\ + \tfrac{1}{2}\Delta\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\Delta\cos\Delta\sin\varphi - \frac{\sin^2\Delta}{\Delta}\sin\varphi \end{array}}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}} \right\} (1-\cos\varphi)\, d\varphi = 0$$

ofwel:

$$\pi \cdot M_{b0} + 3\pi/2 \cdot N_0 R - 17/8\,\pi \cdot \gamma R^3 +$$

$$+ \pi\gamma R^3 \frac{\left(\begin{array}{l} -\tfrac{1}{2}\Delta\cos\Delta + \tfrac{1}{2}\sin\Delta + \tfrac{1}{8}\Delta\cos 2\Delta - \tfrac{1}{16}\sin 2\Delta + \\ -\tfrac{3}{2}\Delta + 2\sin\Delta - \tfrac{1}{4}\sin 2\Delta - \tfrac{3}{2}\sin\Delta + \\ + 2\sin^2\Delta/\Delta - \tfrac{1}{4}\sin\Delta\sin 2\Delta/\Delta + \tfrac{1}{6}\Delta^2\sin\Delta + \\ -\tfrac{1}{2}\Delta\sin^2\Delta - \sin\Delta\cos\Delta + \sin^2\Delta/\Delta + \\ -\pi + \Delta - \sin\Delta + \pi\cos\Delta - \Delta\cos\Delta + \sin\Delta\cos\Delta + \\ + \tfrac{1}{2}\pi\Delta\sin\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta^2\sin\Delta + \tfrac{1}{2}\Delta\sin^2\Delta + \\ + \tfrac{1}{4}\pi\sin^2\Delta - \tfrac{1}{4}\Delta\sin^2\Delta + \tfrac{1}{2}\sin^3\Delta - \tfrac{1}{8}\sin 2\Delta\sin^2\Delta + \\ + \tfrac{1}{2}\pi\sin\Delta\cos\Delta/\Delta - \tfrac{1}{2}\sin\Delta\cos\Delta + \sin^2\Delta\cos\Delta/\Delta - \tfrac{1}{4}\sin 2\Delta\sin\Delta\cos\Delta/\Delta + \\ -\tfrac{1}{2}\pi\sin\Delta/\Delta + \tfrac{1}{2}\sin\Delta - \sin^2\Delta/\Delta + \tfrac{1}{4}\sin 2\Delta\sin\Delta/\Delta + \\ \tfrac{1}{2}\Delta + \tfrac{1}{2}\Delta\cos\Delta + \tfrac{1}{4}\Delta\sin^2\Delta + \tfrac{1}{2}\sin\Delta\cos\Delta + \tfrac{1}{2}\sin\Delta\cos^2\Delta + \tfrac{1}{4}\sin^3\Delta\cos\Delta + \\ -\sin^2\Delta/\Delta - \sin^2\Delta\cos\Delta/\Delta - \tfrac{1}{2}\sin^4\Delta/\Delta \end{array} \right)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}} = 0$$

Na uitwerking wordt dit:

$$\pi \cdot M_{b0} + \frac{3\pi}{2} N_0 \cdot R - 17/8\,\pi\gamma R^3 +$$

$$+ \frac{\pi\gamma R^3 \cdot \left(\begin{array}{l} \sin\Delta(1 + \pi/2\cdot\Delta - \frac{\pi}{2\Delta} - \tfrac{1}{3}\Delta^2) + \sin^2\Delta(-\frac{\Delta}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\Delta}) + \\ + \cos\Delta(\pi - \Delta) + \sin\Delta\cos\Delta(-5/8 + \pi/2\Delta) + \tfrac{1}{8}\Delta - \pi \end{array} \right)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_{b_0}} = 0 \longrightarrow \int_0^{\pi} \left\{ M_{b_0} + N_0 R(1-\cos\varphi) + \gamma R^3(\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi - 1) \right\} d\varphi +$$

$$+ \int_0^{\Delta} \pi\gamma R^3 \left\{ \frac{\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi - 1 + \cos\varphi - \frac{\sin\Delta}{\Delta}(1-\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi^2)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}} \right\} d\varphi +$$

$$+ \int_{\Delta}^{\pi} \pi\gamma R^3 \left\{ \frac{\begin{array}{l} -1+\cos\Delta + \tfrac{1}{2}\Delta\sin\Delta - \tfrac{1}{2}\sin^2\Delta\cos\varphi - \frac{\sin\Delta}{\Delta}(\cos\Delta - 1)\cos\varphi + \\ + \tfrac{1}{2}\Delta\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\Delta\cos\Delta\sin\varphi - \frac{\sin^2\Delta}{\Delta}\sin\varphi \end{array}}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}} \right\} d\varphi = 0$$

ofwel: $\pi M_{b_0} + \pi N_0 R - {}^{3\pi}/_2\, \gamma R^3 +$

$$+\pi\gamma R^3 \frac{\left(\begin{array}{l} -\tfrac{1}{2}\Delta\cos\Delta + \tfrac{1}{2}\sin\Delta - \Delta + \sin\Delta - \sin\Delta + \sin^2\Delta/\Delta + \tfrac{1}{6}\Delta^2\sin\Delta + \\ -\pi + \Delta + \pi\cos\Delta - \Delta\cos\Delta + \tfrac{1}{2}\pi\Delta\sin\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta^2\sin\Delta + \\ + \tfrac{1}{2}\sin^2\Delta + \sin^2\Delta\cos\Delta/\Delta - \sin^2\Delta/\Delta + \\ + \tfrac{1}{2}\Delta + \tfrac{1}{2}\Delta\cos\Delta + \tfrac{1}{2}\sin\Delta\cos\Delta + \tfrac{1}{2}\sin\Delta\cos^2\Delta \\ - \sin^2\Delta/\Delta - \sin^2\Delta\cos\Delta/\Delta \end{array} \right)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}} = 0$$

Na uitwerking hiervan krijgen we:

$$\pi M_{b_0} + \pi N_0 R - \frac{3\pi}{2}\gamma R^3 +$$

$$+ \frac{\pi\gamma R^3 . \left(\begin{array}{l} \sin\Delta(1 - \frac{\Delta^2}{3} + \frac{\pi\Delta}{2}) + \cos\Delta(\pi - \Delta) + \tfrac{1}{2}\sin\Delta\cos\Delta + \\ - \sin^2\Delta/\Delta + \Delta/2 - \pi \end{array} \right)}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}} = 0$$

Dit resultaat combineren we met het resultaat van $\partial A/\partial N_0 = 0$

$$\rightarrow N_0 = \gamma \cdot R^2 \left\{ \frac{\frac{\pi}{\Delta}\sin\Delta + (\frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\Delta})\sin^2\Delta + (\tfrac{1}{4} - \frac{\pi}{\Delta})\sin\Delta\cos\Delta + \frac{3}{4}\Delta}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}} + {}^5/_4 \right\}$$

$$\rightarrow M_{b_0} = \gamma R^3 \left\{ \frac{\begin{array}{l} (-1 - \frac{\pi\Delta}{2} - \frac{\pi}{\Delta} + \frac{\Delta^2}{3})\sin\Delta + (\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta}{2})\sin^2\Delta + (\Delta - \pi)\cos\Delta + \\ (\frac{\pi}{\Delta} - {}^3/_4)\sin\Delta\cos\Delta + \pi - {}^5/_4\Delta \end{array}}{\Delta + \sin\Delta\cos\Delta - 2\frac{\sin^2\Delta}{\Delta}} + {}^1/_4 \right\}$$

Hiermede zijn dan de snedegrootheden op een willekeurige doorsnede φ = constant bekend.

Om $\sigma_{m\varphi}$ en $\sigma_{b\varphi}$ te berekenen zijn alleen $N(\varphi)$ en $M_b(\varphi)$ interessant. Deze zijn te bepalen met behulp van de formules op blz 103. De gewenste spanningen vinden we dan door:

$$\sigma_{m\varphi} = \frac{N(\varphi)}{t} \qquad \sigma_{b\varphi} = \frac{6\,M_b(\varphi)}{t^2}$$

In de onderstaande tabel is $\sigma_{m\varphi}$ gegeven als functie van x en φ, waarbij gebruik is gemaakt van de gegevens der proefopstelling.

$\sigma_{m\varphi}$ in kgf/cm^2

		Δ gr/rad	N_0 [kgf/cm]	φ						
				0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
x [cm]	0,0	180 / 3,14	0,438	1,095	1,022	0,821	0,548	0,274	0,073	0,000
	10,0	180 / 3,14	0,438	1,095	1,022	0,821	0,548	0,274	0,073	0,000
	20,0	180 / 3,14	0,438	1,095	1,022	0,821	0,548	0,274	0,073	0,000
	30,0	140 / 2,44	0,708	1,770	1,576	1,063	0,420	-0,662	-0,138	-0,231
	40,0	90 / 1,57	2,485	6,212	5,267	2,855	0,117	-2,688	-3,750	-4,332
	46,0	80 / 1,40	3,464	8,660	6,649	2,506	0,117	-4,790	-5,797	-6,696
	50,0	80 / 1,40	3,464	8,660	6,649	2,506	0,117	-4,790	-5,797	-6,696
	60,0	110 / 1,92	1,351	3,377	2,833	1,661	-1,043	-1,402	-1,505	-1,739
	70,0	160 / 2,80	0,528	1,320	1,206	0,901	0,201	-0,408	-1,311	-0,097
	75,0	180 / 3,14	0,438	1,095	1,022	0,821	0,548	0,274	0,073	0,000

Zolang $\Delta = 180°$ is de membraanspanning in tangentiale richting constant en gelijk aan de waarden, die hiervoor in het vorige hoofdstuk zijn berekend. Dit geldt ook voor de betreffende maximale buigspanning.

Het blijft een vraag in hoeverre het bovenstaande geldt in de buurt van de ondersteuning door de zadels.

Wanneer we op analoge wijze $\sigma_{b\varphi}$ berekenen, vinden we zulke een grote waarden, dat we niet meer aan kunnen nemen, dat ze in overeenstemming met de werkelijkheid zijn. Op verschillende plaatsen overtreft deze spanning zelfs de treksterkte van het gebruikte materiaal. Wat betreft de maximale buigspanning op een vlak φ = constant, geeft deze berekeningsmethode blijkbaar in het geheel geen benadering van de werkelijkheid. In hoeverre dit wel geldt voor de berekende membraanspanningen, σ_{mx} en $\sigma_{m\varphi}$, zal door middel van het experiment blijken.

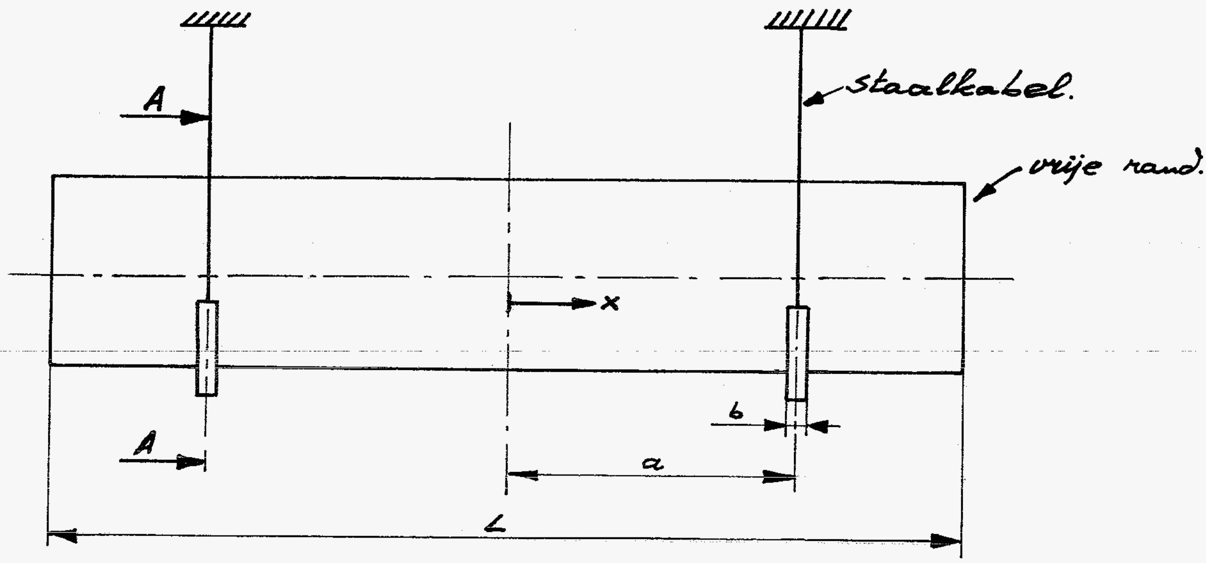
Evenals de gewone balkentheorie geeft ook deze meer uitgebreide theorie geen enkel uitsluitsel over de maximale buigspanning op een vlak x= constant.

Daar we de nu berekende resultaten niet alleen willen vergelijken met de meetresultaten maar ook met een min of meer exacte theorie, gaan we nu over tot de toepassing van de algemene schalentheorie, zoals die is behandeld in hoofdstuk 5.

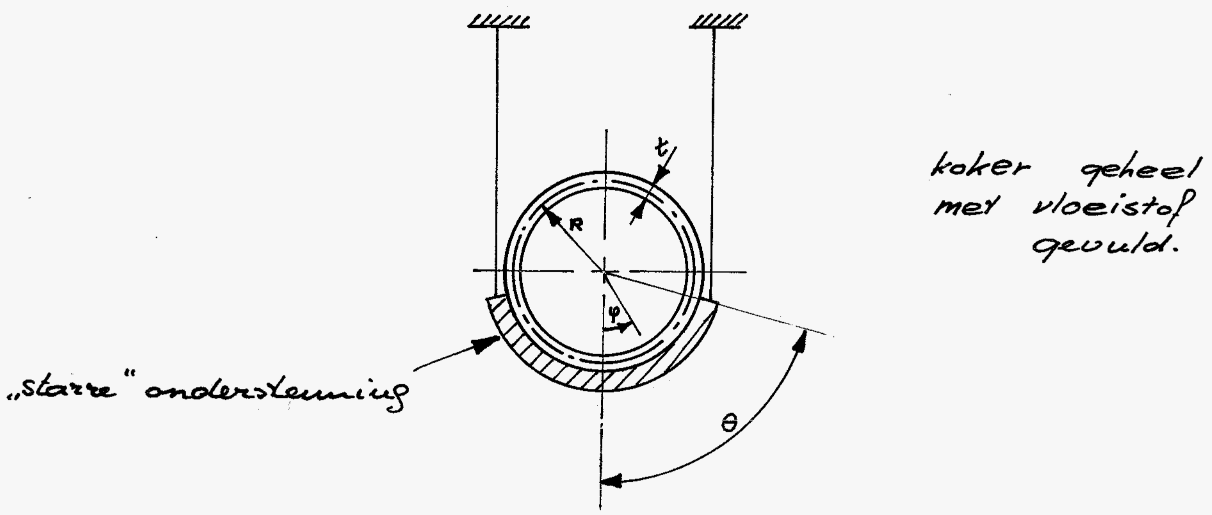
12. De algemene schalentheorie, toegepast op het onderhavige probleem.

Een dunwandige, cirkelcilindrische koker met "vrije" uiteinden wordt met een vloeistof gevuld.
De koker wordt zodanig opgesteld, dat zijn lengte-as horizontaal is.
De ondersteuning wordt gevormd door twee smalle, relatief starre ringen, die de koker over een gedeelte van de omtrek dragen.

De onderstaande tekening tracht dit alles weer in herinnering te brengen.



VOORAANZICHT.



DOORSNEDE A-A

We doen enige aannamen, waarvan enkele reeds bekend zijn:

1. De ondersteuning oefent op de koker alleen een verdeelde belasting uit, die radiaal is gericht. Om eventuele tangentiale en axiale belasting zo klein mogelijk te houden werd gestreefd naar een minimale wrijvingscoëfficiënt tussen koker en ondersteuning. Het vlak van de ondersteuning, dat met de koker in aanraking is, werd dan ook zo glad mogelijk gemaakt.

2. Bij een bepaalde waarde van φ is de radiale oppervlakte-belasting, die de ondersteuning uitoefent op de koker binnen het interval: $a + b/2 > x > a - 1/2\, b$ geen functie van x, maar constant en afhankelijk van φ. Bij bepaalde φ is deze belasting dus gelijkmatig verdeeld, binnen het interval.

3. De radiale verplaatsing w is nul ter plaatse van de ondersteuning voor $-\theta < \varphi < \theta$. Hiervoor is geen extra belasting nodig, die bewerkstelligt dat de koker steeds aanligt in de ondersteuning, maar de hydrostatische druk zorgt hier reeds voor. Dit houdt in dat $(P_r)_2$ steeds negatief is.

$(P_r)_1$: de oppervlakte belasting, die door de vloeistofdruk wordt veroorzaakt.

$(P_r)_2$: de oppervlakte belasting, die door de ondersteuning wordt veroorzaakt.

Deze laatste aanname kan op twee manieren worden gecontroleerd.

a) Tijdens de berekening van $(P_r)_2$ moet blijken dat deze oppervlakte belasting inderdaad voor elke φ negatief is.

b) Tijdens het experiment kan worden nagegaan of er inderdaad geen spleten ontstaan tussen koker en ondersteuning.

Het systeem dat we over handen bestaat dus uit een eis over de verplaatsingen ter plaatse van de ondersteuning en een ten dele onbekende radiale belasting van de koker.

Om de algemene schalentheorie toe te kunnen passen, zoals die eerder is behandeld, is het nodig dat we de belasting kennen en dat er geen andere eisen worden gesteld aan de verplaatsingen, dan alleen aan de uiteinden van de koker.

We beschouwen nu een aantal verschillende gevallen, waarbij we steeds de reactie van de ondersteuning anders kiezen, maar wel bekend. Aan de verplaatsingen stellen we geen eisen.
Al deze verschillende belastingsgevallen gaan we dan zodanig combineren, dat zo goed mogelijk is voldaan aan de eisen aan de verplaatsingen, die oorspronkelijk waren gesteld.

P_r moeten we brengen in de volgende vorm, die dimensieloos is gemaakt:

$$\bar{P}_r = \bar{P}_{r_{00}} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{P}_{r_{m0}} \cos m\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_{r_{0n}} \cos \frac{2\pi R}{L} n\bar{x}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_{r_{mn}} \cos \frac{2\pi R}{L} n\bar{x} \cos m\varphi \,.$$

Allereerst brengen we $(P_r)_1$ in deze vorm, omdat die toch voor alle belastingsgevallen hetzelfde is.

$$(P_r)_1 = \gamma R (1+\cos\varphi)$$

$$(\bar{P}_r)_1 = \frac{\gamma R^2 (1-\nu^2)}{E \cdot t} (1+\cos\varphi)$$

$$\rightarrow \quad (\bar{P}_{r_{00}})_1 = \frac{\gamma R^2 (1-\nu^2)}{E \cdot t}$$

$$(\bar{P}_{r_{10}})_1 = \frac{\gamma R^2 (1-\nu^2)}{E \cdot t}$$

$$(\bar{P}_{r_{m0}})_1 = 0 \quad \text{voor} \quad m = 2 \ldots\ldots \infty$$

$$(\overline{P}_{r_{on}})_1 = 0 \quad \text{voor} \quad n = 1 \ldots\ldots \infty$$

$$(\overline{P}_{r_{mn}})_1 = 0 \quad \text{voor} \quad m = 1 \ldots\ldots \infty \quad \text{en} \quad n = 1 \ldots\ldots \infty$$

We gaan nu alle belastingsgevallen, die we beschouwen, afzonderlijk bekijken.

A. We nemen aan dat de oppervlaktekracht, die de ondersteuning uitoefent op de koker onafhankelijk is van φ.

$$\rightarrow (P_r)_{2A} = \text{constant} \quad \text{voor} \quad a - b/2 < |x| < a + b/2$$
$$|\varphi| < \theta$$

De resultante van al deze oppervlaktekrachtjes over één ondersteuning moet evenwicht maken met het halve gewicht van de vloeistof in de koker.

$$\int_{-\theta}^{\theta} (P_r)_{2A} \cos\varphi \cdot R \cdot b \cdot d\varphi + 1/2 \cdot \gamma \cdot \pi \cdot L \cdot (R - t/2)^2 = 0$$

We verwaarlozen $t/2$ t.o.v. R. $\rightarrow$

$$(P_r)_{2A} R \cdot b \cdot 2 \cdot \sin\theta + 1/2\, \gamma \pi L R^2 = 0$$

$$(P_r)_{2A} = -\frac{\pi \cdot \gamma R L}{4 \cdot b \cdot \sin\theta}$$

$$(\overline{P}_r)_{2A} = -\frac{\pi \gamma R^2 L (1-\nu^2)}{4 b \cdot t \cdot E \sin\theta} \qquad \text{voor: } a - \tfrac{b}{2} < |x| < a + b/2$$
$$|\varphi| < \theta$$

$$(\overline{P}_r)_{2A} = -\frac{\pi \gamma R^2 L (1-\nu^2)}{4 b \cdot t \cdot E \cdot \sin\theta} \cdot f_A(\varphi) \cdot g_A(x)$$

$$f_A(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{voor} \quad -\theta < \varphi < \theta \\ 0 & \text{voor andere } \varphi \end{cases}$$

$$g_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor} \quad a - b/2 < |x| < a + b/2 \\ 0 & \text{voor andere } x \text{ binnen } L \end{cases}$$

We ontwikkelen $f_A(\varphi)$ en $g_A(x)$ in de fourierreeksen, die gewenst zijn, in de theoretische afleiding.

$$f_A(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f_A(\varphi)\,d\varphi + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_A(\varphi)\cos m\varphi\,d\varphi\right\}\cos m\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\theta} d\theta + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\cos m\varphi\,d\varphi\right\}\cos m\varphi =$$

$$= \frac{\theta}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2}{m\pi}\sin m\theta\right)\cos m\varphi$$

$$g_A(x) = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} g_A(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{L}\int_0^{L/2} g_A(x)\cos\frac{2\pi n x}{L}\,dx\right\}\cos\frac{2\pi n}{L}x =$$

$$= \frac{2}{L}\int_{a-b/2}^{a+b/2} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{L}\int_{a-b/2}^{a+b/2}\cos\frac{2\pi n x}{L}\,dx\right\}\cos\frac{2\pi n}{L}x =$$

$$= \frac{2b}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n\pi}\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}\right\}\cos\frac{2\pi n}{L}x$$

$$\left(\overline{P}_{r_{00}}\right)_{2A} = \frac{-\pi\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{4b\cdot t\cdot E\cdot\sin\theta}\cdot\frac{2\theta b}{\pi\cdot L} = \frac{-\gamma R^2(1-\nu^2)\cdot\theta}{2\cdot t\cdot E\cdot\sin\theta}$$

$$\left(\overline{P}_{r_{m0}}\right)_{2A} = \frac{-\pi\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{4b\cdot t\cdot E\cdot\sin\theta}\cdot\frac{2b}{L}\cdot\frac{2}{m\pi}\sin m\theta = \frac{-\gamma R^2(1-\nu^2)}{t\cdot E\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\sin m\theta}{m}$$

voor $m = 1 \ldots\ldots \infty$

$$\left(\overline{P}_{r_{0n}}\right)_{2A} = -\frac{\pi\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{4b\,t\,E\,\sin\theta}\cdot\frac{\theta}{\pi}\cdot\frac{4}{n\pi}\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L} =$$

$$= -\frac{\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{b\,t\,E\,\sin\theta}\cdot\frac{\theta}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $n = 1 \ldots\ldots \infty$

$$\left(\bar{P}_{r_{mn}}\right)_{2A} = \frac{-\pi\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{4\,b\cdot t\cdot E\cdot\sin\theta}\cdot\frac{2}{m\pi}\cdot\sin m\theta\cdot\frac{4}{n\pi}\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L} =$$

$$= \frac{-2\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{\pi\, b\, t\, E\,\sin\theta}\cdot\frac{1}{m\cdot n}\cdot\sin m\theta\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $m=1\dots\infty$ en $n=1\dots\infty$

Als totaal vinden we voor de coëfficienten uit de reeksen voor de belasting in geval A:

$$\left(\bar{P}_{r_{00}}\right)_A = \frac{\gamma R^2(1-\nu^2)}{E\cdot t} - \frac{\gamma R^2(1-\nu^2)\,\theta}{2Et\,\sin\theta} = \frac{\gamma R^2(1-\nu^2)}{E\cdot t}\left(1-\frac{\theta}{2\sin\theta}\right)$$

$$\left(\bar{P}_{r_{10}}\right)_A = \frac{\gamma R^2(1-\nu^2)}{E\cdot t} - \frac{\gamma R^2(1-\nu^2)}{E\cdot t\cdot\sin\theta}\cdot\sin\theta = 0$$

$$\left(\bar{P}_{r_{m0}}\right)_A = \frac{-\gamma R^2(1-\nu^2)}{t\cdot E\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\sin m\theta}{m} \qquad \text{voor} \quad m=2\dots\infty$$

$$\left(\bar{P}_{r_{0n}}\right)_A = -\frac{\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{b\cdot t\cdot E\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\theta}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $n=1\dots\infty$

$$\left(\bar{P}_{r_{mn}}\right)_A = -\frac{2\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{\pi\, b\cdot t\cdot E\,\sin\theta}\cdot\frac{1}{mn}\cdot\sin m\theta\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor: $m=1\dots\infty$
$n=1\dots\infty$

Hiermede is belastingsgeval A in de vorm gegoten, die gewenst is voor de toepassing van de formules, die zijn afgeleid bij de algemene theorie voor cirkelcilindrische schalen.

De verplaatsingen, de rekken en de spanningen kunnen op elke plaats worden berekend bij bekende γ, R, L, t, a, b, θ, E en ν

We beschouwen nu het volgende belastingsgeval.

B. We nemen aan, dat de oppervlaktekracht, die de ondersteuning uitoefent op de koker, varieert met de cosinus van φ.

$$\rightarrow \quad (P_r)_{2B} = C_B \cos\varphi \qquad \text{met } C_B \text{: constante}$$

voor: $\quad a - b/2 < |x| < a + b/2$

$\qquad |\varphi| < \theta$

De resultante van al deze oppervlaktekrachten over één ondersteuning moet evenwicht maken met het halve gewicht van de vloeistof in de koker.

$$\int_{-\theta}^{\theta} C_B \cos\varphi \cdot \cos\varphi \cdot R \cdot b \cdot d\varphi + \tfrac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot L \cdot R^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad C_B \cdot R \cdot b \cdot (\theta + \tfrac{1}{2} \sin 2\theta) + \tfrac{1}{2} \gamma \pi \cdot L \cdot R^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad C_B = - \frac{\gamma \cdot R \cdot L \cdot \quad \pi}{b \quad (2\theta + \sin 2\theta)}$$

$$(\overline{P_r})_{2B} = - \frac{\gamma \cdot R^2 \cdot L \cdot (1-\nu^2) \cdot \pi}{E \cdot b \cdot t \quad (2\theta + \sin 2\theta)} \cdot \cos\varphi$$

voor $\quad a - b/2 < x < a + b/2$

$\qquad |\varphi| < \theta$

elders: $\quad (\overline{P_r})_{2B} = 0$

We kunnen schrijven:

$$(\overline{P_r})_{2B} = - \frac{\gamma R^2 L \ (1-\nu^2) \cdot \pi}{E \, b \, t \ (2\theta + \sin 2\theta)} \ f_B(\varphi) \cdot g_B(x)$$

$$f_B(\varphi) = \begin{cases} \cos\varphi & \text{voor } -\theta < \varphi < \theta \\ 0 & \text{voor alle andere } \varphi \end{cases}$$

$$g_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } a - b/2 < x < a + b/2 \\ 0 & \text{voor alle andere } x \text{ binnen } L \end{cases}$$

$$f_B(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f_B(\varphi)\,d\varphi + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_B(\varphi)\cos m\varphi\,d\varphi\right\}\cos m\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\theta \cos\varphi\,d\varphi + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\theta \cos\varphi\cos m\varphi\,d\varphi\right\}\cos m\varphi =$$

$$= \frac{\sin\theta}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\theta\left[\cos(m+1)\varphi + \cos(m-1)\varphi\right]d\varphi\right\}\cos m\varphi =$$

$$= \frac{\sin\theta}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1+1)\theta}{1+1} + \theta\right]\cos\varphi +$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(m+1)\theta}{m+1} + \frac{\sin(m-1)\theta}{m-1}\right]\right\}\cos m\varphi$$

$$g_B(x) = \frac{2b}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n\pi}\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}\right\}\cos\frac{2\pi n}{L}x$$

$$\left(\overline{P}_{r00}\right)_{2B} = -\frac{\gamma R^2 L(1-\nu^2)\cdot\pi}{E\cdot b\cdot t\cdot(2\theta+\sin 2\theta)}\cdot\frac{2b}{L}\cdot\frac{\sin\theta}{\pi} = -\frac{2\gamma R^2(1-\nu^2)}{E\cdot t}\cdot\frac{\sin\theta}{2\theta+\sin 2\theta}$$

$$\left(\overline{P}_{r10}\right)_{2B} = -\frac{\gamma R^2(1-\nu^2)}{E\cdot t}$$

$$\left(\overline{P}_{rm0}\right)_{2B} = \frac{-2\gamma R^2(1-\nu^2)}{E\cdot t}\cdot\frac{1}{2\theta+\sin 2\theta}\cdot\left(\frac{\sin(m+1)\theta}{m+1} + \frac{\sin(m-1)\theta}{m-1}\right)$$

voor $m = 2 \ldots\ldots \infty$

$$\left(\overline{P}_{r0n}\right)_{2B} = -\frac{4\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{\pi\cdot E\cdot b\cdot t}\cdot\frac{\sin\theta}{2\theta+\sin 2\theta}\cdot\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $n = 1 \ldots\ldots \infty$

$$\left(\overline{P}_{r1n}\right)_{2B} = -\frac{2\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{\pi\; E\cdot b\cdot t}\cdot\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $n = 1 \ldots\ldots \infty$

$$\left(\overline{P}_{rmn}\right)_{2B} = -\frac{4\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{\pi\; E\cdot b\cdot t}\cdot\frac{1}{2\theta+\sin 2\theta}\cdot\left(\frac{\sin(m+1)\theta}{m+1} + \frac{\sin(m-1)\theta}{m-1}\right)\cdot\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $m = 2 \ldots\ldots \infty$
$n = 1 \ldots\ldots \infty$

Deze coëfficienten uit de reeksen voor het gedeelte van de belasting dat door de ondersteuning wordt uitgeoefend moet worden opgeteld bij de door de vloeistof uitgeoefende belasting.

Belastingsgeval B kan dus worden beschreven door de volgende getallen:

$$\left(\overline{P}_{r00}\right)_B = \frac{\gamma R^2(1-\nu^2)}{E\cdot t}\left(1-\frac{2\sin\theta}{2\theta+\sin 2\theta}\right)$$

$$\left(\overline{P}_{r10}\right)_B = 0$$

$$\left(\overline{P}_{rm0}\right)_B = \frac{-2\gamma R^2(1-\nu^2)}{E\cdot t}\cdot\frac{1}{2\theta+\sin 2\theta}\cdot\left(\frac{\sin(m+1)\theta}{m+1}+\frac{\sin(m-1)\theta}{m-1}\right)$$

voor $m = 2 \cdots\cdots \infty$

$$\left(\overline{P}_{r0n}\right)_B = -\frac{4\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{\pi E b t}\cdot\frac{\sin\theta}{2\theta+\sin 2\theta}\cdot\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $n = 1 \cdots\cdots \infty$

$$\left(\overline{P}_{r1n}\right)_B = -\frac{2\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{\pi E b t}\cdot\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $n = 1 \cdots\cdots \infty$

$$\left(\overline{P}_{rmn}\right)_B = -\frac{4\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{\pi E b t}\cdot\frac{1}{2\theta+\sin 2\theta}\left(\frac{\sin(m+1)\theta}{m+1}+\frac{\sin(m-1)\theta}{m-1}\right)\cdot\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $m = 2 \cdots\cdots \infty$
$n = 1 \cdots\cdots \infty$

Door deze formules is ook belastingsgeval B in de gewenste vorm gebracht.

Tenslotte beschouwen we belastingsgeval C en we hopen dat door combinatie van deze drie beschouwde belastingsgevallen, de werkelijkheid op een redelijke wijze benaderd kan worden.

C. We nemen aan dat de oppervlaktekracht, die door de ondersteuning op de ketel wordt uitgeoefend varieert met de cosinus van 2φ.

$$\longrightarrow \quad (P_r)_{2c} = C_c \cos 2\varphi \quad \text{met } C_c : \text{constante}$$

voor: $a - b/2 < |x| < a + b/2$
$|\varphi| < \theta$

De resultante van al deze oppervlaktekrachtjes over één ondersteuning moet evenwicht maken met het halve gewicht van de vloeistof in de ketel.

$$\int_{-\theta}^{\theta} C_c \cos 2\varphi \cdot \cos\varphi \, R \cdot b \cdot d\varphi + \tfrac{1}{2}\gamma \pi L R^2 = 0$$

$$\longrightarrow \quad C_c R \cdot b \cdot (2\sin\theta - \tfrac{4}{3}\sin^3\theta) + \tfrac{1}{2}\gamma \pi L R^2 = 0$$

$$\longrightarrow \quad C_c = -\frac{\gamma R L \cdot \pi}{b\,(4\sin\theta - \tfrac{8}{3}\sin^3\theta)}$$

$$(\overline{P}_r)_{2c} = -\frac{\gamma R^2 L\,(1-\nu^2)\,\pi}{E b t\,(4\sin\theta - \tfrac{8}{3}\sin^3\theta)} \cdot \cos 2\varphi$$

voor: $a - b/2 < |x| < a + b/2$
$|\varphi| < \theta$

elders: $(\overline{P}_r)_{2c} = 0$

Analoog aan beide vorige gevallen schrijven we:

$$(\overline{P}_r)_{2c} = -\frac{\gamma R^2 L\,(1-\nu^2)\,\pi}{E \cdot b \cdot t\,(4\sin\theta - \tfrac{8}{3}\sin^3\theta)} \cdot f_c(\varphi) \cdot g_c(x)$$

$$f_c(\varphi) = \begin{cases} \cos 2\varphi & \text{voor } -\theta < \varphi < \theta \\ 0 & \text{voor alle andere } \varphi \end{cases}$$

$$g_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } a - b/2 < |x| < a + b/2 \\ 0 & \text{voor alle andere } x \end{cases}$$

$$f_c(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f_c(\varphi)\,d\varphi + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_c(\varphi)\cos m\varphi\,d\varphi\right\}\cos m\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\theta}\cos 2\varphi\,d\varphi + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\cos 2\varphi\cos m\varphi\,d\varphi\right\}\cos m\varphi =$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{2\pi} + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\theta}\left[\cos(m+2)\varphi + \cos(m-2)\varphi\right]d\varphi\right\}\cos m\varphi =$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\tfrac{1}{3}\sin 3\theta + \sin\theta\right]\cos\varphi + \frac{1}{\pi}\left[\tfrac{1}{4}\sin 4\theta + \theta\right]\cos 2\varphi +$$

$$+ \sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(m+2)\theta}{m+2} + \frac{\sin(m-2)\theta}{m-2}\right]\cos m\varphi$$

$$g_c(x) = \frac{2b}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n\pi}\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}\right\}\cos\frac{2\pi n x}{L}$$

$$\left(\bar{P}_{r00}\right)_{2c} = -\frac{\gamma R^2(1-\nu^2)}{Et}\cdot\frac{\sin 2\theta}{4\sin\theta - 8/3\,\sin^3\theta}$$

$$\left(\bar{P}_{r10}\right)_{2c} = -\frac{\gamma R^2(1-\nu^2)}{Et}$$

$$\left(\bar{P}_{r20}\right)_{2c} = -\frac{\gamma R^2(1-\nu^2)}{Et}\cdot\frac{1/2\,\sin 4\theta + 2\theta}{4\sin\theta - 8/3\,\sin^3\theta}$$

$$\left(\bar{P}_{rm0}\right)_{2c} = -\frac{\gamma R^2(1-\nu^2)}{E\cdot t\cdot(2\sin\theta - 4/3\,\sin^3\theta)}\cdot\left[\frac{\sin(m+2)\theta}{m+2} + \frac{\sin(m-2)\theta}{m-2}\right]$$

voor $m = 3 \ldots\ldots \infty$

$$\left(\bar{P}_{r0n}\right)_{2c} = -\frac{\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{\pi\, E\cdot b\cdot t}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta - 4/3\,\sin^3\theta}\cdot\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $n = 1 \ldots\ldots \infty$

$$\left(\bar{P}_{r1n}\right)_{2c} = -\frac{2\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{\pi\, E\, b\, t}\cdot\frac{1}{n}\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $n = 1 \ldots \infty$

$$\left(\bar{P}_{r2n}\right)_{2c} = -\frac{\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{\pi\, E\, b\, t}\cdot\frac{\sin 4\theta + 4\theta}{4\sin\theta - 8/3\,\sin^3\theta}\cdot\frac{1}{n}\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $n = 1 \ldots \infty$

$$\left(\bar{P}_{rmn}\right)_{2c} = -\frac{\gamma R^2 L(1-\nu^2)}{\pi\cdot E\cdot b\cdot t\,(\sin\theta - 2/3\,\sin^3\theta)}\left[\frac{\sin(m+2)\theta}{m+2} + \frac{\sin(m-2)\theta}{m-2}\right]\frac{1}{n}\cos\frac{2\pi n a}{L}\sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $m = 3 \ldots\ldots \infty$
$n = 1 \ldots\ldots \infty$

Het in deze formules tot uiting gebrachte gedeelte van de belasting moet worden opgeteld bij het gedeelte dat van de vloeistof afkomstig is.

Belastingsgeval C kan dan als volgt worden weergegeven:

$$\left(\bar{P}_{r_{00}}\right)_C = \frac{\gamma R^2 (1-\nu^2)}{Et}\left(1 - \frac{\sin 2\theta}{4\sin\theta - 8/3\sin^3\theta}\right)$$

$$\left(\bar{P}_{r_{10}}\right)_C = 0$$

$$\left(\bar{P}_{r_{20}}\right)_C = -\frac{\gamma R^2 (1-\nu^2)}{Et} \cdot \frac{1/2 \sin 4\theta + 2\theta}{4\sin\theta - 8/3\sin^3\theta}$$

$$\left(\bar{P}_{r_{m0}}\right)_C = -\frac{\gamma R^2 (1-\nu^2)}{Et\,(2\sin\theta - 4/3\sin^3\theta)}\left[\frac{\sin(m+2)\theta}{m+2} + \frac{\sin(m-2)\theta}{m-2}\right]$$

voor $m = 3 \cdots\cdots \infty$

$$\left(\bar{P}_{r_{0n}}\right)_C = -\frac{\gamma R^2 L (1-\nu^2)}{\pi E b t} \cdot \frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta - 4/3\sin^3\theta} \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos\frac{2\pi n a}{L} \sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $n = 1 \cdots\cdots \infty$

$$\left(\bar{P}_{r_{1n}}\right)_C = -\frac{2\gamma R^2 L (1-\nu^2)}{\pi E b t} \cdot \frac{1}{n} \cos\frac{2\pi n a}{L} \sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $n = 1 \cdots\cdots \infty$

$$\left(\bar{P}_{r_{2n}}\right)_C = -\frac{\gamma R^2 L (1-\nu^2)}{\pi E b t} \cdot \frac{\sin 4\theta + 4\theta}{4\sin\theta - 8/3\sin^3\theta} \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos\frac{2\pi n a}{L} \sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $n = 1 \cdots\cdots \infty$

$$\left(\bar{P}_{r_{mn}}\right)_C = -\frac{\gamma R^2 L (1-\nu^2)}{\pi E b t\,(\sin\theta - 2/3\sin^3\theta)} \cdot \left[\frac{\sin(m+2)\theta}{m+2} + \frac{\sin(m-2)\theta}{m-2}\right] \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos\frac{2\pi n a}{L} \sin\frac{\pi n b}{L}$$

voor $m = 3 \cdots\cdots \infty$

$n = 1 \cdots\cdots \infty$

Voor elk van deze belastingsgevallen gaan we nu in een aantal punten van de koker de spanningen, die we met de experimenteel te bepalen spanningen willen vergelijken, berekenen. Daar bij het experiment, dat we als rekstrookmeting willen uitvoeren, informatie wordt verschaft over de membraanspanningen in axiale en tangentiale richting, respectievelijk σ_{mx} en $\sigma_{m\varphi}$ en over de maximale buigspanning in axiale en tangentiale richting, respectievelijk σ_{bx} en $\sigma_{b\varphi}$, moeten we deze met behulp van de theorie uit hoofdstuk 5 berekenen.
We zullen dan ook de notaties, zoals die in hoofdstuk 5 zijn gebruikt, ook nu weer toepassen, inclusief de dimensieloos gemaakte coördinaten : $\bar{x}$ en $\bar{\varphi}$.

$$\sigma_{m_x} = \frac{N_x}{t} = \frac{D}{t}\left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} + \nu\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{\varphi}} + \nu\bar{W}\right) =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} + \nu\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{\varphi}} + \nu\bar{W}\right) =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{d\bar{u}_{oH}}{d\bar{x}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{d\bar{u}_{mH}}{d\bar{x}}\cos m\bar{\varphi} + \frac{d\bar{u}_{op}}{d\bar{x}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{d\bar{u}_{mp}}{d\bar{x}}\cos m\bar{\varphi} + \right.$$

$$+\nu\sum_{m=1}^{\infty} m\bar{V}_{mH}\cos m\bar{\varphi} + \nu\sum_{m=1}^{\infty} m\bar{V}_{mp}\cos m\bar{\varphi} +$$

$$\left. + \nu\bar{W}_{oH} + \nu\sum_{m=1}^{\infty}\bar{W}_{mH}\cos m\bar{\varphi} + \nu\bar{W}_{op} + \nu\sum_{m=1}^{\infty}\bar{W}_{mp}\cos m\bar{\varphi}\right\} =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\left[\frac{d\bar{u}_{oH}}{d\bar{x}} + \frac{d\bar{u}_{op}}{d\bar{x}} + \nu\bar{W}_{oH} + \nu\bar{W}_{op}\right] + \right.$$

$$\left.\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{d\bar{u}_{mH}}{d\bar{x}} + \frac{d\bar{u}_{mp}}{d\bar{x}} + \nu m\bar{V}_{mH} + \nu m\bar{V}_{mp} + \nu\bar{W}_{mH} + \nu\bar{W}_{mp}\right]\cos m\bar{\varphi}\right\} =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\left[\nu\bar{P}_{r00} + (1-\nu^2)a_{01}\right] + \right.$$

$$\left.\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{d\bar{u}_{mH}}{d\bar{x}} + \frac{d\bar{u}_{mp}}{d\bar{x}} + \nu m\bar{V}_{mH} + \nu m\bar{V}_{mp} + \nu\bar{W}_{mH} + \nu\bar{W}_{mp}\right]\cos m\bar{\varphi}\right\}$$

$$\sigma_{m_x} = \frac{E}{1-\nu^2}\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{\Big[e^{\psi_{m_1}\bar{x}}+e^{-\psi_{m_1}\bar{x}}\Big](\cos\omega_{m_1}\bar{x})(\psi_{m_1}a_{m_1}+\omega_{m_1}a_{m_2}+\nu m\, b_{m_1}+\nu c_{m_1})+$$

$$+\Big[e^{\psi_{m_1}\bar{x}}-e^{-\psi_{m_1}\bar{x}}\Big](\sin\omega_{m_1}\bar{x})(\psi_{m_1}a_{m_2}-\omega_{m_1}a_{m_1}+\nu m\, b_{m_2}+\nu c_{m_2})+$$

$$+\Big[e^{\psi_{m_2}\bar{x}}+e^{-\psi_{m_2}\bar{x}}\Big](\cos\omega_{m_2}\bar{x})(\psi_{m_2}a_{m_3}+\omega_{m_2}a_{m_4}+\nu m\, b_{m_3}+\nu c_{m_3})+$$

$$+\Big[e^{\psi_{m_2}\bar{x}}-e^{-\psi_{m_2}\bar{x}}\Big](\sin\omega_{m_2}\bar{x})(\psi_{m_2}a_{m_4}-\omega_{m_2}a_{m_3}+\nu m\, b_{m_4}+\nu c_{m_4})+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\nu^2+2\nu+2\nu+1)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m^2\,\bar{P}_{r_{mn}}}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2+m^2\right]^4+(1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}\cdot\cos\frac{2\pi R}{L}n\bar{x}\Big\}\cos m\bar{\varphi}$$

Voor elke $\bar{x}$ en elke $\bar{\varphi}$ is met behulp van bovenstaande formule σ_{m_x} te berekenen.

$$\sigma_{m_\varphi} = \frac{N_\varphi}{t} = \frac{D}{t}\cdot\Big\{\nu\frac{d\bar{u}}{d\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{\varphi}}+\bar{w}\Big\} = \frac{E}{1-\nu^2}\Big\{\nu\frac{d\bar{u}}{d\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{\varphi}}+\bar{w}\Big\}=$$

$$=\frac{E}{1-\nu^2}\Big\{\nu\frac{d\bar{u}_{0H}}{d\bar{x}}+\nu\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d\bar{u}_{mH}}{d\bar{x}}\cos m\bar{\varphi}+\nu\frac{d\bar{u}_{0P}}{d\bar{x}}+\nu\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d\bar{u}_{mP}}{d\bar{x}}\cos m\bar{\varphi}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}m\bar{v}_{mH}\cos m\bar{\varphi}+\sum_{m=1}^{\infty}m\bar{v}_{mP}\cos m\bar{\varphi}+$$

$$+\bar{w}_{0H}+\sum_{m=1}^{\infty}\bar{w}_{mH}\cos m\bar{\varphi}+\bar{w}_{0P}+\sum_{m=1}^{\infty}\bar{w}_{mP}\cos m\bar{\varphi}\Big\}=$$

$$=\frac{E}{1-\nu^2}\Big\{\Big[\nu\frac{d\bar{u}_{0H}}{d\bar{x}}+\nu\frac{d\bar{u}_{0P}}{d\bar{x}}+\bar{w}_{0H}+\bar{w}_{0P}\Big]+$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\nu\frac{d\bar{u}_{mH}}{d\bar{x}}+\nu\frac{d\bar{u}_{mP}}{d\bar{x}}+m\bar{v}_{mH}+m\bar{v}_{mP}+\bar{w}_{mH}+\bar{w}_{mP}\Big]\cos m\bar{\varphi}\Big\}=$$

$$=\frac{E}{1-\nu^2}\Big\{(1-\nu^2)\Big[\frac{\mu}{\nu\sqrt{2}}e^{\frac{\mu\bar{x}}{\sqrt{2}}}\Big((-a_{02}-a_{03})\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}+(a_{02}-a_{03})\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}\Big)+$$

$$+\frac{\mu}{\nu\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\Big((-a_{02}-a_{03})\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}+(a_{03}-a_{02})\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}\Big)\Big]+$$

$$+\bar{P}_{r00}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\nu^2)\,\bar{P}_{r0n}}{1-\nu^2+k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}\cos\frac{2\pi R}{L}n\bar{x}+$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\nu\frac{d\bar{u}_{mH}}{d\bar{x}}+\nu\frac{d\bar{u}_{mP}}{d\bar{x}}+m\bar{v}_{mH}+m\bar{v}_{mP}+\bar{w}_{mH}+\bar{w}_{mP}\Big]\cos m\bar{\varphi}\Big\}$$

$$\sigma_{m\varphi} = E\cdot\frac{\mu}{\nu\sqrt{2}}\left\{\left[e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}} + e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\right]\left(\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}\right)\left(-a_{02}-a_{03}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}} - e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\right]\left(\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}\right)\left(a_{02}-a_{03}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\bar{P}_{r00} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\nu^2)\bar{P}_{r0n}}{1-\nu^2+k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}\cos\frac{2\pi R}{L}n\bar{x}\right\} +$$

$$+ \frac{E}{1-\nu^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[e^{\psi_{m1}\bar{x}} + e^{-\psi_{m1}\bar{x}}\right]\left(\cos\omega_{m1}\bar{x}\right)\left(\nu\psi_{m1}a_{m1} + \nu\omega_{m1}a_{m2} + m b_{m1} + c_{m1}\right) + \right.$$

$$+ \left[e^{\psi_{m1}\bar{x}} - e^{-\psi_{m1}\bar{x}}\right]\left(\sin\omega_{m1}\bar{x}\right)\left(\nu\psi_{m1}a_{m2} - \nu\omega_{m1}a_{m1} + m b_{m2} + c_{m2}\right) +$$

$$+ \left[e^{\psi_{m2}\bar{x}} + e^{-\psi_{m2}\bar{x}}\right]\left(\cos\omega_{m2}\bar{x}\right)\left(\nu\psi_{m2}a_{m3} + \nu\omega_{m2}a_{m4} + m b_{m3} + c_{m3}\right) +$$

$$+ \left[e^{\psi_{m2}\bar{x}} - e^{-\psi_{m2}\bar{x}}\right]\left(\sin\omega_{m2}\bar{x}\right)\left(\nu\psi_{m2}a_{m4} - \nu\omega_{m2}a_{m3} + m b_{m4} + c_{m4}\right) +$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(2\nu+4)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 m^2 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4\right]\bar{P}_{rmn}}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}\cos\frac{2\pi R}{L}n\bar{x}\right\}\cos m\bar{\varphi}$$

De maximale buigspanning voor een bepaalde plaats $(\bar{x}, \bar{\varphi})$ treedt op in de buitenste vezels: $z = \pm t/2$

We berekenen deze voor de buitenwand: $z = t/2$

$$\sigma_{bx} = -\frac{M_x}{1/6\, t^2} = -\frac{K}{1/6\, t^2 R}\left(\frac{d^2\bar{W}}{d\bar{x}^2} + \nu\frac{d^2\bar{W}}{d\bar{\varphi}^2}\right) = -\frac{Et}{2R(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\bar{x}^2} + \nu\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial^2\bar{\varphi}}\right) =$$

$$= -\frac{Et}{2R(1-\nu^2)}\cdot\left\{\frac{d^2\bar{W}_{0H}}{d\bar{x}^2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{d^2\bar{W}_{mH}}{d\bar{x}^2}\cos m\bar{\varphi} + \frac{d^2\bar{W}_{0P}}{d\bar{x}^2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{d^2\bar{W}_{mP}}{d\bar{x}^2}\cos m\bar{\varphi} + \right.$$

$$\left. - \nu\sum_{m=1}^{\infty} m^2\bar{W}_{mH}\cos m\bar{\varphi} - \nu\sum_{m=1}^{\infty} m^2\bar{W}_{mP}\cos m\bar{\varphi}\right\} =$$

$$= -\frac{Et}{2R(1-\nu^2)}\cdot\left\{\left[\frac{d^2\bar{W}_{0H}}{d\bar{x}^2} + \frac{d^2\bar{W}_{0P}}{d\bar{x}^2}\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{d^2\bar{W}_{mH}}{d\bar{x}^2} + \frac{d^2\bar{W}_{mP}}{d\bar{x}^2} - \nu m^2\bar{W}_{mH} - \nu m^2\bar{W}_{mP}\right]\cos m\bar{\varphi}\right\} =$$

$$= -\frac{Et}{2R(1-\nu^2)}\cdot\left\{\frac{\mu^3}{2\nu\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\left[(2a_{02}-2a_{03})\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x} + (2a_{02}+2a_{03})\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}\right] + \right.$$

$$+ \frac{\mu^3}{2\nu\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\left[(2a_{02}-2a_{03})\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x} + (-2a_{02}-2a_{03})\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}\right] +$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2\cdot\bar{P}_{r0n}}{1-\nu^2+k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}\cos\frac{2\pi R}{L}n\bar{x} +$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{d^2\bar{W}_{mH}}{d\bar{x}^2} + \frac{d^2\bar{W}_{mP}}{d\bar{x}^2} - \nu m^2\bar{W}_{mH} - \nu m^2\bar{W}_{mP}\right]\cos m\bar{\varphi}\right\}$$

$$\sigma_{b_x} = -\frac{Et}{2R(1-\nu^2)}\left\{\frac{\mu^3}{\nu\sqrt{2}}\left[e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}} + e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\right]\left(\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}\right)(a_{02}-a_{03}) + \right.$$

$$+\frac{\mu^3}{\nu\sqrt{2}}\left[e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}} - e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}}\right]\left(\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\bar{x}\right)(a_{02}+a_{03}) +$$

$$\left. -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 \cdot \overline{P}_{ron}}{1-\nu^2 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}\cos\frac{2\pi R}{L}n\bar{x}\right\} +$$

$$-\frac{Et}{2R(1-\nu^2)}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left(e^{\psi_{m_1}\bar{x}} + e^{-\psi_{m_1}\bar{x}}\right)\cos\omega_{m_1}\bar{x}\left[(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2)c_{m_1} + 2\psi_{m_1}\omega_{m_1}c_{m_2} - \nu m^2 c_{m_1}\right] + \right.$$

$$+\left(e^{\psi_{m_1}\bar{x}} - e^{-\psi_{m_1}\bar{x}}\right)\sin\omega_{m_1}\bar{x}\left[(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2)c_{m_2} - 2\psi_{m_1}\omega_{m_1}c_{m_1} - \nu m^2 c_{m_2}\right] +$$

$$+\left(e^{\psi_{m_2}\bar{x}} + e^{-\psi_{m_2}\bar{x}}\right)\cos\omega_{m_2}\bar{x}\left[(\psi_{m_2}^2-\omega_{m_2}^2)c_{m_3} + 2\psi_{m_2}\omega_{m_2}c_{m_4} - \nu m^2 c_{m_3}\right] +$$

$$+\left(e^{\psi_{m_2}\bar{x}} - e^{-\psi_{m_2}\bar{x}}\right)\sin\omega_{m_2}\bar{x}\left[(\psi_{m_2}^2-\omega_{m_2}^2)c_{m_4} - 2\psi_{m_2}\omega_{m_2}c_{m_3} - \nu m^2 c_{m_4}\right] +$$

$$-\nu\frac{\overline{P}_{rmo}}{k m^2} +$$

$$\left. -\nu m^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^2 \overline{P}_{rmn}\cdot\cos\frac{2\pi R}{L}n\bar{x}}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}\right\}\cos m\bar{\varphi}$$

Tenslotte berekenen we nog de maximale buigspanning die in tangentiale richting optreedt op een bepaalde plaats met coordinaten : $(\bar{x}, \bar{\varphi})$

$$\sigma_{b\varphi} = -\frac{M_\varphi}{1/6\, t^2} = -\frac{K}{1/6\, t^2 R}\left\{\nu\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\bar{\varphi}^2}\right\} =$$

$$= -\frac{Et}{2R(1-\nu^2)}\cdot\left(\nu\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\bar{\varphi}^2}\right) =$$

$$= -\frac{Et}{2R(1-\nu^2)}\left\{\nu\frac{d^2\overline{w}_{oH}}{d\bar{x}^2} + \nu\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d^2\overline{w}_{mH}}{d\bar{x}^2}\cos m\bar{\varphi} + \nu\frac{d^2\overline{w}_{op}}{d\bar{x}^2} + \right.$$

$$+\nu\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d^2\overline{w}_{mp}}{d\bar{x}^2}\cos m\bar{\varphi} - \sum_{m=1}^{\infty}m^2\overline{w}_{mH}\cos m\bar{\varphi}$$

$$\left. -\sum_{m=1}^{\infty}m^2\overline{w}_{mp}\cos m\bar{\varphi}\right\}$$

$$\sigma_{b\varphi} = -\frac{Et}{2R(1-\nu^2)}\left\{\left[\nu\frac{d^2\overline{W}_{oH}}{d\overline{x}^2} + \nu\frac{d^2\overline{W}_{op}}{d\overline{x}^2}\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\nu\frac{d^2\overline{W}_{mH}}{d\overline{x}^2} + \nu\frac{d^2\overline{W}_{mp}}{d\overline{x}^2} - m^2\overline{W}_{mH} - m^2\overline{W}_{mp}\right]\cos m\overline{\varphi}\right\} =$$

$$= -\frac{Et}{2R(1-\nu^2)}\left\{\frac{\mu^3}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}}\left[(a_{o2}-a_{o3})\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x} + (a_{o2}+a_{o3})\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}\right] + \right.$$

$$+ \frac{\mu^3}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}}\left[(a_{o2}-a_{o3})\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x} + (-a_{o2}-a_{o3})\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}\right] +$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2\,\overline{P}_{ron}}{1-\nu^2 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}\cos\frac{2\pi R}{L}n\overline{x} +$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\nu\frac{d^2\overline{W}_{mH}}{d\overline{x}^2} + \nu\frac{d^2\overline{W}_{mp}}{d\overline{x}^2} - m^2\overline{W}_{mH} - m^2\overline{W}_{mp}\right]\cos m\overline{\varphi}\right\}$$

$$\sigma_{b\varphi} = -\frac{Et}{2R(1-\nu^2)}\left\{\frac{\mu^3}{\sqrt{2}}\left[e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}} + e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}}\right]\left(\cos\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}\right)(a_{o2}-a_{o3}) + \right.$$

$$+ \frac{\mu^3}{\sqrt{2}}\left[e^{\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}} - e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}}\right]\left(\sin\frac{\mu}{\sqrt{2}}\overline{x}\right)(a_{o2}+a_{o3}) +$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2\,\overline{P}_{ron}}{1-\nu^2 + k\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}\cos\frac{2\pi R}{L}n\overline{x}\right\} +$$

$$-\frac{Et}{2R(1-\nu^2)}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left(e^{\psi_{m_1}\overline{x}} + e^{-\psi_{m_1}\overline{x}}\right)\cos\omega_{m_1}\overline{x}\left[\nu(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2)C_{m_1} + 2\nu\psi_{m_1}\omega_{m_1}C_{m_2} - m^2C_{m_1}\right] + \right.$$

$$+ \left(e^{\psi_{m_1}\overline{x}} - e^{-\psi_{m_1}\overline{x}}\right)\sin\omega_{m_1}\overline{x}\left[\nu(\psi_{m_1}^2-\omega_{m_1}^2)C_{m_2} - 2\nu\psi_{m_1}\omega_{m_1}C_{m_1} - m^2C_{m_2}\right] +$$

$$+ \left(e^{\psi_{m_2}\overline{x}} + e^{-\psi_{m_2}\overline{x}}\right)\cos\omega_{m_2}\overline{x}\left[\nu(\psi_{m_2}^2-\omega_{m_2}^2)C_{m_3} + 2\nu\psi_{m_2}\omega_{m_2}C_{m_4} - m^2C_{m_3}\right] +$$

$$+ \left(e^{\psi_{m_2}\overline{x}} - e^{-\psi_{m_2}\overline{x}}\right)\sin\omega_{m_2}\overline{x}\left[\nu(\psi_{m_2}^2-\omega_{m_2}^2)C_{m_4} - 2\nu\psi_{m_2}\omega_{m_2}C_{m_3} - m^2C_{m_4}\right] +$$

$$- \frac{\overline{P}_{rmo}}{k\,m^2} +$$

$$\left. - m^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^2\cdot\overline{P}_{rmn}\cdot\cos\frac{2\pi R}{L}n\overline{x}}{k\left[\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 n^2 + m^2\right]^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^4 n^4}\right\}\cos m\overline{\varphi}$$

Hiermede zijn de spanningen, die we wensen te berekenen in een zodanige vorm gegeven, dat we ze numeriek kunnen berekenen.

Voor de numerieke uitwerking was het noodzakelijk om gebruik te maken van de computer.
Hiertoe werd een Algolprogramma geschreven, dat met 05062438 werd genummerd en dat onder bijlage 7 is bijgevoegd.

Voor elk van de drie gevallen, A, B en C, die reeds werden genoemd werden de spanningen σ_{mx}, $\sigma_{m\varphi}$, σ_{bx} en $\sigma_{b\varphi}$ berekend voor een aantal plaatsen van de koker, gegeven door de coördinaten $(\bar{x}, \bar{\varphi})$, die een combinatie zijn van de hieronder genoemde waarden:

$\bar{\varphi} = 0{,}000$ [rad] ofwel $\varphi = 0°$	en	$\bar{x} = 0{,}000$	ofwel	$x = 0$ [cm]
$\bar{\varphi} = 0{,}524$ [rad] ofwel $\varphi = 30°$		$\bar{x} = 0{,}676$	ofwel	$x = 10$ [cm]
$\bar{\varphi} = 1{,}047$ [rad] ofwel $\varphi = 60°$		$\bar{x} = 1{,}351$	ofwel	$x = 20$ [cm]
$\bar{\varphi} = 1{,}570$ [rad] ofwel $\varphi = 90°$		$\bar{x} = 2{,}027$	ofwel	$x = 30$ [cm]
$\bar{\varphi} = 2{,}094$ [rad] ofwel $\varphi = 120°$		$\bar{x} = 2{,}703$	ofwel	$x = 40$ [cm]
$\bar{\varphi} = 2{,}618$ [rad] ofwel $\varphi = 150°$		$\bar{x} = 3{,}108$	ofwel	$x = 46$ [cm]
$\bar{\varphi} = 3{,}141$ [rad] ofwel $\varphi = 180°$		$\bar{x} = 3{,}378$	ofwel	$x = 50$ [cm]
		$\bar{x} = 4{,}054$	ofwel	$x = 60$ [cm]
		$\bar{x} = 4{,}730$	ofwel	$x = 70$ [cm]
		$\bar{x} = 5{,}068$	ofwel	$x = 75$ [cm]

In het programma werd nog een mogelijkheid ingebouwd om de convergentie van de reeksen, die over m worden gesommeerd na te gaan voor één bepaalde combinatie van $\bar{x}$ en $\bar{\varphi}$, die men vrij kan kiezen bij het maken van de invoergegevens.

In eerste instantie leek het alsof de matrix S_{mij}, zoals die is vermeld op pagina 73 van dit verslag, singulier zou zijn, daar dit het enige resultaat was, wat, na verwerking van het programma, door de computer werd geleverd.
Naar aanleiding van het colloquium dat op 25 april 1968 door Dr. Ir. J.D. Janssen werd gegeven over energieprincipes en de elementenmethode werd gedacht dat de oorzaak hiervan zou kunnen zijn, dat de beweging van de koker als star lichaam niet is verhinderd, daar dit bij bij de elementenmethode ook aanleiding geeft tot het singulier zijn van matrices.

De enige beweging van de koker als star lichaam die niet verhinderd zou kunnen zijn is die in verticale richting, die wordt vertegenwoordigd door :

$$u = 0$$
$$v = C_1 \sin\varphi$$
$$W = -C_1 \cos\varphi$$

C_1: constante, onafhankelijk van x en φ

Deze bewegingsvergelijkingen voldoen inderdaad aan het homogene gedeelte der differentiaalvergelijkingen, zoals die in paragraaf 5.4. op blz 30 en 31 zijn vermeld, bij substitutie van : $m=1$, $\bar{u}_{1H}=0$, $\bar{v}_{1H}=C_1$ en $\bar{w}_{1H}=-C_1$ met alle afgeleiden naar $\bar{x}$ gelijk aan nul. Deze differentiaalvergelijkingen werden echter niet gebruikt maar die van een vereenvoudigd systeem, die we kunnen vinden op blz 43 van paragraaf 5.7. Wanneer we hierin bovenstaande waarden voor m, $\bar{u}_{1H}$, $\bar{v}_{1H}$ en $\bar{w}_{1H}$ substitueren en we nemen alle afgeleiden naar x gelijk aan nul, dan blijkt dat C_1 gelijk aan nul moet zijn. Door het invoeren van het vereenvoudigde systeem is dus tevens, weliswaar onbewust, de beweging in verticale richting van de koker als star lichaam verhinderd. De oorzaak van het singulier zijn van de matrix S_{mij} moet daarom niet hierin worden gezocht.

Toen we de matrix S_{mij} door de computer in getalvorm lieten uitvoeren bleek dat deze in het geheel niet singulier was, maar dat het systeem : $S_{mij} \cdot a_{mj} = T_{mi}$ slecht was geconditioneerd, een toestand waarbij de computer eveneens aangeeft dat S_{mij} singulier is.
Door het invoeren van een aanzienlijk kleinere waarde van ε (eps), die bij de procedure: „Croutdecomposition" wordt gebruikt, bleek dat het systeem wel door de computer kon worden verwerkt en we kregen dan ook de gewenste resultaten.

De wijze waarop we belastingsgeval A, B en C moeten combineren, komt voort uit de eis, dat de vorm van de dwarsdoorsnede van de koker voor $x=a$ in het gebied $-\theta<\varphi<\theta$ cirkelvormig moet zijn. In principe is het hiervoor nodig dat we in plaats van deze drie belastingsgevallen, oneindig veel belastingsgevallen mee zouden moeten nemen. Bij een numerieke is dit echter niet uitvoerbaar en we volstaan met de drie genoemde belastingsgevallen. We kunnen dan ook niet exact voldoen aan de gestelde eisen aan de verplaatsingen, maar we proberen een zo goed mogelijke benadering te geven.

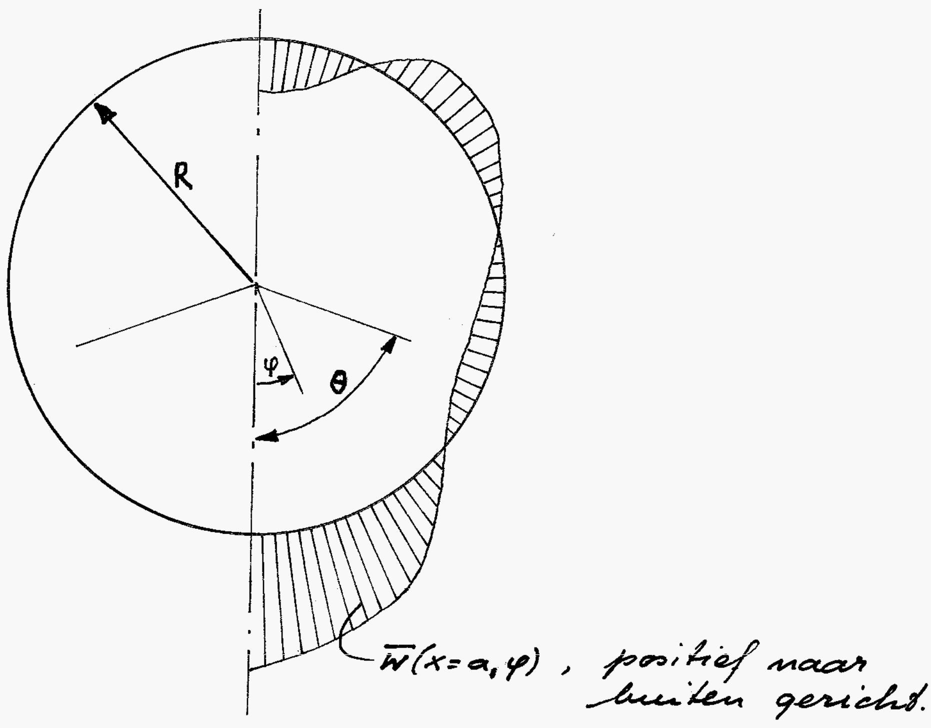
De drie belastingsgevallen combineren we als volgt:

totale belasting in werkelijkheid =

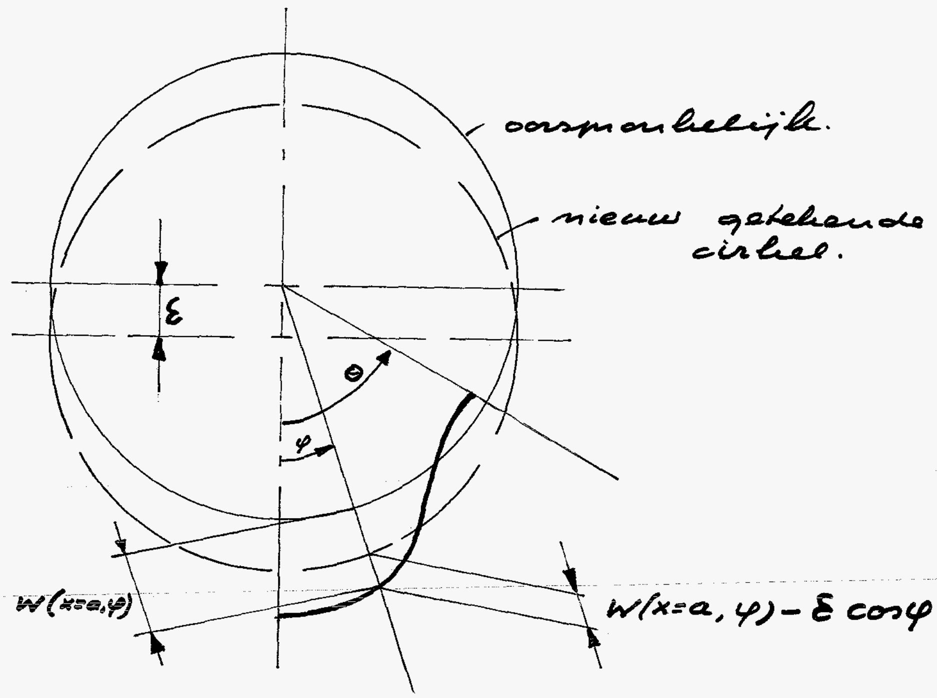
α · belasting in geval A +
β · belasting in geval B +
$(1-\alpha-\beta)$ · belasting in geval C.

Nu geldt dus: $\overline{W}(x=a,\varphi)=\alpha\,\overline{W}(x=a,\varphi)_A+\beta\,\overline{W}(x=a,\varphi)_B+(1-\alpha-\beta)\,\overline{W}(x=a,\varphi)_C$

We maken hiervan een schets:



Voor $-\theta<\varphi<\theta$ moet de getekende vervormde doorsnede, zo weinig mogelijk afwijken van de cirkelvorm. We tekenen daartoe een cirkel met dezelfde straal R, die een afstand ε in verticale richting ligt verschoven en met behulp van de methode der kleinste kwadraten berekenen we, wanneer (voor welke ε) deze cirkel de getekende vervormde doorsnede voor $-\theta<\varphi<\theta$ zo goed mogelijk benaderd:



We moeten dus eisen: $\int_{-\theta}^{\theta}\{W(x=a,\varphi)-\varepsilon\cos\varphi\}^2 d\varphi$ = minimaal

Ofwel we eisen het minimum van de volgende integraal:

$$V=\int_0^{\theta}\{\bar{W}(x=a,\varphi)-\bar{\varepsilon}\cos\varphi\}^2 d\varphi$$

met $\bar{\varepsilon}=\varepsilon/R$

α, β en $\bar{\varepsilon}$ kunnen we nu bepalen uit:

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha}=0 \qquad \frac{\partial V}{\partial\beta}=0 \qquad \frac{\partial V}{\partial\bar{\varepsilon}}=0$$

Er doen zich echter nog enige moeilijkheden voor:

1) De waarden van $\overline{W}(\bar{x},\varphi)$, die berekend kunnen worden zijn voor $x=a$ en de omgeving hiervan, niet erg betrouwbaar omdat het verschijnsel van Gibbs kan optreden.

2) $\overline{W}\ (x=a,\varphi)$ is als functie van φ zodanig gecompliceerd, dat integratie moeilijkheden met zich mee zal brengen.

De eerste moeilijkheid vervalt wanneer we de gemiddelde waarde van de waarden van $\overline{W}(x,\varphi)$ voor twee punten op gelijke afstand links en rechts van het punt $x=a$ en met dezelfde φ-coördinaat, maatgevend beschouwen voor $\overline{W}\ (x=a,\varphi)$. Voor deze afstand nemen we bijvoorbeeld $2b$, waarbij we hopen dat dit groot genoeg is om buiten de invloed te komen van het eventuele verschijnsel van Gibbs.
We stellen dus:

$$\overline{W}\,(x=a,\varphi) \approx 1/2\,\{\overline{W}\,(x=a-2b,\varphi)+\overline{W}\,(x=a+2b,\varphi)\}$$

De tweede moeilijkheid kunnen we laten vervallen wanneer we niet integreren over het interval $0<\varphi<\theta$, maar wanneer we binnen dit gebied sommeren over een discreet aantal punten op gelijke afstand.
Hiervoor nemen we vijf punten: $\varphi = k\cdot\theta/4$ met $k=0,1,2,3,4$.

Wanneer we dit alles invoeren geldt voor V:

$$V=\sum_{k=0}^{4}\Big\{\alpha\cdot 1/2\big[\overline{W}(x=a-2b,k\tfrac{\theta}{4})_A+\overline{W}(x=a+2b,k\tfrac{\theta}{4})_A\big]+$$

$$+\beta\cdot 1/2\big[\overline{W}(x=a-2b,k\tfrac{\theta}{4})_B+\overline{W}(x=a+2b,k\tfrac{\theta}{4})_B\big]+$$

$$+(1-\alpha-\beta)\cdot 1/2\big[\overline{W}(x=a-2b,k\tfrac{\theta}{4})_C+\overline{W}(x=a+2b,k\tfrac{\theta}{4})_C\big]+$$

$$-\bar{E}\cdot\cos(k\cdot\tfrac{\theta}{4})\Big\}^2$$

De in deze formule voor V voorkomende waarden van $\overline{W}\,(x = a \pm 2b,\ k\theta/4)$ voor $k = 0, 1, 2, 3, 4$ werden tevens door het computerprogramma berekend en zijn hieronder weergegeven.

A

k	x = a − 2b	x = a + 2b
0	−0,00819	−0,00811
1	−0,00810	−0,00763
2	−0,00578	−0,00493
3	−0,00179	−0,00091
4	+0,00363	+0,00357

B

k	x = a − 2b	x = a + 2b
0	−0,00902	−0,00896
1	−0,00995	−0,00908
2	−0,00632	−0,00551
3	−0,00092	−0,00051
4	+0,00511	+0,00463

C

k	x = a − 2b	x = a + 2b
0	−0,01260	−0,01262
1	−0,01798	−0,01537
2	−0,00847	−0,00797
3	+0,00298	+0,00128
4	+0,01148	+0,00923

$$
\begin{aligned}
V = {} & \left\{(0{,}00446)\alpha + (0{,}00362)\beta + (-1{,}0000)\bar{\varepsilon} + (-0{,}01264)\right\}^2 + \\
& + \left\{(0{,}00881)\alpha + (0{,}00716)\beta + (-0{,}9681)\bar{\varepsilon} + (-0{,}01261)\right\}^2 + \\
& + \left\{(0{,}00286)\alpha + (0{,}00230)\beta + (-0{,}8746)\bar{\varepsilon} + (-0{,}00822)\right\}^2 + \\
& + \left\{(-0{,}00348)\alpha + (-0{,}00284)\beta + (-0{,}7254)\bar{\varepsilon} + (0{,}00213)\right\}^2 + \\
& + \left\{(-0{,}00676)\alpha + (-0{,}00548)\beta + (-0{,}5299)\bar{\varepsilon} + (0{,}01035)\right\}^2
\end{aligned}
$$

$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0 \longrightarrow$

$$0{,}0003270 \cdot \alpha + 0{,}0002655\,\beta - 0{,}0187676 \cdot \bar{\varepsilon} - 0{,}0005367 = 0$$

ofwel: $3.270\,\alpha + 2.655\,\beta - 1.877 \cdot (100\bar{\varepsilon}) = 5.367$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = 0 \longrightarrow$$

$$0{,}0002655\ \alpha + 0{,}0002155 \cdot \beta - 0{,}0151984 \cdot \bar{\varepsilon} - 0{,}0004354 = 0$$

ofwel: $2{,}655 \cdot \alpha + 2{,}155\ \beta - 1{,}520\ (100 \cdot \bar{\varepsilon}) = 4{,}354$

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{\varepsilon}} = 0 \longrightarrow$$

$$-0{,}0187676 \cdot \alpha - 0{,}0151984 \cdot \beta + 7{,}0182839\ \bar{\varepsilon} + 0{,}0500148 = 0$$

ofwel: $1{,}877 \cdot \alpha + 1{,}520\ \beta - 7{,}018\ (\bar{\varepsilon} \cdot 100) = 5{,}001$

Uit de drie nu verkregen lineaire vergelijkingen zijn α, β en voor de volledigheid $\bar{\varepsilon}$ op te lossen:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 5{,}367 & 2{,}655 & -1{,}877 \\ 4{,}354 & 2{,}155 & -1{,}520 \\ 5{,}001 & 1{,}520 & -7{,}018 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3{,}270 & 2{,}655 & -1{,}877 \\ 2{,}655 & 2{,}155 & -1{,}520 \\ 1{,}877 & 1{,}520 & -7{,}018 \end{vmatrix}} = \frac{-0{,}01775}{0{,}01297} = -1{,}37$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 3{,}270 & 5{,}367 & -1{,}877 \\ 2{,}655 & 4{,}354 & -1{,}520 \\ 1{,}877 & 5{,}001 & -7{,}018 \end{vmatrix}}{0{,}01297} = \frac{0{,}04510}{0{,}01297} = 3{,}48$$

$$100 \cdot \bar{\varepsilon} = \frac{\begin{vmatrix} 3{,}270 & 2{,}655 & 5{,}367 \\ 2{,}655 & 2{,}155 & 4{,}354 \\ 1{,}877 & 1{,}520 & 5{,}001 \end{vmatrix}}{0{,}01297} = \frac{-0{,}00422}{0{,}01297} = -0{,}325$$

$$\longrightarrow \varepsilon = 14{,}8 \cdot \bar{\varepsilon} = 0{,}048 \text{ cm}$$

Met behulp van de nu gevonden waarden kunnen we de drie belastingsgevallen combineren. Wanneer we stellen: $\delta = 1 - \alpha - \beta$ geldt:

$$\delta = -1{,}11$$

Nu is dus bekend welke vorm de oppervlaktekracht heeft, die door de zadels op de koker wordt uitgeoefend:

$$(P_r)_2 = \alpha \cdot \left(-\frac{\pi \gamma R L}{4 \cdot b \cdot \sin\theta}\right) +$$

$$+\beta\left(-\frac{\pi \gamma R L}{b \cdot (2\theta + \sin 2\theta)} \cdot \cos\varphi\right) +$$

$$+\delta\left(-\frac{\pi \gamma R L}{b\,(4\sin\theta - 8/3\sin^3\theta)} \cdot \cos 2\varphi\right)$$

voor: $a - b/2 < |x| < a + b/2$

$|\varphi| < \theta$

Ofwel:

$$(P_r)_2 = -\frac{\pi \gamma R L}{b}\left\{\frac{\alpha}{4\sin\theta} + \frac{\beta\cos\varphi}{(2\theta + \sin 2\theta)} + \frac{\delta\cos 2\varphi}{(4\sin\theta - 8/3\sin^3\theta)}\right\}$$

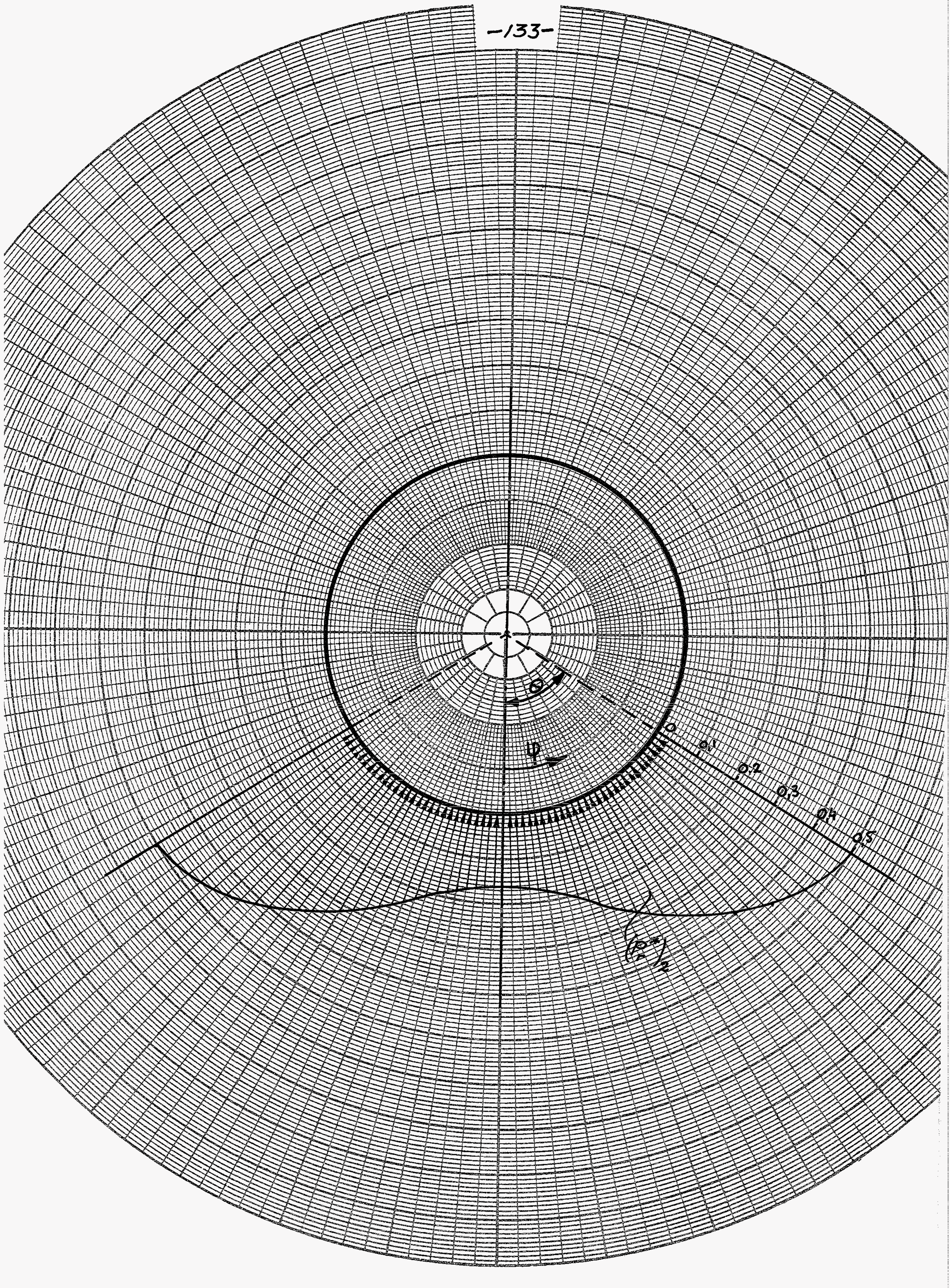
$$= -\frac{\pi \gamma R L}{b}\left(-0{,}404 + 1{,}192\cos\varphi - 0{,}629\cos 2\varphi\right)$$

We bekijken alleen de afhankelijkheid van φ en we voeren in:

$$(P_r^*)_2 = \left(0{,}404 - 1{,}192\cos\varphi + 0{,}629\cos 2\varphi\right)$$

Op de volgende bladzijde is deze afhankelijkheid weergegeven in een polair diagram.

Zoals blijkt is aan de eis voldaan dat $(P_r)_2$ overal negatief is.


θ
ψ
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$(P_r^*)_2$

Om te komen tot de gewenste spanningen moeten we de drie belastingsgevallen als volgt combineren:

$$\sigma_{gewenst} = \alpha \cdot \sigma_{berekend\ in\ geval\ A} + \beta \cdot \sigma_{berekend\ in\ geval\ B} + \delta \cdot \sigma_{berekend\ in\ geval\ C}.$$

In de nu volgende tabellen zijn de resultaten na de combinatie weergegeven:

σ_{mx} in kgf/cm²

		φ						
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
x [cm]	0	8,29	8,63	2,88	-7,78	-8,59	-0,86	3,16
	10	7,15	8,44	2,87	-7,82	-7,77	-0,65	2,62
	20	4,01	7,76	2,47	-7,45	-5,23	-0,27	1,31
	30	1,11	5,82	0,47	-5,17	-1,33	-0,42	0,10
	40	5,65	-2,01	-4,54	3,31	1,44	-0,99	-0,27
	46	16,01	-11,76	-8,06	11,60	1,58	-1,09	-0,18
	50	15,58	-12,20	-8,19	12,00	1,86	-1,05	-0,04
	60	-0,40	-0,24	-2,98	1,26	2,45	-0,57	0,53
	70	-1,54	1,41	-0,27	-1,64	0,31	0,33	1,24
	75	0,01	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	-0,01

Als extra-controle zien we dat, afgezien van eventuele afrondingsfouten voldaan is aan een van de randvoorwaarden nl:

$$\sigma_{mx}\ (x = 75\ cm,\ \varphi) = 0$$

$\sigma_{m\varphi}$ in kgf/cm^2

x [cm]	φ = 0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0	15,37	15,64	4,23	-15,49	-15,32	1,49	10,15
10	13,34	15,25	4,21	-15,57	-13,78	1,92	9,13
20	7,70	14,09	3,43	-15,09	-9,01	2,70	6,62
30	1,95	10,72	-0,33	-11,12	-1,61	2,51	4,30
40	10,47	-3,07	-9,66	4,42	3,81	1,38	3,68
46	24,21	-32,39	-23,72	20,58	4,11	1,06	4,03
50	23,76	-33,32	-24,28	21,53	4,61	1,00	4,51
60	1,56	-1,09	-8,66	2,17	5,33	1,38	6,52
70	2,95	0,23	-4,70	-1,22	0,23	2,72	8,93
75	7,78	-3,85	-4,21	4,12	0,25	1,72	5,58

Een snelle eerste controle van deze resultaten, zoals die mogelijk was bij de resultaten voor σ_{mx} op de vorige bladzijde is nu helaas onmogelijk omdat N_φ en dus $\sigma_{m\varphi}$ niet in de randvoorwaarden is verwerkt.

Een dergelijke controle is weer wel mogelijk bij de resultaten voor σ_{bx} omdat moet gelden: σ_{bx} $(x = 75 \text{ cm}, \varphi) = 0$, terwijl bij $\sigma_{b\varphi}$ deze mogelijkheid weer ontbreekt.

Op de volgende bladzijde (136) is σ_{bx} getabelleerd als functie van x en φ.

σ_{bx} in kgf/cm²

		φ						
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
x [cm]	0	2,45	-4,34	-0,91	6,72	2,44	-2,65	-4,40
	10	2,31	-4,29	-0,77	6,59	2,36	-2,57	-4,37
	20	1,72	-4,02	-0,35	6,08	2,21	-2,34	-4,33
	30	0,21	-3,19	0,34	5,00	2,27	-2,05	-4,33
	40	-2,62	-1,61	0,85	3,46	2.66	-1,99	-4,33
	46	-2,67	0,36	1,65	4.89	4,37	-0,47	-2,63
	50	-2,65	0,34	1,62	4.89	4,26	-0,50	-2,49
	60	-1,15	-2,31	0,67	4,15	1,95	-2,06	-3,39
	70	1,52	-3,92	0,13	5,87	1,11	-2,22	-2,81
	75	2,17	-2.52	-0,07	0,75	-1,96	0,62	1,73

Wanneer we de waarden van σ_{bx} voor $x = 75$ cm beschouwen, zien we dat niet precies aan de op de vorige bladzijde genoemde randvoorwaarde is voldaan.
Wanneer we de mogelijkheid van een rekenfout of een afrondfout uitsluiten kunnen we met vrij grote zekerheid zeggen, dat dit wordt veroorzaakt door het afbreken van de reeks voor σ_{bx}, bij de sommatie over m.
De resultaten van het computerprogramma, die betrekking hebben op de convergentie van deze reeks, laten namelijk zien, dat de reeks voor σ_{bx} veel minder goed convergeert dan de reeks voor σ_{mx}.

Of dit inderdaad de oorzaak is, kan uiteraard het eenvoudigst worden nagegaan, door over een groter aantal m's te sommeren, dan in het onderhavige geval is gebeurd (tot m = 25) maar aangezien nu reeds de totale rekentijd van de computer 28 minuten bedroeg is dit niet uitgevoerd.

De onderstaande tabel geeft de resultaten voor $\sigma_{b\varphi}$ in kgf/cm²

		φ						
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
x [cm]	0	6,64	-12,64	-2,53	19,53	7.20	-7,64	-12,80
	10	6,24	-12,47	-2,13	19,15	6,96	-7,43	-12.70
	20	4,59	-11,71	-0,88	17.70	6,49	-6,81	-12.56
	30	0,30	-9,34	1,09	14,64	6,59	-5,99	-12,52
	40	-7,65	-4,63	2,78	10.36	7.80	-5,66	-12,32
	46	-11,74	-2,85	1,30	10,45	8,73	-5,14	-11,42
	50	-11,75	-2,81	1,37	10.38	8,46	-5,09	-11,12
	60	-4,27	-6,36	2,91	11,35	5,70	-5,40	-10,56
	70	1,67	-9,86	1,84	14,54	3,74	-5,49	-9,59
	75	2,56	-9,72	1,63	13,14	2,45	-4,52	-7,89

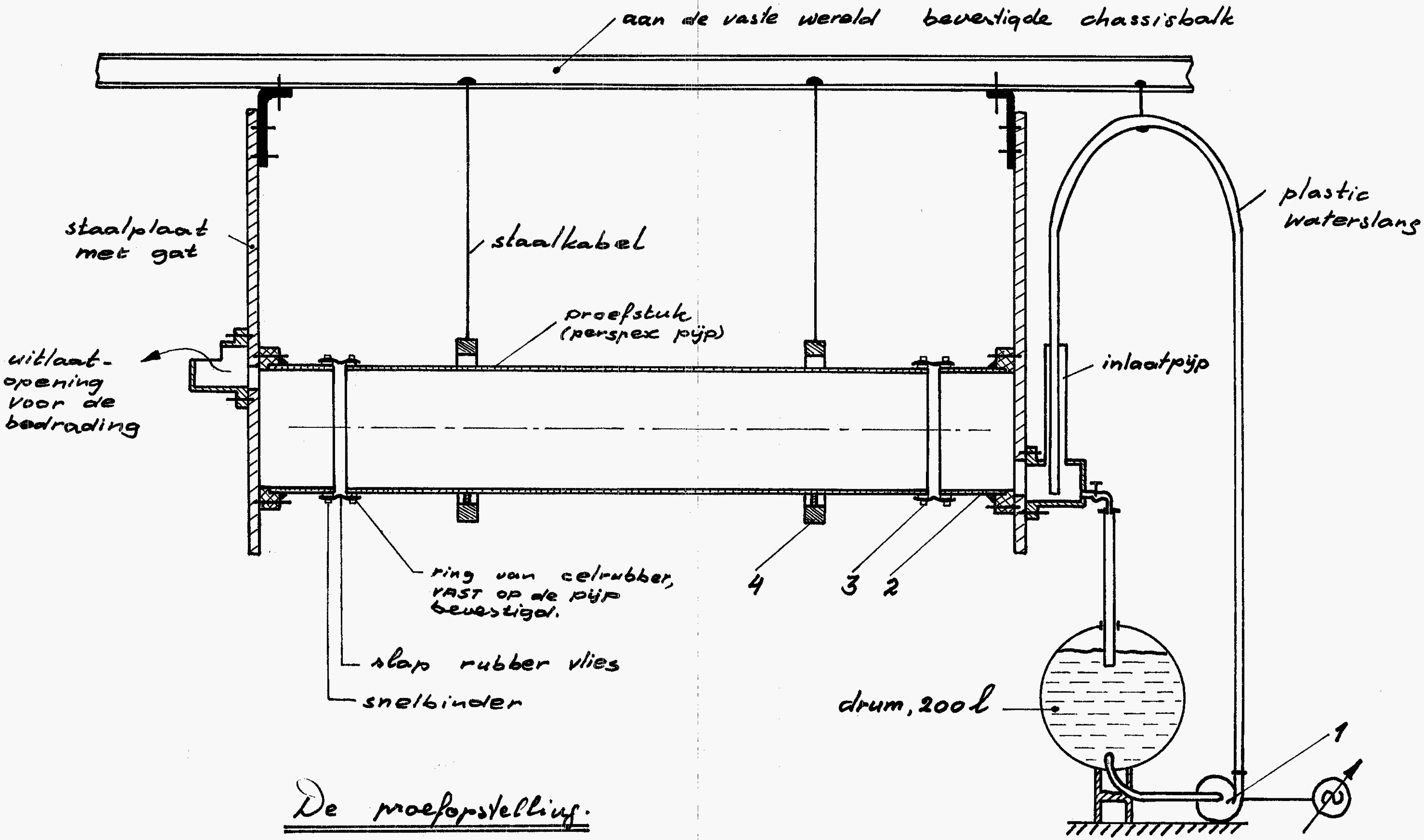
Nu de resultaten van de theorieën bekend zijn willen we deze testen aan een experiment, dat in het volgende hoofdstuk zal worden behandeld.

13. Het experiment en de waarnemingen.

We hebben al medegedeeld dat we voor de koker zelf een perspex pijp hebben gekozen waarvan de afmetingen in hoofdstuk 9 zijn vermeld. De noodzaak hiervan is reeds in hoofdstuk 6 tot uiting gekomen.
In dit hoofdstuk zal worden getracht, duidelijk te maken hoe de veronderstellingen, die we bij de theoretische afleiding hebben gemaakt, aan de proefopstelling, eventueel op een benaderende wijze, werden gerealiseerd.
Een extra optredende moeilijkheid, die vrijwel de gehele constructie bepaalde, was dat de koker geheel met water gevuld moest kunnen worden en dus waterdicht moest zijn, ondanks de vrije uiteinden en ondanks het feit, dat er openingen nodig waren om de koker te vullen en te ledigen en om de draden, verbonden aan de inwendig geplakte rekstrookjes naar buiten te brengen. Tevens moest de mogelijkheid blijven bestaan om de koker om zijn lengteas te verdraaien, waardoor het aantal benodigde rekstrookjes aanzienlijk werd verminderd.

Na langdurig overleg en na vele proefnemingen ontstond tenslotte de constructie, zoals die door middel van een schets, op de volgende pagina (139), is weergegeven, en die aan de gestelde eisen voldoet of op ze op zijn minst benaderd.

Tevens is in deze tekening de manier waarop de koker wordt ondersteund aangegeven, waarover in de hierna volgende behandeling van allerlei constructie-details, dieper zal worden ingegaan.



De proefopstelling.

Bij de tekening op de vorige bladzijde staan enige constructieonderdelen die hieronder in detail zullen worden behandeld, tegelijk met de beschrijving van het geheel.

Om het water van de drum in het proefstuk te krijgen wordt gebruik gemaakt van een centrifugaalpomp (7):

fabrikaat: Stuart - Turner - Ltd. Henley on Thames, England.
no: T 18198
voltage: 220/240 V, 200 Watt.
capaciteit: 600/200 gallon per uur bij opvoerhoogte 5/35 voet.

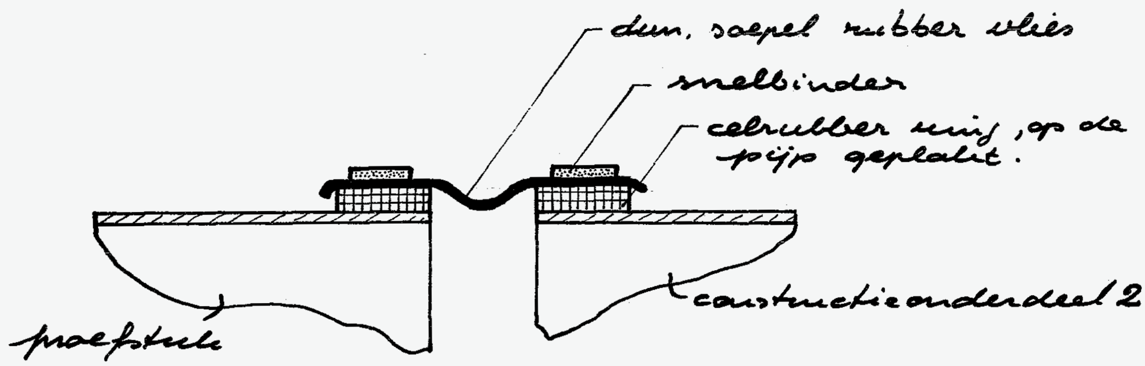
De centrifugaalpomp wordt gevoed door een regelbare transformator, die is aangesloten op het lichtnet. De doorstroomsnelheid kan hiermede enigszins worden geregeld.
Het ledigen van de koker kan gebeuren door:
a) het opendraaien van de tapkraan.
b) de hevelwerking van het water, dwars door de pomp heen, naar de drum, die zich ongeveer 0,5 m. lager bevindt dan de koker.
De centrifugaalpomp is niet zelfaanzuigend en daarom moet deze zich onder het waterniveau in de drum bevinden.
De procedure van het vullen en het ledigen is nu als volgt:
a) we trekken de waterslang omhoog tot het uiteinde zich vlak onder de rand van de inlaatpijp (zie blz 139) bevindt.
b) we draaien aan de regelknop van de transformator tot het water een redelijke snelheid heeft; hierna wordt de koker gevuld, wat circa 5 minuten duurt.
c) wanneer de koker vol is, stoppen we de pomp; het water blijft in de koker.
d) om te ledigen draaien we eerst de tapkraan open, waardoor het water heel langzaam wegloopt.
e) na enige seconden starten we de pomp, we duwen de waterslang geheel in de vulpijp en als de slang geheel met water is gevuld, stoppen we de pomp weer. Het water wordt nu terug in de drum geheveld, hetgeen eveneens circa 5 minuten duurt.
f) als de koker leeg is, draaien we de tapkraan dicht.

De inlaatpijp is gelast op een pot, die met behulp van bouten is bevestigd op de staalplaat, die op zijn beurt aan het chassis vastzit.
Aan de linkerzijde van de constructie bevindt zich eveneens een staalplaat, waarop een pot is bevestigd, die een opening heeft boven het maximale waterniveau in de perspex buis.
Deze opening voorziet in twee behoeften:

a) de ontluchting tijdens het vullen van de pijp en eventuele overloop.
b) de uitgang voor de draden, die aan de rekstrookjes zijn bevestigd.

Aan de linkerzijde van de rechter staalplaat en aan de rechterzijde van de linker staalplaat is constructieonderdeel 2 met bouten bevestigd, zoals in de tekening op blz 139 is aangegeven.
Dit onderdeel bestaat uit een stuk pijp, met dezelfde radiale afmetingen als het proefstuk, waarop een perspex flens is geplakt.
Tussen deze beide constructie onderdelen in bevindt zich het proefstuk.

Het proefstuk is door een zeer soepele verbinding verbonden met constructieonderdeel 2, die alleen maar dient voor de afdichting. Deze verbinding (3) is losneembaar en in onderstaande tekening in detail weergegeven.



In hoeverre deze verbinding in strijd is met de eis dat de uiteinden van de koker vrij moeten zijn blijft een vraag. We kunnen namelijk niet precies nagaan welke extra weerstand tegen vervorming door deze verbinding wordt veroorzaakt.

We kunnen echter wel aannemen dat de door constructieonderdeel 2, op het proefstuk uitgeoefende krachten te verwaarlozen zijn, omdat het rubberrolies zo slap is.
Hierop hebben we trouwens een controle, tenminste wat de axiale belasting betreft, nl:

$$\int_0^{\pi} \sigma_{mx}(\varphi, x=\text{const})\, d\varphi = 0$$

voor $a+b/2 < |x| < l/2$

We zullen dit dan ook later nagaan.

Omdat ook tijdens het doormeten van de koker in onbelaste toestand, de verbinding, zoals die op de vorige blz is getekend, is aangebracht hopen we dat de invloed hiervan tot een minimum blijft beperkt.

De ondersteuning van de koker (4) is zodanig aangebracht (m.b.v. de staalkabel), dat als resulterende belasting op de koker, alleen een verticale kracht die de lengte as snijdt, aanwezig kan zijn.
Daarom kunnen we de bovenstaande contrôle-mogelijkheid uitbreiden omdat nu

$$\int_0^{\pi} \sigma_{mx}(\varphi, x=\text{constant})\, d\varphi$$

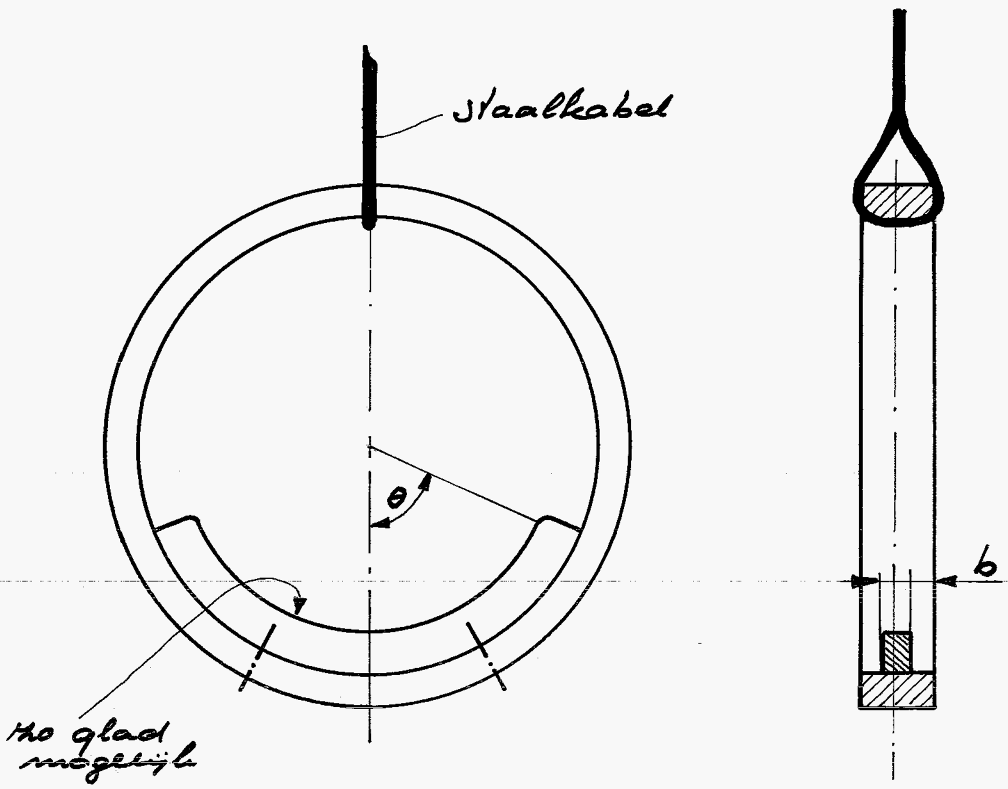
nul moet zijn voor alle waarden van x.

We hebben echter als eis gesteld dat het zadel op de koker alleen een belasting in radiale richting uitoefent. Om dit zo goed mogelijk na te kunnen komen werd het aanrakingsvlak zo glad mogelijk gemaakt. Ook werd geëist dat de ondersteuning overal aan zou liggen tegen de koker. Tijdens het experiment werd dit nagegaan en inderdaad was hieraan voldaan.

De zadels (4) werden niet vervaardigd bij de C.T.D van de THE maar door Machinefabriek „Eindhoven". Waarschijnlijk tengevolge van een communicatiefout bleek na aflevering de hoek θ, $58°$ te zijn, in plaats van $60°$, hetgeen eigenlijk de bedoeling was geweest.

De grootte van de hoek θ is echter niet zo belangrijk omdat bij de berekeningen m.b.v de balkentheorie de grootte van θ in het geheel niet voorkomt, en omdat bij het geschreven computerprogramma de hoek θ als variabele is beschouwd, waarvan de grootte kan worden ingelezen.

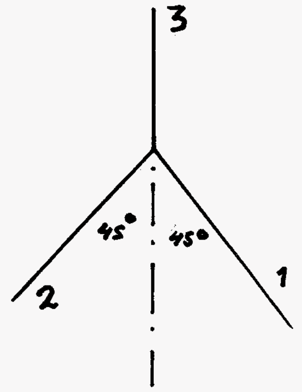
De onderstaande tekening geeft constructie-onderdeel 4 in detail:



Na de montage van alle onderdelen werden alle plaatsen, waar nu eventueel nog water naar buiten zou kunnen komen, zoals daar, waar twee constructieonderdelen tegen elkaar zitten of waar gelijmd was, afgedicht met een dikke laag was.
Tijdens het experiment hebben we dan ook in het geheel geen last gehad met lekkages.

Het zou tamelijk eenvoudig te realiseren zijn geweest om de, in belaste toestand, extra door de staalkabel doorgeleide kracht te meten, wat als contrôle zou kunnen dienen. De hiervoor benodigde apparatuur was niet aanwezig helaas.

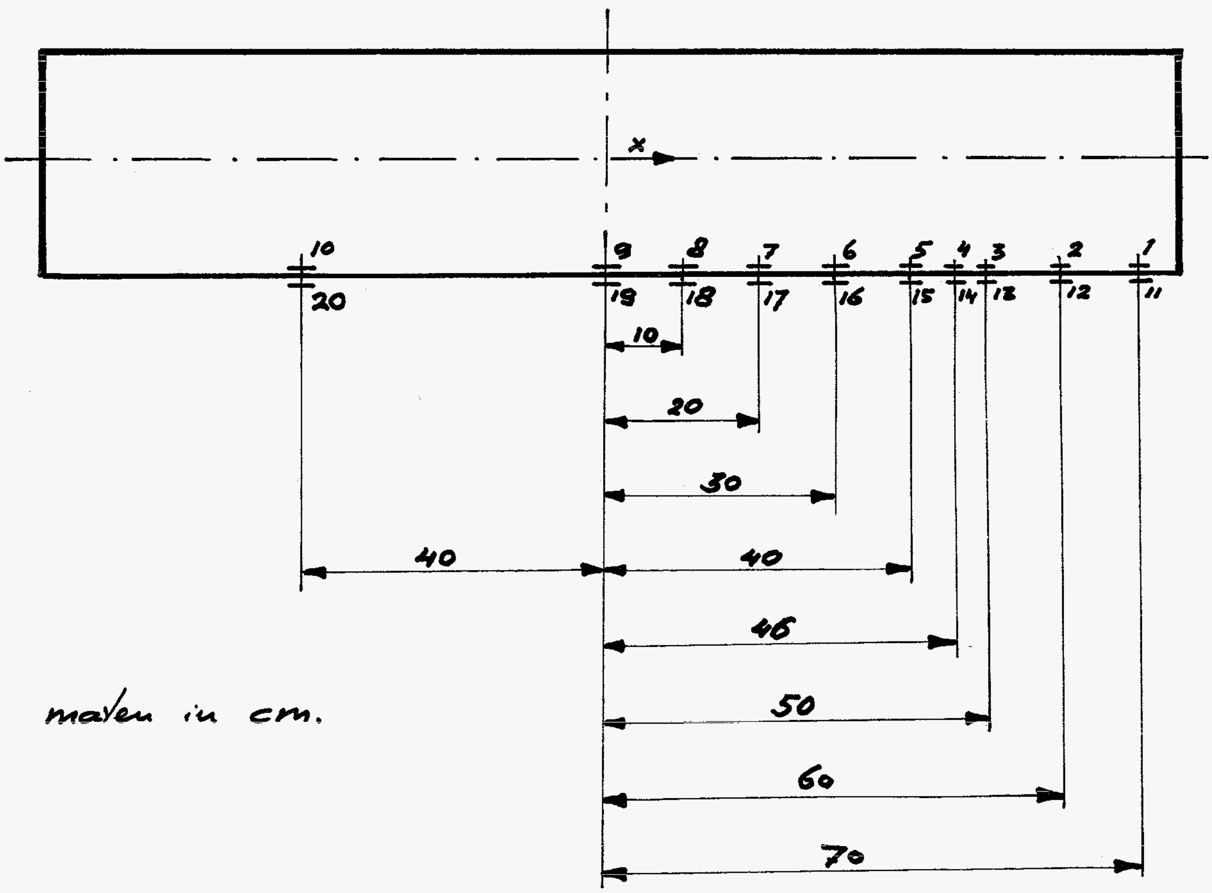
Het proefstuk werd voorzien van rekstrookjes van het type: HPR 5.
fabrikaat: Tokyo Sokki Kenkyujo Co., Ltd.
Dit zijn rekstrookjes met drie filamenten, die de volgende vorm hebben:



k. factoren: filament 1 : 2,03
filament 2 : 2,04
filament 3 : 2,05

We willen de spanningen in axiale en tangentiale richting bepalen.
Daarom is filament 3 in de richting van de kokeras geplaatst.

De wijze waarop de rekstrookjes zijn geplakt wordt niet behandeld daar hierover binnen de groep „Technische Mechanica" reeds voldoende is gepubliceerd.
In onderstaande tekening is de plaats der rekstrookjes aangegeven.



maten in cm.

De rekstrookjes zijn aangebracht op één beschrijvende van de koker. We kunnen dan voor elke waarde van φ de spanningen meten door de koker om zijn lengte-as te verdraaien.

Omdat we zijn geinteresseerd in de membraamspanningen en de maximale buigspanningen, respectievelijk σ_{mx}, $\sigma_{m\varphi}$ en σ_{bx}, $\sigma_{b\varphi}$ zijn aan de binnen- en buitenzijde van de koker steeds twee rekstrookjes precies tegenover elkaar aangebracht.
In de omgeving van de ondersteuning is een extra paar rekstrookjes (4 en 14) aangebracht omdat deze omgeving uiteraard het meest interessant is. Rekstrookje 10 en 20 zijn alleen aangebracht ter referentie.

De rekstrookjes werden doorgemeten met de automatische digitale rekstrookmeetapparatuur van Peekel: type PP5RM1, die aan de printer een signaal geeft, die op zijn beurt de resultaten geeft in ponsbandvorm.
Deze ponsband is meteen geschikt voor verwerking op de computer met behulp van het door Dr. ir. J. D. Janssen geschreven programma: 03061627.

Aanvankelijk waren de inwendige rekstrookjes alleen met was afgedicht en waren zowel de in- als uitwendige toevoerdraden niet afgeschermd. De hierbij verkregen resultaten vertoonden te grote deviaties.
Na het afdichten van de inwendige rekstrookjes en inwendige toevoerdraden met klei en het afschermen van de uitwendige toevoerdraden met tempex waren de deviaties in de resultaten nog wel aanzienlijk, maar toch acceptabel. Eén meetcyclus bestond uit: onbelast, belast, onbelast, belast, onbelast, belast, onbelast, belast, onbelast.

Op de nu volgende pagina's zijn de resultaten van het experiment in tabelvorm weergegeven

σ_{mx} in kgf/cm²

		φ						
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
x [cm]	0	2,94	1,62	1,29	- 2,26	- 3,63	- 1,18	0,51
	10	1,87	1,14	1,19	- 2,34	-3,89	-0,84	2,41
	20	1,66	1.08	1,27	- 2,34	- 3,81	-0,76	2,26
	30	1,44	0,79	0.82	- 2,12	- 2,17	- 0,48	2,00
	40	1,21	-2,02	-0,72	- 1,19	- 1,02	- 0,68	1.58
	46	2,07	-2,50	-4,13	3,14	-1,60	-0.34	1,60
	50	2,35	- 2,60	- 4,12	3,32	1,02	-0,03	1,75
	60	1,45	-0,28	0,61	0,11	0,16	0,26	2,06
	70	1,26	-2,27	0,76	0,16	-0,29	0,19	0.81

$\sigma_{m\varphi}$ in kgf/cm²

		φ						
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
x [cm]	0	0,27	0,73	0,29	-0,89	- 0,97	0,36	4,16
	10	1,48	-0,22	0,20	-0,94	- 1,27	- 0,15	2,36
	20	1,78	0,25	0,41	- 1,13	-1,89	-0,06	2,77
	30	1,51	0,75	0,56	-1,16	- 1,57	0,10	2,98
	40	0,19	- 0,82	1,25	-1.22	- 1,64	- 0,05	2,79
	46	- 3,97	- 5,26	-5,97	-0,13	- 6,29	0,04	3,01
	50	- 2,60	-4,63	-4,65	0,18	0,35	0,48	2,45
	60	1,68	1,84	1,79	0.22	- 1,02	0,71	3,12
	70	1,72	-7.26	1,38	0,70	-0,36	0,34	4,46

σ_{bx} in kgf/cm²

		φ						
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
x [cm]	0	-2,57	-0,72	0,38	1,56	0,59	-0,03	-1,69
	10	-1,60	-0,55	0,36	1,42	0,37	-0,41	-3,58
	20	-1,86	-1,11	0,00	1,78	1,28	-0,41	-4,19
	30	-1,53	-1,49	-0,33	1,82	1,48	-0,52	-4.36
	40	0.42	-1,54	-1,04	2,72	1,55	-0.96	-4,20
	46	-0,16	-1,09	-3,79	3,68	2,90	-0,94	-3,87
	50	1,64	-3,04	-4,32	3,92	0,69	-1,19	-4,07
	60	-1,05	-2,56	-1,97	0,63	1,42	-1,19	-4,50
	70	-2,09	0,90	-1,45	0.28	1,20	-0,96	-2,92

$\sigma_{b\varphi}$ in kgf/cm²

		φ						
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
x [cm]	0	-4,15	-3,41	-0,19	4,55	5,18	-1,04	-9,15
	10	-4,74	-3,11	-0,26	4,40	4.91	-0,83	-7,49
	20	-4,88	-4,79	-1,42	5,50	6,78	-1,34	-8,65
	30	-3.39	-5,97	-3,27	6.34	7,23	-2,07	-8,72
	40	-0,19	-6,19	-8,68	10,10	6,95	-3,00	-8,55
	46	-1,15	-12,69	-29,25	12,15	12,05	-2,74	-8,63
	50	-0,88	-15,05	-31,76	12,16	5,70	-3,32	-8,40
	60	-2,40	-8,49	-7,01	6,93	7,75	-3,63	-9,38
	70	-4,03	2,39	-3,84	4,03	7,26	-2,74	-10,17

14. Vergelijking van de theoretische en experimentele resultaten.

De beste manier waarop uiteraard de resultaten met elkaar kunnen worden vergeleken is door middel van grafieken.

Op de nu volgende 28 pagina's vinden we de grafieken voor σ_{mx}, $\sigma_{m\varphi}$, σ_{bx} en $\sigma_{b\varphi}$ met φ als parameter.
Op de abcis is de variabele x uitgezet terwijl de ordinaat de spanning aangeeft in kgf/cm².
Voor alle grafieken is dezelfde schaalverdeling gebruikt, om ze onderling beter te kunnen vergelijken. Zoals in de grafieken is te zien, is de plaats van de ondersteuning steeds met een dikke dwarsstreep aangegeven.

In de grafieken worden de volgende afkortingen gebruikt:

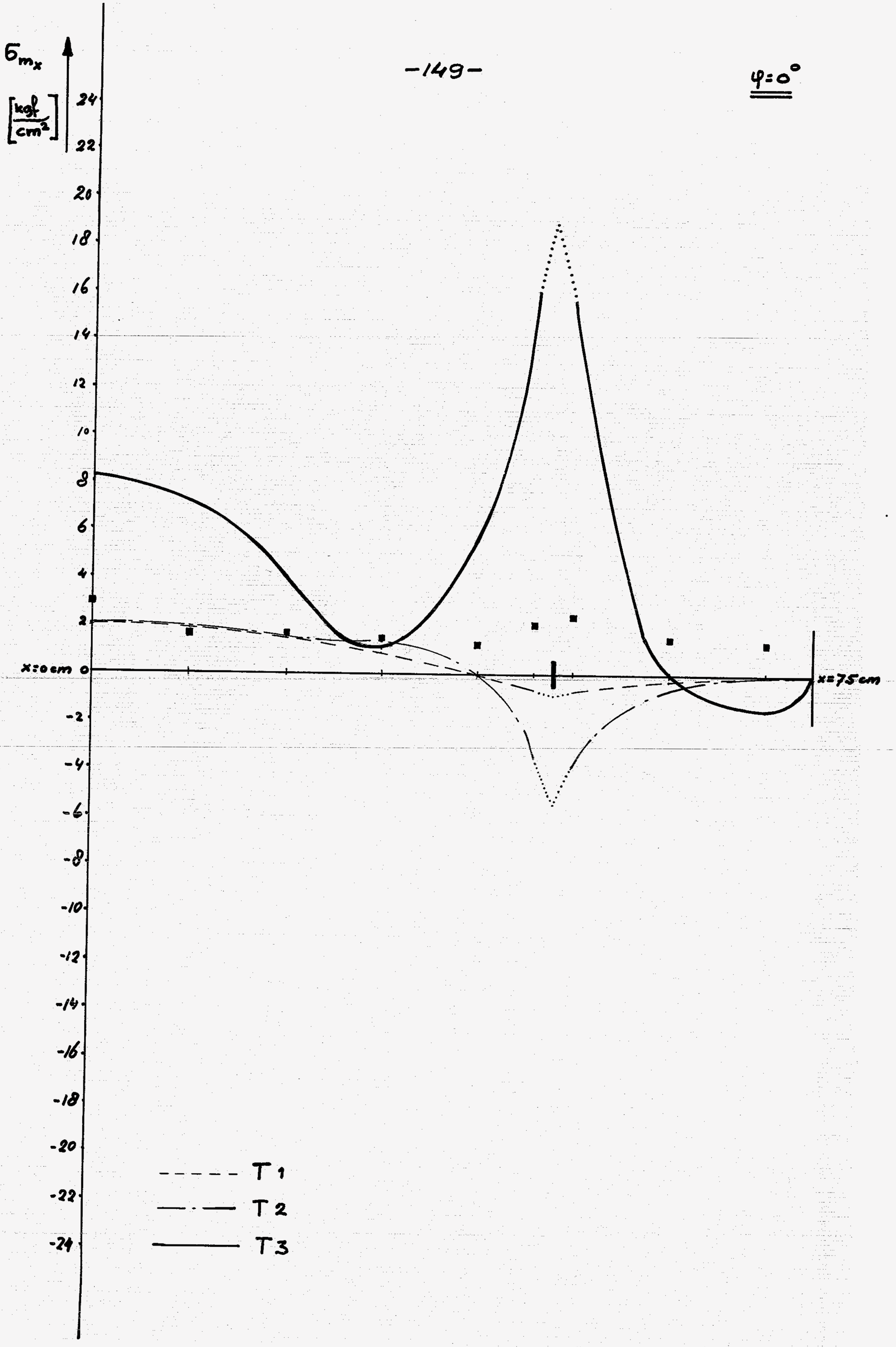
T1 : geeft de resultaten weer volgens de gewone balkentheorie van hoofdstuk 10

T2 : geeft de resultaten weer volgens de meer uitgebreide balkentheorie van hoofdstuk 11

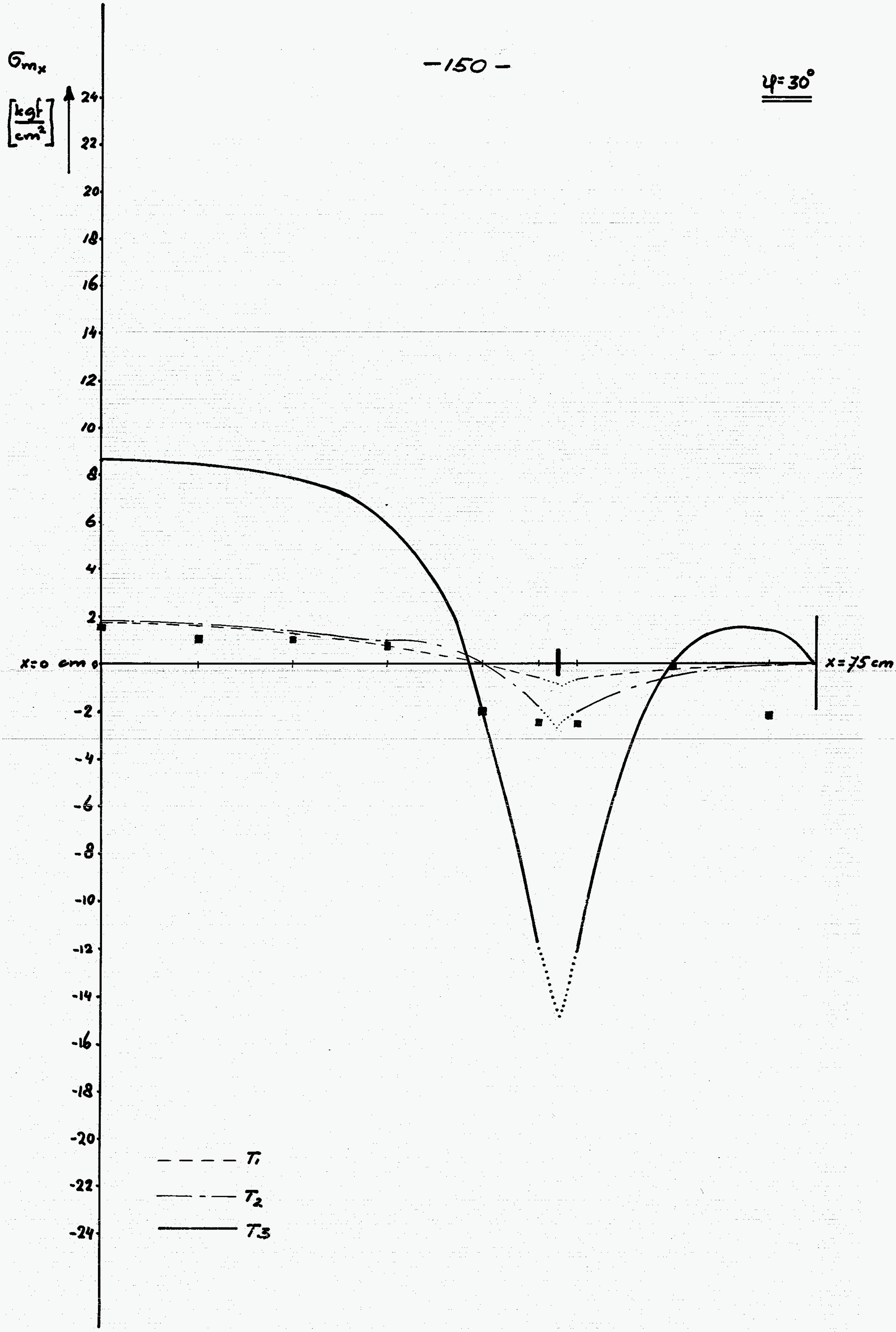
T3 : geeft de resultaten weer van de schalentheorie, zoals die in hoofdstuk 12 is uitgewerkt.

De experimentele resultaten worden aangegeven met ■

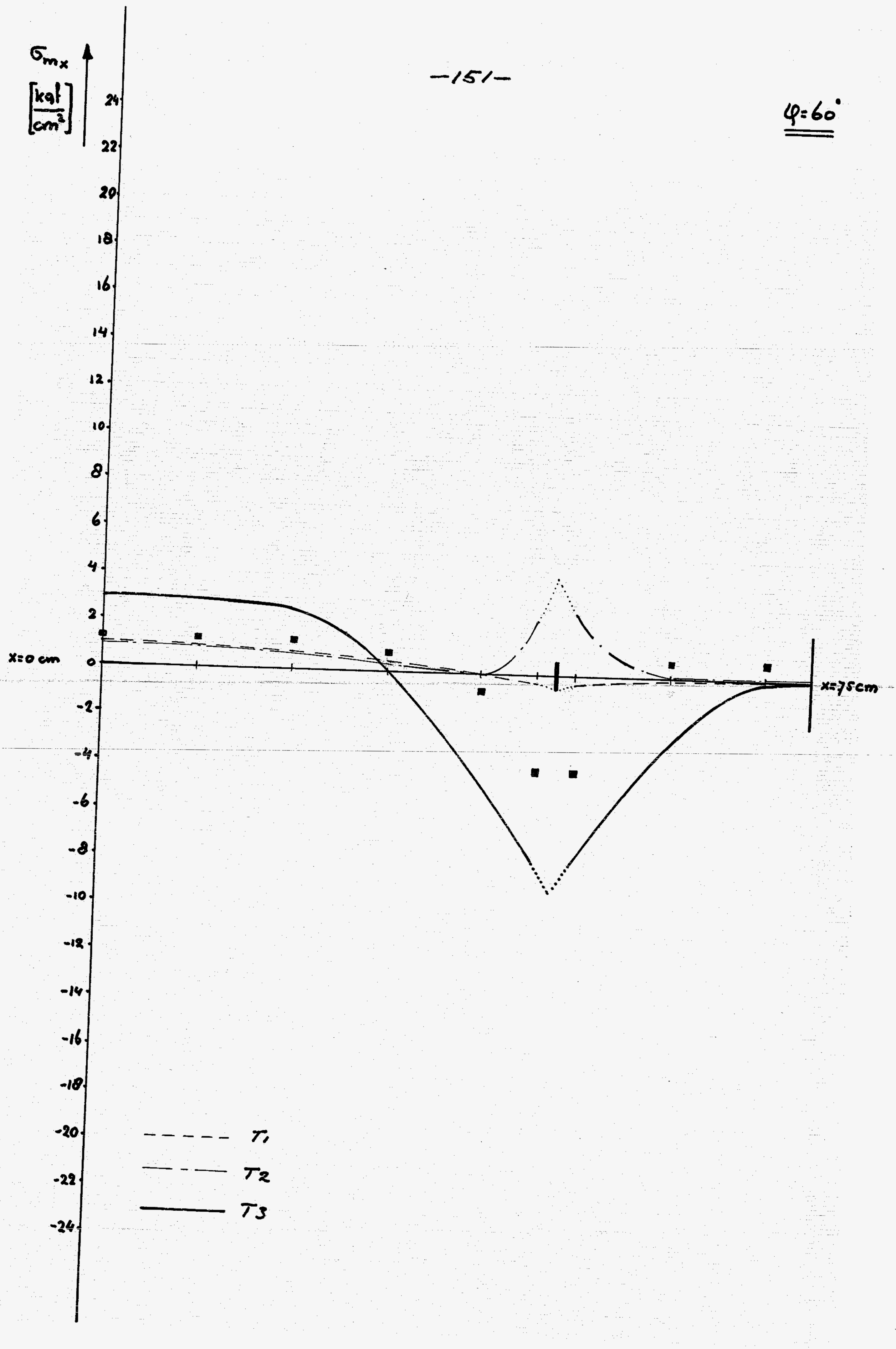
Bij de x-as staan geen schaalwaarden aangegeven omdat dit de duidelijkheid schaadt. De schaal is echter lineair en loopt van 0 tot 75 cm.

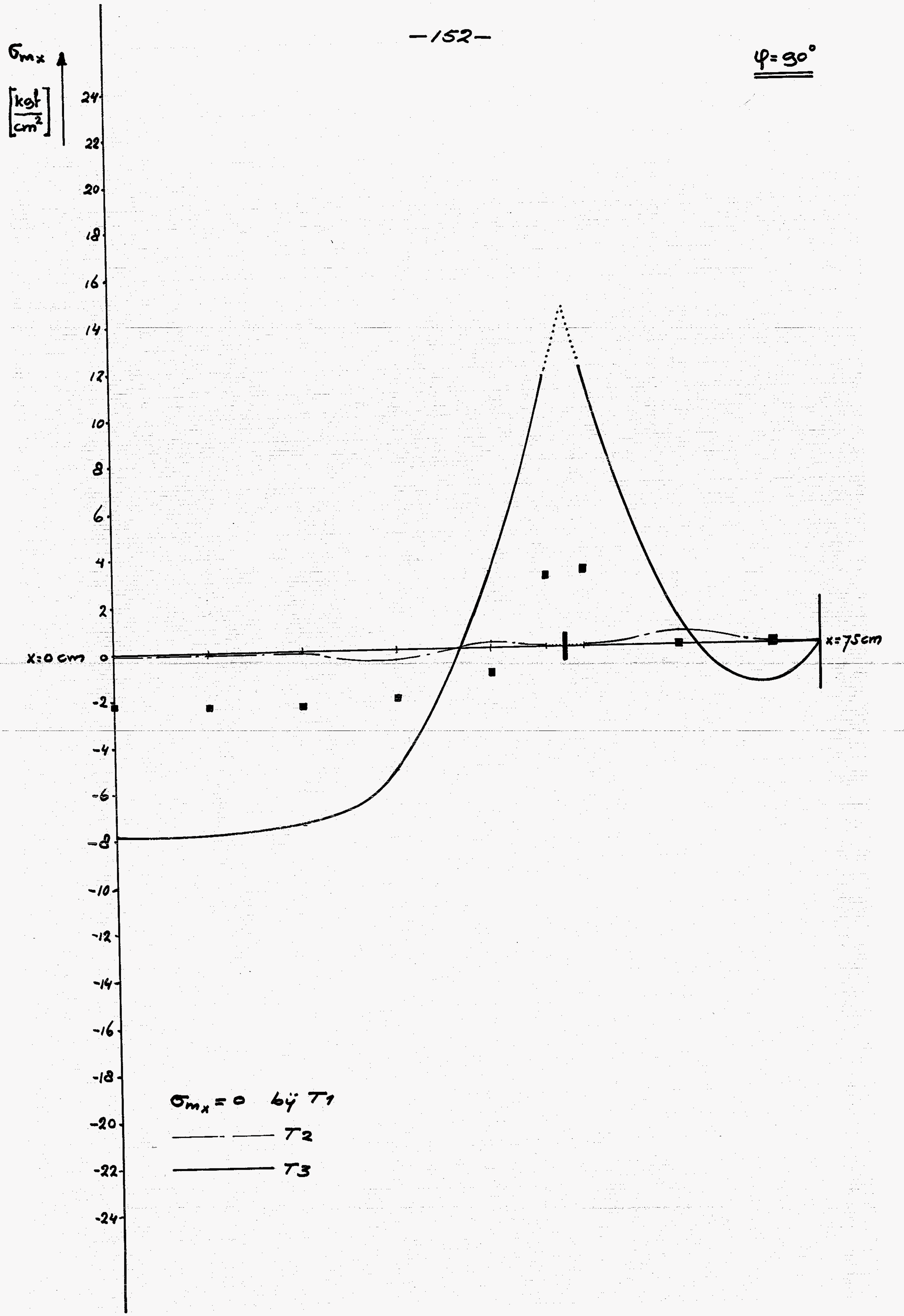


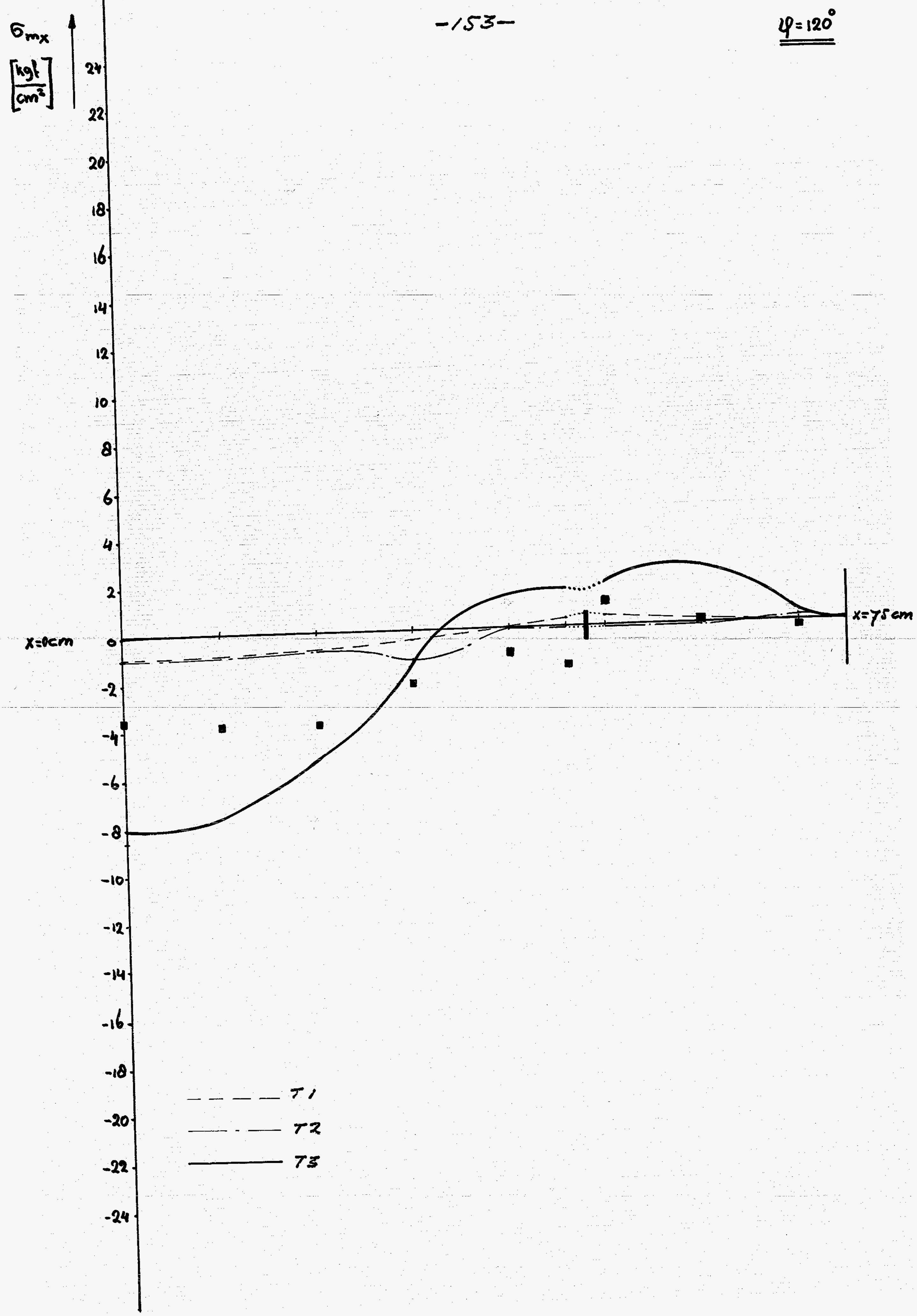
$\varphi = 0°$
σ_{m_x}
[kgf/cm²]
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T 1
T 2
T 3

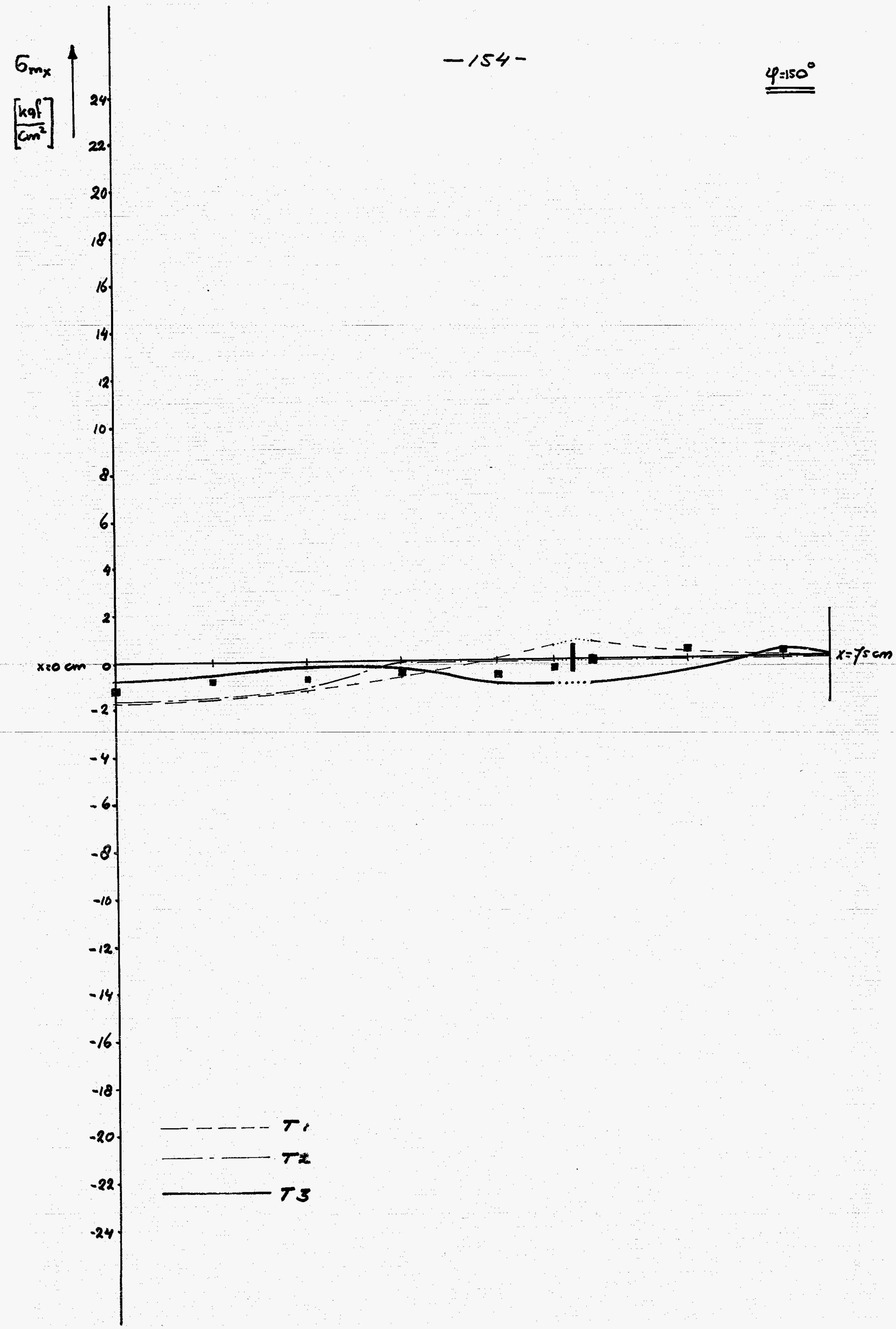


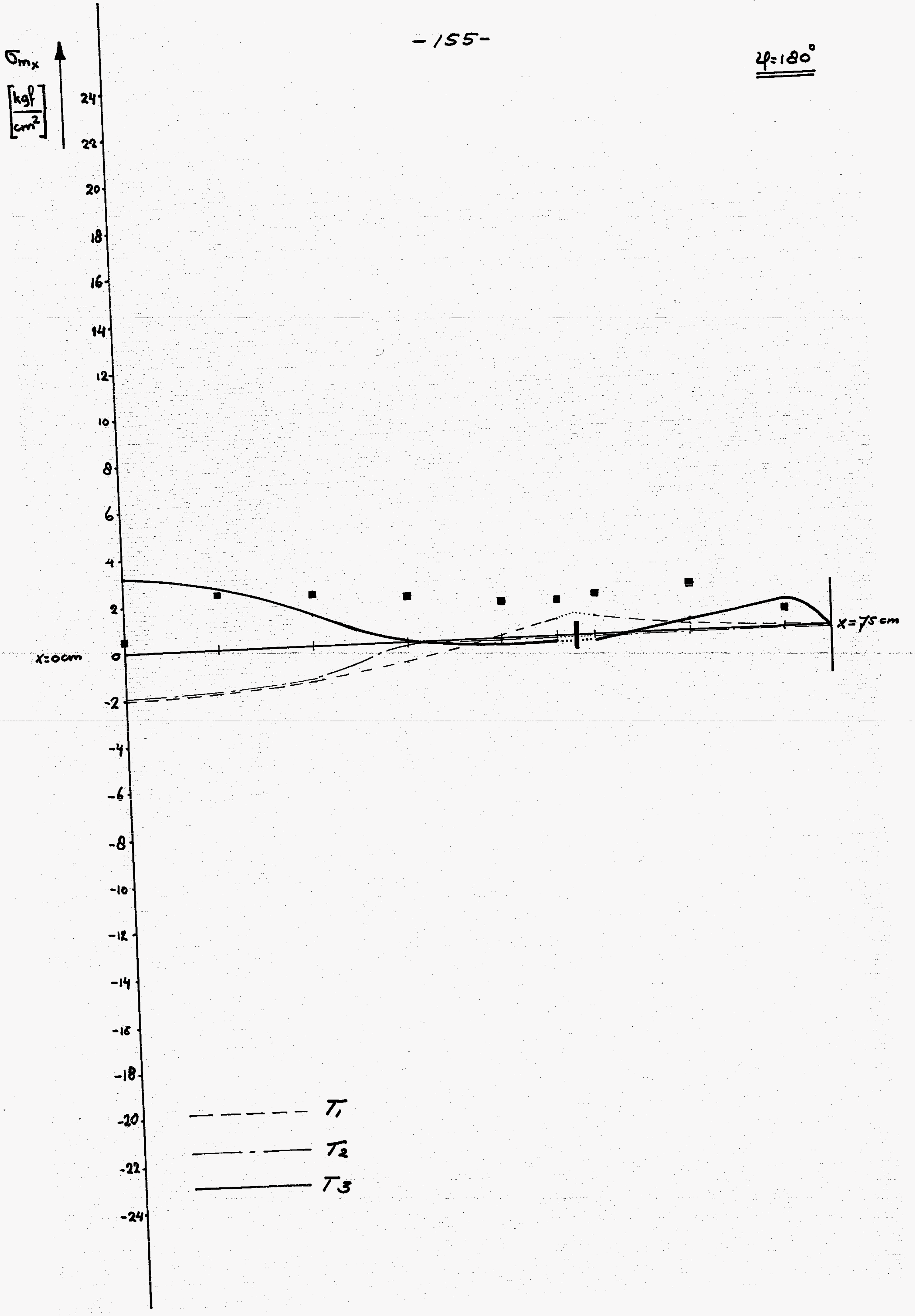
σ_{m_x}
[kgf/cm²]
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
φ=30°
T1
T2
T3


φ=60°
σmx
[kgf/cm²]
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75cm
T1
T2
T3

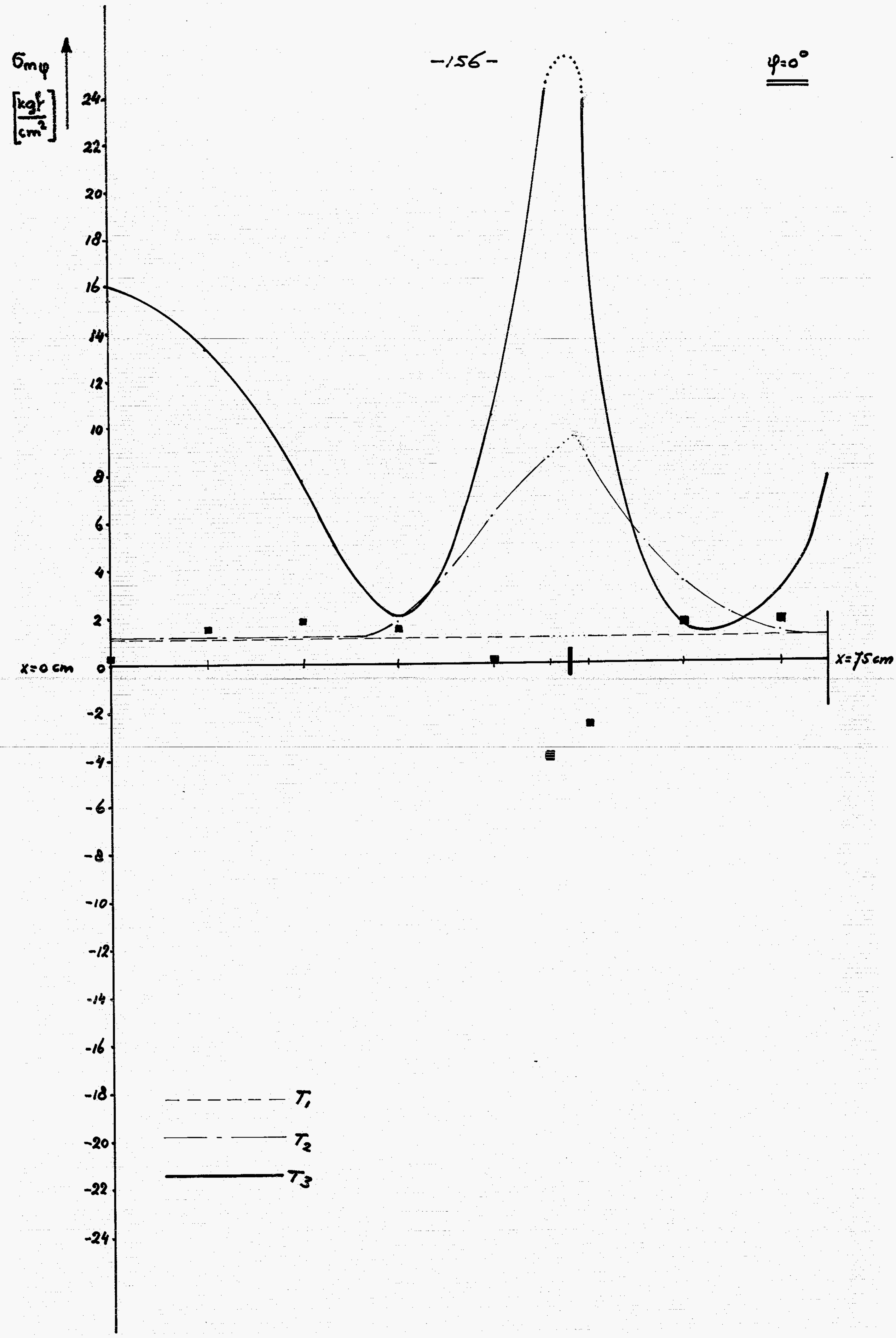

φ=90°
σmx
[kgf/cm²]
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
x=0 cm
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=75cm
σmx=0 bÿ T1
T2
T3

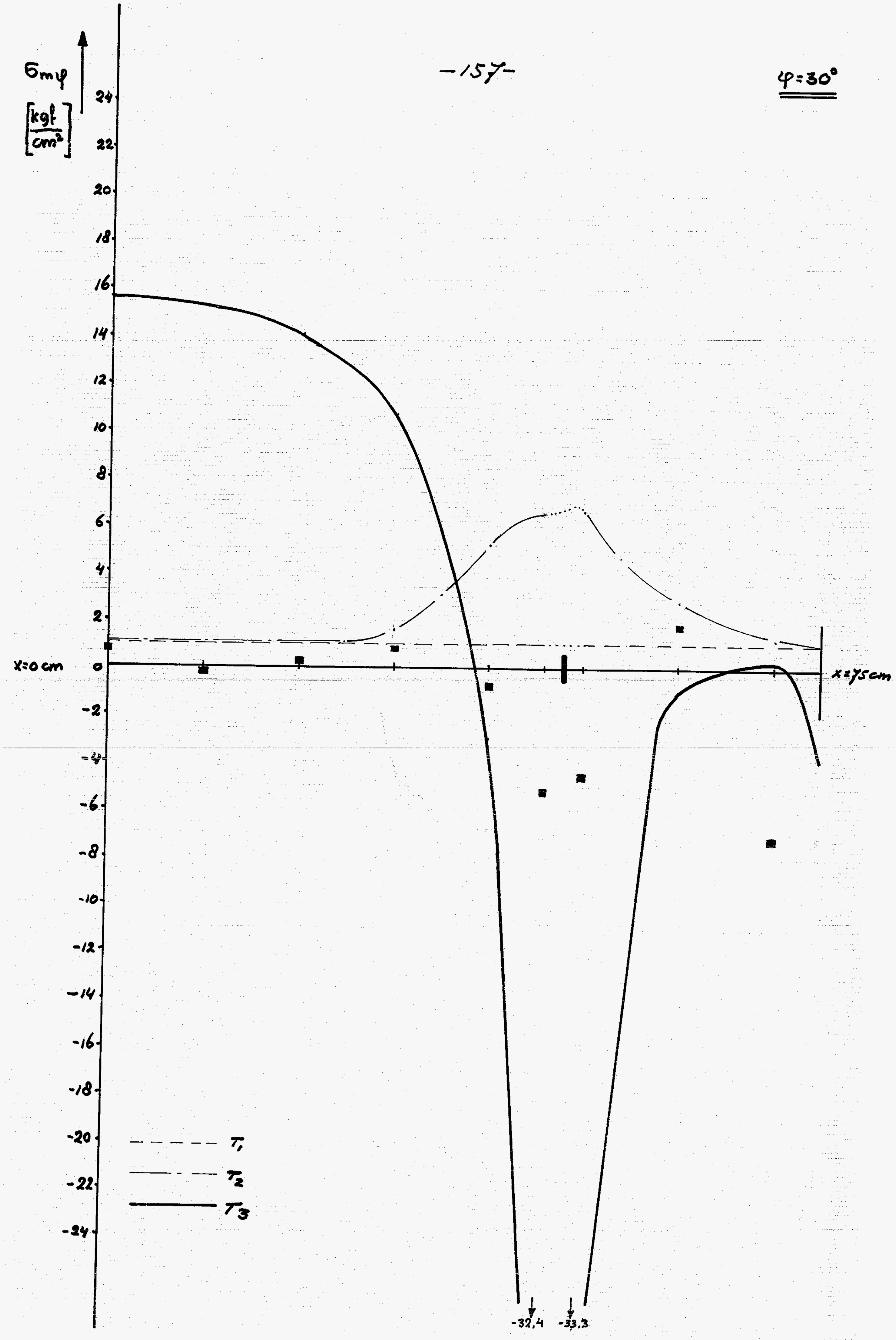

σ_{mx}
[kgf/cm²]
$\varphi = 120°$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0cm
x=75cm
T1
T2
T3

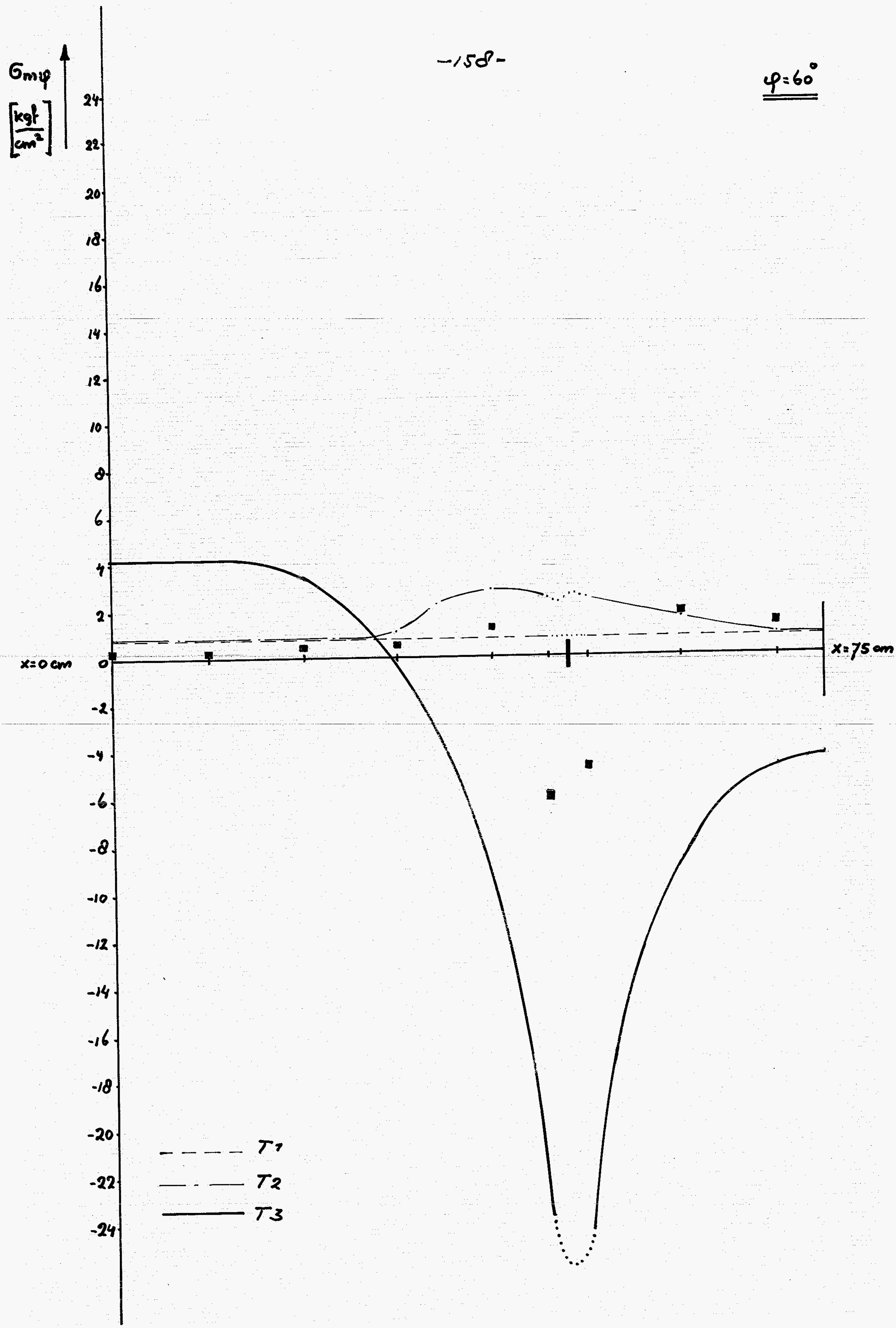

φ=150°
σmx
[kgf/cm²]
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T1
T2
T3



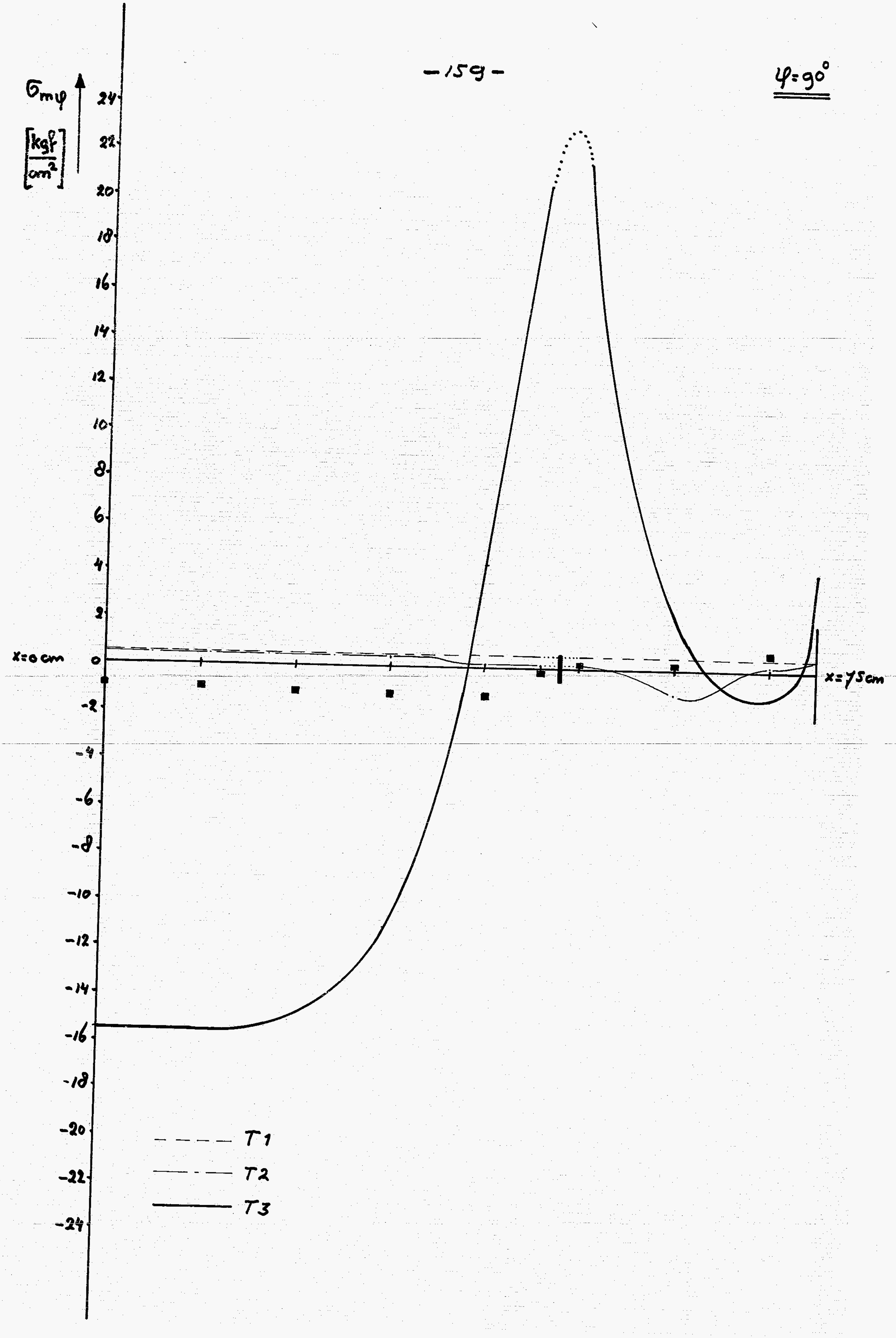
$\varphi = 180°$
σ_{m_x}
$\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0cm
x=75cm
T_1
T_2
T_3

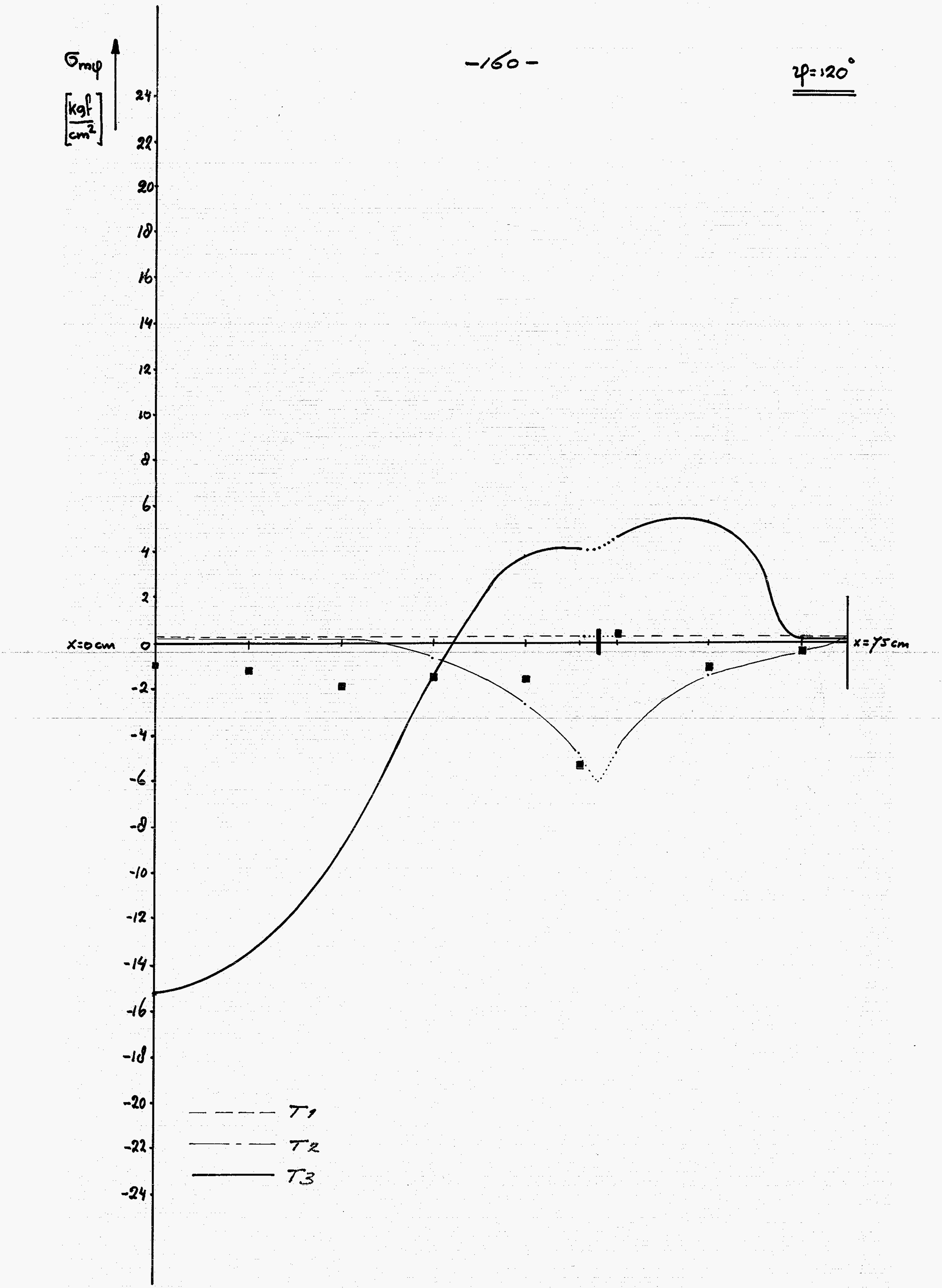

$\sigma_{m\varphi}$
$\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$
$\varphi = 0°$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T_1
T_2
T_3


φ=30°
σmφ
[kgf/cm²]
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T1
T2
T3
-32,4
-33,3

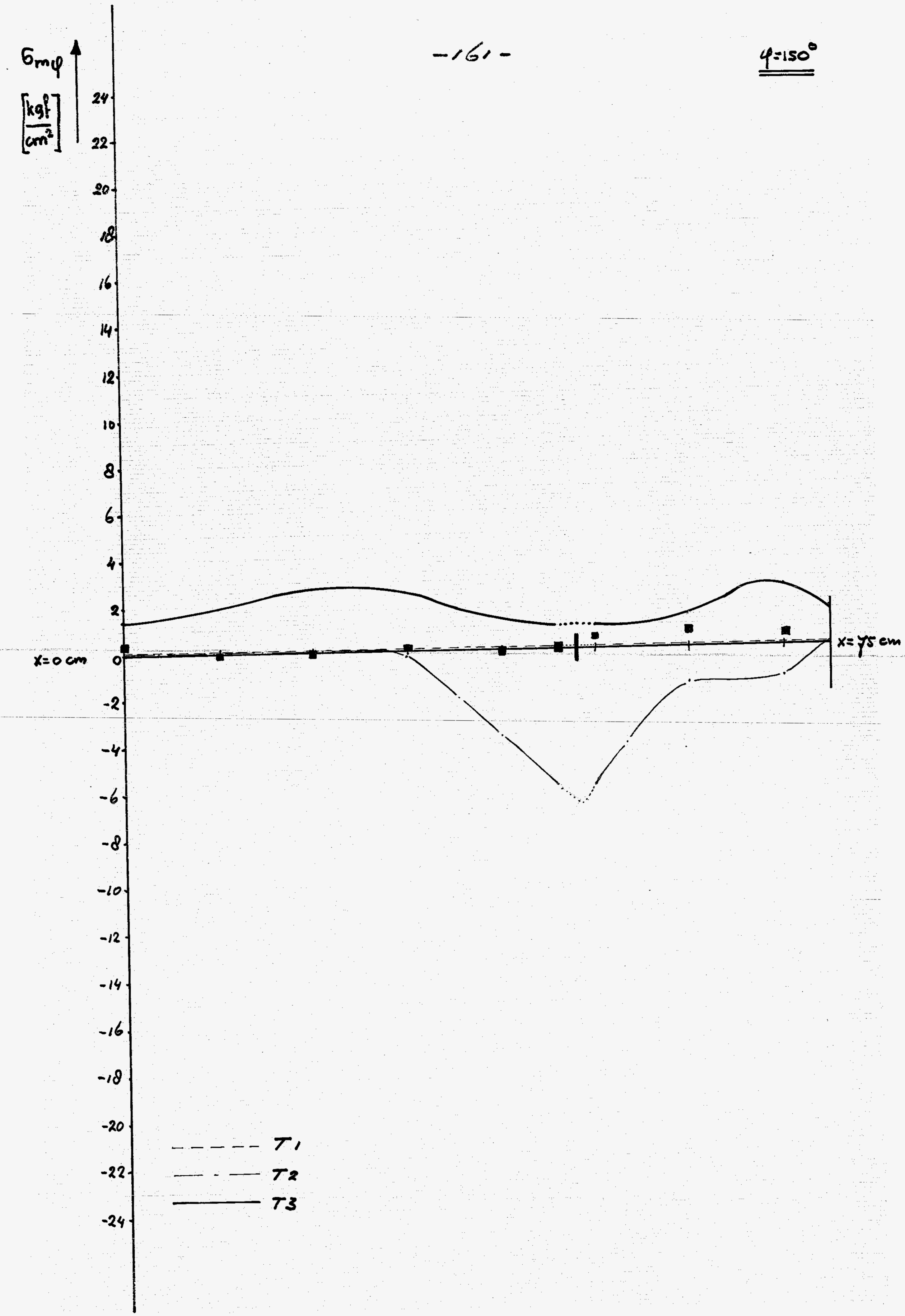

φ=60°
σmφ
[kgf/cm²]
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T1
T2
T3

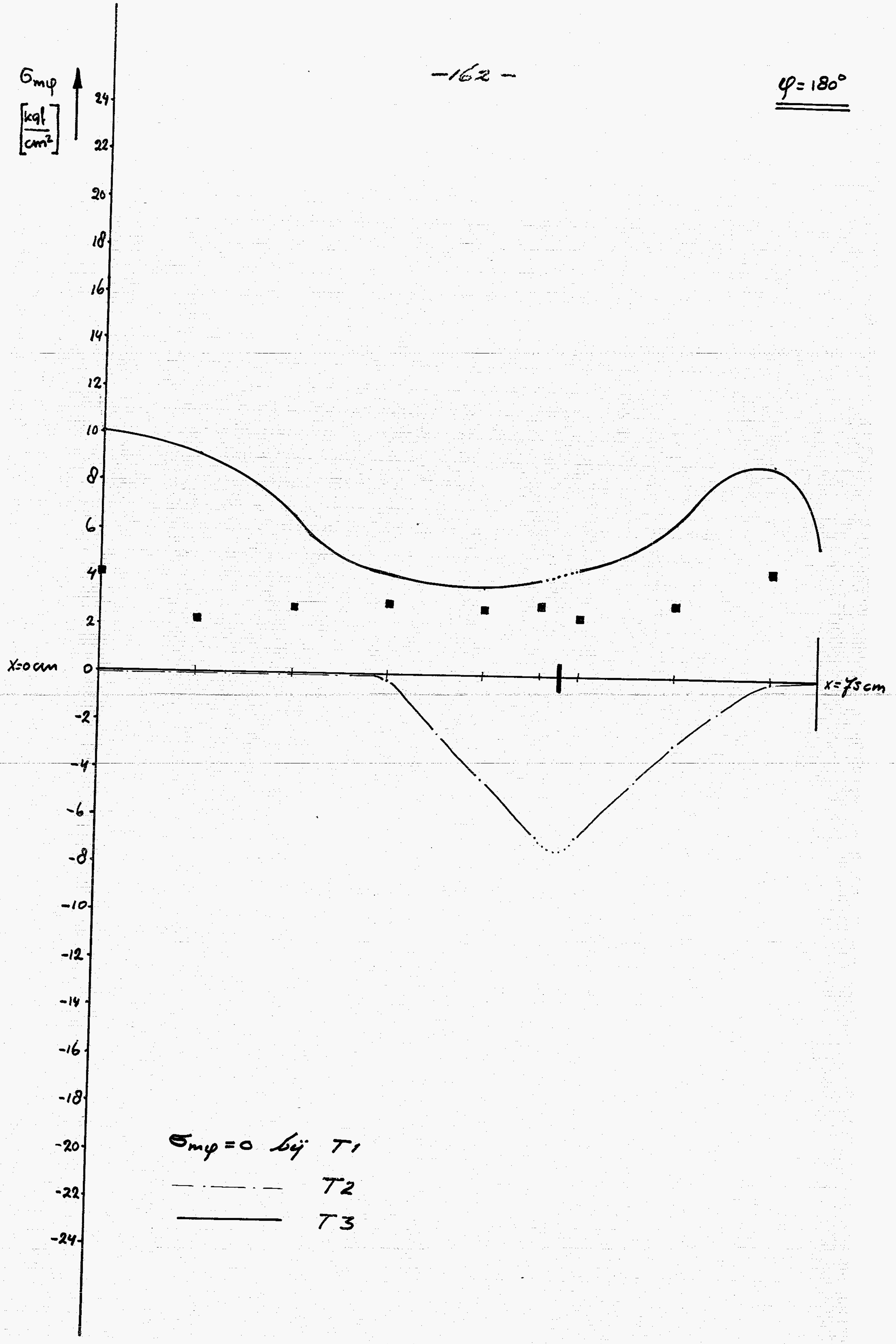
$\varphi = 90^\circ$

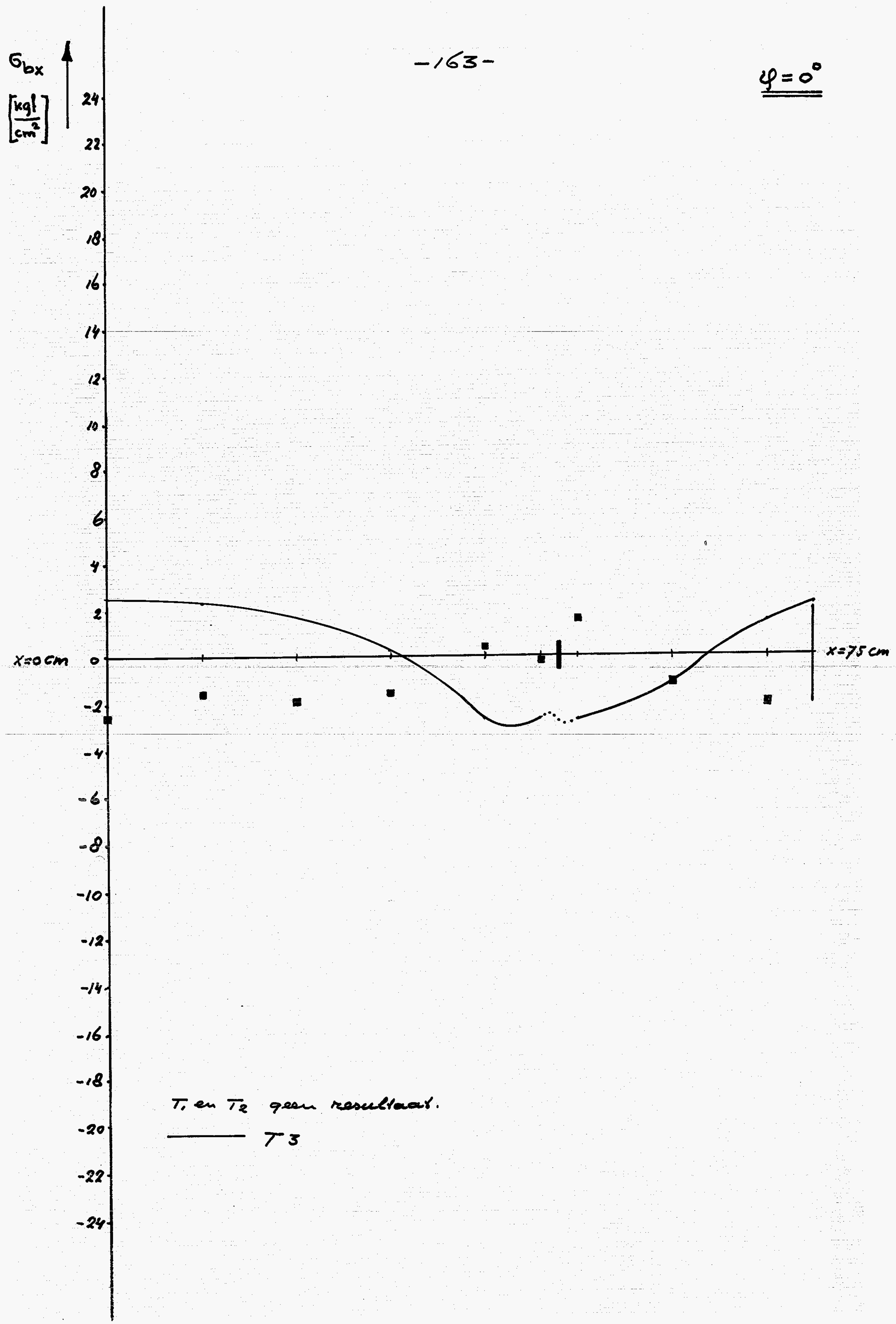




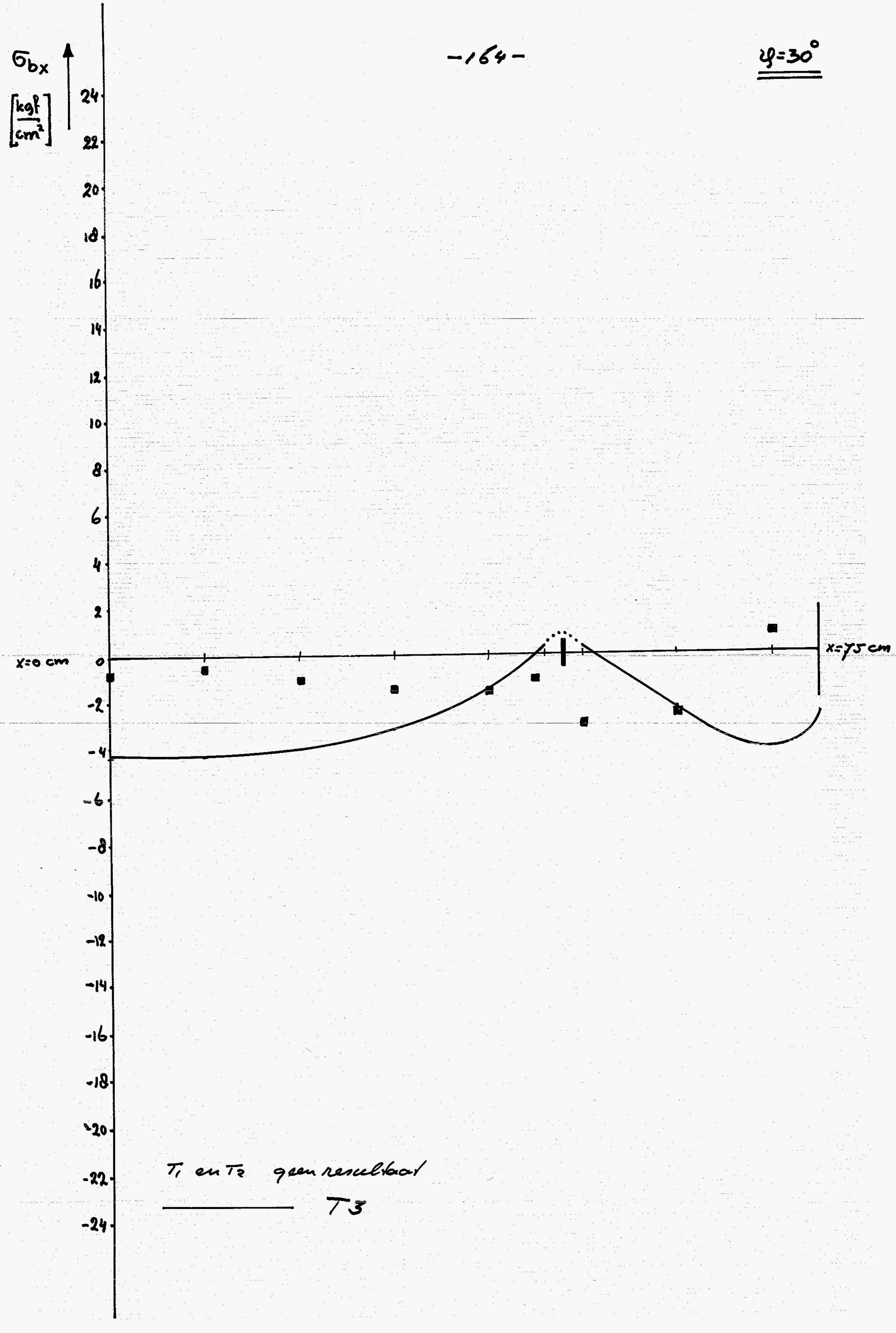
$\sigma_{m\varphi}$
$\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0cm
x=75cm
φ=120°
T1
T2
T3


$\sigma_{m\varphi}$
[kgf/cm²]
φ=150°
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T1
T2
T3

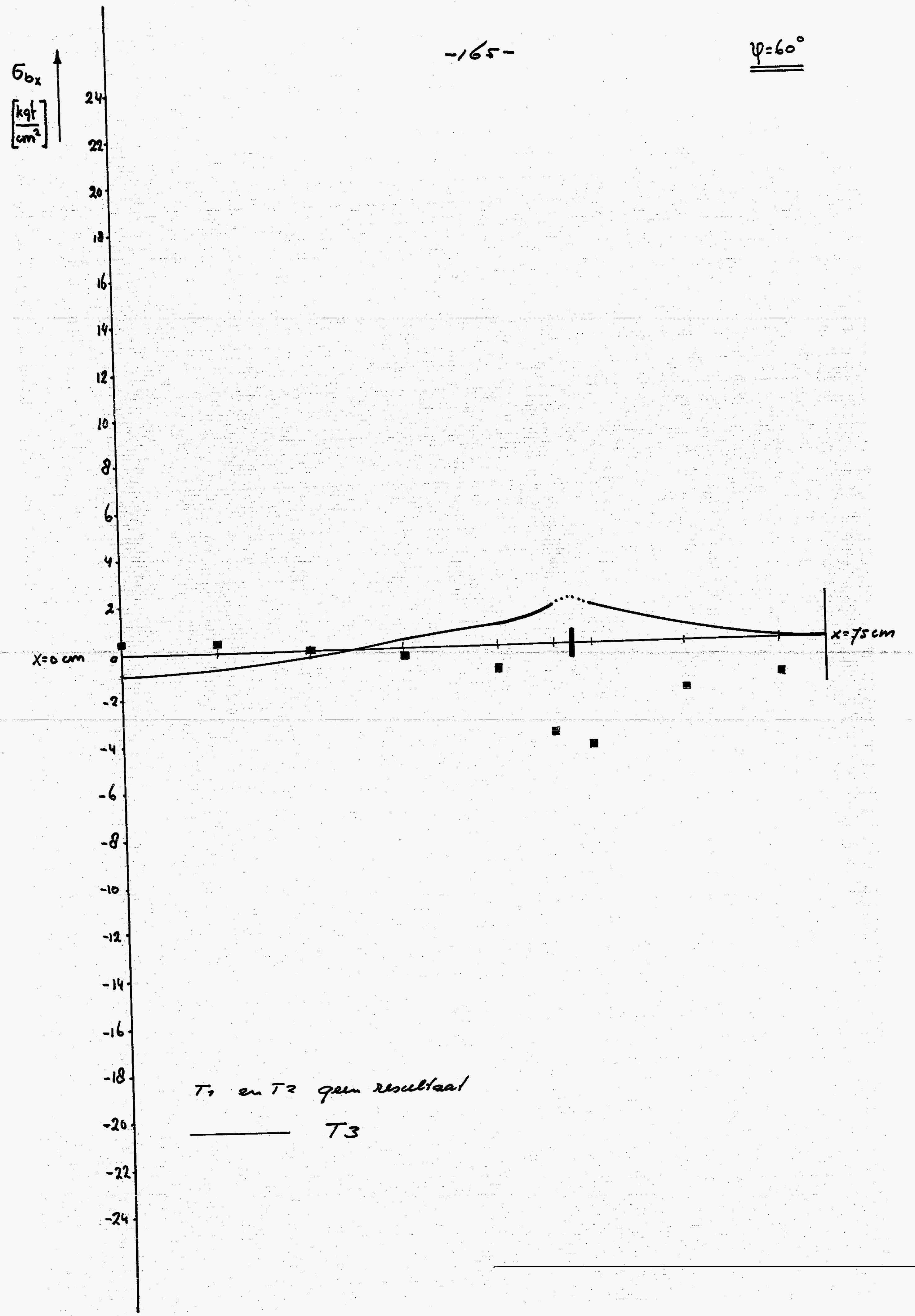

$\sigma_{m\varphi}$
$\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$
$\varphi = 180°$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
$\sigma_{m\varphi} = 0$ bij T1
T2
T3

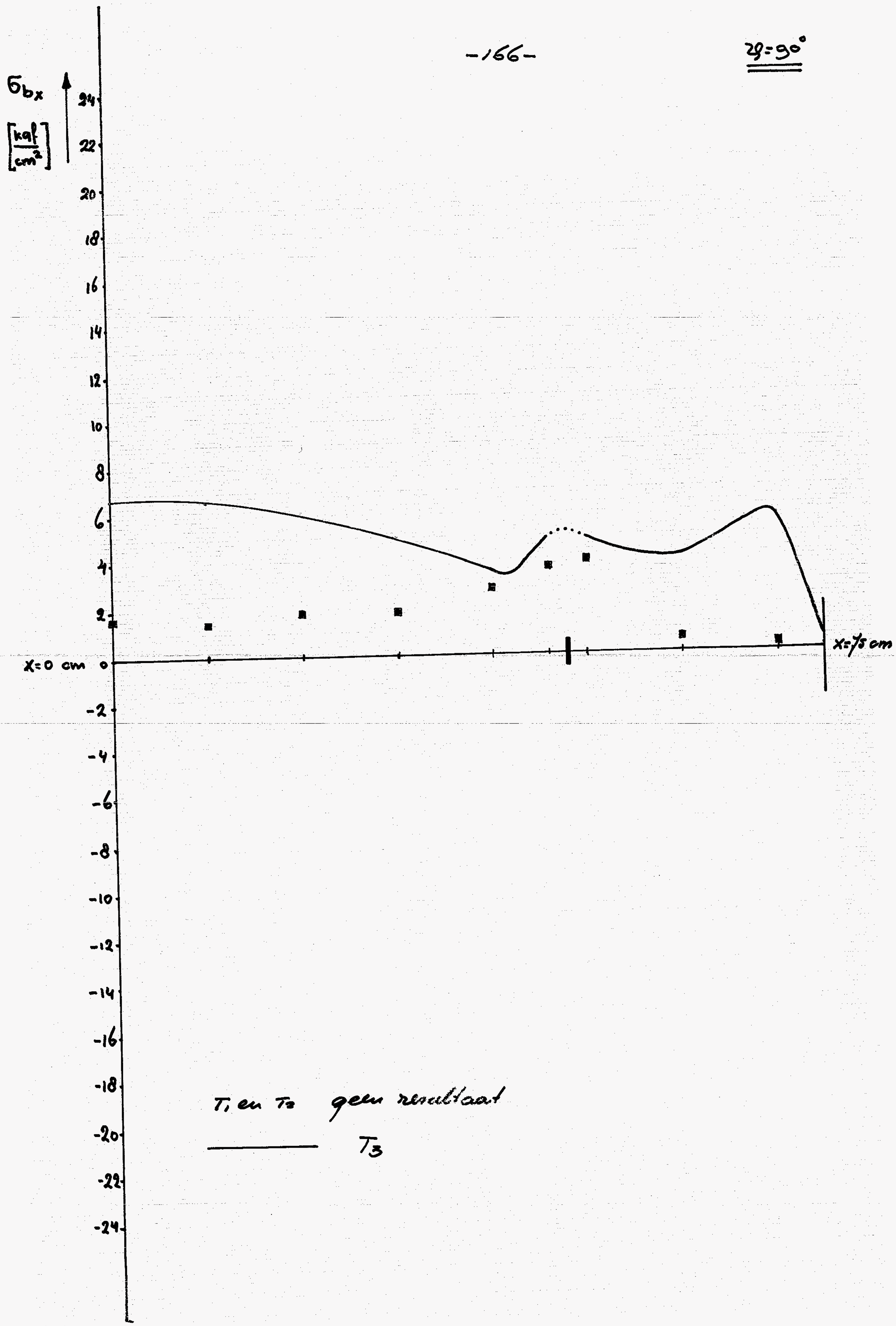

$\varphi = 0°$
σ_{bx}
$\left[\frac{kg}{cm^2}\right]$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T_1 en T_2 geen resultaat.
T 3

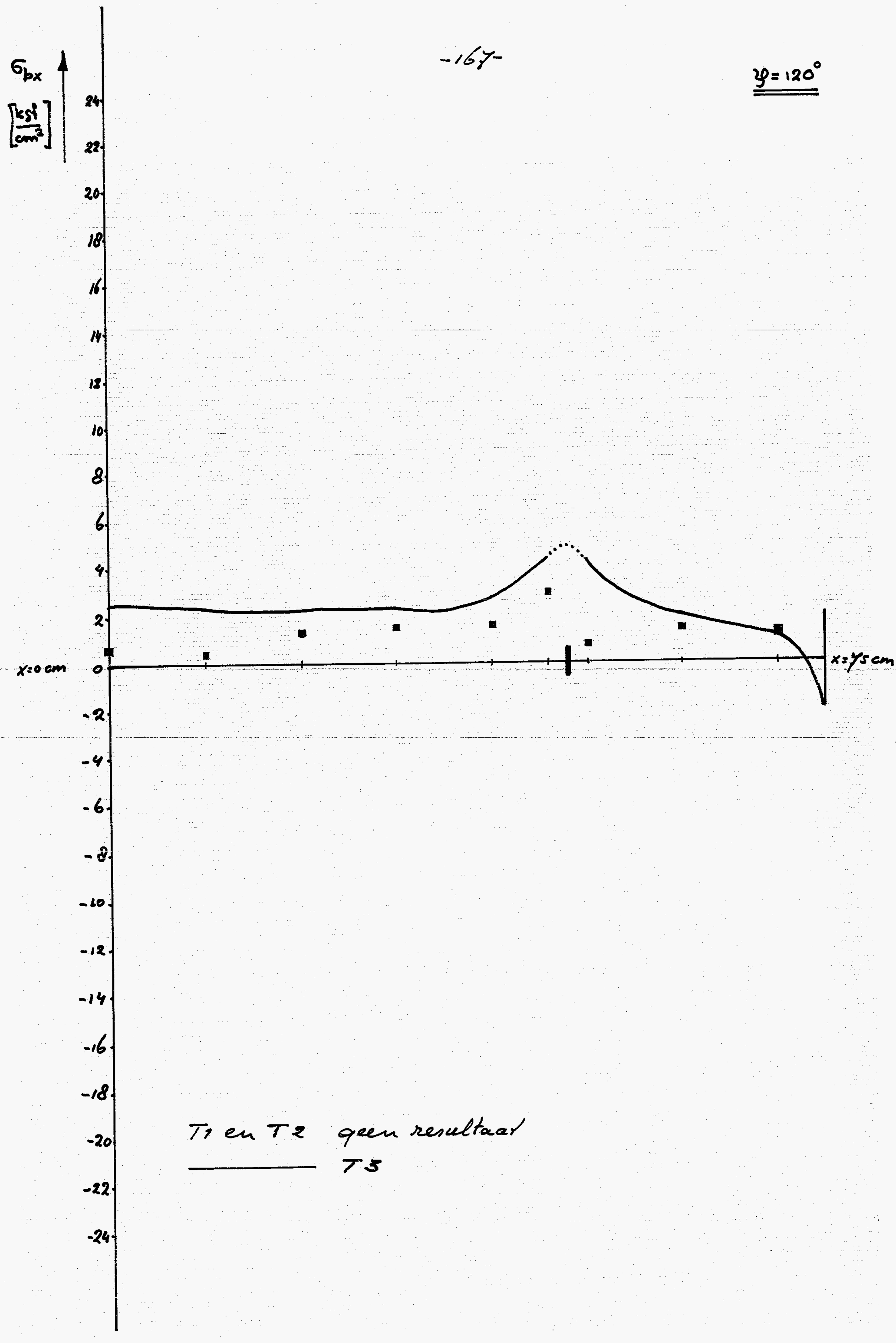
$\varphi = 30°$


σbx
[kgf/cm²]
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T1 en T2 geen resultaat
T3

$\underline{\underline{\varphi = 60°}}$



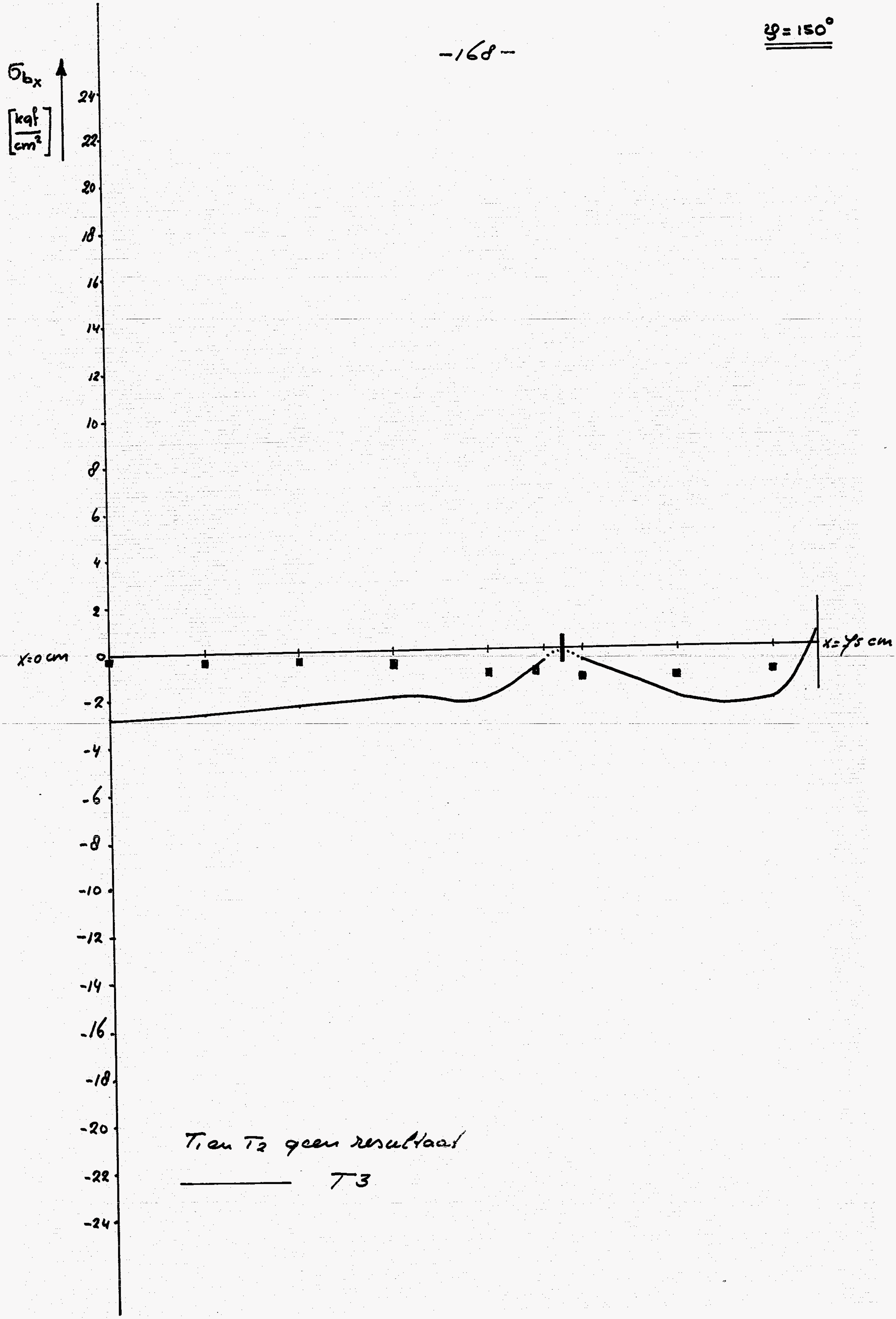

$\vartheta = 90°$
σ_{bx}
$\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T_1 en T_2 geen resultaat
T_3



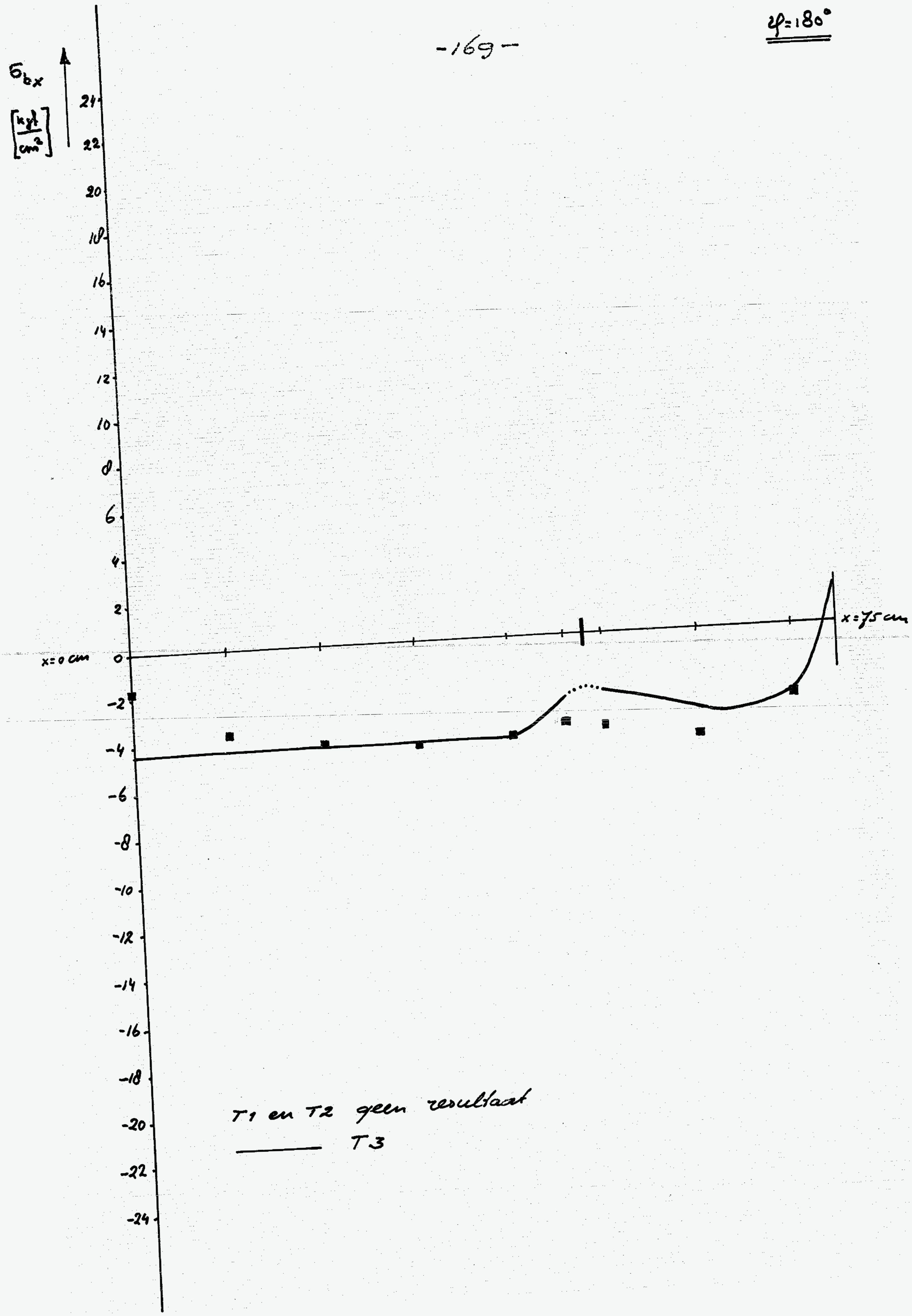
T1 en T2 geen resultaat

——— T3

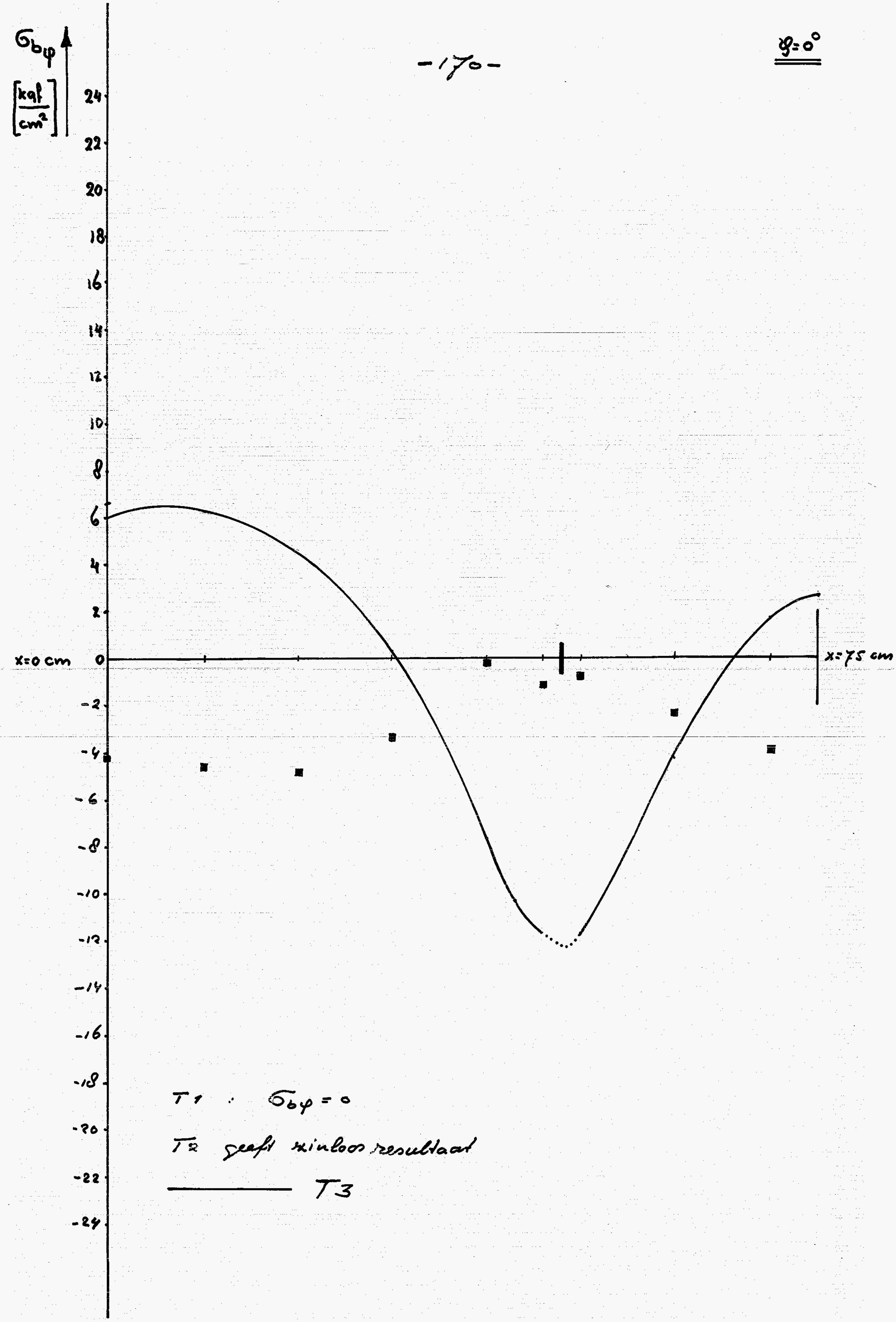
$\vartheta = 150°$



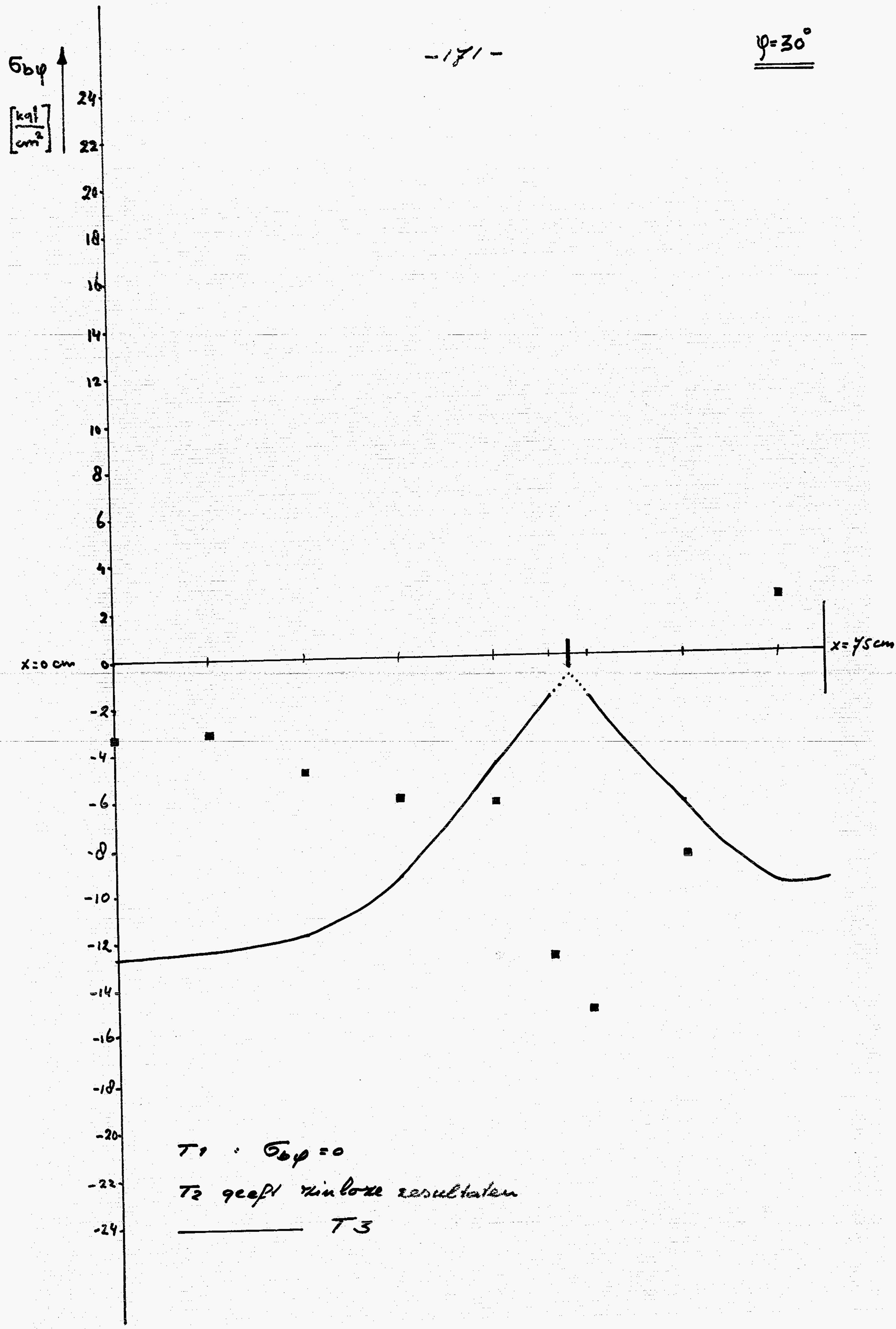
$\varphi = 180°$


σ_{bx}
[kgf/cm²]
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T1 en T2 geen resultaat
T3

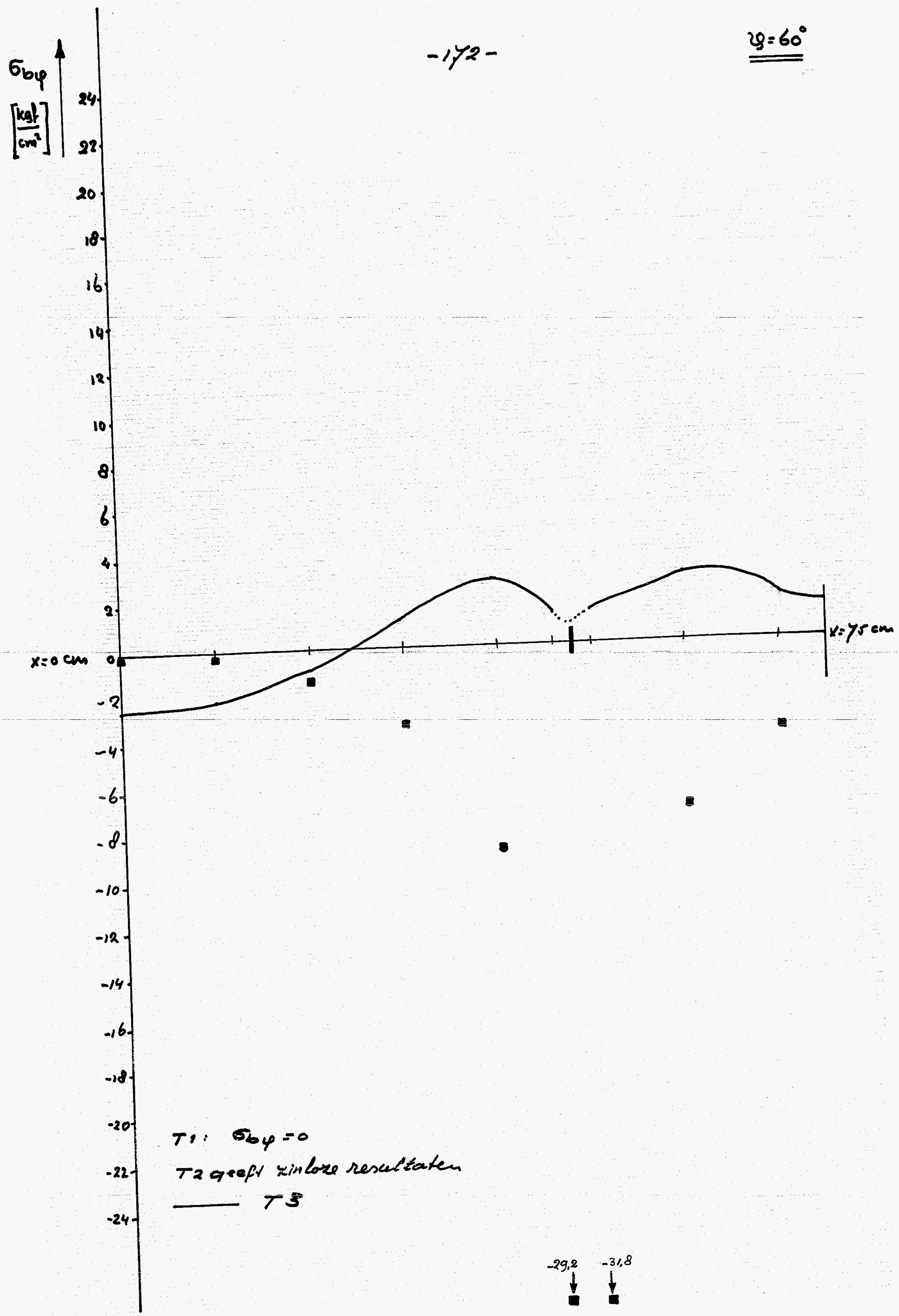
$\varphi = 0°$


$\sigma_{b\varphi}$
$\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T1 : $\sigma_{b\varphi} = 0$
T2 geeft zinloos resultaat
T3

$\varphi = 30^\circ$



$\vartheta = 60°$

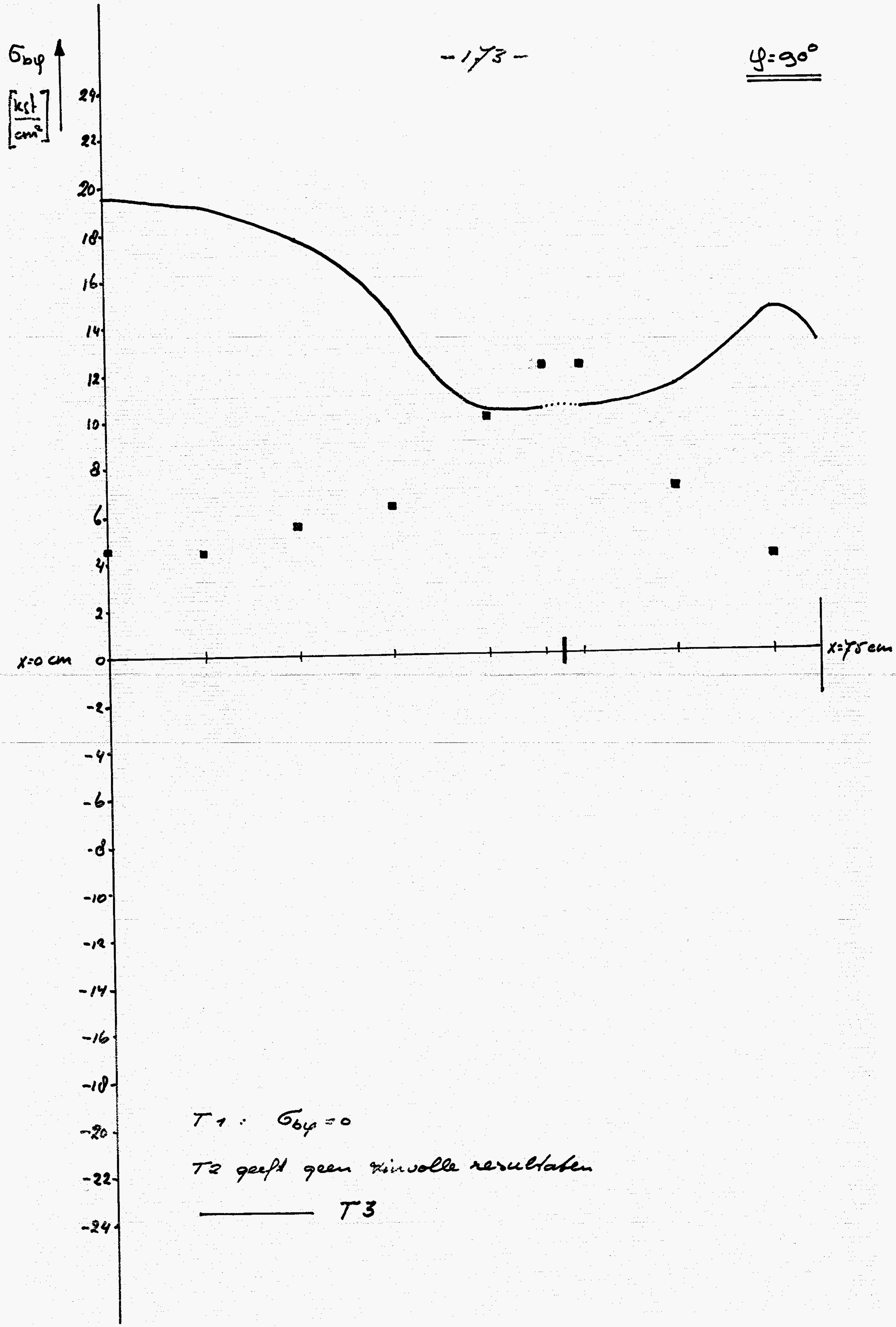


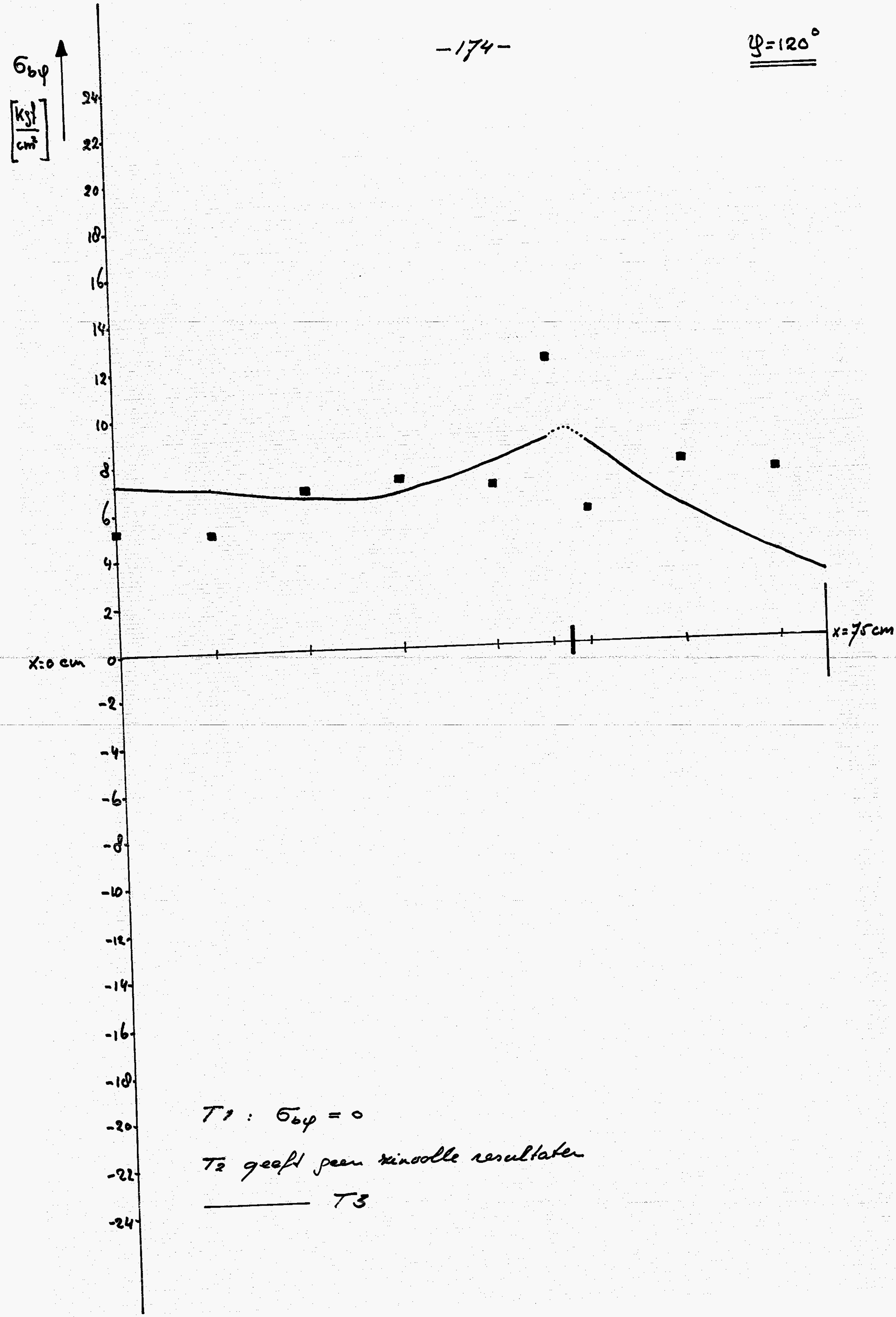
T1: $\sigma_{b\varphi} = 0$

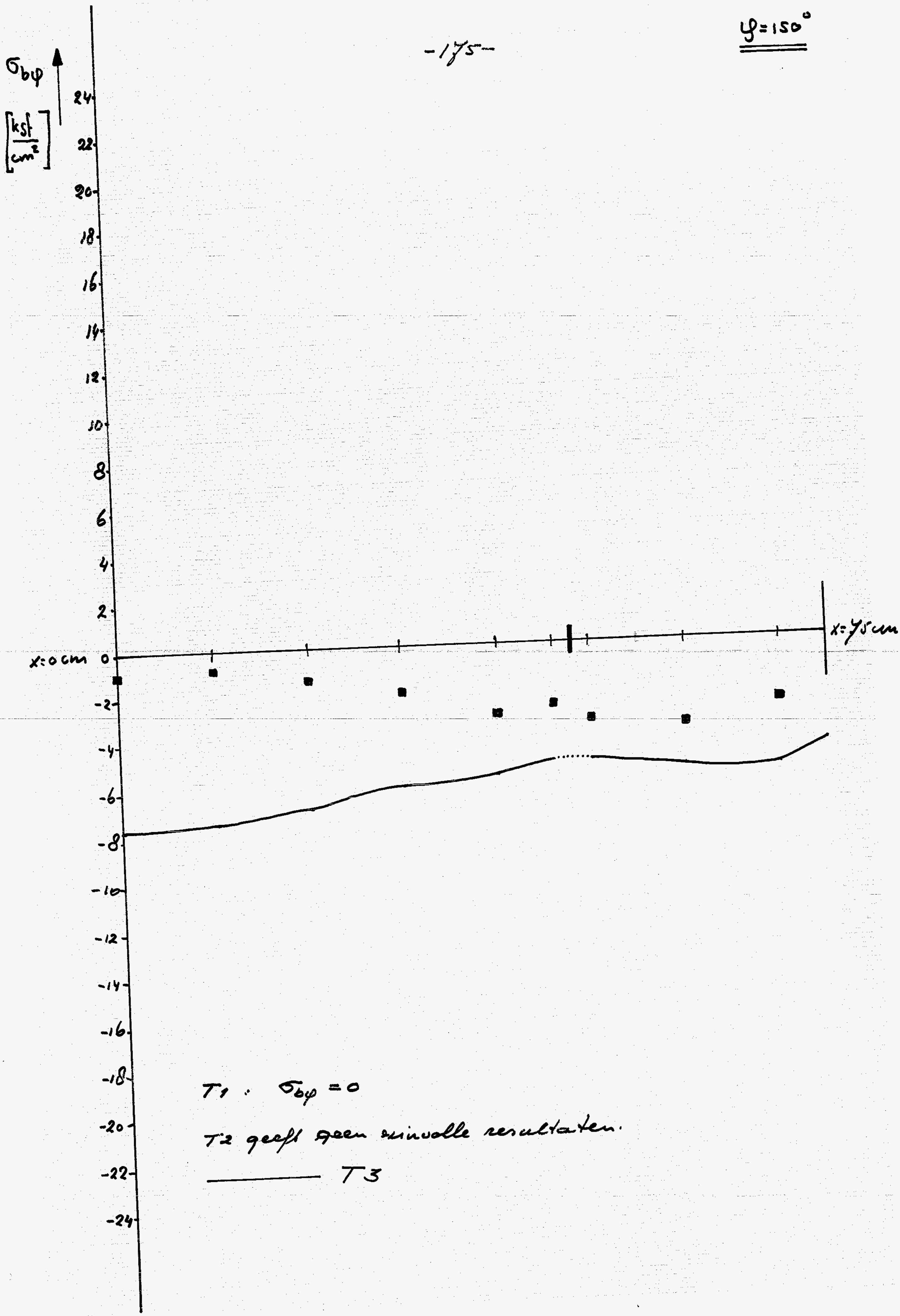
T2 geeft zinloze resultaten

——— T3

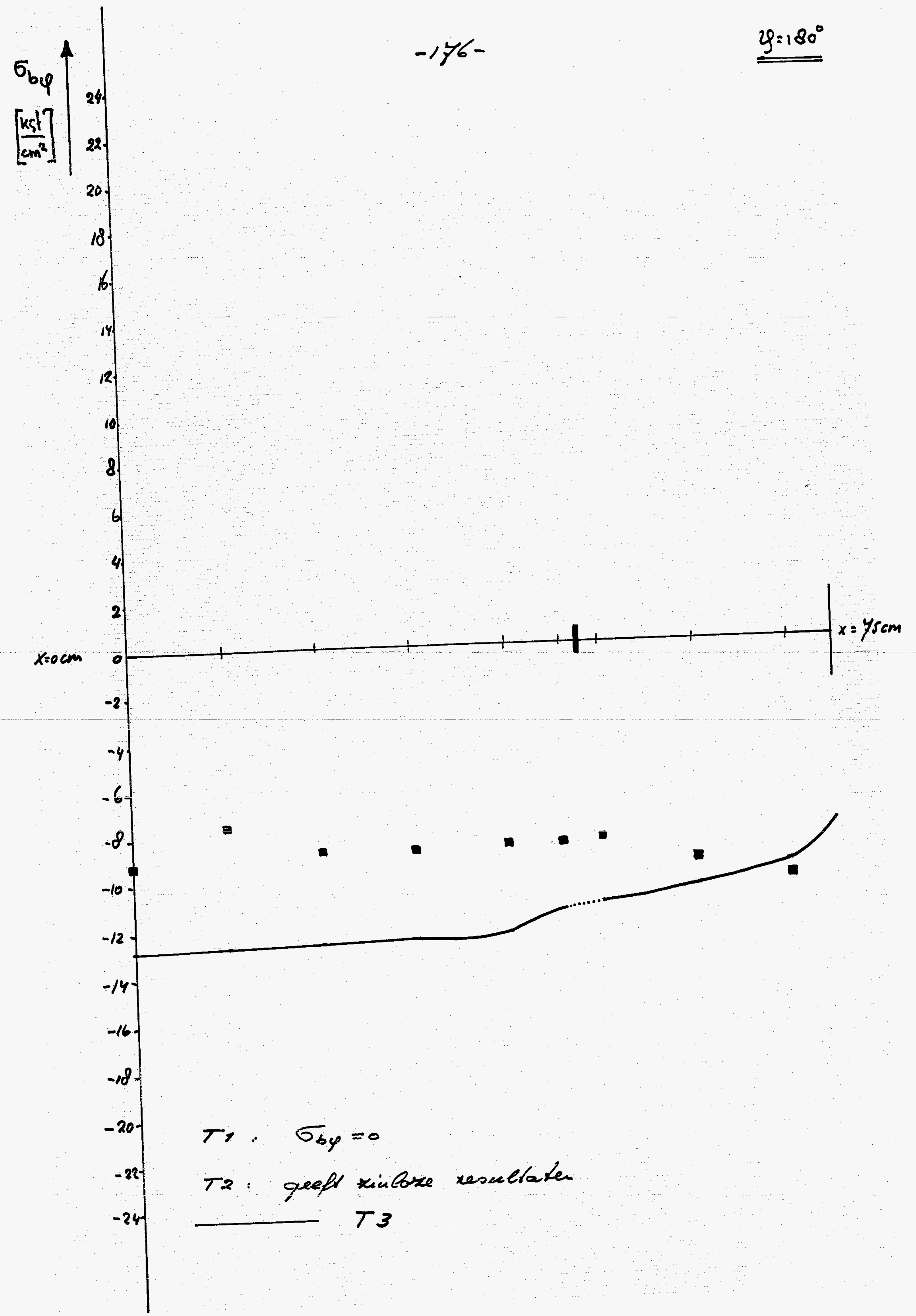
$\varphi = 90°$


$\sigma_{b\varphi}$
$\left[\frac{kg}{cm^2}\right]$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T1 : $\sigma_{b\varphi} = 0$
T2 geeft geen zinvolle resultaten
T3


$\varphi = 120^\circ$
$\sigma_{b\varphi}$
$\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0 cm
x=75 cm
T1 : $\sigma_{b\varphi} = 0$
T2 geeft geen zinvolle resultaten
T3


φ=150°
$\sigma_{b\varphi}$
[kgf/cm²]
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x: 0 cm
x: 75 cm
T1 : $\sigma_{b\varphi}$ = 0
T2 geeft geen zinvolle resultaten.
T3

$\varphi = 180°$



$\sigma_{b\varphi}$ $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
x=0cm
x=75cm
T1 : $\sigma_{b\varphi} = 0$
T2 : geeft zinloze resultaten
T3

Een vluchtige blik op de grafieken voor σ_{mx}, $\sigma_{m\varphi}$, σ_{bx} en $\sigma_{b\varphi}$ leert ons reeds dat er geen of weinig overeenkomst is tussen een van de theoretische krommen en het experiment. In het volgende en tevens laatste hoofdstuk zullen we daarop terugkomen.

In dit hoofdstuk willen we echter nog controleren of is voldaan aan de eis:

$$\int_0^\pi \sigma_{mx}(\varphi, x = \text{constant})\, d\varphi = 0 \quad \text{voor alle } x,$$

zowel bij de theoretisch als experimenteel gevonden resultaten.

Bij de theorieën van hoofdstuk 10 (T1) en hoofdstuk 11 (T2) is deze contrôle niet nodig omdat vrij vlug is in te zien dat bovenstaande eis geldt.
Bij de hier toegepaste schalentheorie en bij de experimenteel gevonden waarden moeten we bovenstaande eis echter wel verifiëren.

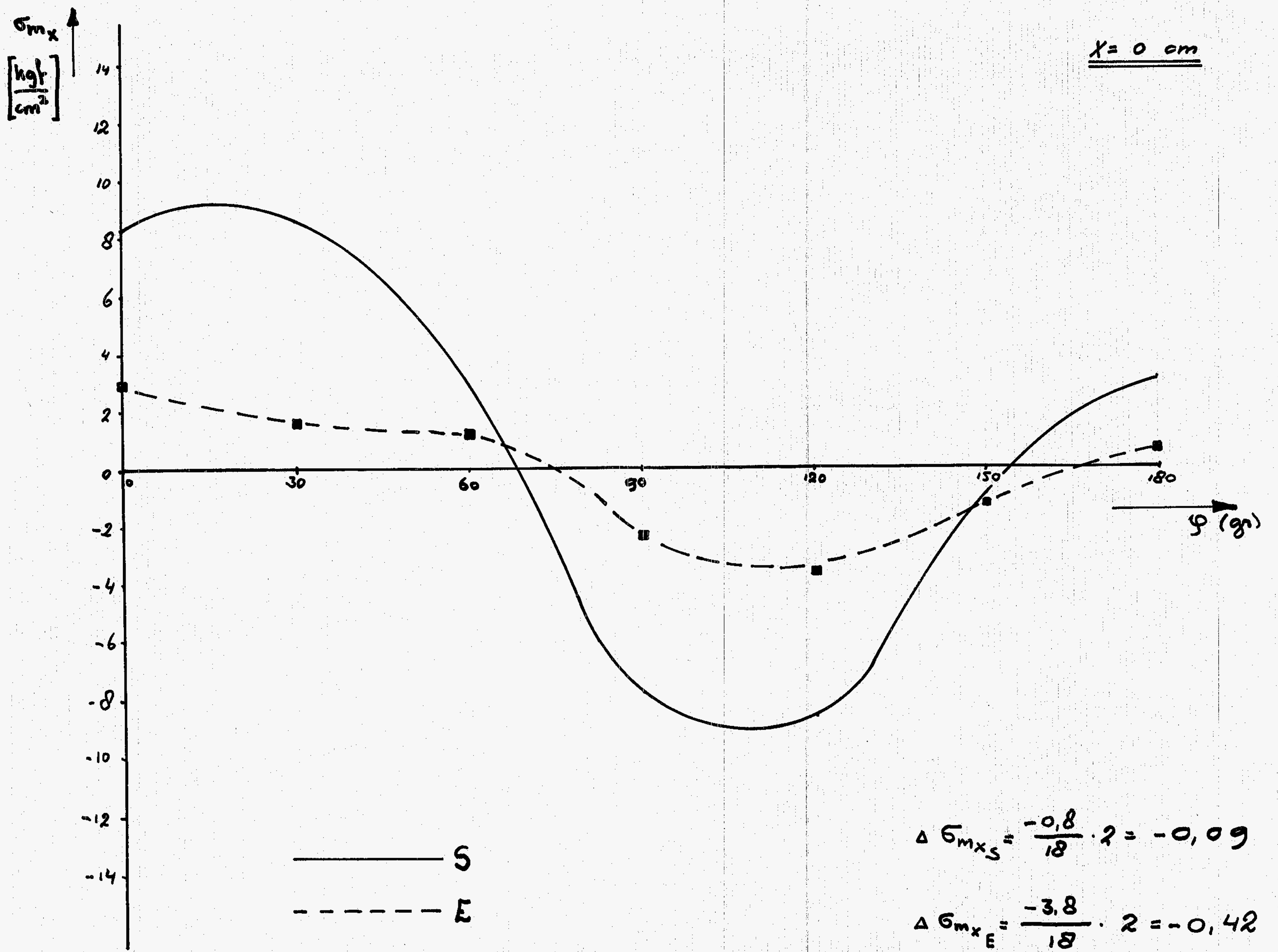
We definiëren:

$$\Delta\sigma_{mx_{S \text{ of } E}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sigma_{mx}(\varphi, x = \text{constant})_{S \text{ of } E}\, d\varphi$$

De index S of E duidt aan of we te doen hebben met de toegepaste schalentheorie of met het experiment.

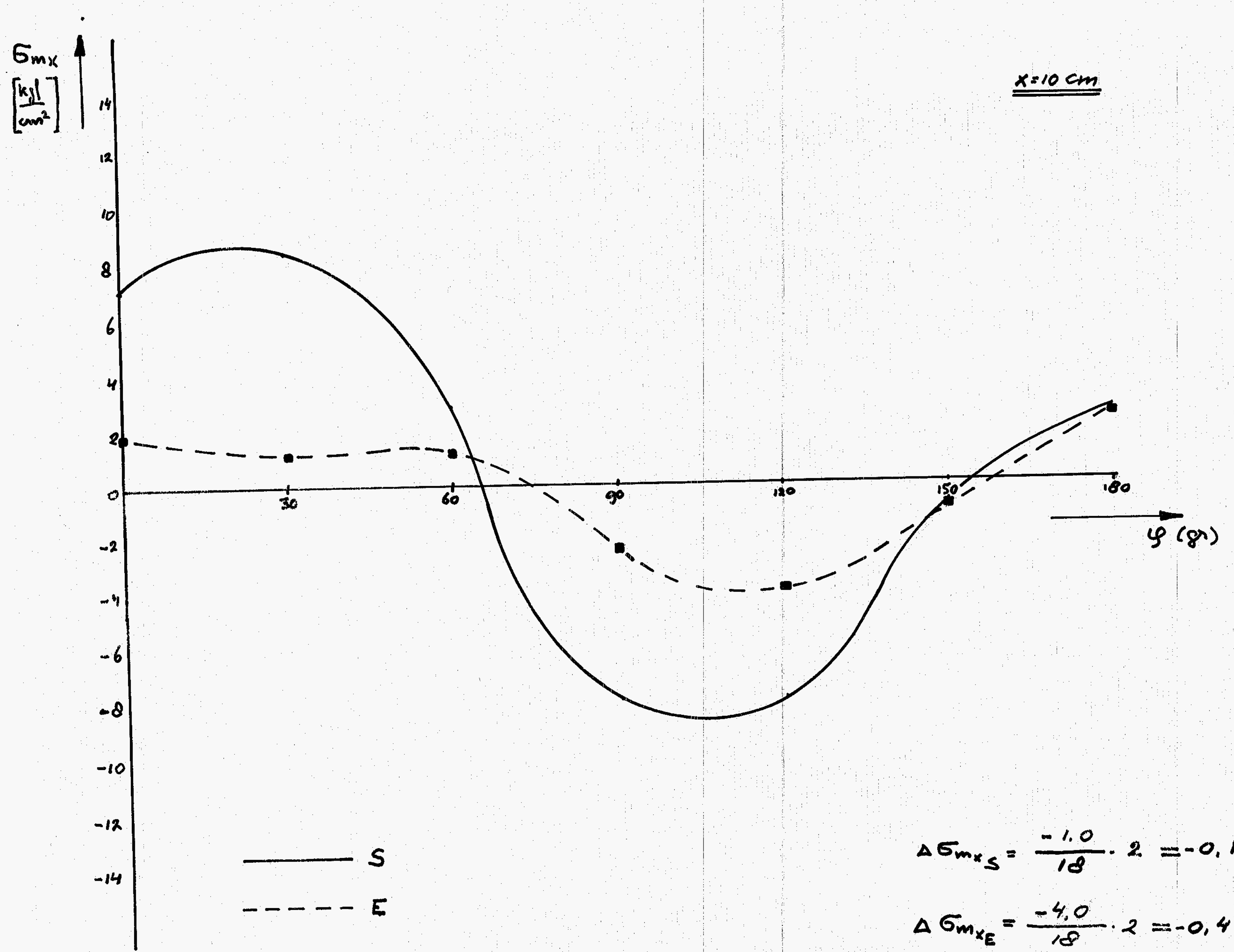
In de nu volgende grafieken is steeds voor een bepaalde waarde van x, $\Delta\sigma_{mx}$ berekend, na de daarvoor noodzakelijke opmetingen met behulp van de planimeter.
Op deze grafieken zijn deze waarden van $\Delta\sigma_{mx_S}$ en $\Delta\sigma_{mx_E}$ vermeld.

De test is niet erg nauwkeurig omdat het verloop van de krommen op een gering aantal punten is gebaseerd.



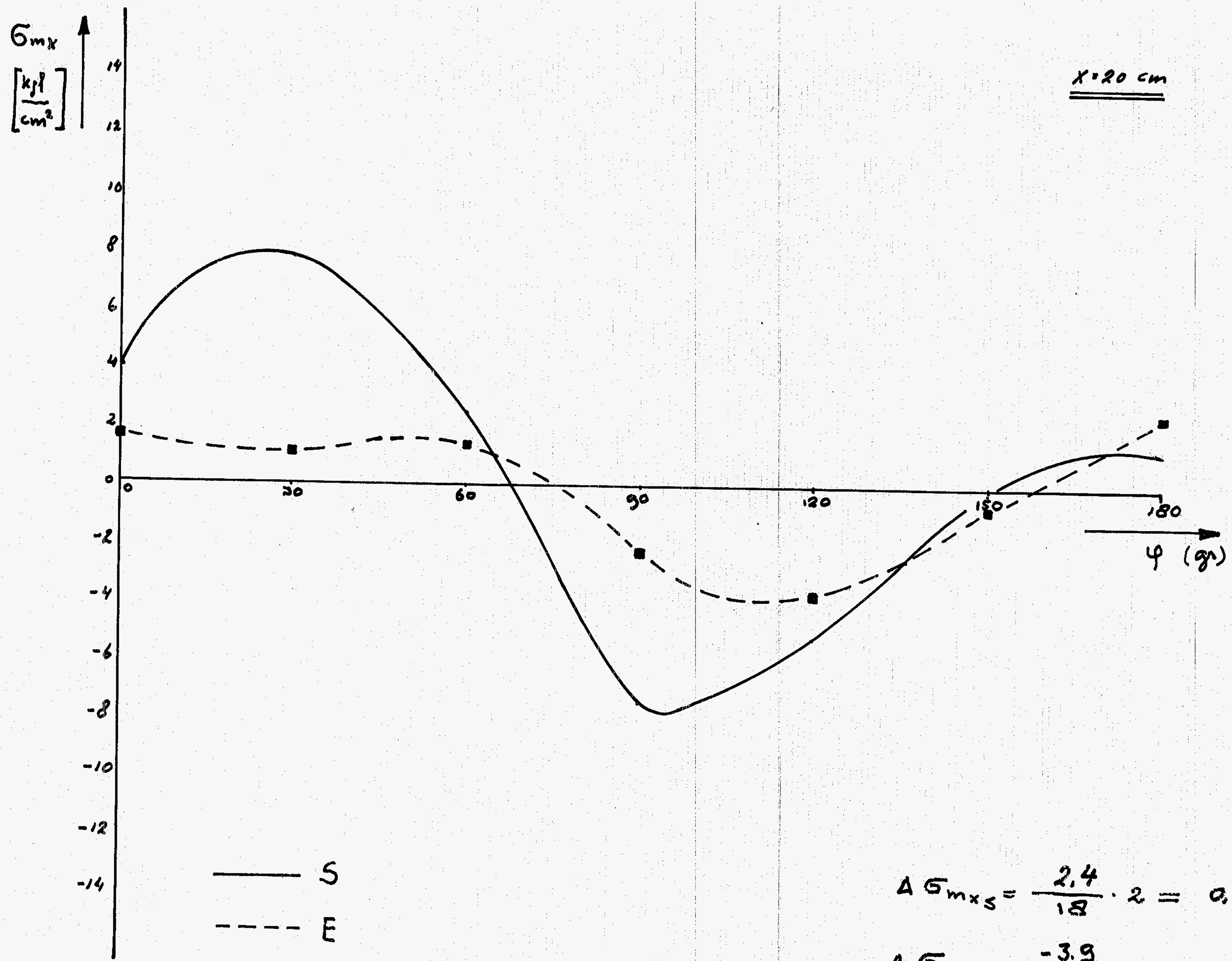
$$\Delta \sigma_{mx_S} = \frac{-0{,}8}{18} \cdot 2 = -0{,}09 \quad kgf/cm^2$$

$$\Delta \sigma_{mx_E} = \frac{-3{,}8}{18} \cdot 2 = -0{,}42 \quad kgf/cm^2$$



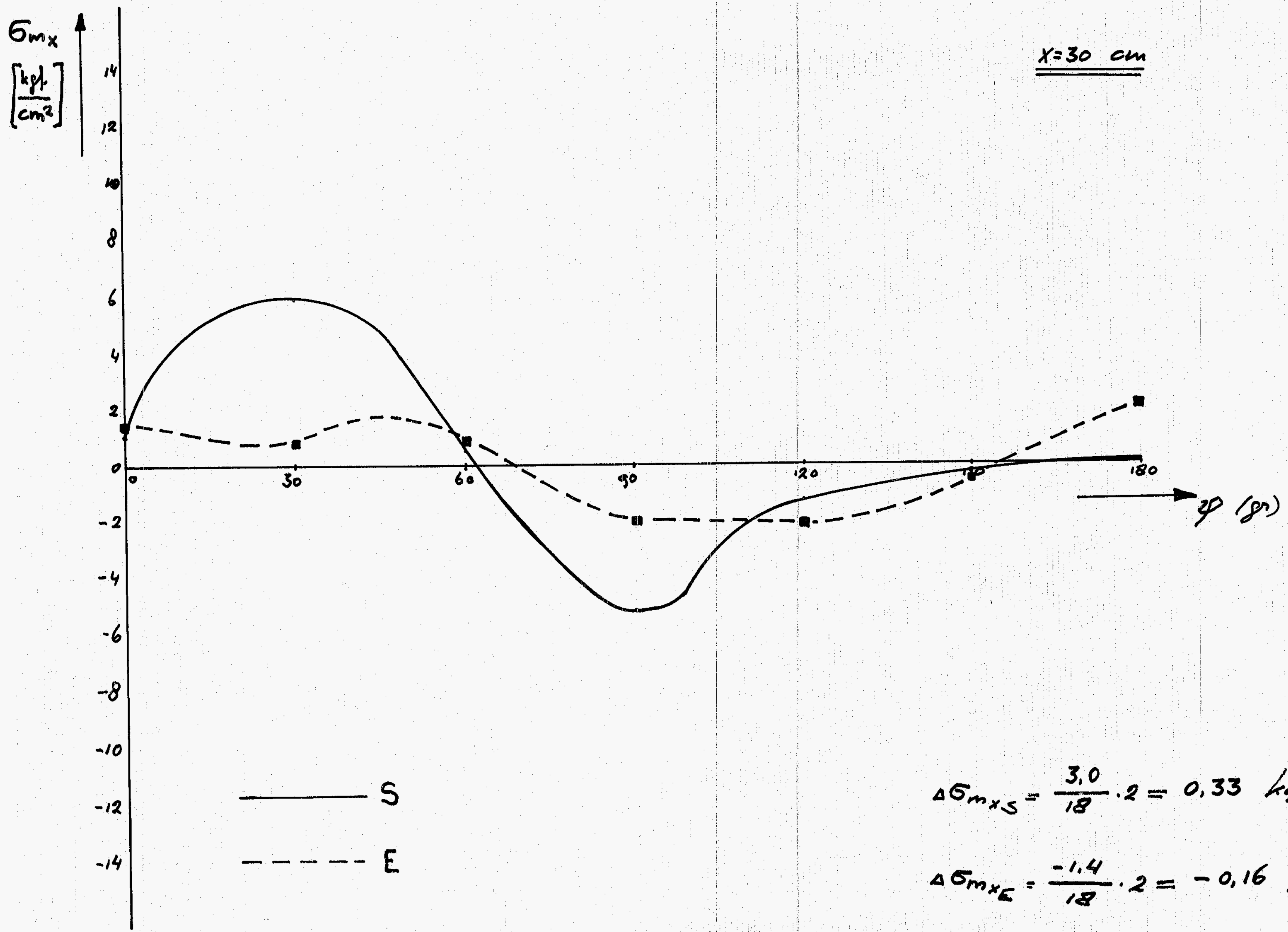
$$\Delta \sigma_{mx_S} = \frac{-1.0}{18} \cdot 2 = -0,11 \quad kgf/cm^2$$

$$\Delta \sigma_{mx_E} = \frac{-4,0}{18} \cdot 2 = -0,44 \quad kgf/cm^2$$



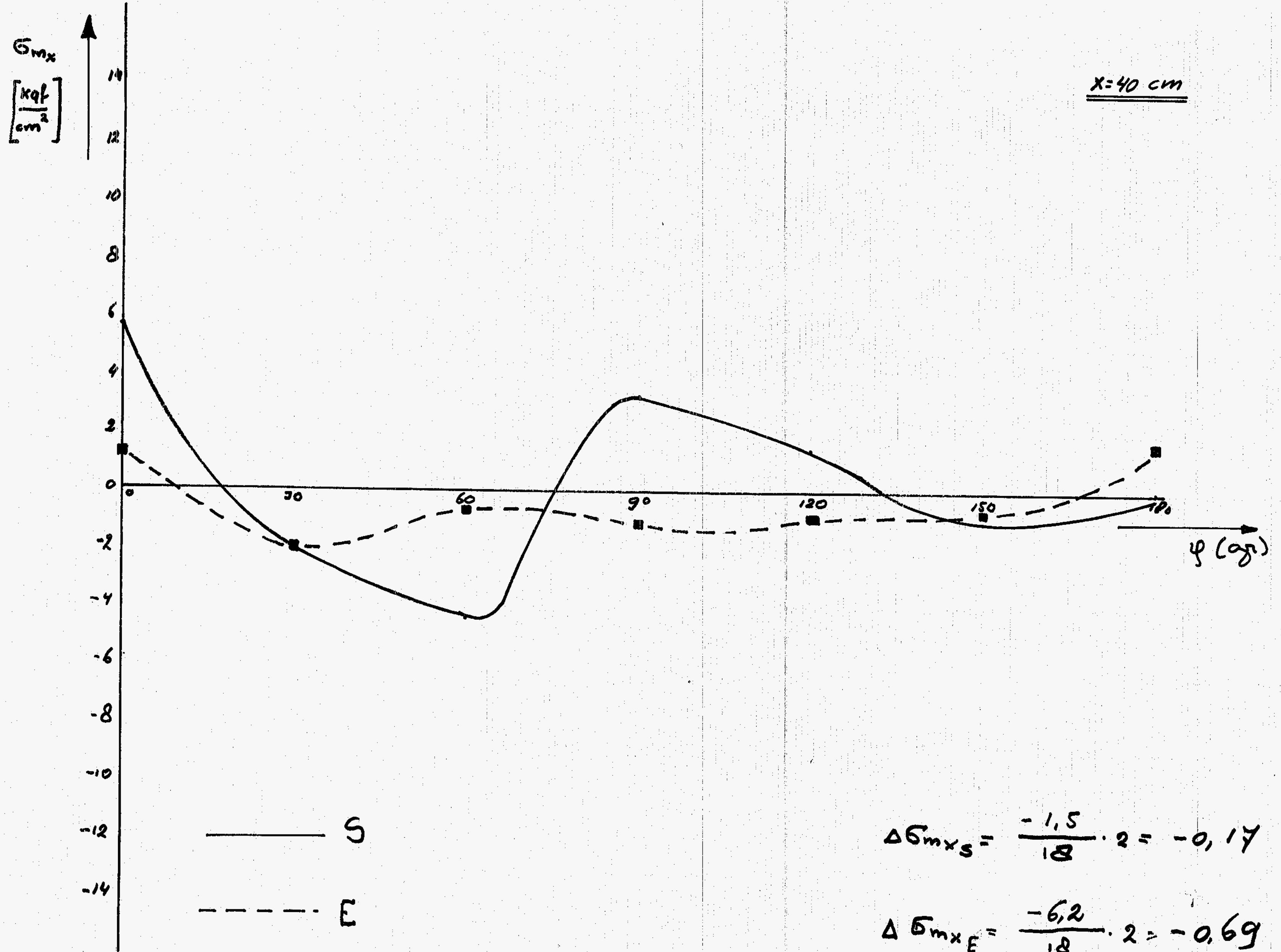
$$\Delta \sigma_{mx_S} = \frac{2,4}{18} \cdot 2 = 0,27 \quad kgf/cm^2$$

$$\Delta \sigma_{mx_E} = \frac{-3,9}{18} \cdot 2 = -0,43 \quad kgf/cm^2$$



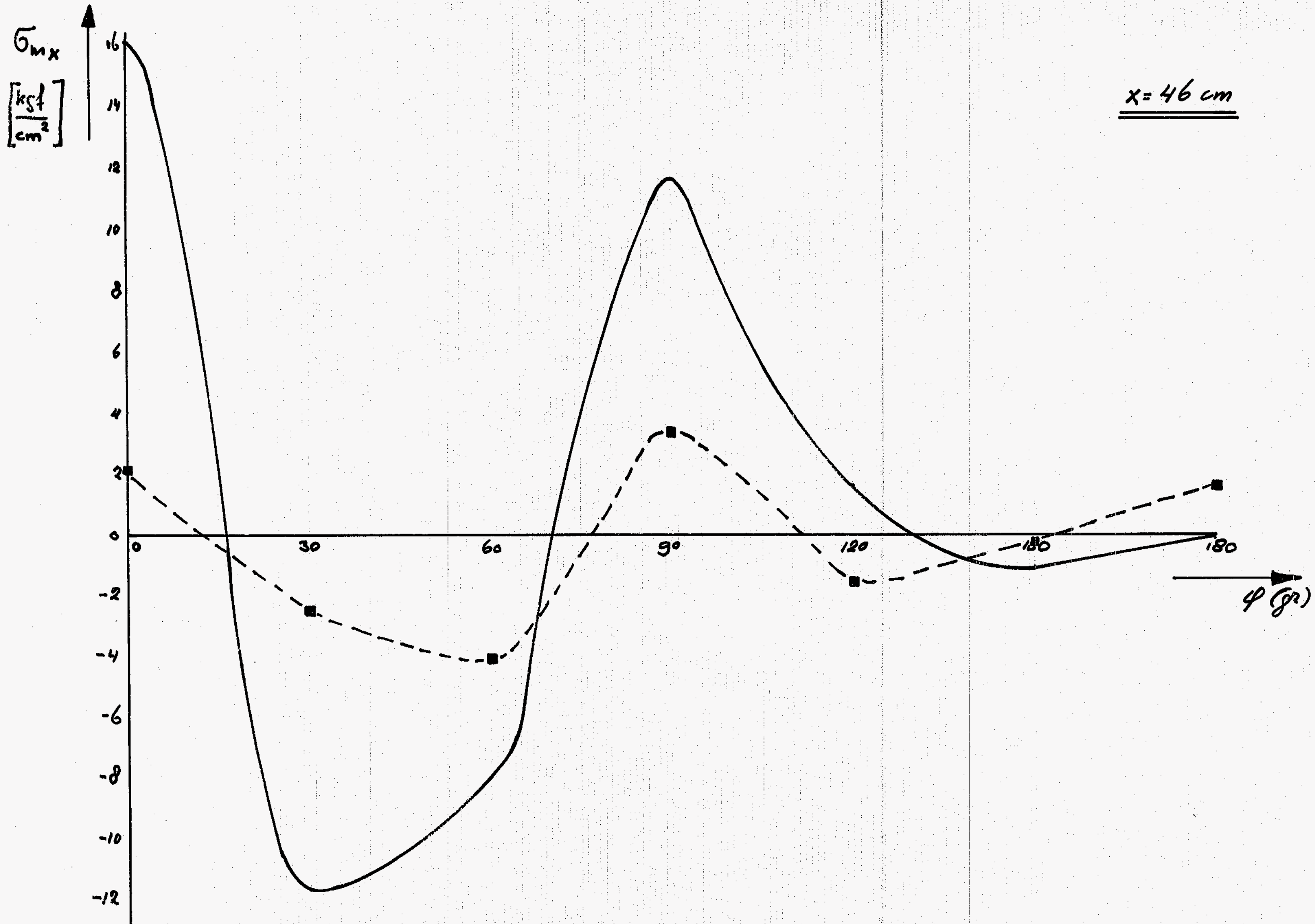
$$\Delta\sigma_{mx_S} = \frac{3,0}{18} \cdot 2 = 0,33 \ \text{kgf/cm}^2$$

$$\Delta\sigma_{mx_E} = \frac{-1,4}{18} \cdot 2 = -0,16 \ \text{kgf/cm}^2$$



$$\Delta\sigma_{mx_S} = \frac{-1,5}{18}\cdot 2 = -0,17 \quad kgf/cm^2$$

$$\Delta\sigma_{mx_E} = \frac{-6,2}{18}\cdot 2 = -0,69 \quad kgf/cm^2 \quad !$$

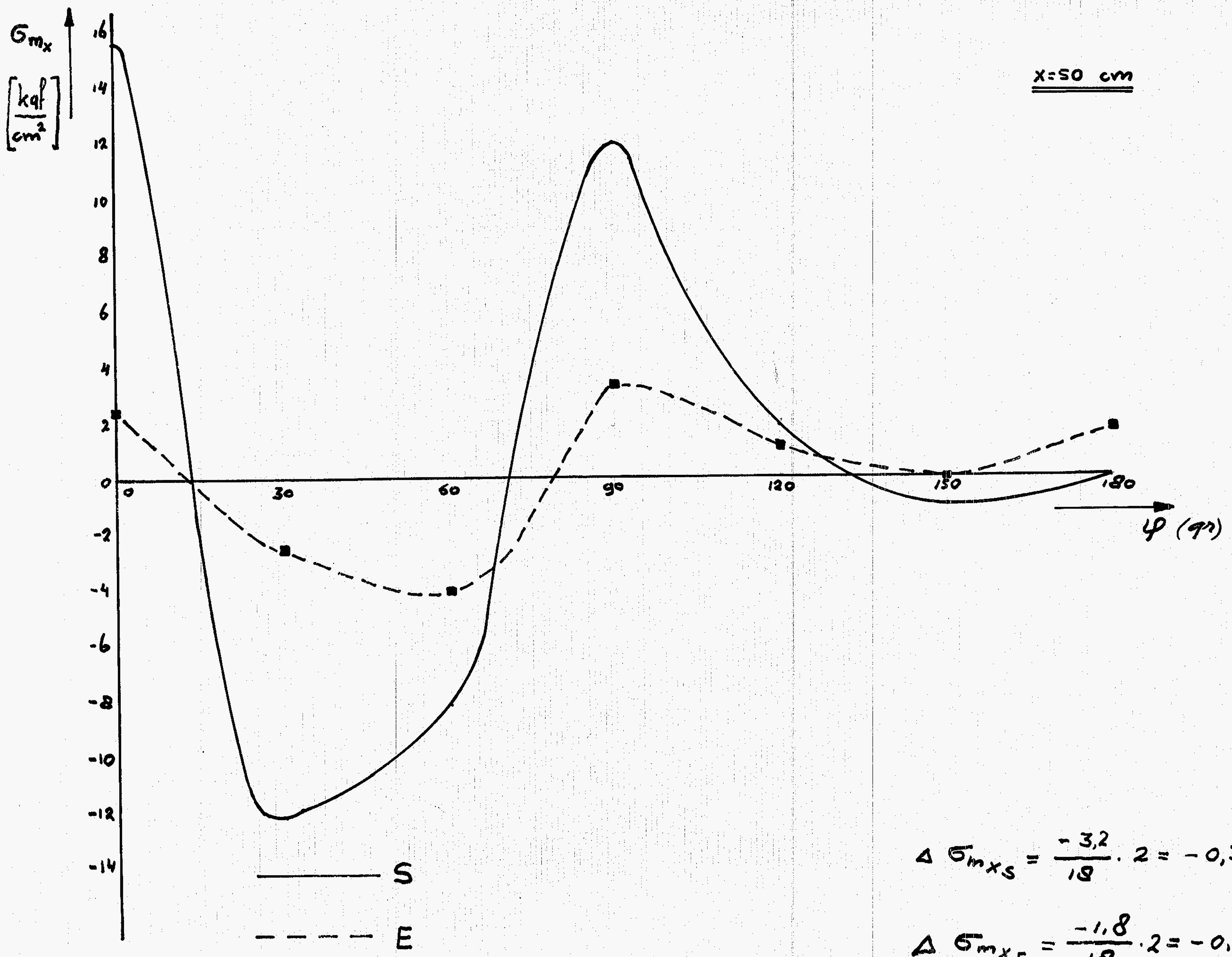


S

E

$$\Delta \sigma_{mx_S} = \frac{0.6}{18} \cdot 2 = 0{,}07 \quad kgf/cm^2$$

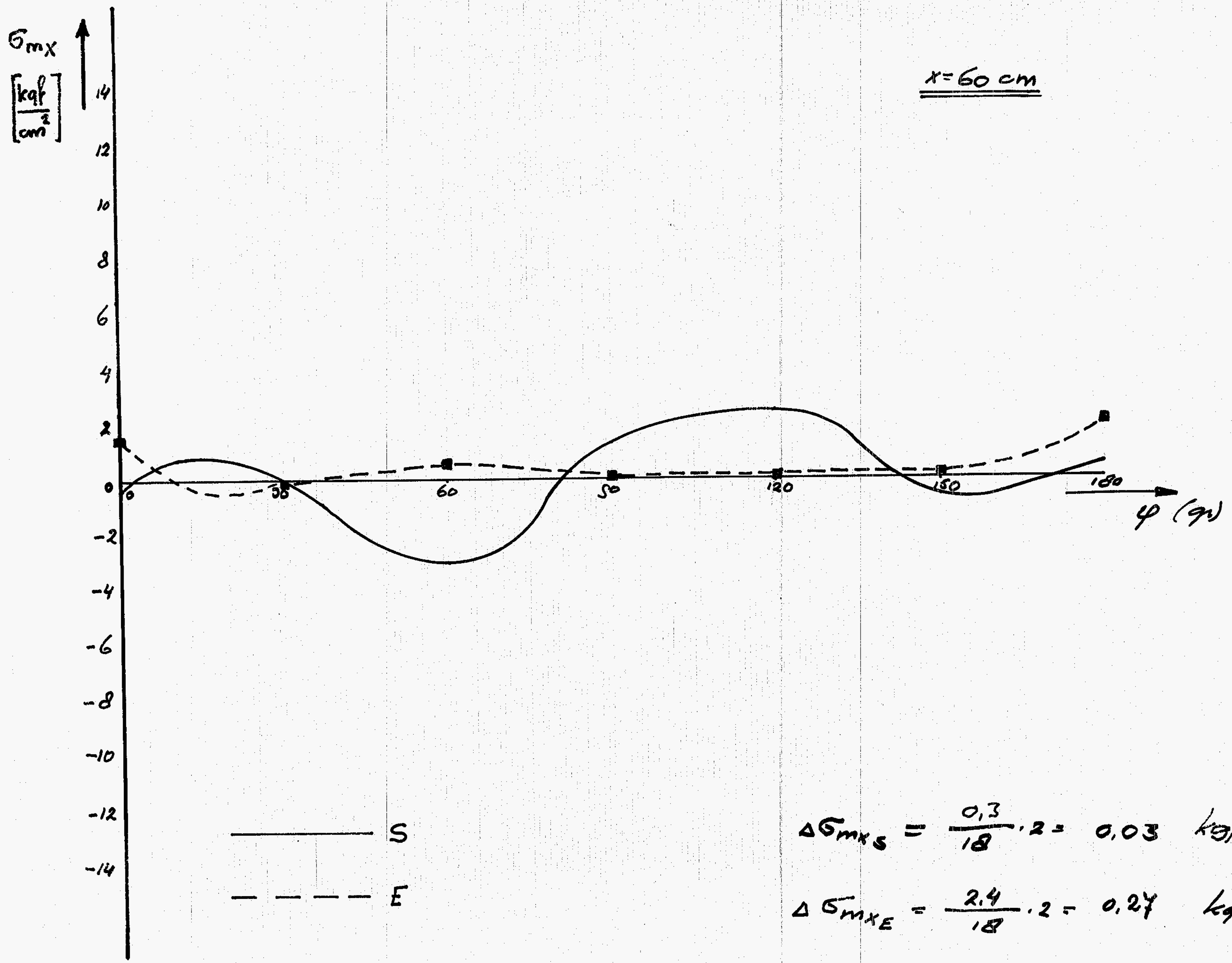
$$\Delta \sigma_{mx_E} = \frac{-4.8}{18} \cdot 2 = -0{,}53 \quad kgf/cm^2$$



$$\Delta\,\sigma_{m_{x_S}} = \frac{-3{,}2}{18} \cdot 2 = -0{,}36 \quad kgf/cm^2$$

$$\Delta\,\sigma_{m_{x_E}} = \frac{-1{,}8}{18} \cdot 2 = -0{,}20 \quad kgf/cm^2$$

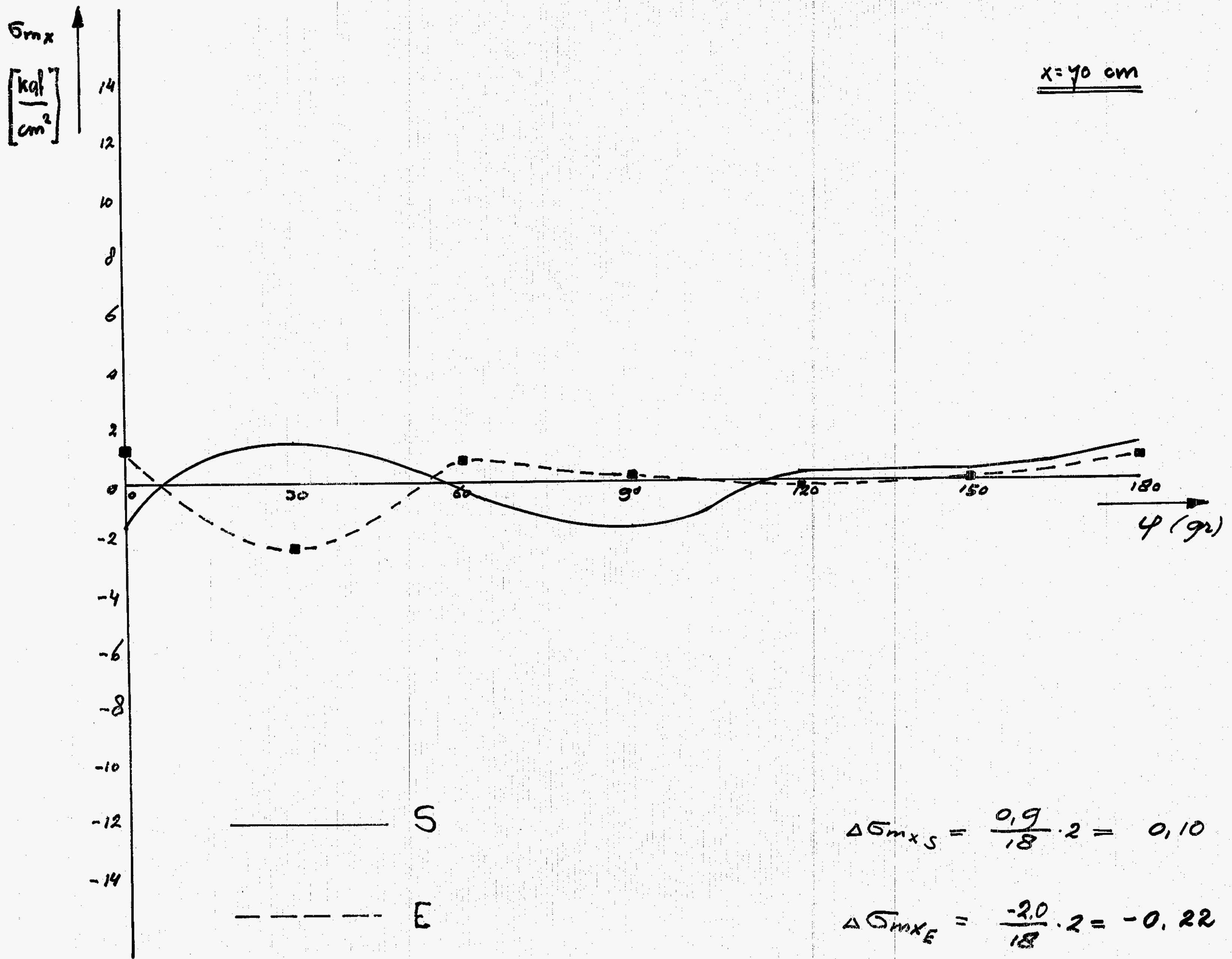
$\underline{\underline{x = 60\ cm}}$



$$\Delta\sigma_{mx_S} = \frac{0{,}3}{18} \cdot 2 = 0{,}03 \quad kgf/cm^2$$

$$\Delta\sigma_{mx_E} = \frac{2.4}{18} \cdot 2 = 0{,}27 \quad kgf/cm^2$$

x=40 cm



$$\Delta\sigma_{mx_S} = \frac{0{,}9}{18}\cdot 2 = 0{,}10 \quad kgf/cm^2$$

$$\Delta\sigma_{mx_E} = \frac{-2{,}0}{18}\cdot 2 = -0{,}22 \quad kgf/cm^2$$

15. Conclusies en slotopmerking.

In het vorige hoofdstuk werd reeds opgemerkt dat zowel tussen de theorieën onderling als bij de vergelijking ervan met de meetresultaten. enige overeenstemming ver gezocht moet worden.

Het is niet zo verwonderlijk dat de gewone balkentheorie resultaten levert, die in het geheel niet lijken op de meetresultaten. De koker kan niet als balk worden beschouwd. Dit alles ondanks wat wordt gesuggereerd in het afstudeerverslag van J. W. H. Leers: „Analyse van de spanningsverdeling in een dunwandige cilinder onder lijnbelasting", waar de balkentheorie de meest gunstige resultaten gaf. Het is niet duidelijk onder welke omstandigheden de gewone balkentheorie zulke goede resultaten kan geven.

De uitbreidingen van de gewone balkentheorie, die door L. P. Kich werden voorgesteld en die berusten op praktijkervaring bleken in het onderhavige geval geen enkele waarde te hebben. Voor deze uitbreidingen bestaat geen enkele theoretische achtergrond zodat we kunnen concluderen dat we in deze theorie geheel geen vertrouwen meer mogen hebben.

Het verbaast ons dat de hier toegepaste schalentheorie, waaraan in de literatuur de naam: „Donnell" is verbonden, zulke afwijkende uitkomsten voortbrengt.
In een artikel van L. S. D. Morley: „An improvement on Donnell's approximation" wordt dieper ingegaan op moeilijkheden die zich voor kunnen doen, bij het gebruik van deze theorie. Hierop zullen we terugkomen nadat enige opmerkingen zijn gemaakt, die op het experiment betrekking hebben.

De betrouwbaarheid van het experiment laat enigszins te wensen over.

Enerzijds hebben we gewerkt met een niet-ideaal proefstuk en een niet-ideale proefopstelling. Wat betreft het proefstuk zijn voornamelijk de variabele wanddikte en de temperatuurafhankelijkheid van de elasticiteitsmodulus, factoren, die hun invloed wel hebben doen gelden. Wat de proefopstelling betreft moeten we onderscheid maken tussen de randen en de ondersteuning. In feite zijn de randen niet vrij, maar elastisch ingeklemd. Het is niet na te gaan in hoeverre er verschil is tussen de krachten, die op de randen worden uitgeoefend in het geval van een lege of van een gevulde koker.

Of de belasting, die door de ondersteuning op de koker wordt uitgeoefend ook inderdaad voldoet aan de gestelde eisen blijft eveneens een open vraag.

Het is tevens mogelijk dat óf door de ondersteuning óf bij de uiteinden krachten op de koker in horizontale richting worden geïntroduceerd. De controle, die in het vorige hoofdstuk werd uitgevoerd, op de aanwezigheid van een dergelijke belasting, gaf inderdaad aan dat er tussen de zadels op een dwarsdoorsnede x = constant, een resulterende drukkracht zou werken.

Gezien het horizontale evenwicht is het echter onmogelijk dat deze van doorsnede tot doorsnede een andere waarde heeft en aangezien dit wel werd waargenomen moet de wijze waarop de controle is uitgevoerd in twijfel worden getrokken, aannemende dat bij de meetwaarden geen fouten zijn gemaakt.

Het zou dan ook beter zijn geweest wanneer het experiment voor een groter aantal waarden van φ zou zijn uitgevoerd. Om toch een idee te verkrijgen van de grootte van zo'n horizontaal gerichte kracht als resultante op een dwarsdoorsnede geven we dat een $\Delta \sigma m_x$ van 1 kgf/cm^2 overeenkomt met een horizontale kracht ter grootte van 37 kgf.

Anderzijds verliepen de metingen zelf ook allesbehalve naar wens. Dikwijls waren de meetwaarden uiterst slecht reproduceerbaar en waren de toleranties niet acceptabel. De oorzaak hiervan was van tweeërlei aard. Niet alleen de geringe temperatuurvariaties zorgden voor narigheid maar in ernstigere mate de geleiding van stroom door het water. Na een betere isolering van de relistrodijes en de bedrading werden de toleranties wel veel kleiner, maar ze bleven niet gering, waarmede tenslotte toch maar genoegen is genomen. Waarschijnlijk zouden we van dit effect geen last hebben gehad, wanneer we als vulvloeistof een niet geleidende vloeistof hadden genomen (b.v. petroleum). De voor het experiment beschikbare tijd liet dit echter niet toe.

Opmerkingen bij de benaderingsmethode van Donnell

De orginele differentiaalvergelijkingen XXIV, XXV en XXVI, die in hoofdstuk 5 zijn afgeleid kunnen naar W. Flügge: „Statik und Dynamik der Schalen" (Berlin 1934) na slechts geringe verwaarlozingen en met de veronderstelling $p_x = p_\varphi = 0$, geschreven worden in de volgende vorm:

$$k\nabla^8\overline{w} + (1-\nu^2)\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial\overline{x}^4} + 2k\nu\frac{\partial^6\overline{w}}{\partial\overline{x}^6} + 6k\frac{\partial^6\overline{w}}{\partial\overline{x}^4\partial\overline{\varphi}^2} + 2k(4-\nu)\frac{\partial^6\overline{w}}{\partial\overline{x}^2\partial\overline{\varphi}^4} +$$

$$+ 2k(2-\nu)\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial\overline{x}^2\partial\overline{\varphi}^2} + 2k\frac{\partial^6\overline{w}}{\partial\overline{\varphi}^6} + k\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial\overline{\varphi}^4} = \nabla^4\overline{p}_r$$

$$\nabla^4\overline{u} = -\nu\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial\overline{x}^3} + \frac{\partial^3\overline{w}}{\partial\overline{x}\partial\overline{\varphi}^2} + k\left\{-\frac{\partial^5\overline{w}}{\partial\overline{x}\partial\overline{\varphi}^4} + \frac{\partial^5\overline{w}}{\partial\overline{x}^5} - \frac{3(1-\nu)}{2}k\frac{\partial^5\overline{w}}{\partial\overline{x}^3\partial\overline{\varphi}^2}\right\}$$

$$\nabla^4\overline{v} = -(2+\nu)\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial\overline{x}^2\partial\overline{\varphi}} - \frac{\partial^3\overline{w}}{\partial\overline{\varphi}^3} + k\left(2\frac{\partial^5\overline{w}}{\partial\overline{x}^4\partial\overline{\varphi}} + 2\frac{\partial^5\overline{w}}{\partial\overline{x}^2\partial\overline{\varphi}^3}\right)$$

met: $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial\overline{x}^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\overline{\varphi}^2}$

De vergelijkingen van Donnell, die zijn toegepast op het onderhavige probleem: $\underline{XXVII}$, $\underline{XXVIII}$ en $\underline{XXIX}$, kunnen vrij eenvoudig in een gelijksoortige vorm worden gegoten, die hieronder is weergegeven:

$$k\,\nabla^8\overline{w} + (1-\nu^2)\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial\overline{x}^4} = \nabla^4\overline{P_r}$$

$$\nabla^4\overline{u} = -\nu\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial\overline{x}^3} + \frac{\partial^3\overline{w}}{\partial\overline{x}\,\partial\varphi^2}$$

$$\nabla^4\overline{v} = -(2+\nu)\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial\overline{x}^2\,\partial\varphi} - \frac{\partial^3\overline{w}}{\partial\varphi^3}$$

Door L.S.D. Morley wordt nu echter voorgesteld om de volgende vorm te gebruiken, die iets minder ver is vereenvoudigd dan de Donnell vergelijkingen.

$$k\,\nabla^4(\nabla^2+1)^2\overline{w} + (1-\nu^2)\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial\overline{x}^4} = \nabla^4\overline{P_r}$$

$$\nabla^4\overline{u} = -\nu\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial\overline{x}^3} + \frac{\partial^3\overline{w}}{\partial\overline{x}\,\partial\varphi^2}$$

$$\nabla^4\overline{v} = -(2+\nu)\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial\overline{x}^2\,\partial\varphi} - \frac{\partial^3\overline{w}}{\partial\varphi^3}$$

Wanneer we de eerste vergelijking van dit stelsel vergelijken met de eerste vergelijking van het meer exactere stelsel op de vorige bladzijde dan zien we dat alleen de term:

$$-2k(1-\nu)\left(\frac{\partial^6\overline{w}}{\partial\overline{x}^6} - \frac{\partial^6\overline{w}}{\partial\overline{x}^2\,\partial\varphi^4} - \frac{\partial^4\overline{w}}{\partial\overline{x}^2\,\partial\varphi^2}\right)$$

wordt verwaarloosd. De afzonderlijke termen hierin zijn van dezelfde orde als die, welke we bij de afleiding van de Donnell vergelijkingen hebben verwaarloosd.

Door Morley werden beide benaderingsmethoden vergeleken met de meer exacte theorie van Flügge, waarbij uiteindelijk de door Morley afgeleide vergelijkingen de beste resultaten gaven.

We zullen nu nagaan wat de verschillen zijn in sommige tussenresultaten van de beide benaderingsmethoden.
De verschillen komen het best tot uiting in de wortels λ van de karakteristieke vergelijking bij substitutie van

$$\overline{W_{m}} = \text{constante} \cdot e^{\lambda \overline{x}} \cos m\overline{\varphi}$$

in het homogene gedeelte van de eerste differentiaalvergelijking van beide stelsels.
Vooral voor lage waarden van m blijken de discrepanties aanzienlijk te zijn.

Op blz 44 zijn de wortels λ_{m_i} berekend in formule vorm, voor de gebruikte methode.
Uitwerking hiervan geeft de volgende resultaten:

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
λ_{m_1}	$7,8131 + 7,6840 \cdot i$	$8,0142 + 7,4990 \cdot i$	$8,3650 + 7,2159 \cdot i$	$8,8748 + 6,8752 \cdot i$
λ_{m_2}	$7,8131 - 7,6840 \cdot i$	$8,0142 - 7,4990 \cdot i$	$8,3650 - 7,2159 \cdot i$	$8,8748 - 6,8752 \cdot i$
λ_{m_3}	$-7,8131 + 7,6840 \cdot i$	$-8,0142 + 7,4990 \cdot i$	$-8,3650 + 7,2159 \cdot i$	$-8,8748 + 6,8752 \cdot i$
λ_{m_4}	$-7,8131 - 7,6840 \cdot i$	$-8,0142 - 7,4990 \cdot i$	$-8,3650 - 7,2159 \cdot i$	$-8,8748 - 6,8752 \cdot i$
λ_{m_5}	$-0,0651 + 0,0640 \cdot i$	$-0,2661 + 0,2490 \cdot i$	$-0,6169 + 0,5322 \cdot i$	$-1,1267 + 0,8728 \cdot i$
λ_{m_6}	$-0,0651 - 0,0640 \cdot i$	$-0,2661 - 0,2490 \cdot i$	$-0,6169 - 0,5322 \cdot i$	$-1,1267 - 0,8728 \cdot i$
λ_{m_7}	$0,0651 + 0,0640 \cdot i$	$0,2661 + 0,2490 \cdot i$	$0,6169 + 0,5322 \cdot i$	$1,1267 + 0,8728 \cdot i$
λ_{m_8}	$0,0651 - 0,0640 \cdot i$	$0,2661 - 0,2490 \cdot i$	$0,6169 - 0,5322 \cdot i$	$1,1267 - 0,8728 \cdot i$

Hierbij gold: $k = 1/12 \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2 = 0,00006087$

We gaan nu hetzelfde doen voor de theorie van Morley, alhoewel dit meer moeilijkheden met zich meebrengt.

De uit de formules van Morley volgende karakteristieke vergelijking luidt:

$$k\left(\lambda_m^2-m^2\right)^2\left(\lambda_m^2-m^2+1\right)^2+\left(1-\nu^2\right)\lambda_m^4=0$$

De acht wortels λ_m van deze vergelijking moeten nu worden bepaald.

We definiëren: $\Omega^2=\frac{1-\nu^2}{k}$ met Ω positief.

$$\rightarrow \left(\lambda_m^2-m^2\right)^2\left(\lambda_m^2-m^2+1\right)^2+\Omega^2\lambda_m^4=0$$

Stel $\Lambda=\lambda_m^2-m^2 \rightarrow$

$$\Lambda^2(\Lambda+1)^2+\Omega^2\left(\Lambda^2+2m^2\Lambda+m^4\right)=0$$

ofwel: $\Lambda^2(\Lambda+1)^2+\Omega^2\left(\Lambda+m^2\right)^2=0$

$$\rightarrow \Lambda(\Lambda+1)=\pm i\Omega\left(\Lambda+m^2\right)$$

$$\Lambda^2+(1\pm i\Omega)\Lambda \pm i\Omega m^2=0$$

$$\Lambda_{12}=\frac{-(1+i\Omega)\pm\sqrt{1-\Omega^2+2i\Omega-4i\Omega m^2}}{2}=$$

$$=-1/2-\frac{i\Omega}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{1}{\Omega^2}+\frac{i\left(2m^2-1\right)}{\Omega/2}}\right)$$

Onder het wortelteken verwaarlozen we $1/\Omega^2$ ten opzichte van 1

We krijgen dan:

$$\Lambda_{12}=-1/2-\frac{i\Omega}{2}\left(1\pm\sqrt{1+\frac{i\left(2m^2-1\right)}{\Omega/2}}\right)$$

en analoog:

$$\Lambda_{34}=-1/2+\frac{i\Omega}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{i\left(2m^2-1\right)}{\Omega/2}}\right)$$

Nu zijn ook de wortels van de karakteristieke vergelijking bekend:

$$\lambda_{m,1234} = \pm \sqrt{m^2 - 1/2 - \frac{i\Omega}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{i(2m^2-1)}{\Omega/2}}\right)}$$

$$\lambda_{m5678} = \pm \sqrt{m^2 - 1/2 + \frac{i\Omega}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{i(2m^2-1)}{-\Omega/2}}\right)}$$

We gaan nu over ~~tot~~ de numerieke berekening van deze wortels
Bij het samenstellen van de onderstaande tabel werden de indices der λ_m's zodanig gewijzigd dat ze overeenkwamen met die uit de tabel op blz 191

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
λ_{m1}	$7.7800 + 7.7165 \cdot i$	$7.9782 + 7.5306 \cdot i$	$8,3292 + 7,2430 \cdot i$	$8,8373 + 6,8979 \cdot i$
λ_{m2}	$7.7800 - 7.7165 \cdot i$	$7.9782 - 7.5306 \cdot i$	$8,3292 - 7,2430 \cdot i$	$8,8373 - 6,8979 \cdot i$
λ_{m3}	$-7.7800 + 7.7165 \cdot i$	$-7.9782 + 7.5306 \cdot i$	$-8,3292 + 7,2430 \cdot i$	$-8,8373 + 6,8979 \cdot i$
λ_{m4}	$-7.7800 - 7.7165 \cdot i$	$-7.9782 - 7.5306 \cdot i$	$-8,3292 - 7,2430 \cdot i$	$-8,8373 - 6,8979 \cdot i$
λ_{m5}	$-0,0325 + 0,0320 \cdot i$	$-0,2352 + 0,2133 \cdot i$	$-0,5824 + 0,5044 \cdot i$	$-1,0892 + 0,8502 \cdot i$
λ_{m6}	$-0,0325 - 0,0320 \cdot i$	$-0,2352 - 0,2133 \cdot i$	$-0,5824 - 0,5044 \cdot i$	$-1,0892 - 0,8502 \cdot i$
λ_{m7}	$0,0325 + 0,0320 \cdot i$	$0,2352 + 0,2133 \cdot i$	$0,5824 + 0,5044 \cdot i$	$1,0892 + 0,8502 \cdot i$
λ_{m8}	$0,0325 - 0,0320 \cdot i$	$0,2352 - 0,2133 \cdot i$	$0,5824 - 0,5044 \cdot i$	$1,0892 - 0,8502 \cdot i$

De betreffende waarde van Ω bedraagt hier:
120, 066517.

Door Morley werd aangetoond dat de wortels van de karakteristieke vergelijking bij de in zijn artikel voorgestelde methode de exacte wortels beter benaderen, dan die voorkomen uit de benaderingsmethode van Donnell.
De verschillen tussen de wortels van de exacte vergelijkingen en die van Donnell zijn dan ook bij benadering even groot als de verschillen tussen de wortels bij de methode van Donnell en die van Morley.

Wanneer we de tabel op blz 191 (Donnell) vergelijken met die op blz 193 (Morley) dan zien we slechts geringe verschillen in de wortels, die echter een vrij aanzienlijke invloed kunnen hebben.
Deze wortels komen namelijk voor in de exponent van e-machten, die op hun beurt weer voorkomen in de vergelijkingen waaruit de nog onbekende integratieconstanten met behulp van de randvoorwaarden worden bepaald: het stelsel: $a_{mj} = S_{mij}^{-1} \cdot T_{mi}$ dat op blz 74 is vermeld.
Reeds was medegedeeld dat dit stelsel slecht was geconditioneerd, waardoor een kleine variatie in de S_{mij} reeds grote gevolgen in a_{mj} kan hebben.
Het is niet onwaarschijnlijk dat dit er de oorzaak van is, dat de theorie niet aansluit bij het experiment.

Bij het zoeken naar een particuliere oplossing is in dit verslag een overbodige fout geintroduceerd. Hierbij werden namelijk eveneens de vereenvoudigde vergelijkingen van Donnell toegepast, terwijl het vrijwel even eenvoudig was geweest om hiervoor de exacte vergelijkingen, te gebruiken zoals die staan vermeld op blz 35/36.
In „The accuracy of Donnell's equations" door N. J. Hoff, wordt aangetoond dat de Donnell vergelijkingen beter niet voor de particuliere oplossing kunnen worden gebruikt in het geval dat de lengte van de koker groter is dan de diameter.

In het artikel van Morley wordt aangetoond dat de particuliere oplossing van het door Morley voorgestelde stelsel, vrijwel identiek is met de exacte particuliere oplossing.
We zullen trachten dat hier eveneens te verifieren

We gaan substitueren:

$$\overline{P_r} = \overline{P_{r_{mn}}} \cos m\overline{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

en we berekenen A_{mn} uit:

$$\overline{W} = \overline{W_{mnp}} \cos m\overline{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x} =$$

$$= A_{mn} \overline{P_{r_{mn}}} \cos m\overline{\varphi} \cos \frac{2\pi R}{L} n\overline{x}$$

Bij de exacte vergelijking van Flügge geldt:

$$A_{mn_F} = \frac{\left\{m^2 + \left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^2\right\}^2}{k\left\{m^2+\left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^2\right\}^2\left\{m^2+\left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^2-1\right\}^2 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^4 + k\,2(1-\nu)\left\{\left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^6 - \left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^2 m^4 + \left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^2 m^2\right\}}$$

Bij de benaderingsmethode van Donnell vinden we:

$$A_{mn_D} = \frac{\left\{m^2 + \left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^2\right\}^2}{k\left\{m^2 + \left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^2\right\}^4 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^4}$$

Bij de methode van Morley komt er:

$$A_{mn_M} = \frac{\left\{m^2 + \left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^2\right\}^2}{k\left\{m^2+\left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^2\right\}^2\left\{m^2+\left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^2-1\right\}^2 + (1-\nu^2)\left(\frac{2\pi R n}{L}\right)^4}$$

We gaan nu tabellen maken voor $\frac{A_{mn_D}}{A_{mn_F}}$ en $\frac{A_{mn_M}}{A_{mn_F}}$, voor verschillende combinaties van m en n.

$\frac{A_{mn_D}}{A_{mn_F}}$:

		m			
		1	2	3	4
n	1	0,1732	0,7622	0,9377	0,9773
	2	0,5630	0,5687	0,5904	0,6373
	3	0,7902	0,7904	0,7909	0,7923
	4	0,8789	0,8790	0,8790	0,8792

$\frac{A_{mn_M}}{A_{mn_F}}$:

		m			
		1	2	3	4
n	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	2	0.9996	0,9984	0.9968	0,9954
	3	0.9999	0,9997	0,9994	0,9989
	4	1,0000	0.9999	0.9998	0,9997

Uit de beide op de vorige pagina (196) gegeven tabellen blijkt heel duidelijk dat de fouten, die zijn geïntroduceerd door het gebruik van de vergelijkingen van Donnell bij de particuliere oplossing der differentiaalvergelijkingen, ontoelaatbaar zijn, terwijl de door Morley voorgestelde vergelijkingen vrijwel dezelfde resultaten geven als het exacte stelsel.

Wanneer de tijd dit toegelaten had, zou inderdaad zijn nagegaan in hoeverre de resultaten, die worden verkregen na gebruik van de formules van Morley voor zowel de homogene als de particuliere oplossing, in overeenstemming zouden zijn met de meetresultaten.
Binnen het kader van deze opdracht kunnen we dit echter alleen maar suggereren voor een eventuele voortzetting van het verrichte onderzoek, evenals de verbeteringen aan het experiment, die eerder zijn genoemd, maar niet zijn uitgevoerd.

Slotopmerking

Dit verslag wil ik beëindigen met het bedanken van alle leden van de groep „Technische Mechanica" voor de medewerking, die ik van hen bij mijn onderzoekingen heb mogen ontvangen.

Eindhoven 7 Juni 1968

WBrekelmans

W.A.M. BREKELMANS