

MASTER

Elektroconvulsietherapie

berekening van het elektromagnetische veld in de hersenen

Smulders, P.F.M.

Award date:
1985

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

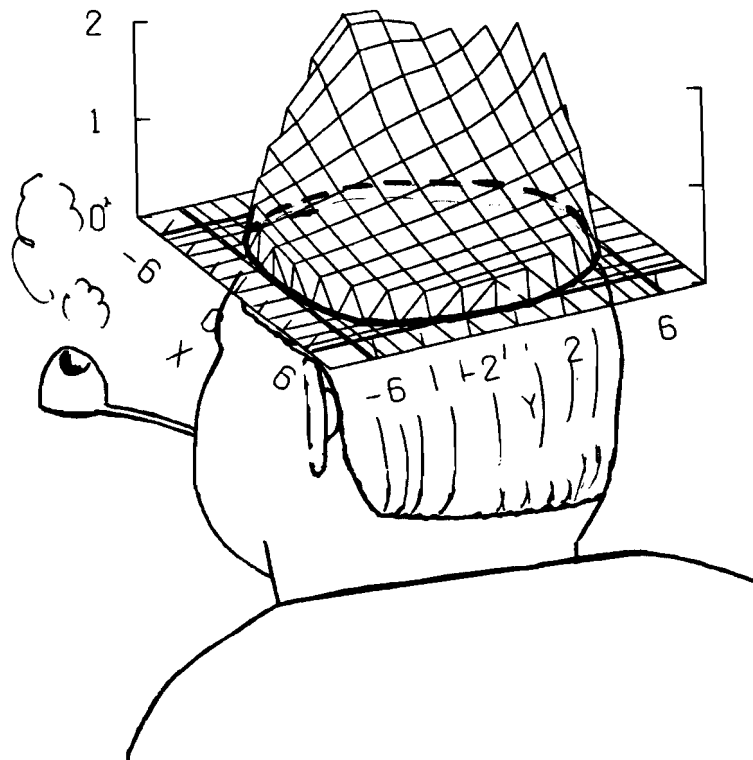
- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

ELEKTROCONVULSIETHERAPIE

Berekening van het elektromagnetische veld in de hersenen

door

P.F.M. Smulders



Rapportnummer ET-13-85

Vakgroep Theoretische Elektrotechniek

Technische Hogeschool Eindhoven

Elektroconvulsietherapie

Berekening van het elektromagnetische veld
in de hersenen

door

P.F.M. Smulders

Verslag van het afstudeerwerk in de vakgroep
Theoretische Elektrotechniek van de Technische
Hogeschool Eindhoven, afdeling der Elektrotechniek.

Onderzoekprojekt nr. ET28, Elektromagnetische stimulatie.
Projektleider: ir. Th. Scharren.

Rapportnummer: ET-13-85

Eindhoven, 29 augustus 1985.

SAMENVATTING

Het voorliggende rapport bevat een analyse van het elektromagnetische veld dat optreedt in het hoofd bij electroshock-therapie.

Hiertoe is de geometrie van het hoofd benaderd door een configuratie van drie concentrische bollen; centraal een bolvormige hersenmassa met daaromheen twee bolschillen die achtereenvolgens schedel en huid voorstellen. Elk van de onderscheiden weefsels is tijdonafhankelijk, lineair, reciprook, homogeen, isotroop, dispersief en dissipatief ondersteld. De sinusvormige stroom van willekeurige frekwentie in de toevoerdraden wordt beschouwd als primaire veldoorzaak. De elektrodes zijn puntvormig ondersteld. De elektodeplaatsing op het scheidingsvlak van de huid en lucht is willekeurig te kiezen. Voor het veld in deze configuratie wordt een analytische uitdrukking afgeleid.

Het berekende elektrische veld is in de vorm van verschillende soorten grafieken weergegeven;

1. Grafieken waarin de maximale amplitude van de veldsterkte ter plaatse van de horizontale doorsnedes wordt voorgesteld door tweedimensionale functie-oppervlakken.
2. Grafieken waarin de modulus en fase van de afzonderlijke veldcomponenten op concentrische boloppervlakken door tweedimensionale functie-oppervlakken wordt voorgesteld.
3. Grafieken waarin de richting van de veldvektor op een vlakke doorsnede en op boloppervlakken wordt weergegeven door middel van pijltjes.

Het gedeelte van de stroom dat door de hersenen vloeit is groter naarmate de elektrodes verder uit elkaar zijn geplaatst. Voorts blijkt het elektrische veld en de daarmee samenhangende stroomdichtheidsveld vanaf 50 kHz in hoge mate frekwentieafhankelijk te zijn.

Omdat experimenteel is gebleken dat de therapeutische effecten gunstiger zijn als de stimulusenergie verpakt wordt in hogere frekwentiecomponenten relatief ten opzichte van de traditionele 50/60 Hz-stimulus, is het van belang de frekwentieafhankelijkheid van het therapeutische effect te onderzoeken.

LIJST VAN SYMBOLEN

a	straal
\underline{A}	magnetische vektorpotentialiaal
$A_n, B_n \dots F_n$	coëfficiënten van het randwaardeprobleem
\underline{E}	elektrische veldfasor
f	frekwentie
\underline{F}	elektrische vektorpotentialiaal
F_ϕ	getransformeerde ϕ -component van F
$F_{n\text{part}}$	particuliere oplossing van F
\underline{H}	magnetische-veldfasor
$h_n^{(a)}$	sferische Hankelfunctie
$H_n^{(b)}$	Hankelfunctie
i_0	opgedrukte tijdafhankelijke stroom
j	imaginaire eenheid
J_n	sferische Besselfunctie
J_n	Besselfunctie
J_0	opgedrukte, elektrische volumestroomdichtheid
κ	golfgetal
P_n	Legendrepolynoom
q_0	opgedrukte elektrische lading
r	r-coördinaat
U	eenheids-stapfunctie
\underline{u}	eenheidsvektor
W	determinant van Wronski
x	x-coördinaat
y	y-coördinaat
z	z-coördinaat
δ	deltafunctie
ϵ	complexe permittiviteit
ϕ	ϕ -coördinaat in het sferische stelsel
ζ	scalaire potentialiaal
κ	permittiviteit relatief ten opzichte van die van vacuüm
Ψ	scalaire potentialiaal
θ	θ -coördinaat in het sferische stelsel
μ	permeabiliteit
ω	hoekfrekwentie
∇	nabla-operator

LIJST VAN INDICES

n	n-de element uit de reeks
x	x-component
y	y-component
z	z-component
r	r-component
ρ	ρ -component
e	e-component

INHOUD

	pagina
1. Inleiding	1
2. Modelvorming en probleemstelling	7
2.1 Resulterende probleemstelling	10
3. Analyse	12
3.1 Opbouw van de analyse	13
3.2 Model met een actieve rand	17
3.3 Model met een actieve- en een passieve rand	23
3.4 Ontaarding van het twee-randenmodel	24
3.5 Het probleem met één actieve- en twee passieve randen	25
3.6 Drie-bollenmodel met twee elektrodes	29
3.7 Analyse met betrekking tot de numerieke verwerking	32
3.8 Bewijzen	37
3.9 Bepaling van $F(r, \theta, \varphi)$ met behulp van additietheorema's	41
4. Numerieke resultaten	46
4.1 Elektrodeposities	46
4.2 Representatie van de resultaten	47
4.3 Parameterwaarden	50
4.4 Resultaten	52
4.5 Gevoeligheidsanalyse	77
4.5.1 Variatie van de elektrodeposities	77
4.5.2 Variatie van de relatieve permittiviteiten	80
4.5.3 Variatie van de geleidingscoëfficiënten	80
5. Conclusies en discussie	84
Referenties	88
Bijlagen	
I De stimulusstroom	90
II Blokschema van het computerprogramma	93

1. INLEIDING

Het voorliggende rapport betreft de Elektro Convulsie Therapie (ECT), ook bekend als "electroshock-therapie". Dit is een medische behandeling waarbij het lichaam van de patiënt in een krampachtige toestand (convulsie) wordt gebracht met behulp van elektrische stromen die op een kunstmatige manier in de hersenen worden opgewekt met het doel bepaalde psychische ziektebeelden therapeutisch te beïnvloeden.

Algemene beschouwing

Rond 1930 werd door diverse onderzoekers de hypothese gelanceerd dat epilepsie en schizofrenie twee ziekten waren die elkaar uitsloten. Om een krankzinnige te genezen moest men hem tot epilepticus maken. Om epilepsie op te wekken werden in de jaren dertig achtereenvolgens insuline, cardiazol en elektrische stroomstoten gebruikt. De insulineshock was weinig economisch, omdat door de risico's van de behandeling voortdurend toezicht van verpleegkundigen vereist was. De cardiazolshock waarbij patiënten met een soort kamferolie werden geïnjecteerd gaf op zijn beurt veel weerstand. Inspuiting met dit middel bracht extreme angst met zich mee. De electroshock werd als een verbetering van de chemoshock-therapieën opgevat en werd al snel de meest toegepaste behandeling in gestichten. In de jaren vijftig werd één op de vijf patiënten met ECT behandeld. In de literatuur komen we artikelen tegen als "Honderd gevallen van schizofrenie bij kinderen behandeld met electroshock op drie-jarige leeftijd" 1955. De shock werd als panacee beschouwd; ECT leek een wondermiddel tegen uiteenlopende kwalen als astma, maagzweren, depressies, alcoholisme en epilepsie.

Twee theorieën over de electroshock speelden een centrale rol in de beginjaren.

De eerste is somatisch georiënteerd en staat bekend als de theorie van de kunstmatige dementie. Veel onderzoekers stelden vast dat de shock onherstelbare schade aan de hersenen toebracht. Juist deze schade werd verantwoordelijk geacht voor het heilzame effect van de shock op het brein van de gek.

De tweede theorie staat bekend als de theorie van de therapeutische angst. Door de patiënt vrees aan te jagen werd een appel op de drift tot zelfbehoud gedaan. Voorts werd angst tevens

heilzaam geacht doordat de patiënt van overmatige schuldgevoelens werd bevreed.

De therapieën die de shock legitimeerden getuigen niet bepaald van respect voor de integriteit van de patiënt. De electroshock werd in de directe vorm toegediend: zonder narcose en zonder spierverslappers. Voorts ontbrak het dikwijls aan discretie en privacy: medepatiënten waren nogal eens getuige van ECT, omdat er "op zaal" geshockt werd. Bovendien leidden gebreken in de apparatuur er niet zelden toe dat de shock er niet goed doorkwam. De patiënt raakte dan niet meteen buiten bewustzijn en had het gevoel dat zijn hoofd explodeerde.

Huidige voorstanders van de electroshock geven grif toe dat de shock in het verleden een wrede behandeling was, om vervolgens te benadrukken dat het shocken tegenwoordig anders gaat. Zij wijzen voor de shock nieuwe stijl op het "Advies inzake elektroconvulsietherapie" (1983), een rapport van de Gezondheidsraad. De conclusies en aanbevelingen van dit rapport komen grosso modo overeen met het regeringsstandpunt over de shock dat medio 1984 werd geformuleerd.

Wat leren deze documenten ons over de metamorfose van de shock? Allereerst, dat de patiënt onder narcose wordt gebracht en hem spierverslappers worden toegediend.

Ten tweede leren we dat de patiënt naar zijn mening wordt gevraagd. Geeft hij geen toestemming, dan gaat de shocktherapie in principe niet door. Bij een weigering kan de psychiater echter toch tot shocken besluiten. De patiënt heet dan zo verward te zijn dat hij "onoordeelkundig" is.

Ten derde mag de electroshock alleen nog worden toegepast binnen het indicatiegebied van het vitaal-depressieve syndroom; een zodanige diepgaande depressie dat stoornissen in de lichamelijke sfeer een belangrijke rol gaan spelen tezamen met het gevoel van somberheid. Behandeling is dan slechts toegestaan als er gevaar is voor zelfmoord en zelfverminking en er van medicamenteuze of andere therapie onvoldoende baat wordt verwacht.

Tenslotte: ECT mag slechts plaats vinden in academische ziekenhuizen, omdat daar de kennis en apparatuur het meest up-to-date is.

Betekent de humanisering van de shock in Nederland dat ECT acceptabel is geworden? Tegenstanders vinden van niet en voeren daartoe de volgende argumenten aan:

Een bekend fenomeen in het shockdebat is het vraagstuk van de geheugenstoornissen. Geshockte patiënten klagen nogal eens over gaten in hun geheugen.

Angst voor de shock is het tweede argument dat de tegenstanders naar voren brengen. De angst voor ECT heeft volgens de Gezondheidsraad te maken met de vrees voor elektriciteit: "In het dagelijks leven blijkt er bij vrijwel iedereen een grote, deels irrationele, angst te bestaan voor elektriciteit. Men kan elektriciteit niet zien, weet niet of iets onder spanning staat en begrijpt meestal niet wat er zich afspeelt".

Een derde bezwaar tegen ECT betreft het werkingsmechanisme. Allerhande onderzoek heeft in de afgelopen halve eeuw niet vermogen duidelijk te maken hoe de electroshock werkt. De tijd dat het toebrengen van hersenschade en het opwekken van angst therapeutisch werden geacht ligt achter ons.

Moderne theorieën zien in de shock een beïnvloeding van microsysteempjes in de hersenen, "neurotransmitters" genaamd. Dat het hier om speculaties gaat maakt het advies van de Gezondheidsraad duidelijk: "somatische en psychische activiteiten...gaan alle gepaard met een bepaald activiteitspatroon in de hersenen dat wij nog niet in toto kunnen analyseren... Onze kennis omtrent transmittersystemen is fragmentarisch". (Gezondheidsraad [1]).

Dit verslag is dan ook ontstaan vanuit de gedachte dat gefundeerd onderzoek naar de grootte en vorm van de stroomdichtheid in het hersenweefsel een noodzakelijke prelude is voor het onderzoek naar de werkingsmechanismen van de electroshock.

Voorgaand onderzoek

Ter bepaling van de stroomdichtheid in de hersenen gebruikte Smitt en Wegner [2] kadavers, terwijl Hayes [3] dit probleem bestudeerde door middel van metingen in de hersenen van een levende spinaap. Rush en Driscoll [4,5] maakten gebruik van een theoretisch model, waarbij het hoofd werd benaderd als een configuratie van drie concentrische bollen; centraal een bolvormige homogene hersenmassa, daaromheen twee bolschillen die respectievelijk schedel en huid voorstellen. De stroom werd als tijdonafhankelijk beschouwd. Ter bepaling van de elektrische eigenschappen van de betrokken weefsels hebben zij aanvullende metingen verricht. Geddes en Baker [6] hebben een compendium samengesteld betreffende de elektrische eigenschappen van biologische weefsels. Een schatting van de permittiviteit bij

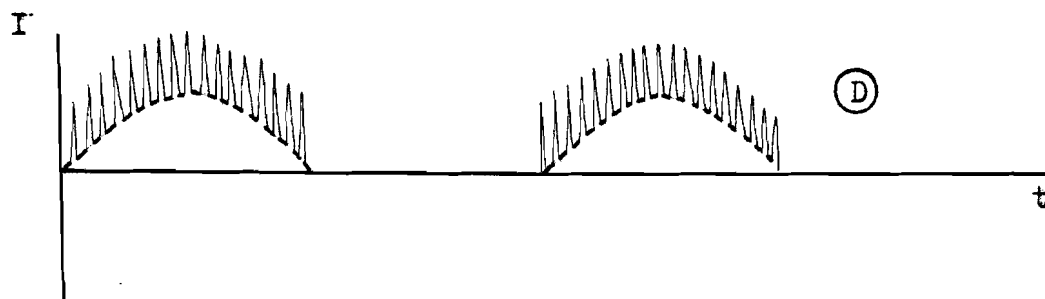
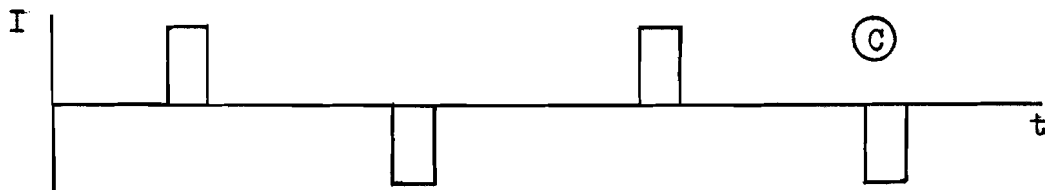
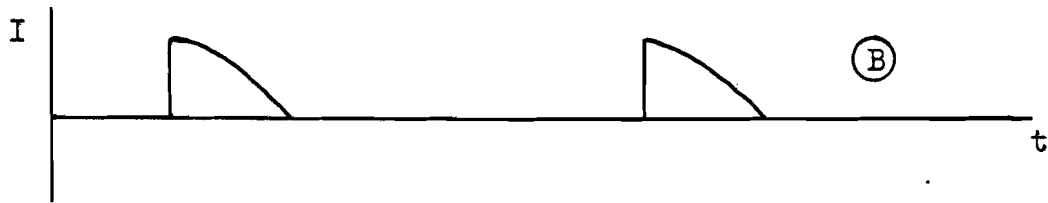
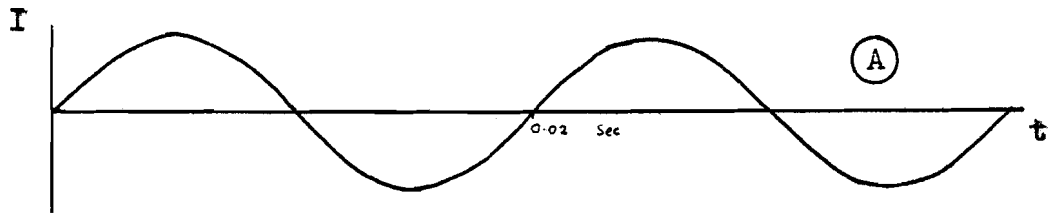
lage frekwenties wordt gegeven door Guy en Johnson [7].

Als vanoudsher meest toegepaste stimulus geldt de sinusvormige stroom, zoals is weergegeven in figuur 1A, met een frekwentie gelijk aan die van het lichtnet (50-60 Hz). De keuze van deze gegevens is niet gebaseerd op onderzoeksresultaten met betrekking tot de therapeutische effectiviteit doch heeft slechts te maken met het feit dat het ontwerp en de bouw van de stimulatie-apparatuur er eenvoudiger en goedkoper op wordt (Weaver [8]). De laatste jaren experimenteert men met stimulussignalen waarin ook hogere frekwentiecomponenten vertegenwoordigd zijn. De Siemens Konvulsator III produceert een groep van vier (afgeronde) zaagtandpulsen die ieder 5 msec breed zijn. (zie figuur 1b). De interpulsintervallen bedragen 15 msec en de pauze tussen de bursts is 97 msec. Waarom voor deze configuratie is gekozen is niet duidelijk.

Een apparaat dat in algemeen gebruik is in Amerika is de Reiter CW 47. De geproduceerde stimulus heeft twee componenten: een gelijkgerichte 60 Hz sinusgolf (negatieve gedeelte wordt nul) en op de positieve helft van de sinus, 30-50 scherpe pulsen gesuperponeerd. (dit is weergegeven in figuur 1c).

Een derde voorbeeld is het gebruik van de Low Energy Brief pulse Stimulus (LEBS), weergegeven in figuur 1d. Dit signaal van rechthoekige pulsen met bijvoorbeeld een pulsbreedte van 1 msec en een 10 msec interpulsinterval werd door Weaver [8] vergeleken met de conventionele sinusgolfstimulus in termen van effectiviteit aangaande het opwekken van krampaanvallen. Zij rapporteerden een lagere convulsiedrempel bij de LEBS in vergelijking met de 50 Hz-stimulus. Bij de LEBS werden convulsies opgewekt waarbij het bedrag aan toegevoerde energie slechts ongeveer de helft was van de energie bij de 50 Hz-stimulus.

Met het oog op de periodiciteit van het stimulussignaal is het van belang te weten, of er zich frekwentiecomponenten in het stimulussignaal bevinden, waarbij de relatieve permittiviteit ten opzichte van die van vacuüm κ van niet te verwaarlozen invloed is op het totale stroomdichtheidsveld. In dat geval mag ter berekening van dit stroomdichtheidsveld immers niet worden uitgegaan van de statische benaderingsmethode, zoals toegepast door Rush en Driscoll. De materiaaleigenschappen van de betrokken weefsels spelen hierbij een belangrijke rol. Indien we het hersenweefsel als homogeen en dissipatief beschouwen, dan kunnen er geen lokale concentratieverschillen van vrije lading blijven bestaan.



Figuur 1 In de klinische praktijk gangbare stroomvormen

Een ladingsverdeling vervalst exponentieël als funktie van de tijd volgens de voor het materiaal karakteristieke relaxatietijd τ gegeven door

$$\tau = \frac{\epsilon_0 K}{\sigma} ,$$

waarbij σ de geleidingscoëfficiënt voorstelt. Voor hersenweefsel en ook alle andere betrokken weefsels (huid, bot) geldt dan

$$\tau = 10^{-5} \text{ sec.}$$

Indien de periodetijd van de beschouwde frekwentiecomponent kleiner of in dezelfde orde van grootte van deze relaxatietijd is, treden retardatieverschijnselen op. Ruwweg kan worden gesteld dat voor frekwentiecomponenten boven de 50 kHz de statische benadering van Rush en Driscoll niet meer goed voldoet. Dit is het geval bij het in Amerika gebruikte stimulussignaal dat voor een groot deel is opgebouwd uit harmonischen boven de 60 kHz. Ook omdat er indicaties zijn dat signalen met hogere frekwentiecomponenten een gunstiger uitwerking hebben is het überhaupt van belang het stroomdichtsheidsveld te berekenen per frekwentiecomponent van de stimulusstroom bij willekeurig te kiezen frekwentie.

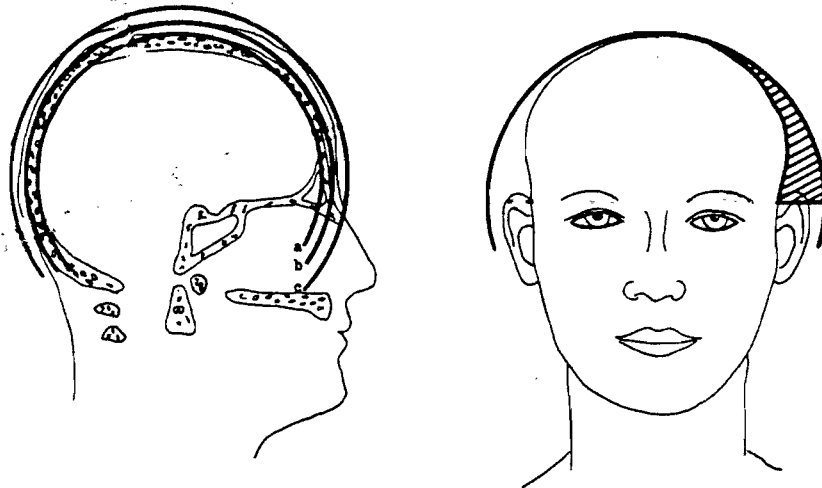
Het onderzoek behelst het op analytische wijze exact berekenen van het dynamische probleem, teneinde het veldgedrag als funktie van de elektrodeposities, elektrische parameters en de frekwentie van de stimulusstroom te kunnen bestuderen. Vanwege deze exactheidseis dient het hoofd te worden benaderd door een eenvoudige geometrie. Het resultaat is mede een toetsingsmogelijkheid voor numeriek onderzoek waarbij de werkelijke geometrie in rekening wordt gebracht.

2. MODELVORMING EN PROBLEEMSTELLING

Bij de modelvorming staat de vraag centraal op welke wijze de complexe structuur van het hoofd benaderd dient te worden opdat een stroomdichtheidsveld analytisch en betrouwbaar berekend kan worden.

De elektromagnetische eigenschappen van weefsels worden weergegeven met behulp van de permittiviteit κ relatief ten opzichte van die van vacuüm, de permeabiliteit μ_r , relatief ten opzichte van die van vacuüm en de geleidingscoëfficiënt σ . Het blijkt dat de permeabiliteit van levende weefsels gelijk is aan die van vacuüm, dus $\mu_r=1$.

Uit de literatuur blijkt dat het hoofd in eerste aanleg opgebouwd kan worden gedacht uit drie wefsellagen; het hersengebied, daaromheen een botlaag en aan de buitenkant de huidlaag (Rush en Driscoll [4,5]. Indien de lagen als concentrische bolvormige gebieden worden gemodelleerd waarvan de radii van de interfaces volgens Weaver [9] 8.0, 8.5 en 9.2 cm bedragen, wordt de geometrie van het hoofd goed benaderd. Figuur 2 geeft hiervan een indruk.



Figuur 2 Benadering van het hoofd door het drie-bollenmodel

Het hersenweefsel kan bij benadering als homogeen worden beschouwd. In de literatuur is niets te vinden over eventuele anisotrope eigenschappen van hersenweefsel.

Voor wat betreft de schedel die het geheel van de hersenen omvat concludeerde Weaver [9] aan de hand van resultaten verkregen uit impedantiemetingen, dat het botweefsel homogeen en isotroop is. Rush en Driscoll [4] en Chakkalakal [10] hebben in een later stadium anisotrope eigenschappen van het botweefsel aangetoond. De huidlaag kan volgens Rush en Driscoll [4] en Weaver [9] worden beschouwd als homogeen en isotroop.

Volgens Kritikos [11] is de frekwentie-afhankelijkheid van de geleidingscoëfficiënten van de betreffende weefselsoorten voor frekwenties tot 10 MHz te verwaarlozen. De uitkomsten van het onderzoek naar de waarden van de geleidingscoëfficiënten van hersen-, bot- en huidweefsel zijn in tabel 1 weergegeven.

Tabel 1 Geleidingscoëfficiënt (σ) van
 hersen-, bot- en huidweefsel

referentie	σ_{hersen}	σ_{bot}	σ_{huid}
Rush & Driscoll [4]	0.435	0.003-0.02 transversaal 0.025-0.2 parallel	0.435
Weaver [9]	0.455	0.006	0.450
Geddes & Baker [6]	0.364		
Chakkalakal [11]		0.006-0.007 transversaal 0.021-0.022 parallel	

De permittiviteit relatief ten opzichte van die van vacuüm κ van hersen- en huid weefsel is in hoge mate afhankelijk van de frekwentie. De waarde van κ is volgens Heiter [12] voor hersen- en huidweefsel vrijwel gelijk. In tabel 2 is κ als functie van de frekwentie weergegeven.

Tabel 2 Relatieve permittiviteit (κ)
van hersen- en huidweefsel
als functie van de frekwentie [13]

f (Hz)	κ
10	$6,56 \cdot 10^6$
10^2	$5,25 \cdot 10^5$
10^3	$8,54 \cdot 10^4$
10^4	$3,94 \cdot 10^4$
10^5	$1,31 \cdot 10^4$
10^6	$9,53 \cdot 10^2$
10^7	$1,05 \cdot 10^2$

De relatieve permittiviteit van het botweefsel is volgens Chakkalakal [10] ongeveer 1600 bij een frekwentie van 100 Hz. In het gehele frekwentie gebied geldt volgens Heiter [12] en Reddy [13]: $\kappa_{bot} \ll \kappa_{hersen}$

Omdat de soortelijke weerstand in de huidlaag en het hersengebied veel groter is dan die in de botlaag, in zowel transversale richting als parallel aan het oppervlak, is te verwachten dat het stroomdichtheidsveld in de botlaag met name in de buurt van de elektrodes voornamelijk transversaal (dwars op de weefsellagen) gericht zal zijn. Daarom kan de botlaag bij de analyse als isotroop worden beschouwd, waarbij de waarde van de geleidingscoëfficiënt gelijk wordt gesteld aan de waarde van de transversale component. Blijkens tabel 1 vertoont σ een spreiding in de gemeten waarden en voor de getalwaarde van κ is slechts één referentie voorhanden. Daarom is een gevoeligheidsanalyse voor deze parameters noodzakelijk.

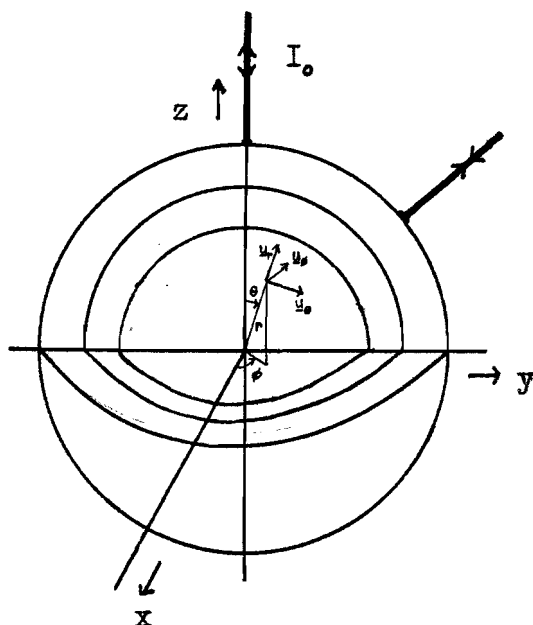
De elektrodes worden uitwendig aangebracht. De oppervlakken zijn dermate klein, dat een puntvormig contactoppervlak als benadering geoorloofd is. In de klinische praktijk zijn grofweg twee shockmethodieken gangbaar; unilateraal ECT en bilareraal ECT. Bij unilaterale elektrodeplaatsing wordt gewoonlijk een elektrode

tussen oog en oor geplaatst (fronto-temporale plaatsing) en een elektrode boven op het hoofd (vertex plaatsing). Bij bilaterale elektrodeplaatsing zijn de elektrodes aan weerszijden van het hoofd fronto-temporaal aangebracht.

De stroomvorm is bij de hedendaagse ECT niet meer sinusvormig. Stroomvormen en bijbehorende frekwentiespectra zijn in bijlage I weergegeven. Omdat de materie lineair is verondersteld, kan het stroomdichtheidsveld per harmonische van de stimulus worden berekend. Door fouriertransformatie kan dan het stroomdichtheidsverloop in de plaats-tijdruimte worden verkregen.

2.1 Resulterende probleemstelling

We gaan uit van de bolvormige geometrie zoals geschetst in figuur 2. Het binnengebied bestaat uit hersenweefsel, omgeven door een botlaag met daaromheen een huidlaag. Het geheel is geplaatst in vacuüm.



Figuur 2 Geometrie van het model

Elk van de onderscheiden weefsels is:

- tijdonafhankelijk;
- lineair;
- reciprook;
- homogeen;
- isotroop;
- dispersief;
- dissipatief.

Omdat de relatieve permittiviteit ϵ van huid- en hersenweefsel erg groot is, mag er niet op voorhand van worden uitgegaan dat een statische benadering kan worden toegepast. We zijn zodoende op zoek naar het elektromagnetische veld binnen de bolconfiguratie dat optreedt ten gevolge van een sinusvormige stroom van willekeurige frekwentie door de toevoerleidingen. Deze stroom wordt dus gezien als de primaire bron. Voor het gemak veronderstellen we rechte, oneindig dunne- en halfoneindig lange stroomdraden in het buitengebied en eindigend loodrecht op het scheidingsvlak tussen huid en lucht. Het moet mogelijk zijn de plaatsen van de elektrodes willekeurig te kiezen. Via de beide stroombronnen wordt op het scheidingsvlak tussen huid en lucht lading opgedrukt. Bij harmonisch varieërende stroom wisselen volgens de continuïteitsrelatie de daarmee verbonden ladingen op de puntelektrodes eveneens harmonisch en tegengesteld ten opzichte van elkaar. Naast voornoemde kunstmatige bronnen zijn er ook natuurlijke bronnen. Omdat de bijdrage van deze bronnen echter relatief gering is worden deze buiten beschouwing gelaten. Het elektromagnetische veld dat in dit randwaardeprobleem optreedt kan worden beschouwd als een superpositie van de elektromagnetische velden ten gevolge van de afzonderlijke bronstromen.

Ter bepaling van het elektromagnetische veld zal gebruik worden gemaakt van integraaltransformaties.

3. ANALYSE

De opgedrukte, tijdafhankelijke stroom door een elektrode, met sterkte $i_0 : \{t\}, \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, heeft een complex amplitudespectrum $I_0 : \{\omega\}, \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{C}$, gegeven door de fourierintegraal

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} i_0 \exp(-j\omega t) dt. \quad (3.1)$$

De responsie van de weefsels waaruit het hoofd is samengesteld, op deze stroom is het elektromagnetische veld $(\underline{E}, \underline{H})$. Op zijn beurt heeft het veld op een plaats r het spectrum

$$\begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{H} \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{H} \end{pmatrix} \exp(-j\omega t) dt, \quad (3.2)$$

waarbij elke component een complexe funktie is volgens

$$E_i, H_i : \{r, \omega\}, \mathbb{R}_4 \rightarrow \mathbb{C}. \quad (3.3)$$

Het spectrale veld voldoet aan de vergelijkingen van Maxwell voor de plaats-frekwentieruimte, gegeven door

$$\text{rot } \underline{E} + j\omega\mu \underline{H} = \underline{0} \quad (3.4A)$$

$$\text{rot } \underline{H} - j\omega\varepsilon \underline{E} = \underline{J}_0 \quad (3.4B)$$

$$\text{div } \underline{J}_0 = -j\omega\rho_0, \quad (3.4C)$$

Waarbij de opgedrukte, elektrische volumestroomdichtheid \underline{J}_0 op een nader aan te geven manier met de spectrale stroomsterkte I_0 samenhangt. De (equivalente), opgedrukte dichtheid van elektrische lading ρ_0 is bij gegeven dichtheid \underline{J}_0 uit betrekking 3.4C bekend. Stelsel 3.4 geldt in een inwendig punt van een deelgebied. Ter plaatse van een deelgebied nemen de materieparameters ε en μ de bijbehorende getalwaarden aan. Blijkens de gegevens van hoofdstuk 2 is daarbij te stellen dat

$$\begin{aligned} \mu &:= \mu_0 \\ \varepsilon &:= \varepsilon_0 \kappa - j\sigma/\omega, \end{aligned} \quad (3.5)$$

waarin κ en σ reële funkties van de frekwenties zijn:

$$K, \sigma : \{\omega\}, \mathbb{R}, \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Er is aangenomen dat de overgangen tussen de weefsellagen abrupt zijn. In een punt van een scheidingsvlak S van twee weefsellagen voldoen de spectrale velden aan de randvoorwaarden. Deze scheidingsvlakten zijn passief, hetgeen wil zeggen dat daar geen opgedrukte oppervlakteladingen of -stromen aanwezig zijn. Voor elk van deze vlakken geldt dan dat de plaatselijke tangentiële componenten van \underline{E} en \underline{H} doorlopend zijn:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\text{tang}i} &= \underline{E}_{\text{tang}i+1} \\ \underline{H}_{\text{tang}i} &= \underline{H}_{\text{tang}i+1} \end{aligned} \quad r \in S_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

In paragraaf 3.1 zal ingegaan worden op de beschrijving van de actieve rand in ons probleem, te weten het scheidingsvlak van huidweefsel en lucht. Hierop zijn de elektrodes immers aanwezig. Tenslotte moet de oplossing van het randwaardeprobleem in elk inwendig punt van een deelgebied voldoen aan de eis van de begrensde, spectrale elektrische en magnetische energiedichtheid:

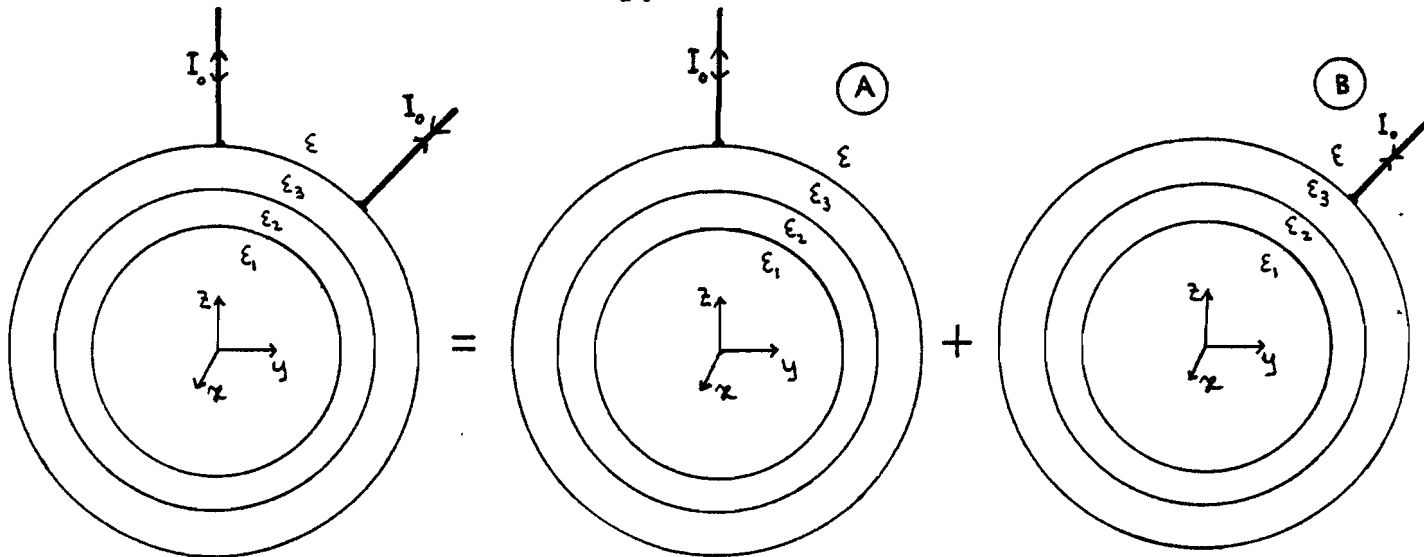
$$\begin{aligned} \epsilon \underline{E} \cdot \underline{E}^* \\ \mu \underline{H} \cdot \underline{H}^* \end{aligned} \quad \text{begrensd} \quad (3.8)$$

Bij gegeven amplitudespectrum van de opgedrukte stroom wordt de opgewekte veldconfiguratie $(\underline{\xi}, \underline{\chi})$ uit de oplossing $(\underline{E}, \underline{H})$ van het randwaardeprobleem gevonden door fourierinversie volgens

$$\begin{pmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\chi} \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{H} \end{pmatrix} \exp(j\omega t) d\omega \quad (3.9)$$

3.1 Opbouw van de analyse

Het randwaardeprobleem van figuur 3 is te splitsen in twee deelproblemen. Deze splitsing is weergegeven in figuur 4. Bij elk deelprobleem is er nog slechts sprake van één stroomdraad.



Figuur 4 Splitsing van het randwaardeprobleem

In eerste aanleg bepalen we het elektromagnetische veld waarbij de stroomdraad gelegen is langs de positieve z-as (figuur 4A). Er is dan sprake van

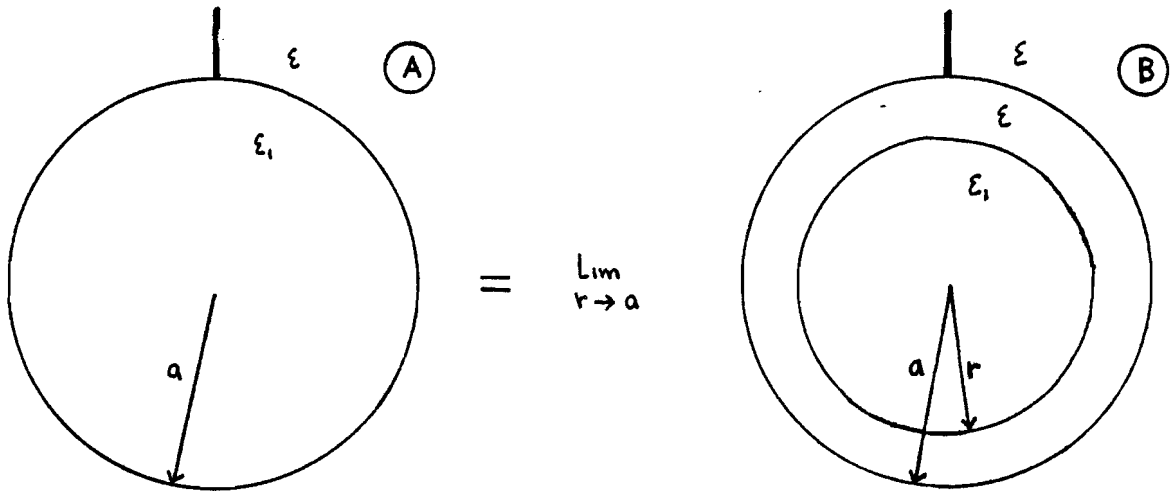
- een axiaal symmetrische geometrie,
- een ϕ -onafhankelijk elektromagnetisch veld.

Daarna wordt het elektromagnetische veld bepaald voor de situatie van figuur 4B door middel van een coördinatentransformatie. De veldoplossingen van het gehele probleem worden verkregen door superpositie van de elektromagnetische velden van de afzonderlijke situaties A en B.

Door coördinatentransformatie lukt het om het niet-symmetrische en ϕ -onafhankelijke veldprobleem te vereenvoudigen tot een axiaal-symmetrisch, ϕ -onafhankelijk veldprobleem.

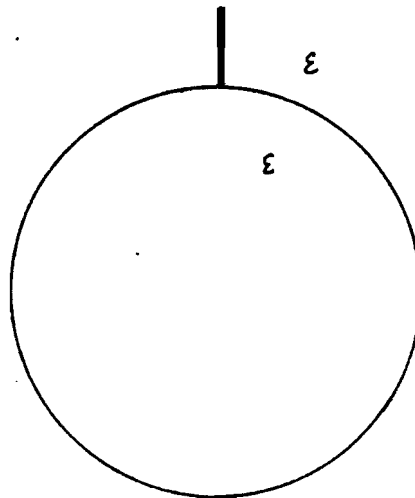
We hebben te maken met een actieve rand (buitenrand) en twee passieve randen. Wat betreft de randvoorwaarden vormen de passieve randen geen probleem. Bij deze randen geldt immers de continuïteit van de tangentiële veldcomponenten. De kwestie is nu het bepalen van de randvoorwaarden bij de actieve rand. We beperken ons tot dit probleem door in eerste aanleg de passieve randen weg te laten. Op deze wijze wordt het "kerstbalmode" verkregen. Dit model is in principe een voldoende eenvoudig randwaardeprobleem om daarvan rechtstreeks het elektromagnetische veld te bepalen. We kunnen dit model echter nog verder vereenvoudigen door in het gebied dat omsloten wordt door de actieve rand een scheidingsvlak te introduceren, zodanig dat aan beide zijden van de actieve rand de complexe permittiviteit dezelfde is. Het kerstbalmode is dan de ontaarding van deze geometrie indien de passieve binnenrand tot de actieve buitenrand

nadert. Dit is weergegeven in figuur 5.



Figuur 5 "Kerstbalmodel" als ontganding van het twee-bollenmodel

De bepaling van de randvoorwaarden op de actieve rand in figuur 5B leidt tot de configuratie van figuur 6.



Figuur 6 Geometrie met fiktieve rand

Een voordeel van de vereenvoudiging tot de configuratie van figuur 6 is de mogelijkheid om, naast de bepaling van het elektromagnetische veld door middel van integraaltransformaties, het probleem op te lossen met behulp van additietheorema's. Een toets op de juistheid van het eindresultaat is zodoende mogelijk.

Het traject dat bij de analyse zal worden gevolgd is schematisch weergegeven in figuur 7.

paragraaf 3.2

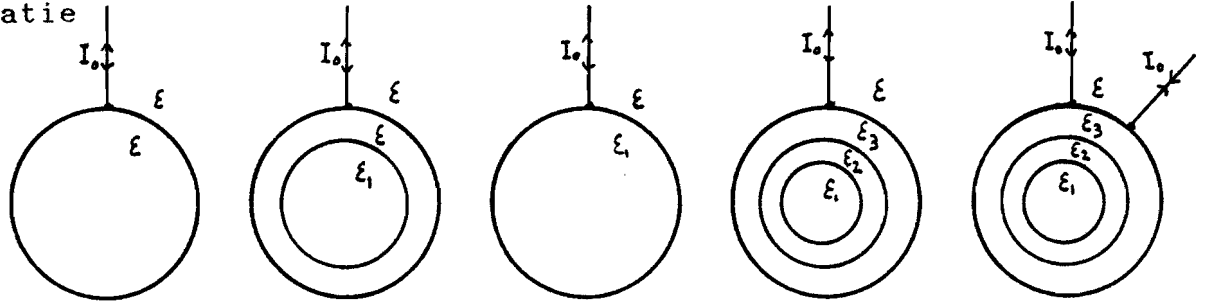
3.3

3.4

3.5

3.6

configuratie



Figuur 7 Berekeningstraject

In paragraaf 3.2 wordt uitgegaan van de configuratie met een bolvormige rand. De permittiviteit van het binnengebied is dezelfde als die in het buitengebied. De primaire bron is een sinusvormige stroom I_0 in een rechte, oneindig dunne stroomdraad die vanuit $z = \infty$ via de z -as loopt naar de fiktieve bol. Het resultaat wordt in paragraaf 3.9 met behulp van additietheorema's geverifieerd. In paragraaf 3.3 is deze configuratie uitgebreid met een passieve bolvormige rand binnen het gebied dat omsloten wordt door de actieve rand. De passieve rand vormt het scheidingsvlak van twee gebieden met onderling verschillende permittiviteit.

In paragraaf 3.4 wordt de situatie beschouwd waarbij de afstand van de actieve- tot de passieve rand naar nul nadert. Op deze wijze wordt een configuratie verkregen waarbij een actieve rand het scheidingsvlak vormt tussen twee gebieden met onderling verschillende permittiviteit.

In paragraaf 3.5 is deze configuratie uitgebreid met twee passieve concentrische scheidingsvlakken binnen het gebied dat omsloten wordt door de actieve rand. De vier gebieden die zo ontstaan worden gekarakteriseerd door onderling van elkaar verschillende permittiviteiten.

In paragraaf 3.6 wordt een tweede stroom door een oneindig dunne stroomdraad als primaire bron toegevoegd.

Met het oog op de numerieke verwerking wordt in paragraaf 3.7 het numerieke gedrag van de uitdrukkingen voor het elektromagnetische veld besproken.

Bij de analyse is uitgegaan van enkele stellingen die in paragraaf 3.8 worden bewezen.

3.2 Model met een actieve rand

De opgedrukte volumestroomdichtheid in cartesische coördinaten wordt gegeven door

$$\underline{J}_0 = \underline{u}_z I_0 \delta(x) \delta(y) U(z-a).$$

In sferische coördinaten (zie figuur 2) is deze te schrijven als

$$\underline{J}_0 = \underline{u}_r \frac{I_0}{\pi r^2 \sin \theta} \delta(\theta) U(r-a). \quad (3.10)$$

We willen het probleem beschrijven met behulp van vektorpotentialen en gaan hiertoe uit van de vergelijkingen van Maxwell:

$$\text{rot } \underline{E} + j\omega\mu_0 \underline{H} = \underline{0} \quad (3.4A)$$

$$\text{rot } \underline{H} - j\omega\varepsilon \underline{E} = \underline{J}_0. \quad (3.4B)$$

Hierin is \underline{J}_0 gegeven door formule 3.10.

Deze vergelijkingen worden als volgt herleid: Neem de divergentie van de vergelijkingen 3.4A en B

$$\text{div } \underline{H} = 0$$

$$\text{div} \left(\underline{E} + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \underline{J}_0 \right) = 0.$$

Elk divergentievrij vektorveld is de rotatie van een ander vektorveld, zodat

$$\underline{H}_m = \text{rot } \underline{A} \quad (3.11A)$$

$$\underline{E}_e = \text{rot } \underline{F} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \underline{J}_0. \quad (3.11B)$$

Vergelijking 3.11A ingevuld in 3.4A en 3.11B ingevuld in 3.4B levert

$$\underline{E}_m = -j\omega\mu_0 \underline{A} - \text{grad } \psi \quad (3.12A)$$

$$\underline{H}_e = j\omega\varepsilon \underline{F} + \text{grad } \mathcal{J}. \quad (3.12B)$$

Door substitutie van 3.11A tezamen met 3.12A in 3.4B, en 3.11B tezamen met 3.12B in 3.4A ontstaat

$$\text{rot rot } \underline{A} + j\omega\varepsilon (j\omega\mu_0 \underline{A} + \text{grad } \psi) = \underline{J}_0 \quad (3.13A)$$

$$\text{rot rot } \underline{E} + j\omega\mu_0 (j\omega\varepsilon \underline{E} + \text{grad } \zeta) = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \text{rot } \underline{J}_0. \quad (3.13B)$$

Met invoering van $\kappa^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ zijn 3.13A en 3.13B verder te herleiden tot

$$\nabla^2 \underline{A} + \kappa^2 \underline{A} - \text{grad}(\text{div } \underline{A} + j\omega\varepsilon \psi) = -\underline{J}_0 \quad (3.14A)$$

$$\nabla^2 \underline{E} + \kappa^2 \underline{E} - \text{grad}(\text{div } \underline{E} + j\omega\mu_0 \zeta) = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \text{rot } \underline{J}_0. \quad (3.14B)$$

Door toepassing van de Lorentz-ijk

$$\text{div } \underline{A} + j\omega\varepsilon \psi = 0 \quad (3.15A)$$

$$\text{div } \underline{E} + j\omega\mu_0 \zeta = 0, \quad (3.15B)$$

worden de vergelijkingen 3.14A en B gereduceerd tot

$$\nabla^2 \underline{A} + \kappa^2 \underline{A} = -\underline{J}_0 \quad (3.16A)$$

$$\nabla^2 \underline{E} + \kappa^2 \underline{E} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \text{rot } \underline{J}_0. \quad (3.16B)$$

Bij de analyse kan in principe van een der beide Helmholtz-vergelijkingen worden uitgegaan.

Substitutie van de Lorentz-ijk in 3.12A en B levert

$$\underline{E}_m = -j\omega\mu_0 \underline{A} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \text{grad div } \underline{A} \quad (3.17A)$$

$$\underline{H}_e = j\omega\varepsilon \underline{E} - \frac{1}{j\omega\mu_0} \text{grad div } \underline{E} \quad (3.17B)$$

Uit 3.17A volgt dat de vektorpotentiaal \underline{A} de genererende functie is van \underline{E}_m . Het \underline{E}_m -veld wordt immers volledig bepaald door \underline{A} . Evenzo volgt uit 3.17B dat de vektorpotentiaal \underline{E} de genererende functie is van \underline{H}_e omdat \underline{H}_e volledig wordt bepaald door \underline{E} .

Wat betreft de beschrijving van het elektromagnetische veld moet een keuze worden gemaakt ten gunste van \underline{A} of van \underline{F} . Vanwege de axiale symmetrie van de geometrie zijn er in het polaire coördinatenstelsel slechts drie veldcomponenten die ongelijk aan nul zijn; E_r , E_θ en H_ϕ .

De vektorpotentiaal \underline{A} bezit evenals het \underline{E}_m -veld volgens 3.17A twee componenten. Deze hangen op een ingewikkelde manier met elkaar samen. Omdat deze twee scalars het volledige \underline{E}_m -veld vastleggen, wordt met behulp van 3.4A ook het volledige \underline{H} -veld en dus het gehele elektromagnetische veld bepaald.

Indien de r - en θ -component van \underline{F} identiek nul worden gekozen, dan geldt door de ϕ -onafhankelijkheid van \underline{F} dat

$$\text{grad div } \underline{F} = \underline{Q} ,$$

zodat volgens 3.17B

$$\underline{H}_e = j\omega \epsilon \underline{F}$$

Omdat alleen de ϕ -component van \underline{H}_e ongelijk nul is, kan met behulp van de ϕ -component van \underline{F} het \underline{H}_e -veld volledig worden beschreven. Met behulp van 3.4B is dan ook het \underline{E} -veld hiermee vastgelegd. Ter beschrijving van het elektromagnetische veld wordt gekozen ten gunste van \underline{F} , omdat het totale veld dan wordt bepaald door slechts één scalar.

Door substitutie van $F = (0, 0, F_\phi)$ en $\text{div } F = 0$ in 3.16B ontstaan twee triviale vergelijkingen en één niet-triviale vergelijking voor $F_\phi : \{r, \theta, \omega\}, \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{C}$. Deze luidt

$$\nabla^2 F_\phi + \left(k^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) F_\phi = - \frac{1}{j\omega r} \text{div } \underline{J}_{or} . \quad (3.18)$$

\underline{J}_{or} is hierbij de r -component van \underline{J}_o . Dit is de enige component die niet identiek nul is.

F_ϕ is afhankelijk van zowel r als θ .

Door middel van Legendretransformatie met $P_n^1(\cos \theta)$ als kern, kan een θ -onafhankelijke differentiaalvergelijking worden verkregen.

De getransformeerde $\bar{F}_n : \{r, n, \omega\} \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{C}$ van $F_\phi : \{r, \theta, \omega\} \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{C}$ wordt gegeven door de integraal

$$\bar{F}_n = \int_{-1}^1 F_\phi P_n^1(\cos \theta) d \cos \theta . \quad (\text{van } \theta \text{ naar } n\text{-domein}) \quad (3.19A)$$

De terugtransformatie luidt

$$F_\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta) \bar{F}_n. \quad (\text{Van } n \text{ naar } \theta \text{ domein}) \quad (3.19B)$$

Transformatie van vergelijking 3.18 levert

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF_\phi}{dr} + \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{dF_\phi}{d\theta}) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} F_\phi \right] P_n^1(\cos \theta) d \cos \theta + \kappa^2 F_\phi = \\ \frac{q U(r-a)}{\pi r^3} \int_{-1}^1 P_n^1(\cos \theta) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\delta(\theta)}{\sin \theta} \right) d \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.20)$$

In paragraaf 3.8 is bewezen dat

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{dF_\phi}{d\theta}) - \frac{1}{\sin^2 \theta} F_\phi \right] P_n^1(\cos \theta) d \cos \theta = \\ = -n(n+1) F_\phi, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\int_{-1}^1 P_n^1(\cos \theta) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\delta(\theta)}{\sin \theta} \right) d \cos \theta = \frac{-n(n+1)}{2}. \quad (3.22)$$

Met behulp van 3.21 en 3.22 is 3.20 te schrijven als

$$d_r^2 \bar{F}_n + \frac{2}{r} d_r \bar{F}_n + \left(\kappa^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \bar{F}_n = - \frac{q_0 n(n+1) U(r-a)}{2\pi r^3}. \quad (3.23)$$

Bij opsplitsing in binnen- en buitengebied ontstaat

$$d_r^2 \bar{F}_{ni} + \frac{2}{r} d_r \bar{F}_{ni} + \left(\kappa^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \bar{F}_{ni} = 0, \quad r \in [0, a], \quad (3.24A)$$

$$d_r^2 \bar{F}_{ne} + \frac{2}{r} d_r \bar{F}_{ne} + \left(\kappa^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \bar{F}_{ne} = - \frac{q_0 n(n+1)}{2\pi r^3}, \quad r \in [a, \rightarrow). \quad (3.24B)$$

In het linkerlid van vergelijking 3.23 levert de term $d_r^2 \bar{F}_n$ de stap. Immers, als één van de lagere-orde-termen dat zou doen, dan zou $d_r^2 \bar{F}_n$ een deltafunctie dan wel een afgeleide daarvan zijn. Deze zou dan terug te vinden moeten zijn in het rechterlid. Op de rand $r=a$ moeten \bar{F}_n en $d_r \bar{F}_n$ diensgevolge continu zijn. De

randvoorwaarden zijn zodoende te schrijven als

$$d_r \bar{F}_{ni} |_{r=a} = d_r \bar{F}_{ne} |_{r=a} \quad (3.25 A)$$

$$\bar{F}_{ni}(a) = \bar{F}_{ne}(a) \quad (3.25 B)$$

De oplossingen van 3.24A en B luiden respectievelijk

$$\bar{F}_{ni} = \bar{F}_{nhom} = A_n j_n(kr) \quad , \quad r \in [0, a] \quad , \quad (3.26 A)$$

$$\bar{F}_{ne} = \bar{F}_{nhom} + \bar{F}_{npart} = B_n h_n^{(2)}(kr) + \frac{I_0 n(n+1)}{2\pi\omega} \left[h_n^{(2)}(kr) \int_0^{kr} \frac{j_n(kr')}{r'} dr' - j_n(kr) \int_a^{kr} \frac{h_n^{(2)}(kr')}{r'} dr' \right] \quad , \quad r \in [a, \infty) \quad (3.26 B)$$

$j_n(kr)$ en $h_n^{(2)}(kr)$ zijn sferische Besselfuncties. Deze hangen samen met Besselfuncties volgens

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \quad \text{en} \quad h_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

De particuliere oplossing \bar{F}_{npart} is verkregen met behulp van de methode van variatie der constante. Hierbij wordt aangenomen, dat \bar{F}_{npart} te schrijven is als

$$\bar{F}_{npart} = v_1 j_n + v_2 h_n^{(2)} .$$

Waarbij v_1 en v_2 van r afhankelijke functies zijn. Als tweede conditie wordt gesteld dat

$$v_1' j_n + v_2' h_n^{(2)} = 0 .$$

\bar{F}_{npart} met afgeleiden invullen in 3.24B levert dan

$$v_1' j_n' + v_2' h_n^{(2)'} = \frac{-q n(n+1)}{2\pi r^3} \quad , \quad r \in [a, \infty) .$$

Omdat $W(j_n, h_n^{(2)}) = 0$ heeft dit systeem een unieke oplossing met

$$v_1 = \int_a^r \frac{q n(n+1)}{2\pi r^3} \frac{h_n^{(2)}}{W[j_n, h_n^{(2)}]} dr$$

$$v_2 = - \int_a^r \frac{q n(n+1)}{2\pi r^3} \frac{j_n}{W[j_n, h_n^{(2)}]} dr .$$

A_n en B_n zijn van n afhankelijke coëfficiënten. Deze worden bepaald door de oplossingen 3.26A en B in de randvoorwaarden 3.25A en B te substitueren. Voor $n=0$ verkrijgen we

$$A_0 d_r j_0(kr) |_{r=a} = B_0 d_r h_0^{(2)}(kr) |_{r=a}$$

$$A_0 j_0(ka) = B_0 h_0^{(2)}(ka)$$

Omdat $\text{Det}(h_0^{(2)}(ka), j_0(ka)) = \frac{i}{ka^2} \neq 0$ zijn A_0 en B_0 beide nul. Dus $\bar{F}_0 = 0$.

Voor $n \neq 0$ is te schrijven

$$A_n d_r j_n(kr) |_{r=a} = B_n d_r h_n^{(2)}(kr) |_{r=a} + d_r \bar{F}_{n \text{ part}}(kr) |_{r=a} \quad (3.27A)$$

$$A_n j_n(ka) = B_n h_n^{(2)}(ka) + \bar{F}_{n \text{ part}}(ka), \quad (3.27B)$$

zodat

$$A_n = \frac{I_0 n(n+1)}{2\pi\omega} \int_{ka}^{\infty} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{r} dkr.$$

Dit resultaat ingevuld in vergelijking 3.26A levert ons de uitdrukking voor de vektorpotentiaal \bar{F}_n in het binnengebied;

$$\bar{F}_n = \frac{I_0 n(n+1)}{2\pi\omega} j_n(kr) \int_{ka}^{\infty} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{r} dkr, \quad r \in [0, a] \quad (3.28)$$

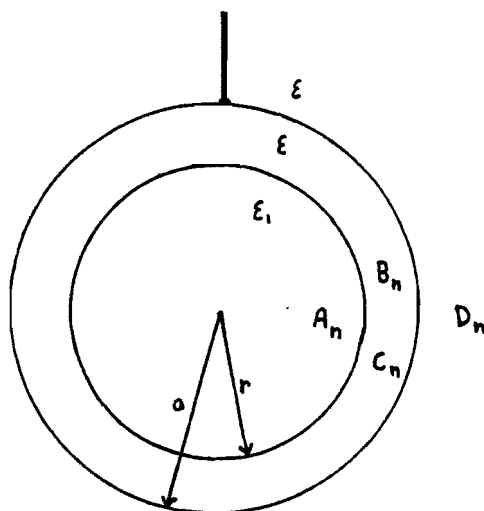
Bij terugtransformatie volgens vergelijking 3.19B ontstaat

$$F_\phi = \frac{I_0}{2\pi\omega} \sum_{n=1}^{\infty} (n + \frac{1}{2}) j_n(kr) P_n^1(\cos\theta) \int_{ka}^{\infty} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{r} dkr. \quad (3.29)$$

Het resultaat van vergelijking 3.29 kan worden gecontroleerd aan de hand van een geheel andere berekeningswijze, waarbij gebruik wordt gemaakt van additietheorema's. Deze alternatieve manier is weergegeven in paragraaf 3.9.

3.3 Het probleem met een actieve- en een passieve rand

We beschouwen de structuur zoals geschetst in figuur 8, waarbij binnen het gebied dat omsloten wordt door de actieve rand nog een passieve rand aanwezig is.



Figuur 8 Probleem met actieve- en passieve rand

In het tussengebied geldt

$$\bar{F}_n(kr) = B_n j_n(kr) + C_n j_{-n-1}(kr) \quad (3.30)$$

Met $j'_n(ka) \triangleq d_r j_n(kr)|_{r=a}$ enzovoort, geldt op het buitenste scheidingsvlak

$$B_n j'_n(ka) + C_n j'_{-n-1}(ka) = D_n h_n^{(2)'}(ka) + \bar{F}'_{npart}(ka) \quad (3.31A)$$

$$B_n j_n(ka) + C_n j_{-n-1}(ka) = D_n h_n^{(2)}(ka) + \bar{F}_{npart}(ka) \quad (3.31B)$$

Op het passieve scheidingsvlak moet voldaan worden aan de continuïteit van de tangentiële veldcomponenten. Deze volgen uit de vergelijkingen 3.11A en 3.11B en luiden

$$\underline{E} = -\frac{1}{\epsilon} \text{rot } \underline{F} \quad (3.32A)$$

$$\underline{H} = -j\omega \underline{F} \quad (3.32B)$$

Voor de tangentiële veldcomponenten die niet nul zijn is te schrijven

$$E_{\theta} = \frac{1}{\epsilon r} d_r (r F_{\phi}) = \frac{1}{\epsilon r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta) [r d_r \bar{F}_n + \bar{F}_n] \quad (3.33 A)$$

$$H_{\phi} = -j\omega F_{\phi} = -j\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta) \bar{F}_n \quad (3.33 B)$$

Door substitutie van vergelijking 3.30 in 3.33A en B zijn de continuïteitseisen op de passieve rand te beschrijven als

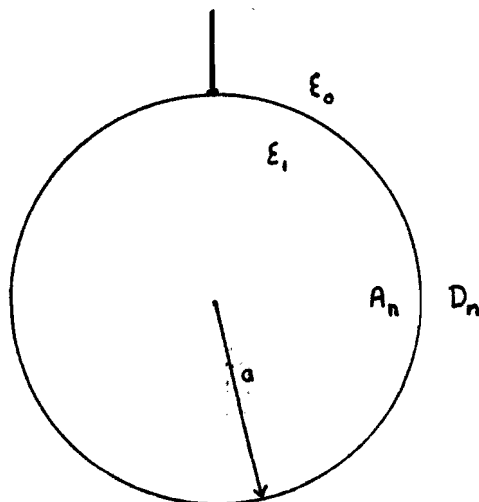
$$A_n \epsilon_0 \left(j_n'(\kappa, a) + \frac{j_n(\kappa, a)}{a} \right) = B_n \epsilon_1 \left(j_n'(\kappa a) + \frac{j_n(\kappa a)}{a} \right) + C_n \epsilon_1 \left(j_{-n-1}'(\kappa a) + \frac{j_{-n-1}(\kappa a)}{a} \right) \quad (3.34 A)$$

$$A_n j_n(\kappa, a) = B_n j_n(\kappa a) + C_n j_{-n-1}(\kappa a) \quad (3.34 B)$$

Het stelsel vergelijkingen 3.31 en 3.34 beschrijft het gehele randwaardeprobleem.

3.4 Ontaarding van het twee-randenmodel

Indien we in 3.32 en 3.36 de limiet $r \rightarrow a$ nemen, dan ontaard het probleem. Er ontstaat dan een situatie waarbij een actieve rand het scheidingsvlak vormt tussen twee gebieden met in het algemeen verschillende permittiviteit. Dit is in figuur 9 weergegeven.



Figuur 9 Ontaarding bij $r \rightarrow a$

De bijbehorende randwaardevergelijkingen luiden

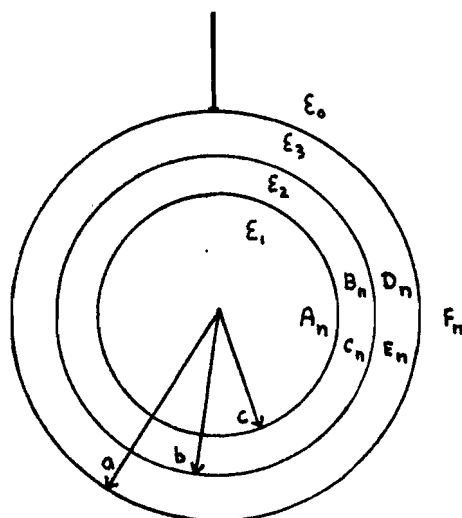
$$A_n \left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} j_n'(\kappa_1 a) + \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1 \right) \frac{j_n(\kappa_1 a)}{a} \right] = D_n h_n^{(2)'}(\kappa_0 a) + F_{npart}'(\kappa_0 a) \quad (3.35 A)$$

$$A_n j_n(\kappa_1 a) = D_n h_n^{(2)}(\kappa_0 a) + F_{npart}(\kappa_0 a) . \quad (3.35 B)$$

Indien A_n, B_n, C_n , en D_n expliciet worden uitgedrukt in de sferische Besselfuncties, F_{npart} en F_{npart}' en we vervolgens in deze uitdrukkingen de limiet $r \rightarrow a$ nemen, dan krijgen A_n en D_n ook inderdaad dezelfde waarden als de oplossingen van 3.35A en B.

3.5 Het probleem met één actieve- en twee passieve randen

In figuur 10 is het 3-bollenmodel met een actieve- en twee passieve randen weergegeven.



Figuur 10 Drie-bollenmodel

Binnen de afzonderlijke gebieden gekarakteriseerd door de golfgetallen k_1, k_2, k_3 en k_0 geldt voor \bar{F}_n

$$\bar{F}_n = A_n j_n(\kappa_1 r) , \quad (r=0 \text{ inbegrepen}) \quad (3.36 A)$$

$$\bar{F}_n = B_n j_n(\kappa_2 r) + C_n j_{n-1}(\kappa_2 r) \quad (3.36 B)$$

$$\bar{F}_n = D_n j_n(\kappa_3 r) + E_n j_{n-1}(\kappa_3 r) \quad (3.36 C)$$

$$\bar{F}_n = F_n j_n(\kappa_0 r) + \bar{F}_{npart}(\kappa_0 r) , \quad (r \rightarrow \infty \text{ inbegrepen}) . \quad (3.36 D)$$

Volkomen analoog aan het voorgaande kan dit randwaardeprobleem voor vier gebieden worden geformuleerd als

$$D_n \left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} j'_n(\kappa_3 a) + \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1 \right) \frac{j_n(\kappa_3 a)}{a} \right] + E_n \left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} j'_{-n-1}(\kappa_3 a) + \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1 \right) \frac{j_{-n-1}(\kappa_3 a)}{a} \right] =$$

$$= F_n h_n^{(2)'}(\kappa_0 a) + \bar{F}'_{n \text{ part}}(\kappa_0 a) \quad (3.37 A)$$

$$D_n j_n(\kappa_3 a) + E_n j_{-n-1}(\kappa_3 a) = F_n h_n^{(2)}(\kappa_0 a) + F_{n \text{ part}}(\kappa_0 a) \quad (3.37 B)$$

$$B_n \epsilon_3 \left(j'_n(\kappa_2 b) + \frac{j_n(\kappa_2 b)}{b} \right) + C_n \epsilon_3 \left(j'_{-n-1}(\kappa_2 b) + \frac{j_{-n-1}(\kappa_2 b)}{b} \right) =$$

$$D_n \epsilon_2 \left(j'_n(\kappa_3 b) + \frac{j_n(\kappa_3 b)}{b} \right) + E_n \epsilon_2 \left(j'_{-n-1}(\kappa_3 b) + \frac{j_{-n-1}(\kappa_3 b)}{b} \right) \quad (3.37 C)$$

$$B_n j_n(\kappa_2 b) + C_n j_{-n-1}(\kappa_2 b) = D_n j_n(\kappa_3 b) + E_n j_{-n-1}(\kappa_3 b) \quad (3.37 D)$$

$$A_n \epsilon_2 \left(j'_n(\kappa_1 c) + \frac{j_n(\kappa_1 c)}{c} \right) = B_n \epsilon_1 \left(j'_n(\kappa_2 c) + \frac{j_n(\kappa_2 c)}{c} \right) +$$

$$C_n \epsilon_1 \left(j'_{-n-1}(\kappa_2 c) + \frac{j_{-n-1}(\kappa_2 c)}{c} \right) \quad (3.37 E)$$

$$A_n j_n(\kappa_1 c) = B_n j_n(\kappa_2 c) + C_n j_{-n-1}(\kappa_2 c) \quad (3.37 F)$$

met η , λ , ζ , α , β , γ en δ als hulpvariabelen volgt onderstaand een opsomming van de expliciete uitdrukkingen voor de constanten.

$$\eta = \frac{\epsilon_2 \left(j'_n(\kappa_1 c) + \frac{j_n(\kappa_1 c)}{b} \right) j_n(\kappa_2 c) - \epsilon_1 \left(j'_n(\kappa_2 c) + \frac{j_n(\kappa_2 c)}{c} \right) j_n(\kappa_1 c)}{\epsilon_2 \left(j'_n(\kappa_1 c) + \frac{j_n(\kappa_1 c)}{b} \right) j_{-n-1}(\kappa_2 c) - \epsilon_1 \left(j'_{-n-1}(\kappa_2 c) + \frac{j_{-n-1}(\kappa_2 c)}{c} \right) j_n(\kappa_1 c)}$$

$$\lambda = \frac{\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} j'_n(\kappa_3 a) + \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1 \right) \frac{j_n(\kappa_3 a)}{a} \right) h_n^{(2)}(\kappa_0 a) - j_n(\kappa_3 a) h_n^{(2)'}(\kappa_0 a)}{j_{-n-1}(\kappa_3 a) h_n^{(2)'}(\kappa_0 a) - \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} j'_{-n-1}(\kappa_3 a) + \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1 \right) \frac{j_{-n-1}(\kappa_3 a)}{a} \right) h_n^{(2)}(\kappa_0 a)}$$

$$\zeta = \frac{\bar{F}'_{n \text{ part}}(\kappa_0 a) h_n^{(2)'}(\kappa_0 a) - \bar{F}'_{n \text{ part}}(\kappa_0 a) h_n^{(2)}(\kappa_0 a)}{j_{-n-1}(\kappa_3 a) h_n^{(2)'}(\kappa_0 a) - \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} j'_{-n-1}(\kappa_3 a) + \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1 \right) \frac{j_{-n-1}(\kappa_3 a)}{a} \right) h_n^{(2)}(\kappa_0 a)}$$

waarbij de teller met behulp van de uitdrukking voor de particuliere oplossing in 3.26B te schrijven is als

$$\frac{j I_0 n(n+1)}{2\pi a^2 \omega} \int_a^\infty \frac{h_n(\kappa_0 r)}{r} dr$$

(j is de imaginaire eenheid)

$$\alpha = j_n(\kappa_2 b) - \eta j_{-n-1}(\kappa_2 b)$$

$$\beta = \frac{\epsilon_3}{\epsilon_2} \left[j'_n(\kappa_2 b) + \frac{j_n(\kappa_2 b)}{b} - \eta \left(j'_{-n-1}(\kappa_2 b) + \frac{j_{-n-1}(\kappa_2 b)}{b} \right) \right]$$

$$\gamma = j_n(\kappa_3 b) + \lambda j_{-n-1}(\kappa_3 b)$$

$$\delta = j'_n(\kappa_3 b) + \frac{j_n(\kappa_3 b)}{b} + \lambda \left(j'_{-n-1}(\kappa_3 b) + \frac{j_{-n-1}(\kappa_3 b)}{b} \right)$$

$$D_n = \frac{\int \left[\alpha \left(j'_{-n-1}(\kappa_3 b) + \frac{j_{-n-1}(\kappa_3 b)}{b} \right) - \beta j_{-n-1}(\kappa_3 b) \right]}{\gamma \beta - \delta \alpha} \quad (3.38A)$$

$$B_n = \frac{\int \left[\delta j_{-n-1}(\kappa_3 b) - \gamma \left(j'_{-n-1}(\kappa_3 b) + \frac{j_{-n-1}(\kappa_3 b)}{b} \right) \right]}{\alpha \delta - \beta \gamma} \quad (3.38B)$$

$$E_n = B_n \lambda + \int \quad (3.38C)$$

$$C_n = -D_n \eta \quad (3.38D)$$

$$F_n = \frac{B_n j_n(\kappa_3 a) + C_n j_{-n-1}(\kappa_3 a) - \bar{F}_{n \text{ part}}(\kappa_0 a)}{h_n^{(2)}(\kappa_0 a)} \quad (3.38E)$$

$$A_n = \frac{D_n j_n(\kappa_2 a) + E_n j_{-n-1}(\kappa_2 c)}{j_n(\kappa_1 c)} \quad (3.38F)$$

Voor n=0 geldt, dat alle coëfficiënten nul zijn.

Uitschrijven van 3.32 levert voor de radiale component van het elektrische veld

$$E_r = - \frac{1}{\epsilon r \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (F_\theta \sin \theta). \quad (3.39)$$

Substitutie van 3.19B hierin leidt tot

$$\begin{aligned} E_r &= - \frac{1}{\epsilon r \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{n(n+1)} P'_n(\cos \theta) \sin \theta \bar{F}_n = \\ &= - \frac{1}{\epsilon r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{n(n+1)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (P'_n(\cos \theta) \sin \theta) \bar{F}_n. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Deze uitdrukking kan worden vereenvoudigd met behulp van

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (P'_n(\cos \theta) \sin \theta) = n(n+1) P_n(\cos \theta). \quad (3.41)$$

Het bewijs hiervan is weergegeven in paragraaf 3.8.
We krijgen aldus

$$E_r = - \frac{1}{\epsilon r} \sum_{n=1}^{\infty} (n + \frac{1}{2}) P_n(\cos \theta) \bar{F}_n. \quad (3.42)$$

We kunnen door middel van substitutie van 3.36 in 3.42 komen tot een uitdrukking voor de radiale component van het elektrische veld in elk gebied;

$$E_r = - \frac{1}{\epsilon_r r} \sum_{n=1}^{\infty} (n + \frac{1}{2}) P_n(\cos \theta) \begin{cases} A_n j_n(k_1 r) \\ B_n j_n(k_2 r) + C_n j_{-n-1}(k_2 r) \\ D_n j_n(k_3 r) + E_n j_{-n-1}(k_3 r) \\ F_n h_n^{(2)}(k_0 r) + F_{\theta \text{ part}}(k_0 r). \end{cases} \quad (3.43 A)$$

Op analoge wijze valt voor de θ -component van het elektrische veld uit vergelijking 3.32A af te leiden dat

$$E_{\theta} = \frac{1}{\epsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} A_n \left[j_n'(k_1 r) + \frac{j_n(k_1 r)}{r} \right] \\ B_n \left[j_n'(k_2 r) + \frac{j_n(k_2 r)}{r} \right] + C_n \left[j_{-n-1}'(k_2 r) + \frac{j_{-n-1}(k_2 r)}{r} \right] \\ D_n \left[j_n'(k_3 r) + \frac{j_n(k_3 r)}{r} \right] + E_n \left[j_{-n-1}'(k_3 r) + \frac{j_{-n-1}(k_3 r)}{r} \right] \\ F_n \left[h_n^{(2)'}(k_0 r) + \frac{h_n^{(2)}(k_0 r)}{r} \right] + F_{\phi \text{ part}}(k_0 r) \end{array} \right.$$

(3.438)

3.6 Drie-bollenmodel met twee elektrodes

Ter bepaling van het elektrische veld ten gevolge van twee stroomvoerende elektrodes wordt uitgegaan van de in figuur 11 geschetste situatie.

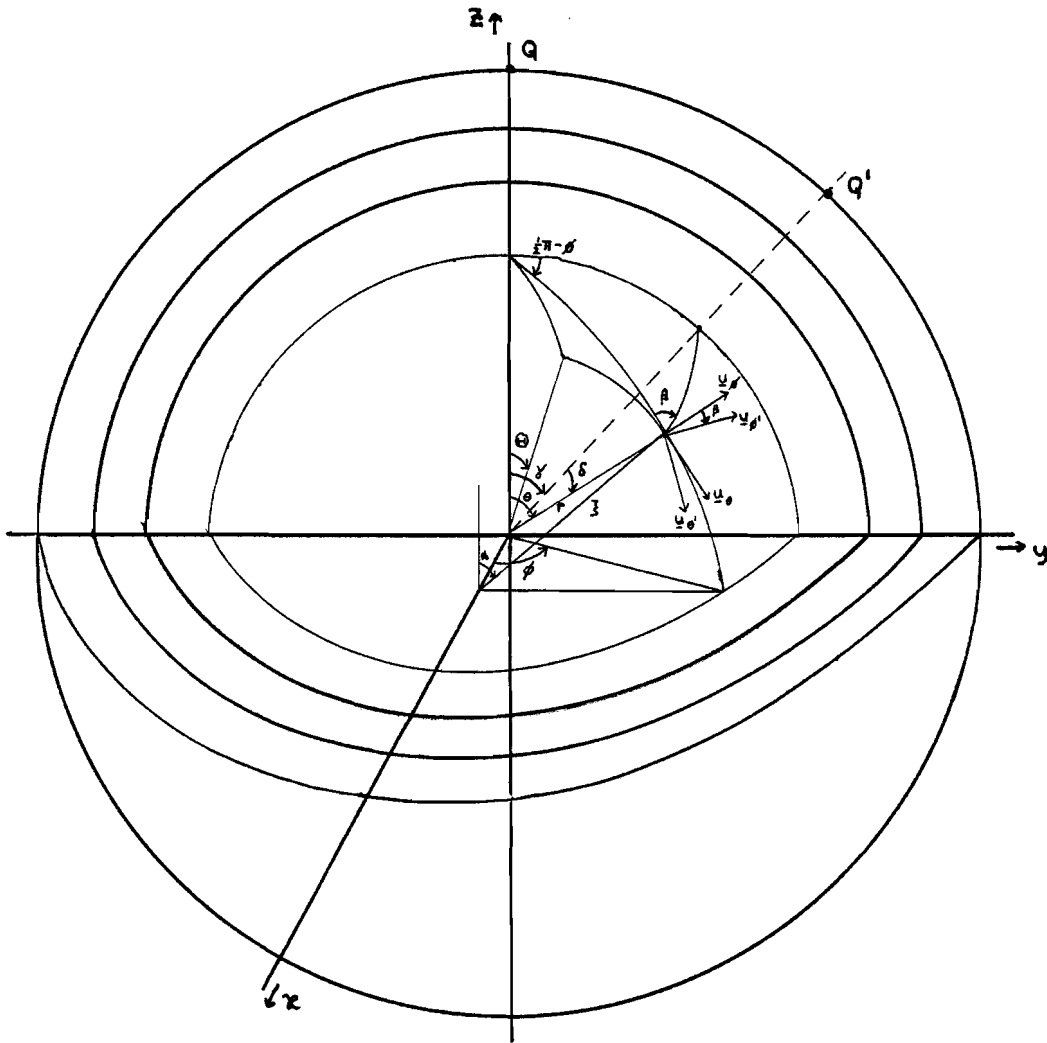
Lading Q representeert de vrije lading op de puntelektrode ter plaatse van $(r, \theta, \phi) = (a, 0, \phi)$. Met behulp van de uitdrukkingen 3.43A en B kan het elektrische veld ten gevolge van Q in een willekeurig punt worden bepaald.

Lading Q' representeert een vrije lading op een puntelektrode die een hoek γ verschoven ligt ten opzichte van Q in het vlak $x=0$.

We zijn op zoek naar het \underline{E} -veld in een willekeurig punt (r, θ, ϕ) ten gevolge van Q' en definiëren hiertoe de componenten van dit \underline{E} -veld ten opzichte van (u_r, u_{θ}') als $(E_{rQ'}(r, \theta'), E_{\theta Q'}(r, \theta'))$. Het veld is dus niet afhankelijk van ϕ' . Ook heeft het veld geen ϕ' -component. (Het veld is wel afhankelijk van ϕ en heeft wel een ϕ -component.)

Het coördinatenstelsel (u_r, u_{θ}') is een rotatietransformatie over een hoek β van het coördinatenstelsel (u_r, u_{θ}) .

We definiëren de componenten van het \underline{E} -veld ten gevolge van Q en ten opzichte van u_r, u_{θ} als $(E_{rQ}(r, \theta), E_{\theta Q}(r, \theta))$. Omdat er sprake is van een draaiing om de x -as drukken we het punt (r, θ, ϕ) uit in cilindercoördinaten (r, α, x) .



Figuur 11 Driebollenmodel met twee elektrodes

Indien $Q' = -Q$ geldt dat

$$E_{rQ'}(r, \alpha, \kappa) \underline{u}_r + E_{\theta Q'}(r, \alpha, \kappa) \underline{u}_{\theta'} = -E_{rQ}(r, \alpha - \gamma, \kappa) \underline{u}_r - E_{\theta Q}(r, \alpha - \gamma, \kappa) \underline{u}_{\theta} , \quad (3.44)$$

terwijl

$$E_{rQ}(r, \alpha - \gamma, \kappa) = -E_{rQ'}(r, \alpha, \kappa) \quad (3.45A)$$

$$E_{\theta Q}(r, \alpha - \gamma, \kappa) = -E_{\theta Q'}(r, \alpha, \kappa) . \quad (3.45B)$$

Verder geldt dat

$$\underline{u}_{\theta'} = \cos \beta \underline{u}_{\theta} - \sin \beta \underline{u}_{\phi} . \quad (3.46)$$

Substitutie van de vergelijkingen 3.45A en B en 3.46 in 3.44 levert

$$\begin{aligned} E_{rQ'}(r, \alpha, \gamma) \underline{u}_r + E_{\theta Q'}(r, \alpha, \gamma) \underline{u}'_{\theta} &= \\ &= E_{rQ'}(r, \alpha, \gamma) \underline{u}_r + \cos \beta E_{\theta Q'}(r, \alpha, \gamma) \underline{u}_{\theta} - \sin \beta E_{\theta Q'}(r, \alpha, \gamma) \underline{u}_{\phi} = \\ &= -E_{rQ}(r, \alpha - \gamma, \gamma) \underline{u}_r - \cos \beta E_{\theta Q}(r, \alpha - \gamma, \gamma) \underline{u}_{\theta} + \sin \beta E_{\theta Q}(r, \alpha - \gamma, \gamma) \underline{u}_{\phi}. \end{aligned}$$

Er geldt: $\cos \theta = \frac{\zeta \cos \alpha}{r}$.

Per definitie geldt: $\cos \Theta = \frac{\zeta \cos(\alpha - \gamma)}{r}$.

Met behulp van $\cos \alpha = \frac{r}{\zeta} \cos \theta$ en $\sin \alpha = \frac{r}{\zeta} \tan \phi$ vinden we

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \frac{\zeta}{r} (\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma) = \\ &= \frac{\zeta}{r} \left(\frac{r}{\zeta} \cos \theta \cos \gamma + \frac{r}{\zeta} \tan \phi \sin \gamma \right) = \\ &= \cos \theta \cos \gamma + \frac{r}{\zeta} \tan \phi \sin \gamma = \\ &= \cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \phi \sin \gamma. \end{aligned}$$

Het gezochte veld is te schrijven als

$$\underline{E}_{Q'}(r, \theta, \phi) = -E_{rQ}(r, \cos \Theta) \underline{u}_r - \cos \beta E_{\theta Q}(r, \cos \Theta) \underline{u}_{\theta} + \sin \beta E_{\theta Q}(r, \cos \Theta) \underline{u}_{\phi}.$$

Het totale veld (dus ten gevolge van Q en Q') bedraagt

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\text{tot}}(r, \theta, \phi) &= [E_{rQ}(r, \cos \theta) - E_{rQ}(r, \cos \Theta)] \underline{u}_r + \\ &+ [E_{\theta Q}(r, \cos \theta) - \cos \beta E_{\theta Q}(r, \cos \Theta)] \underline{u}_{\theta} + \\ &+ \sin \beta E_{\theta Q}(r, \cos \Theta) \underline{u}_{\phi}, \end{aligned}$$

waarbij

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{\cos \phi \sin \gamma}{\sqrt{1 - (\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \phi)^2}} = \frac{\cos \phi \sin \gamma}{\sin \Theta} \\ \cos \beta &= \frac{\cos \gamma - \cos \Theta \cos \theta}{\sin \Theta \sin \theta}. \end{aligned}$$

3.7 Analyse met betrekking tot de numerieke verwerking

Bij de berekening van het elektrische veld wordt uitgegaan van de uitdrukkingen 3.43A en B. In deze paragraaf wordt de integraal $\int_a^{\infty} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{r} dr$ herleid tot een uitdrukking met standaardintegralen. Verder worden de convergentie-eigenschappen van de uitdrukkingen voor E_r en E_θ besproken.

- a. Bij de berekening van $\int_a^{\infty} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{r} dr$ is het handig om gebruik te maken van de recurrente relaties

$$h_n^{(2)}(kr) = -\frac{1}{n+1} \frac{d}{dr} h_n^{(2)}(kr) + \frac{\kappa}{n+1} h_{n-1}^{(2)}(kr)$$

$$h_n^{(2)}(kr) = -\frac{2n-1}{\kappa n} \frac{d}{dr} h_{n-1}^{(2)}(kr) + \frac{n-1}{n} h_{n-2}^{(2)}(kr)$$

Met behulp van deze relaties kan de integrand worden uitgedrukt in $h_0^{(2)}(kr)$, $h_1^{(2)}(kr)$ en afgeleiden $d_r h_{n-i}^{(2)}(kr)$ (i geheel).

$$\frac{h_1^{(2)}(kr)}{r} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} h_1^{(2)}(kr) + \frac{\kappa}{2} h_0^{(2)}(kr)$$

$$\frac{h_2^{(2)}(kr)}{r} = -\frac{1}{3} \frac{d}{dr} h_2^{(2)}(kr) + \frac{\kappa}{3} h_1^{(2)}(kr)$$

$$\frac{h_3^{(2)}(kr)}{r} = -\frac{1}{4} \frac{d}{dr} h_3^{(2)}(kr) - \frac{3}{8} \frac{d}{dr} h_1^{(2)}(kr) + \frac{\kappa}{8} h_0^{(2)}(kr)$$

$$\frac{h_4^{(2)}(kr)}{r} = -\frac{1}{5} \frac{d}{dr} h_4^{(2)}(kr) - \frac{1}{3} \frac{d}{dr} h_2^{(2)}(kr) + \frac{2\kappa}{15} h_1^{(2)}(kr)$$

enzovoort.

Per gekozen waarde van de orde gaat de integraal achtereenvolgens over in

$$\int_a^{\infty} \frac{h_1^{(2)}(kr)}{r} dr = \frac{1}{2} h_1^{(2)}(\kappa a) + \frac{1}{2} \int_a^{\infty} h_0^{(2)}(kr) dr \quad (3.47A)$$

$$\int_a^{\infty} \frac{h_2^{(2)}(kr)}{r} dr = \frac{1}{3} h_2^{(2)}(\kappa a) + \frac{1}{3} \int_a^{\infty} h_1^{(2)}(kr) dr \quad (3.47B)$$

enzovoort.

De rechter term in het rechterlid van 3.47A is

$$\int_a^\infty h_0^{(2)}(kr) dr = \frac{i}{k} \int_a^\infty \frac{e^{-ikr}}{r} dr = \frac{i}{k} \int_a^\infty \frac{\cos kr}{r} dr + \frac{i}{k} \int_a^\infty \frac{\sin kr}{r} dr =$$

$$= \frac{i}{k} \left[\frac{\pi}{2} - i C_i(ka) - S_i(ka) \right].$$

Hierin zijn gedefinieerd de standaardintegralen

$$S_i(ka) = \frac{\pi}{2} - \int_{ka}^\infty \frac{\sin kr}{kr} dkr$$

$$C_i(ka) = - \int_{ka}^\infty \frac{\cos kr}{kr} dkr.$$

De rechter term in het rechterlid van 3.47B is

$$\int_a^\infty h_1^{(2)}(kr) dr = \frac{i}{k^2 a} e^{-ika} = h_0^{(2)}(ka).$$

b. Bij het onderzoek naar het numerieke gedrag van de uitdrukkingen voor E_r en E_θ wordt uitgegaan van een model met één rand. Het zal blijken, dat het golfgetal k niet van invloed is op de convergentie-eigenschappen.

Uit de uitdrukking 3.32A volgt voor de r -component van het elektrische veld dat

$$E_r = -\frac{1}{\epsilon r \sin \theta} \frac{d}{d\theta} F_\phi(\sin \theta) = -\frac{1}{\epsilon r} \sum_{n=1}^\infty (n + \frac{1}{2}) P_n(\cos \theta) \bar{F}_n =$$

$$= -\frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \sum_{n=1}^\infty n(n + \frac{1}{2})(n+1) P_n(\cos \theta) j_n(kr) \int_{ka}^\infty \frac{h_n^{(2)}(kr)}{kr} dkr. \quad (3.48)$$

Hierin in $j_n(kr)$ te schrijven als

$$j_n(kr) = \frac{(kr)^n}{1 \cdot 3 \cdots 2n+1} \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(kr)^2}{1!(2n+3)} + \frac{\left[\frac{1}{2}(kr)^2\right]^2}{2!(2n+3)(2n+5)} \cdots \right].$$

Bij $f < 100$ kHz en $r < 0,1$ m is de benadering van $j_n(kr)$ tot de eerste term van de reeks voldoende:

$$1 \gg \frac{\frac{1}{2}(kr)^2}{1!(2n+3)} \approx \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2n+3}$$

Verder is $h_n^{(2)}(kr)$ te schrijven als

$$h_n^{(2)}(kr) = \frac{(kr)^n}{1 \cdot 3 \cdots 2n+1} \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(kr)^2}{1!(2n+3)} + \cdots \right] + i \frac{1 \cdot 3 \cdots 2n-1}{(kr)^{n+1}} \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(kr)^2}{1!(1-2n)} + \cdots \right] \quad (3.49)$$

We introduceren k_s als grenswaarde voor kr , waarboven de benadering van $h_n^{(2)}(kr)$ voor groot argument geoorloofd is. deze luidt

$$h_n^{(2)}(kr) = \frac{1}{kr} \cos \left[kr - \frac{\pi}{2}(n+1) \right] - i \frac{1}{kr} \sin \left[kr - \frac{\pi}{2}(n+1) \right] \quad , \quad kr > k_s.$$

Het reële deel van $\int_{k_s}^{\infty} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{kr} dk_r$ voldoet aan

$$\left| \int_{k_s}^{\infty} \frac{1}{kr} \cos \left[kr - \frac{\pi}{2}(n+1) \right] dk_r \right| < \frac{1}{k_s} \quad (3.50A)$$

en het imaginaire deel voldoet aan

$$\left| \int_{k_s}^{\infty} \frac{1}{kr} \sin \left[kr - \frac{\pi}{2}(n+1) \right] dk_r \right| < \frac{1}{k_s} \quad (3.50B)$$

Met behulp van 3.49 en 3.50A en $P_n(\cos) < 1$ is het reële deel van 3.48 te schrijven als

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ E_r \} < \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{(2n+1)!} \frac{2^n n! (kr)^n}{(2n+1)!} \times \\ \times \left[\frac{1}{k_s} + \int_{k_a}^{k_s} \frac{(kr)^{n-1}}{1 \cdot 3 \cdots 2n+1} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}(kr)^2}{1!(2n+3)} + \cdots \right) dk_r \right]. \quad (3.51A) \end{aligned}$$

Met behulp van 3.49 en 3.50B is het imaginaire deel van 3.48 te schrijven als

$$I_m \{E_r\} < \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1) 2^n n! (kr)^n}{(2n+1)!} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{ks} + \int_{ka}^{ks} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n-1}{(kr)^{n+1}} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}(kr)^2}{1!(1-2n)} + \dots \right) dkr \right]. \quad (3.51B)$$

Ter beoordeling van de convergentie wordt slechts de eerste term in de integrand van 3.51B beschouwd. De sommen bij alle andere termen in de integrand convergeren immers beter (door de factoren met n in de noemers). Bovendien zijn alle andere termen veel kleiner. De eerste term in 3.51B is

$$\frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1) 2^n n! (kr)^n}{(2n+1)! (n+1)} (1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n-1) \left[\frac{1}{(ka)^n} - \frac{1}{ks^n} \right] <$$

$$\frac{1}{8\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{r}{a} \right)^n. \quad (3.52)$$

Er geldt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \left(\frac{r}{a} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \frac{r}{a} = \frac{r}{a}.$$

Volgens het convergentiekenmerk van Cauchy is de reeks absoluut convergent als $r/a < 1$. Hiermee is de convergentie voor het binnengebied aangetoond.

Met betrekking tot de bepaling van de maximale afbreekfout van 3.52 wordt opgemerkt dat de rij $n(r/a)^n$ monotoon dalend is voor

$$n \geq m \quad \text{met} \quad \frac{-1}{\ln\left(\frac{r}{a}\right)} < m < 1 - \frac{1}{\ln\left(\frac{r}{a}\right)}. \quad (3.53)$$

We schrijven 3.52 als

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{r}{a} \right)^n = \sum_{n=1}^m n \left(\frac{r}{a} \right)^n + \sum_{m+1}^N n \left(\frac{r}{a} \right)^n + E \quad (3.54)$$

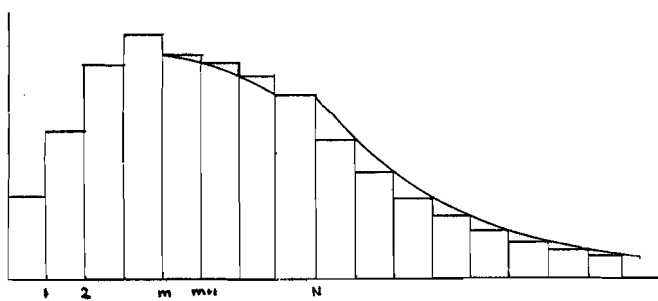
waarin N het aantal in rekening gebrachte termen voorstelt en E de afbreekfout is.

Vanwege het monotoon dalende karakter van $n(r/a)^n$ voor $n > m$ kan de middelste term van het rechterlid van 3.54 vergeleken worden met een integraal. Met verwijzing naar de nevenstaande figuur is in te zien dat

$$\sum_{m+1}^N n \left(\frac{r}{a}\right)^n > \int_{m+1}^N x \left(\frac{r}{a}\right)^x dx$$

en

$$E = \sum_{N+1}^S n \left(\frac{r}{a}\right)^n < \int_N^S x \left(\frac{r}{a}\right)^x dx.$$



Indien de bovengrens voor de afbreekfout ϵ wordt gesteld dan is

$$\frac{\sum_{N+1}^S n \left(\frac{r}{a}\right)^n}{\sum_{n=1}^S n \left(\frac{r}{a}\right)^n} < \frac{\int_{N+1}^S x \left(\frac{r}{a}\right)^x dx}{\sum_{n=1}^m \left(\frac{r}{a}\right)^n + \int_{m+1}^N x \left(\frac{r}{a}\right)^x dx} < \epsilon.$$

Dit uitschrijven levert

$$\frac{\left[\frac{N}{\ln\left(\frac{r}{a}\right)} - \frac{1}{\left(\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)^2} \right] \left(\frac{r}{a}\right)^N}{\sum_{n=1}^m n \left(\frac{r}{a}\right)^n + \left[\frac{N}{\ln\left(\frac{r}{a}\right)} - \frac{1}{\left(\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)^2} \right] \left(\frac{r}{a}\right)^N - \left[\frac{m+1}{\ln\left(\frac{r}{a}\right)} - \frac{1}{\left(\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)^2} \right] \left(\frac{r}{a}\right)^{m+1}} < \epsilon$$

zodat

$$\left[\frac{1}{\left(\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)^2} - \frac{N}{\ln\left(\frac{r}{a}\right)} \right] \left(\frac{r}{a}\right)^N < \epsilon \sum_{n=1}^m n \left(\frac{r}{a}\right)^n. \tag{3-55}$$

De straal van het scheidingsvlak is $a = 0,095$ m. De maximale straal waarbij de veldsterkte wordt bepaald is $r = 0,0885$ m. Substitutie van deze getalwaarden voor a en r in 3.53 levert $m = 14$. Bij een fout van maximaal 1% ($\epsilon = 0,01$) heeft het rechterlid van 3.55 de waarde 0,53. Uit 3.55 volgt, dat bij deze nauwkeurigheid minimaal 113 termen moeten worden meegenomen. Indien we ons tot het gebied beperken waarin de hersenen liggen, is de verhouding r/a maximaal 0,84 zodat dan $m = 6$. Met de eis dat $\epsilon = 0,01$ moeten er minimaal 46 termen worden meegenomen.

Bij de berekening van E_0 is op analoge wijze het aantal in rekening te brengen termen vast te stellen. Het blijkt, dat ongeveer hetzelfde aantal termen nodig is als bij E_r , indien van dezelfde ϵ wordt uitgegaan.

3.8 Bewijzen

Bewijs van stelling 3.21

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^{\cos \theta = 1} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dF_\phi}{d\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} F_\phi \right] P_n^1(\cos \theta) = \\
 & = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\tan \theta} \frac{dF_\phi}{d\theta} + \frac{d^2 F_\phi}{d\theta^2} - \frac{1}{\sin^2 \theta} F_\phi \right] P_n^1(\cos \theta) d \cos \theta = \quad \text{Stel } \cos \theta = u \\
 & = \int_{-1}^1 \left[\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \cdot -\sqrt{1-u^2} \frac{dF_\phi}{du} - u \frac{dF_\phi}{du} + (1-u^2) \frac{d^2 F_\phi}{du^2} - \frac{1}{1-u^2} F_\phi \right] P_n^1(u) du = \\
 & = \int_{-1}^1 \left[-2u \frac{dF_\phi}{du} + (1-u^2) \frac{d^2 F_\phi}{du^2} - \frac{1}{1-u^2} F_\phi \right] P_n^1(u) du
 \end{aligned}$$

Deze integraal wordt termsgewijs berekend;

$$\begin{aligned}
 * \int_{-1}^1 -2u \frac{dF_\phi}{du} P_n^1(u) du &= \int_{-1}^1 -2u P_n^1(u) dF_\phi = \frac{-2u P_n^1(u) F_\phi}{P_n^1(1) = P_n^1(-1) = 0} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2F_\phi du P_n^1(u) = \\
 &= \int_{-1}^1 \left[2 P_n^1(u) - \frac{2nu^2}{1-u^2} P_n^1(u) + \frac{2(n+1)u}{1-u^2} P_{n-1}^1 \right] F_\phi du \\
 * \int_{-1}^1 (1-u^2) \frac{d^2 F_\phi}{du^2} P_n^1(u) du &= \int_{-1}^1 (1-u^2) P_n^1(u) d \frac{dF_\phi}{du} = \\
 &= \frac{(1-u^2) P_n^1(u) dF_\phi}{du} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{dF_\phi}{du} d(1-u^2) P_n^1(u) = \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{dF_\phi}{du} (n+2)u P_n^1(u) - (n+1) P_{n-1}^1(u) du = \int_{-1}^1 (n+2)u P_n^1(u) - (n+1) P_{n-1}^1(u) dF_\phi = \\
 &= \frac{[(n+2)u P_n^1(u) - (n+1) P_{n-1}^1(u)] F_\phi}{du} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 F_\phi d[(n+1) P_{n-1}^1(u) - (n+2)u P_n^1(u)] = \\
 &= \int_{-1}^1 \left\{ [(n+2) \frac{nu^2}{1-u^2} - (n+2)] P_n^1(u) - \frac{(2n+1)(n+1)u}{1-u^2} P_{n-1}^1(u) + \frac{n(n+1)}{1-u^2} P_{n-2}^1(u) \right\} F_\phi du
 \end{aligned}$$

totaal:

$$\int_{-1}^1 \left\{ \left[2 - \frac{2nu^2}{1-u^2} + (n+2) \frac{nu^2}{1-u^2} - (n+2) - \frac{1}{1-u^2} \right] P_n^1(u) - \frac{(2n-1)(n+1)u}{1-u^2} P_{n-1}^1(u) + \frac{n(n+1)}{1-u^2} P_{n-2}^1(u) \right\} F_\phi du =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^1 \left[2 - \frac{2nu^2}{1-u^2} + (n+2) \frac{nu^2}{1-u^2} - (n+2) - \frac{1}{1-u^2} - \frac{(n-1)(n+1)}{1-u^2} \right] p_n^{\perp}(u) F_{\phi} du \\
 &= -n(n+1) \int_{-1}^1 F_{\phi} p_n^{\perp}(u) du = -n(n+1) \bar{F}_n \quad \text{Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

Er is gebruik gemaakt van de recurrente relatie

$$(n-1)p_n^{\perp}(u) = (2n-1)u p_{n-1}^{\perp}(u) - n p_{n-2}^{\perp}(u)$$

Bewijs van stelling 3.22

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^1 p_n^{\perp}(\cos \theta) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\delta(\theta)}{\sin \theta} \right) d \cos \theta = - \int_{-1}^1 \sin \theta \frac{d}{d \cos \theta} \left[\frac{\delta(\theta)}{\sin \theta} \right] p_n^{\perp}(\cos \theta) d \cos \theta = \\
 &= - \int_{-1}^1 \sin \theta p_n^{\perp}(\cos \theta) d \frac{\delta(\theta)}{\sin \theta} = - \cancel{\sin \theta} p_n^{\perp}(\cos \theta) \frac{\delta(\theta)}{\cancel{\sin \theta}} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\delta(\theta)}{\sin \theta} d \sin \theta p_n^{\perp}(\cos \theta) .
 \end{aligned}$$

de stokterm is

$$p_n^{\perp}(\cos \theta) \delta(\theta) \Big|_{-1}^{\cos \theta = 1} = p_n^{\perp}(\cos \theta) \Big|_{\pi}^{\theta = 0} = \frac{p_n^{\perp}(\cos \theta)}{\theta} \cdot \theta \delta(\theta) \Big|_{\theta = 0} = 0$$

$$\theta \delta(\theta) \equiv 0$$

$$\frac{p_n^{\perp}(\cos \theta)}{\theta} \Big|_{\theta = 0} = \frac{p_n^{\perp}(\cos \theta)}{\sin \theta} \Big|_{\theta = 0} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{p_n^{\perp}(u)}{\sqrt{1-u^2}} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}} \frac{d p_n(u)}{d u} \neq \infty .$$

Er geldt dus: $- p_n^{\perp}(\cos \theta) \delta(\theta) \Big|_{-1}^1 = 0 .$

resteert: $\int_{-1}^1 \frac{\delta(\theta)}{\sin \theta} d \sin \theta p_n^{\perp}(\cos \theta) =$

$$= \int_{-1}^1 \frac{\delta(\theta)}{\sin \theta} \left\{ - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} p_n^{\perp}(\cos \theta) + \frac{1}{\sin \theta} [-n \cos \theta p_n^{\perp}(\cos \theta) + (n+1) p_{n-1}^{\perp}(\cos \theta)] \right\} d \cos \theta =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^1 \delta(\theta) \left\{ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} [(n+1) P_n^1(\cos \theta)] - \frac{n+1}{\sin \theta} P_{n-1}^1(\cos \theta) \right\} d\theta = \\
 &= \int_0^\pi \delta(\theta) \frac{n+1}{\sin \theta} \left[P_{n-1}^1(\cos \theta) - (n+1) \cos(\theta) P_n^1(\cos \theta) \right] d\theta = \\
 &= \int_0^\pi \delta(\theta) (n+1) \left[\frac{d P_{n-1}(\cos \theta)}{d \cos \theta} - \cos \theta \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right] d\theta = \\
 &= \frac{n+1}{2} \left[\frac{d P_{n-1}(\cos \theta)}{d \cos \theta} - \cos \theta \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\theta=0} = \\
 &= -n(n+1) P_n(\cos \theta) \Big|_{\theta=0} = -\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

Gebruik is gemaakt van

$$P_n^1(u) = (1-u^2)^{1/2} \frac{d P_n(u)}{du}$$

Bewijs van stelling 3.41

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (P_n^1(\cos \theta) \sin \theta) &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (P_n^1(\cos \theta)) \sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} P_n^1(\cos \theta) \cos \theta \\
 &= -\sin \theta \frac{d}{d \cos \theta} (P_n^1(\cos \theta)) + \cot \theta \sin \theta \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta} \\
 &= -\sin \theta \frac{d}{d \cos \theta} \left[\sin \theta \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right] + \cos \theta \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta} \\
 &= \frac{\sin \theta}{\sin \theta} \cos \theta \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta} - \sin^2 \theta \frac{d^2 P_n(\cos \theta)}{d \cos^2 \theta} + \cos \theta \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta} \quad \text{stel } \cos \theta = z \\
 &= 2z \frac{d P_n(z)}{dz} - (1-z^2) \frac{d^2 P_n(z)}{dz^2} = \\
 &= \frac{2z(nz P_n(z) - n P_{n-1}(z))}{z^2-1} - (1-z^2) \frac{d}{dz} \frac{nz P_n(z) - n P_{n-1}(z)}{z^2-1}
 \end{aligned}$$

$$\frac{z(z(nzP_n(z) - nP_{n-1}(z)))}{z^2-1} + \frac{(z^2-1)n(n+1)P_n(z)(z^2-1) - [nzP_n(z) - nP_{n-1}(z)]2z}{(z^2-1)^2} =$$

$$= n(n+1)P_n(z) = n(n+1)P_n(\cos\theta) \quad \text{Q.E.D.}$$

3.9 Bepaling van $\underline{E}(r, \theta, \phi)$ met behulp van additietheorema's

$$\text{rot } \underline{E} + j\omega\mu \underline{H} = \underline{0} \rightarrow \text{div } \underline{H} = 0 \leftrightarrow \underline{H} = \text{rot } \underline{A}$$

$$\text{rot } \underline{E} + j\omega\mu \text{rot } \underline{A} = \underline{0} \rightarrow \underline{E} = -j\omega\mu \underline{A} - \text{grad } \psi$$

Invullen in $\text{rot } \underline{H} - j\omega\varepsilon \underline{E} = \underline{J}_0$ geeft

$$\text{rot rot } \underline{A} - j\omega\varepsilon(-j\omega\mu \underline{A} - \text{grad } \psi) = \underline{J}_0.$$

Oftewel

$$\text{grad}(\text{div } \underline{A}) - \text{div grad } \underline{A} - \kappa^2 \underline{A} + \text{grad}(j\omega\varepsilon \psi) = \underline{J}_0.$$

ijk van Lorentz: $\text{div } \underline{A} + j\omega\varepsilon \psi = \underline{J}_0.$

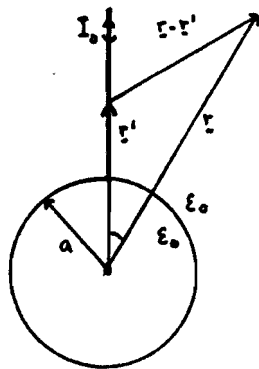
$$\nabla^2 \underline{A} + \kappa^2 \underline{A} = -\underline{J}_0 = \left(\frac{-I_0 \delta(\theta') u(r'-a)}{\pi r'^2 \sin \theta'}, 0, 0 \right).$$

De enige oplossing die ook voldoet aan de uitstralingsvoorwaarde luidt

$$\underline{A}(r, \theta, \phi) = \int_V \underline{J}_0(r') \frac{e^{-jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} dV',$$

$$|r-r'|^2 = r^2 - r'^2 - 2rr' \cos \gamma,$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi').$$



bronzpunt : r', θ', ϕ'
 observatiepunt : r, θ, ϕ

Figuur 12 Sferische coördinaten van r en r'

Volgens het additietheorema voor sferische Hankelfuncties geldt dat

$$h_0^{(2)}(k|\underline{r}-\underline{r}'|) = \frac{j e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{k|\underline{r}-\underline{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n^{(2)}(kr') j_n(kr) P_n(\cos \zeta) \quad , \quad r < r'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n^{(2)}(kr') j_n(kr) P_n(\cos \zeta) \quad , \quad r > r' .$$

In het binnengebied ($r < r'$) geldt dus:

$$\Psi \triangleq \frac{e^{-ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi j|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{k}{4\pi j} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n^{(2)}(kr') j_n(kr) P_n(\cos \zeta) .$$

Volgens het additietheorema voor Legendrepolynomen geldt dat

$$P_n(\cos \zeta) = P_n(\cos \theta') P_n(\cos \theta) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta') P_n^m(\cos \theta) \cos m(\phi - \phi') ,$$

$$\begin{aligned} \underline{E} &= -\frac{1}{j\omega} \underline{H} = -\frac{1}{j\omega} (\nabla \times \underline{A}) = -\frac{1}{j\omega} \nabla \times \int_{V'} \underline{J}_0(r') \Psi(r', r) dV' \\ &= -\frac{1}{j\omega} \int_{V'} (\nabla \times \underline{J}_0(r')) \Psi(r', r) dV' = -\frac{1}{j\omega} \int_{V'} \nabla \Psi(r', r) \times \underline{J}_0(r') dV' \\ &= \frac{1}{j\omega} \int_{V'} \nabla' \Psi(r', r) \times \underline{J}_0(r') dV' . \end{aligned}$$

waarbij opgemerkt wordt dat de operator ∇ en $\nabla \times$ werkt op de observatiepunten en ∇' op de bronpunten.

$$\begin{aligned} \nabla' \Psi(r', r) &= ((\nabla' \Psi)_{r'}, (\nabla' \Psi)_{\theta'}, (\nabla' \Psi)_{\phi'}) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r'}, \frac{1}{r'} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta'}, \frac{1}{r' \sin \theta'} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi'} \right) \\ &= \frac{k}{4\pi j} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(kr) \left[\frac{\partial h_n^{(2)}(kr')}{\partial r'} P_n(\cos \zeta), \frac{h_n^{(2)}(kr')}{r'} \frac{\partial P_n(\cos \zeta)}{\partial \theta'}, \frac{h_n^{(2)}(kr')}{r' \sin \theta'} \frac{\partial P_n(\cos \zeta)}{\partial \phi'} \right] \end{aligned}$$

De primaire stroomdichtheidsvektor $\underline{J}_0(r')$ heeft slechts een component $\neq 0$ in de \underline{r}' -richting, zodat voor de integrand van vergelijking 1 te schrijven is

$$\nabla' \Psi(r', r) \times \underline{J}_0(r') = (0, (\nabla' \Psi)_{\phi'} \underline{J}_r, -(\nabla' \Psi)_{\theta'} \underline{J}_r) .$$

We willen nu de vektorintegraal 1 opsplitsen in drie afzonderlijke scalaire integralen die overeenkomen met de orthogonale richtingscomponenten. Dit opsplitsen werkt alleen in het cartesische systeem. Daarom moet de integrandvektor van de vektorintegraal 1 die in het voorgaande is beschreven in polaire coördinaten worden omgezet in cartesische componenten.

We vinden dan voor de x-component

$$\begin{aligned} (\nabla' \Psi \times \underline{z}_0)_x &= (\nabla' \Psi)_{\phi'} \cdot \underline{z}_r \cos \theta' \cos \phi' + (\nabla' \Psi)_{\theta'} \cdot \underline{z}_r \sin \phi' = \\ &= \frac{I_0 k}{4\pi^2 j} \frac{\delta(\theta')}{r'^2 \sin \theta'} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n^{(2)}(kr')}{r'} j_n(kr') \left(\frac{\cos \theta'}{\sin \theta'} \frac{dP_n(\cos \zeta)}{d\phi'} \cos \phi' + \frac{dP_n(\cos \zeta)}{d\theta'} \sin \phi' \right). \end{aligned}$$

Er geldt

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \frac{1}{\sin \theta'} \frac{dP_n(\cos \zeta)}{d\phi'} \cos \phi' &= 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} m \sin(m(\phi - \phi')) \cos \phi' \\ &= 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \left[\frac{P_n^m(\cos \theta')}{2m \cos \theta'} + \frac{(m+n)(n-m+1)}{2m \cos \theta'} P_n^m(\cos \theta') \right] \frac{m}{2} [\sin m\phi + \sin(m(\phi - 2\phi'))] \end{aligned}$$

waarbij gebruik is gemaakt van de recurrentieformule

$$P_n^{m+1}(u) - \frac{2mu}{(1-u^2)^{1/2}} P_n^m(u) + (m+n)(n-m+1) P_n^{m-1}(u) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \frac{dP_n(\cos \zeta)}{d\theta'} \sin \phi' &= -2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \sin \theta' \frac{dP_n^m(\cos \theta')}{d \cos \theta'} \cos(m(\phi - \phi')) \sin \phi' \\ &= 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \cdot \frac{1}{2} [(n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}(\cos \theta') - P_n^{m+1}(\cos \theta')] \times \\ &\quad \frac{1}{2} (\sin(m\phi) - \sin(m(\phi - 2\phi'))) + \frac{dP_n(\cos \theta')}{d \cos \theta'} P_n(\cos \theta) \sin \phi' \end{aligned}$$

waarbij gebruik is gemaakt van de recurrentieformule

$$\frac{dP_n^m(u)}{du} = \frac{1}{2(1-u^2)^{1/2}} P_n^{m+1}(u) - (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}(u).$$

De x-component van de vektorieële integraal 1 wordt verkregen door substitutie van de resultaten a en b in vergelijking 2. Vervolgens moet worden geïntegreerd over de gehele ruimte,

$$\begin{aligned}
 F_x &= \frac{1}{j\omega} \int_{V'} (\nabla' \psi \times \underline{J}_0)_x dV' = \frac{1}{j\omega} \int_{V'} (\nabla' \psi \times \underline{J}_0 dV')_x = \\
 &= -\frac{I_0 K}{8\pi^2 \omega} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \delta(\theta') U(r'-a) \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n^{(2)}(kr')}{r'} j_n(kr) \times \\
 &\quad \left\{ \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) [2(m+n)(n-m+1) P_n^{m-1}(\cos \theta') + P_n^m(\cos \theta') - P_n^{m+1}(\cos \theta')] \times \right. \\
 &\quad \left. (\sin m\phi - \sin(m(\phi-2\phi'))) + \frac{dP_n(\cos \theta')}{d \cos \theta'} P_n(\cos \theta) \sin \phi' \right\} dr' d\theta' d\phi'.
 \end{aligned}$$

Door de zeefeigenschap leveren de termen met $P_n^m(\cos \theta')$ en $P_n^{m+1}(\cos \theta')$ geen bijdrage omdat $P_n^m(1) = 0$ voor $m \geq 1$ en omdat er verder geen singulariteiten in de uitdrukking voorkomen. De term met $P_n(\cos \theta')$ levert ook geen bijdrage, behalve voor $m=1$. De term met $\sin \phi'$ levert geen bijdrage door integratie naar ϕ' met integratie-interval 2π . Hetzelfde geldt voor de term met $\sin(m(\phi-2\phi'))$. Er resteert:

$$F_x = \frac{-I_0 K}{4\pi \omega} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) P_n'(\cos \theta) j_n(kr) \sin \phi \int_a^\infty \frac{h_n^{(2)}(kr')}{r'} dr'.$$

Voor de y-component van de integrand-vektor van vergelijking 1 schrijven we

$$(\nabla' \psi \times \underline{J}_0)_y = (\nabla' \psi)_{\phi'} J_r \cos \theta' \sin \phi' - (\nabla' \psi)_{\theta'} J_r \cos \phi'.$$

Op analoge wijze is dan af te leiden dat

$$F_y = \frac{I_0 K}{4\pi \omega} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) P_n'(\cos \theta) j_n(kr) \cos \phi \int_a^\infty \frac{h_n^{(2)}(kr')}{r'} dr'.$$

Voor de z-component van de integrand-vektor schrijven we

$$\begin{aligned}
 (\nabla' \Psi \times \underline{j}_0)_{\underline{z}} &= -(\nabla' \Psi)_{\phi'} j_r \sin \theta' = \\
 &= \frac{I_0 k}{4\pi^2 j} \frac{\delta(\theta') U(r'-a)}{\sin \theta'} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(\kappa r')}{r'} j_n(\kappa r) \left[p_n(\cos \theta') p_n(\cos \theta) \sin \theta' + \right. \\
 &\quad \left. 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} p_n^m(\cos \theta') p_n^m(\cos \theta) \sin \theta' \cos(m(\phi - \phi')) \right].
 \end{aligned}$$

Bij integratie naar θ' levert de eerste term van het rechterlid geen bijdrage door de zeefeigenschap van $\delta(\theta')$. De tweede term levert eveneens geen bijdrage door integratie naar ϕ' met integratie-interval 2π zodat geldt:

$$F_z = 0.$$

De elektrische vektorpotentialiaal \underline{F} is nu bepaald in cartesiaanse componenten. We zijn echter geïnteresseerd in diens polaire componenten. Deze zijn gemakkelijk af te leiden als volgt:

$$F_r = F_x \sin \theta \cos \phi + F_y \sin \theta \sin \phi - F_z \cos \theta = 0$$

$$F_\theta = F_x \cos \theta \cos \phi + F_y \cos \theta \sin \phi - F_z \sin \theta = 0$$

$$F_\phi = F_x (-\sin \phi) + F_y \cos \phi.$$

Conclusie:

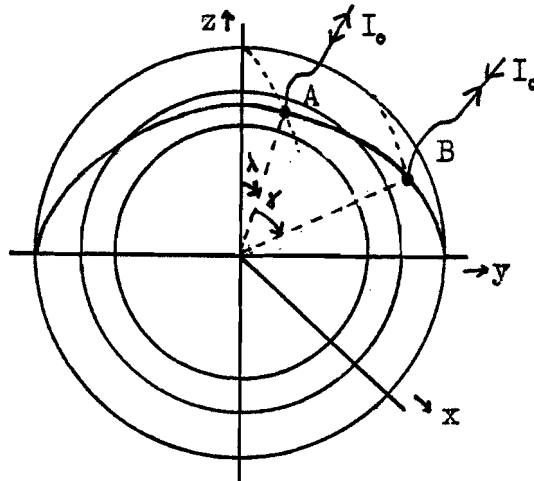
$$F_r = F_\theta = 0$$

$$F_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{I_0 k}{4\pi \omega} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) p_n^1(\cos \theta) j_n(\kappa r) \int_a^{\infty} \frac{h_n(\kappa r')}{r'} dr'$$

hetgeen overeenkomt met (3.29).

4. NUMERIEKE RESULTATEN

Bij de numerieke berekening van het \underline{E} -veld als functie van de plaats binnen de schedel wordt uitgegaan van een drie-bollenmodel met variabele elektropositiviteiten volgens figuur 13.



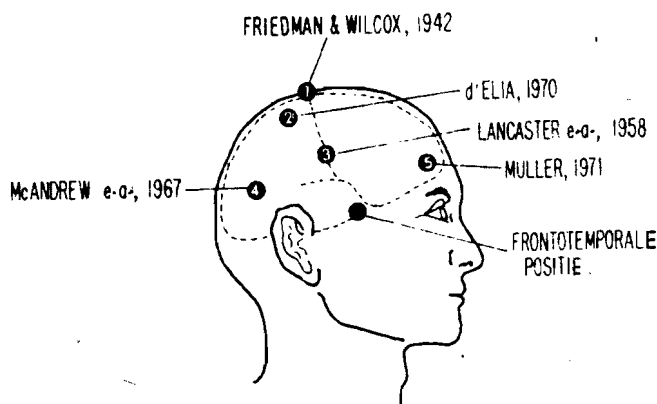
Figuur 13 Drie-bollenmodel met variabele elektropositiviteiten

4.1 Elektrodeposities

De posities van de afzonderlijke elektrodes worden gekarakteriseerd door de hoeken λ en γ . De plaats van elektrode A wordt geheel vastgelegd door hoek λ . Deze elektrode zal zich altijd bevinden op de cirkelvormige doorsnijding van het x-z vlak met de (bolvormige) huid-lucht overgang. De plaats van elektrode B wordt vastgelegd door hoek λ en hoek γ . Elektrode B zal zich altijd bevinden op de cirkelvormige doorsnijding van het platte vlak waarin zowel beide elektrodes als ook de y-as gelegen zijn en het scheidingsvlak tussen huid en lucht.

We kunnen ons voorstellen dat deze bolconfiguratie het hoofd van de patiënt voorstelt die in de richting kijkt van de negatieve x-as, zoals is weergegeven op de omslag. We kijken dus op diens achterhoofd. Indien hoek $\lambda=10^\circ$ gekozen wordt, dan bevindt elektrode A zich ter hoogte van de vertex. Deze positie komt bij benadering overeen met de Friedman & Wilcox-plaatsing en de d'Elia-plaatsing. Als $\gamma=80^\circ$ dan bevindt elektrode B zich aan de zijkant van het hoofd midden tussen het oog en oor. Dit komt bij benadering

overeen met de frontotemporale plaatsing. Deze specifieke anatomische locaties die corresponderen met de gebruikelijke unilaterale ECT elektrodeposities zijn weergegeven in figuur 14.



Figuur 14 In de klinische praktijk gangbare elektrodeposities

In het geval van bilateraal ECT is de positie van elektrode B gelijk aan die in het unilaterale geval, terwijl elektrode A gespiegeld ligt ten opzichte het x-z vlak. De hoeken λ en γ beschrijven wederom de elektrodeplaatsen. De keuze $\lambda=10^\circ$ en $\gamma=80^\circ$ komt in goede benadering overeen met de frontotemporale plaatsing.

4.2 Representatie van de resultaten

Met betrekking tot de beschrijving van het \underline{E} -veld (c.q. het \underline{J} -veld) zijn de volgende grootheden van belang:

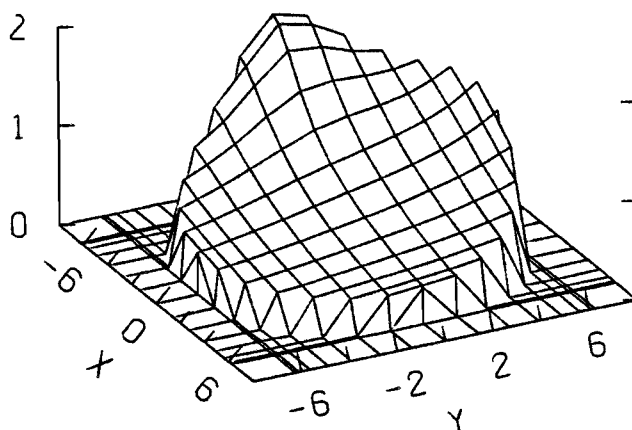
- a. De moduli van de afzonderlijke r-, e- en \varnothing -componenten van het \underline{E} -veld als functie van de plaats in de schedel.
- b. De argumenten van de afzonderlijke r-, e- en \varnothing -componenten van het \underline{E} -veld als functie van de plaats binnen de schedel.

Alhoewel in principe alle benodigde informatie uit de modulus en fase van de afzonderlijke componenten verkregen kan worden, is het uit energetisch oogpunt nuttig ook de modulus en richting van het totale \underline{E} -veld te beschrijven.

Ter bepaling van het intracraniale \underline{E} -veld is het computer-programma "ELECTROSHOCK" ontwikkeld.

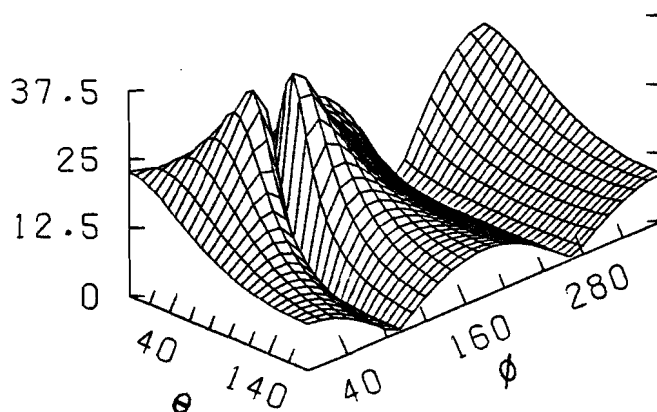
Een korte beschrijving van het computerprogramma is in bijlage II toegevoegd. Er wordt gebruik gemaakt van een pakket procedures voor het maken van tekeningen. Op deze wijze kan het programma grafieken genereren waarin modulus of argument als functie van twee plaatsvariabelen wordt uitgebeeld in de vorm van een tweedimensionaal functieoppervlak. Verder kunnen plaatjes worden gemaakt waarin de richting van het veld wordt beschreven door middel van pijltjes. Er worden vier soorten plaatjes gebruikt.

1. Figuren waarbij een horizontale doorsnede van het hoofd wordt beschouwd. De patiënt kijkt hierbij in de negatieve x-richting. Omdat deze doorsnede is gelegen in het vlak $z=\text{constant}$ wordt bij de plaatjes de z-coördinaat als parameter opgegeven. Boven deze cirkelvormige doorsnede is het functie-oppervlak getekend, dat de modulus van het \underline{E} -veld op die doorsnede als functie van de x-en y-coördinaat voorstelt. Met behulp van dit soort plaatjes is het mogelijk snel een indruk te krijgen van het veld verloop. De stroomdichtheid kan uit het \underline{E} -veld berekend worden door middel van de relatie $\underline{J}=\sigma\underline{E}$. Een voorbeeld van een 1e soort-plaatje is weergegeven in figuur 15.



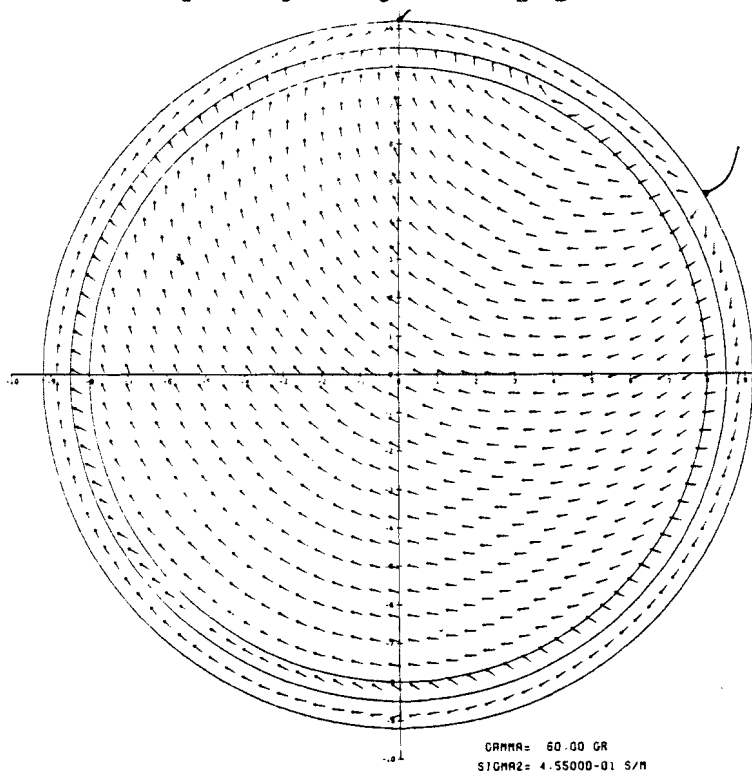
Figuur 15 1e soort-plaatje

2. Plaatjes waarbij een bolvormig oppervlak wordt beschouwd. Het functie-oppervlak stelt de modulus dan wel het argument voor van de stroomdichtheid als functie van de θ - en ϕ -coördinaat bij vaste R. R wordt bij de plaatjes opgegeven. Hierbij is λ steeds gelijk aan 0° gesteld. Een voorbeeld van een 2e soort-plaatje is weergegeven in figuur 16.



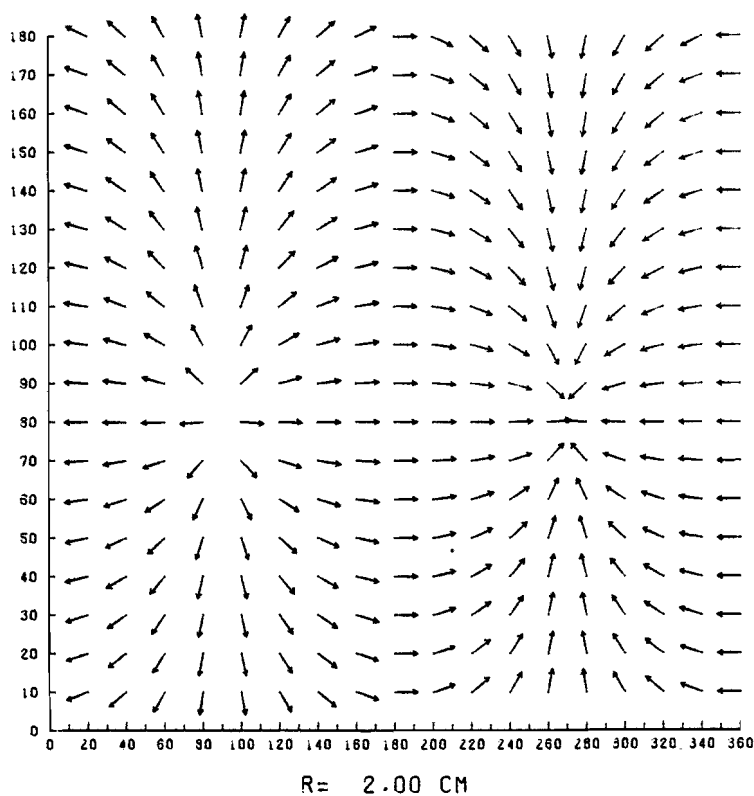
Figuur 16 2e soort-plaatje

3. Plaatjes waarbij het platte vlak wordt beschouwd waarin het middelpunt en de beide elektrodes gelegen zijn. Wat betreft de elektrodeposities is de grootte van hoek λ dus niet van belang. De richting van het vektorveld op dit vlak binnen de bolconfiguratie wordt door middel van pijltjes aangegeven. Omdat het soortelijk geleidingsvermogen een scalar is, is de richting van de \underline{E} - en de \underline{J} -vektor dezelfde. Een voorbeeld van een 3e soort-plaatje zijn weergegeven in figuur 17.



Figuur 17 3e soort-plaatje

4. Plaatjes waarbij een bolvormig oppervlak wordt beschouwd. De richting van de veldbijdrage van de tangentiële (θ en ϕ) componenten op dat oppervlak wordt door middel van pijltjes weergegeven als functie van de θ -en ϕ -coördinaat. Straal R wordt bij de plaatjes als parameter opgegeven. De eveneens op het boloppervlak aanwezige r -component wordt in dit soort plaatjes niet afgebeeld. Wat betreft de elektrodeposities geldt steeds: $\lambda=0^\circ$. Een voorbeeld van een 4e soort-plaatje is weergegeven in figuur 18.



Figuur 18 4e soort-plaatje

4.3 Parameterwaarden

De bij de plaatjes behorende default-waarden voor alle relevante parameters zijn in tabel 3 weergegeven.

Tabel 3 Defaultwaarden

parameter	symbool	waarde
-stroom in de elektrodeleidingen	I_0	1 Amp. (amplitude-sinusvorm)
-soortelijk geleidingsvermogen van gebied 1	σ_{hersen}	0,455 S/m
-soortelijk geleidingsvermogen van gebied 2	σ_{bot}	0,0057 S/m
-soortelijk geleidingsvermogen van gebied 3	σ_{huid}	0,455 S/m
-frequentie	f	50 Hz
-de relatieve permittiviteit in gebied 1 en 3	K	107400
-de relatieve permittiviteit in gebied 2	K_{bot}	1500
-radius hersen-bot overgang	R_a	8.0 cm
-radius bot-huid overgang	R_b	8.5 cm
-radius huid-lucht overgang	R_c	9.2 cm
-elektrode posities bij 1e soort-plaatjes	λ	-40° unilateraal
-elektrode posities bij 2e en 4e soort-plaatjes	γ λ	60° 0° } unilateraal
-elektrode posities bij 3e soort-plaatjes	γ	60° unilateraal

4.4 Resultaten

Indien we het computerprogramma "Electroshock" het reële en imaginaire deel van de afzonderlijke componenten van het \underline{E} -veld binnen de bolconfiguratie laten berekenen zien we dat geldt:

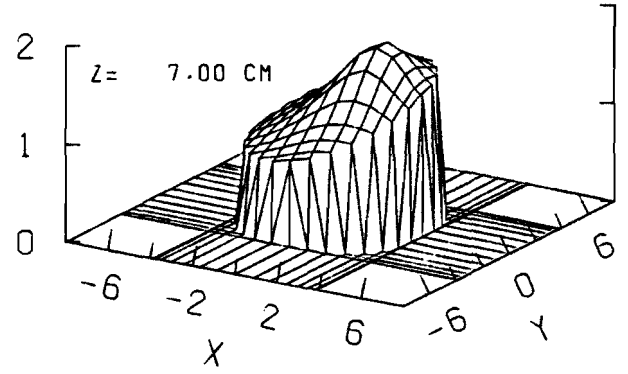
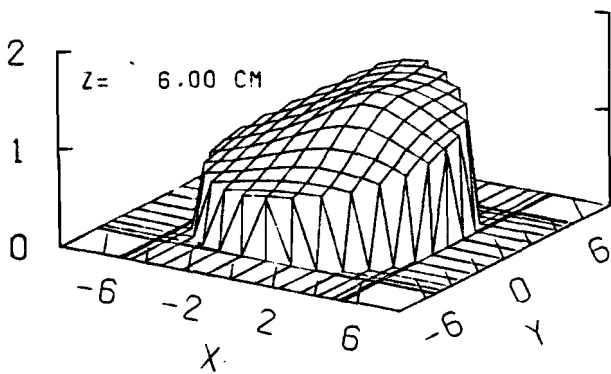
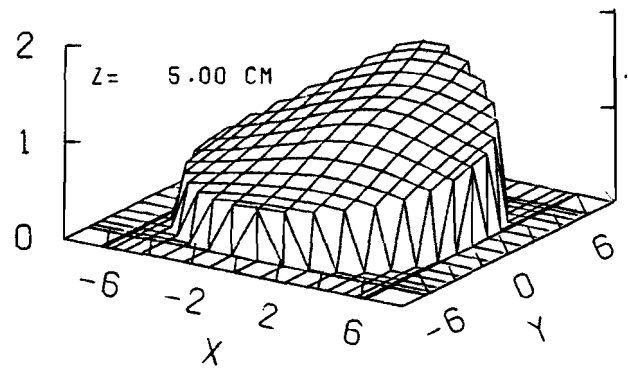
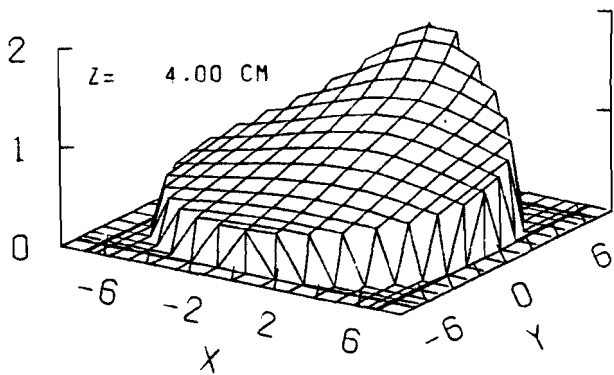
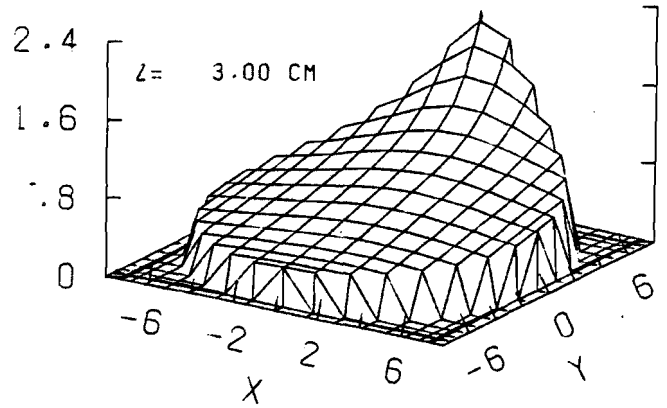
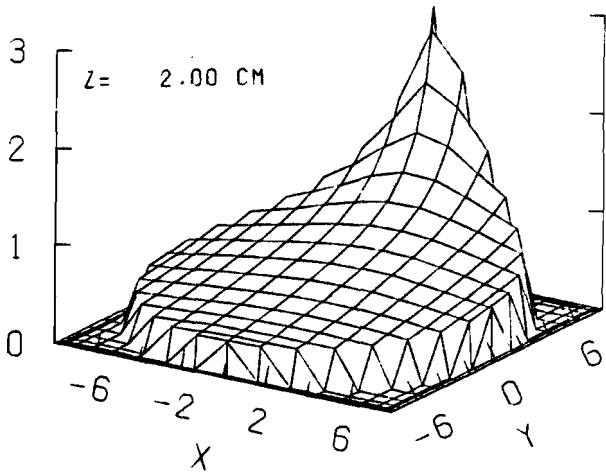
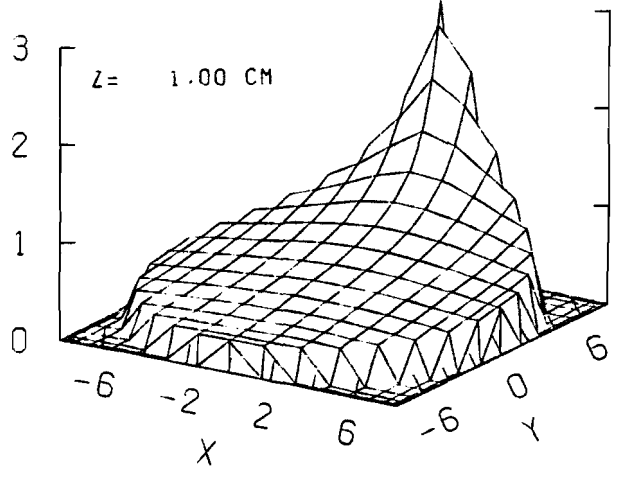
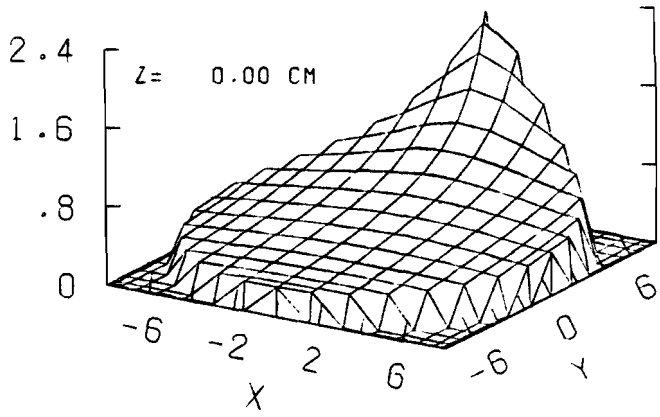
$$\arctan \left(\frac{\operatorname{Im} \{E_r\}}{\operatorname{Re} \{E_r\}} \right) \approx \arctan \frac{\operatorname{Im} \{E_\theta\}}{\operatorname{Re} \{E_\theta\}} \approx \arctan \frac{\operatorname{Im} \{E_\phi\}}{\operatorname{Re} \{E_\phi\}}$$

Er is sprake van een vrijwel lineair gepolariseerd veld. Dat wil zeggen, dat als we op een willekeurige plaats de \underline{E} -vektor (en dus de \underline{J} -vektor) observeren deze vrijwel niet ronddraait, maar langs een rechte lijn beweegt.

In figuur 19 worden de moduli van het \underline{E} -veld gegeven op acht horizontale doorsnedes (le soort-plaatjes). Dit veld is het gevolg van een sinusvormige stroom met een amplitude van 1 Ampère. Dit is ongeveer de waarde die overeenkomt met de in de klinische praktijk toegevoerde stroom. Er is sprake van een vertex-temporale elektrodeplaatsing. Het betreft hierbij slechts het intracraniale \underline{E} -veld omdat de veldsterkte in de botlaag vele malen groter is dan de veldsterkte in het hersengebied, zodoende is het niet goed mogelijk in een plaatje de veldsterktes in beide gebieden te beschrijven.

We zien dat bij $z=0$ cm lateraal (aan de zijkant van het hoofd) de grootste veldsterkte optreedt. Dit is in overeenstemming met de verwachting dat de veldsterkte onder de laterale elektrode maximaal is. De maximale amplitude van het elektrische veld bedraagt ongeveer 2 V/cm. De laterale elektrode is dichterbij het vlak $z=1$ gelegen dan bij het vlak $z=0$. We constateren daar dan ook een grotere veldsterktepiek in het laterale gebied. In de hoger gelegen doorsnedes is te zien hoe het veld in de buurt van de boven op het hoofd geplaatste elektrode toeneemt, bij een kleiner wordende afstand tot deze elektrode.

De verhouding van de hoogste en laagste waarde van het elektrische veld in de hersenen bedraagt ongeveer een factor 6. Het veld ter plaatse van een willekeurig punt in de linker hemisfeer is steeds kleiner dan het veld ter plaatse van het daarmee corresponderende punt in de rechter hemisfeer. Voorts blijkt dat de gemiddelde stroomdichtheid in de rechter hemisfeer ongeveer een factor 2 groter is dan die in de linkerhelft.

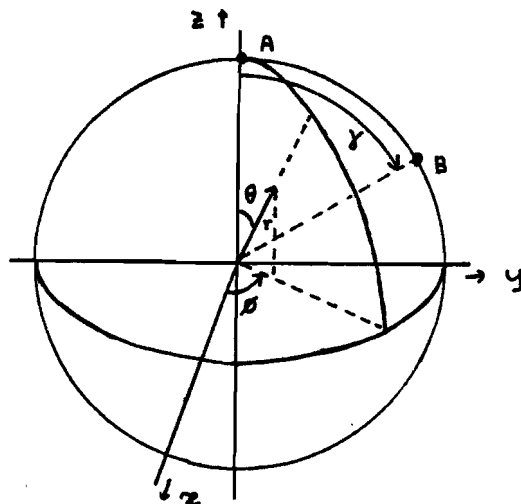


Figuur 19 Moduli van het E -veld (V/cm) bij unilateraal ECT $\gamma = 80^\circ$, $\lambda = 10^\circ$

De 1e soort-plaatjes van figuur 20 beschrijven de moduli van het \underline{E} -veld op verschillende horizontale doorsnedes bij bilateraal ECT. In dat geval is de positie van elektrode B gelijk aan die in het unilaterale geval terwijl elektrode A gespiegeld ligt ten opzichte van het vlak $y=0$. We constateren dat de veldsterktes bij iedere horizontale doorsnede op de z -as aan elkaar gelijk zijn. De verhouding van de grootste en de kleinste waarde van het \underline{E} -veld bedraagt ongeveer een faktor 3.

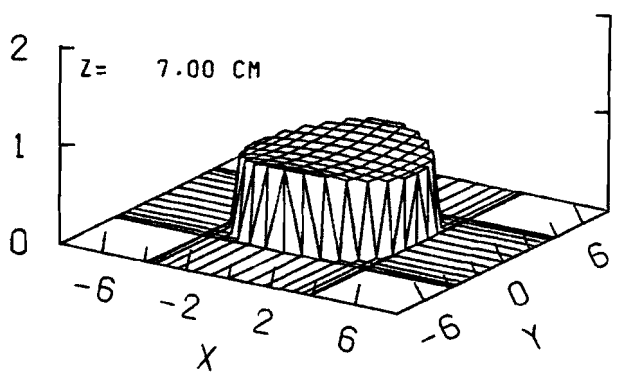
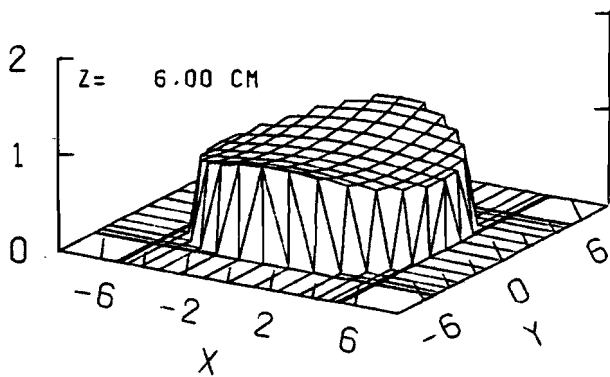
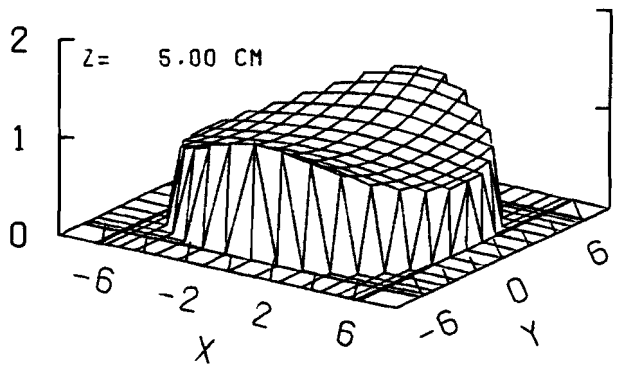
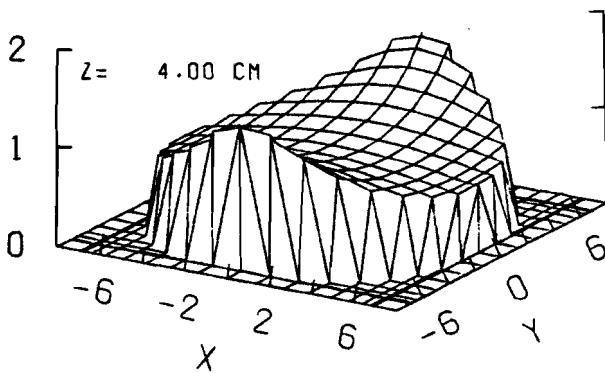
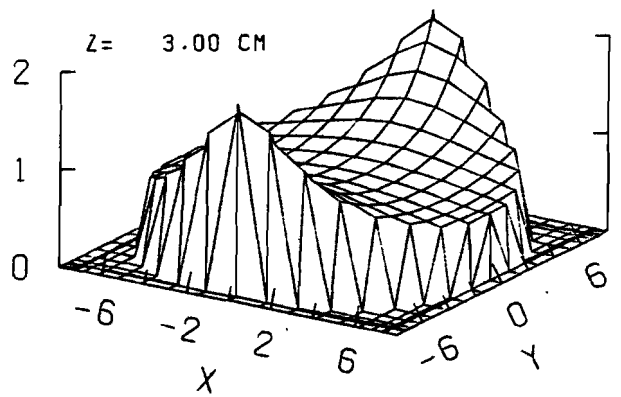
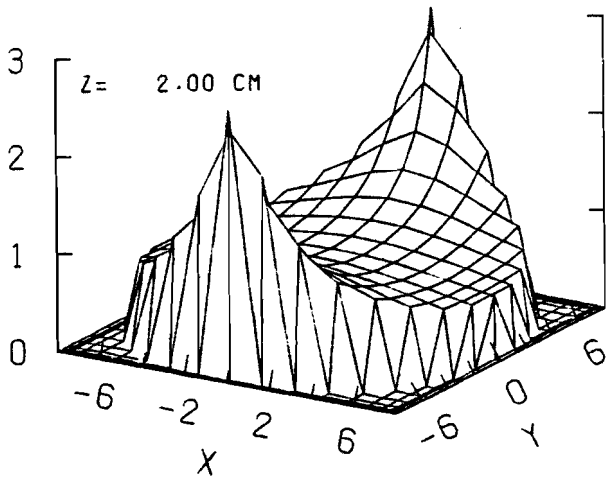
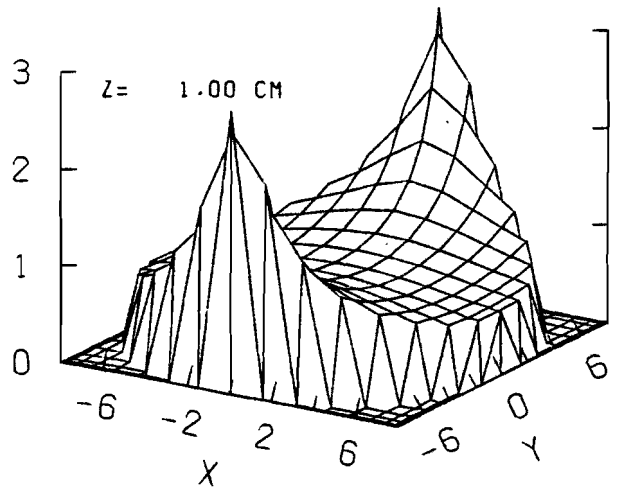
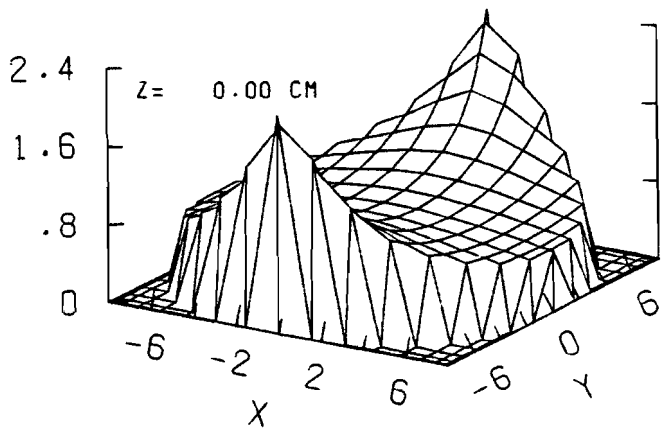
Door vergelijking van figuur 19 en 20 is te zien dat de veldverdeling bij bilaterale elektrodeplaatsing gelijkmatiger is dan bij unilaterale plaatsing, met name bij de hoger gelegen doorsnedes. Voorts blijkt dat de gemiddelde intracraniale stroomdichtheid bij de unilaterale elektrodeplaatsing slechts ongeveer 70% van het gemiddelde bij bilaterale plaatsing bedraagt.

De 2e soort-plaatjes van figuur 22 beschrijven de moduli van het stroomdichtheidsveld op vijf, binnen de hersenmaterie gelegen concentrische boloppervlakken. Met name is van belang het gebied $0^\circ > \vartheta > 90^\circ$ omdat hier zich de hersenmaterie in bevindt. De situatie bij $\lambda=0^\circ$ wordt weergegeven in figuur 21. Figuur 22 behoort bij de configuratie van figuur 21.

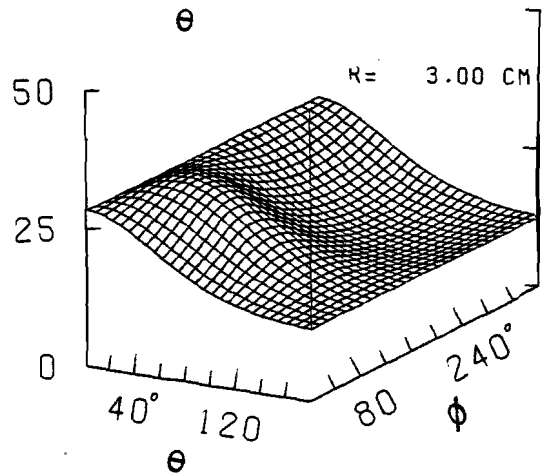
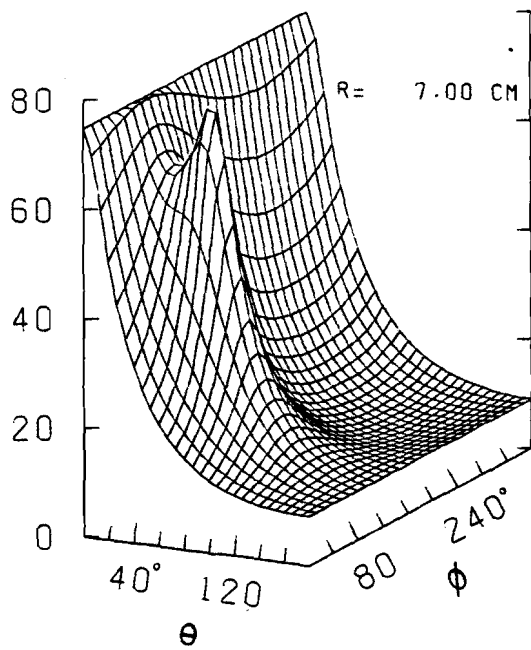
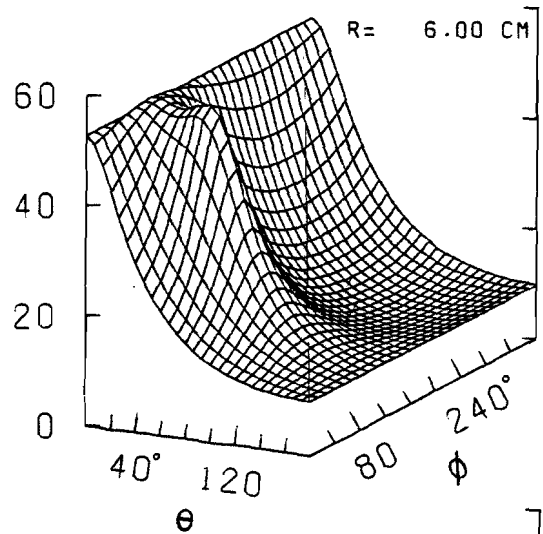
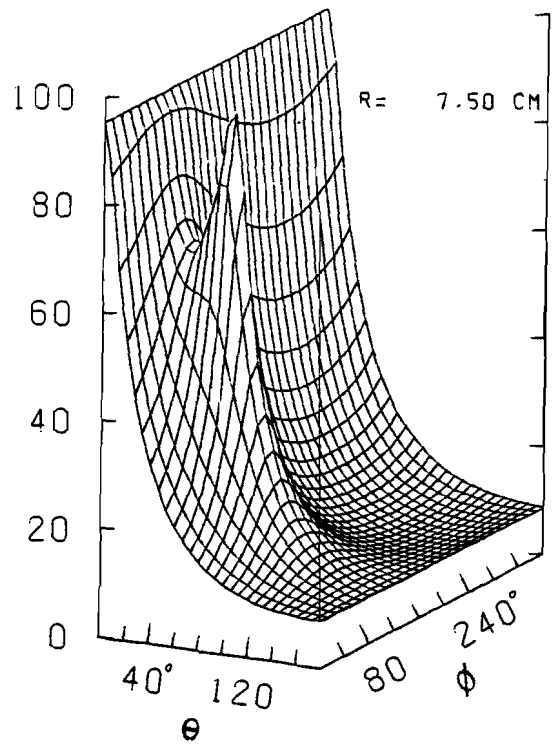
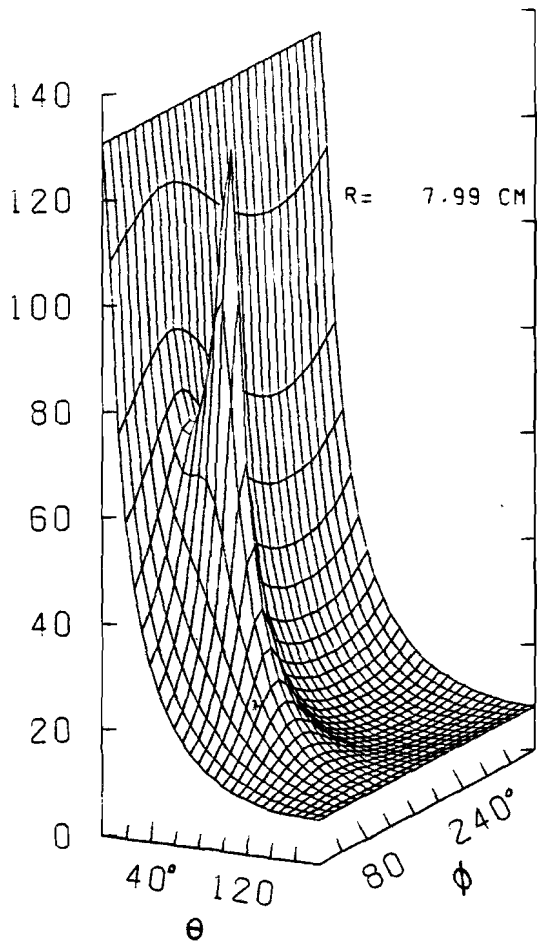


Figuur 21 Situatie bij $\lambda=0^\circ$ en $\gamma=60^\circ$.

Ook aan deze grafieken zien we dat het \underline{E} -veld groter is naarmate het beschouwde gebied dichter bij de elektrodes ligt. De grootste variatie wordt verkregen als θ gevarieerd wordt bij $\vartheta=90^\circ$.



Figuur 20 Moduli van het \underline{E} -veld (V/cm) bij bilateraal ECT $\gamma = 80^\circ$, $\lambda = 10^\circ$



Figuur 22 Moduli van het J -veld (A/m²) bij unilateraal ECT

De 2e soort-plaatjes van figuur 23 beschrijven de moduli van de afzonderlijke r , θ - en ϕ -component van de stroomdichtheidsvektor en de daarbij behorende fasen op het boloppervlak met straal $R=7,99$ cm. Dit oppervlak bevindt zich nog juist binnen het hersengebied. (Het grens-oppervlak tussen het hersen- en botgebied wordt gegeven door radius $R=8,00$ cm.)

Voor σ_{hersen} , σ_{bot} en σ_{huid} zijn iets andere waarden genomen dan de default-waarden in tabel 3. Deze zijn namelijk alle met faktor 1,1 vermenigvuldigd, zodat een gemakkelijke waarde voor σ_{hersen} resulteert (0,5 S/m). Het \underline{E} -veld kan dan worden verkregen volgens $\underline{E}=\underline{J}/\sigma$ door de resultaten simpelweg te vermenigvuldigen met een faktor 2.

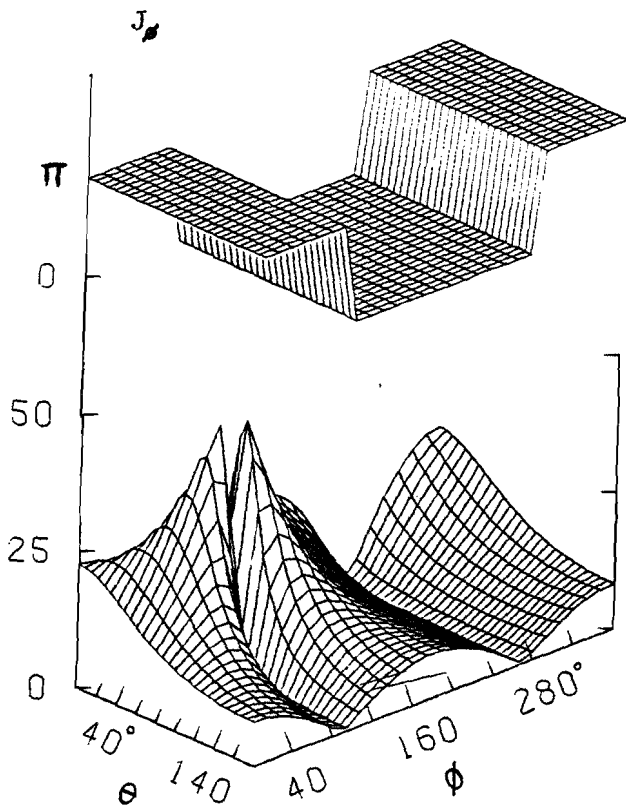
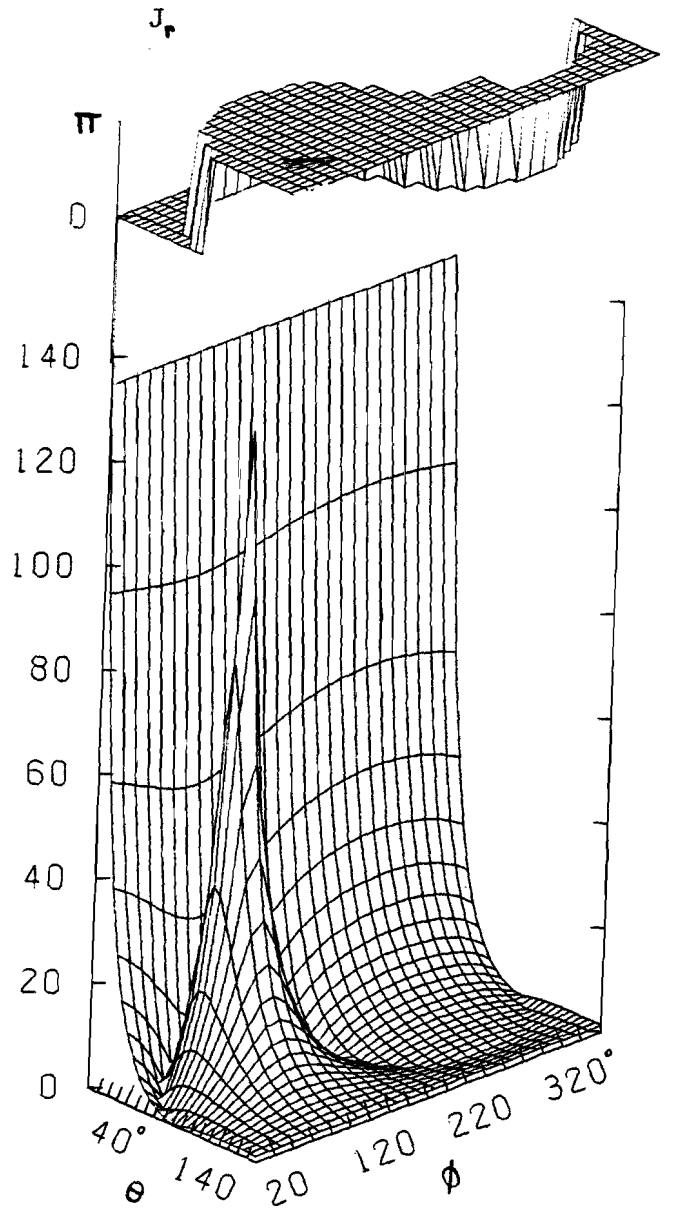
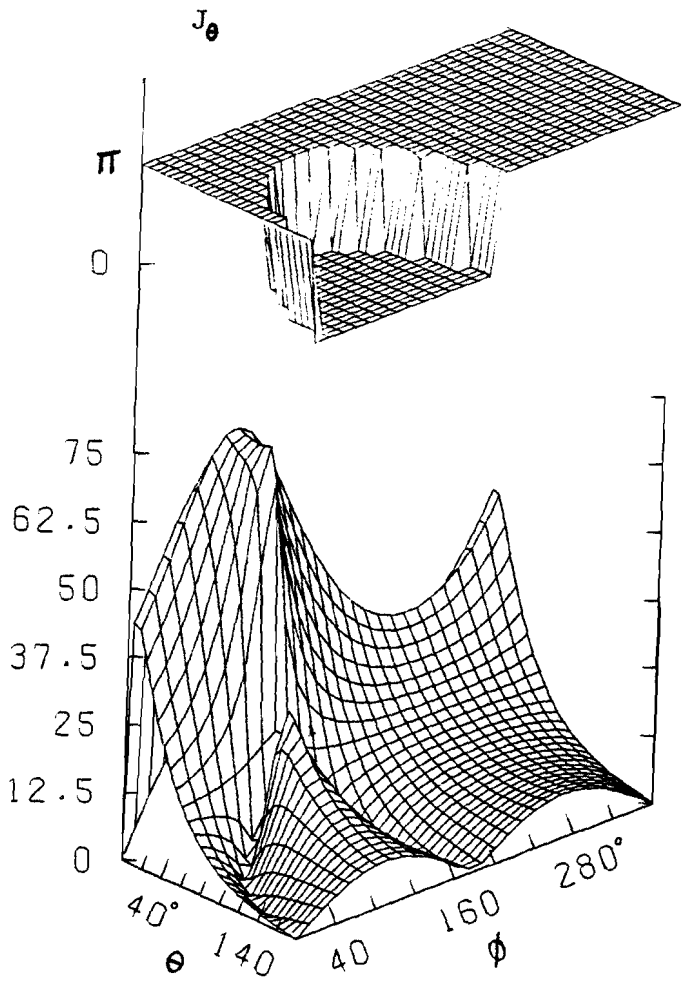
In een willekeurig punt op het boloppervlak geldt, dat de fase van de afzonderlijke componenten 0 of π is. Dit betekent, dat het veld in elk willekeurig punt van het beschouwde oppervlak in fase is met de stroom. De $0-\pi$ fase-overgangen die in de faseplaatjes zichtbaar zijn, zijn ook in de modulusplaatjes duidelijk waarneembaar.

Uitgaande van het plaatje voor J_p kan, door middel van integratie over het totale scheidingsvlak, het gedeelte van de in totaal toegevoerde stroom worden bepaald dat in de hersenen terecht komt.

Op deze wijze is bepaald, dat bij $\gamma=60^\circ$ (overeenkomend met vertex-temporale plaatsing volgens d'Elia) ongeveer 40% van de totale stroom door de hersenen gaat.

De 2e soort-plaatjes van figuur 24 t/m 27 beschrijven de moduli van de afzonderlijke r , θ - en ϕ -componenten van de stroomdichtheid en de daarbij behorende fasen met R als parameter.

Kijkende langs een radius neemt de radiale component van de stroomdichtheid sterker af dan de θ - en ϕ componenten; dit blijkt door beschouwen van achtereenvolgens de figuren 24, 25, 26 en 27. De fasen behorende bij de verschillende moduli zijn bij de verschillende waarden van de R -parameter vrijwel hetzelfde.



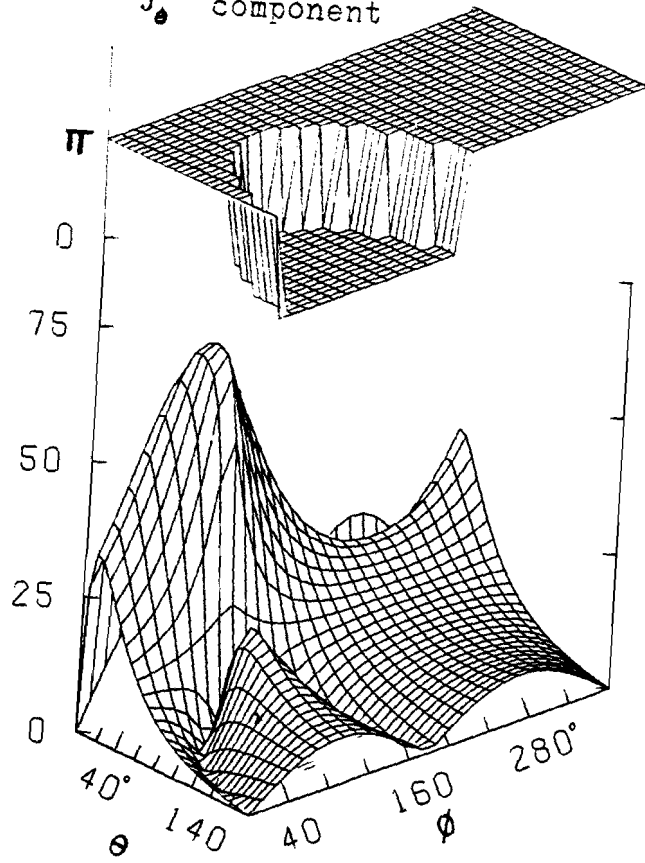
SIGMA1= 5.00000-01 S/M

SIGMA2= 6.30000-03 S/M

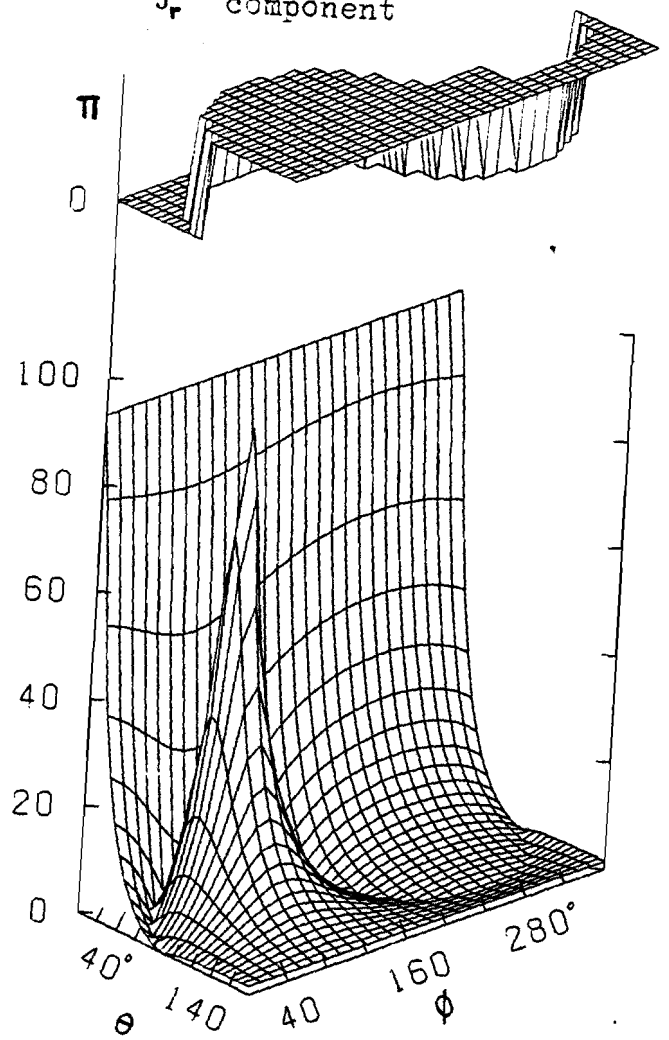
SIGMA3= 5.00000-01 S/M

Figuur 23 Moduli van J_r , J_θ en J_ϕ (A/m^2) en de bijbehorende fasen bij unilateraal ECT $R= 7.99$ cm

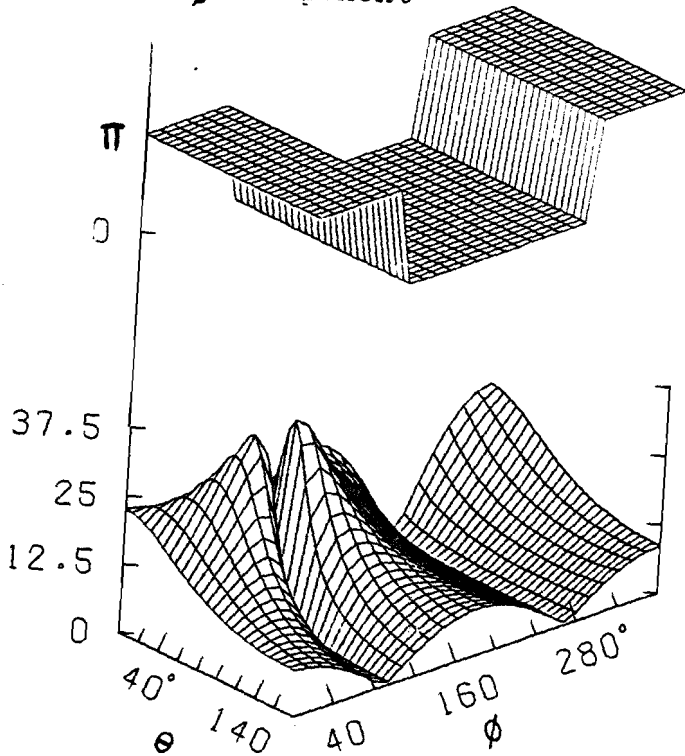
J_θ component



J_r component

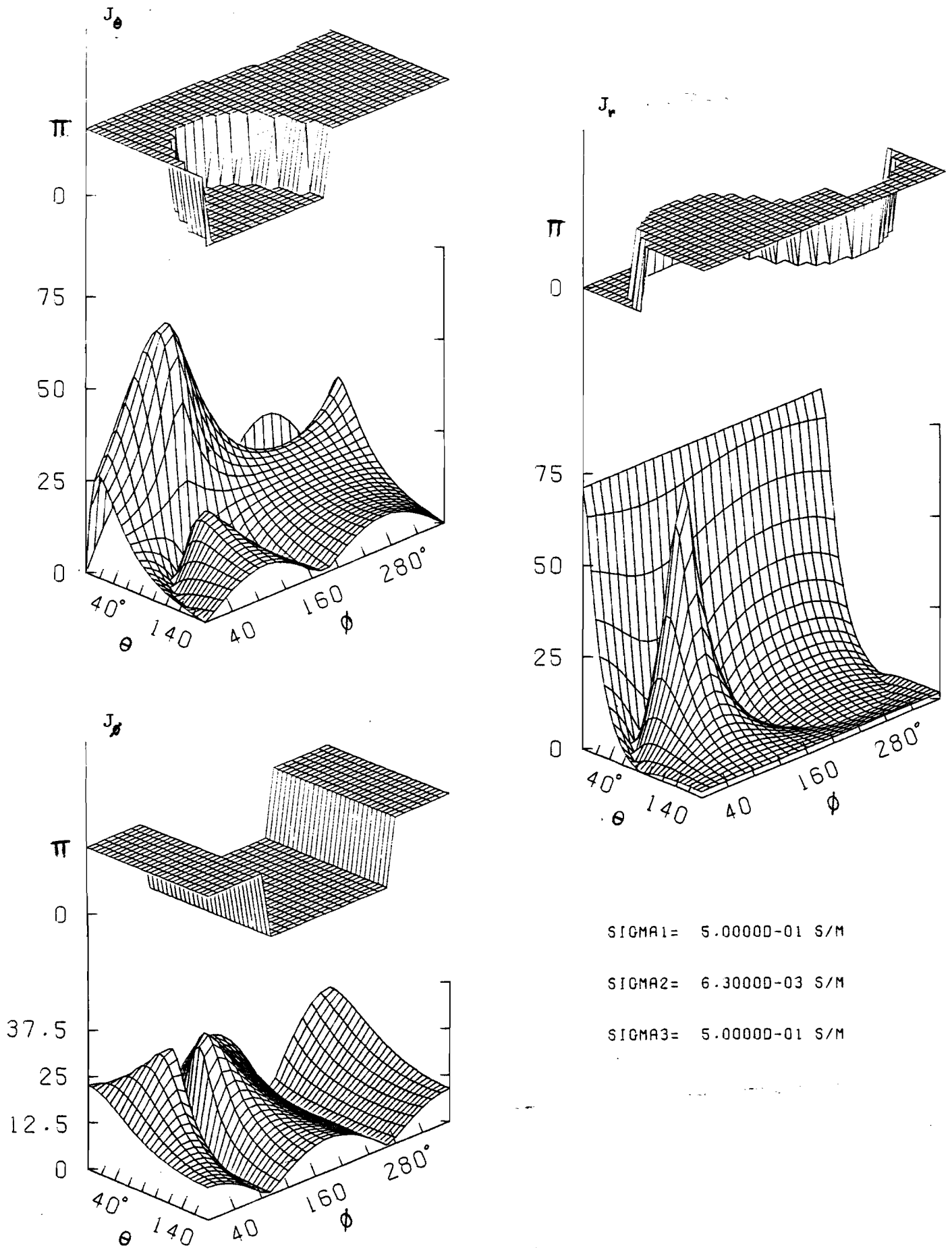


J_ϕ component

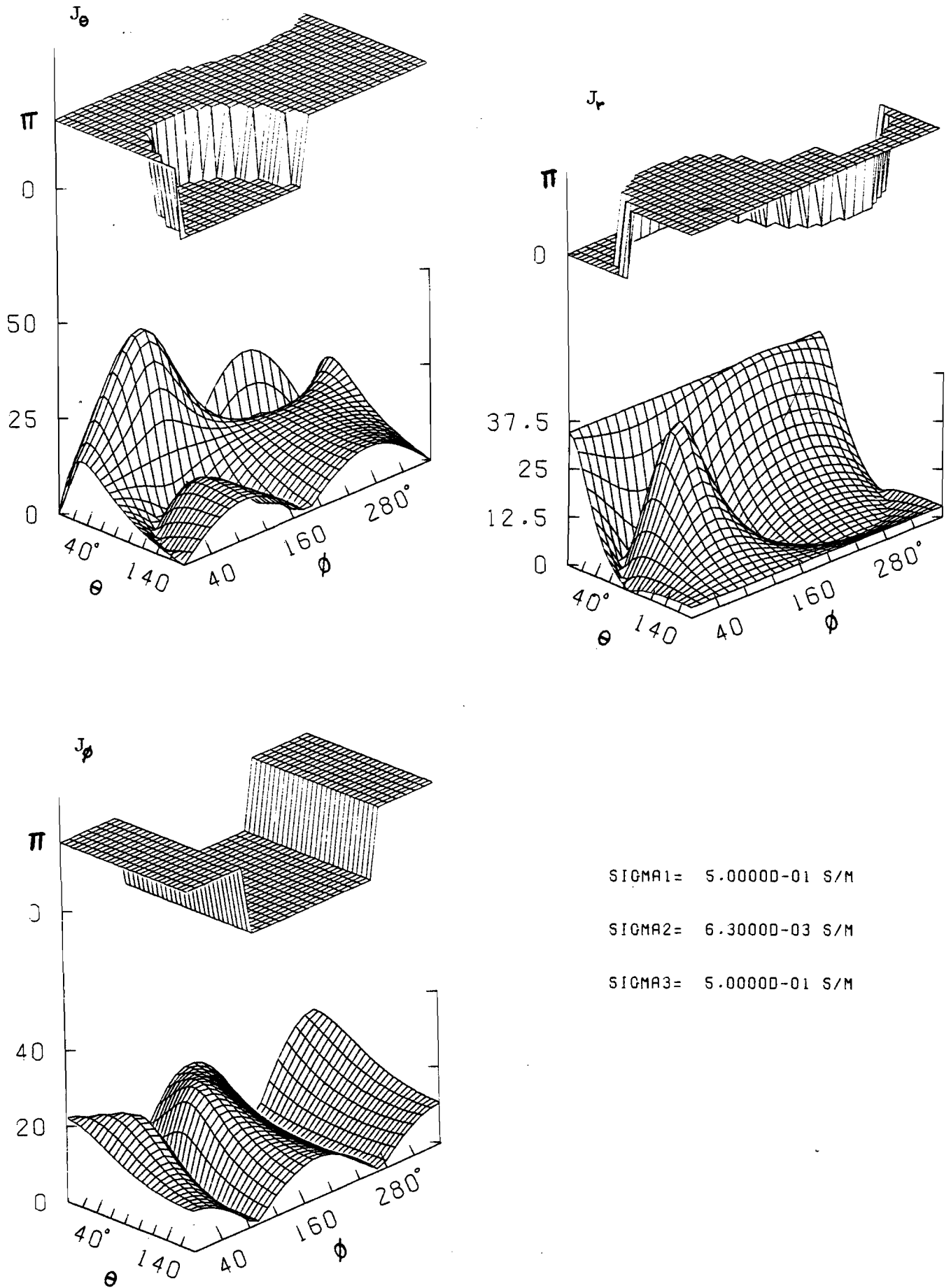


SIGMA1= 5.00000-01 S/M
SIGMA2= 6.30000-03 S/M
SIGMA3= 5.00000-01 S/M

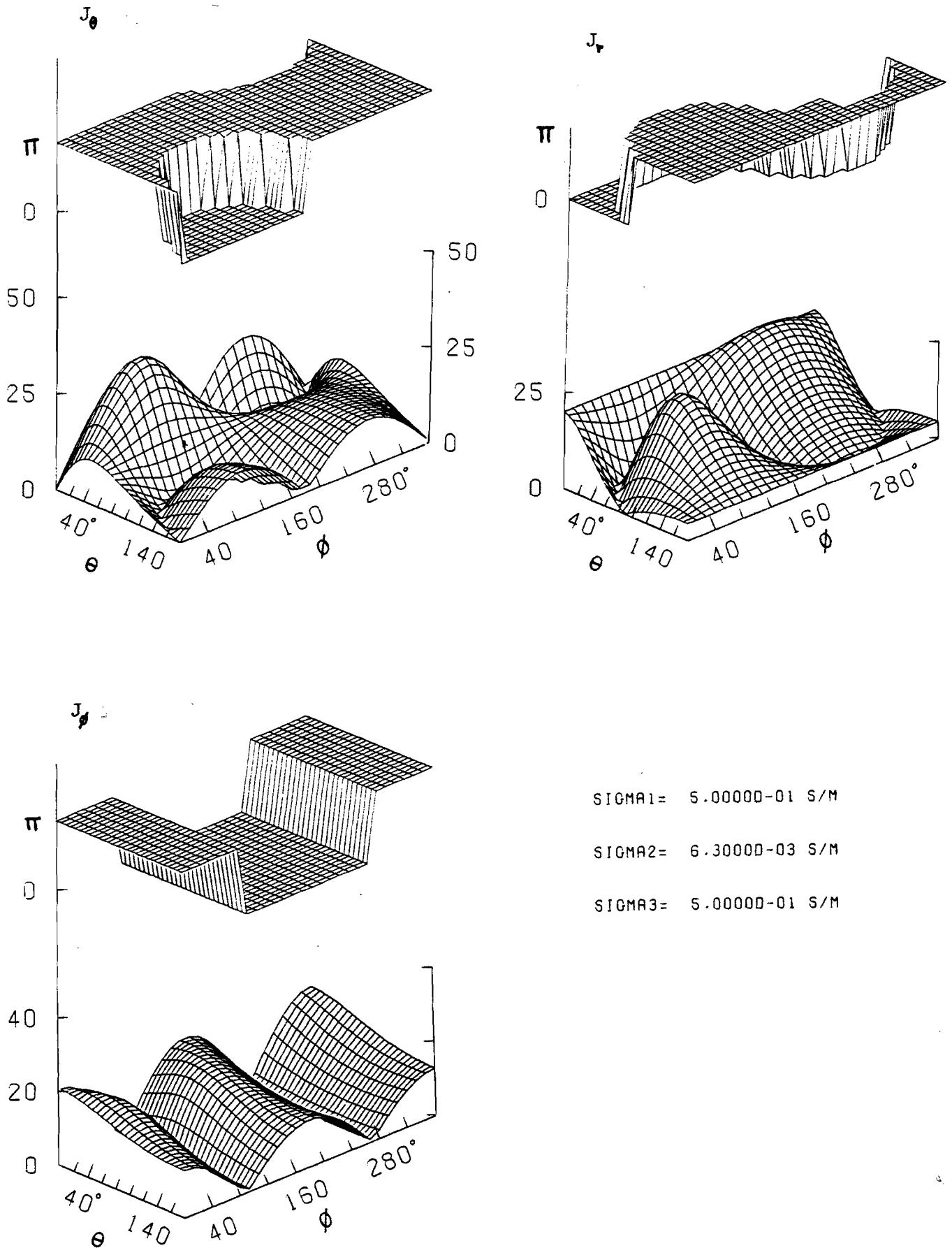
Figuur 24 Moduli van J_r , J_θ en J_ϕ (A/m^2) en de bijbehorende fasen bij unilateraal ECT $R= 7.50$ cm



Figuur 25 Moduli van J_r , J_θ en J_ϕ (A/m^2) en de bijbehorende fasen bij unilateraal ECT
 $R= 7.00$ cm



Figuur 26 Moduli van J_r , J_e en J_ϕ (A/m^2) en de bijbehorende fasen bij unilateraal ECT
 $R= 5.00$ cm



Figuur 27 Moduli van J_r , J_0 en J_ϕ (A/m^2) en de bijbehorende fasen bij unilateraal ECT
 $R= 3.00$ cm

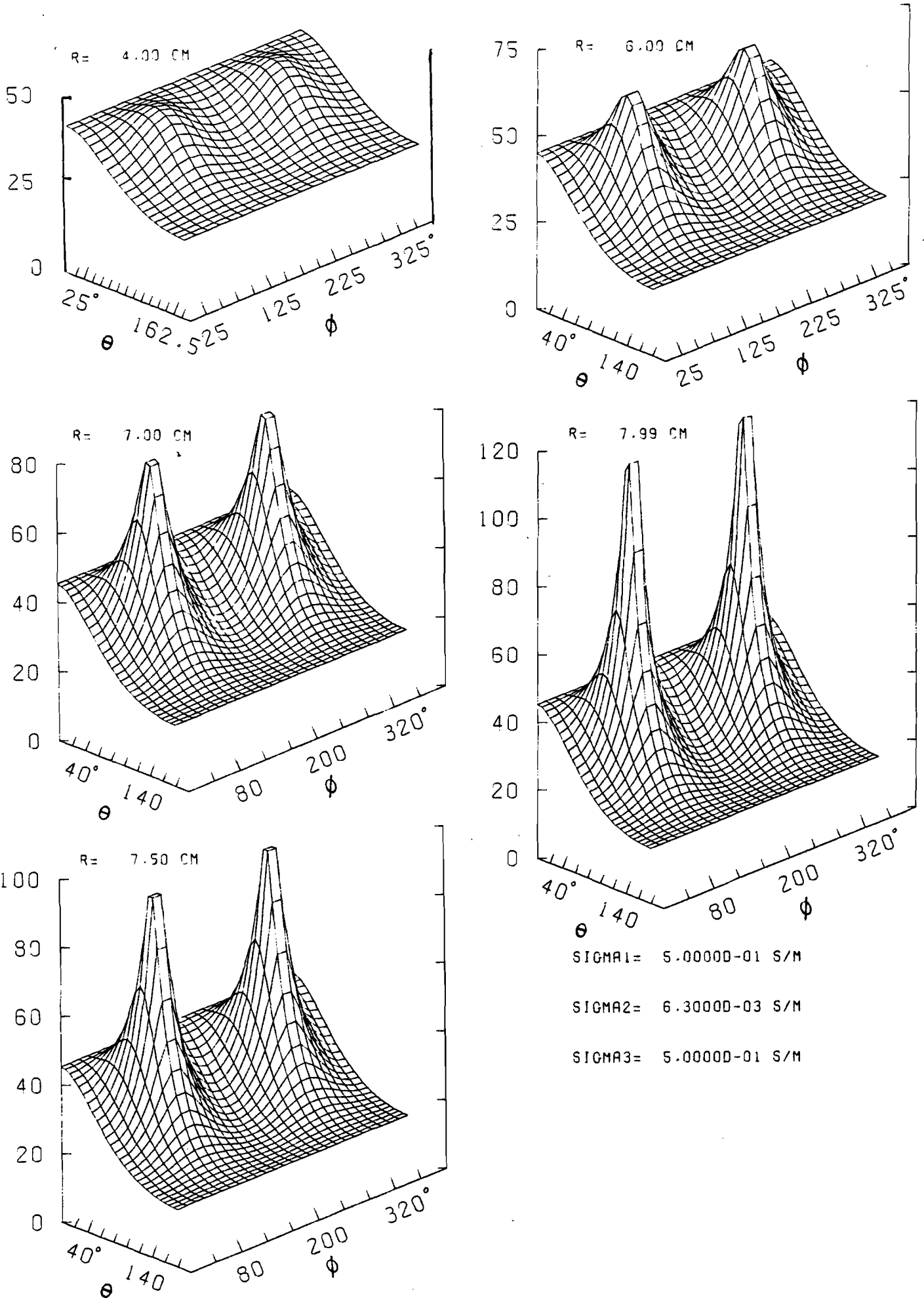
De 2e soort-plaatjes van figuur 28 beschrijven de moduli van het \underline{J} -veld als functie van de polaire coördinaten bij bilaterale elektrodeplaatsing. Hieruit blijkt weer duidelijk de symmetrie ten opzichte van het vlak $\vartheta=0^\circ$ (of 180°).

Voorts blijkt weer dat de veldsterktes op de positieve z-as ($\vartheta=0$) bij de verschillende radii ongeveer gelijk zijn. (Zie ook figuur 20) De stroomdichtheid is daar ongeveer 45 A/m^2 .

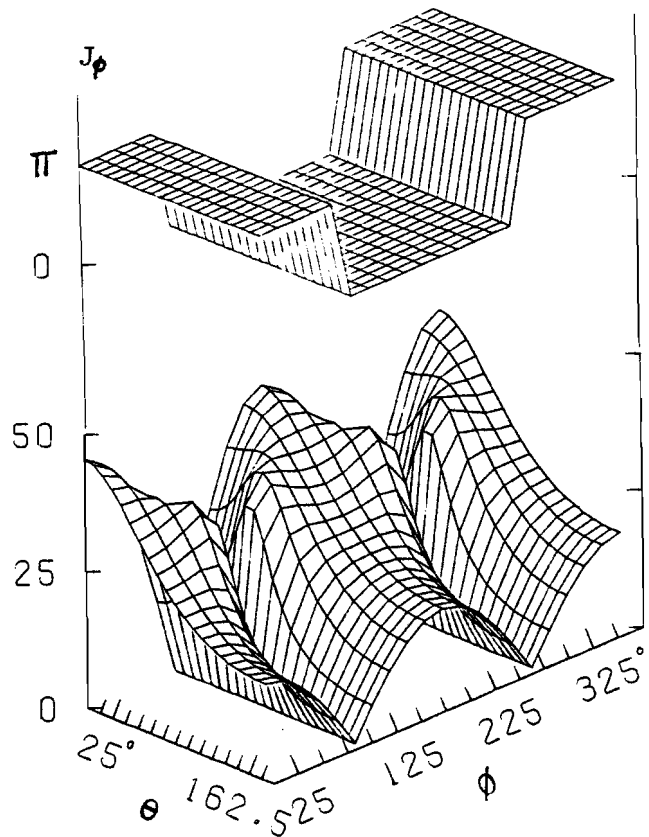
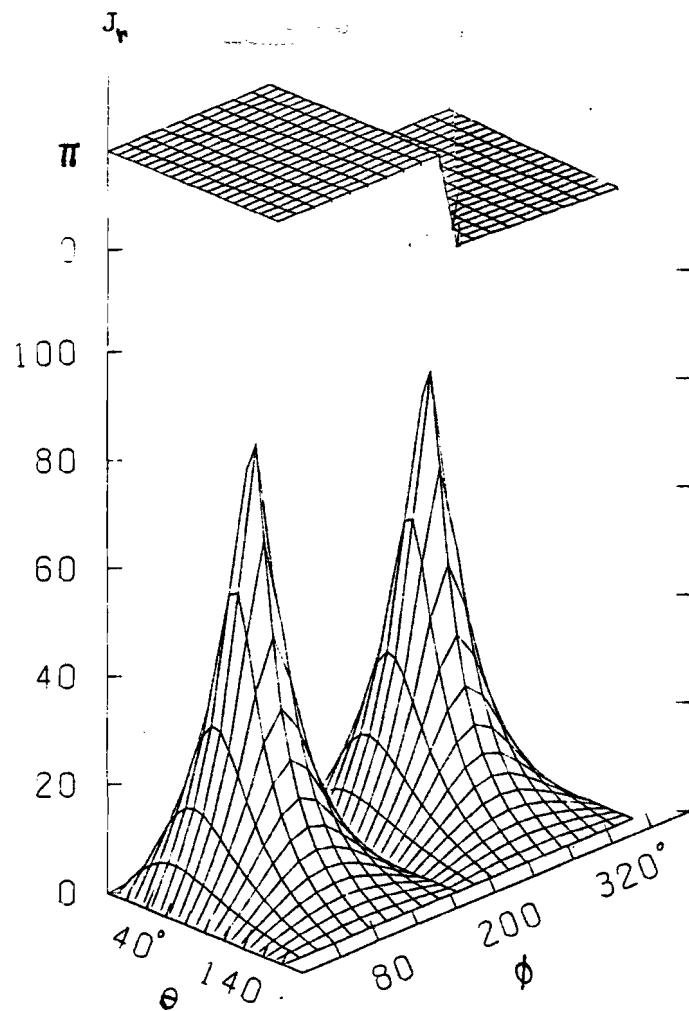
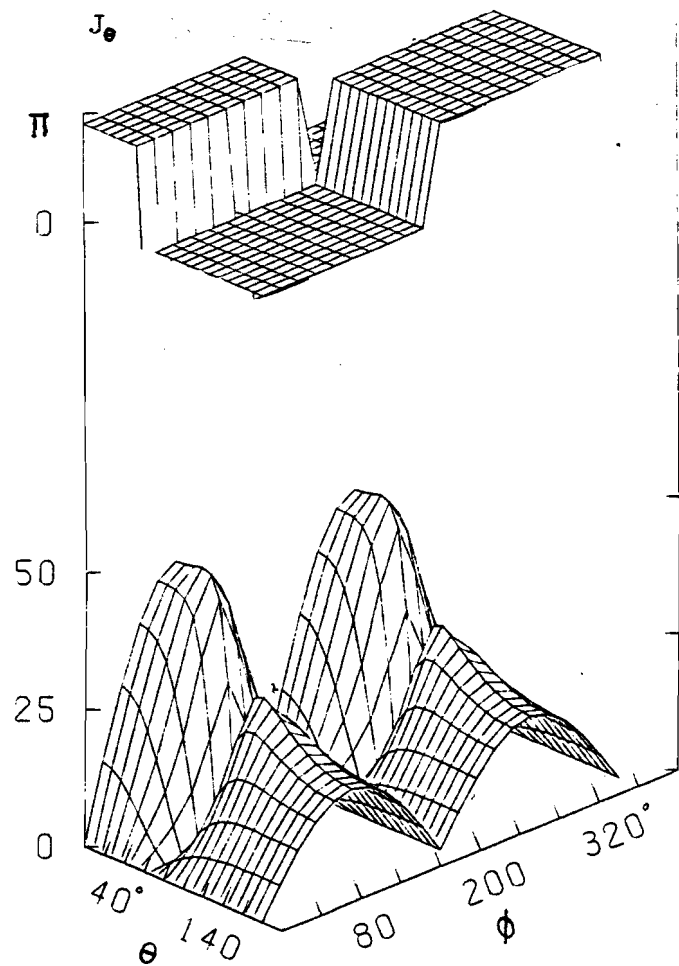
In het cortexgebied is de stroomdichtheid ongeveer 60 A/m^2 .

In figuur 29 zijn de moduli weergegeven van de r-, Θ -, en ϑ -component van de stroomdichtheid en de daarbij behorende fasen op het boloppervlak $R=7 \text{ cm}$ (cortexgebied). Figuur 30 geeft deze componenten op $R=7,99 \text{ cm}$ bij bilaterale elektrodeplaatsing. Uitgaande van de modulus van de r-component in figuur 30 kan weer door middel van integratie over het totale oppervlak, het gedeelte van de totaal toegevoerde stroom bepaald worden dat het bot-hersen-scheidingsvlak passeert. Op deze wijze is bepaald, dat bij bilateraal ECT ongeveer 60% van de totale stroom door de hersenen gaat. Dit is dus anderhalf keer zoveel als bij unilateraal ECT.

Om de continuïteit van $\underline{E}_{\text{tang}}$ op de bot-hersen-grens te controleren zijn de grafieken van figuur 31 gemaakt. In deze figuur staan $\sigma_{\text{hersen}} \cdot E_\Theta$ en $\sigma_{\text{hersen}} \cdot E_\vartheta$ in het bot afgebeeld, als functie van Θ - en ϑ op $R=8,01 \text{ cm}$, dus juist buiten de overgang. In figuur 30 staan juist $\sigma_{\text{hersen}} \cdot E_\Theta$ en $\sigma_{\text{hersen}} \cdot E_\vartheta$ afgebeeld voor $R=7,99 \text{ cm}$, dus juist binnen de overgang. De onderscheiden grafieken van de figuur 30 en 31 bedekken elkaar als het tangentiële elektrische veld continu is. Dit is inderdaad het geval behalve vlak bij de elektrodeplaatsen. De optredende kleine verschillen komen voort uit de omstandigheid dat we niet precies op het scheidingsvlak kijken.



Figuur 28 Moduli van de stroomdichtheid (A/m^2) bij bilateraal ECT

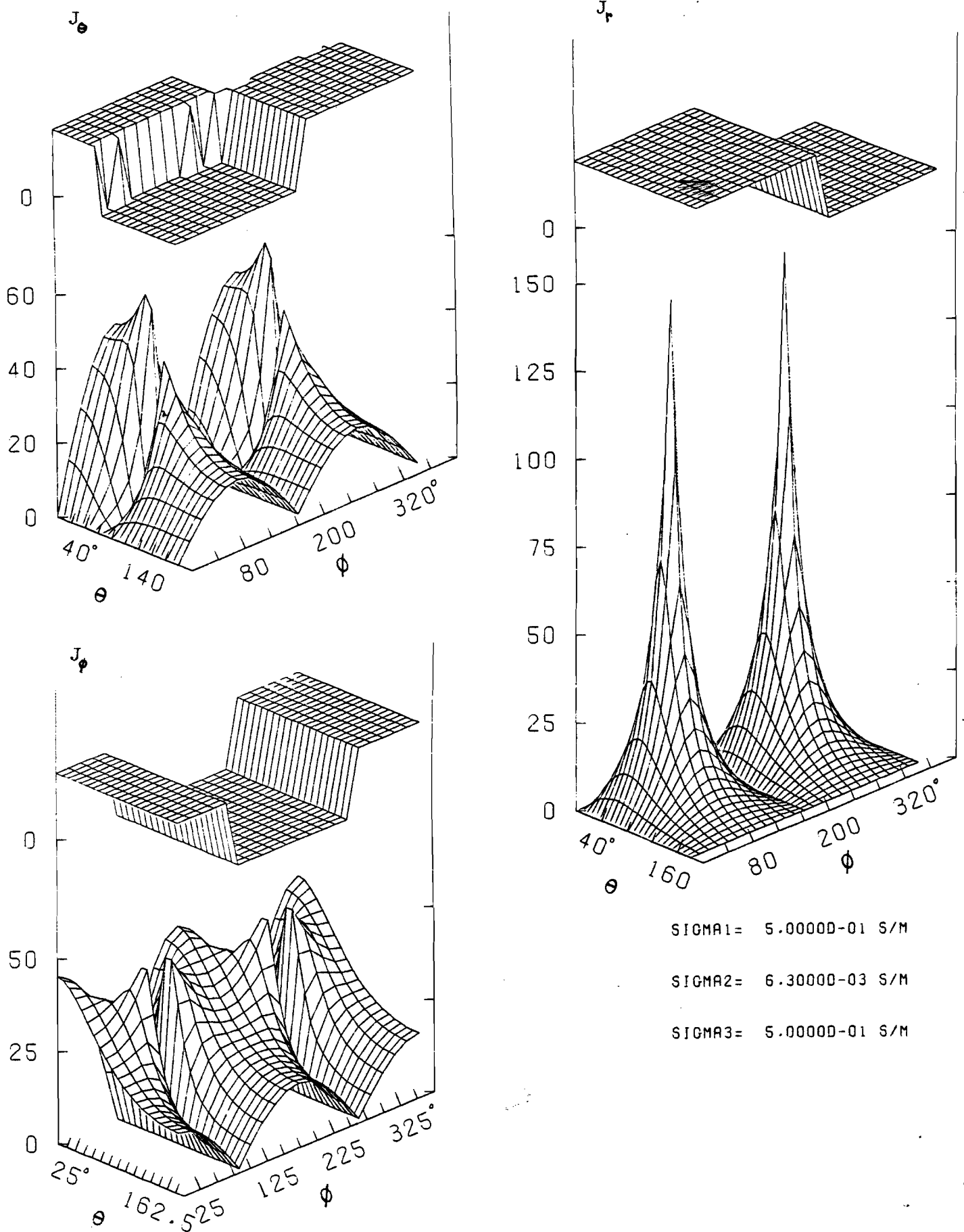


SIGMA1= 5.00000-01 S/M

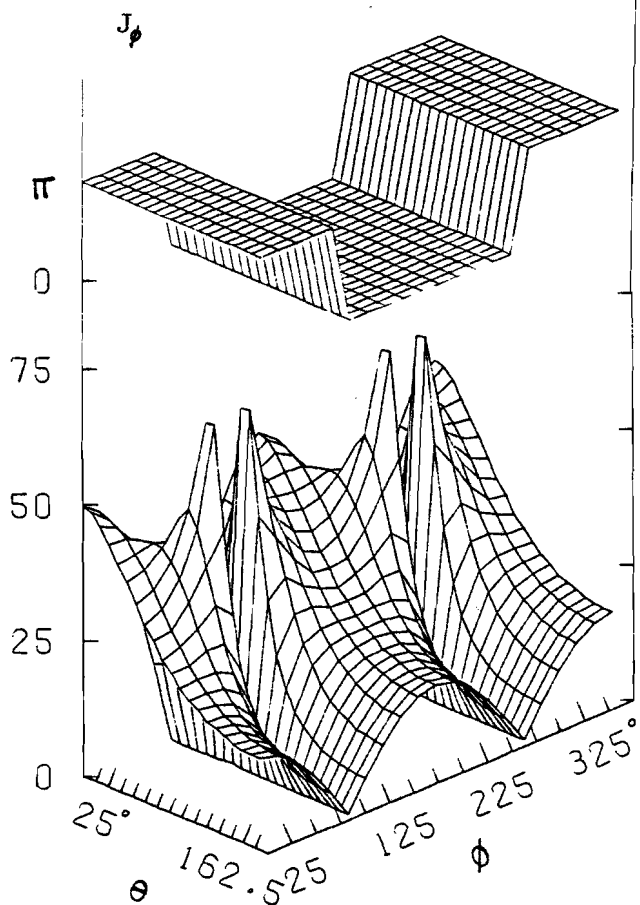
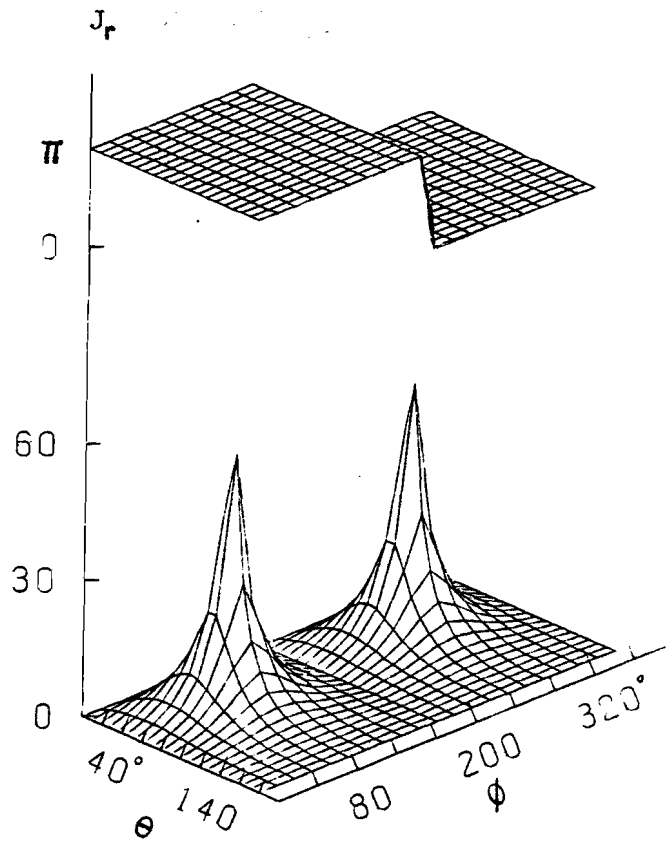
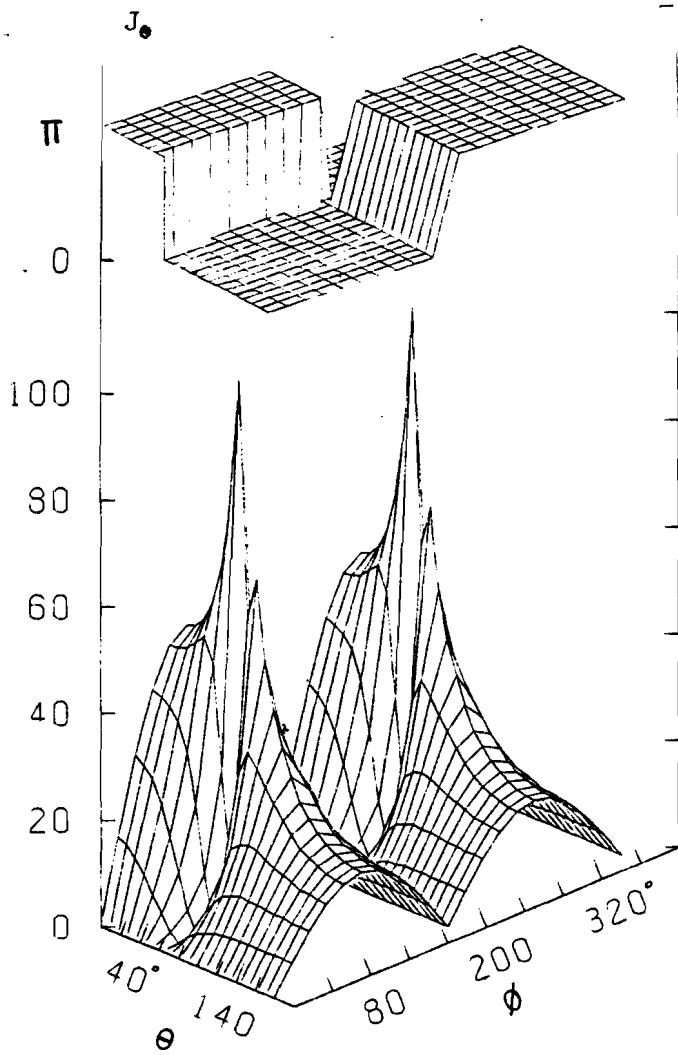
SIGMA2= 6.30000-03 S/M

SIGMA3= 5.00000-01 S/M

Figuur 29 Moduli van J_r , J_θ en J_ϕ (A/m^2) en de daarbij behorende fasen bij bilateraal ECT
 $R = 7.00$ cm



Figuur 30 Moduli van J_r , J_e en J_ϕ (A/m^2) en de daarbij behorende fasen bij bilateraal ECT
 $R= 7.99$ cm



SIGMA1= 5.00000-01 S/M

SIGMA2= 6.30000-03 S/M

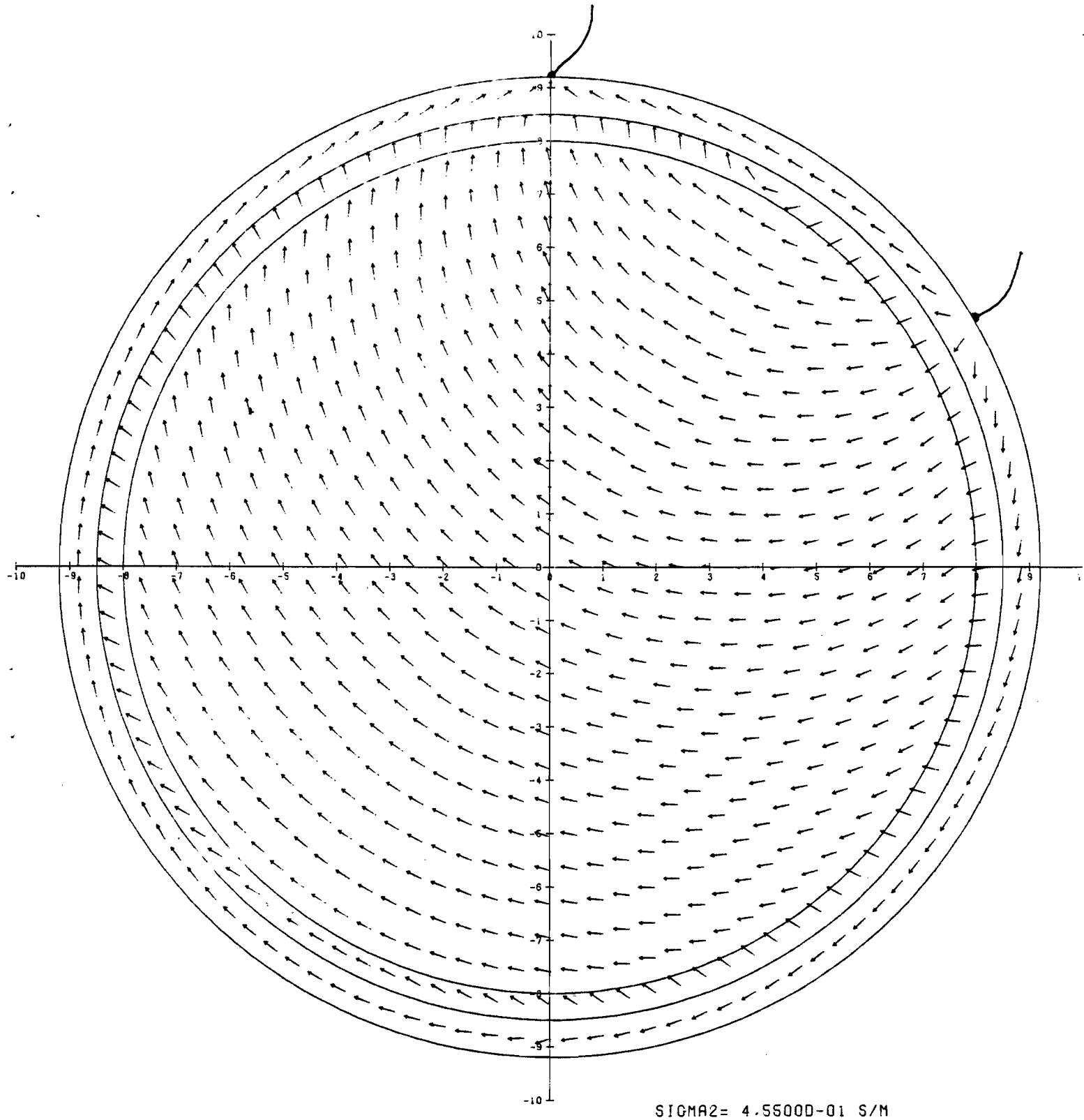
SIGMA3= 5.00000-01 S/M

Figuur 31 Moduli van J_r , J_e en J_ϕ (A/m^2) en de daarbij behorende fasen bij bilateraal ECT
 $R= 8.01$ cm

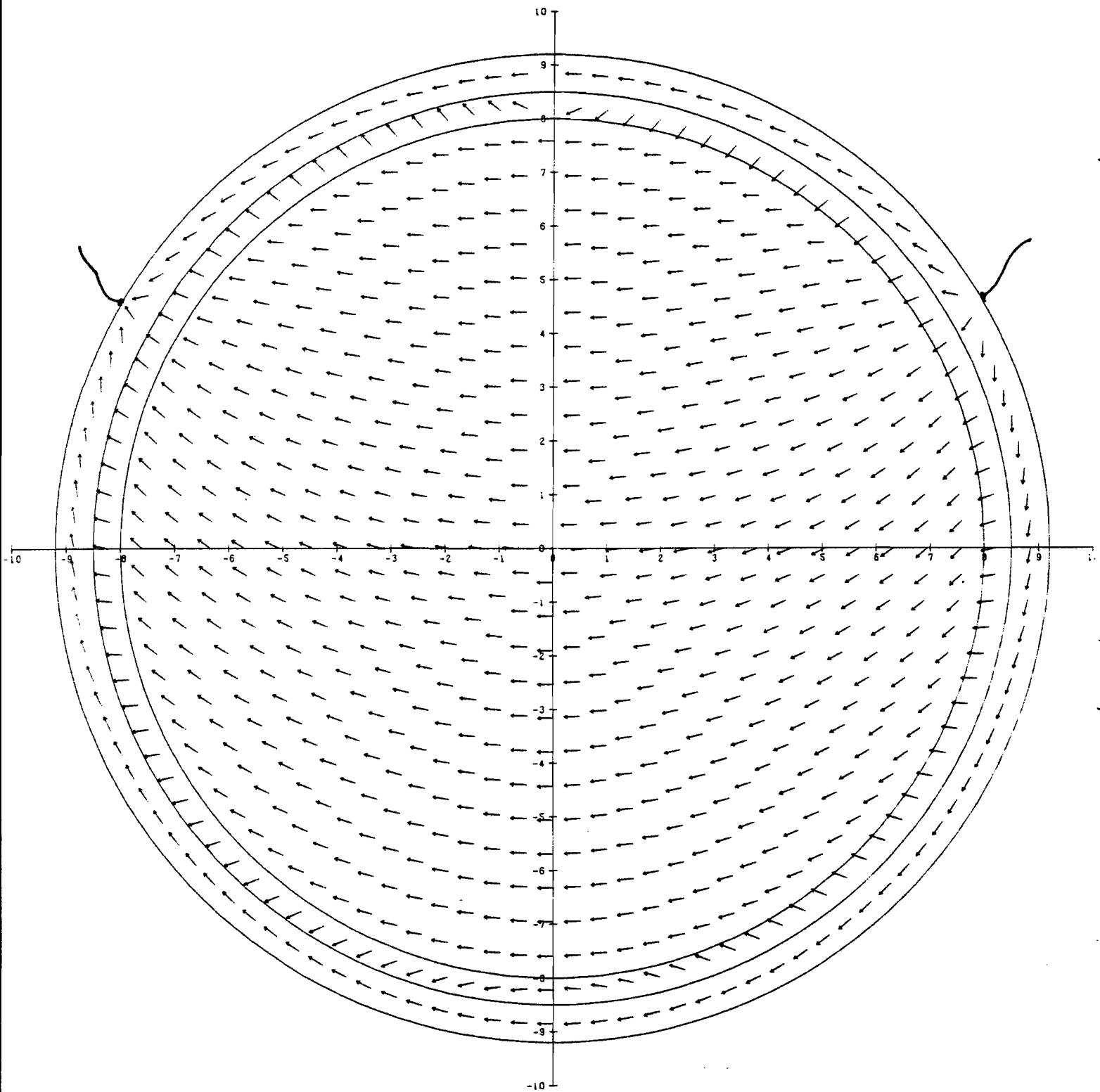
Figuur 32 geeft de richting van het \underline{E} -veld weer op het platte vlak door het middelpunt van de bolconfiguratie en de beide elektrodes. De doorsnede is op ware grootte getekend.

De veldcomponent loodrecht op het beschouwde oppervlak is nul vanwege de symmetrie. De pijltjes in de figuur geven dus de richting van het volledige veld weer. We constateren een afzonderlijke stroomdoorgang door de huid. Eerder hebben we geconcludeerd, dat bij unilateraal ECT ongeveer 40% van de aangeboden stroom door de hersenen vloeit. Omdat uit figuur 32 verder blijkt dat de stroom in het bot voornamelijk radiaal verloopt, betekent dit dus dat ongeveer 60% van de stroom door de huidlaag vloeit. Hieruit blijkt de shuntwerking van de huidlaag.

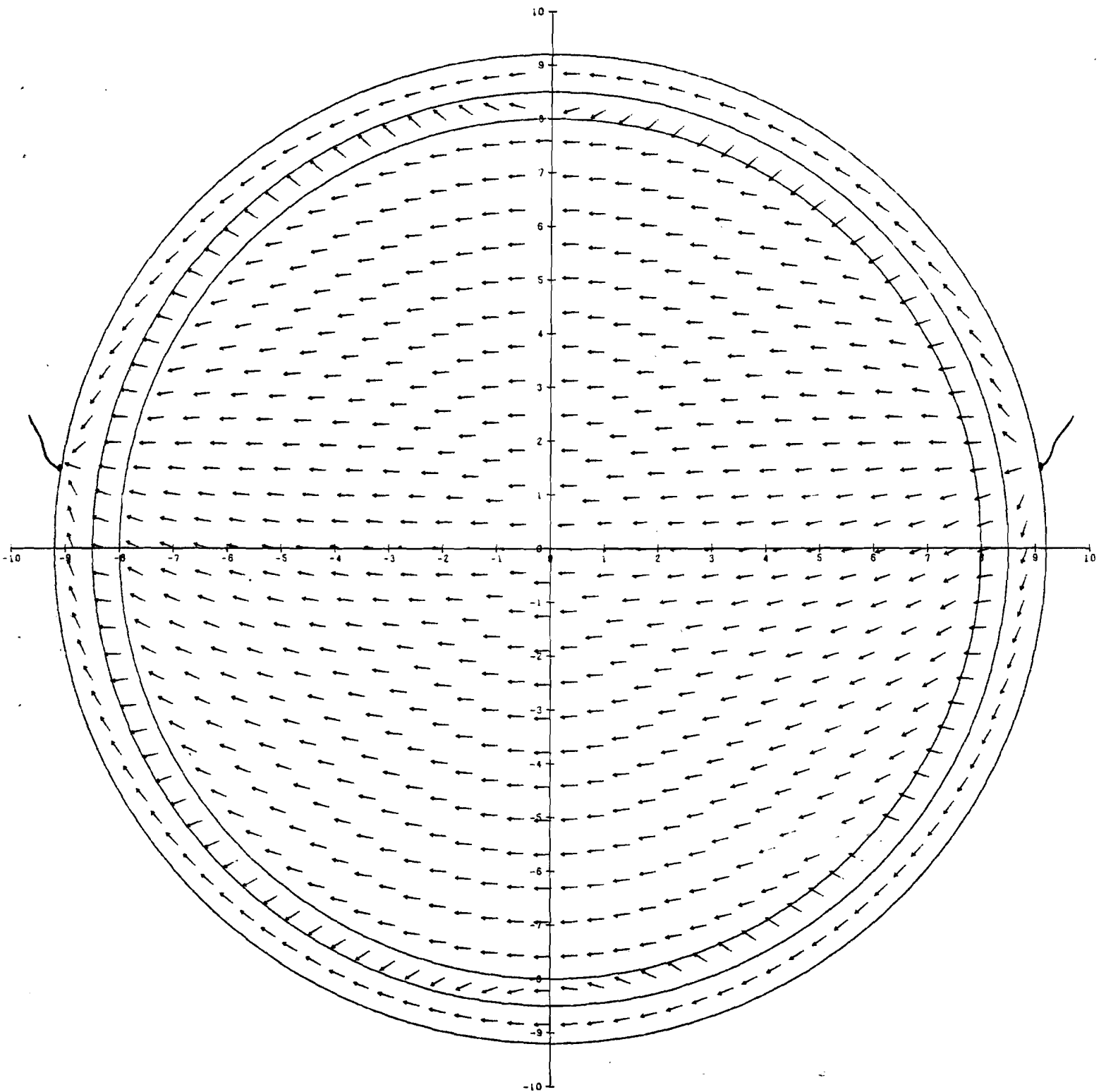
Figuur 33 geeft de richting van het veld weer bij bilaterale elektrodeplaatsing voor $\gamma=60^\circ$. Figuur 34 geeft de veldrichting weer bij bilaterale elektrodeplaatsing voor $\gamma=80^\circ$. We zien dat de stroom in het centrale hersengebied in beide gevallen vrijwel recht oversteekt. Omdat de elektrodes in de buurt van de horizontale middellijn (y-as) gelegen zijn, is het veld bijna symmetrisch om deze as. Figuur 34 geeft dan ook het beeld van de veldrichting in het gehele volume van de bolconfiguratie.



Figuur 32 Richting van het \underline{E} - en \underline{J} -veld op het vlak door de elektrodes en het middelpunt van de bolconfiguratie bij unilateraal ECT $\gamma = 60^\circ$



Figuur 33 Richting van het E - en J -veld op het vlak door de elektrodes en het middelpunt van de bolconfiguratie bij bilateraal ECT $\gamma = 60^\circ$

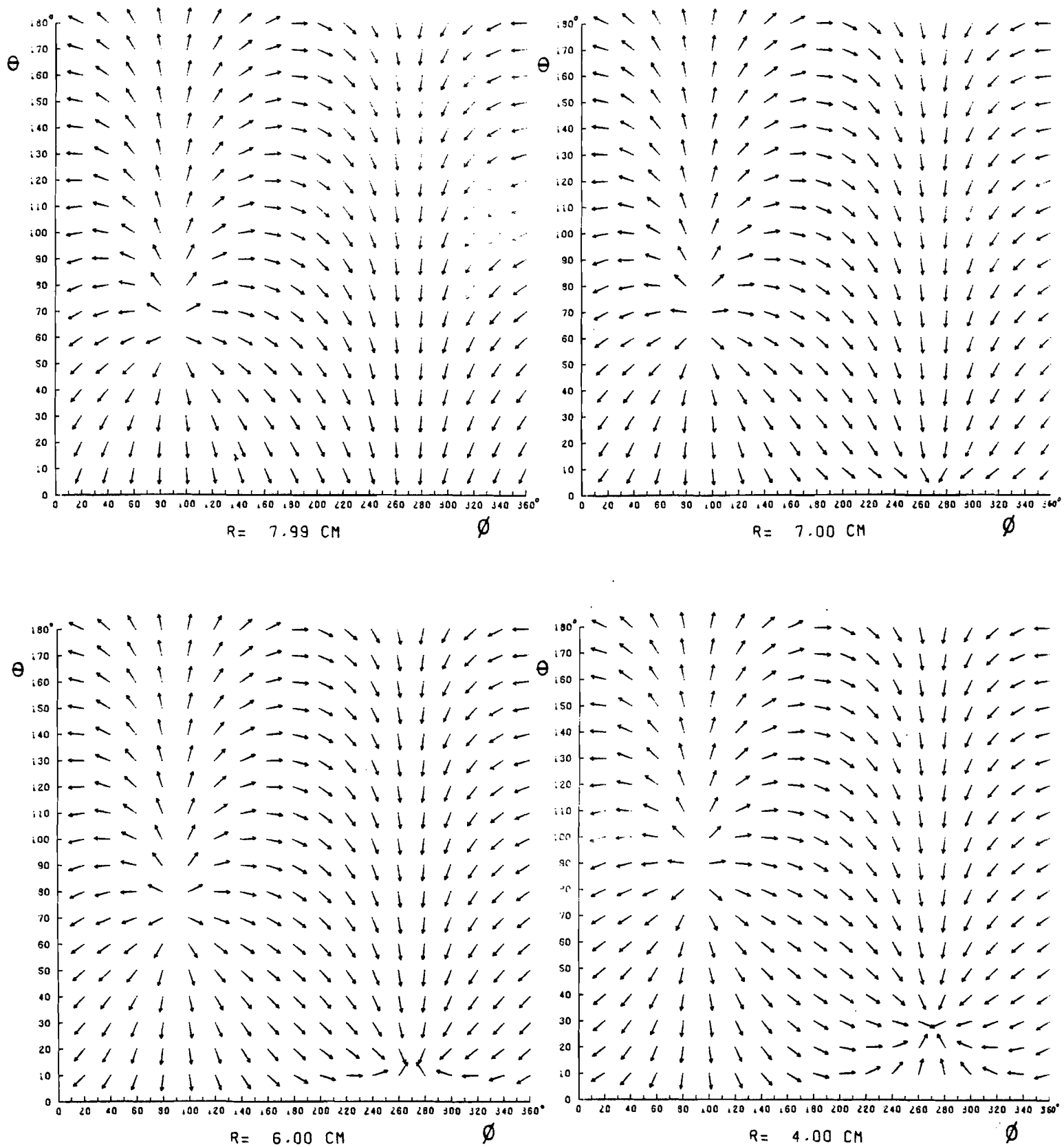


Figuur 34 Richting van het \underline{E} - en \underline{J} -veld op het vlak door de elektrodes en het middelpunt van de bolconfiguratie bij bilateraal ECT $\gamma = 80^\circ$

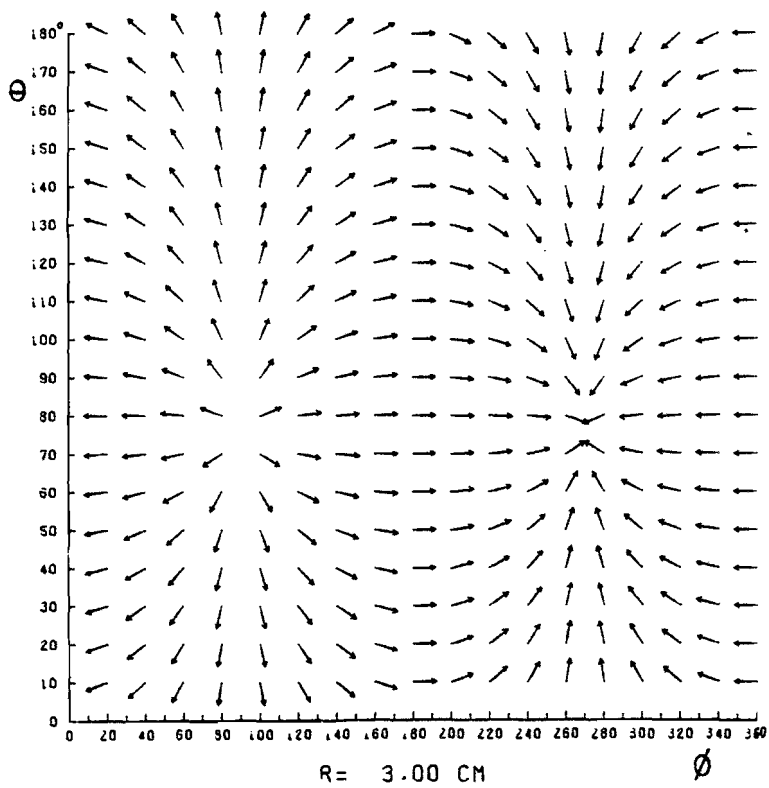
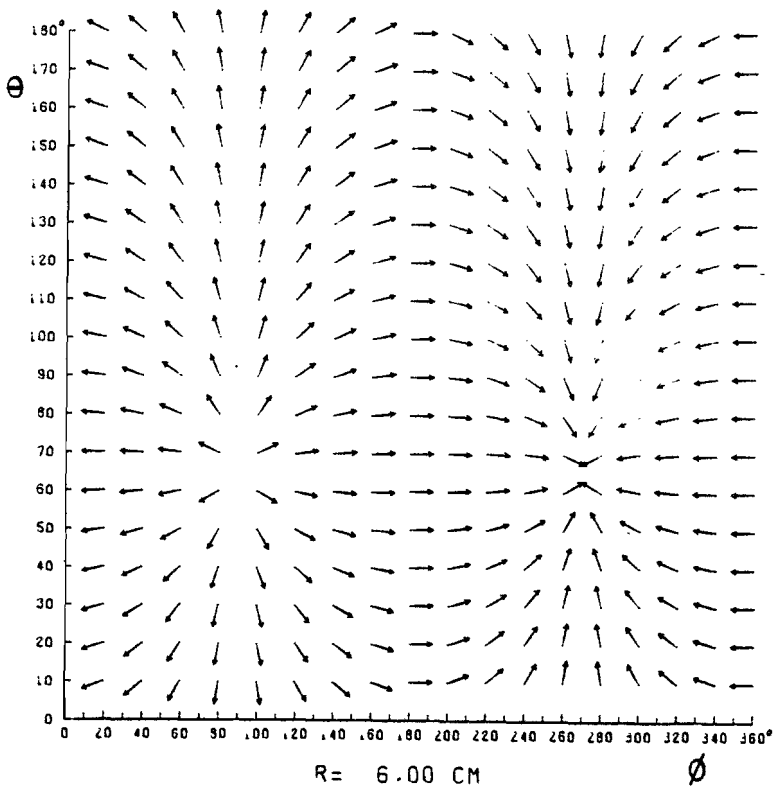
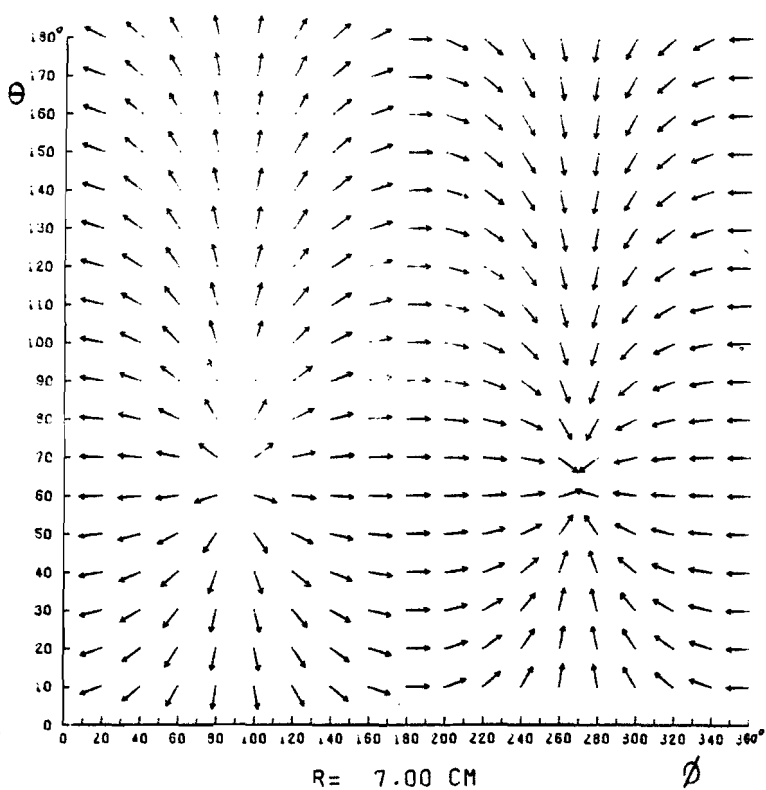
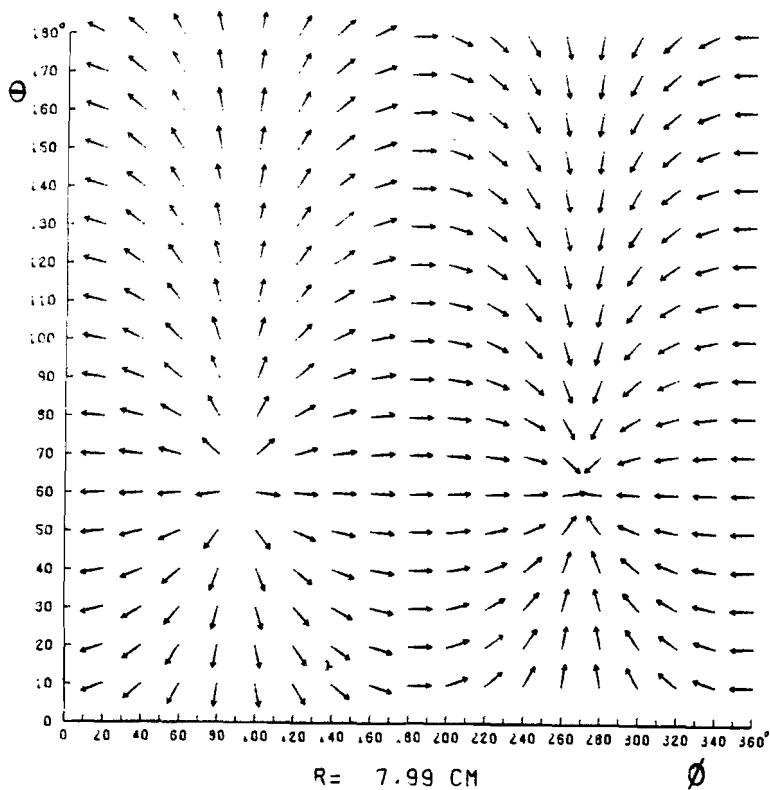
De 4de soort-plaatjes van figuur 35 geven de richting van het tangentiële veld op boloppervlakken in het hersengebied bij $\gamma=60^\circ$ als functie van θ en ϕ bij unilateraal ECT.

Dicht bij het scheidingsvlak van hersenen en bot ($R=7,99$ cm) zijn de elektrodeposities goed te herkennen (punten $(\theta, \phi)=(60, 90)$ en $(\theta, \phi)=(0, \phi)$). Naarmate de straal afneemt verschuiven deze herkenningspunten in de positieve θ -richting.

Figuur 36 geeft de richting van het tangentiële veld op boloppervlakken bij $\gamma=60^\circ$ als functie van de θ - en ϕ -coördinaat in geval van bilatereaal ECT.



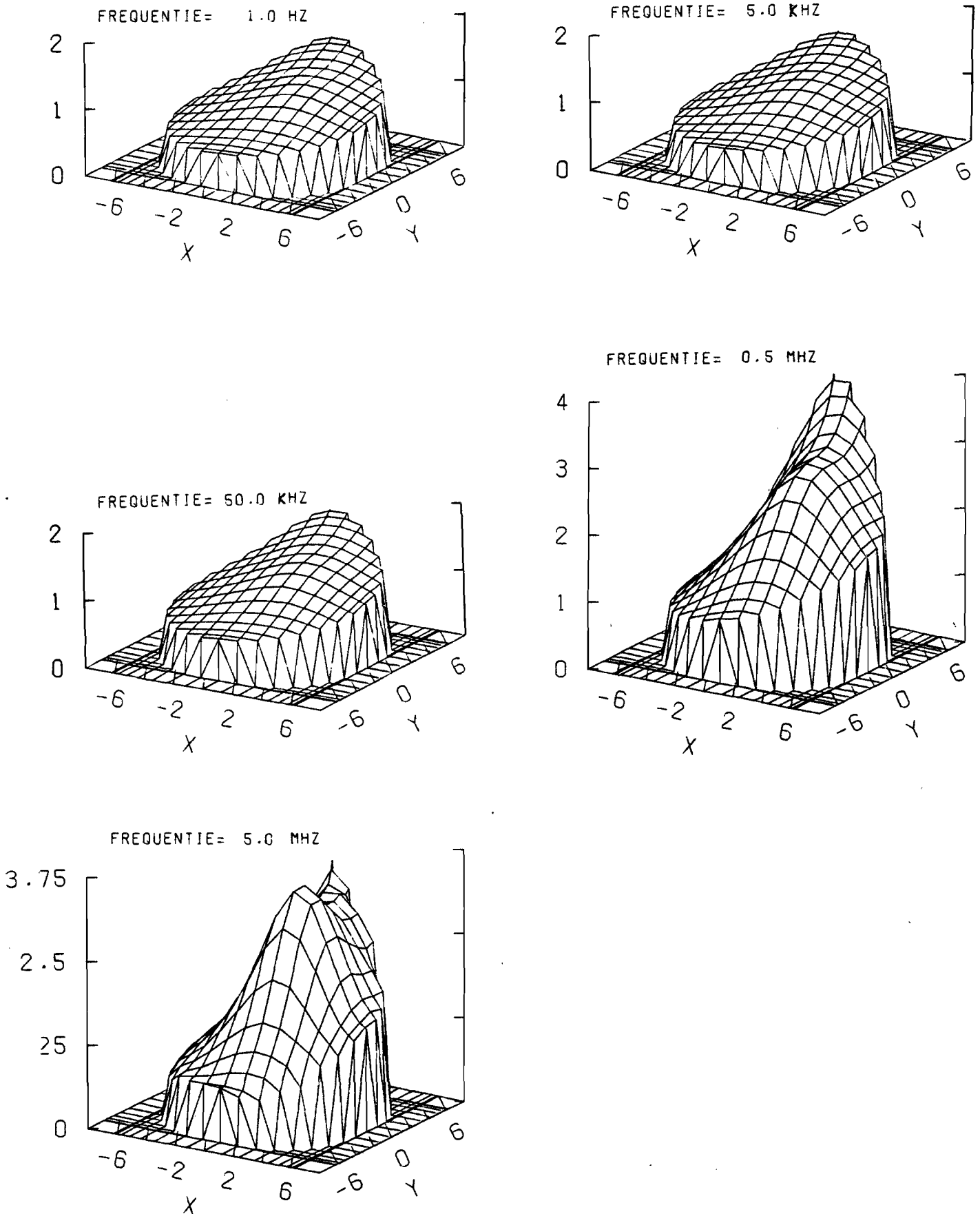
Figuur 35 Richting van het tangentiële \underline{E} - en \underline{J} -veld bij unilateraal ECT $\gamma = 60^\circ$



Figuur 36 Richting van het tangentiële \underline{E} - en \underline{J} -veld bij bilateraal ECT $\gamma = 60^\circ$

In figuur 37 zijn de moduli van het \underline{E} -veld in het vlak $z=5$ cm weergegeven bij verschillende frekwenties. De elektrodeplaatsing is vertex-temporaal. Indien vanuit de (quasi) statische situatie de frekwentie wordt opgevoerd tot 5 kHz, verandert er niets in de veldverdeling. De invloed van de permittiviteit is vanaf 5 kHz afleesbaar uit de grafieken. Bij een frekwentie van 50 kHz is de modulus van de veldsterkte gemiddeld ongeveer 10% groter geworden.

Bij een frekwentieverhoging naar 0.5 MHz neemt de veldsterkte gemiddeld met ongeveer 60% toe. Hierbij verandert ook de vorm van veldverdeling. Bij 5 MHz is de invloed van de vertex-elektrode het duidelijkste zichtbaar.



Figuur 37 Moduli van het \underline{E} -veld (V/cm) in het vlak $z=5$ cm bij variatie van de frequentie $\gamma=80^\circ$, $\lambda=10^\circ$.

4.5 Gevoeligheidsanalyse

In paragraaf 4.4 zijn conclusies getrokken met betrekking tot de verdeling van de elektrische veldsterkte en de daarmee samenhangende stroomdichtheidsverdeling. Het is de vraag, in hoeverre deze conclusies afhankelijk zijn van parametervariatiaties. Dit is van belang, omdat er in werkelijkheid sprake is van vele weefselsoorten, ieder met een eigen σ en κ . Deze parameters verschillen ook weer van persoon tot persoon. Voorts vertoont een spreiding in de gemeten waarde en voor de getalwaarde van is er slechts één referentie voorhanden. Daarom is een gevoeligheidsanalyse voor deze parameters noodzakelijk. Omdat de geometrie van het hoofd modelmatig is benaderd, is ook de gevoeligheid voor variatie van de elektrodeposities onderzocht.

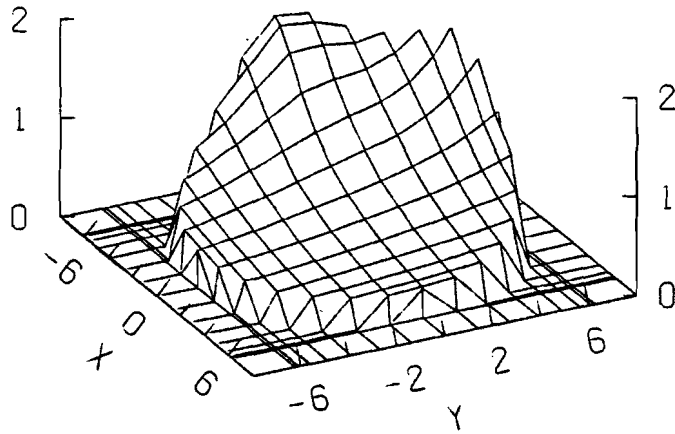
Uitgangspunt bij de gevoeligheidsanalyse is de fronto-temporale elektrodeplaatsing volgens Müller; Hierbij is een elektrode op het voorhoofd en een elektrode tussen oog en oor geplaatst. Deze plaatsing is weergegeven in figuur 14.

4.5.1 Variatie van de elektrodeposities

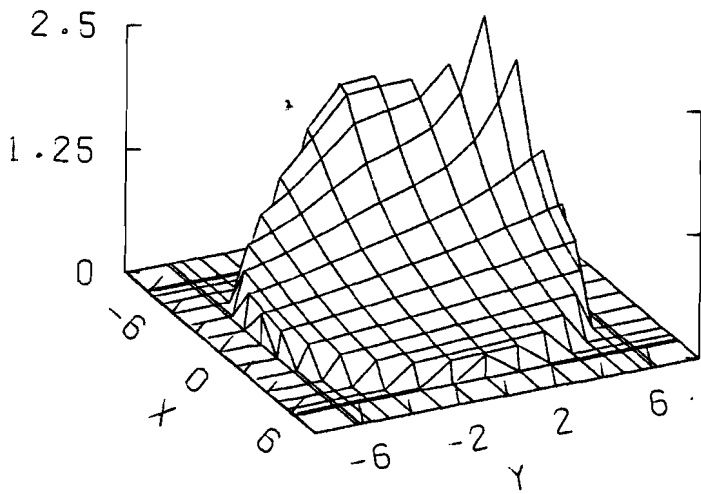
In figuur 38 zijn de moduli van het E -veld beschreven op het vlak $z=5$ cm bij variatie van de elektrodeposities. Bij de onderste vier plaatjes wijkt λ of γ 15 graden af van de defaultwaarden (60 respectievelijk -40 graden) Als deze plaatjes vergeleken worden met het bovenste plaatje zien we dat elektrodeverschuivingen binnen een marge van 15 graden ten opzichte van elkaar de verdeling van de moduli van het E -veld niet belangrijk doen veranderen.

Figuur 39 geeft de moduli van het E -veld op verschillende horizontale doorsnedes bij bilateraal ECT.

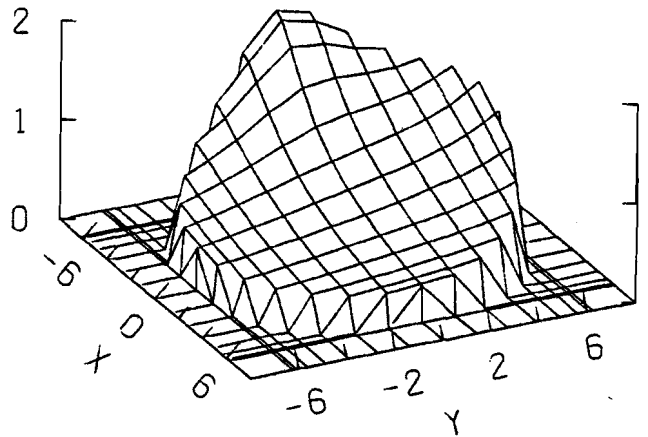
In de linker plaatjes zijn voor λ en γ de defaultwaarden genomen. In de rechter plaatjes zijn de moduli van het E -veld weergegeven indien de elektrodes 20 graden verder uit elkaar zijn geplaatst. Indien linker en rechter plaatjes met elkaar worden vergeleken, valt op dat de veldverdeling in de rechter plaatjes een vlakker verloop heeft. De verhouding van de hoogste en laagste waarde van $|J|$ bedraagt in de linker plaatjes een faktor 1,5. In de rechter plaatjes is deze faktor 3.



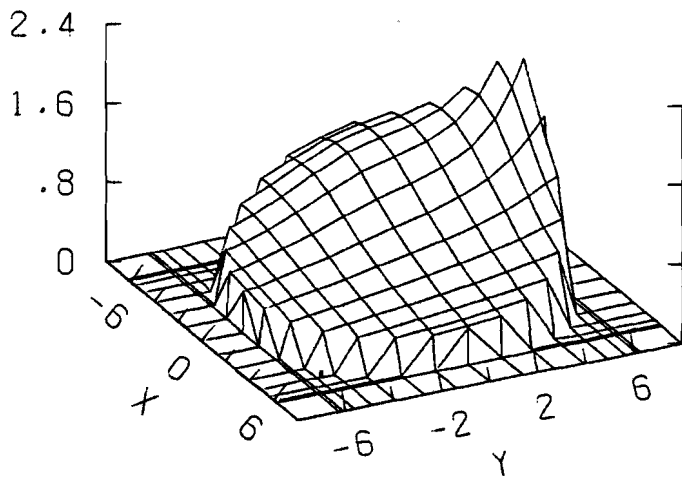
$\gamma = 60^\circ$ $\lambda = -40^\circ$



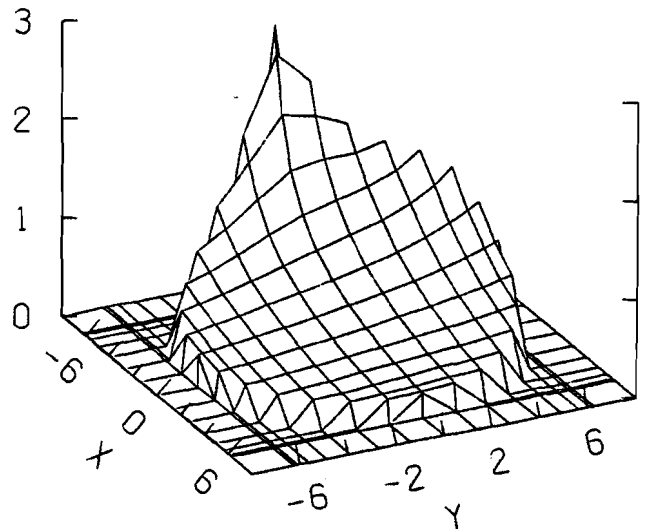
$\gamma = 45^\circ$ $\lambda = -40^\circ$



$\gamma = 75^\circ$ $\lambda = -40^\circ$

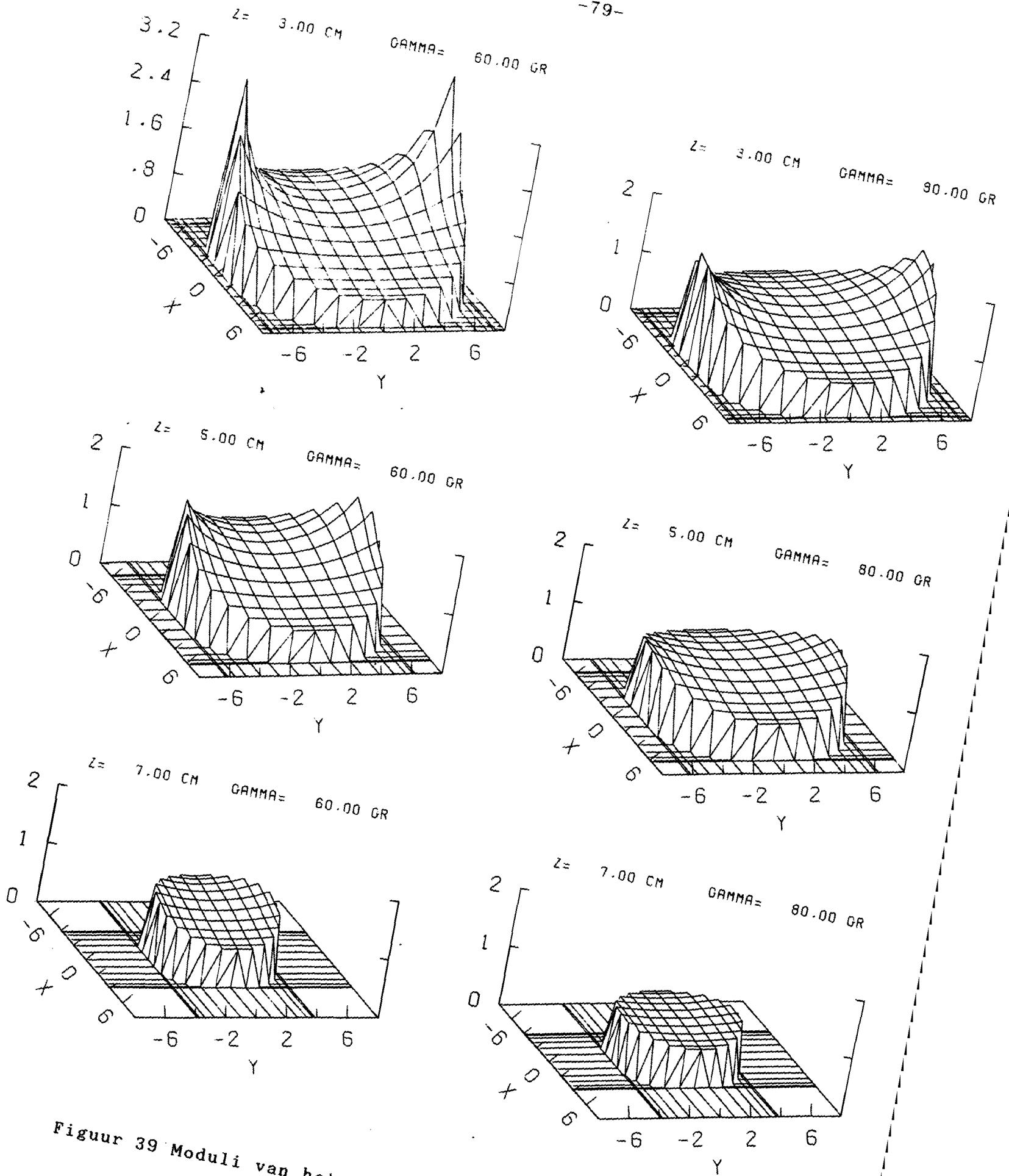


$\gamma = 60^\circ$ $\lambda = -25^\circ$



$\gamma = 60^\circ$ $\lambda = -55^\circ$

Figuur 38 Moduli van het \underline{E} -veld (V/cm). in het vlak $z=5$ cm bij variatie van de elektrodeposities



Figuur 39 Moduli van het E-veld (V/cm) bij bilateraal ECT

4.5.2 Variatie van de relatieve permittiviteiten

In het frekwentiegebied beneden de 50 kHz heeft het verhogen of verlagen van $\kappa = \kappa_{\text{hersenen}} = \kappa_{\text{bot}}$ met een factor 10 geen zichtbare invloed op de veldverdeling. Bij een frekwentie van 0,5 MHz leidt een verhoging of verlaging van κ met een factor 3 tot ongeveer 10% toename respectievelijk afname van de veldsterkte in de buurt van de elektrode.

Omdat $\kappa_{\text{bot}} \ll \kappa$ is een gevoeligheidsanalyse voor κ_{bot} overbodig.

4.5.3 Variatie van de geleidingscoëfficiënten

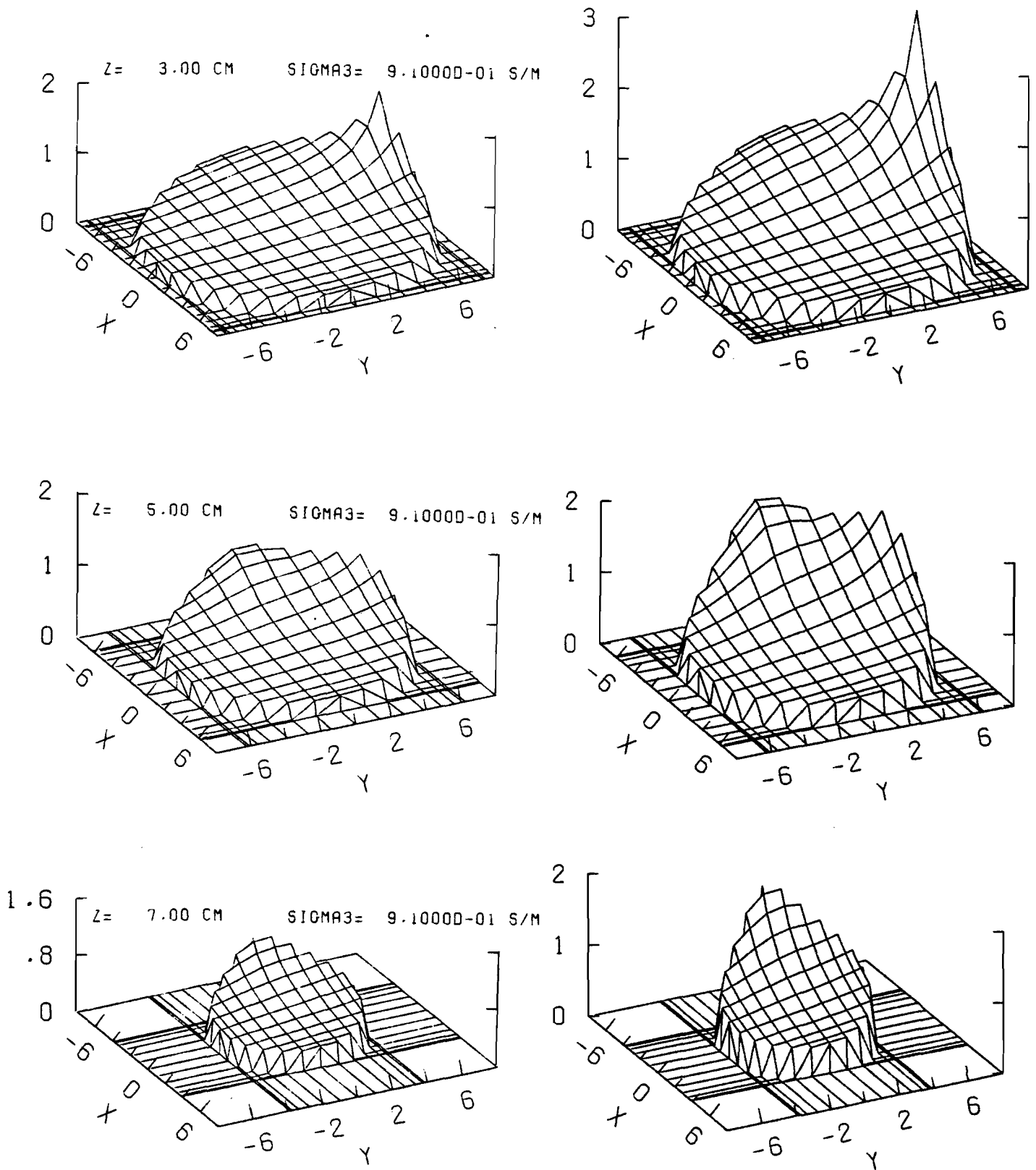
Indien beneden de 50 kHz alle geleidingscoëfficiënten worden verhoogd of verlaagd met een factor 10, blijven verdeling en niveau van de stroomdichtheid ongewijzigd. Hieruit volgt, dat beneden de 50 kHz de waarden van de geleidingscoëfficiënten in absolute zin niet van invloed zijn op de stroomdichtheidsverdeling. De vraag is nu of hun onderlinge verhoudingen wel van invloed hierop zijn. Om dit te onderzoeken wordt voor één weefselsoort de geleidingscoëfficiënt veranderd;

In figuur 40 is te zien wat er gebeurt als σ_{huid} een factor 2 groter wordt genomen. In de buurt van de elektrodes neemt de veldsterkte met ongeveer een factor 1,5 af. Aan de achterkant van het hoofd, dus in het gebied diametraal gelegen tegenover de elektrodes verandert de veldsterkte vrijwel niet.

In figuur 41 is σ_{bot} een factor 2 groter genomen.

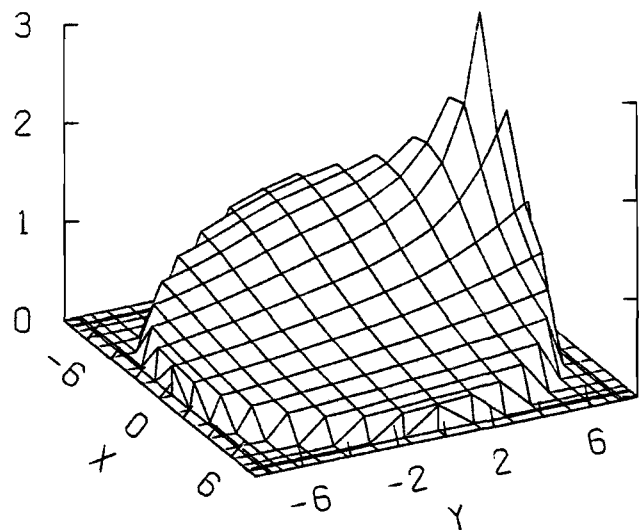
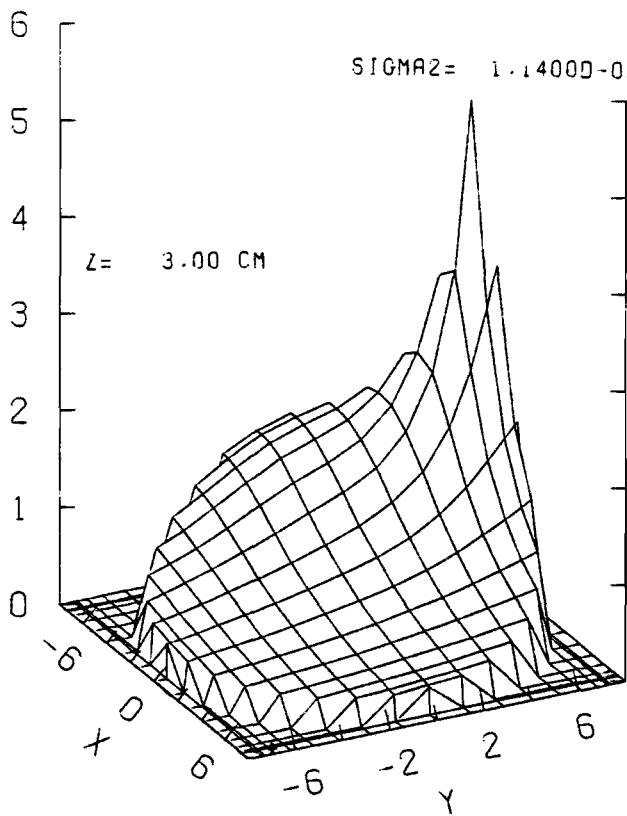
In de buurt van de elektrodes neemt de veldsterkte met ongeveer een factor 1,5 toe. Aan de achterkant van het hoofd verandert de veldsterkte vrijwel niet. De onderlinge verhoudingen van de geleidingscoëfficiënten zijn dus wel van invloed op de stroomdichtheidsverdeling.

Figuur 42 beschrijft de situatie voor het geval dat de hoofdhuid in het model zou worden weggelaten. Bij de elektrodes ontstaan E -veld-pieken die 25 keer zo hoog zijn (100 V/cm) in vergelijking met de situatie met huidlaag (rechter plaatjes van figuur 41). Dit geeft ons inzicht in de rol die de huid speelt; Deze werkt egaliserend op de intracraniale stroomdichtheidsverdeling. Concluderend kan gesteld worden dat bij het weglaten van de hoofdhuid een ontoelaatbare modelfout gemaakt wordt.

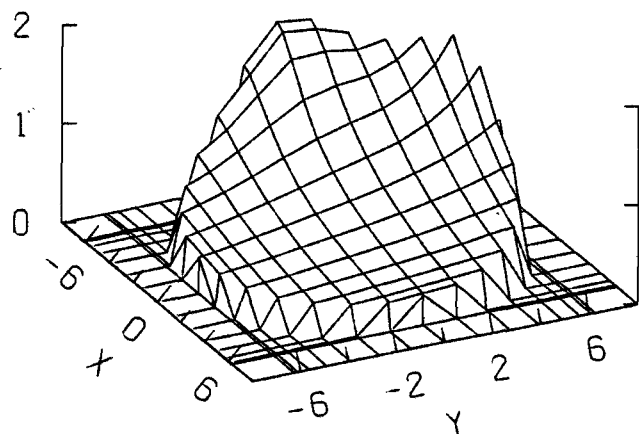
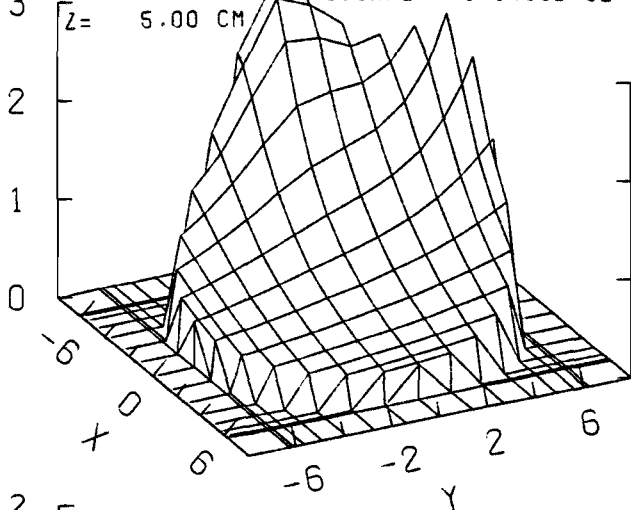


Figuur 40 Moduli van het \underline{E} -veld (V/cm), waarbij in de linker plaatjes σ_{huid} een factor 2 groter is (9.1 S/m) dan in de rechter plaatjes

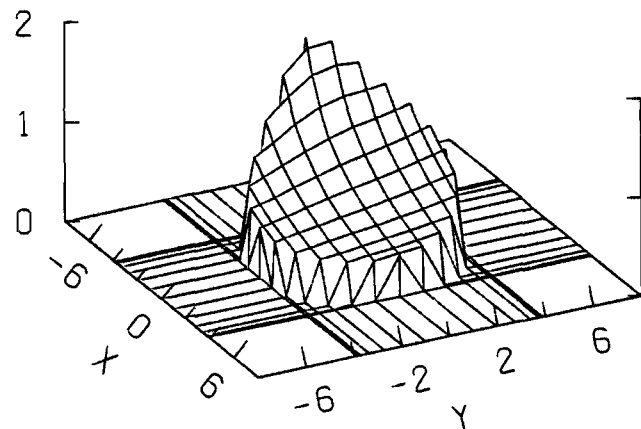
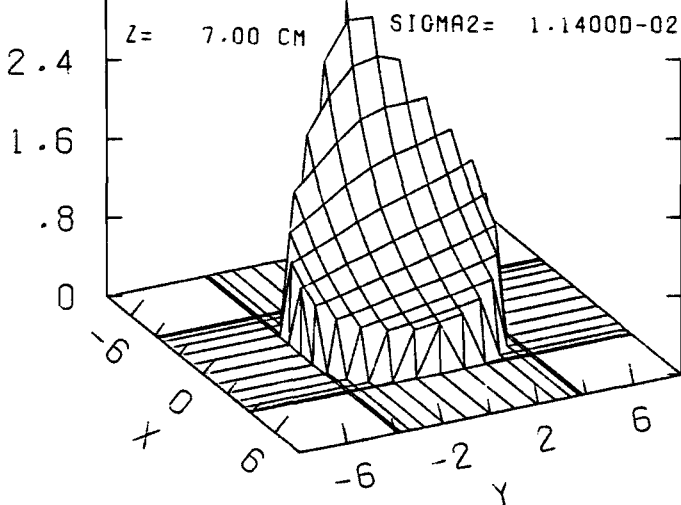
SIGMA2= 1.1400D-02 S/M



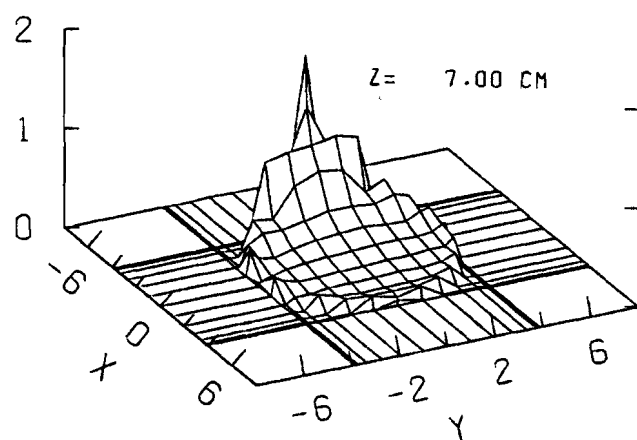
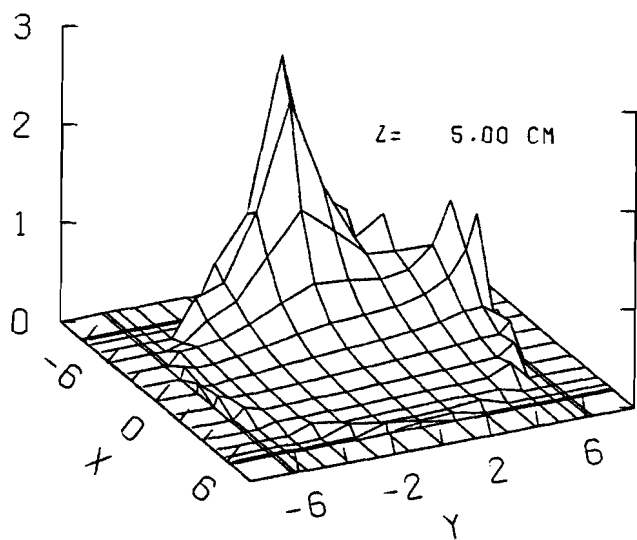
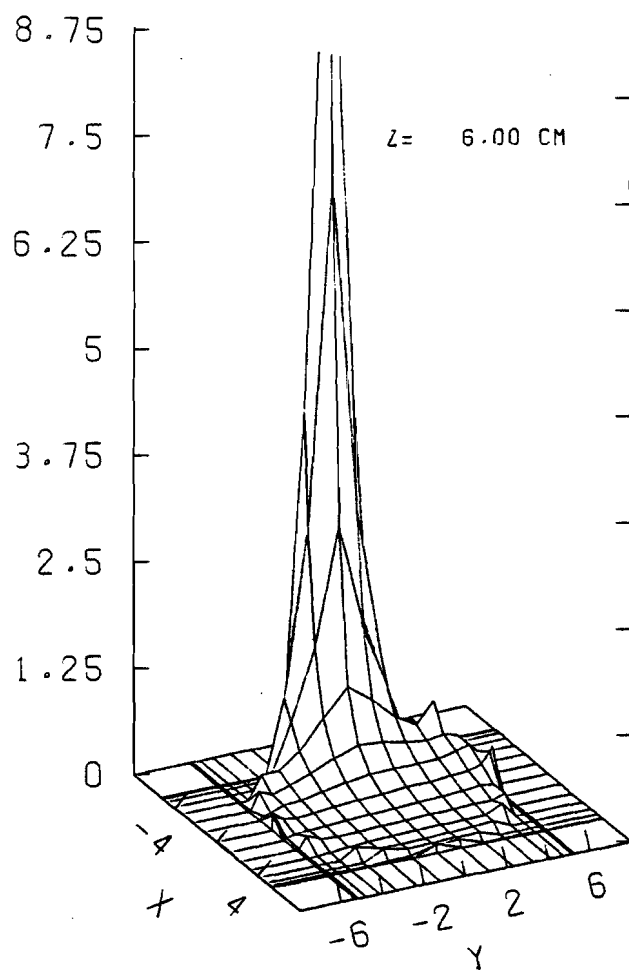
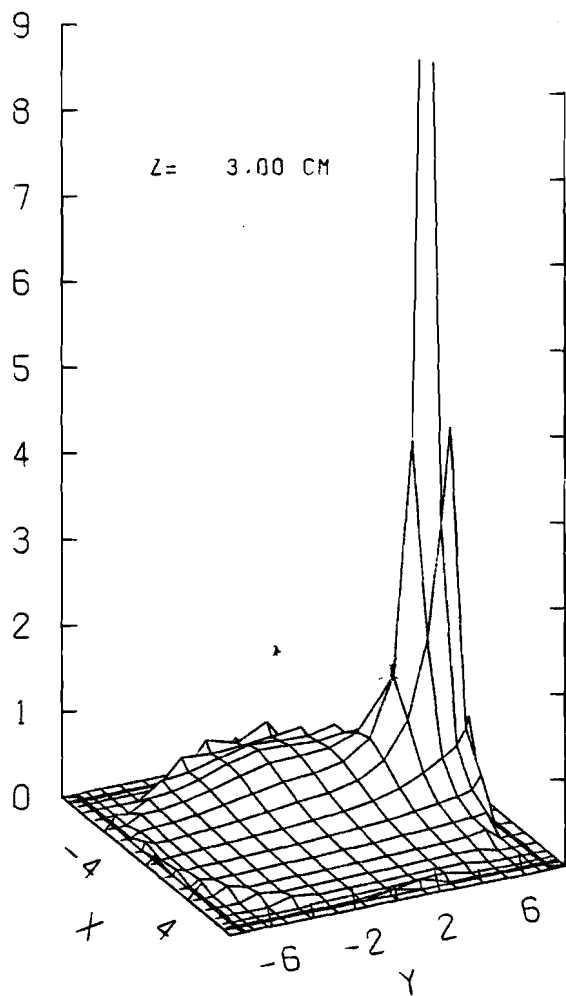
SIGMA2= 1.1400D-02 S/M



SIGMA2= 1.1400D-02 S/M



Figuur 41 Moduli van het E -veld (V/cm), waarbij in de linker plaatjes σ_{bot} een faktor 2 groter is (0,0114 S/m) dan in de rechter plaatjes



Figuur 42 Moduli van het \underline{E} -veld (V/mm) indien de huidlaag wordt weggelaten

5. CONCLUSIES EN DISCUSSIE

Conclusies ten aanzien van de methode

1. Als benadering van het hoofd is uitgegaan van het drie-bollenmodel; centraal een bolvormige hersenmaterie, daaromheen twee bolschillen van respectievelijk bot- en huid weefsel. Het is gelukt om een analytische uitdrukking af te leiden voor het elektrische veld in dit model ten gevolge van twee op een willekeurige plaats op de huid aangebrachte stroomvoerende puntvormige elektrodes.
2. Om ook hogere frekwentiecomponenten in het stimulussignaal in rekening te kunnen brengen is het dynamische probleem opgelost. Vanaf 5 kHz is de invloed van de relatieve permittiviteit uit de grafieken afleesbaar.
3. Het asymmetrische, ϕ -afhankelijke randwaardeprobleem is te reduceren tot een symmetrisch ϕ -onafhankelijk randwaardeprobleem. Het elektromagnetische veld is in dit laatste volledig bepaald door een component van de elektrische vektorpotentialiaal.

Conclusies te aanzien van de veldsterkteverdeling

4. Naarmate de elektrodes verder uit elkaar zijn geplaatst is de veldverdeling egaler. Bij bilaterale elektrodeplaatsing is het veldverloop zodoende gelijkmatiger dan bij unilaterale elektrodeplaatsing.
5. In het frekwentiegebied beneden de 50 kHz zijn niet de waarden van de geleidingscoëfficiënten van hersen-, bot en huidweefsel in absolute zin, maar hun onderlinge verhoudingen van invloed op de stroomdichtheidsverdeling.
6. Variaties van de elektrodeposities binnen een marge van 15 graden ten opzichte van elkaar hebben slechts geringe invloed op de stroomdichtheidsverdeling.
7. De huidlaag heeft een groot effect op de stroomdichtheidsverdeling en deze moet dientengevolge in het model worden opgenomen.

8. In geval van vertex-frontotemporale plaatsing is de plaats-gemiddelde stroomdichtheid in de hersenhelft, waar de elektrodes geplaatst zijn, ongeveer twee keer zo groot als die in de andere helft.
9. Bij unilateraal ECT is het veld ter plaatse van een willekeurig punt in de hersenhelft, waarover de elektrodes geplaatst zijn altijd groter dan het veld ter plaatse van het daarmee corresponderende punt in de andere helft.
10. In geval van vertex-frontotemporale plaatsing verschilt de veldverdeling in het frontale gebied (voorhoofd) weinig van die in het occipitale gebied (achterhoofd).
11. Bij unilateraal ECT bedraagt de verhouding tussen de grootste en de kleinste waarde van $|E|$ en dus $|J|$ een factor 6. Bij bilateraal ECT bedraagt deze verhouding een factor 3.
12. Zowel bij unilateraal als bij bilateraal ECT is de stroomdichtheid op geen enkele plaats nihil.
13. Bij unilateraal ECT is de gemiddelde intracraniale stroomdichtheid ongeveer 70% van het gemiddelde bij bilateraal ECT.
14. Bij unilateraal ECT gaat ongeveer 40% en bij bilateraal ECT ongeveer 60% van de totale stroom door de hersenen.
15. Bij bilateraal ECT is de elektrische veldvektor op de verticale as door het hoofd, vanaf het middelpunt naar boven gerekend, onafhankelijk van de plaats.
16. Op elke plaats binnen de bolconfiguratie is het veld voor frekwenties beneden de 50 kHz nagenoeg lineair gepolariseerd.
17. Bij de gegeven parameterwaarden zoals vermeld in tabel 3 bedraagt de amplitude van de elektrische veldsterkte in het cortex-gebied (5 mm binnen de bot-hersenovergang) 150 a 200 V/m. De amplitude van J bedraagt daar dan 7,5 a 10 mA/cm.
18. De stroomdichtheidsverdeling is voor de belangrijke frekwentiecomponenten in het fourierspectrum van de

in de Psychiatrische Universiteits Kliniek Groningen gebruikte kwart-sinusvorm, frekwentie-onafhankelijk. Andere in de klinische praktijk gangbare shockstromen zoals de LEBS en stimuli met golf-piekcomplexen bezitten echter belangrijke frekwentiecomponenten die niet meer als quasi-statisch beschouwd mogen worden.

Discussie ten aanzien van de therapie

In de afgelopen decennia is veel onderzoek verricht naar de invloed van de elektrodeplaatsing op de convulsiedrempel. Hierbij wordt de convulsiedrempel gedefinieerd als de energie die aan het hoofd moet worden toegevoerd om een convulsie op te wekken. Rede hiervoor is de onderstelling dat de negatieve bijwerkingen te wijten zijn aan de toegevoerde energie, en niet aan de convulsie zelf. Bij een zo laag mogelijke convulsiedrempel zouden zodoende de nevenverschijnselen minimaal zijn. Het voorliggende rapport maakt duidelijk dat het begrip convulsiedrempel moet worden bijgesteld. Immers, bij verandering van de elektrodeplaatsing hoeft een hogere convulsiedrempel niet te betekenen dat de hersenen zwaarder worden belast; het is ook mogelijk dat de shuntwerking van de huid is toegenomen. Daarom is het beter de convulsiedrempel te definieëren als de minimale hoeveelheid energie die aan de hersenen moet worden toegevoerd om een convulsie op te wekken. Dit komt neer op het toevoegen van een correctiefactor. Volgens conclusie 14 bedraagt deze 0.16 voor unilaterale elektrodeplaatsing en 0.36 voor bilaterale elektrodeplaatsing.

Ondanks het feit dat de hoogte van de convulsiedrempel van groot belang wordt geacht met betrekking tot de negatieve bijwerkingen, is relatief weinig aandacht besteed aan de invloed van de vorm van de stimulusstroom op de convulsiedrempel. Weaver [11] constateerde een twee keer zo lage convulsiedrempel bij de LEBS (weergegeven in figuur 1D) in vergelijking met de convulsiedrempel die optreedt bij de conventionele ac-stimulus die is weergegeven in figuur 1A. Blijkbaar is de effectiviteit van de stimulusenergie groter met betrekking tot het opwekken van een convulsie als men deze energie verpakt in hogere harmonischen dan de sinusvorm met lichtnetfrequentie. Het is mogelijk dat dit veroorzaakt wordt door een andere stroomdichtheidsverdeling van de hogere harmonischen zodat de shuntwerking van de huid kleiner is of dat de stroom door gevoelige hersengebieden wordt geleid. Ook is het mogelijk dat bepaalde hersenweefsels gevoelig zijn

voor de frekwentie van de er doorheengevoerde stroom zoals dat bij bijvoorbeeld spierweefsel ook het geval is. Het is denkbaar dat bij een ac-stimulusstroom van 3 Hz relatief weinig energie nodig is om een convulsie op te wekken. Deze gedachte is gebaseerd op het feit dat bij een epilepticus door middel van lichtflitsen van ongeveer 3 Hz een aanval kan worden opgewekt. In het EEG treden dan ook na het beëindigen van de stimulus, golf-piekcomplexen op met de meest dominante frekwentiecomponent in de buurt van de 3 Hz. De intensiteit- en richtingverdeling van het elektrische veld is bij ECT met 3 Hz echter hetzelfde als bij 50 Hz.

Resumerend kan worden gesteld dat zowel bij lagere als een (veel) hogere frekwentie van de dominante component in het fourierspectrum, de convulsiedrempel waarschijnlijk lager is dan die bij de traditionele 50 of 60 Hz ac-stimulusstroom. Een theoretische basis met betrekking tot de keuze van de lichtnet-frekwentie als dominante component in het fourierspectrum ontbreekt in de literatuur. Deze keuze is hoogst waarschijnlijk slechts gebaseerd op het gemak waarmee de stimulusapparatuur ontworpen en gebouwd kan worden. Hierbij is het belang van de frekwentie ten aanzien van de therapie niet onderkent.

De bepaling van de optimale vorm van de stimulusstroom kan op experimentele wijze bij ratten of apen geschieden. Hiertoe moet de mogelijkheid bestaan zowel de stroomsterkte als de frekwentie van de sinusvormige stimulusstroom te variëren.

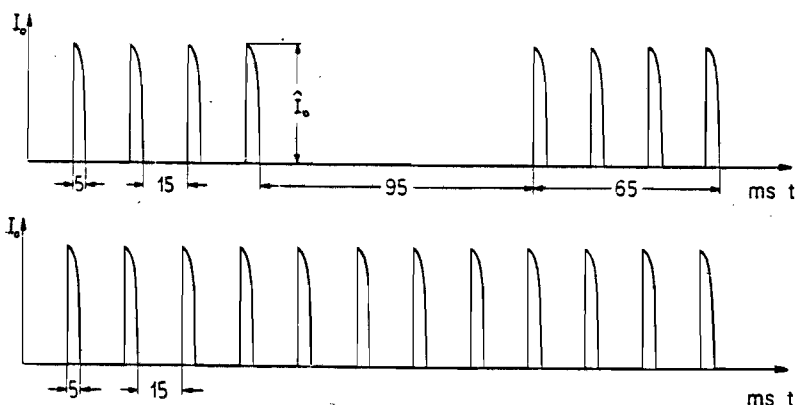
REFERENTIES

- [1] Gezondheidsraad, Advies inzake elektroconvulsie-therapie, (1983)36.
- [2] Smitt, J.W. and Wegner, C.F., On electric convulsive therapy with particular regard to a parietal application of electrodes controlled by intracerebral voltage measurements, Acta Psychiat. Neurol., 19(1944)529.
- [3] Hayes, K.J., The current path in electric convulsive shock, Arch. Neurol. Psychiat., 63(1950)102.
- [4] Rush, S. and Driscoll, D., Current distribution in the brain from surface electrodes, IEEE Trans. on Bio. Med. Engg. 47(1968)717.
- [5] Rush, S. and Driscoll, D., EEG electrode sensitivity-an application of reciprocity, IEEE Trans. on Bio. Med. Engg. 16(1969)15.
- [6] Geddes, L.A. and Baker, L.E., The specific resistance of biological material- a compendium of data for the biomedical engineer and physiologist; Med. Biol. Engin. 5(1967)271.
- [7] Weiner D., ECT and Seizure Threshold: Effects of stimulus wave from electrode placement, Biol. Psychiat. 15(1980)241.
- [8] Weaver, L.A. and Ives J.O., A comparison of standard alternating current and low-energy brief-pulse electrotherapy, Biol. Psych. 12(1977)525.
- [9] Weaver, L.A. and Williams, R., Current density in bilateral and unilateral ECT, IEEE Trans. on Bio. Med. Engg. 11(1975)303.
- [10] Chakkalakal, D.A. and Johnson, M.W., Dielectric properties of fluid-saturated bone, IEEE Trans. on Bio. Med. Engg. 27(1980)95.

- [11] Kritikos, H.N. and Schwan, H.P., The distribution of heating potential inside lossy spheres, IEEE Trans. on Bio. Med. Engg. 22(1975)457.
- [12] Heiter, G.L., Characterisations of nonlinearities in microwave divices and systems, IEEE Trans. Microwave Theory. Tech., 21(1973)797.
- [13] Reddy, G.N. and Sahata, S., Electrical and dielectric properties of wet bone as a function of frequency, IEEE Trans. on Bio. Med. Engg. 31(1984)297.
- [14] Stratton, J.A., Electromagnetic theory, McGraw-Hill Book Cy. New York, (1941).
- [15] Van Bladel, J., Electromagnetic Fields, McGraw-Hill Book Cy. New York, (1964).
- [16] Harrington, R.F., Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill Book Cy. New York, (1961).
- [17] Tranter, C.J., Integral Transforms in Mathematical Physics, Methuen & Co. LTD. London, (1956).

De stimulusstroom

De vorm van de stimulusstroom die wordt afgegeven door de Konvulsator 622 (Siemens) bestaat uit kwart-sinusvormige pulsen met een pulsbreedte van 15 msec zoals is weergegeven in figuur 43.



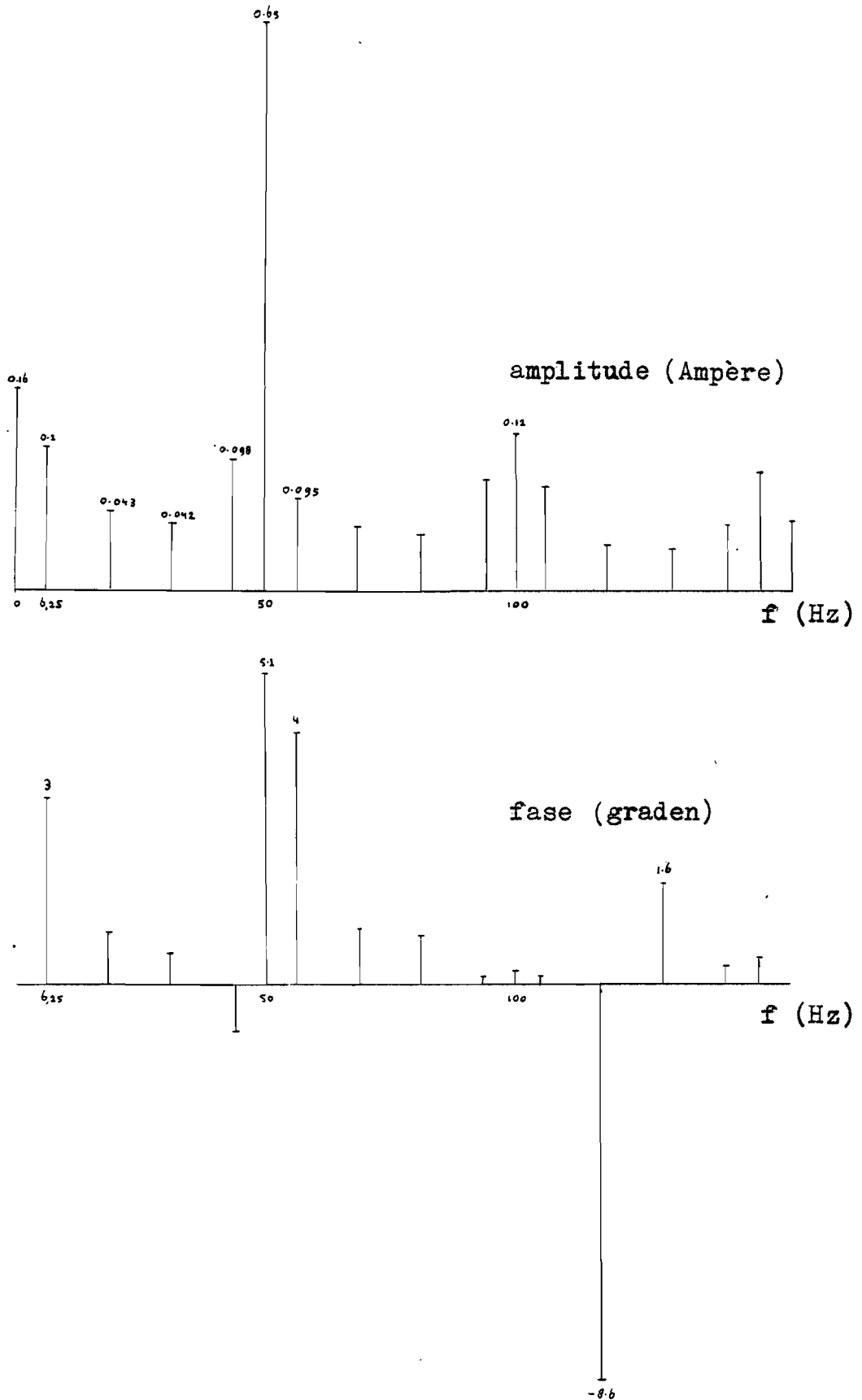
Figuur 43 Stimulusvorm; groepsgewijze respectievelijk aanhoudende pulsering

De impulsen worden gewoonlijk in groepen van 4 geleverd. De pauze tussen de groepen bedraagt 95 msec. Ter vergroting van de dosis is ook een aanhoudende levering van impulsen mogelijk. De stroomsterkte is geleidelijk op te voeren. De maximale amplitude bedraagt 900 mA. De stroomdoorgang duurt normaal 3 tot 5 sec.

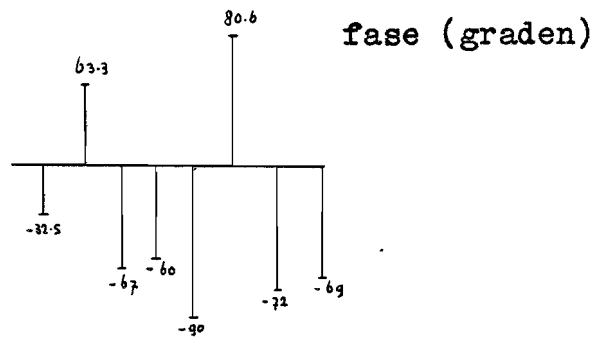
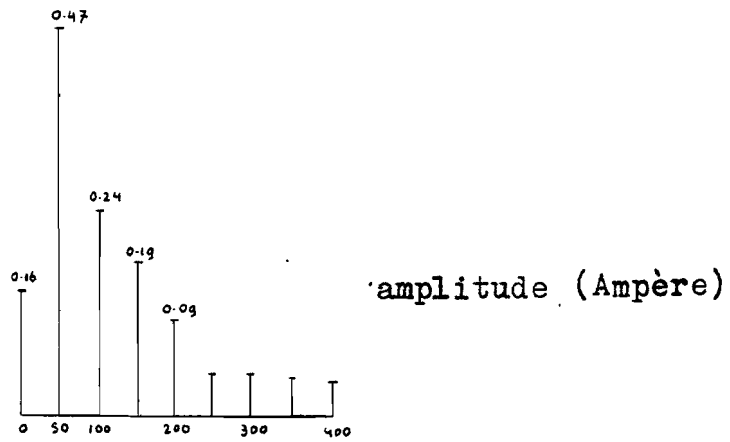
In figuur 44 is het amplitude- en fasespektrum van I_0 in geval van groepsgewijze pulsering weergegeven ($I_{0max} = 1A$).

In figuur 45 is het amplitude- en fasespektrum van I_0 in geval van aanhoudende pulsering weergegeven ($I_{0max} = 1A$).

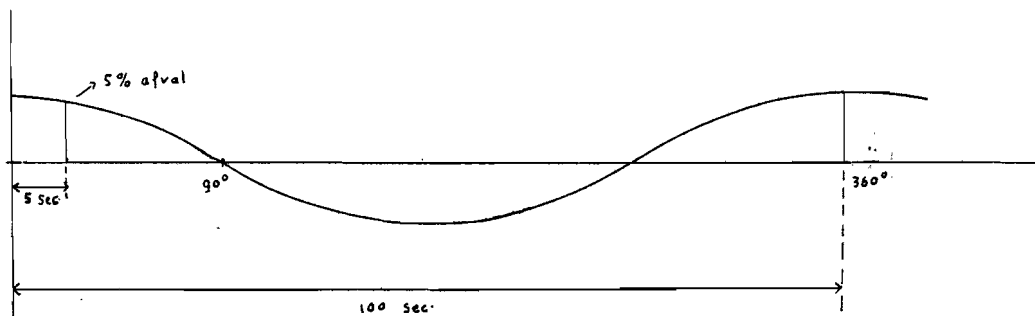
De gelijkstroomcomponent kan worden benaderd door een cosinus waarvoor het 1/4 deel van de periodetijd groot is ten opzichte van de duur van de stroomdoorgang (zie figuur 46).



Figuur 44 Amplitude- en fasespectrum van I_0 bij groepsgewijze pulsering



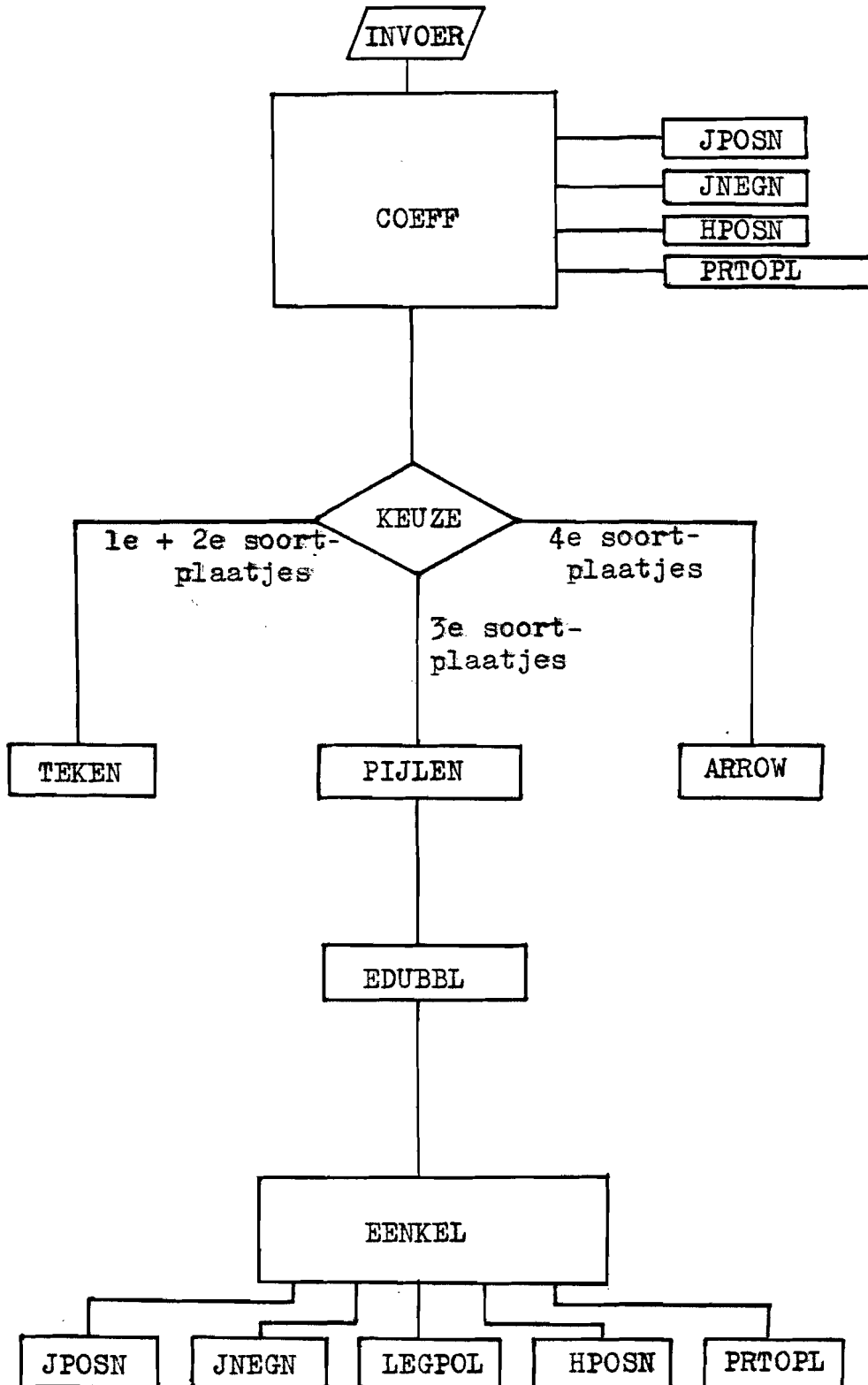
Figuur 45 Amplitude- en fasespectrum van I. bij aanhoudende pulsering



Figuur 46 Benadering van de gelijkstroomcomponent door een cosinus met $f=0,01$ Hz

BIJLAGE II

In figuur 47 is de modulaire opbouw van het computerprogramma "Electroshock" weergegeven.



Figuur 47 Stuctuur van het computerprogramma "Electroshock".

toelichting: Nadat de invoerparameters zijn ingelezen wordt in het hoofdprogramma de subroutine COEFF aangeroepen. Deze berekent de coëfficiënten van het randwaardeprobleem $A_n t/m E_n$ volgens de uitdrukkingen 3.38. De waarden van de sferische Besselfuncties, particuliere oplossing van differentiaalvergelijking 3.16 en alle afgeleiden van deze functies worden verkregen door de aanroep van JPOSN (berekent $j_n(kr)$ en $j_n'(kr)$), JNEGN (berekent $y_n(kr)$ en $y_n'(kr)$), HPOSN (berekent $h_n^{(2)}(kr)$, $h_n^{(2)'}(kr)$ en $\int_a^{\infty} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{r} dr$) en PRTOPL (berekent $F_{n\text{part}}(kr)$ en $F_{n\text{part}}'(kr)$). Al naar gelang de waarde van de variabele ISOORT wordt de subroutine TEKEN, PIJLEN of ARROW aangeroepen. Deze subroutines berekenen plots van verschillende soorten plaatjes (zie paragraaf 4.2). Dat wil zeggen dat ze de punten aangeven waar richting of grootte van het elektrische veld of een daarmee samenhangende grootte berekend moet worden en de resultaten van deze berekeningen in de vorm van een plotfile bundelt. De feitelijke berekening van het veld zoals dat optreedt in het driebollenmodel ten gevolge van twee stroomvoerende elektrodes geschiedt in subroutine EDUBBL. In feite wordt in deze routine de coördinatentransformatie uitgevoerd die is beschreven in paragraaf 3.6. Uitgangspunt hierbij is het veld ten gevolge van slechts een stroomvoerende elektrode. De berekening hiervan geschiedt door subroutine EENKEL volgens formule 3.43. Hierbij is weer een berekening van sferische Besselfuncties plus afgeleiden (aanroep van JPOSN, JNEGN, HPOSN), berekening van de particuliere oplossing $F_{n\text{part}}(kr)$ (aanroep van PRTOPL) en ook de berekening van de Legendrepolynomen $p_n(\cos(\theta))$ en $p_n^1(\cos(\theta))$ (aanroep LEGPOL) nodig.