

## MASTER

### Analytische technieken voor niet-lineaire differentiaalvergelijkingen, die optreden in halfgeleider berekeningen

Temmink, J.

*Award date:*  
1978

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Analytische technieken voor  
niet-lineaire differentiaal-  
vergelijkingen, die optreden  
in halfgeleider berekeningen

door J. Temmink.

ET-14-78

Afstudeerverslag  
uitgevoerd bij dr.ir.T.G.v.d. Roer  
(vakgroep ET)

juni 1978

## Inhoudsopgave

### Hoofdstuk I

- 1.1. Inleiding
- 1.2. De baritt-diode
- 1.3. Probleemstelling
- 1.4. Driftsnelheid
- 1.5. Boven flat-band.

### Hoofdstuk II, Verzadigde driftsnelheid.

- 2.1. Inleiding
- 2.2. Eénduidigheid
- 2.3. Grondkarakteristieken
- 2.4. Elektrische veldsterkte
- 2.5. Spanning.

### Hoofdstuk III, Driftsnelheid afhankelijk van de veldsterkte.

- 3.1. Benadering driftsnelheid
- 3.2. Analytische oplossing
- 3.3. Eénduidigheid
- 3.4. Grondkarakteristieken
- 3.5. Veldsterkte
- 3.6. Spanning
- 3.7. Hogere harmonischen; impedantie.

### Hoofdstuk IV, Beneden flat-band.

- 4.1. Probleemstelling
- 4.2. Eénduidigheid
- 4.3. Upper- en lower solutions.
- 4.4. Benaderingen m.b.v. upper- en lower solutions.

### Hoofdstuk V, Samenvatting.

## Hoofdstuk I

### 1.1. Inleiding.

Bij relatief lage frequentie kunnen we elektronische elementen zoals buizen, diodes, transistoren opgebouwd denken uit diskrete componenten, die gekarakteriseerd worden door een aantal relaties tussen spanningen en stromen.

Worden de frequenties hoger, dan zal het steeds moeilijker worden om knooppunten aan te wijzen, waar men van spanningen en stromen kan spreken, en tevens zullen de looptijden van ladingsdragers een grotere rol gaan spelen.

Shockley publiceerde in 1954 een theorie om boven een bepaalde frequentie m.b.v. looptijd-effecten een impedantie met een negatief reëel deel in halfgeleiders te verkrijgen. Van deze theorie wordt gebruik gemaakt bij impatt-diodes, baritt-diodes en gunn-diodes.

In dit verslag wordt de werking van de baritt-diode zoveel mogelijk analytisch behandeld. Het elektrisch veld in deze diode kan nl. in het algemeen beschreven worden d.m.v. een niet-lineaire tweede orde differentiaalvergelijking, welke op te lossen is, indien we een aantal benaderingen invoeren.

## 1.2. De baritt-diode.

De baritt-diode (barrier injection transit time) bestaat uit een laag n-type halfgeleider ingeklemd tussen twee lagen metaal (mt-n-mt diode) of hoog gedoteerd p-type materiaal (p-n-p diode). Deze overgangen vormen twee diodes ruggelings in serie geschakeld, zodat bij een kleine spanning er altijd één spert (zie fig. 1.2.1). Het veldprofiel is dan volgens fig.1.2.2. Indien we de spanning verhogen, neemt de depletie-laag van de gesperde diode toe en zal deze de spanning opnemen. De energiebanden verlopen als in fig.1.2.3. Bij verdere verhoging van de spanning zullen de twee depletie-lagen elkaar gaan raken. Dit heet "punch-through". Het E-veld en de energie-banden verlopen dan volgens fig.1.2.4. en 1.2.5.

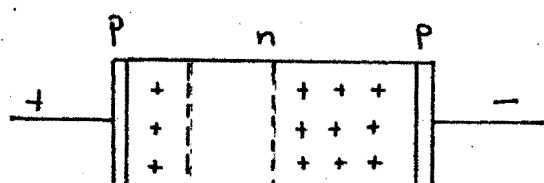
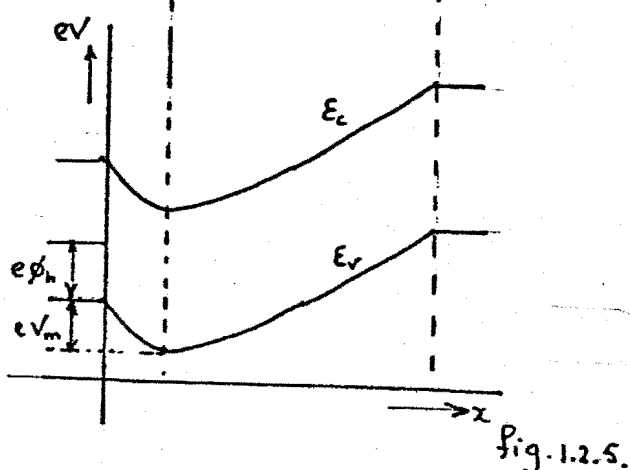
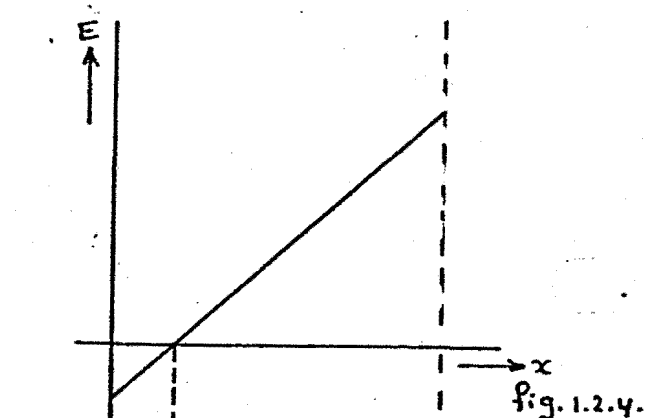
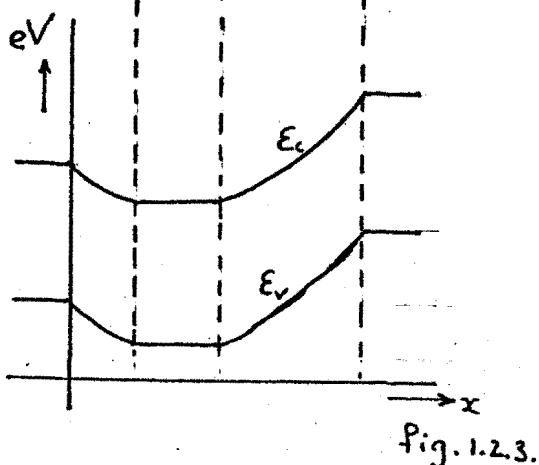
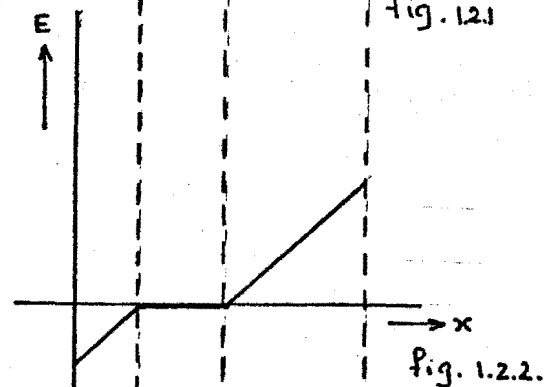


fig. 1.2.1



De stroom is nog steeds klein; we zien echter aan fig. 1.2.5 dat er maar een kleine energie-barrière voor de gaten bestaat. Gaten, die genoeg energie hebben om deze barrière te overwinnen worden door het elektrisch veld naar de andere kant getransporteerd. Wanneer we de spanning nog meer vergroten, dan zal deze barrière kleiner worden, en zal de gatenstroom toenemen volgens de formule:

$$J(t) = AT^2 \exp\left(\frac{-V_s}{V_t}\right),$$

waarbij  $V_s = V_m$  bij de p.n.p.-diode

en  $V_s = V_m + \phi_h$  bij de mt-n-mt diode (zie fig.1.2.5),

$$V_t = \frac{kT}{e}$$

T = temperatuur in °Kelvin.

A = konstante van Richardson.

De gatenstroom zal de elektronenstroom sterk gaan overheersen en we zullen deze laatste dan ook gaan verwaarlozen.

$AT^2$  noemen we de verzadigingsstroom, en is de theoretisch maximale stroom bij een p-n-overgang. In de praktijk wordt deze stroom nooit bereikt.

Anders is het bij een mt-n-mt-diode. Wanneer we bij deze de spanning zover gaan opvoeren, dat de energie-banden bij de linker overgang horizontaal lopen, dan heet deze de "flat-band" spanning.

Men zou verwachten, dat bij deze spanning de gatenstroom t.g.v. de diffusie zijn maximum waarde heeft bereikt. Dit is bij de mt-n-mt-diode niet het geval. Gaten in de buurt van het linker kontakt induceren lading in het metaal, die een aantrekkende kracht veroorzaken. Deze "spanning" moeten we aan de elektrische potentiaal toevoegen en verlaagt de barrière (schotky-effect).

Deze barrière-vermindering is in de praktijk altijd evenredig met  $E_c^{\frac{1}{2}}$ , waarbij  $E_c$  de elektrische veldsterkte is nabij de linker overgang.

## 1.3. Probleemstelling.

In de komende beschouwingen veonderstellen we de diode ééndimensionaal, d.w.z. alle grootheden denken we alleen afhankelijk van de lengte-richting ( $x$ ) van de diode en van de tijd, en onafhankelijk van de dwarsrichting.

In de diode ( $n$ -gebied) zal de dichtheid van de ladingsdragers afhangen van de plaats en de tijd:  $p = p(x, t)$ .

Indien  $N_D$  de dichtheid van de donor-atomen voorsteld, dan geldt volgens Poisson

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon} \{ p(x, t) + N_D \} \quad 1.3.1.$$

De transport-vergelijking voor de stroom luidt:

$$J_c(x, t) = e \cdot v(E) \cdot p(x, t) - e \cdot D \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \quad 1.3.2.$$

De continuïteits-vergelijking voor de totale stroom:

$$J(t) = J_c(x, t) + \epsilon \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \quad 1.3.3.$$

Uit deze drie vergelijkingen ontstaat een tweede-orde partiële differentiaalvergelijking:

$$-D \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \epsilon \cdot v(E) \frac{\partial E}{\partial x} = J(t) + e N_D v(E) \quad 1.3.4.$$

Om deze vergelijking op te lossen hebben we twee rand- en/of beginvoorwaarden nodig.

We beperken ons tot de  $mt-n-mt$ -diode. Voor deze diode gelden aan het linker kontakt ( $x=0$ ) de volgende voorwaarden (zie §1.1)

a) beneden flat-band:  $p(0, t) = N_V \cdot \exp\left[\frac{-\phi_n}{V_T}\right]$

b) boven flat-band:  $J = J_s \cdot \exp\left[\frac{\sqrt{E(t, 0)}}{E_s}\right] + \epsilon \frac{\partial E(t, 0)}{\partial t}$ .

De tweede voorwaarde geldt aan het collecterend (rechter) kontakt.

We nemen aan, dat daar geen diffusie meer optreedt, m.a.w.

$$\frac{\partial p(l, t)}{\partial x} = 0.$$

## 1.4. Driftsnelheid.

De driftsnelheid afhankelijk van het elektrisch veld ( $v(E)$ ) is bij lage  $E$  recht-evenredig met  $E$  en gaat bij hogere veldsterkten asymptotisch naar een verzadigingssnelheid (zie fig. 1.4.1).

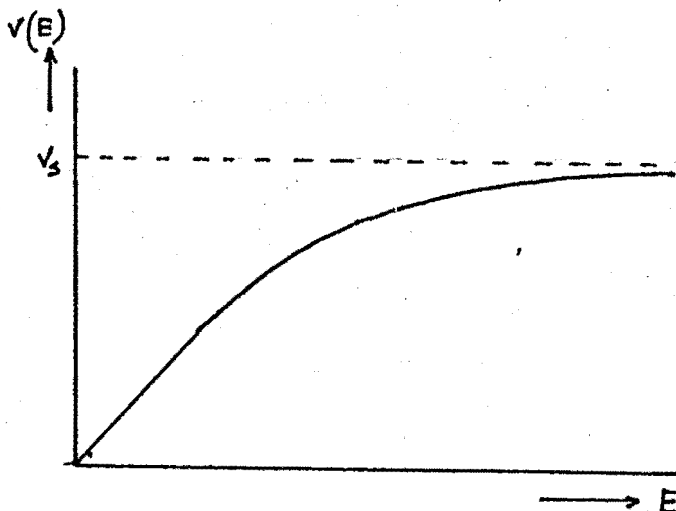


fig. 1.4.1.

Een goede benadering voor  $v(E)$  werd gegeven door Canali:

$$v(E) = \frac{\mu|E|}{\left\{1 + \left|\frac{\mu E}{v_s}\right|^\beta\right\}^{1/\beta}}$$

1.4.1.

met  $\mu$  : beweeglijkheid der ladingsdragers  
 $v_s$  : verzadigingssnelheid  
 $\beta$  : konstante.

Deze drie grootheden zijn afhankelijk van de temperatuur.  
 Voorgaten in Si is een goede waarde voor  $\beta$  :  $\beta = 1,2$ .



## 1.5. Boven flat-band.

Indien we het veld hoog veronderstellen (boven flat-band) en aannemen, dat de snelheid der ladingsdragers overal zo groot is dat geldt

$$v(E) \cdot \rho(x,t) \gg D \cdot \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} \quad (\text{zie 1.3.2})$$

dan kan het elektrisch veld worden beschreven door een z.g. quasi-lineaire partiële eerste orde differentiaalvergelijking.

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \varepsilon \cdot v(E) \frac{\partial E}{\partial x} = J(t) + e N_D v(E), \quad t > 0, \quad 0 < x < l. \quad 1.5.1.$$

(vergelijk met 1.3.4.),  
met als randvoorwaarden:

$$\frac{\partial E(t,0)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} J(t) - \frac{1}{\varepsilon} J_s \exp\left[\sqrt{\frac{E(t,0)}{E_s}}\right] \quad 1.5.2$$

$$\frac{\partial \rho(l,t)}{\partial x} = 0 \quad 1.5.3.$$

We zullen in hoofdstuk 3 bewijzen, dat de randvoorwaarde aan het linker kontakt (1.4.2) alleen voldoende is om het veld te beschrijven.

We kunnen de grootheden dimensie-loos maken door de volgende normering toe te passen,

$$J^* = \frac{J}{e N_D v_s}, \quad E^* = \frac{\mu E}{v_s}, \quad x^* = \frac{e \mu N_D}{\varepsilon \cdot v_s} x,$$

$$t^* = \frac{e \mu N_D}{\varepsilon} t, \quad v^* = \frac{v(E)}{v_s}, \quad \omega^* = \frac{\varepsilon}{e \mu N_D} \omega.$$

Onze differentiaalvergelijking gaat nu over in:

$$\frac{\partial E^*}{\partial t^*} + v^*(E^*) \frac{\partial E^*}{\partial x^*} = v^*(E^*) + J^*(t^*) \quad 1.5.4$$

met als randvoorwaarde

$$\frac{\partial E^*(t^*, 0)}{\partial t^*} = J^*(t^*) - J_s^* \exp\left\{\left\{\frac{E^*(t^*, 0)}{E_s^*}\right\}^{1/2}\right\} \quad 1.5.5.$$

In het vervolg zullen we alleen met de dimensieloze grootheden rekenen, en zullen we de normeringstekens weglaten, behalve indien anders wordt vermeld.

#### Randvoorwaarde.

De randvoorwaarde aan het linker contact boven de flat-band spanning wordt beschreven door de D.V.

$$\frac{\partial E(t, 0)}{\partial t} = J(t) - J_s \exp\left[\left\{\frac{E(t, 0)}{E_s}\right\}^{1/2}\right] \quad 1.5.5.$$

We veronderstellen een stroom:  $J(t) = J_0(1 + m + u(t)) \sin \omega t$

met  $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

1.5.6.

We nemen als beginvoorwaarde voor de D.V. 1.4.5. de gelijkstroomoplossing:

$$\frac{\partial E}{\partial t} \equiv 0, \quad J(t) = J_0 \quad \text{of}$$

$$J_0 = J_s \exp\left[\left\{\frac{E(0, 0)}{E_s}\right\}^{1/2}\right] \rightarrow E(0, 0) = E_s \left\{\ln\left(\frac{J_0}{J_s}\right)\right\}^2 = E_0 \quad 1.5.7.$$

We hebben nu een beginwaarde probleem gekregen:

$$\frac{\partial E(t, 0)}{\partial t} = J(t) - J_s \exp\left[\left\{\frac{E(t, 0)}{E_s}\right\}^{1/2}\right]$$

$$E(0, 0) = E_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial E(t, 0)}{\partial t} = J(t) - J_s \exp\left[\left\{\frac{E(t, 0)}{E_s}\right\}^{1/2}\right] \\ E(0, 0) = E_0 \end{array} \right\} \text{ met } J(t) = J_0(1 + m + u(t)) \sin \omega t$$

Dit beginwaarde probleem is niet zo moeilijk analytisch op te lossen.  
Numeriek is dit wel mogelijk (zie fig. 1.5.1).

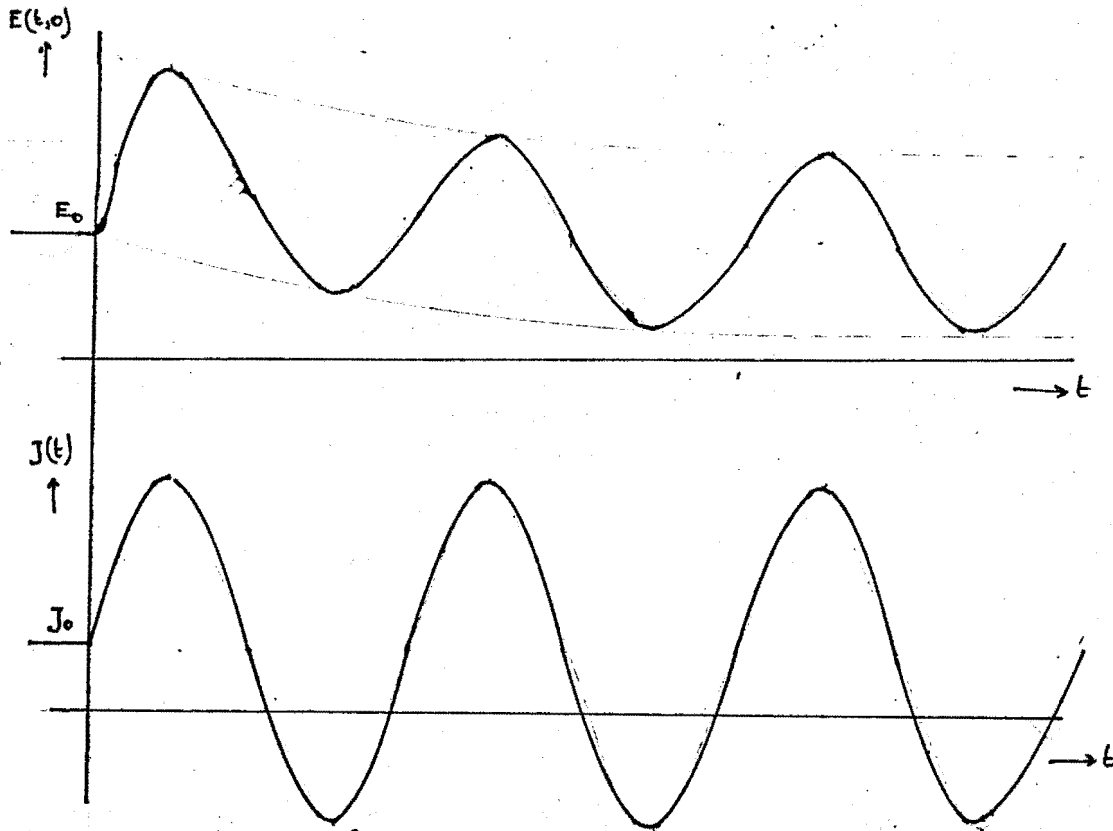


fig. 1.5.1.

We zien, dat er een instakelverschijnsel optreedt, waarna de veldsterkte periodiek om de waarde  $E(t,0) = E_0$  gaat slingeren.

We kunnen dit als volgt plausibel maken.

De D.V. luidt:

$$\frac{dE}{dt} = J_0 + mJ_0 \sin \omega t - J_s \exp\left[\sqrt{\frac{E}{E_s}}\right], \quad E > 0$$

We stellen nu:

$$E(t) = E_0(t) + \tilde{E}(t)$$

1.5.8

waarbij  $\tilde{E}(t)$  periodiek om  $E=0$  slingert.

Invullen in de D.V.:

$$\frac{dE_0}{dt} + \frac{d\tilde{E}}{dt} = J_0 + mJ_0 \sin \omega t - J_s \exp\left[\sqrt{\frac{E_0(t) + \tilde{E}(t)}{E_s}}\right]$$

De laatste term splitsen we:

$$F(t) = \exp\left[\sqrt{\frac{E_0(t) + \tilde{E}(t)}{E_s}}\right] = F_0(t) + \tilde{F}(t)$$

waarbij  $\tilde{F}(t)$  weer een periodieke functie is.

We kunnen nu twee vergelijkingen opstellen:

$$\frac{dE_0}{dt} = J_0 - J_s F_0(t) \quad 1.5.9$$

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = m J_0 \sin \omega t - J_s \tilde{F}(t) \quad 1.5.10$$

Indien  $E_0(t)$  groot wordt, dan wordt  $F_0(t)$  heel groot.

We zien aan 1.5.9. dat als  $\lim_{t \rightarrow \infty} E_0 = \infty$ , dan zou  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dE_0}{dt} = -\infty$   
Dit is in tegenspraak met elkaar.

Hieruit volgt dat  $E_0$  begrensd moet zijn, en dat  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dE_0}{dt} = 0$   
Uit 1.5.9 volgt dan voor  $t \rightarrow \infty$

$$F_0(t) = \frac{J_0}{J_s}$$

Indien we aannemen dat  $|\tilde{E}(t)| \ll E_0$  dan kunnen we  $F(t)$  schrijven als

$$F(t) = \exp \sqrt{\frac{E_0}{E_s}} \left\{ 1 + k_1 \tilde{E} + k_2 \tilde{E}^2 + k_3 \tilde{E}^3 + \dots \right\}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_0(t) = \exp \sqrt{\frac{E_0}{E_s}}, \text{ dus}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_0 = E_s \ln \left\{ \frac{J_0}{J_s} \right\}^2 \quad 1.5.11$$

Nadat het inschakelverschijnsel is uitgestorven kunnen we dus stellen

$$E(t) = E_0 + \tilde{E}(t)$$

Indien we weer veronderstellen dat  $|\tilde{E}(t)| \ll E_0$  dan wordt

$$\exp \sqrt{\frac{E}{E_s}} = \exp \sqrt{\frac{E_0}{E_s} \left( 1 + \frac{\tilde{E}}{E_0} \right)} \approx \exp \left[ \sqrt{\frac{E_0}{E_s}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{E}}{E_0} \right) \right]$$

De D.V. wordt nu

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = J(t) - J_s \exp \sqrt{\frac{E_0}{E_s}} \cdot \exp \frac{\tilde{E}}{2\sqrt{E_0 E_s}} \quad \text{of}$$

$$\frac{du}{dt} = a(t) - be^u \quad \text{met} \quad a(t) = \frac{J(t)}{2\sqrt{E_0 E_s}}, \quad b = \frac{J_s}{2\sqrt{E_0 E_s}} \cdot \exp\left(\frac{E_0}{E_s}\right)$$

$$u(t) = \frac{\tilde{E}(t)}{2\sqrt{E_0 E_s}}$$

Stel

$$v(t) = e^{-u(t)} \rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dt}$$

Invullen in

$$-\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = a(t) - \frac{b}{v}$$

$$\frac{dv}{dt} + a(t)v = b$$

1.5.13

Homogene oplossing:

$$\frac{dv}{dt} + a(t)v = 0$$

$$v = C \cdot \exp\left[-\int_0^t a(\tau) d\tau\right]$$

Met behulp van variatie der constante wordt nu de oplossing van 1.5.13

$$v(t) = \exp\left[-\int_0^t a(\tau) d\tau\right] \left\{ B + b \int_0^t \exp\left[\int_0^\tau a(\mu) d\mu\right] d\tau \right\}$$

waarbij B een constante voorstelt.

Uit de gelijkstroomoplossing kunnen we B bepalen, nl.

voor  $J(t) = J_0$  geldt  $E \neq E_0$ , m.a.w. indien  $a(t) = b$ , dan wordt  $v = 1$ ,  
dus

$$1 = \exp[-bt] \left\{ B + b \int_0^t \exp[b\tau] d\tau \right\}$$

$$1 = \exp[-bt] \left\{ B + \exp[bt] - 1 \right\}, \quad \text{dus} \quad B = 1$$

We hebben nu gevonden:

$$v(t) = \exp\left[-\int_0^t a(\nu) d\nu\right] \left\{ 1 + b \int_0^t \exp\left[\int_0^\nu a(\mu) d\mu\right] d\nu \right\}$$

$$u = -\ln v = \int_0^t a(\nu) d\nu - \ln \left\{ 1 + b \int_0^t \exp\left[\int_0^\nu a(\mu) d\mu\right] d\nu \right\}$$

$$\tilde{E}(t) = \int_0^t \tilde{J}(\nu) d\nu - 2\sqrt{E_0 E_s} \left\{ 1 + \frac{J_s}{2\sqrt{E_0 E_s}} \cdot \exp\sqrt{\frac{E_0}{E_s}} \cdot \int_0^t \exp\left[\int_0^\nu \frac{\tilde{J}(\mu)}{2\sqrt{E_0 E_s}} d\mu\right] d\nu \right\}$$

Indien het inschakelverschijnsel is uitgestorven ( $t \rightarrow \infty$ ), dan hebben we dus nu voor  $E(t, 0)$  gevonden:

$$E(t, 0) = E_0 + \tilde{E}(t) \quad , \quad \text{met}$$

$$E_0 = E_s \ln \left\{ \frac{J_0}{J_s} \right\}^2 \quad \text{en}$$

1.5.11

$$\tilde{E}(t) = \int_0^t \tilde{J}(\nu) d\nu - 2\sqrt{E_0 E_s} \left\{ 1 + \frac{J_s}{2\sqrt{E_0 E_s}} \cdot \exp\sqrt{\frac{E_0}{E_s}} \cdot \int_0^t \exp\left[\int_0^\nu \frac{\tilde{J}(\mu)}{2\sqrt{E_0 E_s}} d\mu\right] d\nu \right\} \quad . \quad 1.5.14.$$

onder de aanname dat  $|\tilde{E}(t)| \ll E_0$ .

## Hoofdstuk II Verzadigde driftsnelheid.

### 2.1. Inleiding.

Indien we aannemen, dat alle ladingsdragers dezelfde snelheid hebben, nl.  $v(E)=1$  (genormeerd), dan wordt de berekening van de veldsterkte vrij eenvoudig.

De veldsterkte in de diode wordt beschreven door de volgende vergelijkingen.

$$\frac{\partial E(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial E(t,x)}{\partial x} = 1 + J(t) \quad 2.1.1.$$

$$\frac{\partial E(t,0)}{\partial t} = J(t) - J_0 \exp\left[\left\{\frac{E(t,0)}{E_s}\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \quad 2.1.2.$$

$$E(0,0) = E_0 \quad 2.1.3.$$

De oplossing van dit stelsel luidt (zie "analytische baritt-theorie" ref.4)

$$\left. \begin{aligned} x &= s. \\ d &= s+r \\ E &= \int_0^s \{J(\xi+r)+1\} d\xi + E(r,0) \end{aligned} \right\} E(t,x) = \int_0^x \{J(\xi+d-x)+1\} d\xi + E(d-x,0) \quad 2.1.4.$$

## 2.2 Eénduidigheid.

De oplossing 2.1.4 is éénduidig, als bij ieder punt  $(s,r)$  slechts één punt  $(x,t)$  behoort, m.a.w. als de Jacobi-determinant ongelijk aan nul is (zie "analytische baritt-theorie")!

De Jacobi-determinant wordt gegeven door:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial t}{\partial s} & \frac{\partial t}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

De oplossing is éénduidig, wat ook op een eenvoudige manier blijkt uit de volgende paragraaf.

## 2.3. Grondkarakteristieken.

De grondkarakteristieken worden bepaald door  $\frac{dt}{ds} / \frac{dx}{ds} = \frac{1}{1} = 1 = \frac{dt}{dx}$  of door  $t = x + r$ .

Dit zijn rechte lijnen (zie fig 2.3.1)

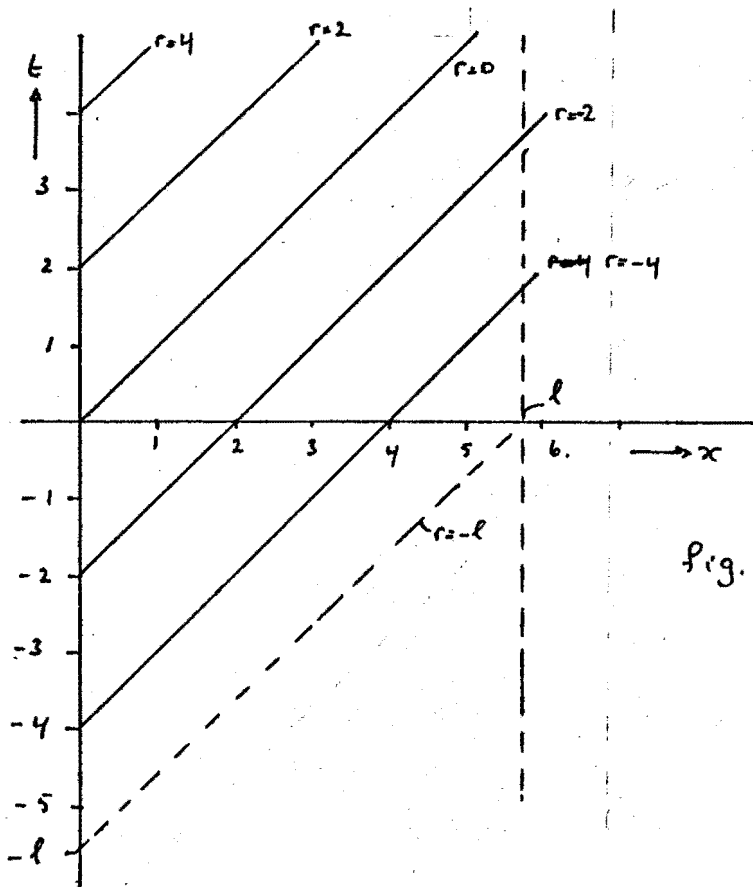


Fig. 2.3.1.



We zien, dat de randvoorwaarde  $E(t,0)$  voor  $-\infty < t < \infty$  voldoende is om  $E(t,x)$  te bepalen voor  $x \gg 0$ . Nu heeft de diode een eindige lengte  $l$ , we zullen de randvoorwaarde  $E(t,0)$  dus moeten weten voor  $t > -l$ , om de veldsterkte te weten in de diode voor  $t > 0$  en  $0 < x < l$ . In de praktijk klopt dit redelijk, aangezien bij hoge veldsterkten het kollekerend kontakt weinig invloed blijkt te hebben op het gedrag van de diode.

## 2.4. Elektrische veldsterkte.

We veronderstellen weer de volgende stroom.

$$J(t) = J_0 (1 + m \cdot u(t) \cdot \sin \omega t)$$

met  $u(t)$  gegeven door 1.5.6.

We gaan nu eerst de veldsterkte bepalen voor  $t < 0$  of indien  $J(t) = J_0$

a) Gelijkstroomoplossing ( $t < 0$ )

De randvoorwaarde wordt nu gegeven door  $E(t, 0) = E_0$  (zie 1.5.7.)

Voor  $E(t, x)$  vinden we nu m.b.v. 2.1.4.

$$E(t, x) = \int_0^x \{ J(\xi + t - x) + 1 \} d\xi + E(t - x, 0)$$

$$= \int_0^x (J_0 + 1) d\xi + E_0 = (J_0 + 1)x + E_0$$

2.4.1.

Dit is een rechte lijn. (zie fig 2.4.1)

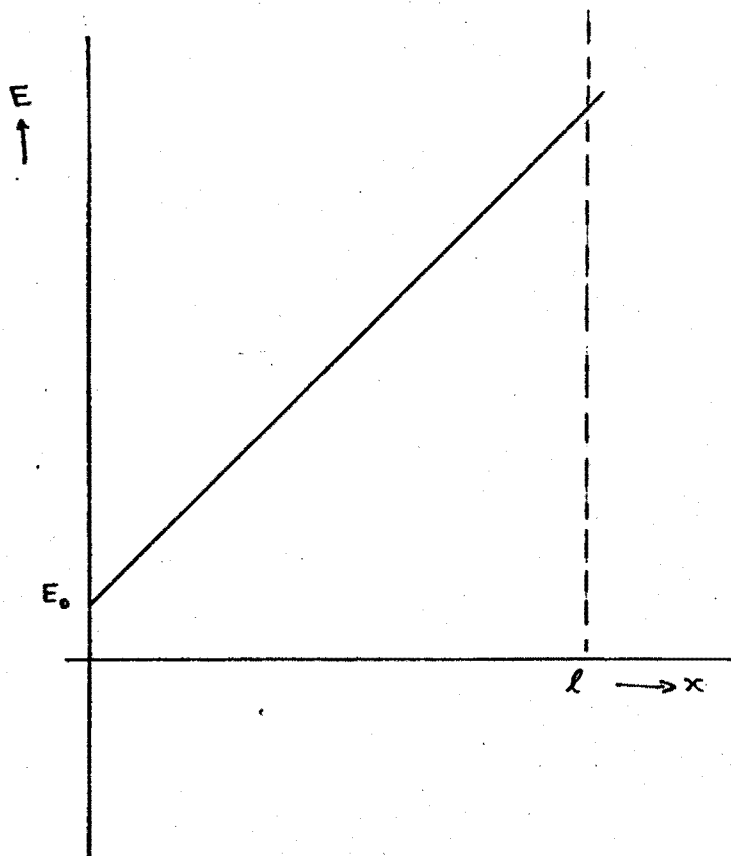


fig. 2.4.1.

b) Wisselstroomoplossing ( $t > 0$ ).

We hebben nu de stroom  $J(t) = J_0(1 + m \cdot u(t) \cdot \sin \omega t)$

De randvoorwaarde wordt nu gegeven door de D.V. 1.5.5.

We hebben als oplossing weer:

$$E(t, x) = \int_0^x \{ J(\xi + t - x) + 1 \} d\xi + E(t, x, 0)$$

We zien dat we de uitkomst kunnen splitsen in twee gedeeltes nl.

$t - x \leq 0$  en  $t - x \geq 0$ .

(1)  $t - x \leq 0$  of  $t \leq x$

$$E(t, x) = \int_0^x \{ J(\xi + t - x) + 1 \} d\xi + E(t, x, 0)$$

$$= \int_0^{x-t} + \int_{x-t}^x \{ J(\xi + t - x) + 1 \} d\xi + E_0$$

$$= \int_0^{x-t} (J_0 + 1) d\xi + \int_0^t \{ J(\mu) + 1 \} d\mu + E_0 \quad (\mu = \xi + t - x)$$

$$= (J_0 + 1)x + m \cdot J_0 \int_0^t \sin \omega \mu d\mu + E_0$$

$$= (J_0 + 1)x - \frac{m J_0}{\omega} (\cos \omega t - 1) + E_0, \quad t \leq x$$

2.4.2.

Er treedt nog geen fase-verschuiving op t.g.v. het "looptijd-effect", aangezien de ladingsdragers, die op het tijdstip  $t=0$  aan het linker kontakt "vertrokken", op het tijdstip  $t$  nog niet in  $x$  zijn aangekomen.

(2)  $t - x \geq 0$  of  $t \gg x$

$$E(t, x) = \int_0^x \{ \gamma(\xi + t - x) + 1 \} d\xi + E(t - x, 0)$$

$$= (\gamma_0 + 1)x + m \int_0^x \sin \omega(\xi + t - x) d\xi + E(t - x, 0)$$

$$= (\gamma_0 + 1)x - \frac{m \gamma_0}{\omega} (\cos \omega t - \cos \omega(t - x)) + E(t - x, 0), \quad t \gg x \quad 2.4.3.$$

Samenvattend hebben we nu gevonden:

$$E(t, x) = (\gamma_0 + 1)x + E_0 \quad , \quad t \leq 0 \quad 2.4.1$$

$$= (\gamma_0 + 1)x - \frac{m \gamma_0}{\omega} (\cos \omega t - 1) + E_0 \quad , \quad 0 \leq t \leq x \quad 2.4.2.$$

$$= (\gamma_0 + 1)x - \frac{m \gamma_0}{\omega} (\cos \omega t - \cos \omega(t - x)) + E(t - x, 0), \quad t \gg x \quad 2.4.3.$$

## 2.5. Spanning.

Nu we de veldsterkte in de diode kennen, ligt het voor de hand om de spanning over de diode te berekenen.

We nemen aan, dat de lengte van de diode gelijk is aan  $l$ , en dat  $t \gg l$ . We hebben nu te maken met vergelijking 2.4.3. en veronderstellen dat  $E(t-x, 0)$  periodiek is. (Fig. 1.5.1)

Voor de spanning geldt nu:

$$U(t) = \int_0^l E(t, x) dx, \quad 2.5.1.$$

waarbij  $U = V(0) - V(l)$ , met  $V$  gelijk aan de

potentiaal.

Volgens 2.4.3. wordt  $E(t, x)$  gegeven door:

$$E(t, x) = (J_0 + i)x - \frac{mJ_0}{\omega} (\cos \omega t - \cos \omega(t-x)) + E(t-x, 0)$$

$$U(t) = \int_0^l \left\{ (J_0 + i)x - \frac{mJ_0}{\omega} (\cos \omega t - \cos \omega(t-x)) + E(t-x, 0) \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} (J_0 + i) l^2 - \frac{mJ_0}{\omega} l \cos \omega t - \frac{mJ_0}{\omega^2} \sin \omega(t-l) + \frac{mJ_0}{\omega^2} \sin \omega t + \int_0^l E(t-x, 0) dx$$

### Hoofdstuk III Driftsnelheid afhankelijk van het veldsterkte

#### 3.1 Benadering driftsnelheid.

Een goede benadering voor de driftsnelheid afhankelijk van het elektrisch veld wordt gegeven door Canali (zie 1.4):

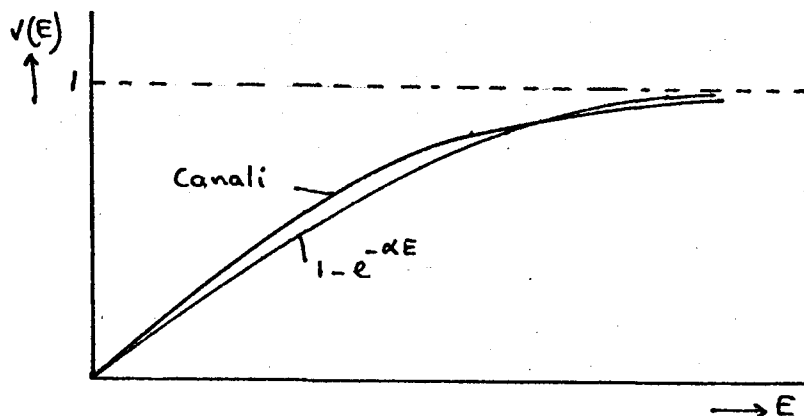
$$v(E) = \frac{E}{(1 + E^2)^{1/2}}$$

Indien we deze benadering handhaven, is de P.D.V. 1.5.4 moeilijk of niet uit te rekenen (zie "analytische baritt-theorie").

Een andere benadering, die bij hoge veldsterkte redelijk voldoet luidt:

$$v(E) = 1 - e^{-\alpha E} \quad (\text{zie fig. 3.1.1}).$$

met  $\alpha \approx 0.9$



Maken we gebruik van deze benadering, dan is 1.5.4. wel analytisch op te lossen (zie "analytische baritt-theorie").

Wenormeren E daarbij zodanig, dat we kunnen schrijven

$$v(E) = 1 - e^{-E}$$

## 3.2. Analytische oplossing.

De partiële D.V. luidt (1.5.5)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v(E) \frac{\partial E}{\partial x} = v(E) + f(t) \quad \text{met gegeven randvoorwaarde :}$$

$$E_0 = E(t, 0), \quad x=0 \quad v(E) = 1 - e^{-E}$$

De oplossing van dit randwaarde probleem is (zie "anal. baritt-theorie"):

$$t = s + r \quad 3.2.1$$

$$x = s + \ln \left| 1 - \exp[-E(r, 0)] + \int_0^s \exp \left[ - \int_0^\mu f(\xi + r) + 1 \right] d\xi \right| d\mu \quad 3.2.2.$$

$$E = \ln \left| \left[ \exp[E(r, 0)] - \int_0^s \exp \left[ \int_0^\mu f(\xi + r) + 1 \right] d\xi \right] d\mu \right| * \left[ \exp \left[ \int_0^s f(\xi + r) + 1 \right] d\xi \right] \quad 3.2.3.$$

$$x \gg 0, \quad s \gg 0$$

We hebben de veldsterkte verkregen als functie van  $s$  en  $r$ , terwijl  $s$  en  $r$  weer functies zijn van  $x$  en  $t$ , Om  $E$  als functie van  $x$  en  $t$  te verkrijgen, zullen we  $r$  en  $s$  moeten elimineren. Dit is analytisch onmogelijk en we zullen dit numeriek moeten doen.

## 3.3. Eénduidigheid.

Eerst zullen we bewijzen, dat de oplossing 3.2.1 t/m 3.2.3. één-duidig is.

In "Analytische baritt-theorie" staat beschreven, dat indien de Jacobi-determinant  $J(s, r)$  ongelijk aan nul is bij de randvoorwaarde, dat dan de P.D.V. 1.5.4. een éénduidige oplossing heeft.

De Jacobi-determinant wordt gegeven door:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial t}{\partial s} & \frac{\partial t}{\partial r} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial t}{\partial s} = v(E) \frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r}$$

De randvoorwaarde luidt voor  $x=0$ :  $E(t, x) = E(t, 0)$

of in parametervorm voor  $s=0$ :  $t=r, E=E(r, 0)$ .

Er is dus éénduidigheid indien geldt:

$$v(E) \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{s=0} - \frac{\partial x}{\partial r} \Big|_{s=0} \neq 0$$

$$\text{of: } v(E(t, 0)) \neq 0$$

$$1 - e^{-E(t, 0)} \neq 0, \text{ dus } E(t, 0) \neq 0$$

### 3.4. Grondkarakteristieken.

Om de grondkarakteristieken te bepalen gaan we als volgt te werk (zie college diktaat P.D.V. door J. Boersma).

De oplossing van de P.D.V. 1.5.4. luidde:

$$t = s + r$$

$$x = s + \ln \left| 1 - \exp \left[ -E(r, 0) \int_0^s \exp \left[ -\int_0^\mu \gamma(\xi+r) + 1 \right] d\xi \right] d\mu \right| \quad s \gg 0, x \gg 0$$

$$E = \ln \left\{ \exp \left[ E(r, 0) \int_0^s \exp \left[ -\int_0^\mu \gamma(\xi+r) + 1 \right] d\xi \right] d\mu \right\} \exp \left[ \int_0^s \gamma(\xi+r) + 1 \right] d\xi \Bigg\}$$

Analytisch kunnen we aan deze oplossing niet meer zoveel rekenen, numeriek wel.



We kunnen drie gebieden onderscheiden, nl.

- a)  $-\infty < r \leq -s$  of  $r+s \leq 0$  of  $t \leq 0$   
 b)  $-s \leq r \leq 0$  of  $t \geq 0, r \leq 0$   
 c)  $0 \leq r < \infty$  of  $t \geq 0, r \geq 0$

In deze drie gebieden zullen we de integralen

$$I_1 = \int_0^s \{ J(\xi+r) + 1 \} d\xi \quad \text{en} \quad I_2 = \int_0^s \exp\left[-\int_0^\mu \{ J(\xi+r) + 1 \} d\xi\right] d\mu$$

uitrekenen, met wederom de veronderstelling, dat

$$J(\psi) = J_0 (1 + m \cdot u(\psi) \cdot \sin \omega t),$$

waarbij  $u(t)$  gegeven wordt door i. s. b.

ad. a  $-\infty < r \leq -s$  of  $s+r \leq 0$ .

$$I_1 = \int_0^s \{ J(\xi+r) + 1 \} d\xi \quad J(\xi+r) = J_0 \quad \text{door} \quad \xi+r \leq 0, \text{ dus}$$

$$I_1 = (J_0 + 1)s.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^s \exp\left[-\int_0^\mu \{ J(\xi+r) + 1 \} d\xi\right] d\mu = \int_0^s \exp[-(J_0 + 1)\mu] d\mu \\ &= \frac{-1}{J_0 + 1} \left\{ \exp[-(J_0 + 1)\mu] \right\}_0^s = \\ &= \frac{1}{J_0 + 1} \left\{ 1 - \exp[-(J_0 + 1)s] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{dus} \quad I_1 = (J_0 + 1)s, \quad s+r \leq 0$$

3.4.1

$$I_2 = \frac{1}{J_0 + 1} \left\{ 1 - \exp[-(J_0 + 1)s] \right\}$$

3.4.2.

ad. b  $-s \leq r \leq 0$  of  $0 \leq -r \leq s$

$$I_1 = \int_0^s \{\gamma(\xi+r)+1\} d\xi = \int_0^{-r} (\gamma_0+1) d\xi + \int_{-r}^s \{\gamma(\xi+r)+1\} d\xi = \int_{-r}^s \{\gamma(\xi+r)+1\} d\xi - (\gamma_0+1)r.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^s \exp\left[-\int_0^\mu \{\gamma(\xi+r)+1\} d\xi\right] d\mu = \int_0^{-r} + \int_{-r}^s \exp\left[-\int_0^\mu \{\gamma(\xi+r)+1\} d\xi\right] d\mu \\ &= \frac{1}{\gamma_0+1} \{1 - \exp[(\gamma_0+1)r]\} + \int_{-r}^s \exp\left[-\int_{-r}^\mu \{\gamma(\xi+r)+1\} d\xi + \alpha(\gamma_0+1)r\right] d\mu \\ &= \frac{1}{\gamma_0+1} \{1 - \exp[(\gamma_0+1)r]\} + \exp[(\gamma_0+1)r] \int_{-r}^s \exp\left[-\int_{-r}^\mu \{\gamma(\xi+r)+1\} d\xi\right] d\mu. \end{aligned}$$

$$\text{dus } I_1 = \int_{-r}^s \{\gamma(\xi+r)+1\} d\xi - (\gamma_0+1)r, \quad -s \leq r \leq 0 \quad 3.4.3.$$

$$I_2 = \frac{1}{\gamma_0+1} \{1 - \exp[(\gamma_0+1)r]\} + \exp[(\gamma_0+1)r] \int_{-r}^s \exp\left[-\int_{-r}^\mu \{\gamma(\xi+r)+1\} d\xi\right] d\mu, \quad 3.4.4.$$

$-s \leq r \leq 0$

ad. c  $0 \leq r < \infty$

In dit geval is  $\xi+r > 0$  dus

$$I_1 = \int_0^s \{\gamma(\xi+r)+1\} d\xi, \quad 0 \leq r < \infty \quad 3.4.5$$

$$I_2 = \int_0^s \exp\left[-\int_0^\mu \{\gamma(\xi+r)+1\} d\xi\right] d\mu, \quad 0 \leq r < \infty \quad 3.4.6.$$

De grondkarakteristieken vinden we nu uit de volgende twee vergelijkingen,

$$t = s + r$$

$$x = s + \ln \left| 1 - \exp \left[ -E(r, 0) \right] \cdot I_2 \right|$$

met  $I_2$  gegeven door 3.4.2, 3.4.4 en 3.4.6.

We doen dit numeriek door bij een vaste waarde van  $r$ ,  $s$  te gaan variëren en de bijbehorende  $x$  en  $t$  te bepalen. Dit proces herhalen bij een andere waarde van  $r$  (zie fig. 3.4.1)

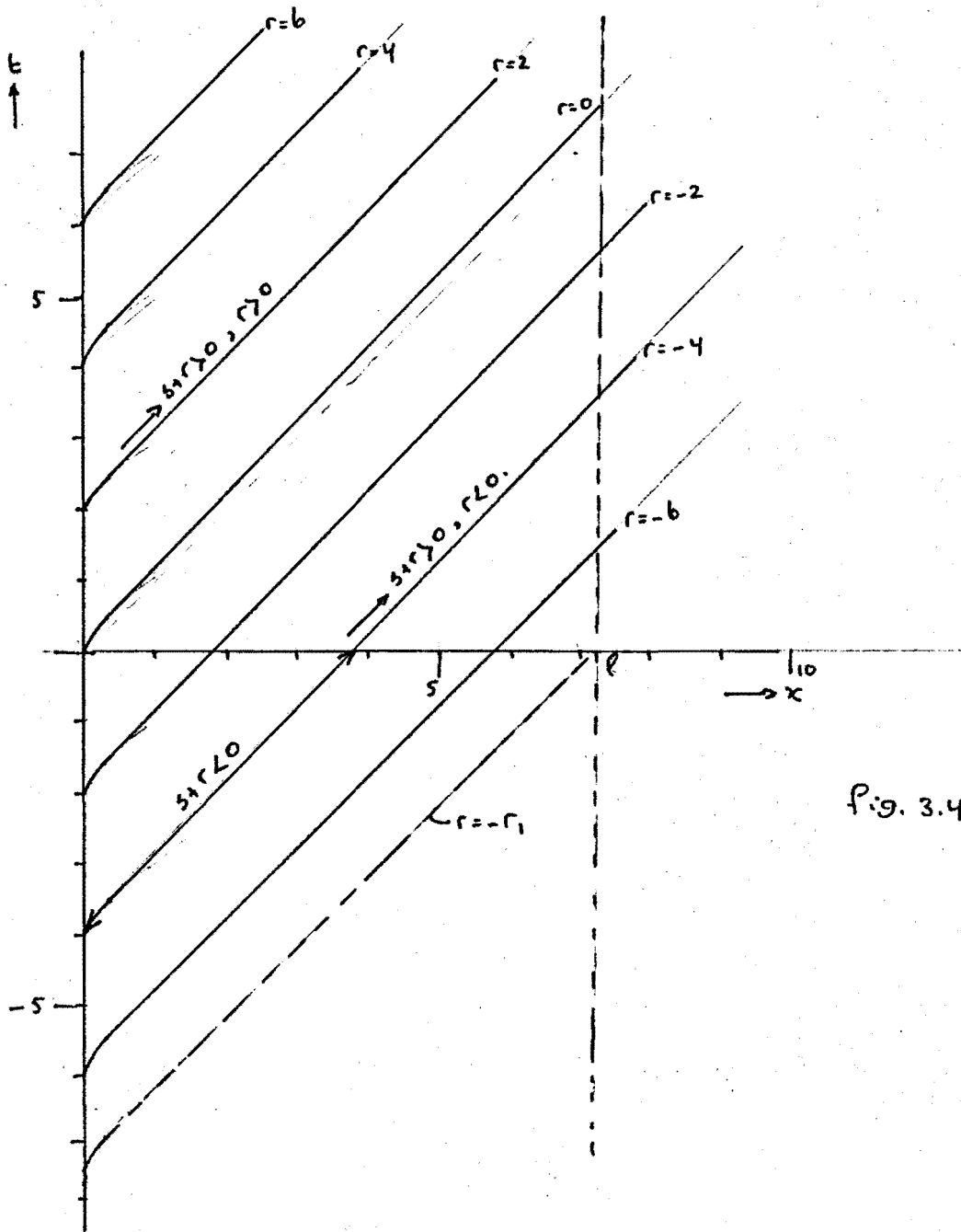


fig. 3.4.1.

We zien wederom, dat de randvoorwaarde  $E(t,0)$  met  $-\infty < t < \infty$  voldoende is om  $E(t,x)$  in het gehele rechter halfvlak te bepalen. Door de eindige lengte van de diode ( $x=1$ ), zullen we om het elektrisch veld te berekenen in de diode,  $0 < x < 1$ , de randvoorwaarde  $E(t,0)$  moeten weten voor  $t > -r_1$  ( $r_1 > 0$ ), waarbij de karakteristiek voor  $r=r_1$  de  $x$ -as snijdt in het punt  $x=1$ .

$r_1$  bepalen we als volgt.

Op de  $x$ -as geldt:  $t=0$  of  $r+s=0$ , dus  $s=-r$ .

Uit 3.4.4 volgt:  $I_2 = \frac{1}{J_0+1} \left\{ 1 - \exp\left[-(J_0+1)r\right] \right\}$ ,  $s=-r$

We kunnen dus  $r_1$  bepalen uit de vergelijking

$$I = -r_1 + \ln \left\{ 1 - \exp\left[-E(r_1,0)\right] \right\} \frac{1}{J_0+1} \left\{ 1 - \exp\left[-(J_0+1)r_1\right] \right\} \quad (3.4.7)$$

$$= -r_1 + \ln \left\{ 1 - \frac{1}{J_0+1} \exp\left[-E(r_1,0)\right] \left( 1 - \exp\left[-(J_0+1)r_1\right] \right) \right\}$$

Tevens kunnen we aantonen, dat de oplossing van de P.D.V. 1.5.4. niet éénduidig is, als  $v(E(t,0))=0$  of  $E(t,0)=0$ .

Hiertoe bepalen we de afgeleide  $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} \quad (\text{zie 3.2.2})$$

$$\frac{dx}{ds} = 1 + \frac{-\exp\left[-E(r,0)\right] \exp\left[-\int_0^s \left\{ (J_0+1) \right\} d\zeta\right]}{1 - \exp\left[-E(r,0)\right] \exp\left[-\int_0^s \left\{ (J_0+1) \right\} d\zeta\right]}$$

Voor  $x=0$  en dus  $s=0$  geldt dan:

$$\left. \frac{dx}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1 - \exp\left[-E(r,0)\right]}{1} = 1 - \exp\left[-E(r,0)\right] = v(E(r,0)) \quad (3.4.8)$$

Indien nu  $E(r,0)=0$ , dan wordt  $\frac{dx}{ds} = 0 = \frac{dx}{dt}$ , dus  $\left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=0} = \infty$

Iedere karakteristiek zal dus bij  $x=0$  een oneindige grote helling hebben, waardoor op de lijn  $x=0$  meerdere karakteristieken samenvallen. We kunnen in dat geval niet meer stellen, dat bij ieder punt  $(s,r)$  slechts één punt  $(x,t)$  hoort, zodat de oplossing van de P.D.V. 1.5.4. niet éénduidig is bij  $E(r,0)=0$ , zoals we ook al hadden geconcludeerd in § 3.3.

### 3.5. Veldsterkte.

We veronderstellen weer de volgende stroom,

$$J(t) = J_0 (1 + m \cdot u(t) \cdot \sin \omega t)$$

en splitsen de numerieke berekening voor de elektrische veldsterkte in twee delen, nl.  $t < 0$  en  $t \geq 0$ .

#### a) $t \leq 0$

We hadden volgens 3.4.1. en 3.4.2. gevonden

$$I_1 = \int_0^s J(\xi+r) d\xi = (J_0 + 1) s, \quad s, r < 0$$

$$I_2 = \int_0^s \exp\left[-\int_0^\mu J(\xi+r) d\xi\right] d\mu = \frac{1}{J_0 + 1} \left\{ 1 - \exp[-(J_0 + 1)s] \right\}$$

waardoor voor de tijdsafhankelijke elektrische veldsterkte de volgende oplossing wordt gevonden.

$$E = (J_0 + 1) s + x - s + E_0 = (J_0 + 1) x + E_0 + J_0 (s - x) \quad 3.5.1$$

$$x = s + \ln \left| 1 - \exp[-E_0] \cdot \frac{1}{J_0 + 1} \left\{ 1 - \exp[-(J_0 + 1)s] \right\} \right| \quad 3.5.2.$$

Deze functie ziet er uit volgens fig. 3.5.1.

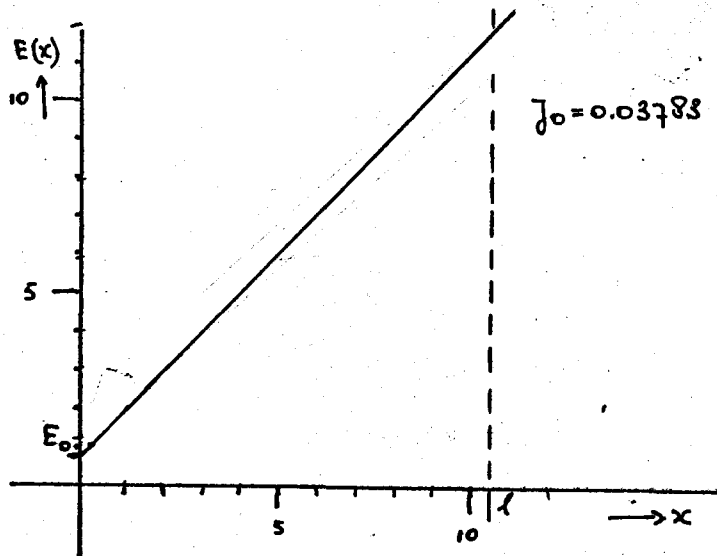


fig. 3.5.1.

Voor  $x=0$  geldt  $E(t,0)=E_0$ ,  $t < 0$

$$\frac{dE}{dx} = J_0 \cdot \frac{ds}{dx} + 1 = J_0 \cdot \frac{1}{v(E)} + 1, \quad t < 0$$

$$\frac{dE(t,0)}{dx} = J_0 \cdot \frac{1}{v(E_0)} + 1, \quad t < 0, \quad x = 0$$

$$\frac{dE(t,x)}{dx} = J_0 + 1, \quad t < 0, \quad x \gg 0$$

b)  $t \geq 0$

We kunnen weer twee gebieden onderscheiden voor de berekening van

- $I_1$  en  $I_2$  (zie § 3.4.) nl: (1)  $r < 0$ ,  $t > 0$   
 (2)  $r \geq 0$ ,  $t > 0$ .

We hebben dan de volgende oplossing voor de veldsterkte  $E(t,x)$ .

$$t = s + r$$

$$x = s + \ln |1 - \exp[-E(r,0)] v I_2|$$

$$E = \ln \left\{ \exp[E(r,0)] - I_2 \right\} x \exp[I_1] \left| \right|$$

Numeriek is dit stelsel vrij eenvoudig op te lossen.

We kunnen natuurlijk  $E(t,x)$  uitrekenen door  $t$  en  $x$  bepaalde waarden te geven, de bijbehorende  $s$  en  $r$  te bepalen, en vervolgens  $E(s(t,x),r(t,x))$  uit te rekenen.

Eenvoudiger, en minder rekentijd vergend is de methode om eerst bepaalde waarden van  $s$  en  $r$  aan te nemen en dan de bijbehorende  $E$ ,  $t$  en  $x$  te bepalen.

Voor enkele waarden van  $t$  is in fig.3.5.2.  $E(t,x)-E(0,x)$  uitgezet als functie van  $x$ , met  $t$  als parameter, ( $E(0,x)$  is hierbij de gelijkstroomkarakteristiek van fig. 3.5.1) en  $J(t) = J_0(1 + m \cdot u(t) \cdot \sin \omega t)$

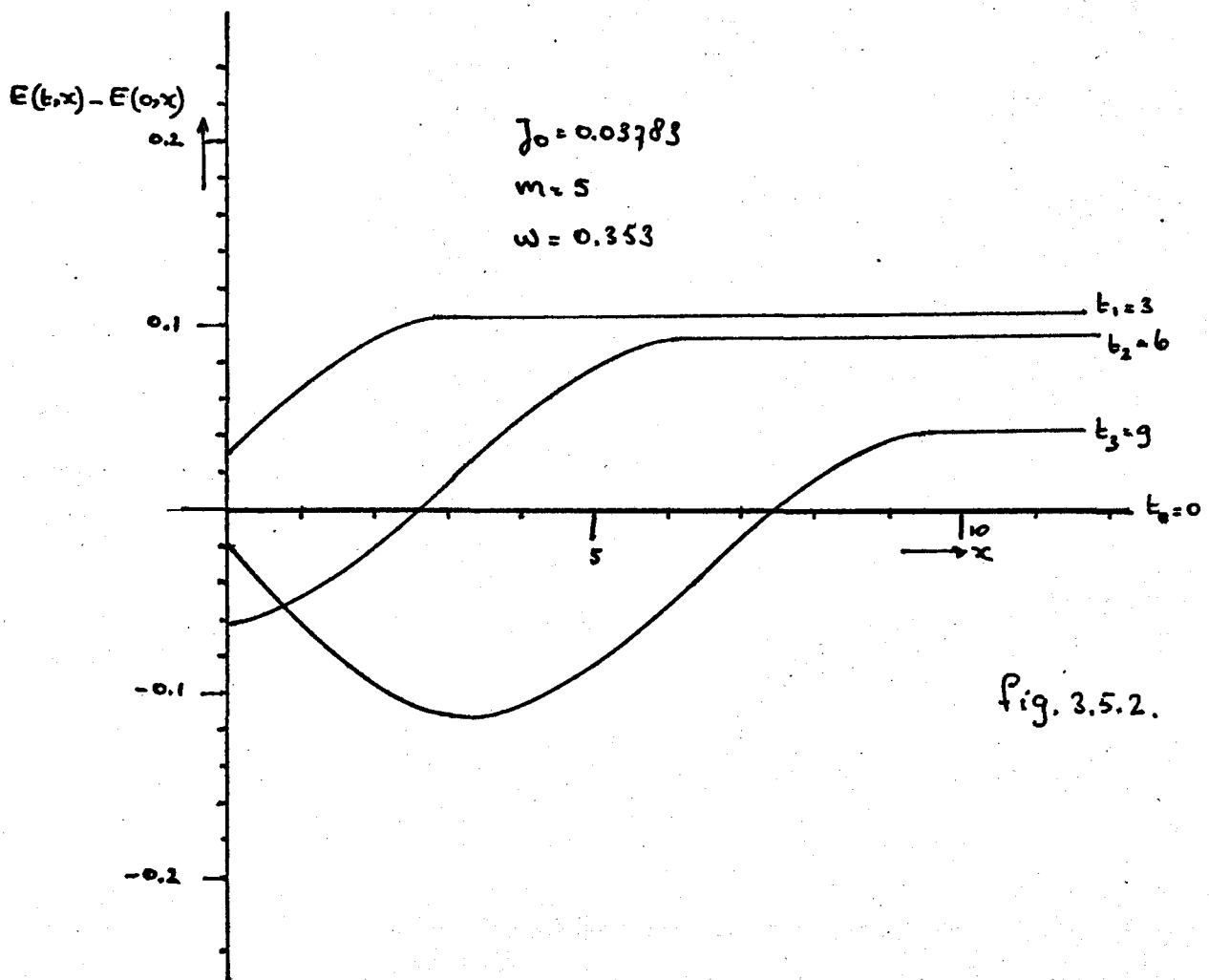


Fig. 3.5.2.

## 3.6. Spanning.

In het vorige hoofdstuk hebben we de veldsterkte als functie van de plaats ( $x$ ) en de tijd ( $t$ ) numeriek berekend.

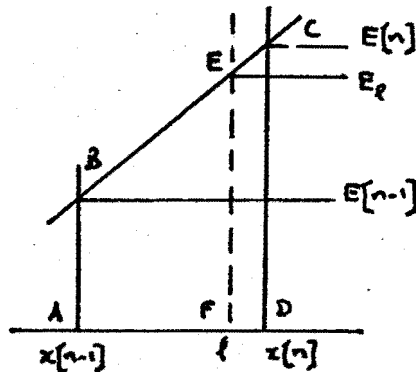
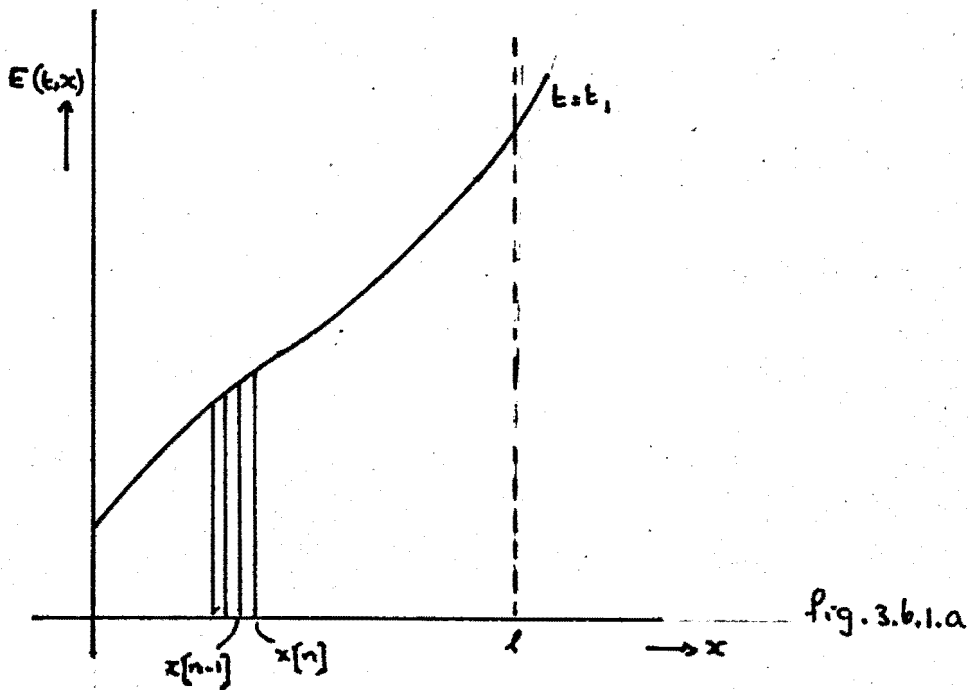
De spanning over de diode wordt weer gegeven door

$$U(t) = \int_0^l E(t,x) dx$$

waarbij de lengte van de diode  $l$  is genoemd.

We gaan als volgt te werk.

Voor een vaste tijd,  $t=t_1$  is de veldsterkte bekend voor een aantal waarden van  $x$ , zie fig. 3.6.1.a





We nemen aan, dat  $x[n]$  en  $x[n-1]$  zo dicht bij elkaar liggen, dat BC als een rechte lijn verondersteld kan worden.

We gaan nu het oppervlak  $O[n]$  berekenen van de vierhoek ABCD.

$$O[n] = \frac{1}{2} \{ E[n] + E[n-1] \} * \{ x[n] - x[n-1] \}.$$

Indien nu  $l \leq x[n]$  dan vinden we  $E_1$  door lineaire interpolatie:

$$E_1 = E[n-1] + (l - x[n-1]) * (E[n] - E[n-1]) / (x[n] - x[n-1]) \quad 3.6.1.$$

Vervolgens gaan we de oppervlakjes  $O[n]$  sommeren:

$$\sum_{n=1}^k O[n] = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2} \{ E[n] + E[n-1] \} * \{ x[n] - x[n-1] \}$$

Hierbij stellen we  $x[0] = 0$ ,  $E[0] = E(0, t)$  en  $k$  die waarde, waarbij  $x[k] \gg 1$ .

Na deze sommatie vinden we de spanning door het oppervlak van het vierhoekje CDEF er van af te trekken.

$$\text{Opp. (CDEF)} = \frac{1}{2} \{ E_1 + E[k] \} * \{ x[k] - l \}, \text{ dus}$$

$$u(t) = \sum_{n=1}^k O[n] - \frac{1}{2} \{ E_1 + E[k] \} * \{ x[k] - l \} =$$

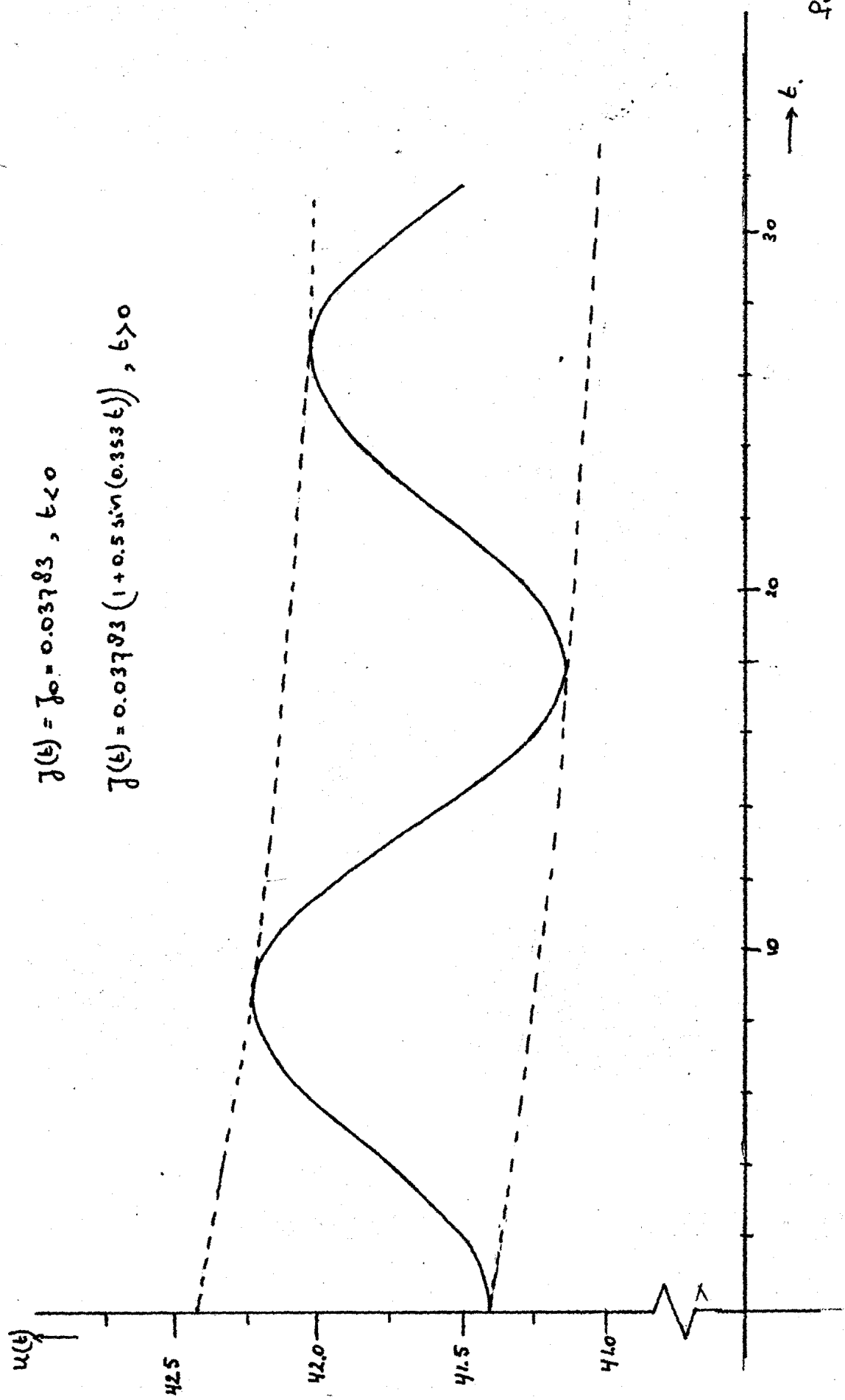
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \{ E[n] + E[n-1] \} * \{ x[n] - x[n-1] \} - \frac{1}{2} \{ E_1 + E[k] \} * \{ x[k] - l \}$$

$$\text{met } x[0] = 0 \text{ en } E[0] = E(0, t)$$

$$\text{en } E_1 \text{ gegeven door 3.6.1.}$$

3.6.2.

Dit proces herhalen we voor andere waarden van  $t$ , waardoor we de spanning als functie van de tijd berekend hebben (fig. 3.6.2).



$$f(t) = f_0 = 0.03783, t < 0$$

$$f(t) = 0.03783 (1 + 0.5 \sin(0.3553t)), t > 0$$

Fig. 3.b.2.

## 3.7. Hogere harmonischen; impedantie.

Om de tweede harmonische van de spanning te bepalen, bekijken we  $U(t)$  wanneer het inschakelverschijnsel uitgestorven verondersteld mag worden, dus  $t \gg 1$ .

De spanning is dan periodiek met een hoekfrequentie  $\omega$

De hogere harmonischen gaan we nu (numeriek) bepalen m.b.v.

"de kleinste kwadraten methode")

We kunnen de spanning  $U(t)$  beschrijven m.b.v. de formule

$$u(t) = u_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + u_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + u_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$

Indien we de derde en hogere harmonischen verwaarlozen, kunnen we de spanning benaderen door:

$$u(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + a_3 \cos 2\omega t + a_4 \sin 2\omega t = \sum_{n=1}^4 a_n f_n(t)$$

We hebben de spanning numeriek berekend in  $M$  punten ( $M > 4$ ),

bv  $y_i(t_i)$  voor  $i=1, 2, \dots, M$

We gaan nu de functie  $\sum_{i=1}^M (y_i(t_i) - u(t_i))^2$  minimaliseren.

Dit minimum wordt bereikt als de vektor  $\underline{y} - \underline{f}(x)$  loodrecht staat op alle vektoren  $\underline{f}(x)$  waarbij

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix}, \quad \underline{f}_n(x) = \begin{pmatrix} f_n(x_1) \\ f_n(x_2) \\ \vdots \\ f_n(x_M) \end{pmatrix}$$

dus:

$$\begin{pmatrix} (y_1 - \sum_{n=1}^4 a_n f_n(x_1)) \cdot f_1(x_1) = 0 \\ \vdots \\ (y_4 - \sum_{n=1}^4 a_n f_n(x_4)) \cdot f_4(x_4) = 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{of: } \sum_{n=1}^4 a_n \underline{f_n(x)} \cdot \underline{f_1(x)} = \underline{y} \cdot \underline{f_1(x)}$$

$$\sum_{n=1}^4 a_n \underline{f_n(x)} \cdot \underline{f_4(x)} = \underline{y} \cdot \underline{f_4(x)}$$

In matrix-vorm kunnen we deze vergelijkingen schrijven als

$$M \cdot \underline{a} = \underline{b} \quad \text{met} \quad M_{pq} = \begin{pmatrix} \underline{f_p} \cdot \underline{f_q} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^M \underline{f_p}(x_i) \cdot \underline{f_q}(x_i)$$

$$\underline{b}_m = \underline{f_m} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^M \underline{f_m}(x_i) \cdot y_i$$

3.7.1.

De matrix-vergelijking 3.7.1. kunnen we weer numeriek oplossen, waardoor  $a_1, a_2, a_3$  en  $a_4$  bekend worden.

Vervolgens kunnen we heel eenvoudig de wisselstroom impedantie uitrekenen. Indien we de tweede en hogere harmonischen verwaarlozen, dan hebben we voor de spanning over de diode gevonden:

$$u(t) = u_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t$$

terwijl de stroom door de diode was:

$$j(t) = j_0 (1 + m \sin(\omega t + \varphi))$$

$\varphi$  is afkomstig van de tijdsverschuiving  $t_1$ , waarbij we  $t_1$  zo groot hebben genomen, dat verondersteld mag worden, dat het inschakelverschijnsel uitgestorven is.

Voor de wisselstroomcomponenten gelden dus:

$$\underline{j} = m j_0 \sin(\omega t + \varphi) = \text{Re} \left\{ m j_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi - \pi/2)} \right\}$$

$$\underline{u} = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t = \text{Re} \left\{ a_1 e^{j\omega t} + a_2 e^{j(\omega t - \pi/2)} \right\}$$

De wisselstroomimpedantie wordt nu:

$$Z = \frac{a_1 e^{j\omega t} + a_2 e^{j(\omega t - \pi/2)}}{m j_0 e^{j(\omega t + \varphi - \pi/2)}} = \frac{(a_2 + j a_1) e^{-j\varphi}}{m j_0} = \frac{a_2 \cos\varphi + a_1 \sin\varphi + j(a_1 \cos\varphi - a_2 \sin\varphi)}{m j_0}$$

We hebben de impedanties uitgerekend voor twee diodes met achtereenvolgens de volgende gegevens (ongenormeerd)

diode 1	diode 2
$J_0 = 10^6 \text{ A/m}^2$	$10^6 \text{ A/m}^2$
$f = 7 \times 10^9 \text{ Hz}$	$7 \times 10^9 \text{ Hz}$
$l = 6.7 \times 10^{-6} \text{ m}$	$7 \times 10^{-6} \text{ m}$
$v_s = 10^5 \text{ m/sec}$	$10^5 \text{ m/sec}$
$\mu = 0.05 \text{ m}^2/\sqrt{\text{sec}}$	$0.05 \text{ m}^2/\sqrt{\text{sec}}$
$N_D = 1.65 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$	$1.2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$
$J_s = 2.3 \times 10^5 \text{ A/m}^2$	$8 \times 10^3 \text{ A/m}^2$
$E_s = 5.5 \times 10^5 \text{ V/m}$	$0.9 \times 10^5 \text{ V/m}$
$\epsilon = 1.06 \times 10^{-10} \text{ A.sec/mV}$	$1.06 \times 10^{-10} \text{ A.sec/mV}$
$A = 3 \times 10^{-8} \text{ m}^2$	$3.3 \times 10^{-8} \text{ m}^2$

We kregen de volgende resultaten:

diode 1	diode 2
$m=0.5 : Z = 1.1763 - 51.6775 \times j \ \Omega$	$m=0.5 : Z = 1.1431 - 51.9503 \times j \ \Omega$
$m=5 : Z = 1.2464 - 51.7981 \times j \ \Omega$	$m=5 : Z = 0.8716 - 51.1729 \times j \ \Omega$

De gemeten impedanties bij klein signaal ( $m \ll 1$ ) van deze diodes waren:

diode 1	diode 2
$Z = 0.2 - 52.0 \times j \ \Omega$	$Z = -0.9 - 51.2 \times j \ \Omega$

We zien, dat de imaginaire gedeeltes van de impedanties redelijk kloppen, terwijl de reële gedeeltes wat afwijken. De in § 3.1. besproken benadering van de driftsnelheid is waarschijnlijk de oorzaak van deze onnauwkeurigheid.

## Hoofdstuk IV Beneden flat-band.

### 4.1. Probleemstelling.

Wanneer we een spanning over de diode aanleggen, die kleiner is dan de flat-band spanning, dan zal het elektrisch veld aan het linker contact negatief zijn (zie fig. 1.1.4.).

De ladingsdragers zullen dus een kracht ondervinden, in de negatieve x-richting.

Door de diffusie echter, die we in tegenstelling met in hoofdstuk 3, niet meer kunnen verwaarlozen, zullen enkele gaten toch de energiebarrière kunnen overwinnen, waardoor er toch een stroom loopt.

We krijgen nu de volgende D.V. (genormeerd, zie 1.3.4.)

$$-D \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial E}{\partial t} + v(E) \frac{\partial E}{\partial x} = J(t) + v(E), \quad E(0, t) < 0$$

$$\frac{\partial E(0, t)}{\partial x} = A(t) = 1 + N_V \cdot \exp\left[\frac{-\phi(h)}{V_T}\right] > 1$$

$$\frac{\partial^2 E(l, t)}{\partial x^2} = 0$$

We beperken ons in het volgende tot de gelijkstroomtoestand, d.w.z.

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{en} \quad J(t) = J_0$$

dan wordt de D.V. voor E(x)

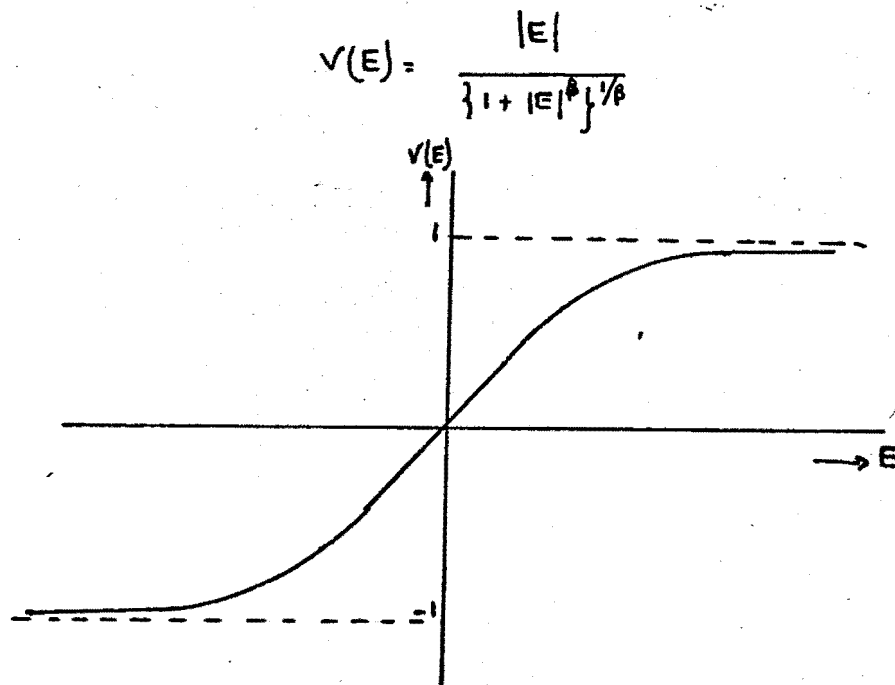
$$-D \frac{d^2 E}{dx^2} + v(E) \frac{dE}{dx} = v(E) + J_0$$

$$\frac{dE(0)}{dx} = A > 1$$

$$\frac{d^2 E(l)}{dx^2} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{dE(l)}{dx} = 1 + \frac{J_0}{v(E(l))} \approx 1 + J_0.$$

4.1.1.

De driftsnelheid van de ladingsdragers wordt weergegeven door de formule van Canali (1.4.1), waarbij  $E$  nu ook negatief kan worden.



#### 4.2. Eénduidigheid.

Eerst zullen we bewijzen, dat het randwaardeprobleem 4.1.1. een éénduidige oplossing heeft. Dit doen we als volgt.

Het probleem was:

$$-DE'' + v(E)(E' - 1) = J_0$$

$$E'(0) = A$$

$$E'(l) = 1 + J_0$$

Stel nu

$$\omega = E' - 1, \quad \omega' = E''$$



Invullen in de D.V. geeft:

$$-D\omega' + v(\epsilon)\omega = \int_0$$

$$\omega(0) = A-1$$

4.2.2.

$$\omega(1) = \int_0$$

Differentiëren:

$$-D\omega'' + v(\epsilon)\omega' + v'(\epsilon)(\omega+1)\omega = 0$$

4.2.3.

Op vergelijking 4.2.3. kunnen we het maximum/minimum principe toepassen, d.w.z.

Stel dat de functie  $w$  een positief maximum heeft, in het punt  $x=x_0$ .

dan geldt in dat punt:

$$\omega''(x_0) < 0$$

$$\omega(x_0) > 0$$

$$\omega'(x_0) = 0$$

Dit is in tegenspraak met vgl. 4.2.3., want ook  $v'(\epsilon) \gg 0$

Stel, dat de functie een minimum heeft in het punt  $x=x_1$  met

$$-1 < \omega(x_1) < 0$$

dan geldt in dat punt:

$$\omega''(x_1) > 0$$

$$\omega(x_1)(\omega(x_1)+1) < 0$$

$$\omega'(x_1) = 0$$

Dit is ook in tegenspraak met vgl. 4.2.3.

De functie  $w$  zou nu nog een positief minimum kunnen bezitten (fig. 4.2.1., I), een negatief minimum kleiner dan  $-1$  (fig. 4.2.1., II), of een ~~monotoon~~ dalende functie kunnen zijn (fig. 4.2.1., III).

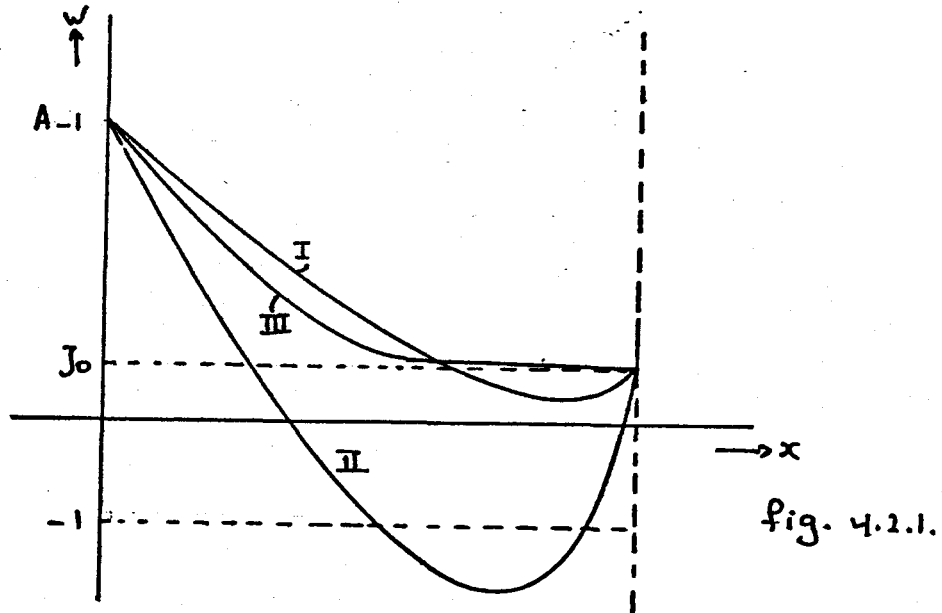


fig. 4.2.1.

Indien  $w$  een negatief minimum zou hebben, (II), dan zal  $w$  minstens twee keer nul moeten zijn. Volgens 4.2.2. echter is  $w$  in die punten altijd negatief. Dit is onmogelijk.

Indien  $w$  een positief minimum heeft (I), dan volgt uit 4.2.2. dat

$$w_{\min} = \frac{J_0}{v(E)} > J_0$$

Ook dit is onmogelijk.

We hebben nu gevonden, dat  $w$  een ~~monotoon~~ dalende positieve functie is (zie fig. 4.2.1., III), en dus ook

$$E'' \leq 0$$

$$E' \geq 1 + J_0$$

4.2.4.

Het oorspronkelijke probleem was:

$$-DE'' + v(E)(E'-1) = J_0$$

$$E'(0) = A$$

$$E'(l) = 1 + J_0$$

Stel, dat de functie  $E(x) = E_0(x)$  aan bovengenoemd probleem voldoet, dus:

$$-DE_0'' + v(E_0)(E_0' - 1) = J_0$$

$$E_0'(0) = A$$

$$E_0'(l) = 1 + J_0$$

Tevens veronderstellen we, dat er nog een tweede functie voldoet, nl.,  $E_0 + f$ , dus:

$$-DE_0'' - Df'' + v(E_0 + f)(E_0' + f' - 1) = J_0$$

$E_0$  voldoet aan 4.2.5. dus voor  $f$  geldt:

$$-Df'' + \{v(E_0 + f) - v(E_0)\} E_0' - 1 + v(E_0 + f)f' = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(l) = 0$$

Op deze vergelijking kunnen we ook het maximum/minimum principe toepassen.

Stel  $f$  heeft een positief maximum in het punt  $x = x_0$ , dan geldt:

$$f''(x_0) < 0$$

$$f'(x_0) = 0$$

$$f(x_0) > 0$$

$$v(E_0 + f) - v(E_0) > 0$$

Dit is in tegenspraak met 4.2.6.

Stel  $f$  heeft een negatief minimum in het punt  $x = x_1$ , dan geldt:

$$f''(x_1) > 0$$

$$f'(x_1) = 0$$

$$f(x_1) < 0$$

$$v(E_0 + f) - v(E_0) < 0$$

Dit is ook in tegenspraak met 4.2.6.

De functie  $f$  heeft dus geen positief maximum en geen negatief minimum op het interval  $0 < x < l$ .

De randvoorwaarden luiden echter  $f'(0) = f'(l) = 0$  d.w.z., dat er zich op de randen  $x=0$  en  $x=l$  ook altijd een echt positief maximum of een negatief minimum bevindt, (zie fig. 4.2.2.) behalve indien  $f=0$ .

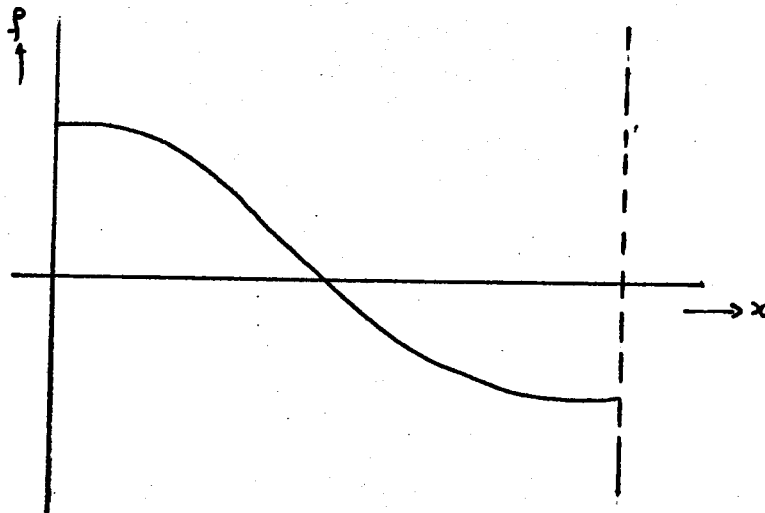


fig. 4.2.2.

Hiermee is bewezen, dat ons randwaardeprobleem 4.2.1. een éénduidige oplossing heeft.

### 4.3. Upper-en lower solutions.

Ons randwaardeprobleem luidt:

$$-DE'' + v(E)E' - v(E) = J_0$$

$$E'(0) = A$$

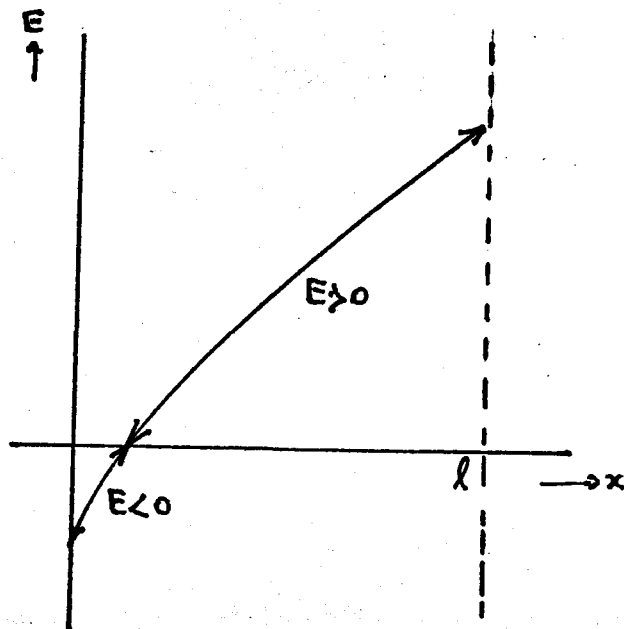
$$E'(l) = 1 + J_0$$

Een exacte analytische oplossing is van dit probleem niet te geven. Wel kunnen we de oplossing benaderen. Hiertoe geven we eerst een paar definities.

Def. I: We noemen een functie  $\alpha = \alpha(x)$  een "upper-solution" van de differentiaal-vergelijking  $E'' = F(x, E, E')$ ,  $F \in C((a, b) \times \mathbb{R}^2)$  op interval  $(a, b)$  indien  $\alpha \in C^2(a, b)$  en  $\alpha''(x) \leq F(x, \alpha(x), \alpha'(x))$  op  $(a, b)$

Def. II: We noemen een functie  $\beta = \beta(x)$  een "lower-solution" van de differentiaal-vergelijking  $E'' = F(x, E, E')$ ,  $F \in C((a, b) \times \mathbb{R}^2)$  op interval  $(a, b)$  indien  $\beta \in C^2(a, b)$  en  $\beta''(x) \geq F(x, \beta(x), \beta'(x))$  op  $(a, b)$

We verdelen de functie  $E(x)$  in twee gebieden, nl. a)  $E < 0$



b)  $E > 0$  zie fig. 4.3.1.

fig 4.3.1.

ad. a. Stel  $E < 0$ ,  $0 < x < x_0$ .

Onze differentiaal-vergelijking schrijven we nu als:

$$E'' = \frac{v(E)E' - v(E) - J_0}{D}, \quad E < 0$$

$$E'(0) = A$$

Een uppersolution van deze D.V. is nu  $\alpha(x)$ , die voldoet aan

$$\alpha'' = \frac{\alpha\alpha'}{D} \leq \frac{v(\alpha)\alpha' - v(\alpha) - J_0}{D} \quad \text{indien } v(\alpha) < -J_0 \text{ en } \alpha' > 0$$

Een lowersolution van 4.3.1. is b.v. de functie  $\beta(x)$ , die voldoet aan

$$\beta'' = \frac{-J_0}{D} \geq \frac{v(\beta)\beta' - v(\beta) - J_0}{D} \quad \text{indien } \beta \leq 0 \text{ en } \beta' \geq 1$$

Vervolgens kunnen we bewijzen, dat indien  $\alpha(0) \gg E(0)$  en  $\alpha(\mu) \gg E(\mu)$  waarbij  $v(\alpha(\mu)) < -J_0$  en  $\alpha' > 0$ , er dan geldt  $\alpha(x) \gg E(x)$  met  $0 < x < \mu$

Stel, dat er een punt  $x_0$  bestaat met  $0 < x_0 < \mu$  met  $\alpha(x_0) \leq E(x_0)$ , dan heeft de functie  $E(x) - \alpha(x)$  ergens een positief maximum op het interval  $(0, \mu)$ , zie fig. 4.3.2.

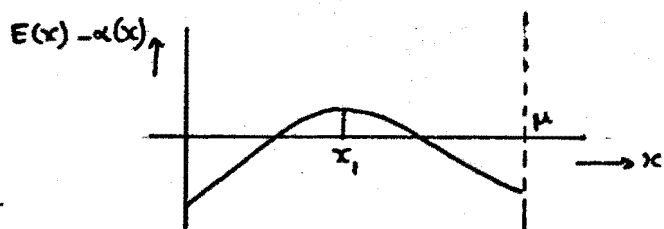


fig. 4.3.2.

In dat punt  $(x=x_1)$  geldt  $E'(x_1) = \alpha'(x_1)$  en  $E''(x_1) - \alpha''(x_1) < 0$

Anderzijds geldt echter

$$E''(x_i) = \frac{v(E(x_i))E'(x_i) - v'(E(x_i)) - J_0}{D}$$

$$\alpha''(x_i) = \frac{\alpha(x_i)\alpha'(x_i)}{D}$$

$$E''(x_i) - \alpha''(x_i) = \frac{\{v(E(x_i)) - \alpha(x_i)\}E'(x_i) - v'(E(x_i)) - J_0}{D} > 0 \quad \text{indien } v(E(x_i)) < -J_0$$

Dit is in tegenspraak met 4.3.2., dus  $\alpha(x) \gg E(x)$ ,  $0 < x < \mu$  met  $\alpha(\mu) = -J_0$ .

Op dezelfde manier kunnen we bewijzen, dat indien  $\beta(0) \leq E(0)$  en  $\beta(\xi) \leq E(\xi)$  waarbij  $\beta(\xi) < 0$  en  $\beta' \gg 1$ , er dan geldt  $\beta(x) \leq E(x)$  in het interval  $(0, \xi)$ .

#### 4.4. Benaderingen m.b.v. lower-en uppersolutions.

In het gebied, waar de veldsterkte negatief is, d.w.z.  $\sqrt{E} < -J_0$  hadden we als uppersolution gevonden  $\alpha(x)$ , die voldoet aan de differentiaal-vergelijking:

$$-D\alpha'' + \alpha\alpha' = 0, \quad \alpha' > 0, \quad \sqrt{\alpha} \approx \alpha < -J_0 \quad 4.4.1.$$

Deze differentiaal-vergelijking is gemakkelijk op te lossen, nl. integreren geeft :

$$-D\alpha' + \frac{1}{2}\alpha^2 = -\frac{1}{2}C_1$$

$$\frac{2Dd\alpha}{\alpha^2 + C_1} = dx, \quad \frac{2D}{\sqrt{C_1}} \frac{d\alpha/\sqrt{C_1}}{1 + (\alpha/\sqrt{C_1})^2} = dx$$

$$\frac{2D}{\sqrt{C_1}} \arctan \frac{\alpha}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$$

$$\alpha(x) = \sqrt{C_1} \cdot \tan \left\{ \frac{\sqrt{C_1}}{2D} (x + C_2) \right\} \quad 4.4.2.$$

$$\alpha'(0) = \frac{C_1}{2D} \cdot \frac{1}{\cos^2 \left\{ \frac{C_2 \sqrt{C_1}}{2D} \right\}} \rightarrow C_1 > 0$$

$C_1$  en  $C_2$  zijn konstanten, die door twee randvoorwaarden worden bepaald.

De lowersolution  $\beta(x)$  voldoet aan de lineaire D.V.

$$-D\beta'' = +J_0, \quad \beta < 0, \quad \beta' > 1.$$

De oplossing van deze D.V. luidt:

$$\beta = -\frac{J_0}{2D} x^2 + C_3 x + C_4 \quad 4.4.3.$$

$C_3$  en  $C_4$  zijn weer konstanten, die door twee randvoorwaarden worden bepaald.



In het gebied, waar de veldsterkte positief is, is de oplossing van de gereduceerde vergelijking een uppersolution.

Dit kunnen we als volgt laten zien.

Stel  $\gamma(x)$  de oplossing van de gereduceerde vergelijking, dan geldt:

$$v(\gamma)\gamma' - v(\gamma) = J_0 \quad 4.4.4$$

$$\gamma' = 1 + \frac{J_0}{v(\gamma)}$$

$$\gamma'' = -J_0 \frac{v'(\gamma)}{v(\gamma)^2} \left(1 + \frac{J_0}{v(\gamma)}\right) < 0, \text{ indien } \gamma > 0$$

dus  $\gamma'' \leq \frac{v(\gamma)\gamma' - v(\gamma) - J_0}{\gamma} = 0$ , dus  $\gamma(x)$  is een uppersolution.

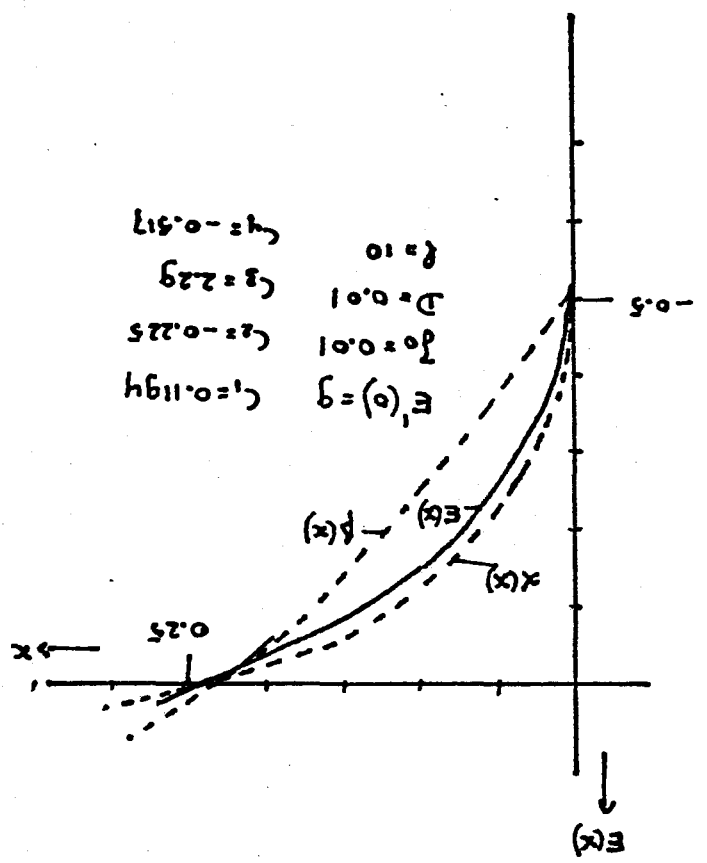
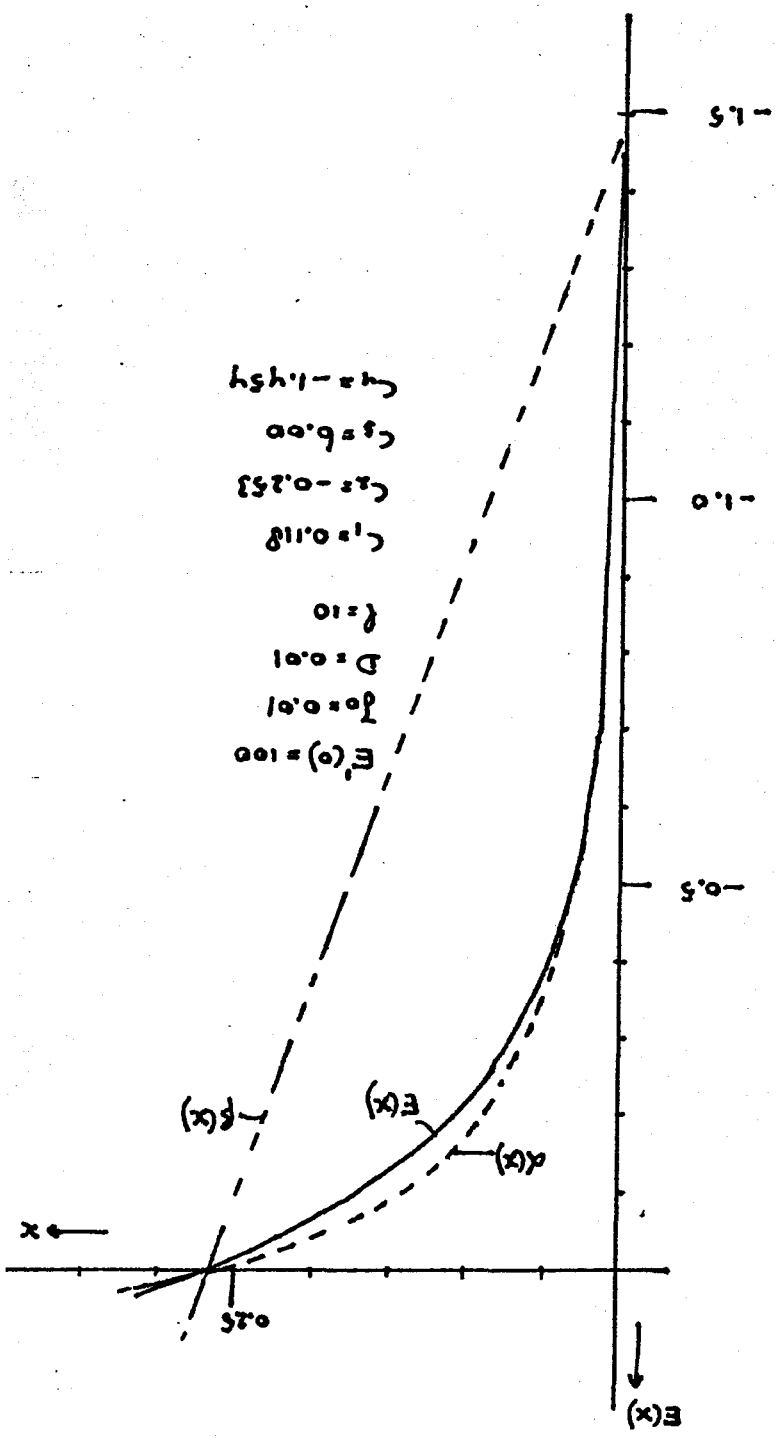
De oplossing van de gereduceerde vergelijking is berekend in § 3.5.a, zij het, dat als randvoorwaarde  $\gamma(0) = E_0$  is gekozen.

Met de methode van lower- en upper solutions is het moeilijk om met de gegeven randvoorwaarden  $E(0)$  en  $E(1)$  een benadering te vinden voor het gehele interval  $(0,1)$ .

De randvoorwaarde  $E(1) = 1 + J_0$ , ( $\gamma'(1) = 1 + J_0$ ) is voor de D.V. 4.4.4. triviaal, waardoor we  $E(0)$  en  $E(1)$  niet kunnen bepalen en de konstanten  $C_1$  t/m  $C_4$  van de vergelijkingen 4.4.2. en 4.4.3. onbekend blijven.

Wel hebben we in fig. 4.4.1. voor een paar waarden van  $E(0)$ ,  $E(x)$ ,  $\alpha(x)$  en  $\beta(x)$  uitgezet, waarbij  $C_1$  t/m  $C_4$  zodanig zijn gekozen, dat

$$\alpha(0) = \beta(0) = E(0) \text{ en } \alpha(\mu) = \beta(\mu) = E(\mu) = 0$$



## Hoofdstuk V. Samenvatting

Het elektrisch veld  $E$  in een baritt-diode kan in het algemeen worden beschreven m.b.v. een niet-lineaire tweede orde differentiaalvergelijking.

De randvoorwaarden voor deze differentiaalvergelijking kunnen we splitsen in twee gedeeltes.

- a) Indien de aangelegde spanning over de diode boven de flat-band spanning wordt gehouden, dan is de elektrische veldsterkte aan het emitterend contact om fysische redenen bekend. Omdat in dit geval de veldsterkte in het gehele gebied hoog is, kunnen we de tweede-orde term (diffusie) verwaarlozen, waardoor het veld beschreven wordt door een niet-lineaire eerste-orde differentiaalvergelijking. Deze vergelijking met bovengenoemde randvoorwaarde is analytisch uit te rekenen m.b.v. de karakteristieken-methode, mits we de driftsnelheid van de ladingsdragers door een geschikte functie van het elektrisch veld benaderen.
- b) Indien de aangelegde spanning over de diode beneden de flat-band spanning is, dan is de elektrische veldsterkte aan het emitterend contact niet meer bekend, Wel kunnen we de gatendichtheid in dat punt bepalen. De tweede randvoorwaarde nemen we aan het kollekerend contact, waar we de diffusie nul veronderstellen. Analytisch wordt bewezen, dat de tweede orde differentiaalvergelijking met boven genoemde randvoorwaarden een éénduidige oplossing heeft. Het is niet mogelijk om een goede benadring te vinden in het gehele gebied m.b.v. deze twee randvoorwaarden. Wel kunnen we m.b.v. upper- en lower solutions het veld redelijk nauwkeurig beschrijven indien we de diode in twee gedeeltes splitsen, nl. daar, waar de veldsterkte negatief, resp. positief wordt, en andere (gemeten) randvoorwaarden gebruiken.

In het eerste geval (a) is een vrij nauwkeurige benadering mogelijk, In het tweede geval kunnen we spreken van een grenslaag probleem. In deze grenslaag kunnen geschikte upper- en lower solutions gevonden worden. De upper solution blijkt na vergelijken de exacte oplossing goed te benadern.

Wel is in dit afstudeerwerk enig inzicht verkregen in de analytische technieken voor het oplossen van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen.

Dit inzicht zou aangewend kunnen worden voor een nauwkeuriger analytische beschrijving van het elektrisch veld in halfgeleiders.

Literatuur

- 1) Prof.dr. J. Boersma, Partiële Differentiaalvergelijkingen,  
College-dictaat 2252, T.H. Eindhoven.
- 2) S.T.M. Ackermans en J.H. van Lint, Algebra en Analyse,  
Wolters-Noordhoff, Groningen.
- 3) W. Shockley, Negative Resistance Arising from Transit Time  
in Semiconductor Diodes,  
B.S.T.J. 23, no 4, 799-826 (1954).
- 4) J. Temmink, Analytische Baritt-theorie,  
Stage-verslag ET-18-1977, T.H. Eindhoven.
- 5) J.D. Cole, Perturbation Methode in Applied Mathematics,  
Blaisdell, Waltham, Mass. 1968.
- 6) Protter & Weinberger, Maximum principles in differential equations.
- 7) W.A. Harris, Jr. and F.A. Howes, A Model Singular Perturbation  
Problem.
- 8) L.K. Jackson, Subfunctions and Second-Order Differential Inequalities,  
Advances in Math. 2 (1968), 307-363.