

MASTER

Ontwerpmethode voor een twee bundel reflectorantenne

Buijnsters, J.L.M.

Award date:
1995

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN



FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK

VAKGROEP Elektromagnetisme

**Ontwerpmethode voor een twee bundel
reflectorantenne**

door

J.L.M. Buijnsters

EM-2-95

**Verslag van een afstudeeronderzoek,
verricht in de vakgroep EM, onder
leiding van dr. M.E.J. Jeuken
in de periode september 1994 - april 1995.**

Eindhoven, 20 april 1995.

INHOUDSOPGAVE DEEL 1.

| | | |
|-----------------|--|----|
| SAMENVATTING | 2 | |
| H1 | Inleiding | 3 |
| H2 | Een korte omschrijving van het nieuwe type "shaped"-reflectorantenne met grote zichthoek. | 4 |
| H3 | De algemene bepaling van het stralingspatroon in het verre veld van de "shaped"-reflector. | 6 |
| H4 | Het optimale stralingspatroon van de belichter. | 14 |
| H5 | Bepaling van het stralingspatroon in het verre veld van de "shaped"-reflector in de "unscanned"-situatie. | 17 |
| H6 | Bepaling van het stralingspatroon in het verre veld van de "shaped"-reflector in de "scanned"-situatie voor $\alpha = -30^\circ$. | 27 |
| H7 | Een ontwerp voor het gelijktijdige ontvangst van twee TV-signalen. | 37 |
| H8 | Conclusies en aanbevelingen | 49 |
| Literatuurlijst | | 50 |
| Bijlage | Het verschil van twee satellietposities, uitgedrukt in een hoek Φ , gezien vanuit een willekeurige plaats op aarde. | 52 |

SAMENVATTING

In dit eerste deel worden de stralingseigenschappen bepaald voor een symmetrische "shaped"-reflectorantenne met grote zichthoek. Met behulp van meerdere belichters zijn we nu in staat om over een grote hoek (tot 60°) meerdere signalen gelijktijdig te kunnen zenden of ontvangen. Het reflectoroppervlak wordt omschreven door de functie $z(x,y)$, waarbij de functie $z(x,y)$ een veelterm in x en y voorstelt. De coëfficiënten in deze veelterm zijn in [4] zodanig bepaald dat de fasefouten in het apertuurvlak minimaal zijn. Na de inleiding volgt er een korte omschrijving van dit nieuw type "shaped"-reflectorantenne met grote zichthoek. Daarna wordt er voor deze "shaped"-reflectorantenne op een algemene manier het stralingpatroon in het verre veld afgeleid. Nadat we het optimale stralingspatroon van de belichter bepaald hebben, zijn we in staat om onder verschillende hoeken het stralingspatroon in het verre veld van de "shaped"-reflectorantenne te bepalen. Tenslotte wordt in een praktijkontwerp de stralingseigenschappen van de "shaped"-reflectorantenne bepaald voor het gelijktijdige ontvangst van twee TV-signalen. Als belangrijkste nadeel van deze symmetrische "shaped"-reflectorantenne kan genoemd worden dat er een grote apertuurblokkering optreedt.

H1. Inleiding

Met de explosieve groei van het aantal satellieten welke alleen al in de laatste 10 jaar gelanceerd zijn, groeit ook de vraag naar reflectorantennes welke in staat zijn om gelijktijdig meerdere satellieten te kunnen ontvangen. Hierbij wordt dan gedacht aan een vast opgestelde reflectorantenne met meerdere belichters welke afzonderlijk op de verschillende satellieten gericht zijn. Door bijvoorbeeld een reflectorantenne te ontwerpen welke gelijktijdig op twee TV-satellieten gericht staat, kan men door een schakelaartje om te zetten van de een TV-satelliet omschakelen naar de andere TV-satelliet. Het hinderlijke uitrichten van de reflectorantenne tussen de TV-satellieten behoort hierbij dan tot het verleden.

De reflectorantenne die we nodig hebben dient dus een grote zichthoek te bezitten, terwijl de afmetingen daarbij niet buitensporig groot zijn. Uit berekeningen [1] en [2] volgt dat een grote zichthoek met een parabolische reflectorantenne niet haalbaar is. Met de torus-antenne is wel een grote zichthoek te behalen, maar deze antenne heeft het nadeel dat voor een grote zichthoek ook een groot reflectoroppervlak nodig is, terwijl maar een klein deel van het totale reflectoroppervlak belicht wordt.

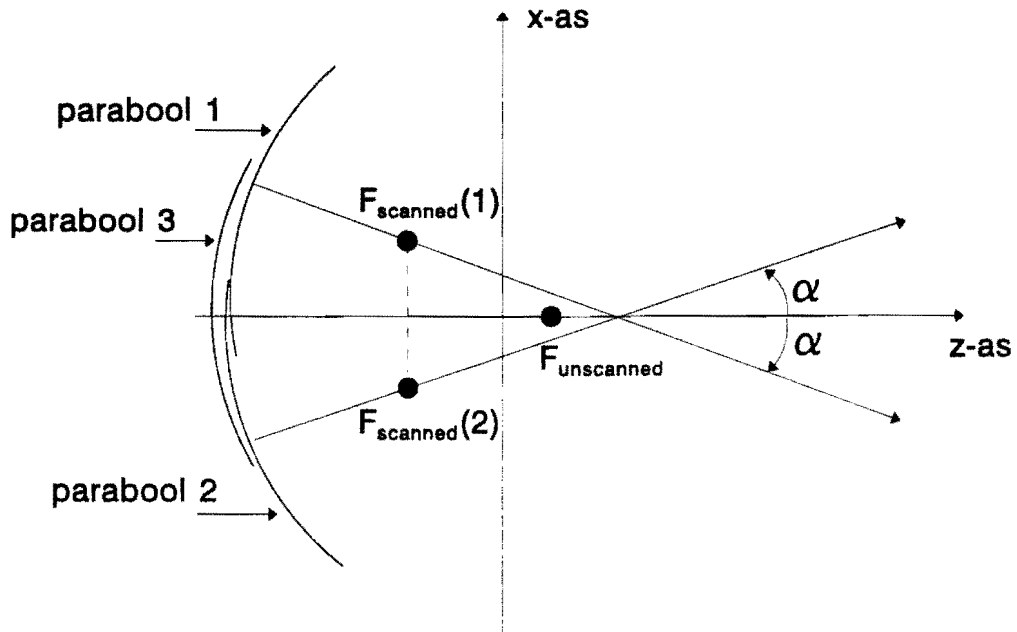
In maart 1991 hebben Carey M. Rappaport en William P. Craig in "IEEE Transactions on Antennas and Propagation" een artikel gepubliceerd [3] dat een nieuw type "shaped"-reflectorantenne beschrijft welke een gezichtsveld tot 60 graden bezit. Bovendien wordt het reflectoroppervlak efficiënt gebruikt door de drie verschillende belichters waardoor het reflectoroppervlak compact kan blijven.

In deze studie worden voor dit nieuw type "shaped"-reflectorantenne de verschillende stralingsdiagrammen berekend. Zowel voor de maximale zichthoek van 60 graden, als ook voor een meer praktische situatie waarbij twee TV-satellieten, welke 6.2 graden uit elkaar staan, ontvangen dienen te worden. Al deze stralingsdiagrammen worden zowel berekend voor een theoretische belichter met een uniform stralingsdiagram als ook voor een meer praktische belichter met een randbelichting van ongeveer -11dB.

Verder wordt er als eis gesteld dat bij het ontvangst van twee TV-satellieten, welke 6.2 graden uit elkaar staan, de "Carrier over Interference ratio" groter dan 23dB dient te zijn.

H2. Een korte omschrijving van het nieuwe type "shaped" reflectorantenne met grote zichthoek.

Bij het ontwerp van dit nieuwe type "shaped" reflectorantenne wordt er in eerste instantie uitgegaan van volgende drie parabolen, zie figuur 1.



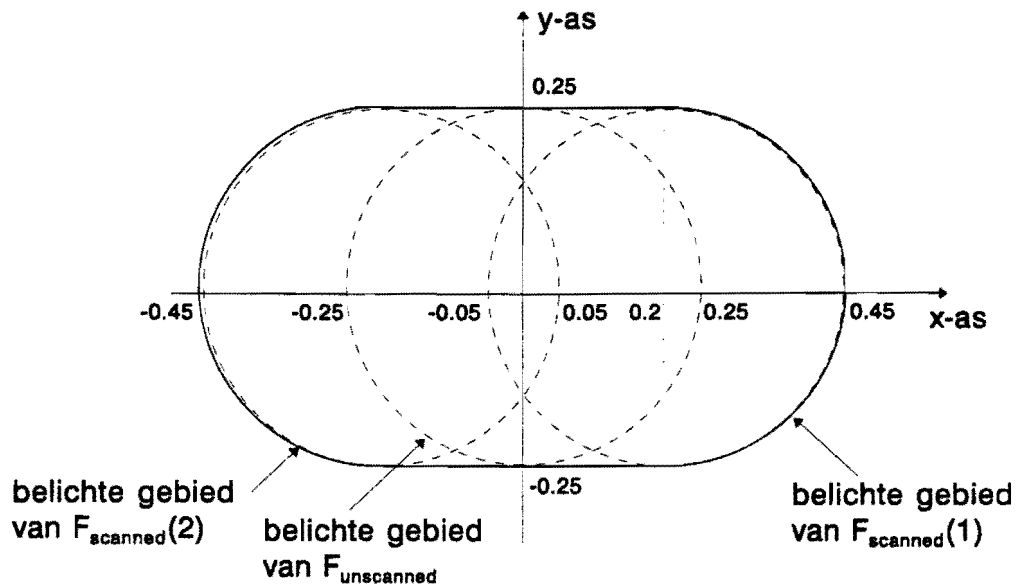
figuur 1. Uitgangspunt voor het ontwerp van de nieuwe reflectorantenne.

$F_{scanned(1)}$ en $F_{scanned(2)}$ zijn de brandpunten van respectievelijk parabool 1 en parabool 2. Hiermee is het mogelijk om onder een hoek van $+\alpha$ en $-\alpha$ te zenden of ontvangen. $F_{unscanned}$ is het brandpunt van parabool 3 en hiermee is het mogelijk om onder een hoek $\alpha=0^\circ$ te zenden of ontvangen. Indien we nu een gezichtsveld van 60 graden wensen dan dienen we de symmetrie-as van parabool 1 over $\alpha=-30^\circ$ met de z-as te verdraaien, terwijl de symmetrie-as van parabool 2 over $\alpha=+30^\circ$ verdraaid wordt. Op een slimme manier worden vervolgens de drie afzonderlijke parabolen als het ware samengesmolten tot één reflectoroppervlak. Vanwege de symmetrie ten opzichte van de x-as en de y-as krijgen we het volgende even polynoom als vergelijking voor het reflectoroppervlak.

$$z(x, y) = -b + a_1x^2 + a_2x^4 + Py^2 + Qx^2y^2 + Ry^4 + Sx^4y^2 \quad \{1\}$$

De coëfficiënten van het polynoom zijn dusdanig bepaald [4] dat daarbij de fasefouten in het apertuurvlak minimaal zijn.

Tenslotte geeft figuur 2 een vooraanzicht van het reflectoroppervlak indien een gezichtsveld van 60 graden gewenst is. Tevens zijn in figuur 2 de verschillende belichte gebieden aangegeven.

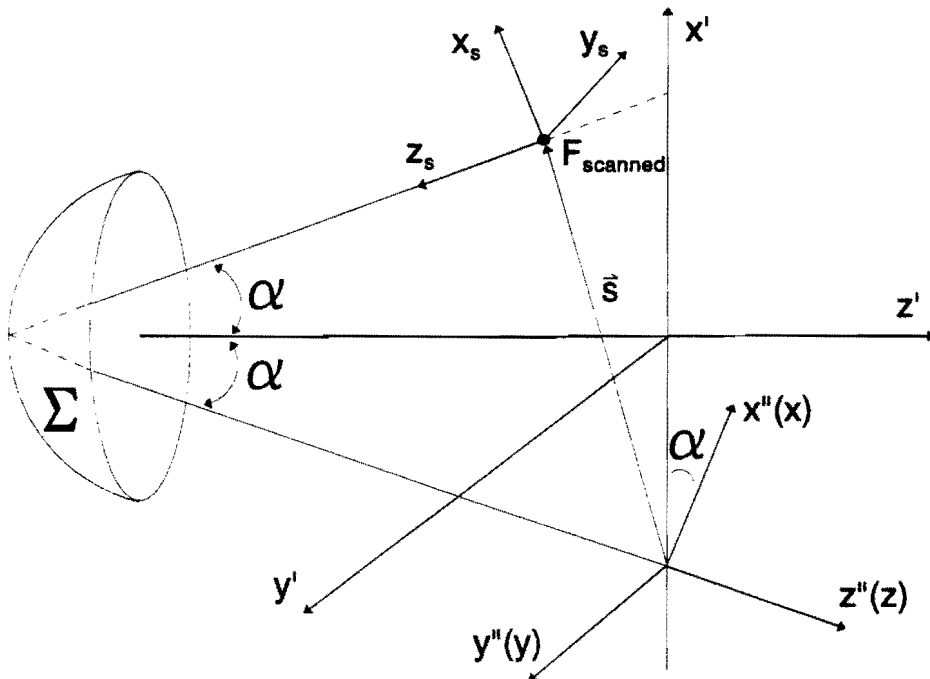


figuur 2. Het reflectoroppervlak met de belichte gebieden voor $\alpha = \pm 30^\circ$.

Uit figuur 2 blijkt dat inderdaad het reflectoroppervlak efficiënt door de verschillende belichters gebruikt wordt.

H3. De algemene bepaling van het stralingspatroon in het verre veld van de "shaped"-reflector.

De meest algemene en tevens meest complexe bepaling van het stralingspatroon in het verre veld treedt op in de "scanned"-situatie. Dit houdt in dat stralen onder een hoek α ten opzichte van de symmetrie-as (z' -as) van de reflector zullen worden verzonden of worden ontvangen. Het reflectoroppervlak met zijn bijbehorende coördinatenstelsels ziet er dan als volgt uit:

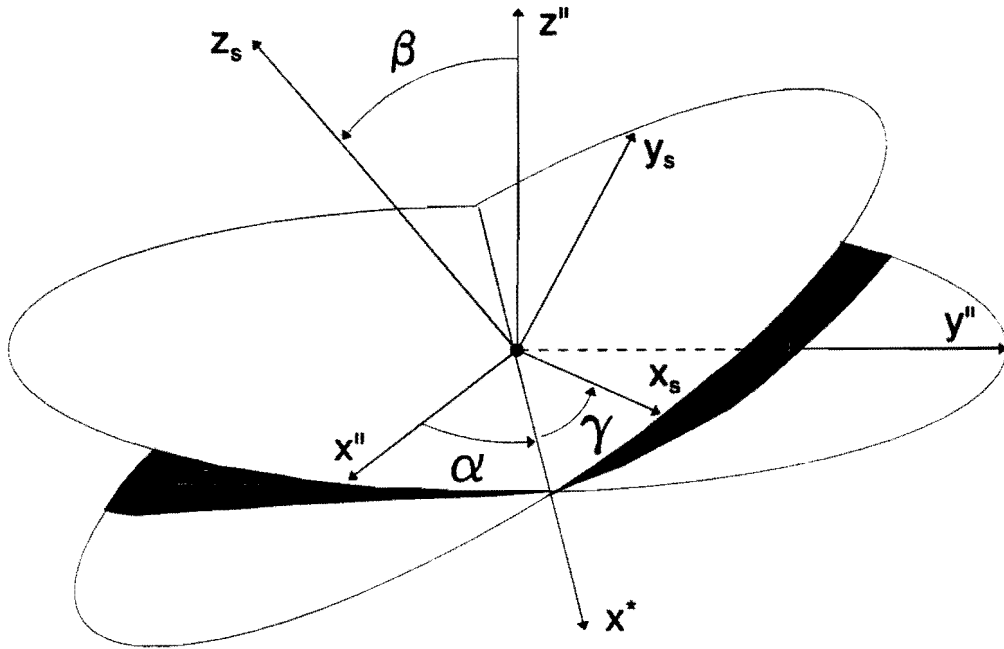


figuur 3. Het reflectoroppervlak met zijn coördinaten stelsels

In figuur 3 zijn de volgende coördinatenstelsels te onderscheiden:

- (x_s, y_s, z_s) : Het coördinatenstelsel van de belichter waar het veld van de belichter in wordt uitgedrukt. De oorsprong van dit coördinatenstelsel bevindt zich in het "scanned"-brandpunt ($F_{scanned}$).
- (x', y', z') : Het oorspronkelijke coördinatenstelsel waarin het reflectoroppervlak wordt uitgedrukt.
- (x'', y'', z'') : Een nieuw coördinatenstelsel waarin het reflectoroppervlak opnieuw wordt uitgedrukt, echter nu met de z'' -as in de richting van de gereflecteerde stralen.
- (x, y, z) : Het coördinatenstelsel waarin het stralingsdiagram van de reflector in wordt uitgedrukt.

Om nu het veld van de belichter, welke is uitgedrukt in het coördinatenstelsel $x_s y_s z_s$, te transformeren naar het coördinatenstelsel van het reflectoroppervlak $x'' y'' z''$, maken we gebruik van een translatie over \bar{s} en een drietal rotaties over de "Eulerse"-hoeken (α, β, γ) . Deze "Eulerse"-hoeken worden weergegeven in de volgende figuur:



figuur 4. De "Eulerse"-hoeken

Verklaring van de gebruikte symbolen uit figuur 4.

- x^* : Is de as welke ontstaat bij de doorsnijding van het $x_s y_s$ -vlak met het $x'' y''$ -vlak.
- α : Is de hoek welke een rotatie, tegen de wijzers van de klok in, om de z'' -as beschrijft van de x'' -as naar de x^* -as.
- β : Is de hoek welke een rotatie, tegen de wijzers van de klok in, om de x^* -as beschrijft van de z'' -as naar de z_s -as.
- γ : Is de hoek welke een rotatie, tegen de wijzers van de klok in, om de z_s -as beschrijft van de x^* -as naar de x_s -as.

Men kan afleiden [5] dat de transformatie matrix van het cartesische coördinatenstelsel $\{\hat{c}''\}$ naar $\{\hat{c}_s\}$ gedefinieerd wordt als:

$$\begin{pmatrix} c_s \\ \hat{A} \\ c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \{2\}$$

Zodat:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\cos\beta\sin\alpha \\
 A_{12} &= \cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\beta\cos\alpha \\
 A_{13} &= \sin\gamma\sin\beta \\
 A_{21} &= -\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha \\
 A_{22} &= -\sin\gamma\sin\alpha + \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha \\
 A_{23} &= \cos\gamma\sin\beta \\
 A_{31} &= \sin\beta\sin\alpha \\
 A_{32} &= -\sin\beta\cos\alpha \\
 A_{33} &= \cos\beta
 \end{aligned}$$

Het veld van de belichter uitgedrukt in het coördinatenstelsel $x_s y_s z_s$ getransformeerd naar het coördinatenstelsel $x'' y'' z''$ wordt als volgt opgeschreven:

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_s(\vec{r}'') &= \begin{Bmatrix} H_{x''}(\vec{r}'') \\ H_{y''}(\vec{r}'') \\ H_{z''}(\vec{r}'') \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta_s \cos\phi_s, & \cos\theta_s \cos\phi_s, & -\sin\phi_s \\ \sin\theta_s \sin\phi_s, & \cos\theta_s \sin\phi_s, & \cos\phi_s \\ \cos\theta_s, & -\sin\theta_s, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_{r_s}(\vec{r}_s) \\ H_{\theta_s}(\vec{r}_s) \\ H_{\phi_s}(\vec{r}_s) \end{Bmatrix} \quad (3)
 \end{aligned}$$

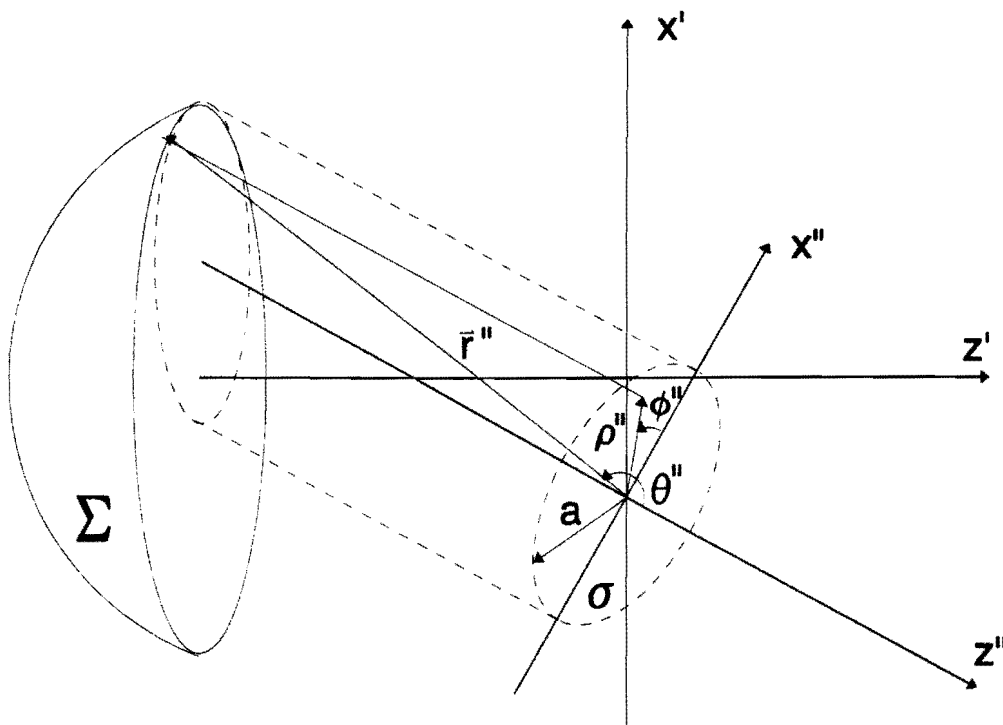
Een matrix is altijd orthogonaal indien deze één of meerdere rotaties van een cartesisch coördinatenstelsel beschrijft. Dit houdt in dat:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Om tenslotte de sferische coördinaten van de belichter r_s, θ_s, ϕ_s uit te drukken in de sferische coördinaten r'', θ'', ϕ'' van de reflector, gebruikt men de volgende transformatie:

$$\begin{Bmatrix} r_s \sin\theta_s \cos\phi_s \\ r_s \sin\theta_s \sin\phi_s \\ r_s \cos\theta_s \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - s_1 \\ r'' \sin\theta'' \sin\phi'' - s_2 \\ r'' \cos\theta'' - s_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Voor de verdere bepaling van het stralingspatroon in het verre veld maken we gebruik van figuur 5.



figuur 5. Het reflectoroppervlak met zijn geprojecteerde cirkel.

Het reflectoroppervlak Σ kan omschreven worden als:

$$z'' = f(x'', y'') = \check{f}(\rho'', \phi'') \quad \text{met} \quad \bar{\rho}'' \in \sigma$$

\check{f} : betekent een andere functie dan de functie f

σ : is het oppervlak van de geprojecteerde cirkel

Omdat we het reflectoroppervlak mogen beschouwen als perfect geleidend, dan kunnen we de elektrische oppervlakte stroom schrijven als:

$$\vec{J} = 2\hat{n} \times \vec{H}_s(\vec{r}'') \quad \{6\}$$

De eenheidsnormaalvector op het reflectoroppervlak wordt omschreven als:

$$\hat{n} = \frac{\vec{N}}{N} \quad \text{met} \quad \vec{N} = \left[-\frac{\partial f}{\partial x''} \hat{a}_{x''} - \frac{\partial f}{\partial y''} \hat{a}_{y''} + \hat{a}_{z''} \right]$$

$$\text{en} \quad N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x''} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right)^2 + 1} \quad \{7\}$$

De algemene vergelijking voor het $\vec{H}(\vec{r})$ -veld is:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} \quad \{8\}$$

met de vectorpotentiaal \vec{A} gelijk aan:

$$\vec{A} = \int_{\Sigma} \vec{J} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}''|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}''|} ds'' \quad \{9\}$$

Vervolgens passen we de verre veld benadering toe:

$$\text{in de fase term:} \quad |\vec{r}-\vec{r}''| \approx r - \vec{r}'' \cdot \hat{r}$$

$$\text{in de absolute afstand:} \quad |\vec{r}-\vec{r}''| \approx r$$

Dan krijgen we:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \nabla \times \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{T}(\theta, \phi) \quad \text{met} \quad \vec{T}(\theta, \phi) = \int_{\Sigma} \vec{J}(\vec{r}'') e^{jk\vec{r}'' \cdot \hat{r}} ds'' \quad \{10\}$$

Werken we dit verder uit, dan krijgen we:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{a}_r}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_{\phi} \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \phi} \right] + \frac{\hat{a}_{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_{\phi})}{\partial r} \right] + \frac{\hat{a}_{\phi}}{r} \left[\frac{\partial(rA_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{\hat{a}_{\theta}}{r} \frac{\partial(rA_{\phi})}{\partial r} + \frac{\hat{a}_{\phi}}{r} \frac{\partial(rA_{\theta})}{\partial r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$* \quad rA_{\phi} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi} T_{\phi} \rightarrow \frac{\partial(rA_{\phi})}{\partial r} = -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi} T_{\phi}$$

$$\rightarrow -\frac{\hat{a}_{\theta}}{r} \frac{\partial(rA_{\phi})}{\partial r} = jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} T_{\phi} \hat{a}_{\theta}$$

$$* \quad rA_{\theta} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi} T_{\theta} \rightarrow \frac{\partial(rA_{\theta})}{\partial r} = -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi} T_{\theta}$$

$$\rightarrow \frac{\hat{a}_{\phi}}{r} \frac{\partial(rA_{\theta})}{\partial r} = -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} T_{\theta} \hat{a}_{\phi}$$

$$\text{Zodat: } \vec{H}(\vec{r}) = jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (T_{\phi} \hat{a}_{\theta} - T_{\theta} \hat{a}_{\phi}) \quad \{11\}$$

Voor het $\vec{E}(\vec{r})$ veld geldt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = Z_0 \vec{H}(\vec{r}) \times \hat{a}_r \quad \text{met} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad \{12\}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -Z_0 \hat{a}_r \times \vec{H}(\vec{r}) \\ &= -jk Z_0 \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \hat{a}_r \times (T_{\phi} \hat{a}_{\theta} - T_{\theta} \hat{a}_{\phi}) \\ &= -jk Z_0 \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (T_{\phi} \hat{a}_{\phi} + T_{\theta} \hat{a}_{\theta}) \end{aligned} \quad \{13\}$$

Integratie welke plaats vindt over het reflectoroppervlak Σ wordt getransformeerd naar de geprojecteerde cirkel σ , zie figuur 5. Een oppervlakte elementje ds'' van de reflector wordt nu:

$$ds'' = |\mathbf{x}_{\rho''} \times \mathbf{x}_{\phi''}| d\rho'' d\phi'' \quad \{14\}$$

Voor de coördinaten van het reflectoroppervlak geldt:

$$x'' = r'' \sin\theta'' \cos\phi'' = \rho'' \cos\phi''$$

$$y'' = r'' \sin\theta'' \sin\phi'' = \rho'' \sin\phi''$$

$$z'' = \tilde{f}(\rho'', \phi'')$$

Nu is:

$$\mathbf{x}_{\rho''} \times \mathbf{x}_{\phi''} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x''}{\partial \rho''} \\ \frac{\partial y''}{\partial \rho''} \\ \frac{\partial z''}{\partial \rho''} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x''}{\partial \phi''} \\ \frac{\partial y''}{\partial \phi''} \\ \frac{\partial z''}{\partial \phi''} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\rho''} \times \mathbf{x}_{\phi''} = \begin{pmatrix} \cos\phi'' \\ \sin\phi'' \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho''} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho'' \sin\phi'' \\ \rho'' \cos\phi'' \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi'' \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi''} \right) - \rho'' \cos\phi'' \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho''} \right) \\ -\rho'' \sin\phi'' \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho''} \right) - \cos\phi'' \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi''} \right) \\ \rho'' \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{x}_{\rho''} \times \mathbf{x}_{\phi''}|^2 = \sin^2\phi'' \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi''} \right)^2 - 2\sin\phi'' \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi''} \right) \rho'' \cos\phi'' \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho''} \right) + \rho''^2 \cos^2\phi'' \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho''} \right)^2 \\ + \rho''^2 \sin^2\phi'' \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho''} \right)^2 + 2\sin\phi'' \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi''} \right) \rho'' \cos\phi'' \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho''} \right) + \cos^2\phi'' \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi''} \right)^2 + \rho''^2$$

$$|\mathbf{x}_{\rho''} \times \mathbf{x}_{\phi''}|^2 = \rho''^2 \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho''} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi''} \right)^2 + \rho''^2$$

$$|\mathbf{x}_{\rho''} \times \mathbf{x}_{\phi''}| = \sqrt{\rho''^2 \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho''} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi''} \right)^2 + \rho''^2} \\ = \rho'' \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho''} \right)^2 + (\rho'')^{-2} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi''} \right)^2 + 1}$$

Zodat:

$$ds'' = \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho''} \right)^2 + (\rho'')^{-2} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi''} \right)^2 + 1} \cdot \rho'' d\rho'' d\phi'' \quad \{15\}$$

De term $\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho''}\right)^2 + (\rho'')^{-2}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi''}\right)^2 + 1}$ noemt men ook wel de Jacobiaan en wordt hier aangeduid met J_{Σ} .

Nu kan $\vec{T}(\theta, \phi)$ opgeschreven worden als:

$$\vec{T}(\theta, \phi) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \vec{J}(\vec{r}'') e^{jk\vec{r}'' \cdot \hat{r}} J_{\Sigma} \rho'' d\rho'' d\phi'' \quad \{16\}$$

Voor de absolute waarde van de eenheidsnormaalvector op het reflectoroppervlak in het sferisch coördinatenstelsel geldt:

$$N = |\mathbf{x}_{\rho''} \times \mathbf{x}_{\phi''}| = \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho''}\right)^2 + (\rho'')^{-2}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi''}\right)^2 + 1}$$

Dus opgemerkt dient te worden dat geldt:

$$J_{\Sigma} = N \quad \{17\}$$

Als nu geldt dat:

$$\begin{aligned} \vec{J}(\rho'', \phi'') &= \vec{J}(\vec{r}'') \cdot J_{\Sigma} = 2\vec{n} \times \vec{H}(\vec{r}'') \cdot N \\ &= 2 \frac{\vec{N}}{N} \times \vec{H}(\vec{r}'') \cdot N = 2\vec{N} \times \vec{H}(\vec{r}'') \end{aligned}$$

dan krijgen we:

$$\vec{T}(\theta, \phi) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \vec{J}(\rho'', \phi'') e^{jk\vec{r}'' \cdot \hat{r}} \rho'' d\rho'' d\phi'' \quad \{18\}$$

$$\text{met:} \quad \vec{J}(\rho'', \phi'') = 2\vec{N} \times \vec{H}(\vec{r}'')$$

We gaan nu de exponent uitschrijven:

$$\vec{r}'' = \begin{pmatrix} \rho'' \cos \phi'' \\ \rho'' \sin \phi'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \hat{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \{19\}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'' \cdot \hat{r} &= \rho'' \cos \phi'' \sin \theta \cos \phi + \rho'' \sin \phi'' \sin \theta \sin \phi + z'' \cos \theta \\ &= \rho'' \sin \theta (\cos \phi \cos \phi'' + \sin \phi \sin \phi'') + z'' \cos \theta \\ &= \rho'' \sin \theta \cos(\phi'' - \phi) + z'' \cos \theta \end{aligned}$$

Zodat we uiteindelijk krijgen:

$$\vec{T}(\theta, \phi) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \vec{J}(\rho'', \phi'') e^{jkz'' \cos \theta} \cdot e^{jk\rho'' \sin \theta \cos(\phi'' - \phi)} \cdot \rho'' d\rho'' d\phi'' \quad \{20\}$$

$$\text{met:} \quad \vec{J}(\rho'', \phi'') = 2\vec{N} \times \vec{H}(\vec{r}'')$$

Met behulp van de volgende transformatie vinden we de sferische verre veld componenten van \vec{T} .

$$\begin{Bmatrix} T_\theta \\ T_\phi \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} \quad \{21\}$$

Met behulp van formule 13 vinden we dan tenslotte de sferische verre veld componenten van het \vec{E} -veld.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -jkZ_0 \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (T_\phi \hat{a}_\phi + T_\theta \hat{a}_\theta)$$

Het genormeerde vermogensstralingsdiagram wordt gedefinieerd door de relatie:

$$F(\theta, \phi) = 10 \log \frac{P(\theta, \phi)}{P(0, 0)} \quad \{22\}$$

$P(0, 0)$ betekent het maximale uitgestraalde vermogen per eenheid van ruimtehoek in de richting van $\theta = 0$ en $\phi = 0$.

Voor de maximale veldsterkte \vec{E}_{\max} vinden we:

$$\vec{E}_{\max} = \vec{E}(\phi=0, \theta=0) = -jkZ_0 \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (T_\phi(0, 0) \hat{a}_\phi + T_\theta(0, 0) \hat{a}_\theta) \quad \{23\}$$

De maximale vermogensdichtheid is nu:

$$\vec{S}_{\max} = \vec{S}(0, 0) = \frac{1}{2} Z_0^{-1} [|\vec{E}_\theta(0, 0)|^2 + |\vec{E}_\phi(0, 0)|^2] \quad \{24\}$$

met: $\vec{E}_\theta(0, 0) = -jkZ_0 \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} T_\theta(0, 0)$

en: $\vec{E}_\phi(0, 0) = -jkZ_0 \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} T_\phi(0, 0)$

Zodat:

$$|\vec{E}_\theta(0, 0)|^2 = k^2 Z_0^2 \frac{1}{(4\pi r)^2} |T_\theta(0, 0)|^2$$

$$|\vec{E}_\phi(0, 0)|^2 = k^2 Z_0^2 \frac{1}{(4\pi r)^2} |T_\phi(0, 0)|^2$$

Het maximale uitgestraalde vermogen per eenheid van ruimtehoek is nu:

$$\begin{aligned} P(0, 0) &= r^2 \cdot S(0, 0) \\ &= r^2 \cdot \frac{1}{2} Z_0^{-1} [|\vec{E}_\theta(0, 0)|^2 + |\vec{E}_\phi(0, 0)|^2] \end{aligned} \quad \{25\}$$

Het genormeerde vermogensstralingsdiagram wordt tenslotte:

$$F(\theta, \phi) = 10 \log \frac{P(\theta, \phi)}{P(0, 0)} = 10 \log \frac{[|\vec{E}_\theta(\theta, \phi)|^2 + |\vec{E}_\phi(\theta, \phi)|^2]}{[|\vec{E}_\theta(0, 0)|^2 + |\vec{E}_\phi(0, 0)|^2]} \quad \{26\}$$

H4. Het optimale stralingspatroon van de belichter

Het stralingspatroon van de belichter wordt gegeven door de functie:

$$\vec{E}_s(\vec{r}_s) = [\hat{a}_{\theta_s} \sin\phi_s + \hat{a}_{\phi_s} \cos\phi_s] \cdot F(\theta_s) \cdot \frac{e^{-jk r_s}}{4\pi r_s} \quad \{27\}$$

$$\text{met } F(\theta_s) = (\cos\theta_s)^L$$

Indien we het reflectoroppervlak uniform willen belichten dan dienen we $L=0$ te nemen. In de praktijk zal echter een (nagenoeg) uniform belichte reflector resulteren in een groot "spillover"-verlies. Er zal namelijk veel energie van de belichter langs de reflector af stralen. Om dit "spillover"-verlies te verkleinen zal de randbelichting van de reflector moeten afnemen, ofwel $L>0$. Deze afnamen van de randbelichting dient echter ook weer niet al te groot te zijn omdat anders het apertuurrendement te laag wordt. Voor een bepaalde randbelichting zal er een maximum ontstaan voor het produkt van het apertuurrendement en het "spillover"-rendement. Dit produkt wordt voor de parabool uitgedrukt in de rendementsfaktor η_0 en wordt als volgt gedefinieerd [6].

$$\eta_0 = \cot^2 \frac{1}{2} \Psi \left[\int_0^{\Psi} [G_f(\psi)]^{\frac{1}{2}} \tan \frac{1}{2} \psi d\psi \right]^2 \quad \{28\}$$

met $G_f(\psi)$: antennewinstfunctie
 Ψ : antenne-openingshoek

Omdat de vorm van de afzonderlijk belichte gebieden van de "shaped"-reflector slechts weinig afwijkt dan die van de parabool, kunnen we deze formule gebruiken om een schatting te geven voor de waarde die voor L gekozen moet worden. In tweede instantie kan dan een nauwkeuriger resultaat verkregen worden door de waarde van L nog wat te laten variëren. Hierbij gaan we uit van een belichter met het volgende stralingsdiagram:

$$G_f(\psi) = G_0 \cos^M \psi \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad \{29a\}$$

$$G_f(\psi) = 0 \quad \psi > \frac{\pi}{2} \quad \{29b\}$$

Merk hierbij op dat we aannemen dat de straling van de belichter beperkt is tot $\psi < \pi/2$. Verder geldt voor de relatie tussen M (formule 29) en L (formule 27):

$$M = 2L$$

De winst G_0 wordt bepaald door de relatie:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi G_f(\psi) \sin\psi d\psi d\xi = 4\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi G_0 \cos^M \psi \sin\psi d\psi d\xi = 4\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi -G_0 \cos^M \psi d\cos\psi \right] d\xi = 4\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \left[-G_0 \frac{1}{(M+1)} \cos^{M+1} \psi \right]_0^\pi d\xi = 4\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \left(G_0 \frac{1}{(M+1)} \right) d\xi = 4\pi$$

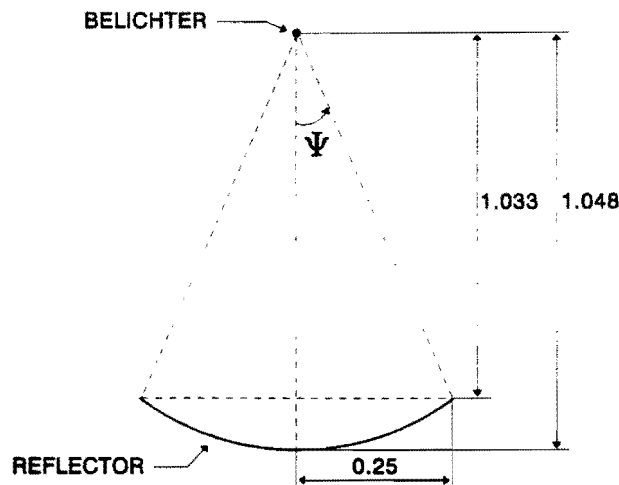
$$2 \left(G_0 \frac{1}{(M+1)} \right) \pi = 4\pi$$

$$G_0 \frac{1}{(M+1)} = 2$$

$$G_0 = 2(M+1)$$

{30}

We dienen de waarde van M nu zo te kiezen dat het maximum van de rendementsfactor η_0 komt te liggen bij de antenne-openingshoek Ψ . Met behulp van figuur 6 berekenen we eerst de antenne-openingshoek Ψ .

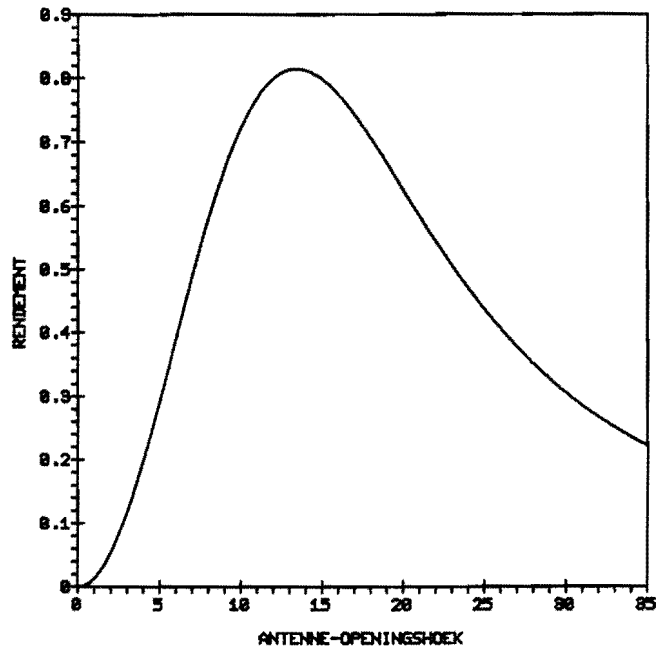


figuur 6. De antenne-openingshoek Ψ .

De antenne-openingshoek Ψ is nu:

$$\Psi = \arctan \frac{0.25}{1.033} = 13.6^\circ$$

In figuur 7 is voor $M=90$ de rendementsfaktor η_0 als functie van de openingshoek gegeven:



figuur 7. De rendementsfaktor η_0 .

In figuur 7 is te zien dat voor $M=90$ het maximum van de rendementsfaktor η_0 ligt bij de antenne-openingshoek Ψ . De coëfficiënt N van het stralingsdiagram van de belichter (formule 27) is nu gelijk aan: $L(=M/2)=45$. De demping aan de rand van de reflector voor $L=45$ is nu gelijk aan:

$$-20 \log(\cos^{45}(13.6^\circ)) = 11.1 \text{ dB} \quad \{31\}$$

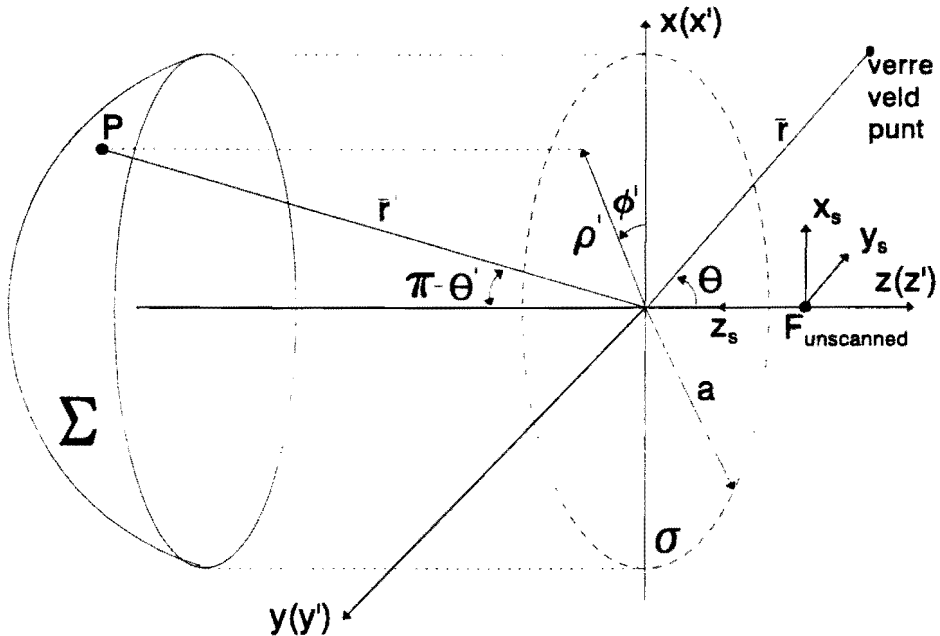
Verder hebben we ook nog te maken met de extra vrije ruimtedemping aan de rand van de reflector. Deze extra vrije ruimtedemping is het gevolg van het afstandsverschil tussen de belichter tot het centrum van de reflector en de belichter tot de rand van de reflector. In ons geval is de extra vrije ruimtedemping gelijk aan:

$$20 \log \frac{\sqrt{(0.25)^2 + (1.033)^2}}{1.048} = 0.122 \text{ dB} \quad \{32\}$$

Deze extra vrije ruimtedemping is dus verwaarloosbaar ten opzichte van de al eerder berekende randdemping van 11.1dB.

H5. Bepaling van het stralingspatroon in het verre veld van de "shaped"-reflector in de "unscanned"-situatie.

Stralen die vanuit het "unscanned"-brandpunt vertrekken, zullen na reflectie aan het reflectoroppervlak evenwijdig, of nagenoeg evenwijdig, aan de z-as uittreden. Dit maakt dan ook dat nu het coördinatenstelsel x"y"z" uit figuur 1 overbodig is. Het een en het ander is te zien in figuur 8.



figuur 8. Het reflectoroppervlak in de "unscanned"-situatie

De vergelijking van het reflectoroppervlak Σ luidt:

$$z'(x', y') = -b + a_1 x'^2 + a_2 x'^4 + P y'^2 + Q x'^2 y'^2 + R y'^4 + S x'^4 y'^2 \quad (1)$$

met:

$$b = 0.86603$$

$$a_1 = 0.23857$$

$$a_2 = 0.10359$$

$$P = 0.25857$$

$$Q = 1.42469$$

$$R = 0.10$$

$$S = -7.699746$$

Deze coëfficiënten zijn dusdanig bepaald [4] dat de fasefouten, zowel voor $\alpha=0^\circ$ als $\alpha=30^\circ$, in het apertuurvlak minimaal zijn.

Het "unscanned"-brandpunt heeft de coördinaten:

$$F_{unscanned}(x', y', z') = (0, 0, 0.182)$$

Het belichte deel van de reflector bezit een straal a van:

$$a = 0.25$$

Het elektrische veld van de belichter is gegeven en ziet er als volgt uit:

$$\vec{E}_s(\vec{r}_s) = [\hat{a}_{\theta_s} \sin\phi_s + \hat{a}_{\phi_s} \cos\phi_s] \cdot F(\theta_s) \cdot \frac{e^{-jk r_s}}{4\pi r_s} \quad \{27\}$$

met $F(\theta_s) = (\cos\theta_s)^L$

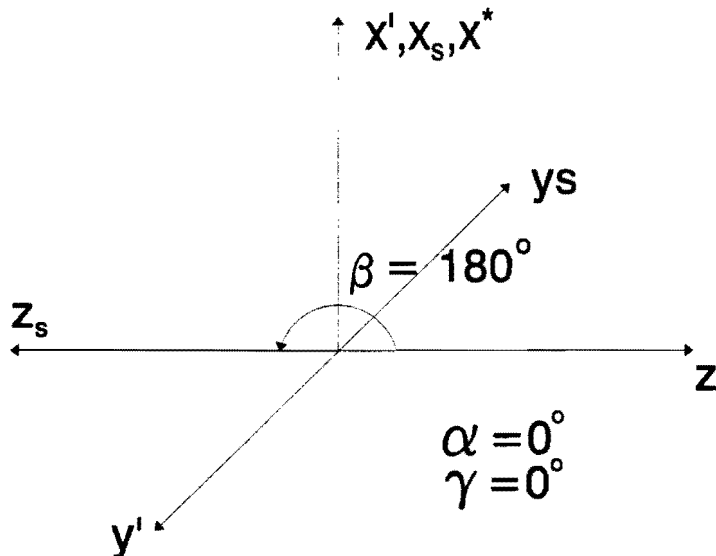
Voor het magnetische veld geldt dan:

$$Z_0 \cdot \vec{H}_s(\vec{r}_s) = \hat{r}_s \times \vec{E}_s(\vec{r}_s) \quad \text{met} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$$

In het verre veld geldt: $\hat{r}_s = \hat{a}_{r_s}$

$$\begin{aligned} \vec{H}_s(\vec{r}_s) &= \frac{1}{Z_0} (\hat{a}_{r_s} \times \vec{E}_s(\vec{r}_s)) \\ &= \frac{1}{Z_0} \left(\hat{a}_{r_s} \times [\hat{a}_{\theta_s} \sin\phi_s + \hat{a}_{\phi_s} \cos\phi_s] F(\theta_s) \cdot \frac{e^{-jk r_s}}{4\pi r_s} \right) \\ &= \frac{1}{Z_0} (\hat{a}_{\phi_s} \sin\phi_s - \hat{a}_{\theta_s} \cos\phi_s) F(\theta_s) \cdot \frac{e^{-jk r_s}}{4\pi r_s} \end{aligned} \quad \{33\}$$

Wat we nu willen is dat het veld van de belichter wordt uitgedrukt in de cartesische componenten van de reflector $H_{x'}(\vec{r}')$, $H_{y'}(\vec{r}')$ en $H_{z'}(\vec{r}')$. Hiervoor maken we gebruik van de "Eulerse"-hoeken, zie figuur 9.



figuur 9. "Eulerse"-hoeken

Omdat nu het $x_s y_s$ -vlak samen valt met het $x' y'$ -vlak kiezen we de doorsnijdingsas x' gelijk aan de x' -as en de x_s -as. Hierdoor worden de "Eulerse"-hoeken gelijk aan:

$$\alpha = 0^\circ, \quad \beta = 180^\circ \quad \text{en} \quad \gamma = 0^\circ$$

De elementen van de transformatie matrix $\begin{pmatrix} c_s & -c'' \\ \bar{A} \end{pmatrix}$ zijn nu:

$$A_{11} = \cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\cos\beta\sin\alpha = 1$$

$$A_{12} = \cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\beta\cos\alpha = 0$$

$$A_{13} = \sin\gamma\sin\beta = 0$$

$$A_{21} = -\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha = 0$$

$$A_{22} = -\sin\gamma\sin\alpha + \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha = -1$$

$$A_{23} = \cos\gamma\sin\beta = 0$$

$$A_{31} = \sin\beta\sin\alpha = 0$$

$$A_{32} = -\sin\beta\cos\alpha = 0$$

$$A_{33} = \cos\beta = -1$$

Zodat de transformatie matrix gelijk is aan:

$$\begin{pmatrix} c_s & -c'' \\ \bar{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \{34\}$$

Deze transformatie matrix hadden we ook direkt uit figuur 9 kunnen afleiden, omdat de x' -as en de x_s -as samen vallen terwijl zowel de y' -as en de y_s -as als de z' -as en de z_s -as 180° van elkaar verdraaid zijn.

Het veld van de belichter uitgedrukt in de cartesische componenten van de reflector wordt nu:

$$\begin{aligned} \vec{H}_s(\vec{r}') &= \begin{pmatrix} H_x(\vec{r}') \\ H_y(\vec{r}') \\ H_z(\vec{r}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta_s\cos\phi_s & \cos\theta_s\cos\phi_s & -\sin\phi_s \\ \sin\theta_s\sin\phi_s & \cos\theta_s\sin\phi_s & \cos\phi_s \\ \cos\theta_s & -\sin\theta_s & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\phi_s \\ \sin\phi_s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{Z_0} F(\theta_s) \cdot \frac{e^{-jkr_s}}{4\pi r_s} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos\theta_s\cos^2\phi_s - \sin^2\phi_s \\ -\cos\theta_s\sin\phi_s\cos\phi_s + \sin\phi_s\cos\phi_s \\ \sin\theta_s\cos\phi_s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{Z_0} F(\theta_s) \cdot \frac{e^{-jkr_s}}{4\pi r_s} \\ \vec{H}_s(\vec{r}') &= \begin{pmatrix} H_{x'}(\vec{r}') \\ H_{y'}(\vec{r}') \\ H_{z'}(\vec{r}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta_s\cos^2\phi_s - \sin^2\phi_s \\ +\cos\theta_s\sin\phi_s\cos\phi_s - \sin\phi_s\cos\phi_s \\ -\sin\theta_s\cos\phi_s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{Z_0} F(\theta_s) \cdot \frac{e^{-jkr_s}}{4\pi r_s} \quad \{35\} \end{aligned}$$

Vervolgens dienen we de coördinaten θ_s, ϕ_s en r_s uit te drukken in de sferische coördinaten θ', ϕ' en r' . Hiervoor maken we gebruik van formule 36.

$$\begin{pmatrix} r_s \sin \theta_s \cos \phi_s \\ r_s \sin \theta_s \sin \phi_s \\ r_s \cos \theta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r' \sin \theta' \cos \phi' \\ r' \sin \theta' \sin \phi' \\ r' \cos \theta' + 0.182 \end{pmatrix} \quad \{36\}$$

Dit levert de volgende drie vergelijkingen:

$$r_s \sin \theta_s \cos \phi_s = r' \sin \theta' \cos \phi' \quad \{37\}$$

$$r_s \sin \theta_s \sin \phi_s = -r' \sin \theta' \sin \phi' \quad \{38\}$$

$$r_s \cos \theta_s = -r' \cos \theta' + 0.182 \quad \{39\}$$

Vergelijking 38 gedeeld door vergelijking 37 levert:

$$\frac{r_s \sin \theta_s \sin \phi_s}{r_s \sin \theta_s \cos \phi_s} = \frac{-r' \sin \theta' \sin \phi'}{r' \sin \theta' \cos \phi'}$$

$$\tan \phi_s = -\tan \phi' \quad - \quad \phi_s = -\phi' \quad \{40\}$$

Vergelijking 38 gedeeld door vergelijking 39 levert:

$$\frac{r_s \sin \theta_s \sin \phi_s}{r_s \cos \theta_s} = \frac{-r' \sin \theta' \sin \phi'}{-r' \cos \theta' + 0.182}$$

$$\tan \theta_s = \frac{-r' \sin \theta' \sin \phi'}{\sin(-\phi') (-r' \cos \theta' + 0.182)}$$

$$\theta_s = \arctan \left(\frac{r' \sin \theta' \sin \phi'}{\sin \phi' (-r' \cos \theta' + 0.182)} \right) \quad \{41\}$$

Vergelijking 39 levert:

$$r_s = \frac{-r' \cos \theta' + 0.182}{\cos \theta_s} \quad \{42\}$$

Verder lezen uit figuur 8 af dat voor r' geldt:

$$\cos(\pi - \theta') = \frac{|z'|}{r'} \quad - \quad r' = \frac{|z'|}{\cos(\pi - \theta')} \quad \{43\}$$

Het H-veld van de belichter wordt nu:

$$H_{x'}(\vec{r}') = -\frac{1}{Z_0} (\cos \theta_s \cos^2 \phi_s + \sin^2 \phi_s) \cos^L \theta_s \cdot \frac{e^{-jk r_s}}{4 \pi r_s} \quad \{44\}$$

$$H_{y'}(\vec{r}') = \frac{1}{Z_0} (\cos \theta_s \sin \phi_s \cos \phi_s - \sin \phi_s \cos \phi_s) \cos^L \theta_s \cdot \frac{e^{-jk r_s}}{4 \pi r_s} \quad \{45\}$$

$$H_{z'}(\vec{r}') = -\frac{1}{Z_0} \sin \theta_s \cos \phi_s \cos^L \theta_s \cdot \frac{e^{-jk r_s}}{4 \pi r_s} \quad \{46\}$$

Voor ϕ_s, θ_s en r_s substitueren we respectievelijk de vergelijkingen 40, 41 en 42.

De eenheidsnormaalvector op het reflectoroppervlak is:

$$N_{x'} = -\frac{\partial f}{\partial x'} = -(2a_1x' + 4a_2x'^3 + 2Qx'y'^2 + 4Sx'^3y'^2) \quad \{47\}$$

$$N_{y'} = -\frac{\partial f}{\partial y'} = -(2Py' + 2Qx'^2y' + 4Ry'^3 + 2Sx'^4y') \quad \{48\}$$

$$N_{z'} = 1 \quad \{49\}$$

Voor de stroom op de reflector vinden we nu:

$$\vec{J}(\rho', \phi') = 2\vec{N} \times \vec{H} = 2 \begin{pmatrix} N_{x'} \\ N_{y'} \\ N_{z'} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_{x'} \\ H_{y'} \\ H_{z'} \end{pmatrix} \quad \{50\}$$

Zodat:

$$\vec{J}_{x'} = 2(N_{y'}H_{z'} - N_{z'}H_{y'})$$

$$\vec{J}_{y'} = 2(N_{z'}H_{x'} - N_{x'}H_{z'})$$

$$\vec{J}_{z'} = 2(N_{x'}H_{y'} - N_{y'}H_{x'})$$

De oppervlakte integraal over σ wordt uiteindelijk:

$$\vec{T}(\theta, \phi) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \vec{J}(\rho', \phi') e^{jkz' \cos \theta} \cdot e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi' - \phi)} \cdot \rho' d\rho' d\phi' \quad \{51\}$$

$$\text{met:} \quad \vec{J}(\rho', \phi') = 2\vec{N} \times \vec{H}(\vec{r}')$$

Met behulp van de transformatie (formule 52) vinden we sferische verre veld componenten van \vec{T} .

$$\begin{Bmatrix} T_\theta \\ T_\phi \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} \quad \{52\}$$

De sferische verre veld componenten van het E-veld zijn nu:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -jkZ_0 \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (T_\phi \hat{a}_\phi + T_\theta \hat{a}_\theta) \quad \{53\}$$

Het genormeerde vermogensstralingsdiagram wordt tenslotte:

$$F(\theta, \phi) = 10 \log \frac{P(\theta, \phi)}{P(0, 0)} = 10 \log \frac{[|\vec{E}_\theta(\theta, \phi)|^2 + |\vec{E}_\phi(\theta, \phi)|^2]}{[|\vec{E}_\theta(0, 0)|^2 + |\vec{E}_\phi(0, 0)|^2]} \quad \{54\}$$

Bij de berekeningen van de stralingsdiagrammen stellen we het produkt van $k \cdot a$ gelijk aan:

$$k \cdot a = 100$$

met k : golfgetal

a : straal van de belichte cirkel op de reflector

Omdat $a=0.25$ volgt hieruit dat het golfgetal $k=400$.

De golflengte λ is nu gelijk aan:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{400} = 0.0157 \quad \{55\}$$

Als nu de diameter D van de reflector gelijk is aan $2 \cdot a$, dan volgt hieruit dat de D/λ -verhouding gelijk is aan:

$$\frac{D}{\lambda} = \frac{2 \cdot a}{\lambda} = \frac{0.5}{0.0157} = 31.83$$

Ofwel:

$$D = 31.83\lambda \quad \{56\}$$

In eerste instantie gaan we de reflector uniform belichten. Dit houdt in dat de term $(\cos\theta_s)^L$ van de belichter (formule 27) gelijk aan 1 dient te zijn, ofwel $L=0$.

De 3dB-bundelbreedte voor een cirkelvormige apertuur die tevens uniform belicht wordt is volgens [7] gelijk aan:

$$1.02 \frac{\lambda}{D} = 1.02 \cdot \frac{\lambda}{31.83\lambda} = 1.84^\circ \quad \{57\}$$

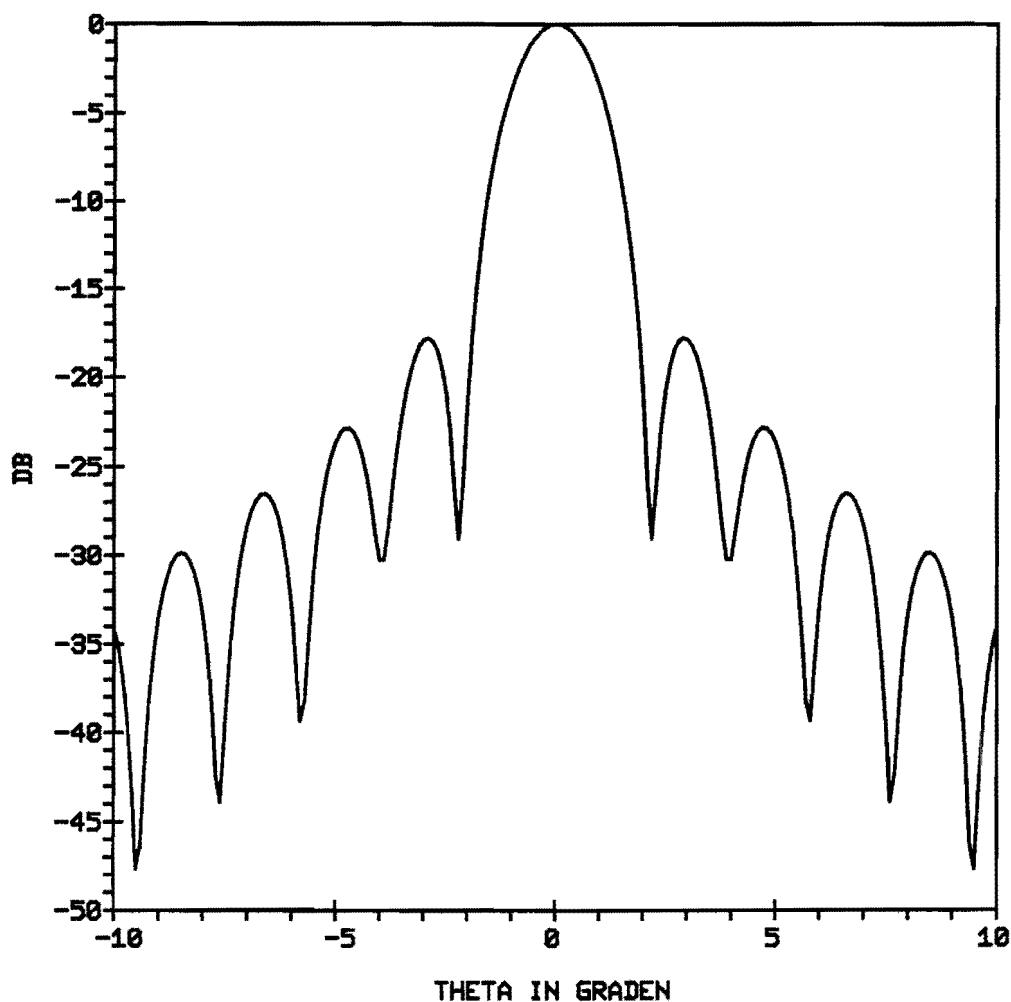
In figuur 10 is het stralingsdiagram in de "unscanned"-situatie ($\alpha=0^\circ$) gegeven met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=0^\circ$ en $L=0$

In figuur 11 is het stralingsdiagram in de "unscanned"-situatie ($\alpha=0^\circ$) gegeven met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=90^\circ$ en $L=0$

In figuur 12 is het stralingsdiagram in de "unscanned"-situatie ($\alpha=0^\circ$) gegeven met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=0^\circ$ en $L=45$

In figuur 13 is het stralingsdiagram in de "unscanned"-situatie ($\alpha=0^\circ$) gegeven met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=90^\circ$ en $L=45$

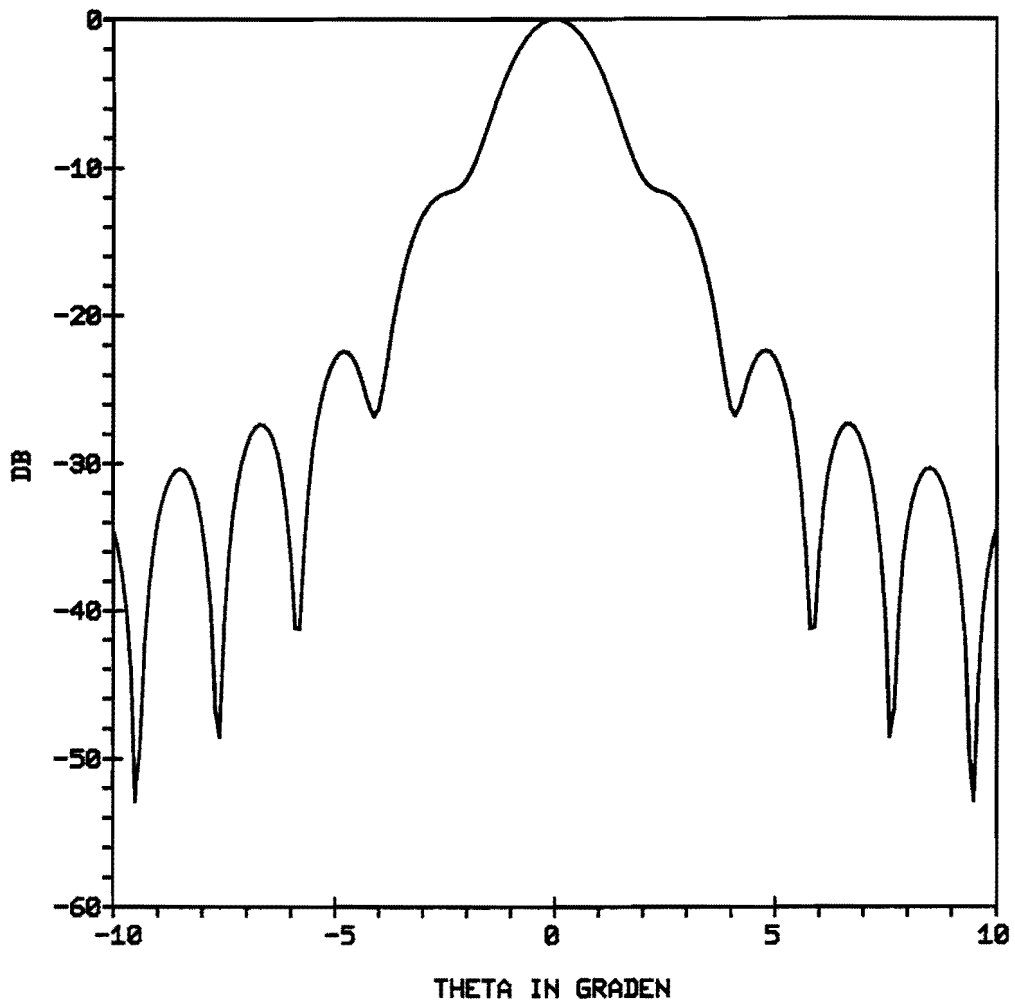
STRALINGSDIAGRAM 0 GRADEN SCAN



figuur 10. Het stralingsdiagram in de "unscanned"-situatie
 met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=0^\circ$ en $L=0$.

Uit figuur 10 blijkt dat het stralingsdiagram van de "shaped"-reflector voor $\alpha=0^\circ$ nauwelijks verschilt van het stralingsdiagram van de parabool[10]. Dit komt omdat de vorm van het reflectoroppervlak vooral voor $\phi=0^\circ$ in de "unscanned"-situatie nauwelijks verschilt van de parabool. Zo zie je dat de 3dB-bundelbreedte ongeveer gelijk is aan 1.8° en dat de hoogte van de eerste zijlus ongeveer -17.5dB is.

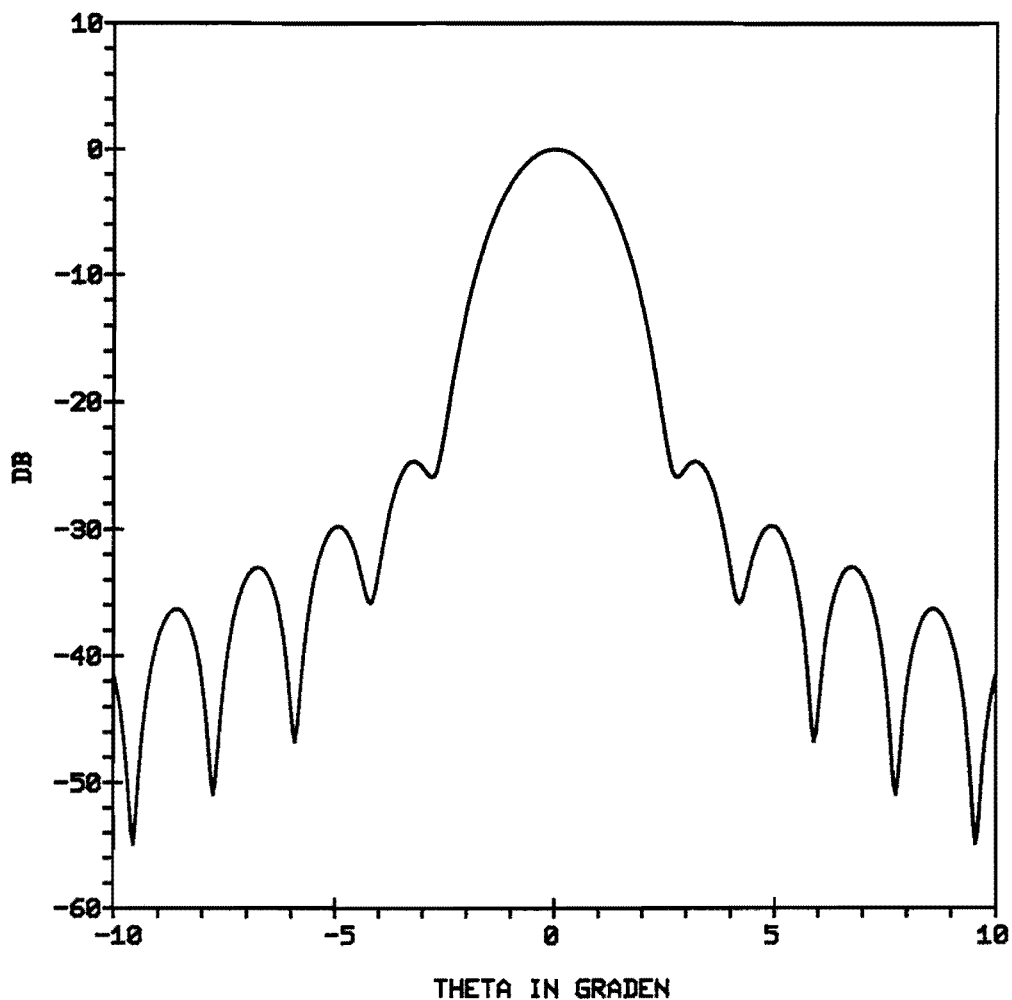
STRALINGSDIAGRAM 0 GRADEN SCAN



figuur 11. Het stralingsdiagram in de "unscanned"-situatie
met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=90^\circ$ en $L=0$.

Uit figuur 11 blijkt dat het stralingsdiagram van de "shaped"-reflector voor $\phi=90^\circ$ wat meer verschilt van het stralingsdiagram van de parabool. Dit komt omdat in het vlak $\phi=90^\circ$ de vorm van het reflectoroppervlak ten opzichte van het "unscanned"-brandpunt wat meer verschilt van de parabool. Dit is echter nodig om voor zowel in de "unscanned" als in de "scanned"-situatie de fasefouten in het apertuurvlak te optimaliseren. De 3dB-bundelbreedte is ook nu ongeveer gelijk aan 1.8° gebleven.

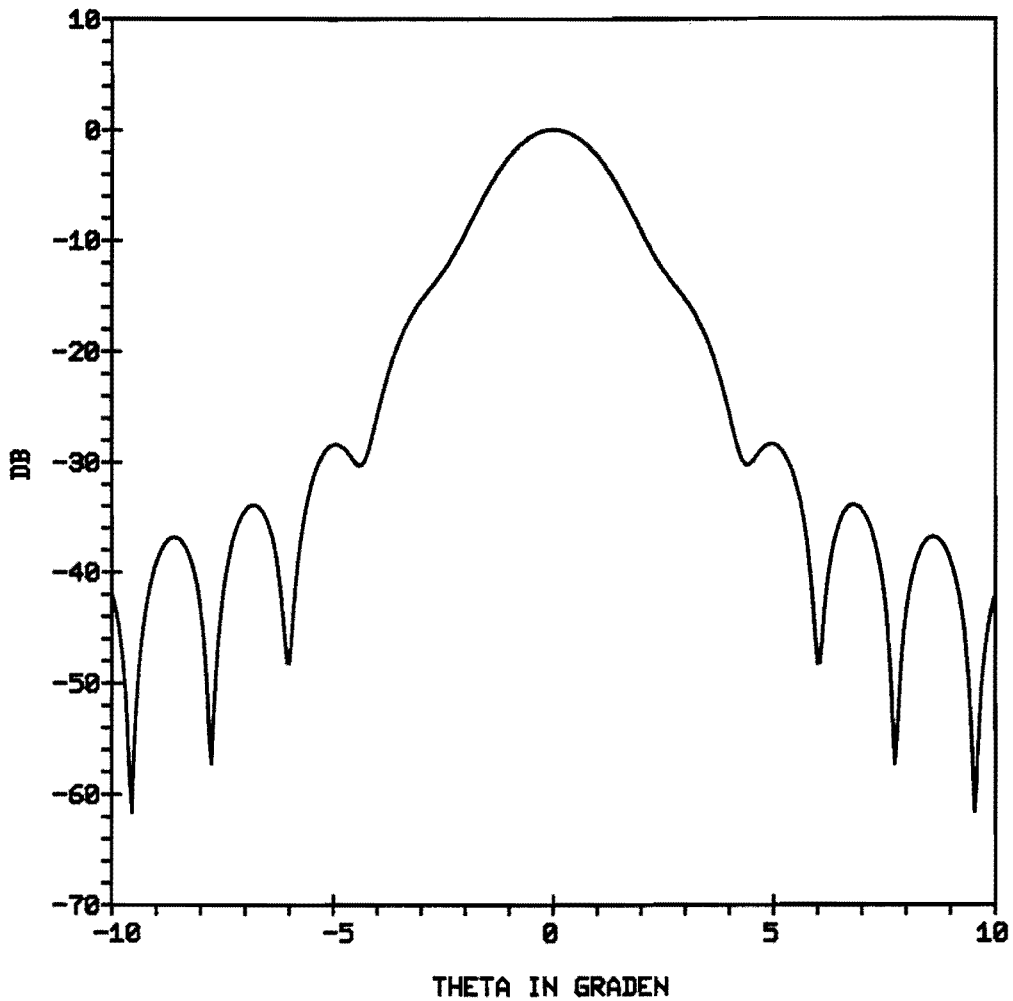
STRALINGSDIAGRAM 0 GRADEN SCAN



figuur 12. Het stralingsdiagram in de "unscanned"-situatie
met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=0^\circ$ en $L=45$.

Uit figuur 12 blijkt dat een randbelichting van -11.1dB tot gevolg heeft dat de eerste zijlus van -17.5dB bij uniforme belichting naar -24.5dB gaat. De 3dB -bundelbreedte gaat van 1.8° bij uniforme belichting naar 2.1° .

STRALINGSDIAGRAM 0 GRADEN SCAN

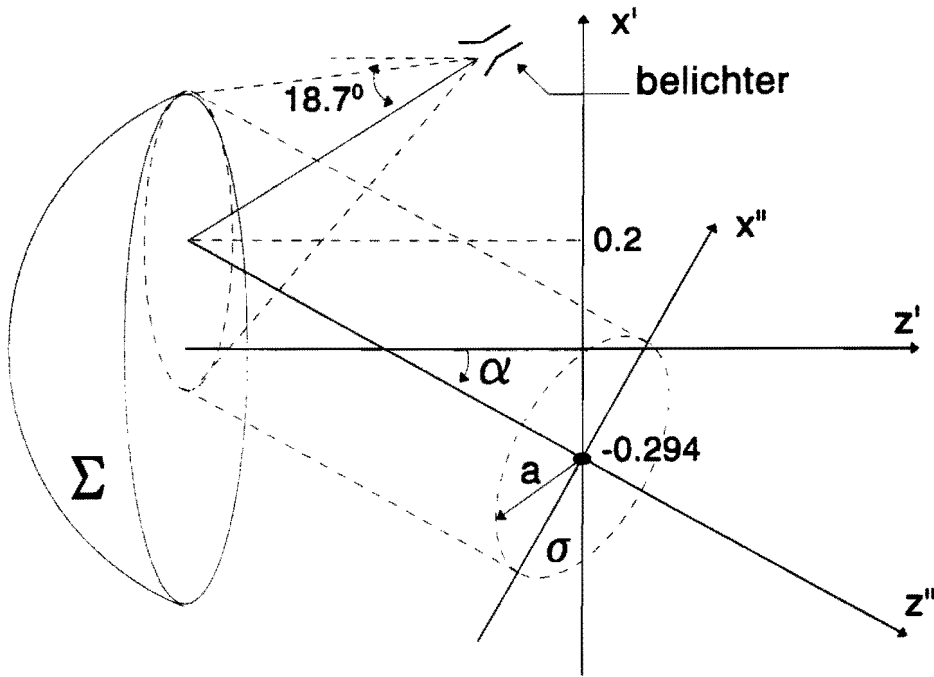


figuur 13. Het stralingsdiagram in de "unscanned"-situatie
met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=90^\circ$ en $L=45$.

Uit figuur 13 blijkt dat een randbelichting van -11.1dB tot gevolg heeft dat de eerste zijlus van -12dB bij uniforme belichting naar -28.5dB gaat. Ten gevolge van de fasefouten is nu de eigenlijke eerste zijlus geheel opgevuld waardoor deze niet afzonderlijk te onderscheiden is[9]. De eerste zijlus die nu op -28.5dB ligt is dus in feite de tweede zijlus. De 3dB -bundelbreedte gaat van 1.8° bij uniforme belichting naar 2.1° .

H6. Bepaling van het stralingspatroon in het verre veld van de "shaped"-reflector in de "scanned"-situatie voor $\alpha = -30^\circ$.

Voor het bepalen van het stralingsdiagram, indien we scannen over een maximale hoek van $\alpha = -30^\circ$, maken we gebruik van figuur 14.



figuur 14. Scannen over een hoek van $\alpha = -30^\circ$.

Omdat in de zendsituatie de gereflecteerde stralen onder een hoek $\alpha = -30^\circ$ ten opzichte van de symmetrie-as (z' -as) de reflector verlaten, dienen we het reflectoroppervlak uit te drukken in het nieuwe coördinatenstelsel $z'' = \tilde{f}(x'', y'')$. Hierdoor zijn we nu in staat om ten opzichte van dit nieuwe coördinatenstelsel het stralingsdiagram te berekenen.

De oorspronkelijke vergelijking van het reflectoroppervlak luidt:

$$z'(x', y') = -b + a_1 x'^2 + a_2 x'^4 + P y'^2 + Q x'^2 y'^2 + R y'^4 + S x'^4 y'^2 \quad \{1\}$$

Eerst verplaatsen we de oorsprong van het coördinatenstelsel ($x'y'z'$) naar het punt:

$$(x', y', z') = (-0.294, 0, 0)$$

De nieuwe vergelijking van de reflector wordt nu:

$$z^*(x^*, y^*) = -b + a_1 (x^* - 0.294)^2 + a_2 (x^* - 0.294)^4 + P y^{*2} + Q (x^* - 0.294)^2 y^{*2} + R y^{*4} + S (x^* - 0.294)^4 y^{*2} \quad \{58\}$$

Vervolgens gaan we het assenstelsel (x^*, y^*, z^*) verdraaien over de hoek $\alpha = -30^\circ$ met de y^* -as als draaiingsas.

Deze draaiing wordt verkregen door de volgende 3 formules te substitueren in formule 58.

$$x^* = x''\cos\alpha + z''\sin\alpha \quad \{59a\}$$

$$y^* = y'' \quad \{59b\}$$

$$z^* = -x''\sin\alpha + z''\cos\alpha \quad \{59c\}$$

Hierdoor krijgen we:

$$\begin{aligned} &(-x''\sin\alpha + z''\cos\alpha) = \\ &-b + a_1((x''\cos\alpha + z''\sin\alpha) - 0.294)^2 + a_2((x''\cos\alpha + z''\sin\alpha) - 0.294)^4 \\ &+ Py''/2 + Q((x''\cos\alpha + z''\sin\alpha) - 0.294)^2 y''/2 + Ry''/4 \\ &+ S((x''\cos\alpha + z''\sin\alpha) - 0.294)^4 y''/2 \end{aligned} \quad \{60\}$$

Na uitwerking en rangschikking van formule 60 krijgen we een 4^{de}-orde polynoom van z'' die er als volgt uit komt te zien:

$$A(5)z''/4 + A(4)z''/3 + A(3)z''/2 + A(2)z'' + A(1) = 0 \quad \{61\}$$

met:

$$A(5) = a_2(\sin\alpha)^4 + S(\sin\alpha)^4 y''/2 \quad \{62a\}$$

$$\begin{aligned} A(4) = &4a_2(x''\cos\alpha)(\sin\alpha)^3 - 4a_2(\sin\alpha)^3(0.294) \\ &+ 4S(x''\cos\alpha)(\sin\alpha)^3 y''/2 - 4S(\sin\alpha)^3(0.294)y''/2 \end{aligned} \quad \{62b\}$$

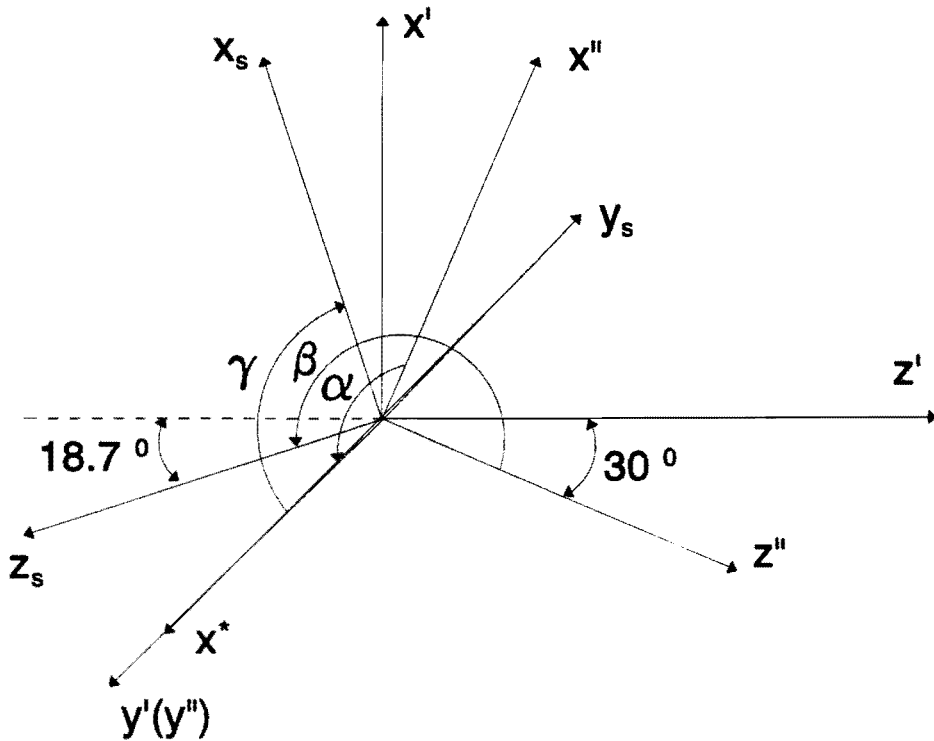
$$\begin{aligned} A(3) = &a_1(\sin\alpha)^2 + 6a_2(x''\cos\alpha)^2(\sin\alpha)^2 - 12a_2(x''\cos\alpha)(\sin\alpha)^2(0.294) \\ &+ 6a_2(\sin\alpha)^2(0.294)^2 + Q(\sin\alpha)^2 y''/2 + 6S(x''\cos\alpha)^2(\sin\alpha)^2 y''/2 \\ &- 12S(x''\cos\alpha)(\sin\alpha)^2(0.294)y''/2 + 6S(\sin\alpha)^2(0.294)^2 y''/2 \end{aligned} \quad \{62c\}$$

$$\begin{aligned} A(2) = &-\cos\alpha + 2a_1(x''\cos\alpha)(\sin\alpha) - 2a_1(0.294)(\sin\alpha) \\ &+ 4a_2(x''\cos\alpha)^3(\sin\alpha) - 12a_2(x''\cos\alpha)^2(\sin\alpha)(0.294) \\ &+ 12a_2(x''\cos\alpha)(\sin\alpha)(0.294)^2 - 4a_2(\sin\alpha)(0.294)^3 \\ &+ 2Q(x''\cos\alpha)(\sin\alpha)y''/2 - 2Q(0.294)(\sin\alpha)y''/2 \\ &+ 4S(x''\cos\alpha)^3(\sin\alpha)y''/2 - 12S(x''\cos\alpha)^2(\sin\alpha)(0.294)y''/2 \\ &+ 12S(x''\cos\alpha)(\sin\alpha)(0.294)^2 y''/2 - 4S(\sin\alpha)(0.294)^3 y''/2 \end{aligned} \quad \{62d\}$$

$$\begin{aligned} A(1) = &x''\sin\alpha - b + a_1(x''\cos\alpha)^2 - 2a_1(0.294)(x''\cos\alpha) + a_1(0.294)^2 \\ &+ a_2(x''\cos\alpha)^4 - 4a_2(x''\cos\alpha)^3(0.294) + 6a_2(x''\cos\alpha)^2(0.294)^2 \\ &- 4a_2(x''\cos\alpha)(0.294)^3 + a_2(0.294)^4 + Py''/2 + Q(x''\cos\alpha)^2 y''/2 \\ &- 2Q(0.294)(x''\cos\alpha)y''/2 + Q(0.294)^2 y''/2 + Ry''/4 + S(x''\cos\alpha)^4 y''/2 \\ &- 4S(x''\cos\alpha)^3(0.294)y''/2 + 6S(x''\cos\alpha)^2(0.294)^2 y''/2 \\ &+ S(0.294)^4 y''/2 - 4S(x''\cos\alpha)(0.294)^3 y''/2 \end{aligned} \quad \{62e\}$$

Met behulp van een numerieke routine zijn we nu in staat om voor een bepaalde x'' en y'' de bijbehorende z'' te vinden.

Vervolgens gaan we het veld van de belichter (formule 33) uitdrukken in de nieuwe cartesische componenten van de reflector $H_{x''}(\vec{r}'')$, $H_{y''}(\vec{r}'')$ en $H_{z''}(\vec{r}'')$. Om dit te realiseren maken we gebruik van de "Eulerse"-hoeken, zie figuur 15.



figuur 15. De "Eulerse"-hoeken

Uit figuur 15 lezen we af dat de "Eulerse"-hoeken gelijk zijn aan:

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\beta = 180^\circ + 30^\circ + 18.7^\circ = 228.7^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ$$

De elementen van de transformatie matrix $\begin{pmatrix} c_s & c'' \end{pmatrix} \vec{A}$ zijn nu:

$$A_{11} = \cos(90^\circ) \cos(90^\circ) - \sin(90^\circ) \cos(228.7^\circ) \sin(90^\circ) = 0.661$$

$$A_{12} = \cos(90^\circ) \sin(90^\circ) + \sin(90^\circ) \cos(228.7^\circ) \cos(90^\circ) = 0$$

$$A_{13} = \sin(90^\circ) \sin(228.7^\circ) = -0.751$$

$$A_{21} = -\sin(90^\circ) \cos(90^\circ) - \cos(90^\circ) \cos(228.7^\circ) \sin(90^\circ) = 0$$

$$A_{22} = -\sin(90^\circ) \sin(90^\circ) + \cos(90^\circ) \cos(228.7^\circ) \cos(90^\circ) = -1$$

$$A_{23} = \cos(90^\circ) \sin(228.7^\circ) = 0$$

$$A_{31} = \sin(228.7^\circ) \sin(90^\circ) = -0.751$$

$$A_{32} = -\sin(228.7^\circ) \cos(90^\circ) = 0$$

$$A_{33} = \cos(228.7^\circ) = -0.661$$

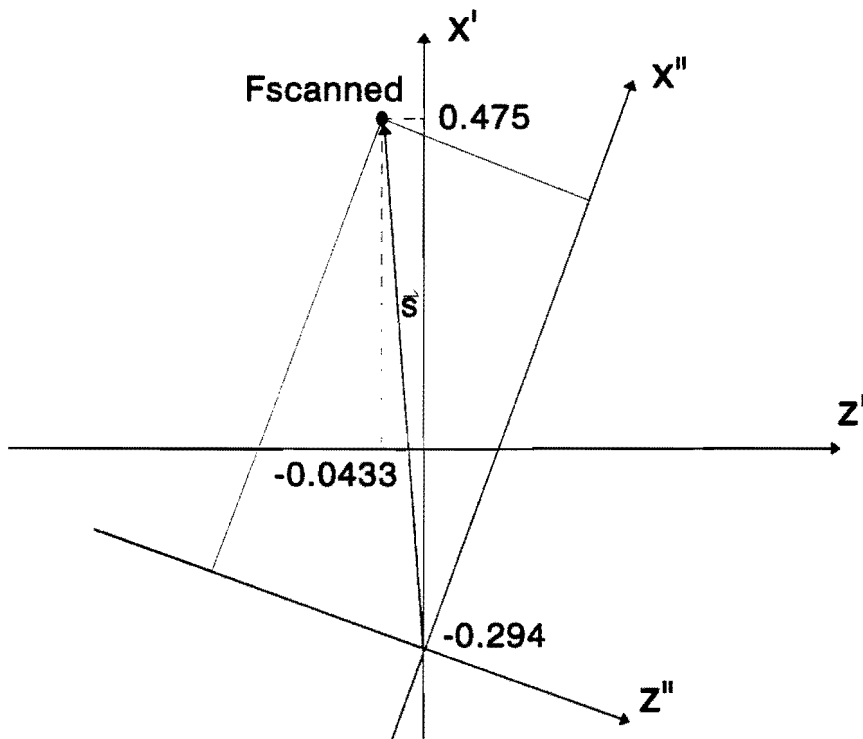
De transformatie matrix van het cartesische coördinatenstelsel $\{\hat{c}''\}$ naar $\{\hat{c}_s\}$ wordt nu:

$$\begin{pmatrix} c_s \\ \vec{A}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.661 & 0 & -0.751 \\ 0 & -1 & 0 \\ -0.751 & 0 & -0.661 \end{pmatrix} \quad \{63\}$$

Om de sferische coördinaten van de belichter r_s, θ_s en ϕ_s uit te drukken in de sferische coördinaten r'', θ'' en ϕ'' van de reflector, gebruikt men de volgende transformatie:

$$\begin{Bmatrix} r_s \sin \theta_s \cos \phi_s \\ r_s \sin \theta_s \sin \phi_s \\ r_s \cos \theta_s \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} r'' \sin \theta'' \cos \phi'' - s_1 \\ r'' \sin \theta'' \sin \phi'' - s_2 \\ r'' \cos \theta'' - s_3 \end{Bmatrix} \quad \{64\}$$

Om de coördinaten van de belichter $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ten opzichte van het coördinatenstelsel (x'', y'', z'') te kunnen bepalen maken we gebruik van figuur 16.



figuur 16. De coördinaten van de \vec{s} -vector t.o.v. $x''y''z''$.

Het coördinatenstelsel $x''y''z''$ wordt verkregen door eerst de oorsprong van het coördinatenstelsel $x'y'z'$ te verplaatsen naar het punt $(x', y', z') = (-0.294, 0, 0)$ waarna het coördinatenstelsel over een hoek van $\alpha=30^\circ$ wordt verdraaid om de y' -as. De nieuwe coördinaten van \vec{s} worden nu:

$$\vec{s}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.475+0.3 \\ 0 \\ -0.0433 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.644 \\ 0 \\ -0.421 \end{pmatrix} \quad \{65\}$$

Vergelijking 64 wordt nu:

$$\begin{cases} r_s \sin\theta_s \cos\phi_s \\ r_s \sin\theta_s \sin\phi_s \\ r_s \cos\theta_s \end{cases} = \begin{pmatrix} 0.661 & 0 & -0.751 \\ 0 & -1 & 0 \\ -0.751 & 0 & -0.661 \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.644 \\ r'' \sin\theta'' \sin\phi'' \\ r'' \cos\theta'' + 0.421 \end{cases} \quad \{66\}$$

Na uitwerking van formule 66 krijgen we de volgende drie vergelijkingen:

$$r_s \sin\theta_s \cos\phi_s = 0.661(r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.644) - 0.751(r'' \cos\theta'' + 0.421) \quad \{67\}$$

$$r_s \sin\theta_s \sin\phi_s = -r'' \sin\theta'' \sin\phi'' \quad \{68\}$$

$$r_s \cos\theta_s = -0.751(r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.644) - 0.661(r'' \cos\theta'' + 0.421) \quad \{69\}$$

Vergelijking 68 gedeeld door vergelijking 67 levert een uitdrukking voor ϕ_s :

$$\tan\phi_s = -\frac{r'' \sin\theta'' \sin\phi''}{0.661(r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.644) - 0.751(r'' \cos\theta'' + 0.421)}$$

$$\phi_s = \text{atan}\left(-\frac{r'' \sin\theta'' \sin\phi''}{0.661(r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.644) - 0.751(r'' \cos\theta'' + 0.421)}\right) \quad \{70\}$$

Vergelijking 68 gedeeld door vergelijking 69 levert een uitdrukking voor θ_s :

$$\tan\theta_s = \frac{r'' \sin\theta'' \sin\phi''}{\sin\phi_s (0.751(r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.644) + 0.661(r'' \cos\theta'' + 0.421))}$$

$$\theta_s = \text{atan}\left(\frac{r'' \sin\theta'' \sin\phi''}{\sin\phi_s (0.751(r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.644) + 0.661(r'' \cos\theta'' + 0.421))}\right) \quad \{71\}$$

Vergelijking 69 levert een uitdrukking voor r_s :

$$r_s = \frac{-0.751(r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.644) - 0.661(r'' \cos\theta'' + 0.421)}{\cos\theta_s} \quad \{72\}$$

Het veld van de belichter uitgedrukt in het coördinatenstelsel $x_s y_s z_s$ getransformeerd naar het coördinatenstelsel $x'' y'' z''$ wordt nu:

$$\vec{H}_s(\vec{r}'') = \begin{cases} H_{x''}(\vec{r}'') \\ H_{y''}(\vec{r}'') \\ H_{z''}(\vec{r}'') \end{cases} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.661 & 0 & -0.751 \\ 0 & -1 & 0 \\ -0.751 & 0 & -0.661 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\theta_s \cos^2\phi_s - \sin^2\phi_s \\ -\cos\theta_s \sin\phi_s \cos\phi_s + \sin\phi_s \cos\phi_s \\ \sin\theta_s \cos\phi_s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{Z_0} \cos^i\theta_s \frac{e^{-jkr_s}}{4\pi r_s}$$

$$\quad \{73\}$$

Vergelijking 73 uitgeschreven in de afzonderlijke coördinaten waarbij de gemeenschappelijke term $\frac{1}{Z_0} \cos^L \theta_s \frac{e^{-jk r_s}}{4\pi r_s}$ wordt weggelaten geeft:

$$H_{x''}(\vec{r}'') = (0.661(-\cos\theta_s \cos^2\phi_s - \sin^2\phi_s) - 0.751(\sin\theta_s \cos\phi_s)) \quad \{74a\}$$

$$H_{y''}(\vec{r}'') = (\cos\theta_s \sin\phi_s \cos\phi_s - \sin\phi_s \cos\phi_s) \quad \{74b\}$$

$$H_{z''}(\vec{r}'') = (0.751(-\cos\theta_s \cos^2\phi_s - \sin^2\phi_s) - 0.661(\sin\theta_s \cos\phi_s)) \quad \{74c\}$$

Voor de stroom op de reflector vinden we nu:

$$\vec{J}(\rho'', \phi'') = 2\vec{N}'' \times \vec{H}'' = 2 \begin{pmatrix} N_{x''} \\ N_{y''} \\ N_{z''} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_{x''} \\ H_{y''} \\ H_{z''} \end{pmatrix} \quad \{75\}$$

Zodat:

$$\tilde{J}_{x''} = 2(N_{y''}H_{z''} - N_{z''}H_{y''})$$

$$\tilde{J}_{y''} = 2(N_{z''}H_{x''} - N_{x''}H_{z''})$$

$$\tilde{J}_{z''} = 2(N_{x''}H_{y''} - N_{y''}H_{x''})$$

Bij het bepalen van de normaal dienen we er wel rekening mee te houden dat dit ten opzichte van het $x''y''z''$ assenstelsel gebeurt.

$$\begin{pmatrix} N_{x''} \\ N_{y''} \\ N_{z''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ N_z^* \end{pmatrix} \quad \{76\}$$

Met:

$$N_x^* = -\frac{\partial f}{\partial x} = -(2a_1(x-0.29) + 4a_2(x-0.29)^3 + 2Q(x-0.29)y^2 + 4S(x-0.29)^3y^2)$$

$$N_y^* = -\frac{\partial f}{\partial y} = -(2Py + 2Q(x-0.29)^2y + 4Ry^3 + 2S(x-0.29)^4y)$$

$$N_z^* = 1$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Net als in de "unscanned"-situatie stellen we ook nu weer het produkt van $k \cdot a$ gelijk aan:

$$k \cdot a = 100$$

Hierdoor is de D/λ -verhouding ook nu weer:

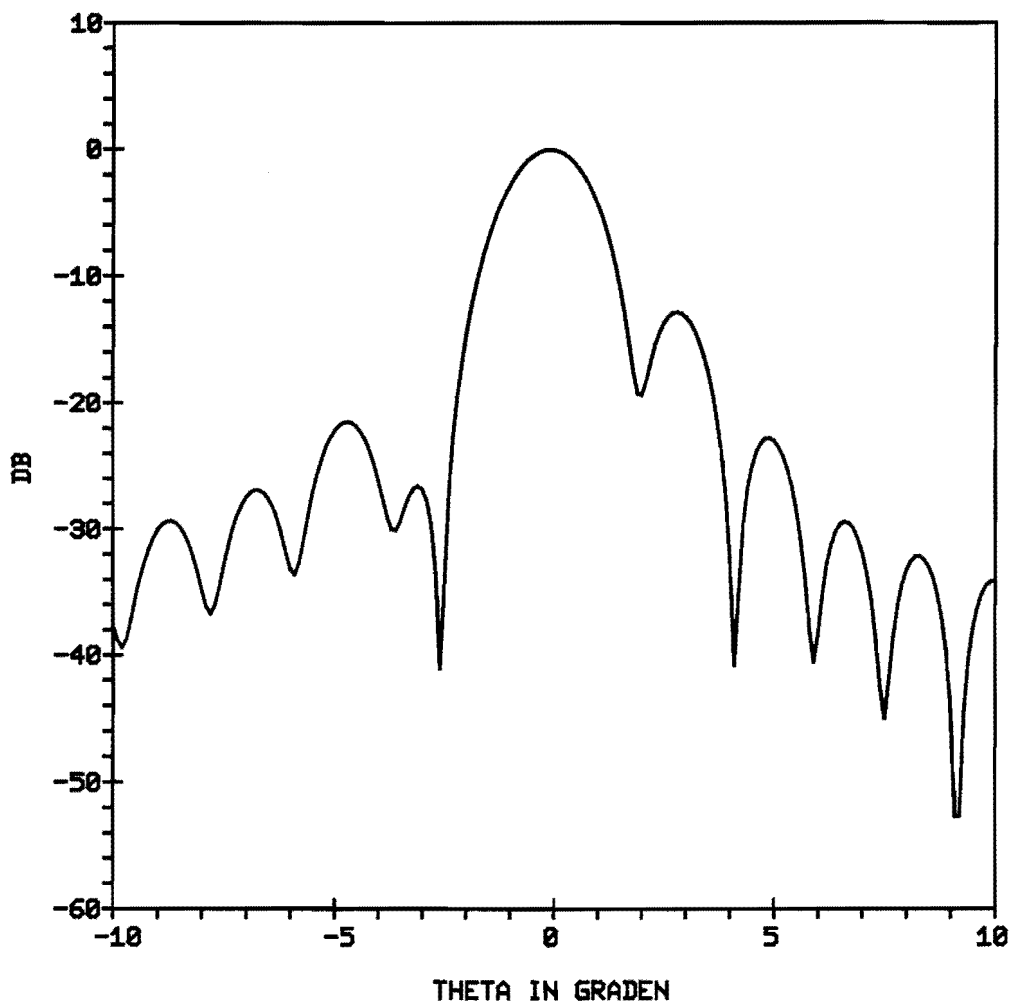
$$\frac{D}{\lambda} = \frac{2 \cdot a}{\lambda} = \frac{0.5}{0.0157} = 31.83$$

Indien de reflector uniform wordt belicht ($L=0$) dan dient de 3dB-bundelbreedte gelijk te zijn aan:

$$1.02 \frac{\lambda}{D} = 1.02 \cdot \frac{\lambda}{31.83\lambda} = 1.84^\circ$$

In figuur 17 is het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie ($\alpha=30^\circ$) gegeven indien het reflectoroppervlak uniform belicht wordt. Verder is gegeven: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=0^\circ$ en $L=0$.

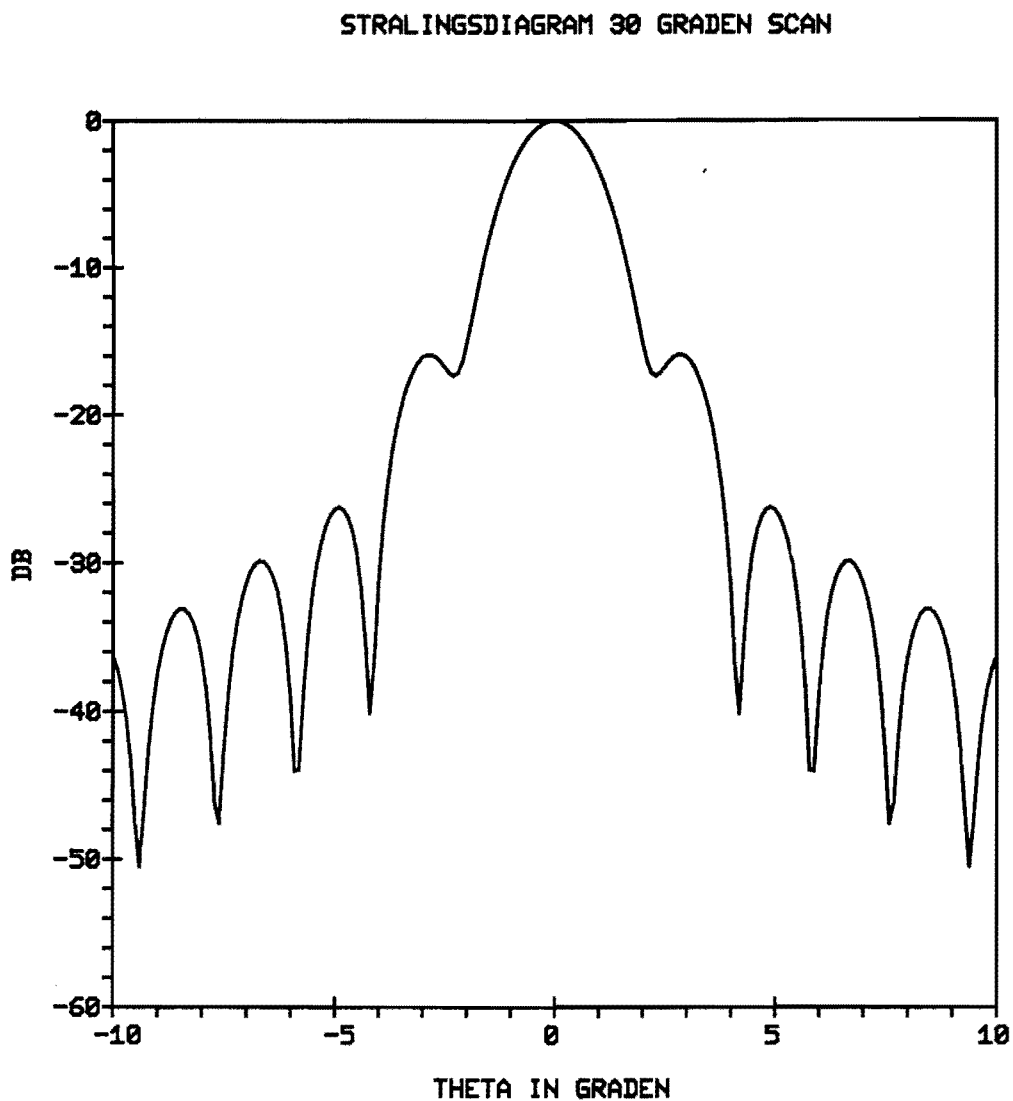
STRALINGSDIAGRAM 30 GRADEN SCAN



figuur 17. Het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=0^\circ$ en $L=0$.

Dat dit deel van het belichte reflectoroppervlak voor $\phi=0^\circ$ niet meer symmetrisch is, is terug te vinden in het stralingsdiagram. De hoogste eerste zijlus ligt nu op ongeveer -13.5dB en de 3dB-bundelbreedte is ongeveer gelijk aan 1.9° . Merk verder op dat nu de Θ -hoeken gedefinieerd zijn voor het x"y"z"-coördinatenstelsel (zie fig. 14)

In figuur 18 is het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie ($\alpha=30^\circ$) gegeven indien het reflectoroppervlak uniform belicht wordt. Verder is gegeven: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=90^\circ$ en $L=0$.



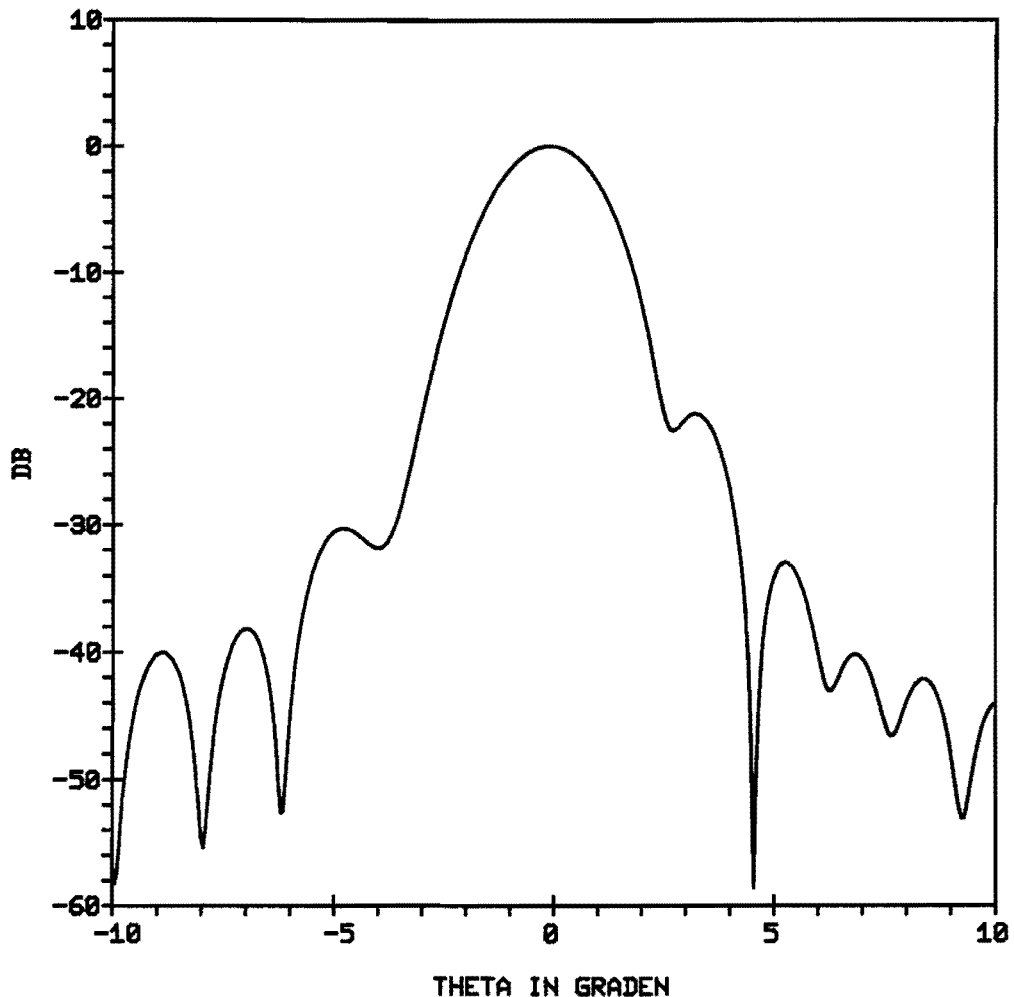
figuur 18. Het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=90^\circ$ en $L=0$.

Voor $\phi=90^\circ$ is het reflectoroppervlak overal symmetrisch, wat is terug te vinden in het stralingsdiagram. De eerste zijlus ligt nu op -16dB en de 3dB-bundelbreedte is ook nu weer ongeveer gelijk aan 1.9° .

Ook nu weer gaan we het reflectoroppervlak belichten met een meer realistische belichter. Omdat in de "scanned"-situatie ($\alpha=30^\circ$) de openingshoek van de belichter nagenoeg gelijk is als in de "unscanned"-situatie ($\alpha=0^\circ$), kiezen we ook nu weer voor $L=45$, wat inhoudt dat de randbelichting ongeveer -11 dB is.

In figuur 19 is het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie ($\alpha=30^\circ$) gegeven indien de randbelichting ongeveer -11 dB is. Verder is gegeven: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=0^\circ$ en $L=45$.

STRALINGSDIAGRAM 30 GRADEN SCAN

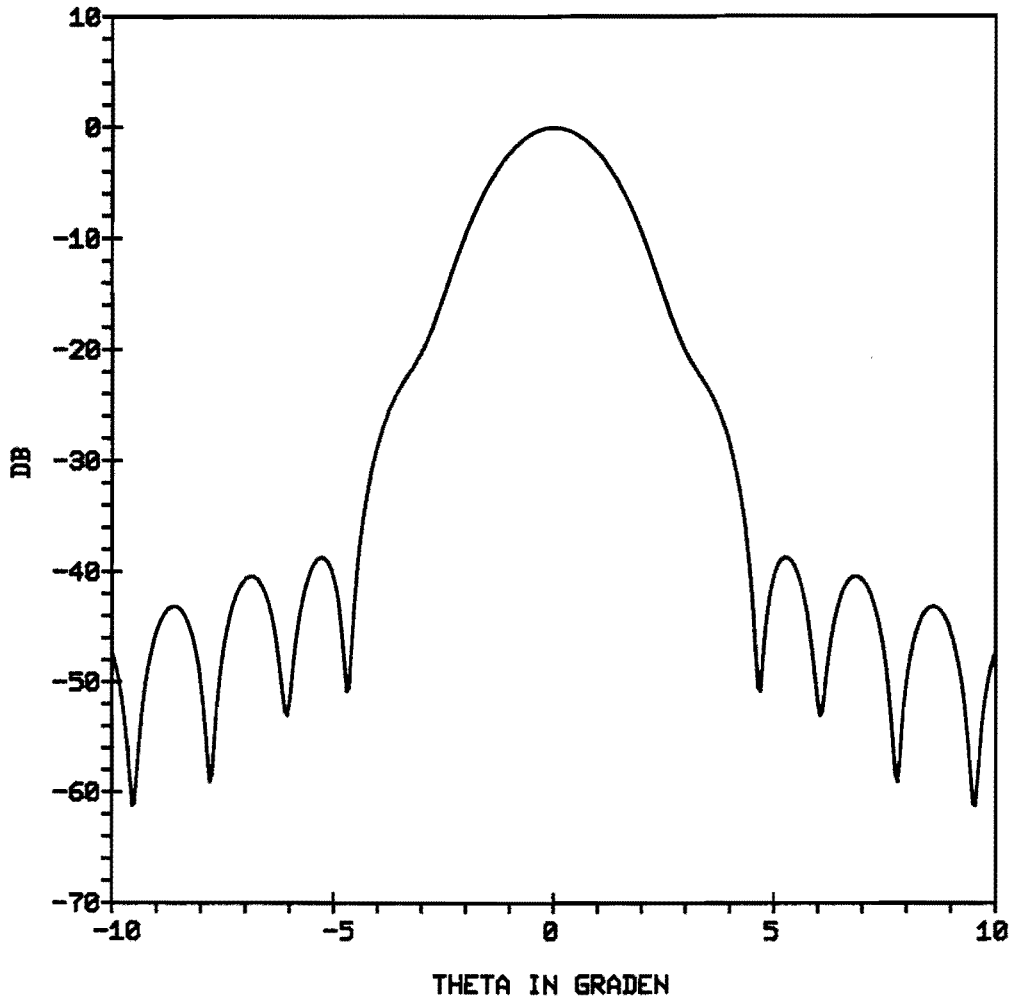


figuur 19. Het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=0^\circ$ en $L=45$.

In figuur 19 zien we dat een randbelichting van ongeveer -11dB tot gevolg heeft dat de hoogste eerste zijlus van -13.5dB bij uniforme belichting naar -21.5dB gaat. De 3dB-bundelbreedte gaat van 1.9° bij uniforme belichting naar 2.4° .

In figuur 20 is het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie ($\alpha=30^\circ$) gegeven indien de randbelichting ongeveer -11 dB is. Verder is gegeven: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=90^\circ$ en $L=45$.

STRALINGSDIAGRAM 30 GRADEN SCAN



figuur 20. Het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=90^\circ$ en $L=45$.

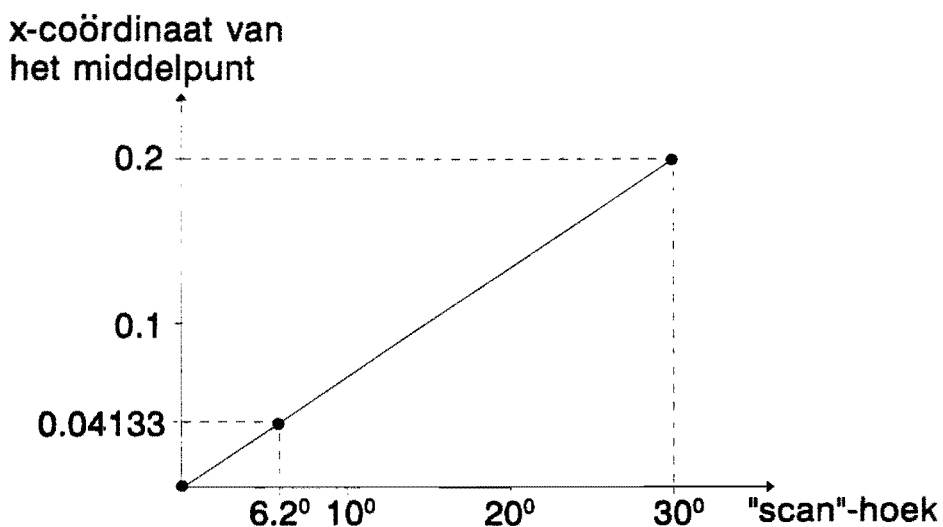
In figuur 20 zien we dat een randbelichting van ongeveer -11dB tot gevolg heeft dat de eerste zijlus van -16dB bij uniforme belichting naar -39dB gaat. Ten gevolge van de fasefouten is nu de eigenlijke eerste zijlus geheel opgevuld waardoor deze niet afzonderlijk te onderscheiden is[9]. De eerste zijlus die nu op -39dB ligt is dus in feite de tweede zijlus. De 3dB-bundelbreedte gaat ook nu van 1.9° bij uniforme belichting naar 2.4° .

H7. Een ontwerp voor het gelijktijdige ontvangst van twee TV-signalen.

We gaan nu de reflector welke geoptimaliseerd is voor maximale "scan"-hoeken van $\pm 30^\circ$ gebruiken om gelijktijdig twee satelliet signalen te ontvangen, welke afkomstig zijn van twee verschillende satellieten. Gegeven is dat deze twee satellieten zich voor West-Europa op 13° oost en 19.2° oost bevinden. Als eis wordt er gesteld dat de "Carrier over Interference ratio" (C/I) groter dan 23dB dient te zijn. Door nu de symmetrie-as (z-as) van de reflector te richten op de satelliet welke zich op 13° oost bevindt, dan zal hierdoor het door deze satelliet uitgezonden signaal hoofdzakelijk in het "unscanned"-brandpunt worden ontvangen. Het signaal dat hierbij ongewenst door het "scanned"-brandpunt wordt ontvangen dient minimaal 23dB onder het maximum te liggen om aan de "Carrier over Interference ratio" te voldoen. De tweede satelliet welke zich op 19.2° oost bevindt, dient nu in het "scanned"-brandpunt te worden ontvangen. De ontvangen stralen dienen hierbij een hoek van $(19.2^\circ - 13^\circ =) 6.2^\circ$ te maken met de symmetrie-as (z-as) van de reflector. Het signaal dat hierbij ongewenst door het "unscanned"-brandpunt wordt ontvangen dient nu ook minimaal 23dB onder het maximum te liggen.

Voor we het stralingsdiagram van de reflector kunnen berekenen dienen we eerst de coördinaten van het "scanned"-brandpunt te berekenen. Tevens moeten we bepalen welk deel van de reflector belicht dient te worden.

In het geval dat we een signaal over de maximale "scan"-hoek $\alpha = 30^\circ$ zenden, belichten we de reflector cirkelvormig met straal 0.25 en middelpunt $(x,y) = (0,0.2)$. Indien we over de hoek $\alpha = 0^\circ$ zenden, belichten we de reflector ook cirkelvormig met straal 0.25 maar nu met middelpunt $(x,y) = (0,0)$. Door middel van extrapolatie kunnen we nu voor $\alpha = 6.2^\circ$ berekenen waar het middelpunt van de belichte cirkel komt te liggen. Hiervoor maken we gebruik van de volgende grafiek.



figuur 21. Bepaling middelpunt van de belichte cirkel

Bij $\alpha=6.2^\circ$ ligt het middelpunt van de op de reflector belichte cirkel op:

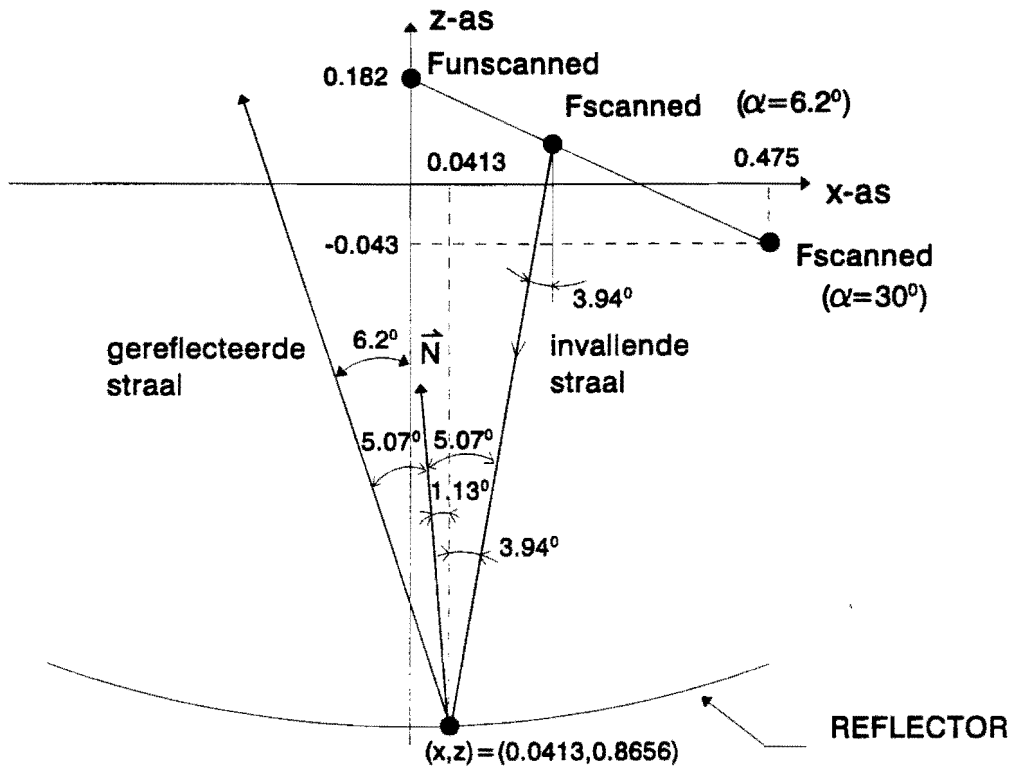
$$(x,y)=(0.04133,0)$$

De bijbehorende z-coördinaat van het reflectoroppervlak is:

$$z=-0.8656$$

In de onderstaande figuur is voor dit punt van de reflector $(x,y,z)=(0.04133,0,-0.8656)$

zowel de normaal \vec{N} als ook de invallende- en de gereflecteerde straal te zien.



figuur 22. Bepaling van het "scanned"-brandpunt voor $\alpha=6.2^\circ$.

Uit figuur 22 lezen we af dat de richtingscoëfficiënt van de invallende straal gelijk is aan:

$$r.c. = \tan(90^\circ - 3.94^\circ) = \tan(86.06^\circ) = 14.52$$

De vergelijking van de invallende straal is nu:

$$z = 14.52x + b \quad \{77\}$$

Substitutie van het punt $(x,z)=(0.04133,-0.8656)$ in vergelijking 77 levert:

$$-0.8656 = 14.52 \cdot 0.04133 + b$$

$$b = -1.465$$

Zodat:

$$z = 14.52x + 1.465 \quad \{78\}$$

Gegeven is dat het "scanned"-brandpunt voor $\alpha = 6.2^\circ$ zich op de rechte lijn tussen het "unscanned"-brandpunt en het "scanned"-brandpunt voor $\alpha = 30^\circ$ moet bevinden, zie figuur 22.

De vergelijking van de deze rechte lijn door de brandpunten luidt:

$$z = \frac{(0.182 + 0.0433)}{0.475}x + 0.182$$

$$z = -0.474x + 0.182 \quad \{79\}$$

Het snijpunt van deze laatste vergelijking met de vergelijking van de invallende straal levert dan uiteindelijk de coördinaten van het "scanned"-brandpunt voor $\alpha = 6.2^\circ$.

$$14.52x - 1.465 = -0.474x + 0.182$$

$$1.50x = 1.65$$

$$x = 0.110 \quad \text{en} \quad z = 0.130$$

Verder dienen we nog het snijpunt van de gereflecteerde straal met de x-as te berekenen omdat we in dit punt onder een hoek $\alpha = 6.2^\circ$ naar het stralingsdiagram in het verre veld gaan kijken. De richtingscoëfficiënt van de gereflecteerde straal is:

$$r.c. = \tan(90^\circ + 6.2^\circ) = \tan(96.2^\circ) = -9.205$$

De vergelijking van de gereflecteerde straal is nu:

$$z = -9.205x + b \quad \{80\}$$

Substitutie van het punt $(x,z)=(0.04133,-0.8656)$ in vergelijking 80 levert:

$$-0.8656 = -9.205 \cdot 0.04133 + b$$

$$b = -0.485$$

Zodat:

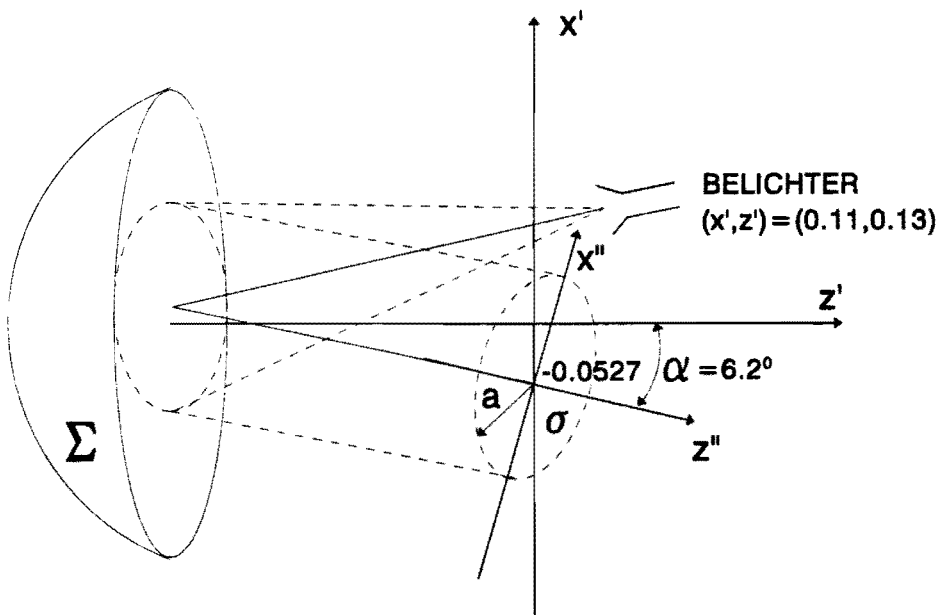
$$z = -9.205x - 0.485 \quad \{81\}$$

Het snijpunt van de gereflecteerde straal met de x-as is nu:

$$-9.205x - 0.485 = 0$$

$$x = -\frac{0.485}{9.205} = -0.0527$$

Met behulp van figuur 23 gaan we nu het stralingsdiagram bepalen voor $\alpha=6.2^\circ$.



figuur 23. Scannen over een hoek $\alpha=6.2^\circ$.

Ook nu weer dienen we het reflectoroppervlak uit te drukken in het nieuwe coördinatenstelsel $z'' = \tilde{f}(x'', y'')$.

De oorsprong van dit nieuwe coördinatenstelsel ligt op:

$$(x', y', z') = (-0.0527, 0, 0)$$

Tevens is dit nieuwe coördinatenstelsel (x'', y'', z'') over een hoek $\alpha = -6.2^\circ$ verdraaid met de y'' -as als draaiingsas.

Na uitwerking en rangschikking van de nieuwe vergelijking voor het reflectoroppervlak krijgen we een 4^{de}-orde polynoom van z'' die er als volgt uit komt te zien:

$$A(5) z''^4 + A(4) z''^3 + A(3) z''^2 + A(2) z'' + A(1) = 0 \quad \{82\}$$

met:

$$A(5) = a_2 (\sin \alpha)^4 + S (\sin \alpha)^4 y''^2 \quad \{83a\}$$

$$A(4) = 4a_2 (x'' \cos \alpha) (\sin \alpha)^3 - 4a_2 (\sin \alpha)^3 (0.0527) + 4S (x'' \cos \alpha) (\sin \alpha)^3 y''^2 - 4S (\sin \alpha)^3 (0.0527) y''^2 \quad \{83b\}$$

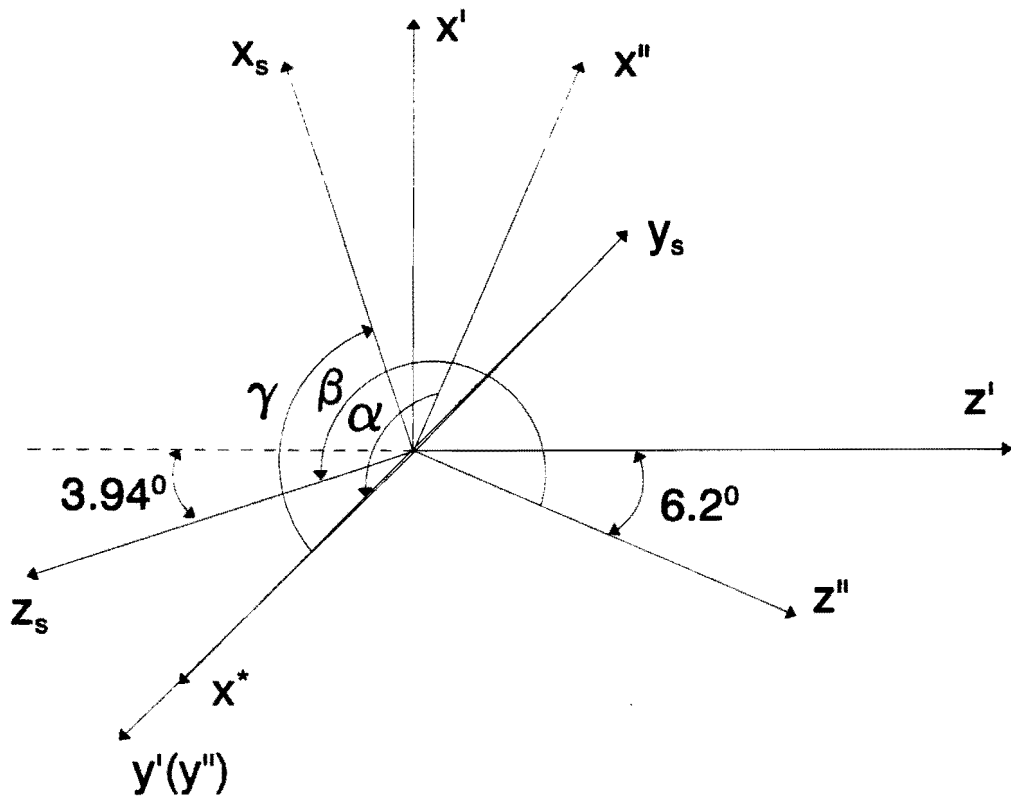
$$A(3) = a_1 (\sin \alpha)^2 + 6a_2 (x'' \cos \alpha)^2 (\sin \alpha)^2 - 12a_2 (x'' \cos \alpha) (\sin \alpha)^2 (0.0527) + 6a_2 (\sin \alpha)^2 (0.0527)^2 + Q (\sin \alpha)^2 y''^2 + 6S (x'' \cos \alpha)^2 (\sin \alpha)^2 y''^2 - 12S (x'' \cos \alpha) (\sin \alpha)^2 (0.0527) y''^2 + 6S (\sin \alpha)^2 (0.0527)^2 y''^2 \quad \{83c\}$$

$$A(2) = -\cos \alpha + 2a_1 (x'' \cos \alpha) (\sin \alpha) - 2a_1 (0.0527) (\sin \alpha) + 4a_2 (x'' \cos \alpha)^3 (\sin \alpha) - 12a_2 (x'' \cos \alpha)^2 (\sin \alpha) (0.0527) + 12a_2 (x'' \cos \alpha) (\sin \alpha) (0.0527)^2 - 4a_2 (\sin \alpha) (0.0527)^3 + 2Q (x'' \cos \alpha) (\sin \alpha) y''^2 - 2Q (0.0527) (\sin \alpha) y''^2 + 4S (x'' \cos \alpha)^3 (\sin \alpha) y''^2 - 12S (x'' \cos \alpha)^2 (\sin \alpha) (0.0527) y''^2 + 12S (x'' \cos \alpha) (\sin \alpha) (0.0527)^2 y''^2 - 4S (\sin \alpha) (0.0527)^3 y''^2 \quad \{83d\}$$

$$A(1) = x'' \sin \alpha - b + a_1 (x'' \cos \alpha)^2 - 2a_1 (0.0527) (x'' \cos \alpha) + a_1 (0.0527)^2 + a_2 (x'' \cos \alpha)^4 - 4a_2 (x'' \cos \alpha)^3 (0.0527) + 6a_2 (x'' \cos \alpha)^2 (0.0527)^2 - 4a_2 (x'' \cos \alpha) (0.0527)^3 + a_2 (0.0527)^4 + P y''^2 + Q (x'' \cos \alpha)^2 y''^2 - 2Q (0.0527) (x'' \cos \alpha) y''^2 + Q (0.0527)^2 y''^2 + R y''^4 + S (x'' \cos \alpha)^4 y''^2 - 4S (x'' \cos \alpha)^3 (0.0527) y''^2 + 6S (x'' \cos \alpha)^2 (0.0527)^2 y''^2 + S (0.0527)^4 y''^2 - 4S (x'' \cos \alpha) (0.0527)^3 y''^2 \quad \{83e\}$$

Met behulp van een numerieke routine zijn we nu in staat om voor een bepaalde x'' en y'' de bijbehorende z'' te vinden.

Vervolgens gaan we het veld van de belichter (formule 33) uitdrukken in de nieuwe cartesische componenten van de reflector $H_{x''}(\vec{r}'')$, $H_{y''}(\vec{r}'')$ en $H_{z''}(\vec{r}'')$. Om dit te realiseren maken we gebruik van de "Eulerse"-hoeken, zie figuur 24.



figuur 24. De "Eulerse"-hoeken.

Uit figuur 22 lezen we af dat de "Eulerse"-hoeken gelijk zijn aan:

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\beta = 180^\circ + 6.2^\circ + 3.94^\circ = 190.14^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ$$

De elementen van de transformatie matrix ${}^{c_s} \bar{A}^{c''}$ zijn nu:

$$A_{11} = \cos(90^\circ) \cos(90^\circ) - \sin(90^\circ) \cos(190.14^\circ) \sin(90^\circ) = 0.984$$

$$A_{12} = \cos(90^\circ) \sin(90^\circ) + \sin(90^\circ) \cos(228.7^\circ) \cos(90^\circ) = 0$$

$$A_{13} = \sin(90^\circ) \sin(190.14^\circ) = -0.176$$

$$A_{21} = -\sin(90^\circ) \cos(90^\circ) - \cos(90^\circ) \cos(228.7^\circ) \sin(90^\circ) = 0$$

$$A_{22} = -\sin(90^\circ) \sin(90^\circ) + \cos(90^\circ) \cos(228.7^\circ) \cos(90^\circ) = -1$$

$$A_{23} = \cos(90^\circ) \sin(228.7^\circ) = 0$$

$$A_{31} = \sin(190.14^\circ) \sin(90^\circ) = -0.176$$

$$A_{32} = -\sin(228.7^\circ) \cos(90^\circ) = 0$$

$$A_{33} = \cos(190.14^\circ) = -0.984$$

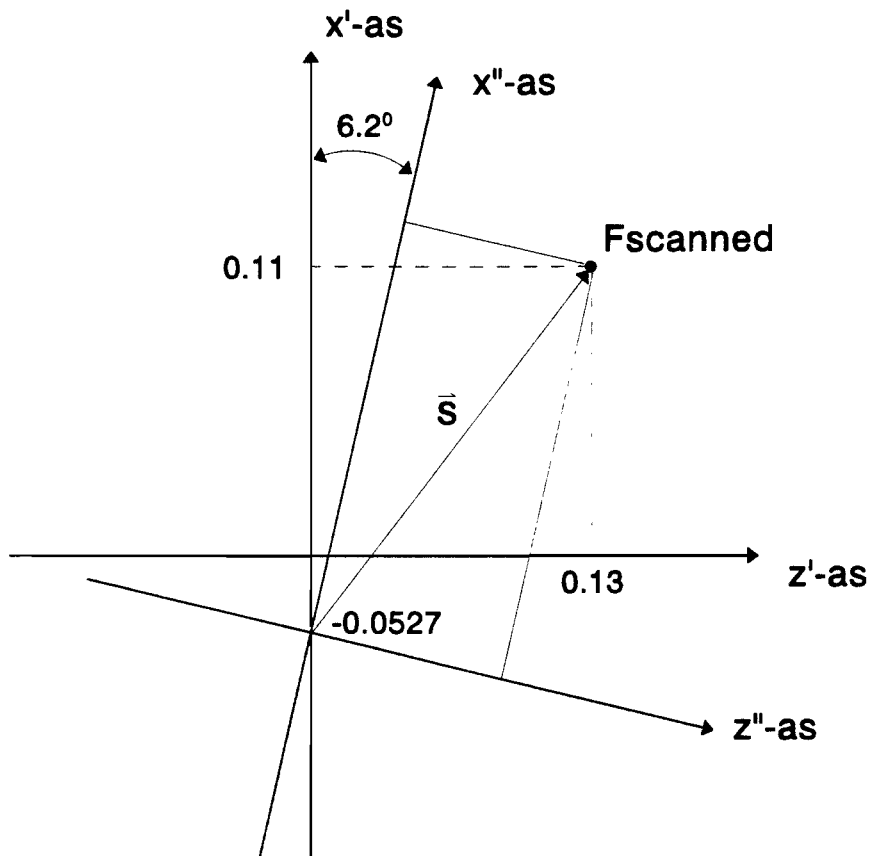
De transformatie matrix van het cartesische coördinatenstelsel $\{\hat{c}''\}$ naar $\{\hat{c}_s\}$ wordt nu:

$$\begin{pmatrix} c_s \\ \bar{A} \\ c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.984 & 0 & -0.176 \\ 0 & -1 & 0 \\ -0.176 & 0 & -0.984 \end{pmatrix} \quad \{84\}$$

Om de sferische coördinaten van de belichter r_s, θ_s en ϕ_s uit te drukken in de sferische coördinaten r'', θ'' en ϕ'' van de reflector, gebruikt men de volgende transformatie:

$$\begin{Bmatrix} r_s \sin \theta_s \cos \phi_s \\ r_s \sin \theta_s \sin \phi_s \\ r_s \cos \theta_s \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} r'' \sin \theta'' \cos \phi'' - s_1 \\ r'' \sin \theta'' \sin \phi'' - s_2 \\ r'' \cos \theta'' - s_3 \end{Bmatrix} \quad \{85\}$$

Om de coördinaten van de belichter $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ten opzichte van het coördinatenstelsel (x'', y'', z'') te kunnen bepalen maken we gebruik van figuur 25.



figuur 25. De coördinaten van de \vec{s} -vector t.o.v. $x''y''z''$.

Het coördinatenstelsel $x''y''z''$ wordt verkregen door eerst de oorsprong van het coördinatenstelsel $x'y'z'$ te verplaatsen naar het punt $(x', y', z') = (-0.0527, 0, 0)$ waarna het coördinatenstelsel over een hoek van $\alpha=6.2^\circ$ wordt verdraaid om de y' -as.

De nieuwe coördinaten van \vec{s} worden nu:

$$\vec{s}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.11+0.0527 \\ 0 \\ -0.13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1756 \\ 0 \\ 0.1115 \end{pmatrix} \quad \{86\}$$

Vergelijking 85 wordt nu:

$$\begin{Bmatrix} r_s \sin\theta_s \cos\phi_s \\ r_s \sin\theta_s \sin\phi_s \\ r_s \cos\theta_s \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.984 & 0 & -0.176 \\ 0 & -1 & 0 \\ -0.176 & 0 & -0.984 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.1756 \\ r'' \sin\theta'' \sin\phi'' \\ r'' \cos\theta'' - 0.1115 \end{Bmatrix} \quad \{87\}$$

Na uitwerking van formule 87 krijgen we de volgende drie vergelijkingen:

$$r_s \sin\theta_s \cos\phi_s = 0.984 (r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.1756) - 0.176 (r'' \cos\theta'' - 0.1115) \quad \{88\}$$

$$r_s \sin\theta_s \sin\phi_s = -r'' \sin\theta'' \sin\phi'' \quad \{89\}$$

$$r_s \cos\theta_s = -0.176 (r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.1756) - 0.984 (r'' \cos\theta'' - 0.1115) \quad \{90\}$$

Vergelijking 89 gedeeld door vergelijking 88 levert een uitdrukking voor ϕ_s :

$$\tan\phi_s = -\frac{r'' \sin\theta'' \sin\phi''}{0.984 (r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.1756) - 0.176 (r'' \cos\theta'' - 0.1115)}$$

$$\phi_s = \text{atan}\left(-\frac{r'' \sin\theta'' \sin\phi''}{0.984 (r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.1756) - 0.176 (r'' \cos\theta'' - 0.1115)}\right) \quad \{91\}$$

Vergelijking 89 gedeeld door vergelijking 90 levert een uitdrukking voor θ_s :

$$\tan\theta_s = \frac{r'' \sin\theta'' \sin\phi''}{\sin\phi_s (0.176 (r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.1756) + 0.984 (r'' \cos\theta'' - 0.1115))}$$

$$\theta_s = \text{atan}\left(\frac{r'' \sin\theta'' \sin\phi''}{\sin\phi_s (0.176 (r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.1756) + 0.984 (r'' \cos\theta'' - 0.1115))}\right) \quad \{92\}$$

Vergelijking 90 levert een uitdrukking voor r_s :

$$r_s = \frac{-0.176 (r'' \sin\theta'' \cos\phi'' - 0.1756) - 0.984 (r'' \cos\theta'' - 0.1115)}{\cos\theta_s} \quad \{93\}$$

Het veld van de belichter uitgedrukt in het coördinatenstelsel $x_s y_s z_s$ getransformeerd naar het coördinatenstelsel $x'' y'' z''$ wordt nu:

$$\vec{H}_s(\vec{r}'') = \begin{Bmatrix} H_{x''}(\vec{r}'') \\ H_{y''}(\vec{r}'') \\ H_{z''}(\vec{r}'') \end{Bmatrix} = \quad \{94\}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.984 & 0 & -0.176 \\ 0 & -1 & 0 \\ -0.176 & 0 & -0.984 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\theta_s \cos^2\phi_s - \sin^2\phi_s \\ -\cos\theta_s \sin\phi_s \cos\phi_s + \sin\phi_s \cos\phi_s \\ \sin\theta_s \cos\phi_s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{Z_0} \cos^L\theta_s \frac{e^{-jkr_s}}{4\pi r_s}$$

Vergelijking 94 uitgeschreven in de afzonderlijke coördinaten waarbij de gemeenschappelijke term $\frac{1}{Z_0} \cos^2 \theta_s \frac{e^{-jk r_s}}{4\pi r_s}$ wordt weggelaten geeft:

$$H_{x''}(\vec{r}'') = (0.984 (-\cos \theta_s \cos^2 \phi_s - \sin^2 \phi_s) - 0.176 (\sin \theta_s \cos \phi_s)) \quad \{95a\}$$

$$H_{y''}(\vec{r}'') = (\cos \theta_s \sin \phi_s \cos \phi_s - \sin \phi_s \cos \phi_s) \quad \{95b\}$$

$$H_{z''}(\vec{r}'') = (0.176 (-\cos \theta_s \cos^2 \phi_s - \sin^2 \phi_s) - 0.984 (\sin \theta_s \cos \phi_s)) \quad \{95c\}$$

Voor de stroom op de reflector vinden we nu:

$$\vec{J}(\rho'', \phi'') = 2\vec{N}'' \times \vec{H}'' = 2 \begin{pmatrix} N_{x''} \\ N_{y''} \\ N_{z''} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_{x''} \\ H_{y''} \\ H_{z''} \end{pmatrix} \quad \{96\}$$

Zodat:

$$\tilde{J}_{x''} = 2(N_{y''}H_{z''} - N_{z''}H_{y''})$$

$$\tilde{J}_{y''} = 2(N_{z''}H_{x''} - N_{x''}H_{z''})$$

$$\tilde{J}_{z''} = 2(N_{x''}H_{y''} - N_{y''}H_{x''})$$

Bij het bepalen van de normaal dienen we er wel rekening mee te houden dat dit ten opzichte van het $x''y''z''$ assenstelsel gebeurt.

$$\begin{pmatrix} N_{x''} \\ N_{y''} \\ N_{z''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ N_z^* \end{pmatrix} \quad \{97\}$$

Met:

$$N_x^* = -\frac{\partial f}{\partial x} = -(2a_1(x-0.0527) + 4a_2(x-0.0527)^3 + 2Q(x-0.0527)y^2 + 4S(x-0.0527)^3y^2)$$

$$N_y^* = -\frac{\partial f}{\partial y} = -(2Py + 2Q(x-0.0527)^2y + 4Ry^3 + 2S(x-0.0527)^4y)$$

$$N_z^* = 1$$

$$\alpha = 6.2^\circ$$

Net als in de "unscanned"-situatie stellen we ook nu weer het produkt van $k \cdot a$ gelijk aan:

$$k \cdot a = 100$$

Hierdoor is de D/λ -verhouding ook nu weer:

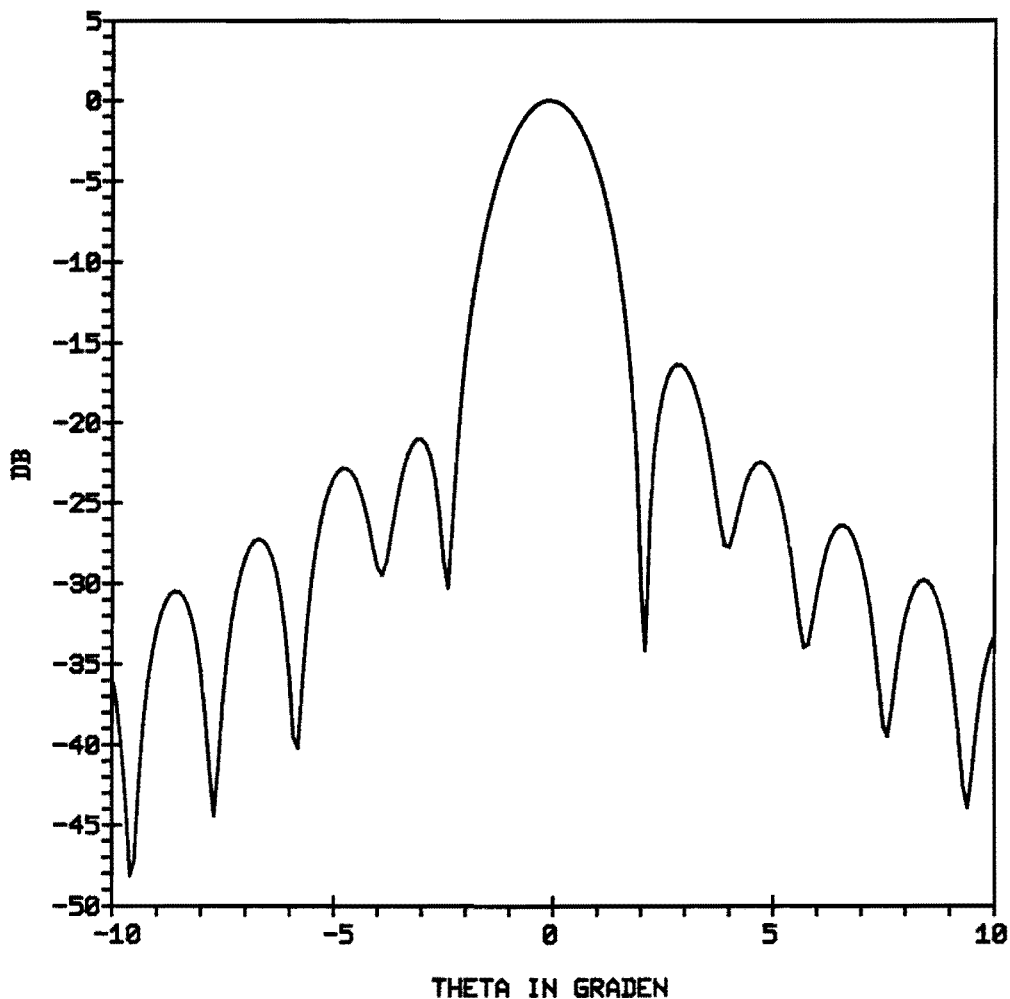
$$\frac{D}{\lambda} = \frac{2 \cdot a}{\lambda} = \frac{0.5}{0.0157} = 31.83$$

Indien de reflector uniform wordt belicht ($L=0$) dan dient de 3dB-bundelbreedte gelijk te zijn aan:

$$1.02 \frac{\lambda}{D} = 1.02 \cdot \frac{\lambda}{31.83\lambda} = 1.84^\circ$$

In figuur 26 is het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie ($\alpha=6.2^\circ$) gegeven indien het reflectoroppervlak uniform belicht wordt. Verder is gegeven: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=0^\circ$ en $L=0$.

STRALINGSDIAGRAM 6.2 GRADEN SCAN

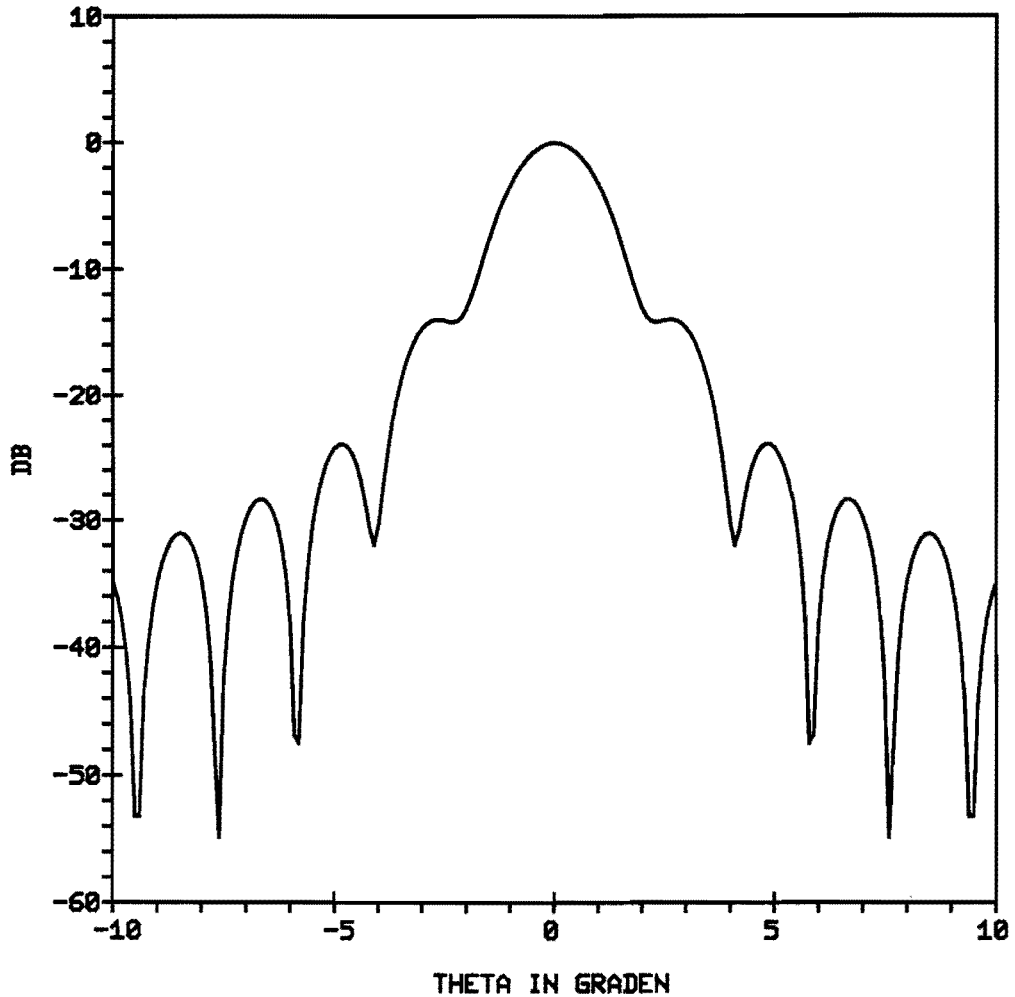


figuur 26. Het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=0^\circ$ en $L=0$.

Uit figuur 26 blijkt dat voor een uniform belichte reflector met $\alpha=6.2^\circ$ de hoogste eerste zijlus ligt op -16.5dB . Verder zien we dat de bundelbreedte in dit geval ongeveer gelijk is aan 1.9° . Merk verder op dat nu de Θ -hoeken gedefinieerd zijn voor het x"y"z"-coördinaatstelsel (zie fig. 23)

In figuur 27 is het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie ($\alpha=6.2^\circ$) gegeven indien het reflectoroppervlak uniform belicht wordt. Verder is gegeven: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=90^\circ$ en $L=0$.

STRALINGSDIAGRAM 6.2 GRADEN SCAN



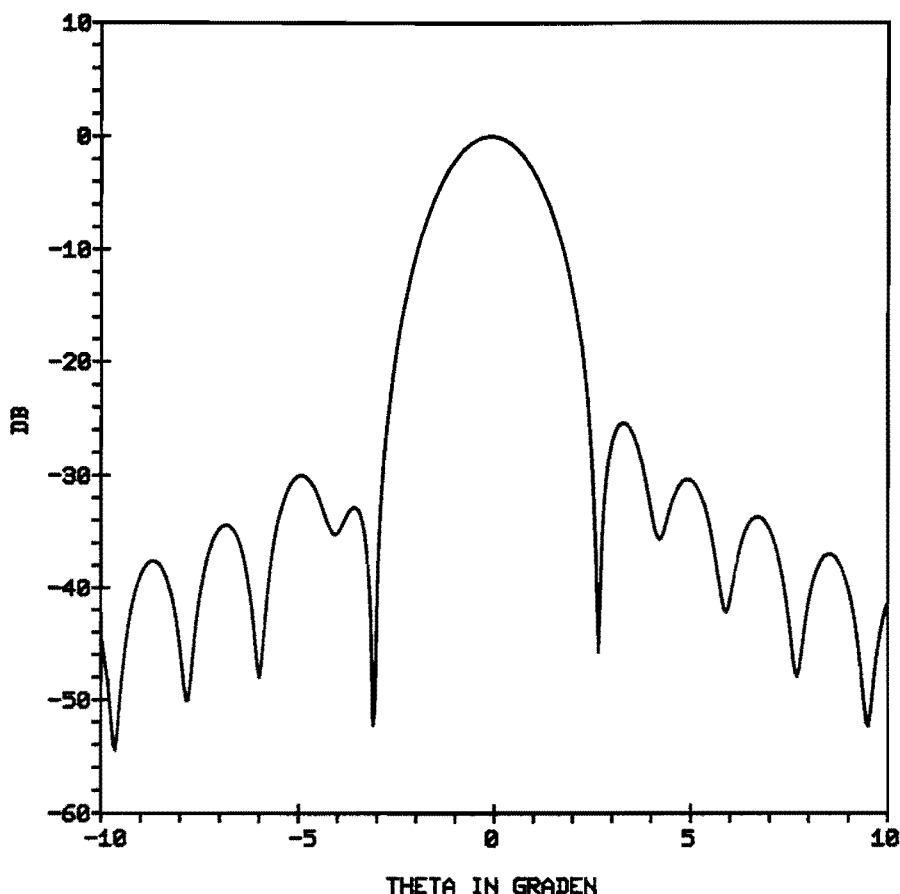
figuur 27. Het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=90^\circ$ en $L=0$.

Uit figuur 27 blijkt dat voor een uniform belichte reflector met $\alpha=6.2^\circ$ de eerste zijlus ligt op -14dB . Verder zien we dat de bundelbreedte in dit geval ook ongeveer gelijk is aan 1.9° .

Ook nu weer gaan we het reflectoroppervlak belichten met een meer realistische belichter. Omdat in de "scanned"-situatie ($\alpha=6.2^\circ$) de openingshoek van de belichter nagenoeg gelijk is als in de "unscanned"-situatie ($\alpha=0^\circ$), kiezen we ook nu weer voor $L=45$, wat inhoud dat de randbelichting ongeveer -11 dB is.

In figuur 28 is het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie ($\alpha=6.2^\circ$) gegeven indien de randbelichting ongeveer -11 dB is. Verder is gegeven: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=0^\circ$ en $L=45$.

STRALINGSDIAGRAM 6.2 GRADEN SCAN



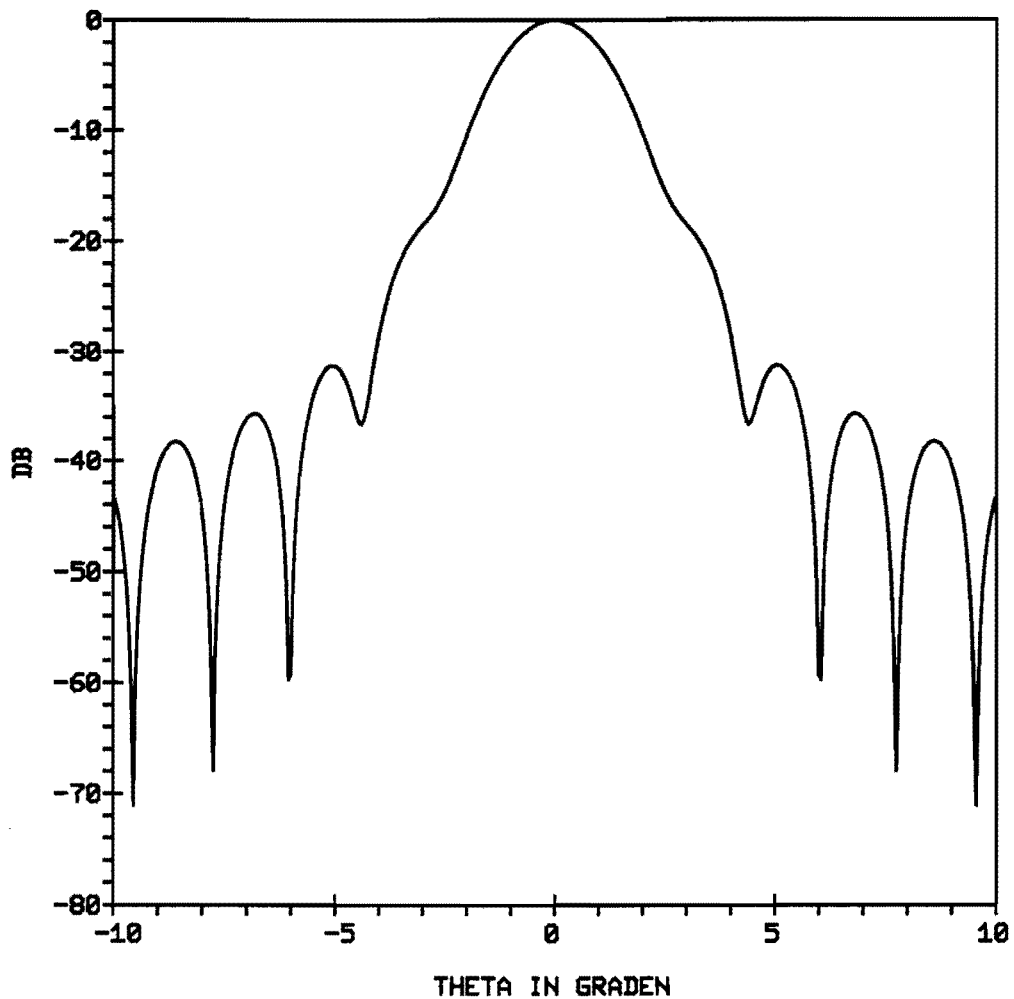
figuur 28. Het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=0^\circ$ en $L=45$.

Uit figuur 28 blijkt dat een randbelichting van ongeveer -11dB tot gevolg heeft dat de hoogste eerste zijlus van -16.5dB bij uniforme belichting naar -26dB gaat. De 3dB-bundelbreedte gaat van 1.9° bij uniforme belichting naar 2.1° .

Verder zien we in figuur 26 dat de signaalsterkte bij 6.2° (dit is de lokatie van het "unscanned"-brandpunt) ongeveer -32dB is. Tevens zien in figuur 10 voor de "unscanned"-situatie dat de signaalsterkte bij -6.2° (dit is de lokatie van het "scanned"-brandpunt) ongeveer -32dB is. Hieruit mogen we dus concluderen dat ruimschoots aan de gestelde eis van de "Carrier over Interference ratio" ($>23\text{dB}$) wordt voldaan.

In figuur 29 is het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie ($\alpha=6.2^\circ$) gegeven indien de randbelichting ongeveer -11 dB is. Verder is gegeven: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=90^\circ$ en $L=45$.

STRALINGSDIAGRAM 6.2 GRADEN SCAN



figuur 29. Het stralingsdiagram in de "scanned"-situatie met: $k=400$, $a=0.25$, $\phi=90^\circ$ en $L=45$.

Uit figuur 29 blijkt dat een randbelichting van ongeveer -11dB tot gevolg heeft dat de hoogste eerste zijlus van -14dB bij uniforme belichting naar -31.5dB gaat. De 3dB-bundelbreedte gaat van 1.9° bij uniforme belichting naar 2.3° . Ten gevolge van de fasefouten is nu de eigenlijke eerste zijlus geheel opgevuld waardoor deze niet afzonderlijk te onderscheiden is[9]. De eerste zijlus die nu op -39dB ligt is dus in feite de tweede zijlus.

H8. Conclusies en aanbevelingen

- * Scannen over de maximale hoeken van + en -30° blijkt met dit type "shaped"-reflectorantenne mogelijk.
- * Als we in plaats van een theoretische belichter met een uniform stralingsdiagram een meer praktische belichter met een randbelichting van ongeveer -11dB nemen, dan heeft dit tot gevolg dat het stralingsdiagram ten opzichte van de theoretische belichter aanzienlijk verbeterd wordt.
- * Bij het ontwerp voor het gelijktijdige ontvangst van twee TV-signalen, afkomstig van twee verschillende satellieten welke 6.2° uit elkaar staan, wordt ruimschoots aan de eis voldaan dat de "Carrier over Interference ratio" groter dan 23dB dient te zijn. De "Carrier over Interference ratio" is zelfs ongeveer gelijk aan 32dB. Hierbij dient wel opgemerkt te worden dat door tijdgebrek de kruispolarisatie component buiten beschouwing is gelaten.
- * Met deze "shaped"-reflectorantenne is het zelfs mogelijk om gelijktijdig meer dan twee verschillende satellieten te ontvangen.
- * Van dit nieuw type "shaped"-reflectorantenne dient de belichter relatief ver van het reflectoroppervlak geplaatst te worden [4]. Hierdoor dient de openingshoek van de belichter klein te zijn, waardoor de afmetingen van de belichter groot zijn. Dit heeft dan als nadeel dat er een grote apertuurblokkering optreedt.
- * Om apertuurblokkering van de belichter te voorkomen zou men van dit nieuw type "shaped"-reflectorantenne ook een "offset"-versie kunnen ontwerpen. Het ontwerp van het "offset"-reflectoroppervlak wordt besproken in het tweede deel van dit verslag.

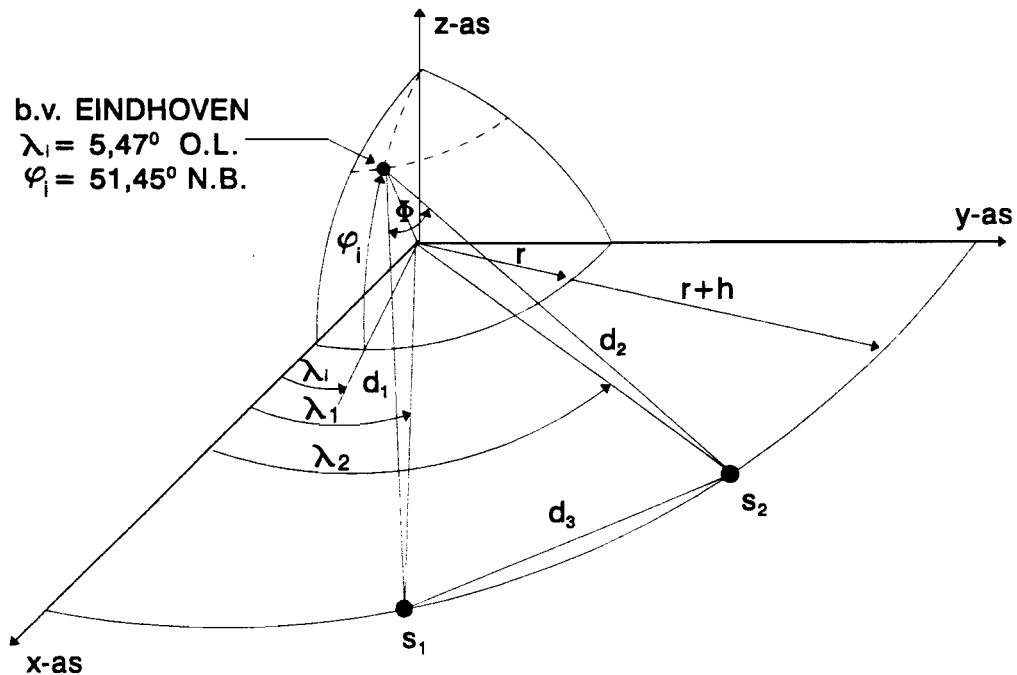
Literatuurlijst

- [1]: J. Ruze
Lateral-feed displacement in a paraboloid.
IEEE Trans. on Antennas and Propag. ,vol AP-13, Sept. 1965
- [2]: A.V. Mrstik
Scan limits off-axis fed parabolic reflectors.
IEEE Trans. on Antennas and Propag. ,vol AP-27, Sept. 1979
- [3]: C.M. Rappaport and W.P. Craig
High aperture efficiency symmetric reflector antennas with
up to 60 degree field of view.
IEEE Trans. on Antennas and Propag. ,vol 39, March 1991
- [4]: J.L.M. Buijnsters
Berekeningen aan een multibeam antenne met een grote zichthoek.
Stageverslag no. EM-12-94, Vakgroep Elektromagnetisme, Faculteit
Elektrotechniek, Technische Universiteit Eindhoven, Nederland, 1994
- [5]: Y. Rahmat-Samii
Useful coordinate transformations for antenna applications.
IEEE Trans. on Antennas and Propag. ,vol 27, July 1979
- [6]: J. Dijk, E.J. Maanders en M.H.A.J. Herben
Antennes en propagatie
Collegediktaat no. onbekend, Vakgroep Telecommunicatie, Faculteit
Elektrotechniek, Technische Universiteit Eindhoven, Nederland, 1987
- [7]: J.C. Arnbak, J. Dijk, M.H.A.J. Herben en J.T.A. Neessen
Radio en radar
Collegediktaat no. 5653, Vakgroep Telecommunicatie, Faculteit
Elektrotechniek, Technische Universiteit Eindhoven, Nederland, 1993
- [8]: Y. Rahmat-Samii and V. Galindo-Israel
Shaped reflector antenna analysis using the Jacobi-Bessel series.
IEEE Trans. on Antennas and Propag. ,vol AP-28, July 1980

- [9]: Silver
Microwave antenna theory and design
1949
- [10]: M.E.J. Jeuken
Elektromagnetische antennes 1
Collegediktaat no. onbekend, Vakgroep Elektromagnetisme, Faculteit
Elektrotechniek, Technische Universiteit Eindhoven, Nederland, 1988

Bijlage: Het verschil van twee satellietposities, uitgedrukt in een hoek Φ , gezien vanuit een willekeurig plaats op aarde.

Voor het berekenen van het verschil van de twee satellietposities, uitgedrukt in de hoek Φ , gezien vanuit een willekeurige plaats op aarde, wordt gebruik gemaakt van figuur 30.

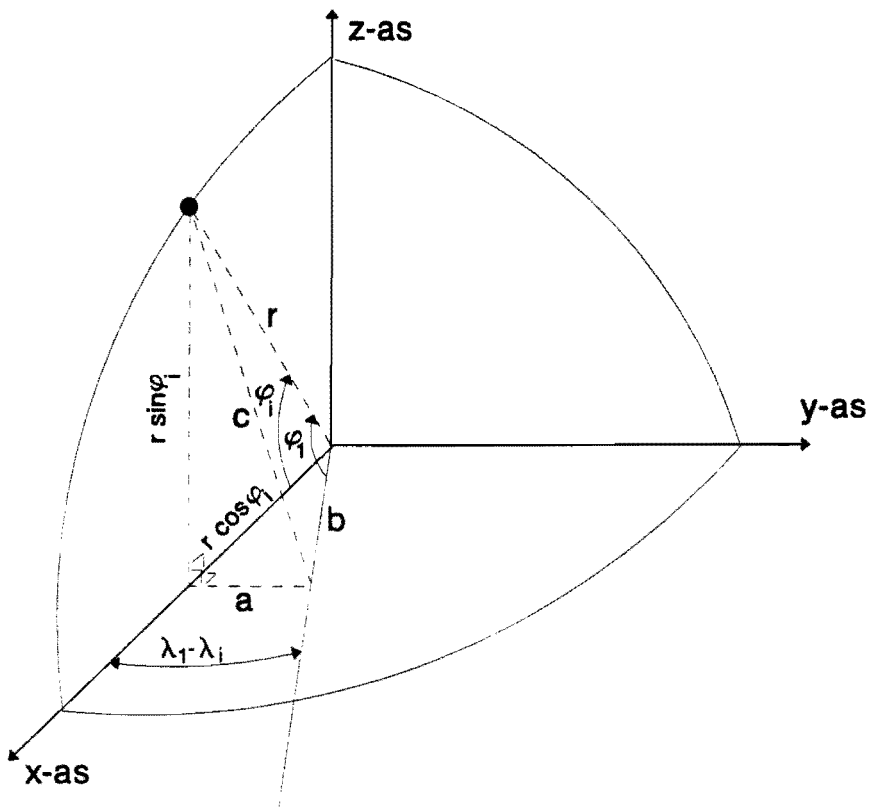


figuur 30. De aarde met de satellieten s_1 en s_2 .

Verklaring van de gebruikte symbolen:

- r : straal van de aarde ($r = 6378,16$ km)
- h : hoogte van de geostationaire baan ten opzichte van het aardoppervlak ($h = 35786,04$ km)
- s_1, s_2 : satellieten 1 en 2
- d_1, d_2 : de afstand van de positie op aarde tot respectievelijk satelliet 1 en 2.
- d_3 : de kortste afstand tussen satelliet 1 en 2
- λ_1, λ_2 : de positie van respectievelijk satelliet 1 en 2 ten opzichte van de meridiaan
- λ_i, φ_i : willkeurige positie op aarde

In figuur 30 zien we dat, indien we de afstanden d_1 , d_2 en d_3 kennen, we met behulp van de cosinusregel de hoek Φ kunnen berekenen. Vervolgens kijken we in figuur 31 alleen naar de aarde. Het is nu zaak om een uitdrukking voor de hoek φ_1 te vinden, omdat we daarmee de afstand d_1 kunnen berekenen.



figuur 31. De aarde

Met behulp van figuur 31 zien we dat geldt:

$$\cos(\lambda_1 - \lambda_i) = \frac{r \cos \varphi_i}{b} \rightarrow b = \frac{r \cos \varphi_i}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)} \quad \{98\}$$

$$\sin(\lambda_1 - \lambda_i) = \frac{a}{b} \rightarrow a = \sin(\lambda_1 - \lambda_i) \cdot \frac{r \cos \varphi_i}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)} = r \cos \varphi_i \cdot \tan(\lambda_1 - \lambda_i) \quad \{99\}$$

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{(r \sin \varphi_i)^2 + (r \cos \varphi_i \cdot \tan(\lambda_1 - \lambda_i))^2} \\ &= r \cdot \sqrt{(\sin \varphi_i)^2 + (\cos \varphi_i \cdot \tan(\lambda_1 - \lambda_i))^2} \end{aligned} \quad \{100\}$$

Met behulp van de cosinusregel berekenen we nu de hoek φ_1 .

$$\cos \varphi_1 = \frac{r^2 + b^2 - c^2}{2rb}$$

$$\begin{aligned}
\cos\varphi_1 &= \frac{r^2 + \left(\frac{r\cos\varphi_i}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)}\right)^2 - r^2((\sin\varphi_i)^2 + (\cos\varphi_i \cdot \tan(\lambda_1 - \lambda_i))^2)}{2r \cdot \frac{r\cos\varphi_i}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)}} \\
&= \frac{1 + \left(\frac{\cos\varphi_i}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)}\right)^2 - ((\sin\varphi_i)^2 + (\cos\varphi_i \cdot \tan(\lambda_1 - \lambda_i))^2)}{2 \cdot \frac{\cos\varphi_i}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)}} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \frac{\cos\varphi_i}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)}} + \frac{\left(\frac{\cos\varphi_i}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)}\right)^2}{2 \cdot \frac{\cos\varphi_i}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)}} - \frac{(\sin\varphi_i)^2}{2 \cdot \frac{\cos\varphi_i}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)}} - \frac{\left(\cos\varphi_i \cdot \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_i)}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)}\right)^2}{2 \cdot \frac{\cos\varphi_i}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)}} \\
&= \frac{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)}{2\cos\varphi_i} + \frac{\cos\varphi_i}{2\cos(\lambda_1 - \lambda_i)} - \frac{(\sin\varphi_i)^2 \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_i)}{2\cos\varphi_i} - \frac{\cos\varphi_i (\sin(\lambda_1 - \lambda_i))^2}{2(\cos(\lambda_1 - \lambda_i))^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)}{\cos\varphi_i} (1 - (\sin\varphi_i)^2) + \frac{1}{2} \frac{\cos\varphi_i}{\cos(\lambda_1 - \lambda_i)} (1 - \sin(\lambda_1 - \lambda_i)^2) \\
&= \frac{1}{2} \cos\varphi_i \cos(\lambda_1 - \lambda_i) + \frac{1}{2} \cos\varphi_i \cos(\lambda_1 - \lambda_i) \\
\cos\varphi_1 &= \cos\varphi_i \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_i) \tag{101}
\end{aligned}$$

Als we nu vanuit de positie op aarde een loodlijn trekken op de lijn tussen het middelpunt van de aarde en satellietpositie s_i , dan vinden we voor de afstand d_1 :

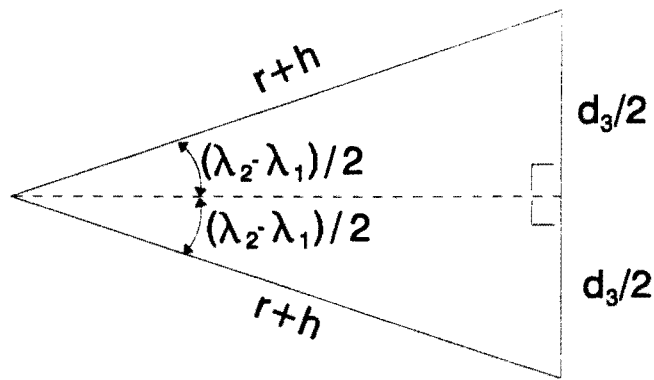
$$\begin{aligned}
d_1^2 &= (r\sin\varphi_1)^2 + (r+h-r\cos\varphi_1)^2 \\
&= r^2(\sin\varphi_1)^2 + (r+h)^2 - 2r(r+h)\cos\varphi_1 + r^2(\cos\varphi_1)^2 \\
&= (r+h)^2 + r^2 - 2r(r+h)\cos\varphi_1 \\
&= (r+h)^2 + r^2 - 2r(r+h)\cos\varphi_i \cos(\lambda_1 - \lambda_i) \tag{102}
\end{aligned}$$

De afstand d_2 vinden we op geheel analoge wijze als d_1 :

$$d_2 = (r+h)^2 + r^2 - 2r(r+h)\cos\varphi_i \cos(\lambda_2 - \lambda_i) \tag{103}$$

Voor het afleiden van de afstand d_3 maken we gebruik van figuur 32:

$$\begin{aligned}
\sin((\lambda_2 - \lambda_1)/2) &= \frac{d_3/2}{r+h} = \frac{d_3}{2(r+h)} \\
d_3 &= 2(r+h)\sin\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right) \tag{104}
\end{aligned}$$



figuur 32. Bepaling van de afstand d_3 .

Met behulp van de cosinusregel vinden we tenslotte voor de hoek Φ :

$$\cos \Phi = \frac{d_1^2 + d_2^2 - d_3^2}{2d_1 d_2} \quad \{105\}$$

rekenvoorbeeld:

Geg: De satellieten s_1 en s_2 bevinden zich op de posities:

$$\lambda_1 = 13^\circ, \quad \lambda_2 = 19.2^\circ$$

Gevr: Het verschil van de twee satellietposities, uitgedrukt in de hoek Φ , gezien vanuit de volgende twee plaatsen op aarde:

- a. Eindhoven
- b. Dublin

Opl: a. De coördinaten van Eindhoven zijn: $\lambda_i = 5.47^\circ \text{ O.L.}$
 $\varphi_i = 51.45^\circ \text{ N.B.}$

$$d_1^2 = 1.486 \cdot 10^9 \rightarrow d_1 = 38551.1 \text{ km}$$

$$d_2^2 = 1.493 \cdot 10^9 \rightarrow d_2 = 38637.9 \text{ km}$$

$$d_3 = 4560.4 \text{ km}$$

$$\cos \Phi = 0.993 \rightarrow \Phi = 6.77^\circ$$

b. De coördinaten van Dublin zijn: $\lambda_i = 6.29^\circ \text{ W.L.}$
 $\varphi_i = 53.34^\circ \text{ N.B.}$

$$d_1^2 = 1.5155 \cdot 10^9 \rightarrow d_1 = 38929.5 \text{ km}$$

$$d_2^2 = 1.5286 \cdot 10^9 \rightarrow d_2 = 39097.6 \text{ km}$$

$$d_3 = 4560.4 \text{ km}$$

$$\cos \Phi = 0.993 \rightarrow \Phi = 6.70^\circ$$

INHOUDSOPGAVE DEEL 2.

| | | |
|-----------------|--|----|
| SAMENVATTING | | 2 |
| H1 | Inleiding | 3 |
| H2 | Algemene omschrijving van het "offset"-reflectoroppervlak. | 4 |
| H3 | Ontwerp van het 2-dimensionale "scan"-profiel van het "offset"-reflectoroppervlak. | 6 |
| §3.1 | Bepaling van de coördinaten voor de "scanned"-brandpunten. | 6 |
| §3.2 | Afleiding van de vergelijking voor de verdraaide parabolöide. | 8 |
| §3.3 | Bepaling van de coëfficiënten r_1 en r_2 . | 12 |
| H4 | Ontwerp van het totale 3-dimensionale "offset"-reflectoroppervlak. | 15 |
| §4.1 | Bepaling van de coëfficiënten N,T en U. | 15 |
| §4.2 | Bepaling van de coördinaten voor het "unscanned"-brandpunt. | 18 |
| §4.3 | Bepaling van de resterende coëfficiënten van het polynoom. | 22 |
| §4.3.1 | Bepaling van de coëfficiënten P en R. | 22 |
| §4.3.2 | Bepaling van de coëfficiënten Q,S en W. | 32 |
| H5 | Conclusies en aanbevelingen | 37 |
| Literatuurlijst | | 38 |
| Bijlage | Bewijs dat de kromtestraal van de parabol in zijn tophoek twee maal de brandpuntsafstand is. | 39 |

SAMENVATTING

In dit tweede deel wordt het reflectoroppervlak bepaald voor een "offset"-reflectorantenne met grote zichthoek. Om de apertuurblokkering van de symmetrische "shaped"-reflectorantenne te voorkomen, wordt er van dit type reflectorantenne een "offset"-versie ontworpen. Het reflectoroppervlak dient voor een maximale zichthoek van 60 graden te worden geoptimaliseerd. Ook dienen we daarbij de optimale posities van de belichters te bepalen. Net als bij het symmetrische "shaped"-reflectoroppervlak wordt ook nu het "offset"-reflector beschreven door een functie $z(x,y)$, waarbij de functie $z(x,y)$ een veelterm in x en y voorstelt. De coëfficiënten in deze veelterm dienen ook nu zodanig bepaald te worden, dat de fasefouten in het apertuurvlak minimaal zijn.

Na een algemene beschrijving van het "offset"-reflectoroppervlak wordt het 2-dimensionale "scan"-vlak van het reflectoroppervlak bepaald. Daarna wordt het totale 3-dimensionale reflectoroppervlak bepaald. Tenslotte worden in een tweetal figuren op 3-dimensionale wijze de fasefouten van de verschillende bundels in het apertuurvlak weergegeven.

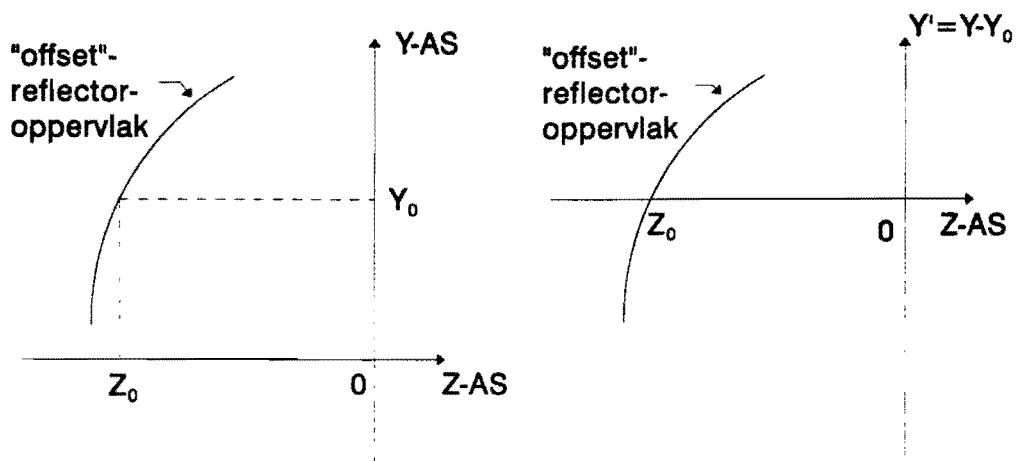
H1. Inleiding

Om gelijktijdig meerdere satellieten met een enkelvoudige reflectorantenne te kunnen ontvangen, dient deze reflectorantenne een grote zichthoek te bezitten. In deel 1 van dit verslag wordt een symmetrische "shaped"-reflectorantenne beschreven met een zichthoek tot 60 graden. Het grote nadeel van dit type "shaped"-reflectorantenne is dat de belichter voor de reflector staat hetgeen resulteert in een grote apertuurblokkering. Om nu deze apertuurblokkering te voorkomen, wordt er van dit nieuw type "shaped"-reflectorantenne een "offset"-versie ontworpen.

Doel van dit onderdeel van de studie is nu om het meest optimale "offset"-reflectoroppervlak af te leiden bij een maximale zichthoek van 60 graden. Tevens dienen we daarbij de posities van de verschillende belichters te bepalen. Om tot dit optimale "offset"-reflectoroppervlak te komen wordt er eerst in het vlak van "scanning" het meest optimale 2-dimensionale profiel bepaald. Daarna wordt het totale 3-dimensionale reflectoroppervlak bepaald waarbij de fasefouten in het apertuurvlak geminimaliseerd worden. Als voornaamste bron van informatie bij dit onderzoek is gebruik gemaakt van het artikel: " A high aperture efficiency wide-angle scanning offset reflector antenna" door William P. Craig, Carey M. Rappaport en Jeffrey S. Mason uit "IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol 41, no 11, november 1993.

H2. Algemene omschrijving van het "offset"-reflectoroppervlak.

Om apertuurblokkering van de belichters tegen te gaan, wordt het gehele reflectoroppervlak boven het vlak $y=0$ geplaatst, terwijl de belichters zich in de nabijheid van het vlak $y=0$ bevinden. Met behulp van de coördinaten transformatie $(x', y') = (x, y - y_0)$ is het nu mogelijk om het reflectoroppervlak te beschrijven ten opzichte van het vlak $y = y_0$ ofwel $y' = 0$, waarbij y_0 de "offset"-hoogte voorstelt. Deze coördinaten transformatie wordt in figuur 1 weergegeven.



figuur 1. De coördinaten transformatie naar $y = y_0$.

Het totale 3-dimensionale "offset"-reflectoroppervlak wordt beschreven met de volgende vergelijking:

$$z_{off} = z_{s0} + z_{s1} + z_{s2} \quad \{1\}$$

met:

$$z_{s0} = z_0 + I_1 x^2 + I_2 x^4 \quad \{1a\}$$

$$z_{s1} = P y'^2 + Q x^2 y'^2 + R y'^4 + S x^4 y'^2 \quad \{1b\}$$

$$z_{s2} = N y' + T x^2 y' + U x^4 y' + W x^2 y'^3 \quad \{1c\}$$

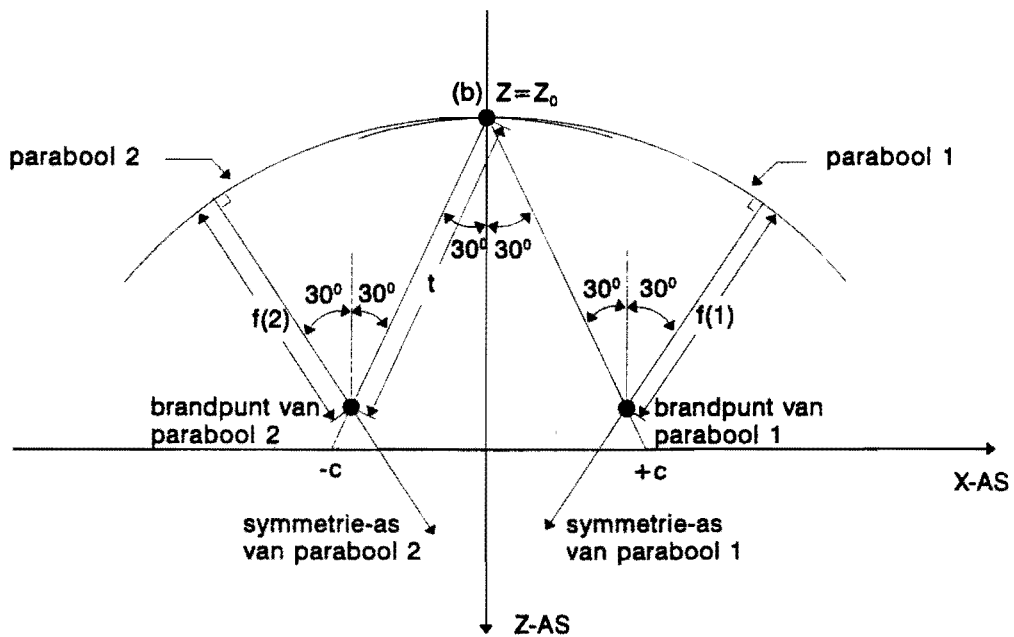
De polynomen z_{s0} en z_{s1} bezitten net als bij de symmetrische "shaped"-reflectorantenne [1] alleen even termen van x en y' . Zouden we echter deze symmetrische "shaped"-reflectorantenne als "offset"-antenne willen gebruiken, dan zal dit leiden tot grote fasefouten in het apertuurvlak. Het polynoom z_{s2} met oneven termen van y' heeft dan ook tot taak om in de "offset"-situatie deze fasefouten te minimaliseren.

Bij het ontwerp van deze "offset"-reflectorantenne wordt er, net als bij de symmetrische-reflectorantenne, eerst uitgegaan van twee parabolen. Om tot een gezichtsveld van 60° te komen, worden deze parabolen onder hoeken van $\alpha = +30^\circ$ en $\alpha = -30^\circ$ ten opzichte van de z -as verdraaid.

Verder dienen de parabolen aan de volgende voorwaarde te voldoen:

- De parabolen gaan beide door het punt $(y, z) = (y_0, z_0)$.
- De afgeleide dz/dx van beide parabolen dienen in dit punt $(y, z) = (y_0, z_0)$ gelijk aan nul te zijn.
- Het brandpunt van de parabool welke over $-\alpha$ verdraaid is, moet liggen tussen de punten $(y, z) = (c, 0)$ en $(y, z) = (y_0, z_0)$.
- Het brandpunt van de parabool welke over $+\alpha$ verdraaid is, moet liggen tussen de punten $(y, z) = (-c, 0)$ en $(y, z) = (y_0, z_0)$.

Deze twee parabolen welke de basis vormen voor het "offset"-reflectoroppervlak zijn voor het vlak $y = y_0$ te zien in figuur 2.



figuur 2. De twee verdraaide parabolen in het vlak $y = y_0$.

Verklaring voor de gebruikte symbolen uit figuur 2.

- $f(1)$ en $f(2)$ zijn de brandpuntsafstanden van respectievelijk parabool 1 en parabool 2.
- z_0 is de z -coördinaat van zowel het snijpunt van de twee parabolen als ook de tophoek van het "offset"-reflectoroppervlak, zie formule 1.
- "t" is de afstand tussen het brandpunt van de parabool en de tophoek van het "offset"-reflectoroppervlak.
- Alle afmetingen van het reflectoroppervlak zijn genormeerd op de afstand $b^2 + c^2 = 1$

H3. Ontwerp van het 2-dimensionale "scan"-profiel van het "offset"-reflector oppervlak.

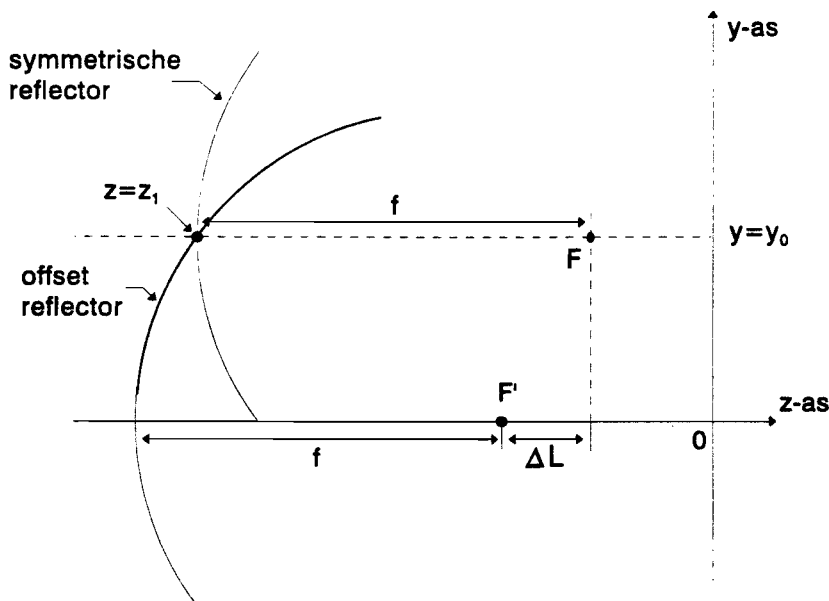
Het 2-dimensionale "scan"-profiel in het vlak $y = y_0$ ofwel $y' = 0$, wordt bepaald door het polynoom z_{s0} (formule 1a). Daarbij dienen we dus de coëfficiënten r_1 en r_2 van het polynoom z_1 te bepalen. Voor we hier echter mee kunnen beginnen dienen we eerst een vergelijking op te stellen van de verdraaide parabool. Doordat de tweede parabool spiegelsymmetrisch om de z-as ligt, zie figuur 1, laten we deze parabool even buiten beschouwing. Omdat we bij het opstellen van de vergelijking voor de verdraaide parabool de coördinaten van het brandpunt nodig hebben, dienen we deze nu eerst te bepalen.

§3.1 Bepaling van de coördinaten voor de "scanned"-brandpunten.

We kunnen afleiden [2] dat indien de reflector symmetrisch om $y'=0$ ligt dat de brandpunten van de verdraaide parabolen dan komen te liggen op:

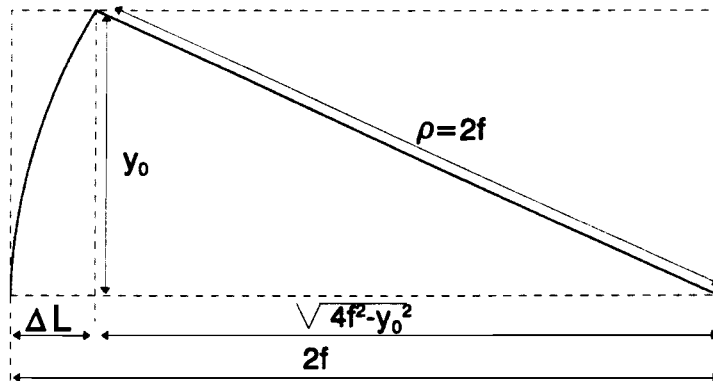
- $(x, y', z) = (ct, 0, z_0 + bt)$ voor scanning over $-\alpha$
- $(x, y', z) = (-ct, 0, z_0 + bt)$ voor scanning over $+\alpha$

Omdat we hier echter niet te maken hebben met een symmetrische reflector maar met een "offset"-reflector, zullen de "scanned"-brandpunten komen te liggen in het vlak $y' = -y_0$, ofwel $y=0$. Om ervoor te zorgen dat de "offset"-parabool het punt $(y, z) = (y_0, z_1)$ blijft doorsnijden, zal het brandpunt van de "offset"-parabool over zijn eigen symmetrie-as in de richting van zijn tophoek (y_0, z_1) over een lengte ΔL verschoven moeten worden, zie figuur 3.



figuur 3. De symmetrie van de symmetrische reflector en van de offset reflector.

Indien y_0 klein genoeg is, dan mogen we aannemen dat we in het gebied van de parabool blijven waarvoor geldt dat de kromtestraal ρ van de parabool in zijn tophoek twee maal zijn eigen brandpuntsafstand is. Zie bijlage 1 voor het bewijs. Voor de afleiding van ΔL maken we gebruik van figuur 4.

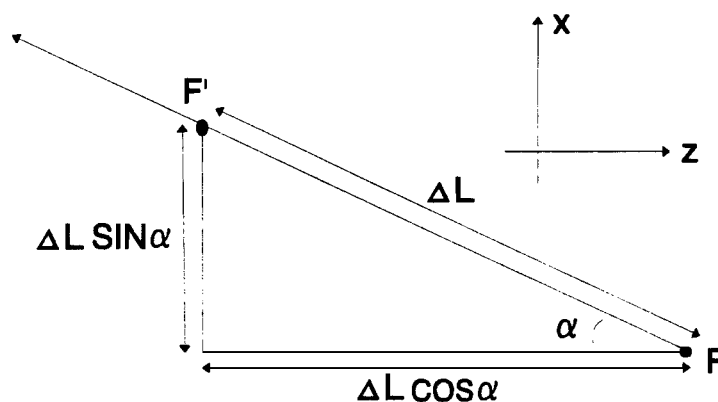


figuur 4. Hulpfiguur voor het bepalen van ΔL .

Uit figuur 4 zien we dat geldt:

$$\begin{aligned} \Delta L &= 2f - \sqrt{4f^2 - y_0^2} = 2f - 2f \cdot \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{4f^2}} \\ &\approx 2f - 2f \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{y_0^2}{4f^2} \right) \quad \text{mits} \quad \left| \frac{y_0}{2f} \right| \ll 1 \\ &= 2f - 2f + \frac{y_0^2}{4f} = \frac{y_0^2}{4f} \end{aligned} \quad (2)$$

Voor het bepalen van de coördinaten van het nieuwe brandpunt maken we gebruik van figuur 5.



figuur 5. Verschuiving van het "scanned"-brandpunt.

De coördinaten van het nieuwe "scanned"-brandpunt F' zijn nu:

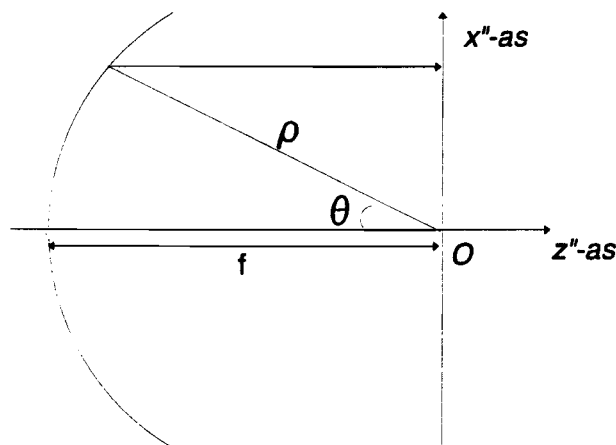
$$x\text{-coördinaat} = ct + \sin\alpha \cdot \frac{y_0^2}{4f} = ct + \frac{c \cdot y_0^2}{4f} \quad \{3a\}$$

$$y\text{-coördinaat} = 0 \quad \{3b\}$$

$$z\text{-coördinaat} = z_0 + bt - \cos\alpha \cdot \frac{y_0^2}{4f} = z_0 + bt - \frac{b \cdot y_0^2}{4f} \quad \{3c\}$$

§3.2 Afleiding van de vergelijking voor de verdraaide paraboloid.

Nu we de coördinaten van het "scanned"-brandpunt kennen, zijn we in staat om de vergelijking voor de verdraaide paraboloid af te leiden. We beginnen de afleiding met een niet verdraaide paraboloid waarvan de z-as symmetrie-as is. Omdat in de afleiding twee maal een coördinaten transformatie plaats vindt, beginnen we de afleiding in het assenstelsel met de coördinaten $x''y''z''$. Deze paraboloid is gegeven in figuur 6.



Figuur 6. Een paraboloid

Als we gebruik maken van de eigenschap dat stralen vanuit het brandpunt van de parabool in de apertuur een equifase-vlak veroorzaken, dan geldt:

$$\rho + \rho \cos\theta = 2f \text{ ofwel:}$$

$$\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} + (-z'') = 2f$$

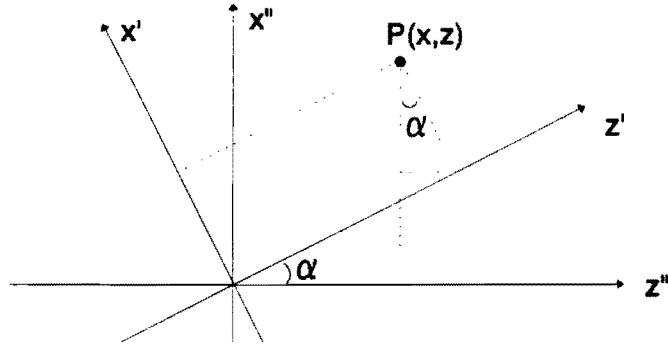
$$\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = 2f + z''$$

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = (2f + z'')^2$$

$$x''^2 + y''^2 = 4fz''$$

$$-z'' = \frac{x''^2 + y''^2}{4f} - f \quad \{4\}$$

Deze paraboloiden gaan we vervolgens draaien over een hoek $-\alpha$, waarbij de y -as de draaiingsas is. Dit is ook te realiseren door het assenstelsel over een hoek α te verdraaien. Hiermee ontstaat het nieuwe assenstelsel $x'y'z'$ waarvan $y' = y''$ omdat de y -as de draaiingsas is, en dus ongewijzigd blijft. De coördinaten transformatie is af te leiden uit figuur 6.



figuur 7. Coördinaten transformatie

$$\begin{aligned} x'' &= z' \sin \alpha + x' \cos \alpha & \rightarrow & \quad x' = x'' \cos \alpha + z' \sin \alpha \\ z'' &= z' \cos \alpha - x' \sin \alpha & \rightarrow & \quad z' = -x'' \sin \alpha + z'' \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} \quad \{5\}$$

Vergelijking van de paraboloid t.o.v. de oude basis $(x''y''z'')$:

$$x''^2 + y''^2 - 4fz'' - 4f^2 = 0$$

Vergelijking van de paraboloid t.o.v. de nieuwe basis $(x'y'z')$:

$$\begin{aligned} (x' \cos \alpha + z' \sin \alpha)^2 + y'^2 - 4f(-x' \sin \alpha + z' \cos \alpha) - 4f^2 &= 0 \\ x'^2 \cos^2 \alpha + 2x'z' \sin \alpha \cos \alpha + z'^2 \sin^2 \alpha + y'^2 + 4fx' \sin \alpha - 4fz' \cos \alpha - 4f^2 &= 0 \\ (\sin^2 \alpha)z'^2 + (2\sin \alpha \cos \alpha x' - 4f \cos \alpha)z' + \cos^2 \alpha x'^2 + y'^2 + 4f \sin \alpha x' - 4f^2 &= 0 \end{aligned} \quad \{6\}$$

Substitutie van $\cos \alpha = b$ en $\sin \alpha = c$ levert:

$$\begin{aligned} c^2 z'^2 + (2bcx' - 4fb)z' + b^2 x'^2 + y'^2 + 4fcx' - 4f^2 &= 0 \\ z'_{1,2} &= \frac{-2bcx' + 4fb \pm \sqrt{(2bcx' - 4fb)^2 - 4c^2(b^2 x'^2 + y'^2 + 4fcx' - 4f^2)}}{2c^2} \end{aligned} \quad \{7\}$$

Onder het wortelteken:

$$4b^2 c^2 x'^2 - 16fb^2 cx' + 16f^2 b^2 - 4b^2 c^2 x'^2 - 4c^2 y'^2 - 16fc^3 x' + 16f^2 c^2$$

Met gebruik van $b^2+c^2 = 1$ krijgen we:

$$-16fcx' - 4c^2y'^2 + 16f^2$$

De totale wortelvergelijking wordt nu:

$$z'_{1,2} = \frac{-2bcx' + 4fb \pm \sqrt{-16fcx' + 16f^2 - 4c^2y'^2}}{2c^2}$$

$$z'_{1,2} = \frac{-bx'}{c} + \frac{2fb}{c^2} \pm \sqrt{-\frac{4fx'}{c^3} + \frac{4f^2}{c^4} - \frac{y'^2}{c^2}} \quad \{8\}$$

Nu verplaatsen we de oorsprong zodanig, dat geldt:

$$x' = x - x_f \quad \{9a\}$$

$$y' = y \quad \{9b\}$$

$$z' = z - z_f \quad \{9c\}$$

Met $(x_f, 0, z_f)$ als brandpunt van de paraboloid.

$$z - z_f = \frac{-b(x - x_f)}{c} + \frac{2fb}{c^2} \pm \sqrt{-\frac{4f(x - x_f)}{c^3} + \frac{4f^2}{c^4} - \frac{y^2}{c^2}}$$

$$z(x, y, t) = z_t(x, y) = z_f - \frac{bx}{c} + \frac{bx_f}{c} + \frac{2fb}{c^2} \pm \sqrt{-\frac{4fx}{c^3} + \frac{4fx_f}{c^3} + \frac{4f^2}{c^4} - \frac{y^2}{c^2}} \quad \{10\}$$

Bij de afleiding van de brandpuntsafstand "f" passen we de volgende substitutie toe:

$$x_f = ct \text{ en } z_f = b(t-1) \text{ levert:}$$

$$z_t(x, y) = 2bt - b - \frac{bx}{c} + \frac{2fb}{c^2} \pm \sqrt{-\frac{4fx}{c^3} + \frac{4ft}{c^2} + \frac{4f^2}{c^4} - \frac{y^2}{c^2}} \quad \{11\}$$

De eerste afgeleide van $z_t(x, y)$ naar x , door het punt $(0, 0, -b)$ dient gelijk aan nul te zijn:

$$\frac{\partial z_t}{\partial x} = -\frac{b}{c} \pm \frac{1}{2} \left(-\frac{4fx}{c^3} + \frac{4ft}{c^2} + \frac{4f^2}{c^4} - \frac{y^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{-4f}{c^3} \right)$$

$$\frac{\partial z_t}{\partial x}(0, 0, -b) = -\frac{b}{c} \pm \frac{1}{2} \left(\frac{4ft}{c^2} + \frac{4f^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{-4f}{c^3} \right) = 0 \quad \{12\}$$

Na formule 12 herschreven te hebben krijgen we:

$$\pm \frac{1}{2} \frac{\frac{-4f}{c^3}}{\sqrt{\frac{4ft}{c^2} + \frac{4f^2}{c^4}}} = \frac{b}{c}$$

$$\pm \frac{b}{c} \sqrt{\frac{ft}{c^2} + \frac{f^2}{c^4}} = -\frac{f}{c^3}$$

$$\frac{b^2}{c^2} \left(\frac{ft}{c^2} + \frac{f^2}{c^4} \right) = \frac{f^2}{c^6}$$

$$\frac{c^2 b^2 ft}{c^6} + \frac{b^2 f^2}{c^6} = \frac{f^2}{c^6}$$

$$c^2 b^2 ft + b^2 f^2 - f^2 = 0$$

$$f^2(b^2 - 1) + b^2 c^2 t f = 0$$

$$f(f(b^2 - 1) + b^2 c^2 t) = 0$$

$$f(b^2 - 1) + b^2 c^2 t = 0$$

$$f = \frac{-b^2 c^2 t}{b^2 - 1} = \frac{-b^2 c^2 t}{-c^2} = b^2 t$$

{13}

We dienen nu de coördinaten van het brandpunt van de "offset"-parabool:

$$x_f = ct + \frac{c y_0^2}{4F}, \quad y_f = 0 \quad \text{en} \quad z_f = z_0 + bt - \frac{b y_0^2}{4F}$$

en de brandpuntsafstand $f = b^2 t$ te substitueren in $z_f(x,y)$.

Onder het wortelteken krijgen we nu:

$$-\frac{4fx}{c^3} + \frac{4fx_f}{c^3} + \frac{4f^2}{c^4} - \frac{y^2}{c^2} =$$

$$-\frac{4b^2 tx}{c^3} + \frac{4b^2 t}{c^3} \left(ct + \frac{c y_0^2}{4b^2 t} \right) + \frac{4b^4 t^2}{c^4} - \frac{y^2}{c^2} =$$

$$-\frac{4b^2 tx}{c^3} + \frac{4b^2 ct^2}{c^3} + \frac{4b^2 t c y_0^2}{4b^2 t c^3} + \frac{4b^4 t^2}{c^4} - \frac{y^2}{c^2} =$$

$$\frac{4b^2 t^2}{c^4} (b^2 + c^2) - \frac{4b^2 tx}{c^3} + \frac{y_0^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2} =$$

$$-\frac{4fx}{c^3} + \frac{4fx_f}{c^3} + \frac{4f^2}{c^4} - \frac{y^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{4b^2t^2}{c^2} - \frac{4b^2tx}{c} + y_0^2 - y^2 \right)$$

Buiten het wortelteken krijgen we nu:

$$\begin{aligned} z_f - \frac{bx}{c} + \frac{bx_f}{c} + \frac{2fb}{c^2} &= z_0 + bt - \frac{by_0^2}{4b^2t} - \frac{bx}{c} + \frac{b}{c} \left(ct + \frac{cy_0^2}{4b^2t} \right) + \frac{2b^2tb}{c^2} \\ &= z_0 + bt - \frac{y_0^2}{4bt} - \frac{bx}{c} + bt + \frac{y_0^2}{4bt} + \frac{2b^3t}{c^2} \\ &= z_0 + \frac{2bt}{c^2}(b^2 + c^2) - \frac{bx}{c} = z_0 + b \left(\frac{2t}{c^2} - \frac{x}{c} \right) \end{aligned}$$

De totale vergelijking voor $z_t(x,y)$ wordt nu:

$$z_t(x,y) = z_0 + b \left(\frac{2t}{c^2} - \frac{x}{c} \right) - \frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{2bt}{c} \right)^2 \left(1 - \frac{cx}{t} \right) + y_0^2 - y^2} \quad \{14\}$$

§3.3 Bepaling van de coëfficiënten r_1 en r_2 .

Het polynoom welke de twee verdaaide parabolen in het vlak $y'=0$ moet benaderen luidt:

$$z_{s0} = z_0 + r_1 x^2 + r_2 x^4 \quad \{1a\}$$

De coëfficiënten r_1 en r_2 worden nu berekend m.b.v. de methode van de kleinste kwadraten.

Het interval van x wordt op 60 regelmatige plaatsen bemonsterd. Het verschil tussen $z_{s0}(x_i)$ en $z_t(x_i,y)$ dient zo klein mogelijk te zijn.

$$z_0 + r_1 x_1^2 + r_2 x_1^4 - z_t(x_1) = f_1$$

$$z_0 + r_1 x_2^2 + r_2 x_2^4 - z_t(x_2) = f_2$$

$$z_0 + r_1 x_3^2 + r_2 x_3^4 - z_t(x_3) = f_3$$

⋮

$$z_0 + r_1 x_i^2 + r_2 x_i^4 - z_t(x_i) = f_i$$

⋮

$$z_0 + r_1 x_{60}^2 + r_2 x_{60}^4 - z_t(x_{60}) = f_{60}$$

$f_1, f_2, f_3, \dots, f_i, \dots, f_{60}$ heten de residuen.

minimaal moet zijn: $(f_1)^2 + (f_2)^2 + \dots + (f_{60})^2$

$$(f_1)^2 + (f_2)^2 + \dots + (f_{60})^2 = \varphi(r_1, r_2)$$

φ minimaliseren $\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r_1} = 0$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial r_2} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial r_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial r_1} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_{60}} \cdot \frac{\partial f_{60}}{\partial r_1} \\ &= 2f_1 x_1^2 + 2f_2 x_2^2 + \dots + 2f_{60} x_{60}^2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^{60} f_i x_i^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r_2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial r_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial r_2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_{60}} \cdot \frac{\partial f_{60}}{\partial r_2} \\ &= 2f_1 x_1^4 + 2f_2 x_2^4 + \dots + 2f_{60} x_{60}^4 = 2 \cdot \sum_{i=1}^{60} f_i x_i^4 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_1} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{60} f_i x_i^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{60} f_i x_i^2 = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_2} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{60} f_i x_i^4 = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{60} f_i x_i^4 = 0$$

substitutie van: $f_i = z_0 + r_1 x_i^2 + r_2 x_i^4 - z_i(x_i)$ levert:

$$\sum_{i=1}^{60} (z_0 + r_1 x_i^2 + r_2 x_i^4 - z_i(x_i)) x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{60} (z_0 + r_1 x_i^2 + r_2 x_i^4 - z_i(x_i)) x_i^4 = 0$$

$$\text{ofwel: } z_0 \sum_{i=1}^{60} x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{60} x_i^4 \right) r_1 + \left(\sum_{i=1}^{60} x_i^6 \right) r_2 = \sum_{i=1}^{60} x_i^2 \cdot z_i(x_i) \quad \{15\}$$

$$z_0 \sum_{i=1}^{60} x_i^4 + \left(\sum_{i=1}^{60} x_i^6 \right) r_1 + \left(\sum_{i=1}^{60} x_i^8 \right) r_2 = \sum_{i=1}^{60} x_i^4 \cdot z_i(x_i) \quad \{16\}$$

We houden dus twee vergelijkingen over met twee onbekende r_1 en r_2 .

Om de vergelijkingen overzichtelijk te houden, maken we gebruik van de volgende definities:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{60} x_i^2, \quad a_2 = \sum_{i=1}^{60} x_i^4, \quad a_3 = \sum_{i=1}^{60} x_i^6, \quad a_4 = \sum_{i=1}^{60} x_i^8$$

$$b_1 = \sum_{i=1}^{60} x_i^2 z_i(x_i) - z_0 a_1, \quad b_2 = \sum_{i=1}^{60} x_i^4 z_i(x_i) - z_0 a_2$$

De vergelijkingen {15} en {16} worden nu:

$$r_1 a_2 + r_2 a_3 = b_1 \quad \{17\}$$

$$r_1 a_3 + r_2 a_4 = b_2 \quad \{18\}$$

We vermenigvuldigen vgl.{17} met a_2/a_1 en trekken deze vervolgens af van vgl.{18}.

Hierdoor houden we de volgende 2 vergelijkingen over.

$$r_1 a_2 + r_2 a_3 = b_1$$

$$\left(a_4 - \frac{a_3^2}{a_2} \right) r_2 = b_2 - \frac{b_1 a_3}{a_2}$$

De coëfficiënt r_2 is nu:

$$r_2 = \frac{b_2 - \frac{b_1 a_3}{a_2}}{a_4 - \frac{a_3^2}{a_2}} \quad \{19\}$$

De coëfficiënt r_1 is nu:

$$r_1 = \frac{b_1 - r_2 a_3}{a_2} \quad \{20\}$$

Omdat de vergelijking van de verdraaide parabool (formule 14) voor $y=0$ gelijk is aan de verdraaide parabool van de symmetrische reflector [1], kiezen we voor het x-interval (dit is het interval waarover men de methode van de kleinste kwadraten toepast) en de afstand "t" (dit is de afstand tussen het brandpunt van de parabool van de tophoek van de "offset"-reflector) ook nu:

$$-0.05 \leq x \leq 0.45$$

$$t = 0.95$$

Hiermee worden de coëfficiënten r_1 en r_2 gelijk aan:

$$r_1 = 0.23857$$

$$r_2 = 0.10359$$

H4. Ontwerp van het totale 3-dimensionale "offset"-reflectoroppervlak.

Om het "offset"-reflectoroppervlak nu verder compleet te maken, dienen we de coëfficiënten van de polynomen z_{s1} en z_{s2} (formule 1b,c) te bepalen. Met behulp van de methode van de kleinste kwadraten zijn we in staat om de coëfficiënten N, T en U te bepalen. De overgebleven coëfficiënten van de polynomen worden tenslotte bepaald door de fasefouten voor zowel de "scanned"-situatie ($\alpha=\pm 30^\circ$) als de "unscanned"-situatie ($\alpha=0^\circ$) in het apertuurvlak te minimaliseren. Hiervoor dienen we dan wel eerst de coördinaten van het "unscanned"-brandpunt te bepalen.

§4.1 Bepaling van de coëfficiënten N, T en U.

Door in het vlak $y'=0$ de partiële afgeleide van zowel de verdraaide parabool (formule 14) als ook het polynoom z_{off} (formule 1) naar y' te nemen, zijn we in staat om met behulp van de methode van de kleinste kwadraten de coëfficiënten N, T en U te bepalen. De partiële afgeleide van de verdraaide parabool (formule 14) naar y' in het vlak $y'=0$ luidt:

$$z_{afg} = \frac{\partial z_t(x,y)}{\partial y'} \Big|_{y'=0} = \frac{y_0}{2tb \sqrt{1 - \frac{cx}{t}}} \quad \{21\}$$

De partiële afgeleide van het polynoom z_{off} (formule 1) naar y' in het vlak $y'=0$ luidt:

$$\frac{\partial z_{off}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} = N + Tx^2 + Ux^4 \quad \{22\}$$

De methode van de kleinste kwadraten verloopt nu als volgt:

$$N + Tx_1^2 + Ux_1^4 - z_{afg}(x_1) = f_1$$

$$N + Tx_2^2 + Ux_2^4 - z_{afg}(x_2) = f_2$$

⋮

$$N + Tx_i^2 + Ux_i^4 - z_{afg}(x_i) = f_i$$

⋮

$$N + Tx_{60}^2 + Ux_{60}^4 - z_{afg}(x_{60}) = f_{60}$$

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_i^2 + \dots + f_{60}^2 = \varphi(N,T,U)$$

$$\varphi \text{ minimaliseren} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial T} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial U} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial N} &= \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial N} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial N} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_{60}} \cdot \frac{\partial f_{60}}{\partial N} \\ &= 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{60} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{60} f_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial T} &= \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial T} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial T} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_{60}} \cdot \frac{\partial f_{60}}{\partial T} \\ &= 2f_1 x_1^2 + 2f_2 x_2^2 + \dots + 2f_{60} x_{60}^2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^{60} f_i x_i^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial U} &= \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial U} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial U} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_{60}} \cdot \frac{\partial f_{60}}{\partial U} \\ &= 2f_1 x_1^4 + 2f_2 x_2^4 + \dots + 2f_{60} x_{60}^4 = 2 \cdot \sum_{i=1}^{60} f_i x_i^4\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{60} f_i = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{60} f_i x_i^2 = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial U} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{60} f_i x_i^4 = 0$$

subst. $f_i = N + T x_i^2 + U x_i^4 - z_{afg}(x_i)$ levert:

$$\sum_{i=1}^{60} N + T \cdot \sum_{i=1}^{60} x_i^2 + U \cdot \sum_{i=1}^{60} x_i^4 = \sum_{i=1}^{60} z_{afg}(x_i) \quad \{23\}$$

$$N \cdot \sum_{i=1}^{60} x_i^2 + T \cdot \sum_{i=1}^{60} x_i^4 + U \cdot \sum_{i=1}^{60} x_i^6 = \sum_{i=1}^{60} x_i^2 \cdot z_{afg}(x_i) \quad \{24\}$$

$$N \cdot \sum_{i=1}^{60} x_i^4 + T \cdot \sum_{i=1}^{60} x_i^6 + U \cdot \sum_{i=1}^{60} x_i^8 = \sum_{i=1}^{60} x_i^4 \cdot z_{afg}(x_i) \quad \{25\}$$

Toegepast wordt nu de eliminatiemethode van Gauss, zodat we een bovendriehoeksmatrix krijgen. Door middel van de terugsubstitutie methode kunnen we daarna de onbekende coëfficiënten U, T en N bepalen.

Om de vergelijkingen overzichtelijk te houden, maken we gebruik van de volgende definities:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{60} x_i^2, \quad a_2 = \sum_{i=1}^{60} x_i^4, \quad a_3 = \sum_{i=1}^{60} x_i^6, \quad a_4 = \sum_{i=1}^{60} x_i^8$$

$$b_1 = \sum_{i=1}^{60} z_{afg}(x_i), \quad b_2 = \sum_{i=1}^{60} x_i^2 \cdot z_{afg}(x_i), \quad b_3 = \sum_{i=1}^{60} x_i^4 \cdot z_{afg}(x_i)$$

De vergelijkingen {23},{24} en {25} worden nu:

$$N + \frac{a_1}{60} \cdot T + \frac{a_2}{60} \cdot U = \frac{b_1}{60} \quad \{26\}$$

$$a_1 \cdot N + a_2 \cdot T + a_3 \cdot U = b_2 \quad \{27\}$$

$$a_2 \cdot N + a_3 \cdot T + a_4 \cdot U = b_3 \quad \{28\}$$

We vermenigvuldigen vgl.{26} met a_1 en trekken deze van vgl.{27} af.

$$N + \frac{a_1}{60} \cdot T + \frac{a_2}{60} \cdot U = \frac{b_1}{60} \quad \{29\}$$

$$\left(a_2 - \frac{a_1^2}{60}\right)T + \left(a_3 - \frac{a_1 \cdot a_2}{60}\right)U = b_2 - \frac{a_1 \cdot b_1}{60} \quad \{30\}$$

$$\left(a_3 - \frac{a_1 \cdot a_2}{60}\right)T + \left(a_4 - \frac{a_2^2}{60}\right)U = b_3 - \frac{a_2 \cdot b_1}{60} \quad \{31\}$$

We vermenigvuldigen vgl.{30} met $\frac{\left(a_3 - \frac{a_1 \cdot a_2}{60}\right)}{\left(a_2 - \frac{a_1^2}{60}\right)}$ en trekken deze van vgl.{31} af.

$$N + \frac{a_1}{60} \cdot T + \frac{a_2}{60} \cdot U = \frac{b_1}{60} \quad \{32\}$$

$$\left(a_2 - \frac{a_1^2}{60}\right)T + \left(a_3 - \frac{a_1 \cdot a_2}{60}\right)U = b_2 - \frac{a_1 \cdot b_1}{60} \quad \{33\}$$

$$\left[\left(a_4 - \frac{a_2^2}{60}\right) - \left(a_3 - \frac{a_1 \cdot a_2}{60}\right) \cdot \frac{\left(a_3 - \frac{a_1 \cdot a_2}{60}\right)}{\left(a_2 - \frac{a_1^2}{60}\right)} \right] \cdot U = \left(b_3 - \frac{a_2 \cdot b_1}{60}\right) - \left(b_2 - \frac{a_1 \cdot b_1}{60}\right) \cdot \frac{\left(a_3 - \frac{a_1 \cdot a_2}{60}\right)}{\left(a_2 - \frac{a_1^2}{60}\right)} \quad \{34\}$$

Uit de laatste vergelijking (formule 34) berekenen we de coëfficiënt U:

$$U = \frac{\left(b_3 - \frac{a_2 \cdot b_1}{60}\right) - \left(b_2 - \frac{a_1 \cdot b_1}{60}\right) \cdot \frac{\left(a_3 - \frac{a_1 \cdot a_2}{60}\right)}{\left(a_2 - \frac{a_1^2}{60}\right)}}{\left(a_4 - \frac{a_2^2}{60}\right) - \frac{\left(a_3 - \frac{a_1 \cdot a_2}{60}\right)^2}{\left(a_2 - \frac{a_1^2}{60}\right)}} \quad \{35\}$$

Door de terugsubstitutie van formule 35 in formule 33 wordt de coëfficiënt T gelijk aan:

$$T = \frac{\left(b_2 - \frac{a_1 \cdot b_1}{60}\right) - \left(a_3 - \frac{a_1 \cdot a_2}{60}\right) \cdot U}{\left(a_2 - \frac{a_1^2}{60}\right)} \quad \{36\}$$

En door terugsubstitutie van de formules 35 en 36 in formule 32 wordt de coëfficiënt N gelijk aan:

$$\begin{aligned} N &= \frac{b_1}{60} - \frac{a_1}{60} \cdot T - \frac{a_2}{60} \cdot U \\ &= \frac{1}{60}(b_1 - a_1 \cdot T - a_2 \cdot U) \end{aligned} \quad \{37\}$$

De coëfficiënten N, T en U zijn nu:

$$N=0.182738$$

$$T=0.216842$$

$$U=-0.427187$$

§4.2 Bepaling van de coördinaten voor het "unscanned"-brandpunt.

Om in de volgende paragraaf de fasefouten voor zowel de "unscanned"-situatie als ook de "scanned"-situatie te kunnen berekenen, dienen we nu eerst de coördinaten van het "unscanned"-brandpunt te bepalen.

We geven nogmaals de vergelijking van de "offset"-reflector.

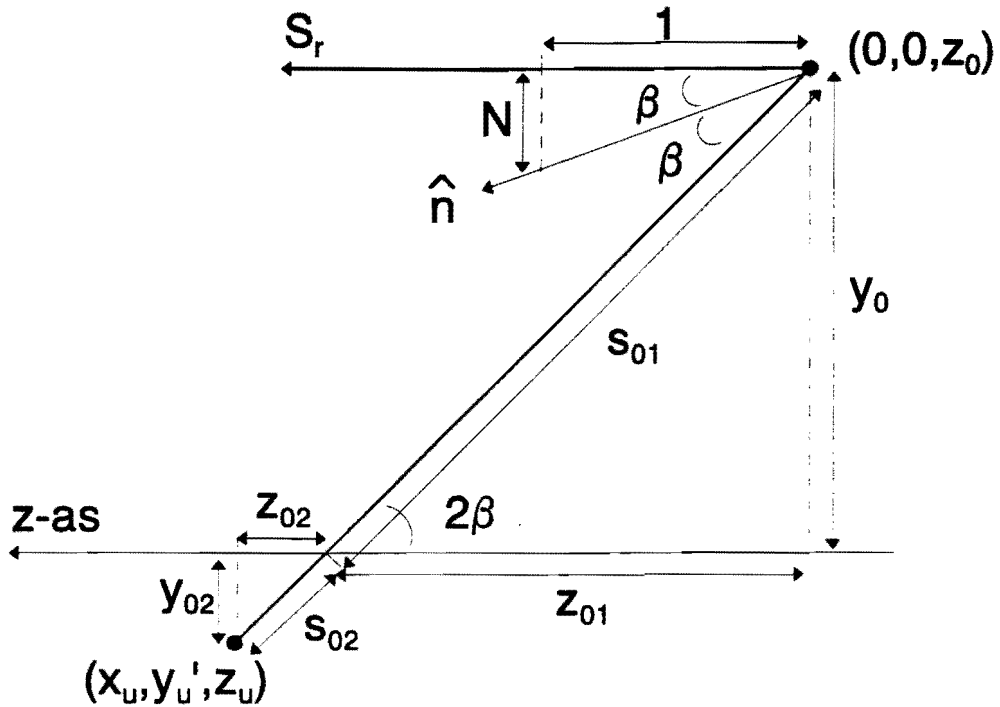
$$z_{off} = z_1 + z_2 + z_3$$

met: $z_{s0} = z_0 + r_1 x^2 + r_2 x^4$

$$z_{s1} = P y'^2 + Q x^2 y'^2 + R y'^4 + S x^4 y'^2$$

$$z_{s2} = N y' + T x^2 y' + U x^4 y' + W x^2 y'^3$$

Voor de afleiding van het "unscanned"-brandpunt maken we gebruik van figuur 8.



figuur 8. Het "unscanned"-brandpunt

De algemene vergelijking van de normaal op een oppervlak S met een parametervoorstelling $\vec{x} = (x, y, z(x, y))$ luidt:

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) \quad \{38\}$$

In het centrale punt van het "offset"-reflectoroppervlak $(x, y', z) = (0, 0, z_0)$ is de normaal:

$$\frac{\partial z(0,0)}{\partial x} = 0 \text{ en } \frac{\partial z(0,0)}{\partial y} = N$$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + N^2}} \cdot (0, -N, 1) \quad \{39\}$$

Verder geldt dat de "unscanned"-brandpuntsafstand gelijk is aan:

$$f_u = \frac{1}{4r_1} \quad \{40\}$$

Dit komt omdat voor kleine waarde van x de coëfficiënt r_1 de grootste invloed heeft, mits $r_1 \gg r_2$.

Wat we willen bereiken is dat de straal welke vertrekt vanuit het "unscanned"-brandpunt na reflectie aan het punt $(x, y', z) = (0, 0, z_0)$ van de reflector, evenwijdig aan de z -as loopt, zie figuur 8.

$$\text{Geg:} \quad s_{01} + s_{02} = \frac{1}{4r_1} \quad \{41\}$$

$$\begin{aligned} \text{Opl:} \quad \tan \beta &= N \quad \rightarrow \quad \beta = \arctan N \\ 2\beta &= 2 \arctan N \end{aligned} \quad \{42\}$$

$$\tan 2\beta = \frac{y_0}{z_{01}} \quad \rightarrow \quad 2\beta = \arctan \frac{y_0}{z_{01}} \quad \{43\}$$

$$\{42\} = \{43\}: \quad \arctan \frac{y_0}{z_{01}} = 2 \arctan N$$

$$\frac{y_0}{z_{01}} = \tan(2 \arctan N)$$

$$z_{01} = \frac{y_0}{\tan(2 \arctan N)}$$

$$\text{Nu geldt:} \quad s_{01} = \sqrt{z_{01}^2 + y_0^2} = \sqrt{\left(\frac{y_0}{\tan(2 \arctan N)}\right)^2 + y_0^2}$$

$$s_{02} = \frac{1}{4r_1} - s_{01}$$

$$\frac{y_{02}}{s_{02}} = \frac{y_0}{s_{01}} \quad \rightarrow \quad y_{02} = \frac{y_0 \cdot s_{02}}{s_{01}}$$

$$y_{02} = \frac{y_0 \left(\frac{1}{4r_1} - s_{01} \right)}{s_{01}} = \frac{y_0}{4r_1 s_{01}} - y_0$$

$$y'_u = -(y_0 + y_{02}) = -\left(\frac{y_0}{4r_1s_{01}} - y_0 + y_0\right) = -\frac{y_0}{4r_1s_{01}} \quad \{44\}$$

$$\frac{z_{02}}{y_{02}} = \frac{z_{01}}{y_0} \rightarrow z_{02} = \frac{y_{02} \cdot z_{01}}{y_0}$$

$$z_{02} = \frac{\left(\frac{y_0}{4r_1s_{01}} - y_0\right) \cdot \frac{y_0}{\tan(2 \arctan N)}}{y_0}$$

$$z_{02} = \frac{1}{\tan(2 \arctan N)} \left(\frac{y_0}{4r_1s_{01}} - y_0\right) = z_{01} \cdot \left(\frac{1}{4r_1s_{01}} - 1\right)$$

$$z_u = z_0 + z_{01} + z_{02} \quad \{45\}$$

met:
$$z_{01} = \frac{y_0}{\tan(2 \arctan N)}$$

$$z_{02} = \frac{1}{\tan(2 \arctan N)} \left(\frac{y_0}{4r_1s_{01}} - y_0\right)$$

en:
$$x_u = 0 \quad \{46\}$$

rekenvoorbeeld:

geg: $r_1 = 0.23857$ $y_0 = 0.3$

$N = 0.182738$ $z_0 = -0.8386$

gevr: het "unscanned"-brandpunt (x_u, y'_u, z_u)

opl:
$$z_{01} = \frac{y_0}{\tan(2 \arctan N)} = 0.7934$$

$$s_{01} = \sqrt{z_{01}^2 + y_0^2} = 0.8483$$

$$y'_u = -\frac{y_0}{4r_1s_{01}} = -0.3706$$

$$z_{02} = \frac{1}{\tan(2 \arctan N)} \left(\frac{y_0}{4r_1s_{01}} - y_0\right) = z_{01} \cdot \left(\frac{1}{4r_1s_{01}} - 1\right) = 0.1867$$

$$z_u = z_0 + z_{01} + z_{02} = 0.1416$$

$$F_{unsc} = (x_u, y'_u, z_u) = (0, -0.3706, 0.1416)$$

§4.3 Bepaling van de resterende coëfficiënten van het polynoom z_{off} .

§4.3.1 Bepaling van de coëfficiënten P en R.

Voor het bepalen van de resterende coëfficiënten van het polynoom (formule 1) bekijken we eerst afzonderlijk de coëfficiënten P en R. Dit is mogelijk door alleen het vlak $x=0$ van de reflector te nemen. De coëfficiënten P en R dienen we nu zo te kiezen dat voor $x=0$ de maximale "unscanned"-fasefout in absolute waarde gelijk is aan de maximale "scanned"-fasefout. Om deze fasefouten te kunnen berekenen dienen we eerst de uitdrukkingen te vinden voor zowel de invallende als ook de gereflecteerde golf op $x=0$. Omdat we voor het vinden van een uitdrukking van de gereflecteerde golf de eenheidsnormaalvector op $x=0$ dienen te kennen, leiden we eerst de vergelijking voor deze eenheidsnormaalvector af.

De algemene vergelijking van de eenheidsnormaalvector op de reflector luidt:

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_{off}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_{off}}{\partial y'}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{\partial z_{off}}{\partial x} \cdot \hat{a}_x - \frac{\partial z_{off}}{\partial y'} \cdot \hat{a}_y + \hat{a}_z \right) \quad \{47\}$$

De vergelijking van het reflector-oppervlak luidt:

$$z_{off} = z_1 + z_2 + z_3$$

met: $z_1 = z_0 + r_1 x^2 + r_2 x^4$

$$z_2 = P y'^2 + Q x^2 y'^2 + R y'^4 + S x^4 y'^2$$

$$z_3 = N y' + T x^2 y' + U x^4 y' + W x^2 y'^3$$

Zodat: $\frac{\partial z_{off}}{\partial x} = 2r_1 x + 4r_2 x^3 + 2Qxy'^2 + 4Sx^3y'^2 + 2Tx'y' + 4Ux^3y' + 2Wxy'^3$

$$\frac{\partial z_{off}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 ; \quad \left(\frac{\partial z_{off}}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial z_{off}}{\partial y'} = 2Py' + 2Qx^2y' + 4Ry'^3 + 2Sx^4y' + N + Tx^2 + Ux^4 + 3Wx^2y'^2$$

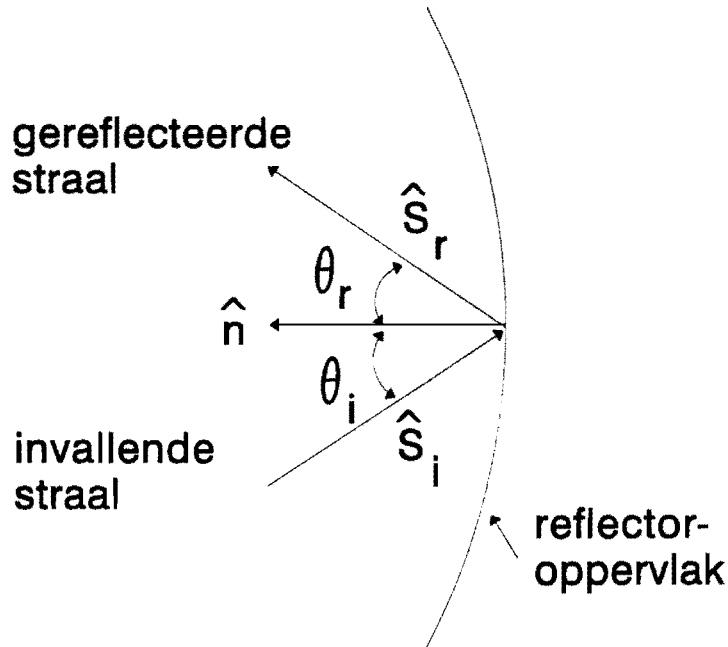
$$\frac{\partial z_{off}}{\partial y'} \Big|_{x=0} = 2Py' + 4Ry'^3 + N$$

$$\left(\frac{\partial z_{off}}{\partial y'} \Big|_{x=0} \right)^2 = 4P^2y'^2 + 16PRy'^4 + 4PNy' + 16R^2y'^6 + 8RNy'^3 + N^2$$

De eenheidsnormaalvector op $x=0$ wordt nu:

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_{off}}{\partial y'}\right)^2}} \left(0 \cdot \hat{a}_x - \frac{\partial z_{off}}{\partial y'} \cdot \hat{a}_y + \hat{a}_z \right) \quad \{48\}$$

Om nu een uitdrukking voor de invallende golf en de gereflecteerde golf op $x=0$ te vinden maken we gebruik van figuur 9.



figuur 9. Het stralenverloop aan de reflector.

Er geldt: $\hat{n} \times (\hat{S}_r - \hat{S}_i) = 0 \quad \{49\}$

$$\hat{n} \cdot (\hat{S}_r + \hat{S}_i) = 0 \quad \{50\}$$

Door het uitproduct van \hat{n} met formule {49} te nemen krijgen we:

$$\hat{n} \times (\hat{n} \times \hat{S}_r) = \hat{n} \times (\hat{n} \times \hat{S}_i)$$

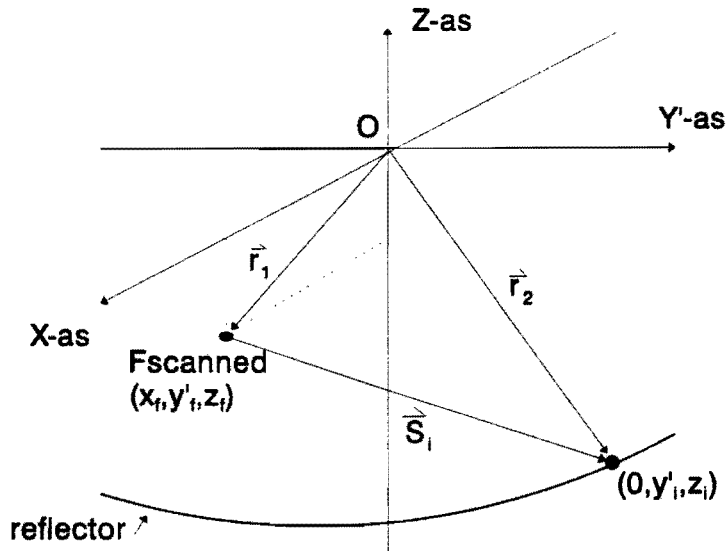
$$(\hat{n} \cdot \hat{S}_r) \hat{n} - (\hat{n} \cdot \hat{n}) \hat{S}_r = (\hat{n} \cdot \hat{S}_i) \hat{n} - (\hat{n} \cdot \hat{n}) \hat{S}_i$$

$$\hat{S}_r = \hat{S}_i - (\hat{n} \cdot \hat{S}_i) \hat{n} + (\hat{n} \cdot \hat{S}_r) \hat{n}$$

substitutie van formule {50} levert:

$$\hat{S}_r = \hat{S}_i - 2(\hat{S}_i \cdot \hat{n}) \hat{n} \quad \{51\}$$

Voor een uitdrukking van de invallende golf maken we gebruik van figuur 10.



figuur 10. Het verloop van de invallende straal.

De vergelijking van de invallende straal voor $x=0$ luidt:

$$\vec{S}_i = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_i - x_f) \hat{a}_x + (y'_i - y'_f) \hat{a}_y + (z_i - z_f) \hat{a}_z$$

$$x_i = 0 \rightarrow |\vec{S}_i| = \sqrt{(x_f)^2 + (y'_i - y'_f)^2 + (z_i - z_f)^2}$$

$$\hat{S}_i = \frac{1}{\sqrt{x_f^2 + (y'_i - y'_f)^2 + (z_i - z_f)^2}} \cdot (-x_f \hat{a}_x + (y'_i - y'_f) \hat{a}_y + (z_i - z_f) \hat{a}_z)$$

De vergelijking van de gereflecteerde straal voor $x=0$ luidt:

$$\hat{S}_i \cdot \hat{n} = \frac{\left(-\frac{\partial z}{\partial y'} \cdot (y'_i - y'_f) + (z_i - z_f) \right)}{\sqrt{x_f^2 + (y'_i - y'_f)^2 + (z_i - z_f)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y'} \right)^2}}$$

$$2(\hat{S}_i \cdot \hat{n}) \hat{n} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial y'} \cdot (y'_i - y'_f) + (z_i - z_f) \right)}{\sqrt{x_f^2 + (y'_i - y'_f)^2 + (z_i - z_f)^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y'} \right)^2} \right)^2} \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial y'} \hat{a}_y + \hat{a}_z \right)$$

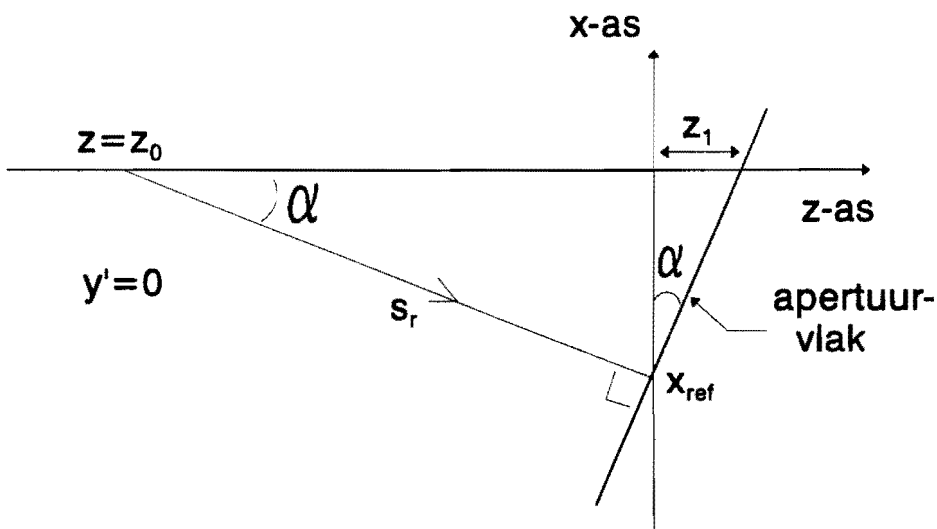
$$\hat{S}_r = \hat{S}_i - 2(\hat{S}_i \cdot \hat{n}) \hat{n}$$

$$S_{r_x} = \frac{-x_f}{\sqrt{x_f^2 + (y'_i - y'_f)^2 + (z_i - z_f)^2}} \quad \{52a\}$$

$$S_{r_y} = \frac{(y'_i - y'_f)}{\sqrt{x_f^2 + (y'_i - y'_f)^2 + (z_i - z_f)^2}} - \frac{2 \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial y'} \cdot (y'_i - y'_f) + (z_i - z_f) \right) \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial y'} \right)}{\sqrt{x_f^2 + (y'_i - y'_f)^2 + (z_i - z_f)^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y'} \right)^2 \right)} \quad \{52c\}$$

$$S_{r_z} = \frac{(z_i - z_f)}{\sqrt{x_f^2 + (y'_i - y'_f)^2 + (z_i - z_f)^2}} - \frac{2 \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial y'} \cdot (y'_i - y'_f) + (z_i - z_f) \right)}{\sqrt{x_f^2 + (y'_i - y'_f)^2 + (z_i - z_f)^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y'} \right)^2 \right)} \quad \{52c\}$$

De fasefouten berekenen we ten opzichte van het apertuurvlak waarbij dit apertuurvlak (nagenoeg) loodrecht op de gereflecteerde stralen dient te staan. Omdat in de "unscanned"-situatie de gereflecteerde stralen onder een hoek $\alpha=0^\circ$ uittreden, kiezen we hiervoor als apertuurvlak $z=0$. In de "scanned"-situatie dient het apertuurvlak loodrecht op de "scanned"-straal te staan welke reflecteert op het punt $(x, y', z) = (0, 0, z_0)$ van de reflector. Dit omdat de coördinaten $(x, y', z) = (0, 0, z_0)$ van het reflectoroppervlak onafhankelijk zijn van de coëfficiënten P en R. Voor het bepalen van de vergelijking van het apertuurvlak in de "scanned"-situatie maken we gebruik van figuur 11.



figuur 11. Het "scanned"-apertuurvlak

De vergelijking van het apertuurvlak is nu:

$$V = \begin{pmatrix} x_{ref} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -x_{ref} \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \{53\}$$

Vervolgens gaan we het snijpunt bepalen van de gereflecteerde straal met het apertuurvlak voor de "scanned"-stralen. De vergelijking van de gereflecteerde straal in het punt

$(x, y', z) = (0, y_i', z_i)$ van de reflector is:

$$l_r = \begin{pmatrix} 0 \\ y_i' \\ z_i \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} S_{r_x} \\ S_{r_y} \\ S_{r_z} \end{pmatrix} \quad \{54\}$$

Voor het snijpunt van de gereflecteerde straal met het apertuurvlak geldt:

$$\begin{pmatrix} x_{ref} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -x_{ref} \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_i' \\ z_i \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} S_{r_x} \\ S_{r_y} \\ S_{r_z} \end{pmatrix}$$

$$\mu \begin{pmatrix} -x_{ref} \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} S_{r_x} \\ S_{r_y} \\ S_{r_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_i' \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{ref} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x_{ref}\mu \quad -\lambda S_{r_x} = -x_{ref} \quad (1) \quad *S_{r_z} \rightarrow -x_{ref}\mu S_{r_z} - \lambda S_{r_x} S_{r_z} = -x_{ref} S_{r_z}$$

$$\xi \quad -\lambda S_{r_y} = y_i' \quad (2)$$

$$z_1\mu \quad -\lambda S_{r_z} = z_i \quad (3) \quad *S_{r_x} \rightarrow z_1\mu S_{r_x} - \lambda S_{r_x} S_{r_z} = z_i S_{r_x}$$

$$\mu(-x_{ref}S_{r_z} - z_1S_{r_x}) = -x_{ref}S_{r_z} - z_iS_{r_x}$$

$$\mu = \frac{x_{ref}S_{r_z} + z_iS_{r_x}}{x_{ref}S_{r_z} + S_{r_x}}$$

$$-x_{ref}\mu - \lambda S_{r_x} = -x_{ref}$$

zodat: $\lambda = \frac{x_{ref} - x_{ref}\mu}{S_{r_x}}$

De coördinaten van het snijpunt van de gereflecteerde straal met het apertuurvlak zijn nu:

$$x_i^* = \lambda \cdot S_{r_x} \quad \{55a\}$$

$$y_i^{/*} = y_i' + \lambda \cdot S_{r_y} \quad \{55b\}$$

$$z_i^* = z_i + \lambda \cdot S_{r_z} \quad \{55c\}$$

De lengte van de gereflecteerde straal tot het apertuurvlak is nu:

$$L_2 = \sqrt{(x_i^*)^2 + (y_i' - y_i^{/*})^2 + (z_i - z_i^*)^2} \quad \{56\}$$

Terwijl de lengte van de invallende straal gelijk is aan:

$$L_1 = \sqrt{(x_f)^2 + (y_f' - y_i')^2 + (z_f - z_i)^2} \quad \{57\}$$

$$\text{De totale lengte is nu: } L_{tot} = L_1 + L_2 \quad \{58\}$$

Omdat de coördinaten $(x, y', z) = (0, 0, z_0)$ van het reflectoroppervlak onafhankelijk zijn van de coëfficiënten P en R, wordt dit punt als referentiepunt genomen om de fasefouten in zowel de "scanned"-situatie als ook in de "unscanned"-situatie te bepalen. De afleiding van de referentielengte van de "scanned"-straal verloopt nu als volgt:

In het punt $(x, y', z) = (0, 0, z_0)$ van de reflector is de eenheidsnormaal:

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -N \\ 1 \end{pmatrix} \quad \{59\}$$

De gereflecteerde straal kan opgeschreven worden als:

$$\hat{S}_r = \hat{S}_i - 2 \cdot (\hat{S}_i \cdot \hat{n}) \hat{n}$$

De invallende straal kan opgeschreven worden als:

$$\vec{S}_i = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_i - x_f) \cdot \hat{a}_x + (y_i' - y_f') \cdot \hat{a}_y + (z_i - z_f) \cdot \hat{a}_z \quad \{60\}$$

Met $x_i = 0$, $y_i = 0$ en $z_i = z_0$ wordt dit:

$$\vec{S}_i = -x_f \cdot \hat{a}_x - y_f' \cdot \hat{a}_y + (z_0 - z_f) \cdot \hat{a}_z$$

$$\hat{S}_i = \frac{1}{\sqrt{(x_f)^2 + (y_f')^2 + (z_0 - z_f)^2}} \cdot (-x_f \hat{a}_x - y_f' \hat{a}_y + (z_0 - z_f) \hat{a}_z) \quad \{61\}$$

$$\hat{S}_i \cdot \hat{n} = \frac{\left(\frac{N y_f'}{\sqrt{1 + N^2}} + \frac{z_0 - z_f}{\sqrt{1 + N^2}} \right)}{\sqrt{(x_f)^2 + (y_f')^2 + (z_0 - z_f)^2}}$$

$$2(\hat{S}_i \cdot \hat{n})\hat{n} = 2 \cdot (\hat{S}_i \cdot \hat{n}) \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -N \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{r_x} = \frac{-x_f}{\sqrt{(x_f)^2 + (y_f')^2 + (z_0 - z_f)^2}} \quad \{62a\}$$

$$S_{r_y} = \frac{-y_f'}{\sqrt{(x_f)^2 + (y_f')^2 + (z_0 - z_f)^2}} - 2 \cdot (\hat{S}_i \cdot \hat{n}) \frac{-N}{\sqrt{1+N^2}} \quad \{62b\}$$

$$S_{r_z} = \frac{(z_0 - z_f)}{\sqrt{(x_f)^2 + (y_f')^2 + (z_0 - z_f)^2}} - 2 \cdot (\hat{S}_i \cdot \hat{n}) \frac{1}{\sqrt{1+N^2}} \quad \{62c\}$$

De vergelijking van de gereflecteerde straal in het punt $(x, y', z) = (0, 0, z_0)$ van de reflector is:

$$I_r = \begin{pmatrix} 0 \\ y_i' \\ z_i \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} S_{r_x} \\ S_{r_y} \\ S_{r_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} S_{r_x} \\ S_{r_y} \\ S_{r_z} \end{pmatrix} \quad \{63\}$$

De z-coördinaat van het snijpunt van deze gereflecteerde straal met het apertuurvlak is gelijk aan nul, zodat:

$$z_i + \lambda S_{r_z} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{z_i}{S_{r_z}}$$

De coördinaten van het referentie snijpunt is nu:

$$x_{ref} = -\frac{z_i}{S_{r_z}} \cdot S_{r_x} \quad \{64a\}$$

$$y'_{ref} = y_i' - \frac{z_i}{S_{r_z}} \cdot S_{r_y} \quad \{64b\}$$

$$z_{ref} = 0 \quad \{64c\}$$

De lengte van de invallende referentie straal is:

$$(L_1)_{ref} = \sqrt{(x_f)^2 + (y_f')^2 + (z_0 - z_f)^2} \quad \{65\}$$

De lengte van de gereflecteerde referentie straal is:

$$(L_2)_{ref} = \sqrt{(x_{ref})^2 + (y'_{ref})^2 + (z_0)^2} \quad \{66\}$$

De totale lengte van de referentie straal is:

$$(L_{tot})_{ref} = (L_1)_{ref} + (L_2)_{ref} \quad \{67\}$$

Het lengteverschil waaruit het faseverschil bepaald wordt is nu:

$$\Delta L = L_{tot} - (L_{tot})_{ref} \quad \{68\}$$

Rekenvoorbeeld

Geg. $b = \cos 30^\circ = 0.8660254$

$$c = \sin 30^\circ = 0.5$$

$$t = 0.95$$

$$f = b^2 \cdot t = 0.7125$$

$$y_0 = 0.3$$

Gevr. De totale lengte van de referentie straal, $(L_{tot})_{ref}$.

Opl. $x_f = c \cdot t + \frac{c y_0^2}{4f} = 0.490789$

$$y_f' = -0.3$$

$$z_f = z_0 + b \cdot t - \frac{b y_0^2}{4f} = -0.043224$$

$$z_0 = -0.8386$$

Hierdoor wordt:

$$S_{r_x} = \frac{-x_f}{\sqrt{(x_f)^2 + (y_f')^2 + (z_0 - z_f)^2}} = -0.5$$

$$S_{r_y} = \frac{-y_f'}{\sqrt{(x_f)^2 + (y_f')^2 + (z_0 - z_f)^2}} - 2 \cdot (\hat{S}_i \cdot \hat{n}) \frac{-N}{\sqrt{1 + N^2}} = -6.987465 \cdot 10^{-4}$$

$$S_{r_z} = \frac{(z_0 - z_f)}{\sqrt{(x_f)^2 + (y_f')^2 + (z_0 - z_f)^2}} - 2 \cdot (\hat{S}_i \cdot \hat{n}) \frac{1}{\sqrt{1 + N^2}} = 0.8660251$$

$$x_{ref} = -\frac{z_0}{S_{r_z}} \cdot S_{r_x} = -0.484166$$

$$y_{ref}' = -\frac{z_i}{S_{r_z}} \cdot S_{r_y} = -6.766 \cdot 10^{-4}$$

$$z_{ref} = 0$$

De lengte van de invallende referentie straal is:

$$(L_1)_{ref} = \sqrt{(x_p)^2 + (y_f')^2 + (z_0 - z_p)^2} = 0.981579$$

De lengte van de gereflecteerde referentie straal is:

$$(L_2)_{ref} = \sqrt{(x_{ref})^2 + (y_{ref}')^2 + (z_0)^2} = 0.968332$$

De totale lengte van de referentie straal is:

$$(L_{tot})_{ref} = (L_1)_{ref} + (L_2)_{ref} = 1.9499111$$

Indien we stellen dat $y_{ref}' = 0$, dan wordt daardoor de lengte van de referentie straal:

$$(L_{tot})_{ref} = (L_1)_{ref} + (L_2)_{ref} = 1.9499109$$

De bepaling van de "unscanned"-fasefout verloopt als volgt:

Het apertuurvlak dat we nemen om de "unscanned"-fasefouten te berekenen is het vlak $z=0$.

De voor $x=0$ gereflecteerde straal luidt:

$$l_r = \begin{pmatrix} 0 \\ y_i' \\ z_i \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} S_{r_x} \\ S_{r_y} \\ S_{r_z} \end{pmatrix} \quad \{69\}$$

De z-coördinaat van het snijpunt van de gereflecteerde straal l_r met het apertuurvlak is:

$$z_i^* = 0 \quad \{70\}$$

Zodat voor λ geldt:

$$z_i + \lambda S_{r_z} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{z_i}{S_{r_z}}$$

Hierdoor worden de overige coördinaten van het snijpunt:

$$x_i^* = \lambda S_{r_x} = -\frac{z_i S_{r_x}}{S_{r_z}} \quad \{71\}$$

$$y_i^* = y_i' + \lambda S_{r_y} = y_i' - \frac{z_i S_{r_y}}{S_{r_z}} \quad \{72\}$$

De lengte van de invallende straal is:

$$L_1 = \sqrt{(x_p)^2 + (y_f' - y_i^*)^2 + (z_f - z_i)^2} \quad \{73\}$$

De lengte van de gereflecteerde straal is:

$$L_2 = \sqrt{(x_i^*)^2 + (y_i' - y_i^*)^2 + (z_i - z_i^*)^2} \quad \{74\}$$

De totale lengte wordt hiermee:

$$L_{tot} = L_1 + L_2 \quad \{75\}$$

De totale lengte van de referentie straal is:

$$(L_{tot})_{ref} = \frac{1}{4r_1} + z_0 \quad \{76\}$$

Het lengte verschil wordt hiermee:

$$\Delta L = (L_{tot})_{ref} - (L_1 + L_2) \quad \{77\}$$

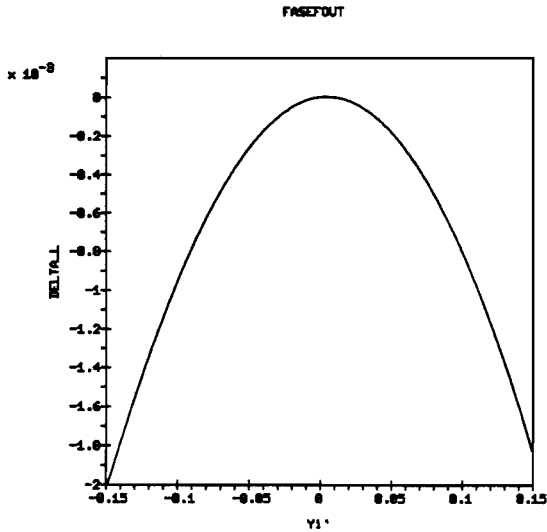
Voor het bepalen van de optimale waarden voor de coëfficiënten P en R, worden er voor een aantal vaste waarden van R naar de bijbehorende optimale waarde van P (= $r_1 + \delta$) gezocht. Hierbij dient dus voor $x=0$ de maximale "unscanned"-fasefout in absolute waarde gelijk te zijn aan de maximale "scanned"-fasefout. Als voorbeeld stellen we de waarde van de coëfficiënt R gelijk aan 0.05. In de onderstaande tabel 1 gaan we op zoek naar de optimale waarde van de coëfficiënt P (= $r_1 + \delta$).

| R | δ | $\Delta L_{\max(\text{unscanned})}$ | $\Delta L_{\max(\text{scanned})}$ |
|------|----------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 0.05 | 0.000 | $-6.00 \cdot 10^{-4}$ | $-3.17 \cdot 10^{-3}$ |
| " | 0.005 | $-8.72 \cdot 10^{-5}$ | $-2.90 \cdot 10^{-3}$ |
| " | 0.010 | $5.94 \cdot 10^{-4}$ | $-2.64 \cdot 10^{-3}$ |
| " | 0.015 | $1.16 \cdot 10^{-3}$ | $-2.38 \cdot 10^{-3}$ |
| " | 0.020 | $1.70 \cdot 10^{-3}$ | $-2.14 \cdot 10^{-3}$ |
| " | 0.021 | $1.81 \cdot 10^{-3}$ | $-2.09 \cdot 10^{-3}$ |
| " | 0.022 | $1.91 \cdot 10^{-3}$ | $-2.04 \cdot 10^{-3}$ |
| " | 0.023 | $2.01 \cdot 10^{-3}$ | $-2.00 \cdot 10^{-3}$ |
| " | 0.024 | $2.12 \cdot 10^{-3}$ | $-1.94 \cdot 10^{-3}$ |
| " | 0.025 | $2.22 \cdot 10^{-3}$ | $-1.89 \cdot 10^{-3}$ |

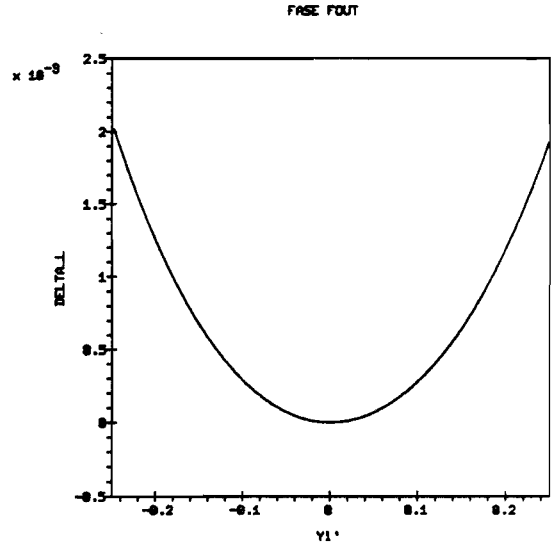
tabel 1.

Uit tabel 1 zien we dat voor $R=0.05$ de meest optimale waarde van de coëfficiënt P gelijk is aan: $P = r_1 + \delta = 0.23857 + 0.023 = 0.26157$

In de figuren 12 en 13 zijn voor $R=0.05$ en $P=0.26157$ resp. de "scanned" en "unscanned" fasefouten weergegeven.



figuur 12. De "scanned"-fasefout



figuur 13. De "unscanned"-fasefout

In tabellen 2a en 2b zijn nog meer combinaties van de coëfficiënten P en R gegeven waarvoor geldt dat de maximale "unscanned"-fasefout in absolute waarde gelijk is aan de maximale "scanned"-fasefout.

| | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| R | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 |
| δ | 0.023 | 0.021 | 0.019 | 0.017 | 0.015 | 0.013 |

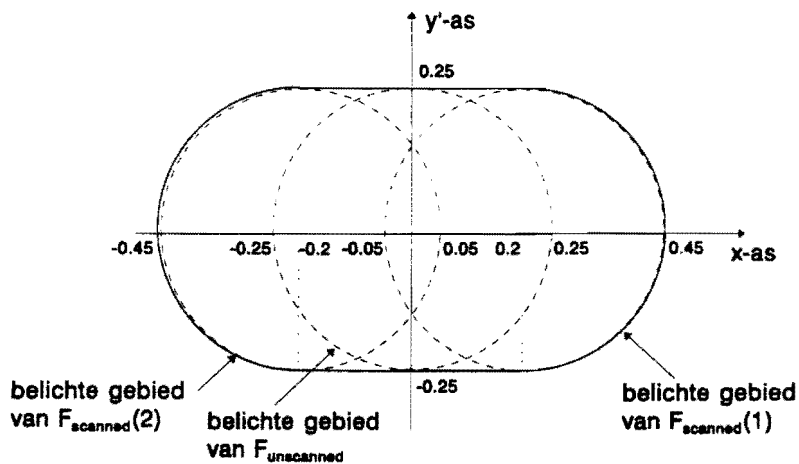
tabel 2a

| | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| R | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.50 | 0.55 | 0.60 |
| δ | 0.011 | 0.009 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |

tabel 2b

§4.3.2 Bepaling van de coëfficiënten Q , S en W .

Vervolgens gaan we voor ieder paar coëfficiënten van P en R de overblijvende coëfficiënten Q , S en W bepalen. Met de coëfficiënten Q , S en W zijn we namelijk in staat om de fasefouten in de hoeken van de "scanned" en "unscanned"-apertuurcirkels te minimaliseren, omdat daar $|xy|$ groot is. Deze "scanned" en "unscanned"-apertuurcirkels zijn te zien in figuur 14.



figuur 14. Het "offset"-reflectoroppervlak met zijn apertuurcirkels.

De coëfficiënten Q en S zullen een tegengesteld teken moeten bezitten om te voorkomen dat de fase-correctie te groot wordt. Om nu tot de optimale waarde van de coëfficiënten Q, S en W te komen is er een computerprogramma geschreven dat voor een groot aantal combinaties (125) van de coëfficiënten Q, S en W de meest geschikte combinatie van coëfficiënten eruit haalt en tevens aangeeft hoe groot daarbij de maximale fasefout is. Bij aanvang kiezen we de coëfficiënten over een groot bereik waarna we per stap dit bereik steeds zullen verkleinen. We gaan door met het optimaliseren van de coëfficiënten totdat de maximale fasefout nauwelijks meer afneemt. Als voorbeeld kijken we naar de combinatie van $R=0.05$ en $\delta=0.023$.

| | | |
|---------|-----------------------------------|---|
| stap 1: | Q=1.0 ; 2.0 ; 3.0 ; 4.0 ; 5.0 | →Q=3.0 |
| | S=-20 ; -15 ; -10 ; -5 ; 0 | →S=-10 |
| | W=1.0 ; 2.0 ; 3.0 ; 4.0 ; 5.0 | →W=4.0 |
| | | →maximale fasefout= $-3.74 \cdot 10^{-3}$ |
| stap 2: | Q=2.0 ; 2.5 ; 3.0 ; 3.5 ; 4.0 | →Q=3.0 |
| | S=-15 ; -12.5 ; -10 ; -7.5 ; -5 | →S=-12.5 |
| | W=3.5 ; 3.75 ; 4.0 ; 4.25 ; 4.5 | →W=4.0 |
| | | →maximale fasefout= $-3.63 \cdot 10^{-3}$ |
| stap 3: | Q=2.5 ; 2.75 ; 3.0 ; 3.25 ; 3.5 | →Q=3.0 |
| | S=-14 ; -13 ; -12 ; -11 ; -10 | →S=-13 |
| | W=3.5 ; 3.75 ; 4.0 ; 4.25 ; 4.5 | →W=3.75 |
| | | →maximale fasefout= $-3.63 \cdot 10^{-3}$ |
| stap 4: | Q=2.8 ; 2.9 ; 3.0 ; 3.1 ; 3.2 | →Q=3.0 |
| | S=-14 ; -13.5 ; -13 ; -12.5 ; -12 | →S=-13 |
| | W=3.6 ; 3.7 ; 3.8 ; 3.9 ; 4.0 | →W=3.9 |
| | | →maximale fasefout= $-3.63 \cdot 10^{-3}$ |

In de tabellen 3a t/m c zijn voor alle combinaties van de coëfficiënten R en $P(=r_1 + \delta)$ de optimale coëfficiënten Q , S en W gegeven. Tevens is voor iedere set van coëfficiënten de maximale "scanned" en "unscanned"-fasefout gegeven. De meest optimale set van coëfficiënten is nu die set waarbij de maximale "scanned"-fasefout én de maximale "unscanned"-fasefout in absolute waarde minimaal zijn.

| | | | | |
|-------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| R | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 |
| δ | 0.023 | 0.021 | 0.019 | 0.017 |
| Q | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 2.9 |
| S | -13.0 | -13.0 | -13.0 | -12.0 |
| W | 3.9 | 3.75 | 3.75 | 4.0 |
| max. "scan" fasefout | $-3.63 \cdot 10^{-3}$ | $-3.55 \cdot 10^{-3}$ | $-3.47 \cdot 10^{-3}$ | $-3.41 \cdot 10^{-3}$ |
| max. "unsc" fasefout | $2.72 \cdot 10^{-3}$ | $2.68 \cdot 10^{-3}$ | $2.61 \cdot 10^{-3}$ | $2.51 \cdot 10^{-3}$ |

tabel 3a

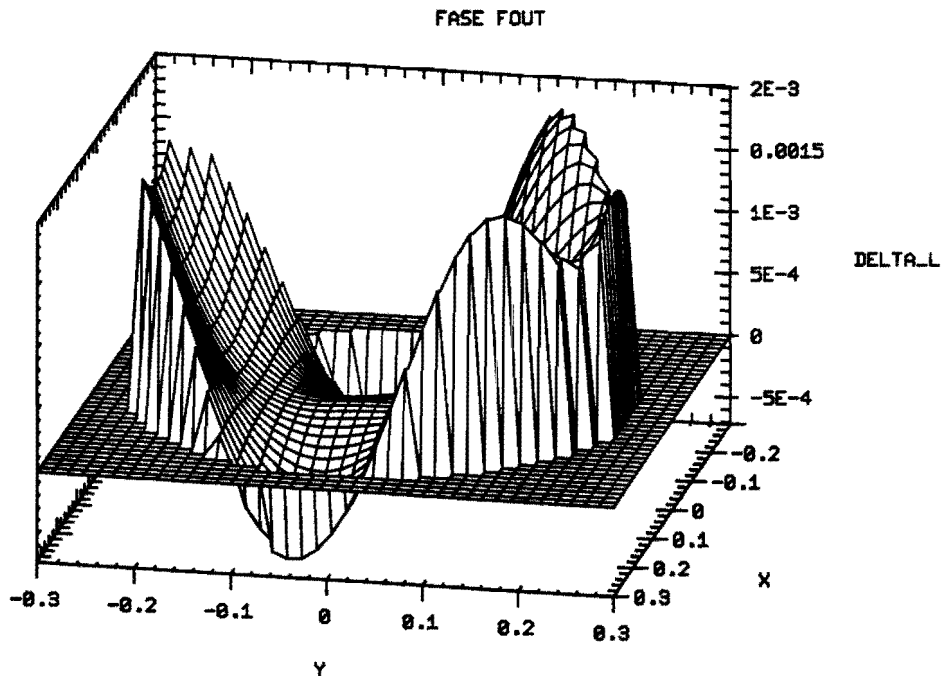
| | | | | |
|-------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| R | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 |
| δ | 0.015 | 0.013 | 0.011 | 0.009 |
| Q | 3.1 | 3.1 | 3.1 | 3.1 |
| S | -13.0 | -13.0 | -13.0 | -13.0 |
| W | 4.0 | 4.0 | 4.0 | 4.0 |
| max. "scan" fasefout | $-3.35 \cdot 10^{-3}$ | $-3.31 \cdot 10^{-3}$ | $-3.27 \cdot 10^{-3}$ | $-3.23 \cdot 10^{-3}$ |
| max. "unsc" fasefout | $2.35 \cdot 10^{-3}$ | $2.29 \cdot 10^{-3}$ | $2.23 \cdot 10^{-3}$ | $2.17 \cdot 10^{-3}$ |

tabel 3b

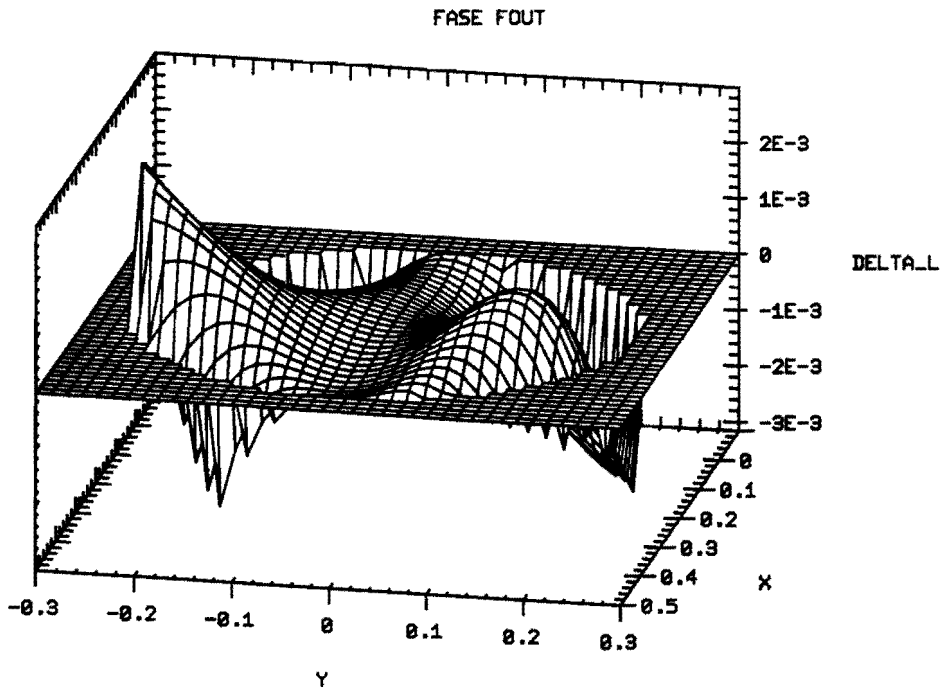
| | | | | |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| R | 0.45 | 0.50 | 0.55 | 0.60 |
| δ | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| Q | 3.1 | 3.1 | 3.0 | 3.0 |
| S | -13.0 | -13.0 | -12.0 | -13.0 |
| W | 4.0 | 4.0 <td 4.0 | 4.0 | |
| max."scan" fasefout | $-3.20 \cdot 10^{-3}$ | $-3.17 \cdot 10^{-3}$ | $-3.15 \cdot 10^{-3}$ | $-4.26 \cdot 10^{-3}$ |
| max."unsc" fasefout | $2.11 \cdot 10^{-3}$ | $2.05 \cdot 10^{-3}$ | $2.01 \cdot 10^{-3}$ | $1.95 \cdot 10^{-3}$ |

tabel 3c

Uit de tabellen 3a t/m c blijkt dat voor $R=0.55$, $\delta=0.003$, $Q=3.0$, $S=-12.0$ en $W=4.0$ de som van de "scanned" en de "unscanned"-fasefout minimaal is. In de figuren 15 en 16 zijn resp. de "unscanned" en de "scanned"-fasefouten weergegeven.



figuur 15. De "unscanned"-fasefouten



figuur 16. De "scanned"-fasefouten

Tenslotte zijn alle optimale coëfficiënten van het "offset"-reflectoroppervlak gegeven in tabel 4.

| | |
|-------|-----------|
| z_0 | -0.8386 |
| r_1 | 0.23857 |
| r_2 | 0.10359 |
| N | 0.182738 |
| P | 0.24157 |
| Q | 3.0 |
| R | 0.55 |
| S | -12.0 |
| T | 0.216842 |
| U | -0.427187 |
| W | 4.0 |

tabel 4.

H5. Conclusies en aanbevelingen

- * Evenals bij de symmetrische reflector wordt ook bij deze "offset"-reflector het reflectoroppervlak efficiënt gebruikt door de verschillende belichters. Hierdoor kan het reflectoroppervlak compact blijven.

- * Evenals bij de symmetrische reflector bevindt ook bij de "offset"-reflector de belichter zich relatief ver van het reflectoroppervlak. Het daardoor onstane nadeel van de apertuurbloking komt echter bij de "offset"-reflector niet meer voor.

- * De maximale fasefouten voor deze "offset"-reflector zijn ongeveer even groot als voor de symmetrische reflector uit deel 1 van dit verslag. Hieruit mogen we concluderen dat de stralingsdiagrammen voor de "offset"-reflector wellicht niet veel zullen afwijken van de stralingsdiagrammen voor de symmetrische reflector.

- * Indien we twee satellieten willen ontvangen welke een hoek Γ ($\Gamma < 60^\circ$) uit elkaar staan, dan dienen we voor deze hoek Γ eerst de meest optimale posities van de belichters te bepalen. Verder dienen we de afzonderlijke stralingsdiagrammen te berekenen om te kunnen zien of aan de gestelde stralingseisen wordt voldaan.

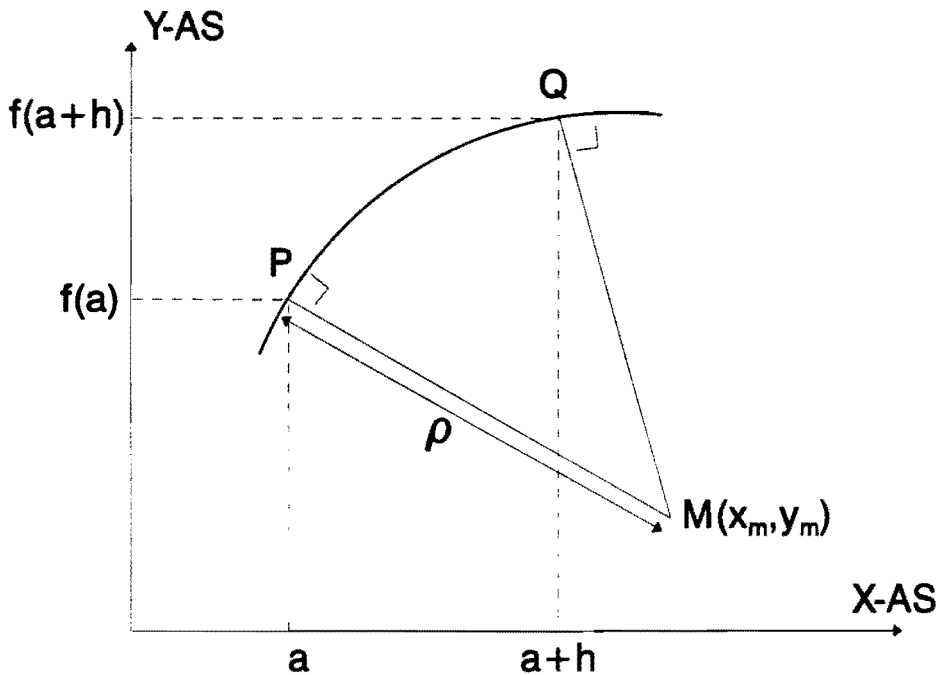
- * Het verdient verder aanbeveling te onderzoeken in hoeverre de belichter naar het reflectoroppervlak verplaatst kan worden. Hierbij dienen de gevraagde specificaties nog steeds gerealiseerd te worden.

Literatuurlijst

- [1]: C.M. Rappaport and W.P. Craig
High aperture efficiency symmetric reflector antennas with
up to 60 degree field of view.
IEEE Trans. on Antennas and Propag., vol 39, March 1991

- [2]: J.L.M. Buijnsters
Berekeningen aan een multibeam antenne met een grote zichthoek.
Stageverslag no. EM-12-94, Vakgroep Elektromagnetisme, Faculteit
Elektrotechniek, Technische Universiteit Eindhoven, Nederland, 1994

BIJLAGE Bewijs dat de kromtestraal van de parabool in zijn tophoek twee maal de brandpuntsafstand is.



figuur 17. Een kromme met kromtestraal ρ

Het **kromtemiddelpunt** M , behorend bij een punt P van een kromme, is de limietsafstand van het snijpunt van de normalen in P en in een naburig punt Q van de kromme, wanneer Q tot P nadert.

De **kromtestraal** ρ in P is de afstand van P tot het kromtemiddelpunt M .

Afleiding van de normaal in het punt P :

$$y = -\frac{1}{f'(a)}x + b \quad \{78\}$$

subst. $(x,y) = (a,f(a))$ levert:

$$f(a) = -\frac{a}{f'(a)} + b \quad \rightarrow \quad b = f(a) + \frac{a}{f'(a)} \quad \{79\}$$

De normaal in het punt P is nu:

$$y = -\frac{1}{f'(a)}x + f(a) + \frac{a}{f'(a)} \quad \{80\}$$

$$\begin{aligned} *f'(a) \quad - \quad yf'(a) &= -x + f(a)f'(a) + a \\ [y-f(a)]f'(a) + x - a &= 0 \end{aligned} \quad \{81\}$$

Op gelijke wijze wordt de normaal in het punt Q afgeleid:

$$[y-f(a+h)]f'(a+h) + x - a - h = 0 \quad \{82\}$$

Het snijpunt S (x_s, y_s) van beide normalen wordt:

$$[y-f(a)]f'(a) + x - a = 0 \quad \{81\}$$

$$[y-f(a+h)]f'(a+h) + x - a - h = 0 \quad \{82\}$$

$$[y_s-f(a)]f'(a) - [y_s-f(a+h)]f'(a+h) + h = 0 \quad \{83\}$$

$$y_s[f'(a+h)-f'(a)] = h + f(a+h)f'(a+h) - f(a)f'(a)$$

Delen door "h" en de limiet van $h \rightarrow 0$ levert:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[y_s \cdot \frac{[f'(a+h)-f'(a)]}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[1 + \frac{[f(a+h)f'(a+h)-f(a)f'(a)]}{h} \right] \quad \{84\}$$

Dan gaat S naar M:

$$\begin{aligned} y_m f''(a) &= 1 + [f(x)f'(x)]'_{(x=a)} \\ &= 1 + [f'(a)f'(a) + f(a)f''(a)] \\ &= 1 + [f'(a)]^2 + f(a)f''(a) \end{aligned}$$

$$y_m = \frac{1 + [f'(a)]^2 + f(a)f''(a)}{f''(a)}$$

$$y_m - f(a) = \frac{1 + [f'(a)]^2}{f''(a)} \quad \{85\}$$

$$x_m - a = -f'(a)[y_m - f(a)] \quad \{86\}$$

subst. $y_m - f(a) = \frac{1 + [f'(a)]^2}{f''(a)}$ levert:

$$x_m - a = -f'(a) \cdot \frac{1 + [f'(a)]^2}{f''(a)} \quad \{87\}$$

De kromtestraal $\rho = PM$ is:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{(x_m - a)^2 + (y_m - f(a))^2} \\ &= \sqrt{\left[-f'(a) \cdot \frac{1 + [f'(a)]^2}{f''(a)} \right]^2 + \left[\frac{1 + [f'(a)]^2}{f''(a)} \right]^2} \\ &= \sqrt{[f'(a)]^2 \cdot \left[\frac{1 + [f'(a)]^2}{f''(a)} \right]^2 + \left[\frac{1 + [f'(a)]^2}{f''(a)} \right]^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left[\frac{1 + [f'(a)]^2}{f''(a)} \right]^2 \cdot [1 + [f'(a)]^2]} \\
&= \sqrt{\frac{[1 + [f'(a)]^2]^3}{[f''(a)]^2}} = \frac{[1 + [f'(a)]^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(a)|} \quad \{88\}
\end{aligned}$$

De algemene functie van een parabool met zijn brandpunt F in de oorsprong luidt:

$$y = \frac{x^2}{4F} - F \quad \{89\}$$

$$f'(x) = \frac{x}{2F} \quad \rightarrow \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{2F} \quad \rightarrow \quad f''(0) = \frac{1}{2F}$$

$$\rho = \frac{[1 + [f'(a)]^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(a)|} = \frac{1}{\frac{1}{2F}} = 2F \quad \{90\}$$

Conclusie: De kromtestraal van een parabool in zijn tophoek is twee maal de brandpuntsafstand.