

MASTER

Unerwünschte Asymmetrie beim Walzprozess : eine orientierende Darstellung durch Stauchversuche

Schrijvers, M.J.G.

Award date:
1992

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Unerwünschte *Asymmetrie*

beim Walzprozeß.

Eine orientierende Darstellung

durch Stauchversuche.

Diplomarbeit

Verslag van een afstudeeropdracht

vorgelegt von M.J.G. Schrijvers

Betreuung: Dr.-Ing. W. Rasp,
Ir. S. Hoogenboom

Die vorliegende Arbeit wurde in der Zeit von November 1991 bis Mai 1992 in der Abteilung Umformtechnik des Max-Planck-Institutes für Eisenforschung GmbH in Düsseldorf in Zusammenarbeit mit der Technischen Universität Eindhoven angefertigt.

Herrn Professor Dr.-Ing. O. Pawelski danke ich für die Möglichkeit zur Durchführung dieser Arbeit.

Herrn Professor Ir. J.A.G. Kals möchte ich danken, weil er mir die Möglichkeit gab, meine Diplomarbeit am MPI-Düsseldorf anzufertigen, für sein Interesse und die zahlreichen Gespräche.

Herrn Dr.-Ing. W. Rasp danke ich für die Themenstellung und die Betreuung der Arbeit.

Herrn Ir. S. Hoogenboom danke ich für seine hilfreiche Ratschläge.

Herrn J. Rosendahl möchte ich danken, weil er dafür gesorgt hat, daß die Probenstücke rechtzeitig fertig waren, und für seine Unterstützung bei der Durchführung der Versuche.

Dipl.-Ing. A. Cremer und Dipl.-Ing. A. Kolling danke ich für ihre Unterstützung bei der Durchführung der FEM-Rechnungen.

Ferner gilt mein Dank alle andere Mitarbeitern des Max-Planck-Institutes für Eisenforschung GmbH, die einen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet haben.

Last, but not least, wil ik Frans van Alebeek, Marc te Poel, Frank Verhulst en Herman Wassink bedanken voor de gezellige avonden thuis en in de Altstadt.

Inhaltsverzeichnis

		Seite
0	Verzeichnis der Abkürzungen	3
1	Einleitung	4
2	Aufgabenstellung	6
3	Stand der Kenntnisse	7
4	Theoretische Betrachtungen zum Flachstauchen	8
4.1	Stäbchen-Modell	8
4.2	Obere Schranke-Modell	9
4.3	FEM-Rechnungen	14
4.4	Plastische Instabilität	17
5	Stauchversuchen	18
5.1	Versuchswerkstoffe, -aufbau und -durchführung	18
5.2	Versuchsauswertung	19
5.3	Versuchsergebnisse	20
6	Diskussion	22
6.1	Zweidimensionale Asymmetrie	22
6.2	Plastische Instabilität oder Schmierungsinstabilität?	22
6.3	Computerprogramme zur Lösung Volumenintegrale	23
6.4	Dreidimensionale Asymmetrie	24
6.5	Asymmetrie beim Walzen	24
7	Zusammenfassungen	
7.1	Zusammenfassung (Deutsch)	25
7.2	Samenvatting (Nederlands)	26
8	Literaturverzeichnis	27

Appendix

A	Stäbchenmodell	29
B	Obere Schranke-Modell	33

Anhang

Bilder		45
--------	--	----

Versuche		72
----------	--	----

V.1	Versuchstoffe	73
V.2	Versuchsaufbau	73
V.3	Versuchsdurchführung	73
V.4	Versuchsauswertung	74
V.5	Weitere Versuchsergebnisse	74

Numerische Lösung eines Volumenintegrals & Ergebnisse der Obere Schrankerechnung		80
---	--	----

N.1	Numerische Lösung eines Volumenintegrals	81
N.2	Wirkung des Programms	81

N.3	Durchführung und Ergebnisse der Obere Schrankerechnungen	98
-----	---	----

N.4	Theorie der numerischen Quadratur	105
-----	-----------------------------------	-----

Alle Bilder sind
groß abgedruckt
im Anhang
"Bilder"

0 Verzeichnis der Abkürzungen

σ_i	Spannung	N/mm ²
σ_f	Fließspannung	N/mm ²
σ_{f0}	Anfangsfließspannung	N/mm ²
$\bar{\sigma}_f$	Mittlere Fließspannung	N/mm ²
τ_i	Schubspannung	N/mm ²
m_i	Reibungsfaktor	-
\dot{u}_i	Geschwindigkeit	mm/s
ϵ_i	Formänderung	-
$\dot{\epsilon}_i$	Formänderungsgeschwindigkeit	-
$\bar{\epsilon}$	Vergleichsformänderung	-
$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon}$	Vergleichsformänderungsgeschwindigkeit	-
F_i	Kraft	N
F^*	Kraft (dimensionslos)	-
W_i	Arbeit	Nmm
P_i	Leistung	Nmm/s
P^*	Leistung (dimensionslos)	-
$C(x)$	Von x abhängige Integrations-Konstante	-
C	Konstante	-
$2h$	Höhe	mm
$2b$	Breite	mm
l	Länge	mm
α	Optimalisierungsparameter	-
β	Optimalisierungsparameter	-
γ	Optimalisierungsparameter	-
δ	Optimalisierungsparameter	-
ϵ	Optimalisierungsparameter	-
η	Optimalisierungsparameter	-

Indizes

o	oben
u	unten
x	in x-Richtung
y	in y-Richtung
z	in z-Richtung
d	Deformation/Formänderung
fr	Reibung
Γ	Scherflächen
E	Extern

1 Einleitung

Wenn beim Walzen die Bedingungen an den Kontaktflächen zwischen Werkstoff und Ober- bzw. Unterwalzen nicht gleich sind, spricht man von Asymmetrie. Die Folgen der Asymmetrie sind Längs- und Querkrümmungen, ungleichmäßige Dickenverteilung oder variierende Oberflächequalität des Walzgutes. Das ist ein großes Problem für die Industrie, weil man für die fortschreitende Mechanisierung und Automatisierung vorher genau wissen muß, wie sich das gewalzte Blech manifestiert. Seit einiger Zeit versucht man, die verschiedenen Arten der Asymmetrie beim Walzprozeß zu untersuchen und in den Griff zu bekommen. Im Jahre 1978 wurde als Anlage an einen Forschungsantrag des MPI an die Arbeitsgemeinschaft Walzwerkstechnik eine Tafel angefertigt, mit einer systematische Darstellung der Asymmetrieeen im Kaltwalzvorgang und ihre Auswirkung auf Walzkraft, Drehmoment und Bandplanheit, Bild 1.

Art der Asymmetrie	Ort der Asymmetrie		
	1) Walzgut	2) Walzen	3) übrige Walzwerkteile
A) Walz-Geometrie	A1) Dickenverteilung über die Bandbreite (Bandprofil), Spaltband	A2) Walzendurchmesser, Balligkeit (mechanisch, thermisch), Walzschränkung, Horizontalvernetz.	A3) Fichtungsfehler Umlenkrollen, Haspelachsen, Haspelkorn-Durchbiegung.
B) Walz-Kinematik	B1) Seitliches Verlaufen, nichthorizontaler Bandchiluf, oder -schlauf (pass line)	B2) Walzendrehzahl, Schlepplwalzbetrieb, Arbeits- oder Stützwalzantrieb (Kammwalze, Twin drive).	B3) Ab- und Aufwickelvorgang Wickelkrümmung, Handruckeffekt an Umlenkrollen.
C) Walz-Tribologie	C1) Oberflächenfeingestalt, Kühlung und Schmierung.	C2) Oberflächenfeingestalt, Kühlung und Schmierung.	C3)
D) Werkstoffeigenschaften	D1) Gefüge- und Härteverteilung über die Bandbreite (Härteprofil).	D2) Walzhärte, Verschleißfestigkeit.	D3)

Bild 1: Die verschiedenen Arten und Orte der Asymmetrie.

Es ist nicht leicht alle Einflüsse individuell zu untersuchen weil sie sich manchmal gegenseitig beeinflussen. Andererseits sind Walzversuche aufwendig und teuer, insbesondere für das Warmwalzen. Es hat sich herausgestellt, daß in bestimmten Fällen das Flachstauchen als eine Simulation des Walzprozesses gesehen werden kann. Man geht davon aus, daß es sich sowohl beim Walzen als auch beim Flachstauchen um eine ebene Umformung handelt. Die

Problematik wird so auf ein zweidimensionales Problem beschränkt. Das bringt große Vorteile für die theoretische Betrachtung, und die Ergebnisse sind zufriedenstellend. Damit basieren wir teilweise auf den Forschungsergebnissen des WUMSI (WarmUMformSI-mulator) des MPI für Eisenforschung.

Zur Untersuchung der Einflüsse der asymmetrische Schmierungsbedingungen wurde der Flachstauchversuch herangezogen. In diesem Bericht sind die Ergebnisse der Versuche, für verschiedene Schmierstoffe, aufgenommen mit eine entsprechende theoretische Modellierung.

2 Aufgabestellung

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

FACULTEIT WERKTUIGBOUWKUNDE

LEERSTOEL BEWERKINGSPROCESSEN

Eindstudieopdracht voor : M.J.G. Schrijvers

Startdatum : 1 november 1991

Begeleiders : Dr.-Ing. W. Rasp (Max Planck Institut,
Düsseldorf)
Ir. S.M. Hoogenboom

Onderwerp : Ongewenste asymmetrie van walsprodukten.

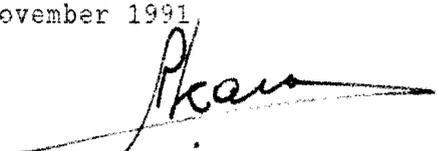
Toelichting: Bij het pletwalsen van plaatmateriaal verlaat dit de machine vaak asymmetrisch. In de loop van de tijd zijn hiervoor al vaak oorzaken genoemd, maar het probleem is nog steeds niet goed begrepen. Aangezien de hiermee verbonden buigarbeid zeer klein is in verhouding tot de pletarbeid zijn instabiliteiten niet uitgesloten. Momenteel bestaat de indruk dat vooral tribologische oorzaken aan te wijzen zijn: Ruwheid, smering enz. In samenhang met het huidige kwaliteitsstreven bestaat er een groot industrieel interesse (automobieliindustrie) in Duitsland voor een aanzet tot beter begrip van deze asymmetrieën.

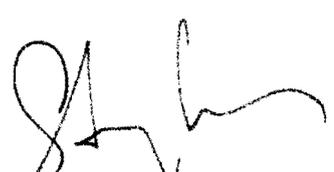
Opdracht : Onderzoek, zowel experimenteel als analytisch en numeriek, de oorzaken van zowel langs- als dwarskrommingen welke in iedere combinatie optreden bij het walsen van dunne plaat. De problematiek mag hiertoe tot een 2-dimensionale worden vereenvoudigd terwijl de elasticiteit van de gereedschappen (voorlopig) mag worden verwaarloosd. De volgende punten worden als interessante aspecten genoemd:

- experimentele simulaties waarbij invloeden worden overdreven (ev. trekken).
- modellen (vlakke stuikproef) opstellen en in deze zin doorrekenen.
- samenhang tussen dwars- en langskrommingen.
- vergelijken van resultaten die op verschillende wijze worden verkregen (ook MARC en ABAQUS).

11-04

5 november 1991


Prof. ir. J.A.G. Kals


Ir. S.M. Hoogenboom

3 Stand der Kenntnisse

Mit Asymmetrie beim Kaltwalzen haben sich schon manche beschäftigt. Walzkräfte, Drehmomente, Längs- und Querkrümmungen wurden untersucht in Abhängigkeit der in der Einleitung erwähnte asymmetrische Aspekte. Einige sind im Literaturverzeichnis erwähnt [5,8,12,15]. Im Gegensatz zum Walzen haben wir über Asymmetrie beim Flachstauchen keine Literatur gefunden. Manche Autoren haben sich schon beschäftigt mit dem Einpassen verschiedener Reibungszahlen in die zu Verfügung stehende Theorien. Hill und Johnson [6,8,9,10] geben Gleitlinienfeldlösungen für die zwei äußerste Fälle, nämlich keine Reibung und Haftreibung. Alexander [2] gibt Lösungen die dazwischen liegen. Er gibt einen Verband zwischen der Winkel womit die Gleitlinien am Kontaktfläche entstehen und den Coulombsche Reibungszahl μ . Cho [4] vergleicht das aus der Gleitlinienfeldtheorie folgenden Geschwindigkeitsfeld mit die FEM-Ergebnisse. Für den symmetrischen Flachstauchversuch stimmen die Ergebnisse der beide Methoden überein. Avitzur [1] gibt zwei Arten der Obere Schrankenlösung. Die erste Lösung geht davon aus, daß das bestimmte Geschwindigkeitsfeld in x-Richtung \dot{u}_x eine e-Funktion ist. Ein Parameter b ist ein Maß für den "Bulge" an der Außenseite. In diesem Modell wird gerechnet mit konstanter Reibung, nach von Mises. In die zweite Lösung wird das Umformgebiet aufgeteilt in dreieckige uniforme Geschwindigkeitsfelder. Auch hier wird gerechnet mit konstanten Reibungszahlen. Ramaekers [11] gibt eine Spannungsanalyse für druckabhängige Reibungszahlen μ und für konstante Reibungszahlen m. Die auftretende plastische Instabilität in seiner Versuchsdurchführung erklärt er mit dem Stäbchenmodell aus der Spannungsanalyse.

Über Schmierung und Reibung ist schon eine Menge publiziert worden. Aber, wie schon gesagt, alle gehen im Grunde genommen aus von dem symmetrischen Fall.

4 Theoretische Betrachtungen zum Flachstauchen

4.1 Stäbchenmodell

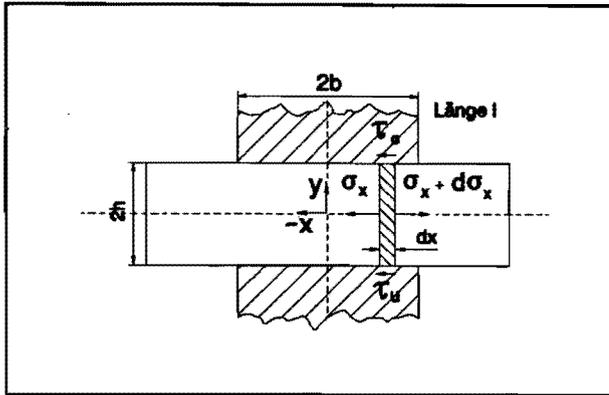


Bild 2: Stäbchenmodell.

Um die benötigte Umformkraft zu berechnen, teilt man die Probe in ein infinite Zahl von Stäbchen der Breite dx auf, Bild 2. Die Spannungen, die links und rechts einwirken, sind σ_x bzw. $\sigma_x + d\sigma_x$. Oben und unten sind die Schubspannungen τ_o bzw. τ_u wirksam. Die Breite der Probe ist im diesem Fall

nicht von Belang, wohl aber die Breite des Stempels ($2b$), da die Probe breiter ist als der Stempel. Die Höhe der Probe ist $2h$, die Länge l .

Das Kräftegleichgewicht in x -Richtung liefert eine Differentialgleichung:

$$-\sigma_x 2hl + (\sigma_x + d\sigma_x) 2hl - (\tau_o + \tau_u) l dx = 0 \quad (4.1.1)$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{(\tau_o + \tau_u)}{2h} x + C \quad (4.1.2)$$

Die auftretende Schubspannung wird oft definiert als $\tau = m \cdot \tau_{\max}$, wobei m der Reibungsfaktor ist. Für $m=0$ existiert keine Reibung, für $m=1$ wird die Schubspannung maximal. Die Schubspannung kann man also ersetzen durch

$$\tau = \frac{m}{\sqrt{3}} \sigma_f \quad (4.1.3)$$

Die Randbedingung ist

$$\sigma_x(x=+b) = 0 \quad (4.1.4)$$

Damit hat die Spannung in x -Richtung die Form:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}} (m_o + m_u) \frac{(x - b)}{2h} \quad (4.1.5)$$

Weil wir davon ausgehen, daß es sich hier um ebene Umformung handelt, gilt:

$$\rightarrow \sigma_y = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_f \left\{ 1 + \frac{(b-x)}{4h} (m_o + m_u) \right\} \quad (4.1.6)$$

Die Stauchkraft F läßt sich durch Integration der σ_y -Spannung in x -Richtung über die Kontaktfläche mit den Stempel berechnen:

$$F = \frac{4bl\sigma_f}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + \frac{m_o + m_u}{8} \left(\frac{b}{h} \right) \right\} \quad (4.1.7)$$

Die Kraft, dimensionslos geschrieben, ist F^* , und es gilt

$$F^* = \frac{F}{bl\sigma_f} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + \frac{m_o + m_u}{8} \left(\frac{b}{h} \right) \right\} \quad (4.1.8)$$

Die Ableitung der Formel für die Stauchkraft ist ausführlich beschrieben in Appendix A.

Im Bild B.18. ist die dimensionslose Stauchkraft in Abhängigkeit des Verhältnis Breite/Höhe b/h dargestellt für verschiedene m_u/m_o -Werte. Im Bild 7 ist die Stauchkraft dargestellt in Abhängigkeit von b/h bei Umformgraden von 0 und 40 % ($\varphi=0$ bzw. 0.5).

4.2 Obere Schrankenrechnung

Die Theorie der Oberen Schranke besagt, daß von allen kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfeldern \dot{u} das wirklich vorhandene den Ausdruck

$$P_m = P_d + P_{fr} = \sigma_f \int_V \dot{\epsilon} dV + \frac{m\sigma_f}{\sqrt{3}} \int_{S_{fr}} |\dot{u}_t| dS \quad (4.2.1)$$

zu einem Minimum macht. Die Umform- und Reibleistung werden durch die Lösung eines Volumenintegrals bzw. Flächenintegrals gelöst. Eine ausführliche Beschreibung der Obere Schrankenrechnung ist beschrieben in Appendix B.

4.2.1 Geschwindigkeitsfeld, Umform-, Reib- und Gesamtleistung

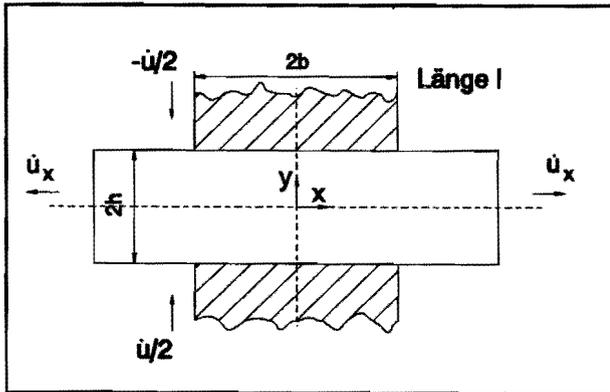


Bild 3: Obere Schranke Modell.

Bei der folgenden Anwendung der Theorie der oberen Schranke wird von der gleichen Koordinatensystem wie in der Spannungsanalyse ausgegangen, Bild 3 Aus Symmetriegründen wird zunächst nur die rechte Hälfte der Probe betrachtet. Eine mögliche mathematische Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes ergibt sich, bei einer Stempelgeschwindigkeit oben und unten von $-\dot{u}/2$ bzw. $+\dot{u}/2$, durch

$$\dot{u}_x = \left\{ \alpha + \beta \left(\frac{Y}{h} \right) + \gamma \left(\frac{Y}{h} \right)^2 + \delta \left(\frac{Y}{h} \right)^3 \right\} * \left(\frac{X}{b} \right) \dot{u} \quad (4.2.2)$$

wobei α , β , γ und δ die Minimalisierungsparameter sind. Weil es sich hier um ebene Umformung handelt ergibt sich hieraus und aus die Randbedingungen die Geschwindigkeit in Y-Richtung \dot{u}_y . Damit läßt sich nun die Vergleichsformänderungsgeschwindigkeit bestimmen zu:

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{4}{3} \left\{ \left(\alpha + \beta \left(\frac{Y}{h} \right) + \gamma \left(\frac{Y}{h} \right)^2 + \delta \left(\frac{Y}{h} \right)^3 \right)^2 \left(\frac{\dot{u}}{b} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} + \gamma \left(\frac{Y}{h} \right) + \frac{3\delta}{2} \left(\frac{Y}{h} \right)^2 \right)^2 \left(\frac{X\dot{u}}{bh} \right)^2 \right\}}$$

(4.2.3)

Mit den dimensionslosen Größen

$$x^* = \frac{X}{b}, \quad y^* = \frac{Y}{h} \quad (4.2.4)$$

läßt sich die Umformleistung P_d^* nun berechnen zu

$$P_d^* = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{x^*=0}^{x^*=1} \int_{y^*=-1}^{y^*=+1} \sqrt{(\alpha + \beta y^* + \gamma y^{*2} + \delta y^{*3})^2 \left(\frac{h}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} + \gamma y^* + \frac{3\delta}{2} y^{*2}\right)^2 x^{*2}} dx^* dy^* \quad (4.2.5)$$

Als letzte ergibt sich die Reibleistung P_{fr}^* zu

$$P_{fr}^* = \frac{P_{fr}}{\sigma_f b l \dot{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (m_o |\alpha + \beta + \gamma + \delta| + m_u |\alpha - \beta + \gamma - \delta|) \quad (4.2.6)$$

Und die Gesamtleistung zu

$$P_m^* = P_d^* + P_{fr}^* \quad (4.2.7)$$

Wegen Volumeninvarianz gilt:

$$2 \int_{x=0}^{x=b} \frac{\dot{u}}{2} dx = \int_{y=-h}^{y=+h} \dot{u}_x(x=+b) dy \Rightarrow \alpha + \frac{\gamma}{3} = \frac{b}{2h} \quad (4.2.8)$$

Um den Ausdruck für die Gesamtleistung zu einem Minimum zu machen gilt:

$$\frac{\partial^4 P_m^*}{\partial \alpha \partial \beta \partial \gamma \partial \delta} = 0 \quad (4.2.9)$$

Mit Gleichung (4.2.8) ergibt sich (4.2.9) zu

$$\frac{\partial^3 P_m^*}{\partial \beta \partial \gamma \partial \delta} = 0, \quad \alpha = \frac{b}{2h} - \frac{\gamma}{3} \quad (4.2.10)$$

Dieses Integral läßt sich nicht analytisch lösen. Im Anhang "Numerischen Lösung eines Volumenintegrals" wird ausführlich eingegangen auf die numerische Lösung mit Hilfe eines Computerprogramms.

4.2.2 Ergebnisse der Oberen Schrankenrechnung

Im Anhang "Ergebnisse der Obere Schrankerechnung" sind alle aus dem Computerprogramm gegebene Werte dargestellt. Für die Reibungszahlen wurde $m_u=0$ und $m_o=1$ genommen.

Wegen die Randbedingung $m_0=1$ ist oben die Geschwindigkeit \dot{u}_x gleich null. Hiermit ergibt sich für die Variablen

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \quad (4.2.11)$$

Und damit ist die Lösung auf zwei Parameter beschränkt. Es sei darauf hingewiesen, daß damit die Reibleistung gleich null wird. Für $b/h=3$ ist das Ergebnis der Rechnung grafisch dargestellt in Bild 4 Im Bild B.21 bis Bild B.24 sind wieder für $b/h= 0.75, 1, 1.5$ und 3 die Ergebnisse dargestellt. Mit zunehmender b/h nimmt die Gesamtleistung zu. Im Bild 5 ist für $b/h=3$ das mit dem Ergebnis der Obere Schrankerechnung zusammenhängende Geschwindigkeitsfeld dargestellt. Die Bilder B.25 bis B.28 zeigen die Geschwindigkeitsfelder für die vier b/h -Verhältnisse. Die Stauchkraft nach der Obere Schrankerechnung für Umformgraden von $+0$ und 40% sind dargestellt im Bild 7 (Geschwindigkeitsfeld nach Gleichung 4.2.2).

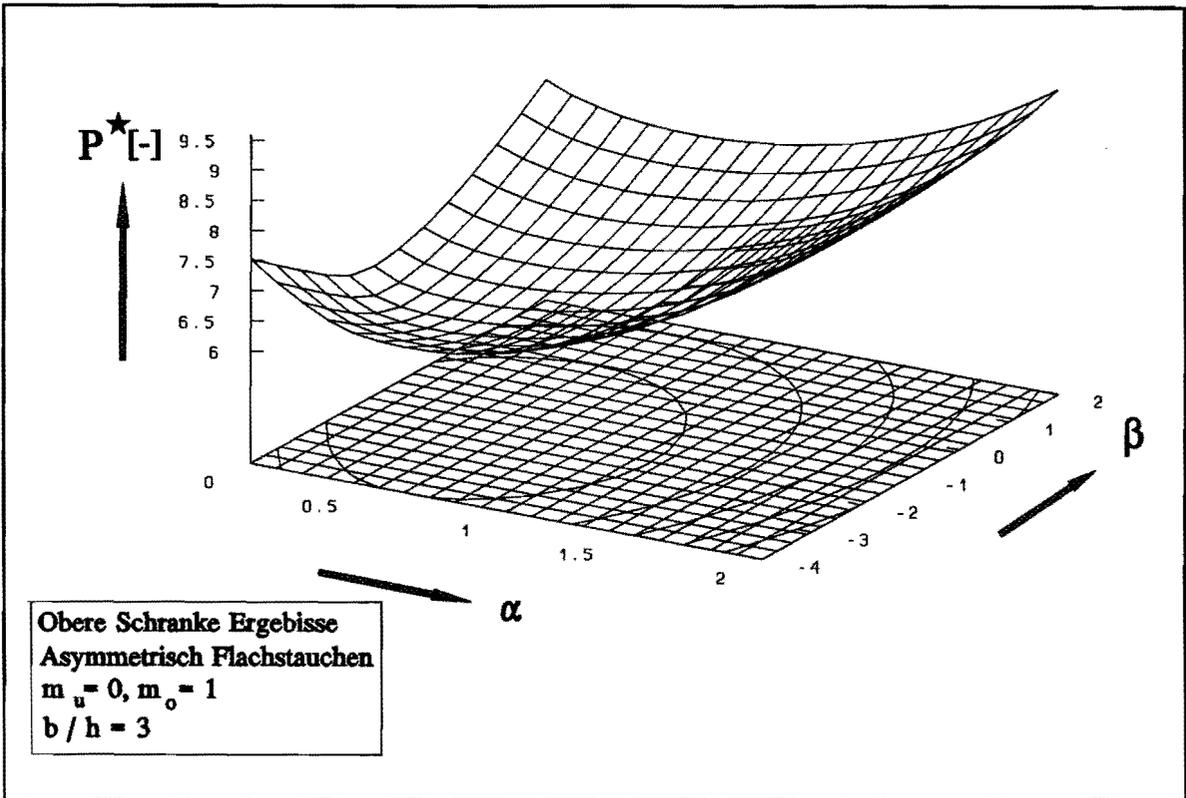


Bild 4: Die dimensionslose Leistung in Abhängigkeit der α und β für $b/h = 3$.

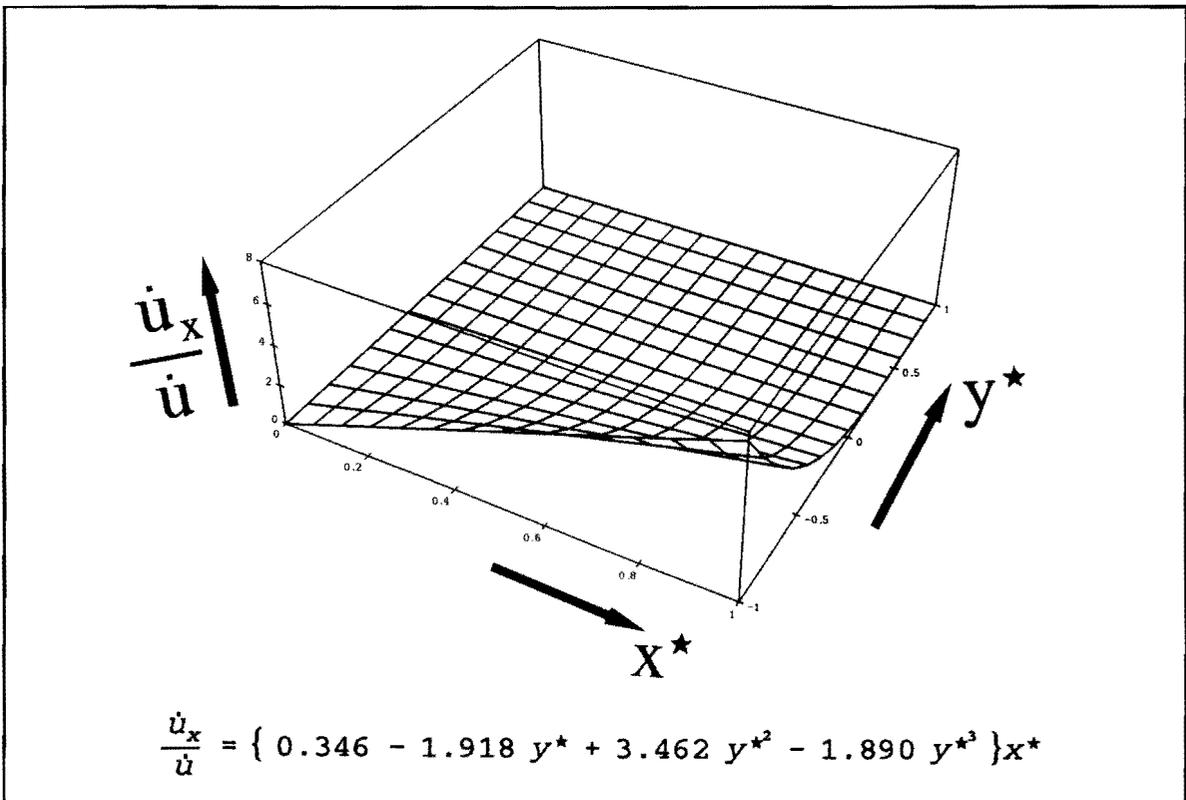


Bild 5: Dimensionslose Geschwindigkeit in x -Richtung in Abhängigkeit von dimensionslosen x und y .

4.3 FEM-Rechnungen

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist ein leistungsfähiges Verfahren zur numerischen Lösung von Festigkeitsproblemen, sowohl im elastischen als auch im plastischen Bereich. Mit Hilfe dieser Methode ist es möglich, den während des Umformvorganges im Werkstück auftretenden Spannungs- und Verformungszustand zu berechnen. Zur Durchführung einer Rechnung nach der Methode der Finiten Elemente wurde das Programmsystem MARC benutzt. Für die Formulierung des Finiten-Elemente-Ansatzes wird von einem starr-plastischen Werkstoffmodell in Verbindung mit dem Stoffgesetz nach Huber-Levy-von Mises ausgegangen. Hierdurch werden die folgenden Idealisierungen vorausgesetzt:

- * Homogener, isotroper und inkompressibler Werkstoff,
- * Vernachlässigung der Volumenkräfte,
- * Verknüpfung von Spannungsdeviator und Formänderungsgeschwindigkeitstensor über eine Skalar-positive Stofffunktion,
- * Abgrenzung des plastischen von starren Werkstoffbereich durch ein Fließkriterium, das vom augenblicklichen Spannungszustand abhängt.

4.3.1 Die Modellierung des Finiten-Elemente-Netzes

Es wird ausgegangen von Proben aus Aluminiumproben 99,5 mit einer Ausgangsbreite $B=50$ mm. Die Anfangshöhe $2h$ wird schrittweise variiert von 5 bis 20 mm mit Schritten von 5 mm. Für die Modellierung des Netzes für den Stauchversuch werden Vierknoten-elemente benutzt. Auf Grund der Symmetrie der Ausgangsprobe reicht eine Beschreibung einer Hälfte wie auch in der Obere Schrankerechnung und Spannungsanalyse. Die Hälfte einer Probe (25 mm) wird aufgeteilt in 20×10 ($x \times y$) Elemente für $2h=5$ mm und $2h=10$ mm, Bild 6. Für $2h=15$ mm wird aufgeteilt in 20×15 ($x \times y$) Elemente und für $2h=20$ mm in 20×20 Elemente, Bild B.31 und Bild B.32. Die Breite der Stempel ist kleiner als die Breite der Proben und beträgt $2b=15$ mm. Die Breite / Höhe - Verhältnisse b/h sind so auch hier 0.75, 1, 1.5 und 3. Von den 20 Elementen in x -

Richtung befindet sich eine Hälfte zwischen die Stempeln und die andere außerhalb. Für beide Hälften werden die Elemente von links nach rechts immer breiter. In der FEM-Rechnung, sowie in der Spannungsanalyse und Obere Schrankerechnung, wird das Reibungsgesetz nach von Mises verwendet. Der m -Wert oben ist $m_o=1$, und unten gilt $m_u=0$.

4.3.2 FEM-Berechnungsergebnisse

Im Bild 6 sind die Ergebnisse der FEM-Rechnung für die Proben mit Ausgangshöhen $2h=5$ mm und $2h=10$ mm, bei verschiedenen Höhenabnahmen, dargestellt. Für $2h=10$ mm biegen sich die Außenseiten der Probe bei zunehmender Reduktion immer mehr in die Richtung der Seite mit Reibungsfaktor $m_o=1$. Das gleiche Ergebnis finden wir für $2h=15$ mm und $2h=20$ mm, doch bei zunehmender Anfangshöhe nimmt den Biegungswinkel ab, bei gleichem Umformgrad. Im Fall $2h=5$ mm tut sich etwas besonderes vor. Auffällig ist daß die 5 mm Proben sehr viel später nach oben biegen als die andere Proben. Zur Beginn der Umformung biegen sich die Außenseiten zuerst in Richtung der Seite mit Reibungsfaktor $m_u=0$, um danach wieder in die entgegengesetzte Richtung zurück zu biegen. Dafür konnten wir bisher keine Erklärung finden. Die 20 mm Proben wurden bis 30 % Umformgrad durchgerechnet. Ab 30 % waren die Elemente in die Stempelecken dermaße verformt daß die nicht mehr durchgerechnet werden konnte. Im Bild B.29 bis Bild B.32 sind die Ergebnisse für die verschiedenen Ausgangshöhen dargestellt.

Im Bild 7 ist die Kräfteverteilung über der Stempelkontaktfläche, in Abhängigkeit vom b/h dargestellt, für die Ergebnisse der Spannungsanalyse und Obere Schrankerechnung.

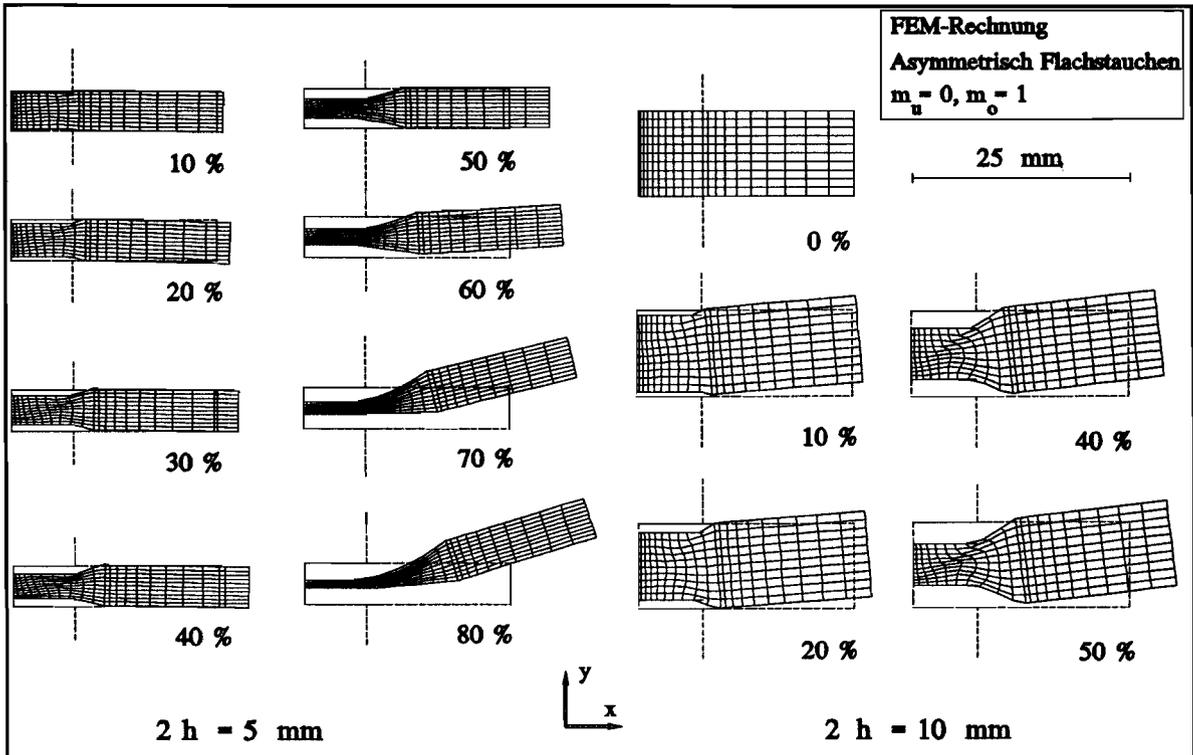


Bild 6: FEM-Ergebnisse für Proben mit Anfangshöhe $2h = 5 \text{ mm}$ und $2h = 10 \text{ mm}$ bei zunehmender Deformierung.

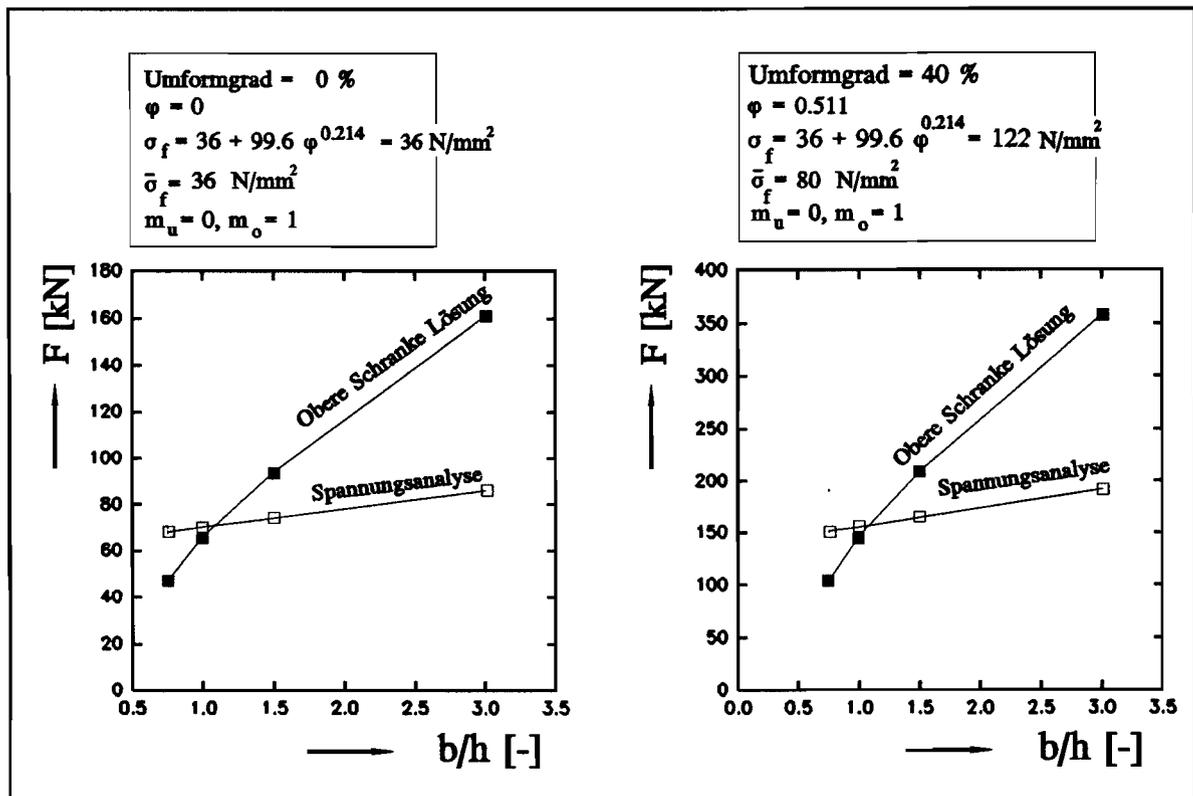


Bild 7: Stauchkraft für verschiedene b/h - Verhältnisse mit der Spannungsanalyse und Obere Schrankerechnung.

4.4 Plastische Instabilität

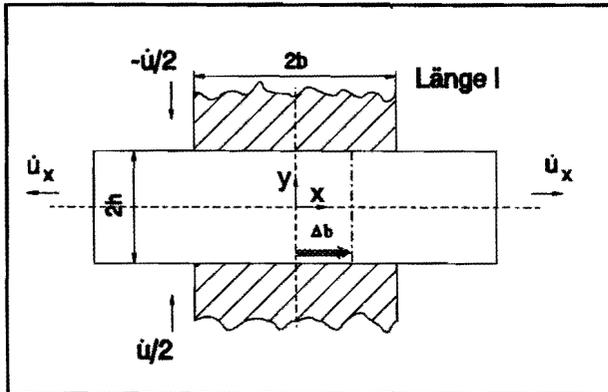


Bild 8: Definition der Δb in Obere Schranke-Modell.

Theoretisch müßte die Deformation symmetrisch sein im Bezug auf die $x=0$ -Linie. Mit planparallelen Stempeln, homogenen Probenmaterial und gleichmäßiger Verteilung der Reibung würde die Ausfließung an der linken Außenseite gleich der Ausfließung an der rechten Außenseite sein.

Aber, wie schon in der Einleitung erwähnt, zeigte Ramaekers [5] daß nur eine kleine Erstörung den Auftritt der plastische Instabilität initiieren kann. Er gab an der Hand des Stäbchenmodells eine Erklärung für diese Instabilität. Für den asymmetrischen Fall, mit $m_0=0$ und $m_0=1$, berechnen wir die minimale Leistung. In dem theoretischen Modell der Oberen Schranken Lösung wird die Fließscheidelinie in x -Richtung verschoben, Bild 8. Hieraus ergibt sich, daß die benötigte Leistung nur sehr wenig mehr ist als für den Fall bei dem die Linie genau auf $x=0$ liegt. Für eine Probe mit Anfangshöhe $2h = 5 \text{ mm}$ ($b/h = 3$) wurde eine Obere Schrankenrechnung durchgeführt wobei die Fließscheide mit 1-mm-Schritte verschoben wurde. Die berechnete Leistung ist in Abhängigkeit der Verschiebung Δb ausgesetzt im Bild 9.

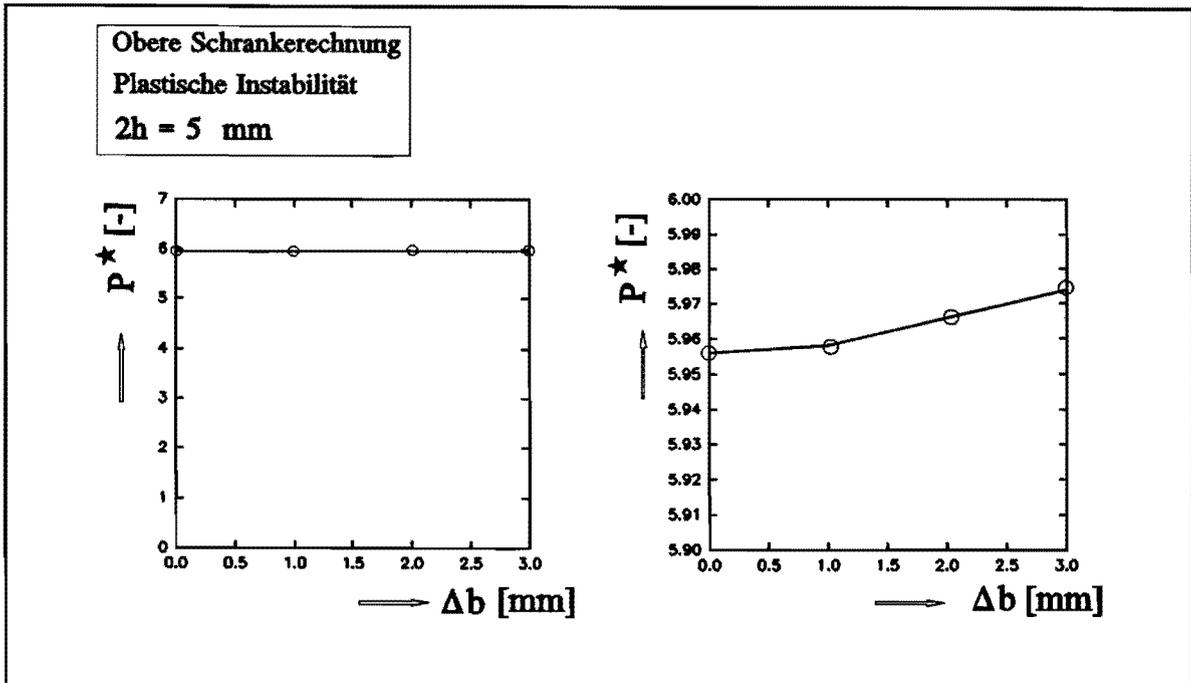


Bild 9: Ergebnisse der Obere Schrankerechnung für das plastische Instabilitätsmodell.

5 Stauchversuche

Die Aufgabe der Stauchversuche bestand darin, die Vorgänge bei Asymmetrie durch unterschiedliche Schmierstoffe experimentell zu untersuchen.

5.1 Versuchstoffe, -aufbau und durchführung

Als Versuchswerkstoff diente Aluminium 99,5. Die Länge und Breite der Proben wurde mit $l : b = 50 \text{ mm} : 50 \text{ mm}$ konstant gehalten. Die Höhe der Proben wurde in 5 mm - Schritten variiert ($2h = 5, 10, 15, 20 \text{ mm}$). Einigen der Proben wurden auf der Frontseite poliert, um Fließfiguren beim Anstauchen sichtbar zu machen.

Die Proben wurden geschmiert mit Rüböl oder Grafit. Wenn nicht geschmiert wurde, wurden die Oberflächen von Werkzeug und Werkstück mit Alkohol gereinigt vor dem Stauchversuch. Als Werkzeug dienten zwei gehärtete Stempel, Bild 10. Die Proben wurden mit verschiedenen Stempelwegen und Schmierstoffen gestaucht. Alle Versuche wurden bei Raumtemperatur durchgeführt. Zum Stauchen der Proben stand eine hydraulische Presse mit einer Maximalkraft von 2500 kN zur Verfügung. Mit zwei X,Y-Schreibern

5.3 Versuchsergebnisse

Asymmetrie kann sich bemerkbar machen durch einen Unterschied oben und unten, aber auch in Längsrichtung. Wir werden diese Unterschiede andeuten mit zweidimensionaler bzw. dreidimensionaler Asymmetrie.

Die Ergebnisse der zweidimensionalen asymmetrischen Stauchversuche (oben trocken, unten geschmiert mit Rüböl) sind den Bildern B.1 bis B.16 zu entnehmen. Mit zunehmendem Umformgrad nimmt der Biegungswinkel zu. Mit zunehmender Anfangshöhe nimmt der Biegungswinkel, bei konstantem Umformgrad, ab. Bild B.1 und Bild B.2 zeigen die Proben mit Anfangshöhen 5 mm, bzw. 10 mm bei zunehmendem Umformgrad. Die Auswirkung der asymmetrischen Schmierung hat ihre größte Auswirkung zwischen 20 und 40 % Höhenabnahme. Im Anfang ist ihre Auswirkung noch relativ gering. Ab ungefähr 20 % Höhenabnahme fangen die Proben, mit der Anfangshöhe $h=20$ mm, an zu reißen. Die Bilder B.3 und B.4 zeigen eine Probe mit 40 % Höhenabnahme. Die Risse sind deutlich zu erkennen. Bild B.5 zeigt zwei Proben mit $h = 10$ mm und $h = 15$ mm mit dem Umformgrad 50, bzw. 20 %. Die Geometrie des asymmetrischen Umformgebiets wird hier sehr deutlich gezeigt.

Die Bilder B.11 bis B.16 zeigen die Gleitlinienfelder beim Anstauchen verschiedener Proben mit variierten Anfangshöhen. Die asymmetrischen Schmierbedingungen machen sich am Anfang bei den Fließfiguren nicht sichtbar. Das stimmt überein mit den oben genannten Erfindungen der Biegungswinkel in Abhängigkeit der Höhenabnahme. Die Gleitlinien haben ihren Ursprung an den Ecken der Stempel. Die Stempelabmessungen sind symmetrisch und deswegen sieht die Verformung am Anfang auch symmetrisch aus. Im Bild 11 sind die gemessenen Kräfte aufgezeichnet in Abhängigkeit von dem b/h -Verhältnis. Die Ergebnisse der Spannungsanalyse, Oberen Schrankenrechnung und FEM-Rechnung sind auch aufgezeichnet.

Die asymmetrischen Stauchversuche mit Grafit (oben trocken, unten Grafit) gaben ein ähnliches Bild, wie die Versuche die mit Rüböl durchgeführt wurden. Die Biegungen der Proben waren dort niedriger. Die etwas geringere Schmierkapazität des Grafits wurde bestätigt mit Versuche wobei oben und unten geschmiert

wurde mit Grafit, bzw. Rüböl.

Es wurden auch symmetrische Stauchversuche durchgeführt mit Rüböl, Grafit und ohne Schmierstoff. Bild B.9 und Bild B.10 zeigen einen Fall, wobei beide Seite mit Rüböl geschmiert wurden. Eine Probe mit Anfangshöhe $h=15$ mm wurde mehr als 80 % deformiert. An der linken Seite fließ mehr Material aus, als an der rechten Seite (Bild B.10). Bild B.9 zeigt daß die Fließscheide-
linie sich nach links verschoben hat. Dieser Fall entspricht der in Abschnitt 4.4 erwähnten Theorie der plastischen Instabilität. Der Umformgrad (> 80 %) könnte man jedoch als enorm bezeichnen. Die Ergebnisse der dreidimensionale Asymmetrie werden gezeigt in dem Anhang "Versuche".

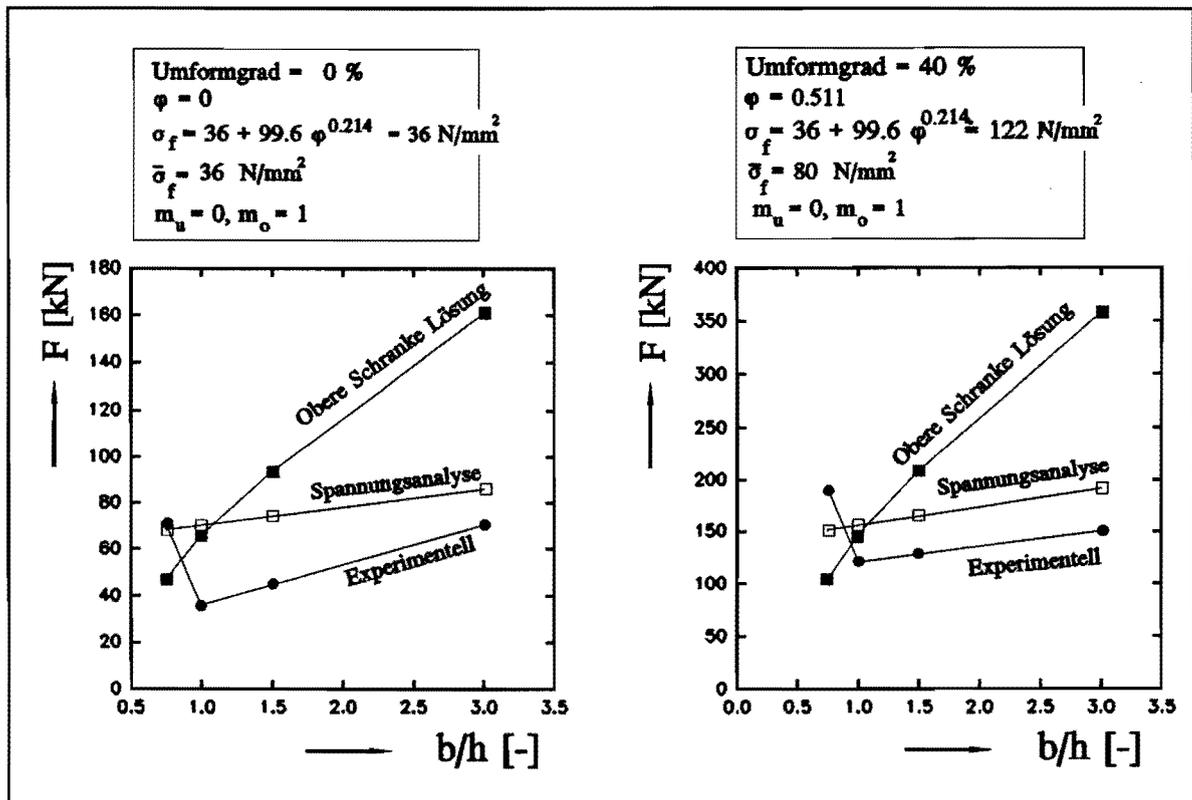


Bild 11: Stauchkräfte aus Versuch, Spannungsanalyse und Obere Schrankerechnung für verschiedene b/h .

6 Diskussion

6.1 Zweidimensionale Asymmetrie

Für den zweidimensionalen asymmetrischen Stauchversuch (ebene Umformung) ergibt sich folgendes:

1) Mit zunehmendem Umformgrad, nimmt der Biegungswinkel in Richtung der Kontaktfläche mit höherer Reibungszahl zu, bei konstanter Probendicken.

2) Mit zunehmendem Breite / Höhe - Verhältnis der Probe, nimmt der Biegungswinkel in Richtung der Kontaktfläche mit höherer Reibungszahl ab, bei konstantem Umformgrad.

Für b/h - Verhältnisse zwischen 0,75 und 1,5 bestätigt die FEM-Rechnung diese Ergebnisse sehr deutlich, wie dies die Bilder B.5 und B.30 zeigen. Ein Vergleich der FEM-Rechnung mit der visioplastischen Methode (Bohrungen) zeigt bei einem Umformgrad von 50 % eine sehr gute Übereinstimmung. Es gibt sich daraus, daß die Annahme von $m_0=1$ in diesem Fall zu rechtfertigen ist. Bei einem Verhältnis b/h von 0,75 sind die Spannungen an den Stempflecken so hoch, daß Risse im Material entstehen. Die großen Verzerrungen werden auch durch die FEM vorhergesagt. Für $b/h = 3$ entspricht die FEM-Rechnung der Wirklichkeit jedoch nicht.

Die Obere Schrankelösung mit ein Geschwindigkeitsfeld dritten Grades in y -Richtung ergibt für b/h - Verhältnisse zwischen 1 und 3 eine obere Schranke. Für $b/h = 0.75$ liegt der Wert jedoch unter dem Wert der Spannungsanalyse. Die gemessene Werte liegen jedoch unter denen der Theorie. Für $b/h < 1$ ist der Einfluß der Umformleistung groß im Verhältnis zu der Reibungsleistung. Andererseits ist für $b/h > 1$ der Einfluß der Reibungsleistung größer. Dieses wird durch die Versuche, auch für den asymmetrischen Stauchversuch bestätigt. Die Leistung ist für $b/h = 1$ minimal.

6.2 Plastische Instabilität oder Schmierungsinstabilität?

An Hand der Theorie wurde energetisch erklärt, daß eine plastische Instabilität sich leicht manifestieren konnte. Für die

Versuche, bei denen an einer Seite nicht geschmiert wurde, trat dieses nicht auf. Es ist anzunehmen, daß diese "feste" Reibung die Probe "festhält". Eine mögliche Instabilität ist nicht in der Lage, die Energie, benötigt zum Überwinden der "festen" Reibung, aufzubringen. Die symmetrischen Stauchversuche, bei denen an beiden Seiten mit Rüböl geschmiert wurde, zeigten manchmal eine Verschiebung der Fließlinie und ungleiche Ausfließung an beiden Seiten. Es besteht die Vermutung, daß diese sogenannte plastische Instabilität initiiert wird durch eine Schmierungsinstabilität. Am Anfang des Stauchens ist an der Kontaktfläche genügend Schmierstoff vorhanden in den "Schmiertaschen". Bei zunehmender Umformung wird immer mehr Schmierstoff weggedrückt bis zum Moment wo Haftreibung entsteht.

Die Stauchversuche mit Graphit zeigten eine sehr ungleichmäßige Oberfläche. Es ist nicht leicht, den festen Graphit vor dem Stauchversuch gleichmäßig über die Oberfläche zu verteilen. Wegen der beschränkten Zahl der Proben konnte leider nur sehr wenig Versuche mit Graphit durchgeführt werden. Es konnte deswegen nicht nachgeprüft werden, ob dieses sich in die Reproduzierbarkeit der Versuche mit Graphit auswirkt.

6.3 Computerprogramme zur Lösung Volumenintegrale

Ein Computerprogramm zur Lösung des Volumenintegrals mußte zuerst entwickelt werden. Um die Einflüsse der Asymmetrie in die Obere Schrankerechnung miteinzubeziehen braucht man wenigstens ein Geschwindigkeitsfeld dritten Grades in x-Richtung. Mit die Höhe des Grades des Geschwindigkeitsfeldes nimmt die Zahl der Parameter zu, und damit auch die Rechenzeit. Mit der Maßnahme, die Geschwindigkeit in x-Richtung am ungeschmierten Stempel gleich null zu stellen, braucht man ein Parameter weniger. Aus zeitlichem Grund wurden nur Ergebnisse des Geschwindigkeitsfeldes dritten Grades betrachtet. Die Umschreibung des Programms für Computersystemen mit größere Rechenkapazität braucht noch einige Zeit. Dies lohnt sich jedoch, da die Lösung von Integralen höheren Grades für normale pc's schon zu aufwendig ist.

6.4 Dreidimensionale Asymmetrie

Es wurden noch einige asymmetrische Stauchversuche durchgeführt (Anhang "Versuche"). Auch die Schmierung in Längsrichtung wurde variiert. Unter Berücksichtigung der Ergebnisse des zweidimensionalen Stauchversuches konnten die Ergebnisse dieser Stauchversuchen schon einigermaßen vorausgesagt werden. Die hier auftretende Umformung kann man jedoch als dreidimensional bezeichnen. Die konventionellen theoretischen Modelle sind hier nicht brauchbar. Die FEM-Rechnung ist dafür aber wohl geeignet, weil die Rechnung in drei Dimensionen ebenfalls möglich ist.

6.5 Asymmetrie beim Walzen

Wie bereits erwähnt wurde, soll das Flachstauchen eine Simulation des Walzprozesses darstellen. In der zu Verfügung stehenden Zeit konnte nicht nachgeprüft werden, wie sich diese Art von Asymmetrie auf den Walzprozeß auswirkt. Das Ergebnis, daß mit Zunahme des b/h - Verhältnisses der Einfluß der ungleichmäßigen Schmierung bei gleichem Umformgrad größer wird, ist aber sehr wichtig. Das Breite / Höhe - Verhältnis ist beim Kaltwalzen nämlich relativ groß. Aber auch der Umformgrad sollte darin einbezogen werden wegen der zweiten Aussage in Abschnitt 6.1.

7 Zusammenfassung

Das Flachstauchen kann man als eine Simulation des Walzprozesses ansehen. Die Spannungszustände beim Flachstauchen und Walzen sind einander sehr ähnlich, wenn man davon ausgeht, daß es sich in beiden Fällen um eine ebene Umformung handelt. Ein Aspekt der Asymmetrie beim Flachstauchen oder Walzen ist das Vorliegen unterschiedlicher Reibungszustände für die obere und untere Kontaktfläche zwischen Material und Stempeln bzw. Walzen. In diesem Bericht wird sie als zweidimensionale Asymmetrie bezeichnet. Um den Einfluß verschiedener Reibungssituationen theoretisch und experimentell für das Flachstauchen zu untersuchen, wurden sowohl in der zur Verfügung stehenden Theorie, als auch in den Experimenten, die Reibungsunterschiede zwischen den beiden Kontaktflächen übertrieben angesetzt.

Theoretisch wurde der Prozeß mit Hilfe des Stäbchenmodells, der Oberen Schrankenrechnung und der FEM für verschiedene Ausgangshöhen der Proben durchgerechnet. Bei der FEM-Rechnung wurde weiterhin der Stauchweg variiert.

Experimentell wurden Flachstauchversuche an Aluminiumproben mit verschiedenen Schmierstoffkombinationen an der Ober- und Unterseite durchgeführt.

Die Ergebnisse der FEM-Rechnung entsprachen im Allgemeinen der Praxis sehr gut. Aufgrund der Zeit konnte man die zu Verfügung stehenden Möglichkeiten nicht ausnutzen. Einen Vergleich der Kräfte aus den verschiedenen theoretischen Modellen wie Spannungsanalyse, Obere Schrankenrechnung und den Versuchen wurde durchgeführt.

Auch das für die Obere Schrankenrechnung erstellte Computerprogramm konnte, aufgrund der Zeit, nicht zur Zufriedenheit eingesetzt werden. Das Programm ist im Anhang aufgenommen.

Es wurden auch einige dreidimensionale Stauchversuchen durchgeführt (keine ebene Umformung). Sie sind im Anhang "Versuche" erwähnt. Dreidimensionalen Asymmetrie ist mit einer konventionellen Theorie schwer oder nicht zu beschreiben. Die FEM-Rechnung ist dafür aber sehr gut geeignet.

Samenvatting.

Stuiken kan gezien worden als een simulatie van het walsproces. Wanneer men ervan uitgaat dat we in beide gevallen met een vlakspanningstoestand te maken hebben tonen de spanningstoestan- den een grote overeenkomst. Wanneer daarnaast de wrijvings- situatie's in de bovenste en onderste kontaktzone, tussen materiaal en gereedschap, van elkaar verschillen hebben we te maken met een geval van asymmetrie. In dit verslag zal deze vorm van asymmetrie bestempeld worden als tweedimensionale asymmetrie. De invloeden van verschillende wrijvings-situaties worden voor het stuiken onderzocht. Zowel in de beschikbare theoretische modellen, als ook tijdens de experimenten, worden de verschillen sterk overdreven.

Theoretisch wordt het proces doorgerekend met behulp van het schillenmodel, de bovengrensmethode en de EEM. In alle gevallen wordt uitgegaan van verschillende beginhoogten bij een konstante stempelbreedte. Bij de EEM wordt verder nog de stuikweg gevarie- erd.

In de experimenten worden Aluminiumblokjes met aan de boven- en onderzijde verschillende combinaties van smeermiddelen gestuikt. De resultaten van de EEM komen in het algemeen goed overeen met de praktijk. Wegens tijdgebrek konden helaas niet alle toepas- singsmogelijkheden van het pakket gebruikt worden. De schillenme- thode en de bovengrensoptlossing worden met de praktijk ver- geleken.

Om de uit de bovengrensmethode voortkomende volume-integraal op te lossen moest een computerprogramma geschreven worden. Wegens tijdgebrek kon dit niet naar tevredenheid worden ingezet. Het computerprogramma is in de bijlage opgenomen.

Er zijn ook nog enige driedimensionale stuikproeven uitgevoerd (geen vlakspanningstoestand). De resultaten zijn in de bijlage "Versuche" vermeld. Deze driedimensionale asymmetrie is met de konventionele modellen moeilijk te beschrijven. Met een EEM- pakket is dit proces echter goed te beschrijven.

8 Literaturverzeichnis

- [1] Avitzur, B.: Metal Forming: Processes & Analysis. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [2] Alexander, J.M.: The effect of Coulomb Friction in the plane strain compression of a plastic-rigid material. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 3 (1955), S.233-245
- [3] Backofen, W.A.: Deformation Processing. Cambridge, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company 1972.
- [4] Cho, M-L: Bewertung der Anwendbarkeit der Finite-Elemente-Methode (FEM) für die Umformtechnik. Dr.-Ing. Diss. RWTA Aachen, s.a. Düsseldorf: Verlag Stahleisen, Umformtechnische Schriften Band 12 1987.
- [5] Heurtault, S., und L. Zeidler: Study of Asymmetrical Rolling, Proc. 4th International Steel Rolling Conference, Deauville 1987.
- [6] Hill, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press 1964.
- [7] Hoogenboom, S: Technische Plasticiteitsleer. Collegediktaat 4406, T.U. Eindhoven, 1987.
- [8] Johnson, W., und P.B. Mellor: Engineering Plasticity. London: Van Nostrand Rheinhold Company 1973.
- [9] Johnson, W., R. Sowerby und J.B. Haddow: Plane-Strain Slip-Line Fields. London: Edward Arnold (Publishers) LTD 1970.
- [10] Johnson, W., R. Sowerby und R.D. Venter: Plane Strain Slip Line Fields. Oxford, Frankfurt: Pergamon Press 1982.
- [11] Kals, J.A.G., J.H. Dautzenberg und J.A.H. Ramaekers: Berwerkingstechnologie. Collegediktaat 4558, T.U.Eindhoven 1983.
- [12] Kiuchi, M., S.H. Hsiang und Y.M. Hwang: Analytical Model of Asymmetrical Rolling Processes of Sheets, Proc. 4th International Steel Rolling Conference, Deauville 1987.
- [14] Löffler, L.: Untersuchungen zum Aufrauen von Bandstahl. Dr.-Ing. Diss. RWTA Aachen, s.a. Düsseldorf: Verlag Stahleisen, Umformtechnische Schriften Band 17 1987.
- [15] Sauer, R., und O. Pawelski: Theoretical Study of the Effect of Asymmetries on the Cold Rolling Process. Steel Research 58 (1987) 7.
- [16] Sluis, A. van der, und C.A.C. Gorts: Cursus Pascal, 6^e druk, Utrecht, 1986.
- [17] Borland: Turbo Pascal 6.0, Programmierhandbuch, 1. Druck, 1990.
- [18] Borland: Turbo Pascal 6.0, Benutzerhandbuch, 1. Druck, 1990.
- [19] Engeln-Müllges, G., und F. Reutter: Formelsammlung zur numerischen Mathematik mit BASIC-Programmen. B.I.-Wissenschaftsverlag 1983.
- [20] Kreytzig, E.: Engineering Mathematics. New York, 1980.

Appendix A

A.1 Spannungsanalyse-Stäbchenmodell

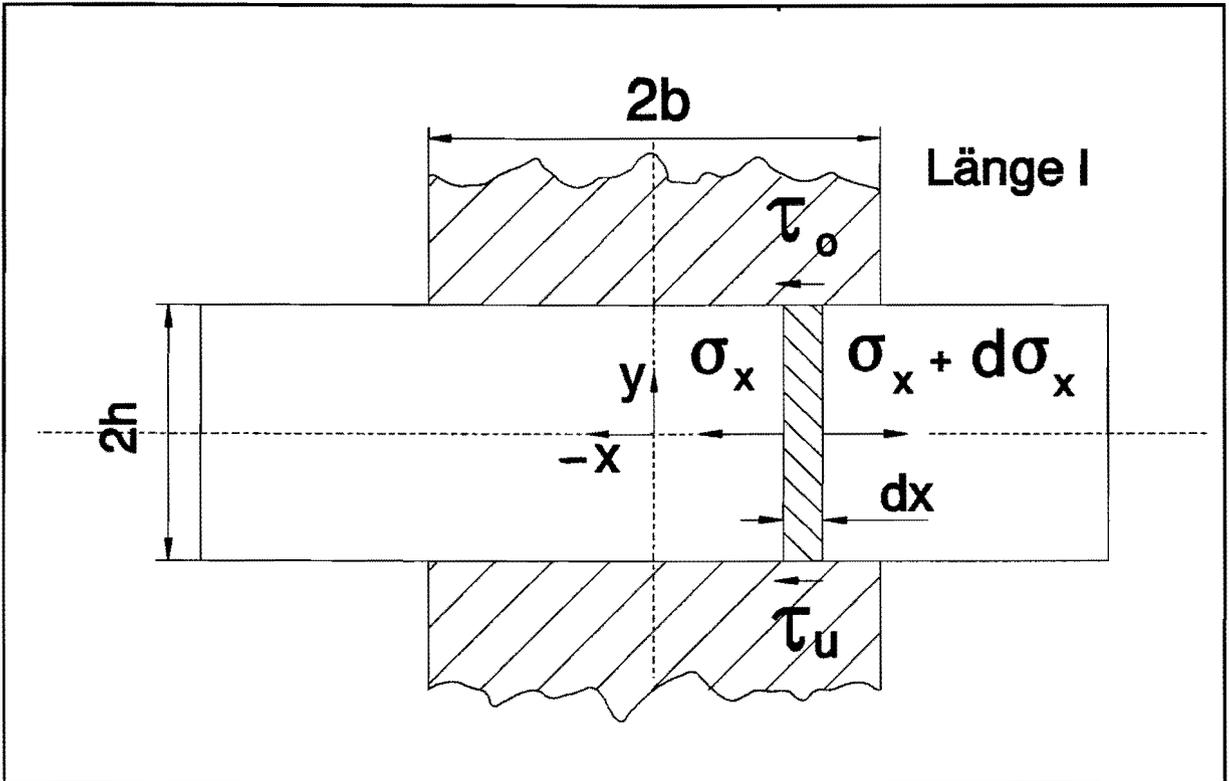


Bild App.A.1: Stäbchenmodell.

Um die benötigte Umformkraft zu berechnen, teilt man die Probe in ein infinite Zahl von Stäbchen der Breite dx auf. Die Spannungen, die links und rechts einwirken, sind σ_x bzw. $\sigma_x + d\sigma_x$. Oben und unten sind die Schubspannungen τ_o bzw. τ_u wirksam. Die Breite der Probe ist in diesem Fall nicht von Belang, wohl aber die Breite des Stempels ($2b$), da die Probe breiter ist als der Stempel. Die Höhe der Probe ist $2h$, die Länge l , Bild App.A.1. Das Kräftegleichgewicht in x -Richtung liefert:

$$-\sigma_x 2hl + (\sigma_x + d\sigma_x) 2hl - (\tau_o + \tau_u) l dx = 0 \quad (A.1)$$

Hieraus gibt sich eine Differentialgleichung:

$$2h d\sigma_x = (\tau_o + \tau_u) dx \quad (A.2)$$

$$\Rightarrow d\sigma_x = \frac{(\tau_o + \tau_u)}{2h} dx \quad (A.3)$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{(\tau_o + \tau_u)}{2h} x + C \quad (A.4)$$

Gleichung (A.4) mit die Randbedingung (A.5) ergibt sich zu (A.7):

$$\sigma_x(x=+b) = 0 \quad (A.5)$$

$$C = -\frac{(\tau_o + \tau_u)}{2h} b \quad (A.6)$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{(\tau_o + \tau_u)}{2h} (x - b) \quad (A.7)$$

Die auftretende Schubspannung wird oft definiert als $\tau = m \cdot \tau_{\max}$, wobei m der Reibungsfaktor ist. Für $m=0$ existiert keine Reibung, für $m=1$ wird die Schubspannung maximal. Die Schubspannung in Gleichung (A.7) kann man also ersetzen durch

$$\tau = \frac{m}{\sqrt{3}} \sigma_f \quad (A.8)$$

Damit hat die Spannung in x-Richtung die Form:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}} (m_o + m_u) \frac{(x - b)}{2h} \quad (A.9)$$

Weil wir davon ausgehen, daß es sich hier um ebene Umformung handelt, gilt:

$$\epsilon_z = 0 ; \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} ; \sigma_x - \sigma_y = \frac{2\sigma_f}{\sqrt{3}} \quad (A.10)$$

$$\Rightarrow \sigma_y = \sigma_x - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_f \quad (A.11)$$

(A.9) mit (A.11):

$$\sigma_y = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_f \left\{ 1 + \frac{(b - x)}{4h} (m_o + m_u) \right\} \quad (A.12)$$

Die Stauchkraft läßt sich durch Integration der Spannung in Y-Richtung über die Kontaktfläche mit den Stempel berechnen:

$$F = l \int_{x=-b}^{x=+b} |\sigma_y| dx = 2l \int_{x=0}^{x=+b} |\sigma_y| dx = \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} l \sigma_f \int_{x=0}^{x=+b} \left\{ 1 + \frac{b-x}{4h} (m_o + m_u) \right\} dx = \quad (\text{A.14})$$

$$= \frac{4l\sigma_f}{\sqrt{3}} \left[\left\{ 1 + \frac{b}{4h} (m_o + m_u) \right\} x - (m_o + m_u) \frac{x^2}{8h} \right]_{x=0}^{x=+b} = \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{4bl\sigma_f}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + \frac{m_o + m_u}{8} \left(\frac{b}{h} \right) \right\} \quad (\text{A.16})$$

Die Kraft dimensionslos geschrieben:

$$F^* = \frac{F}{bl\sigma_f} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + \frac{m_o + m_u}{8} \left(\frac{b}{h} \right) \right\} \quad (\text{A.17})$$

Im Bild App.A.2 ist die dimensionslose Stauchkraft dargestellt wie im Bild 7 Auch die m-Werten werden hier variiert.

Ergebnisse des Stäbchenmodells für verschiedene Kombinationen von m_o/m_u

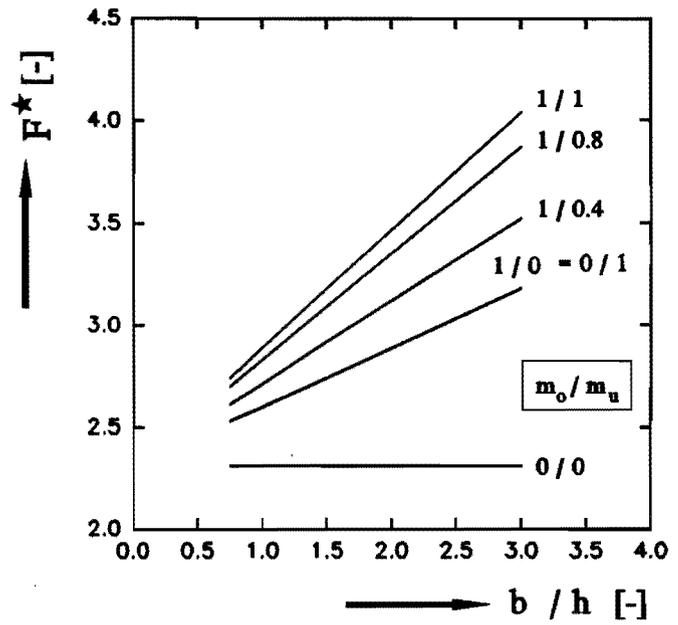


Bild App.A.2: Dimensionslose Stauchkraft für $b/h = 0.75, 1, 1.5$ und 3 für variierende m_u - und m_o -Werten.

Appendix B

B.1 Obere Schrankenrechnung

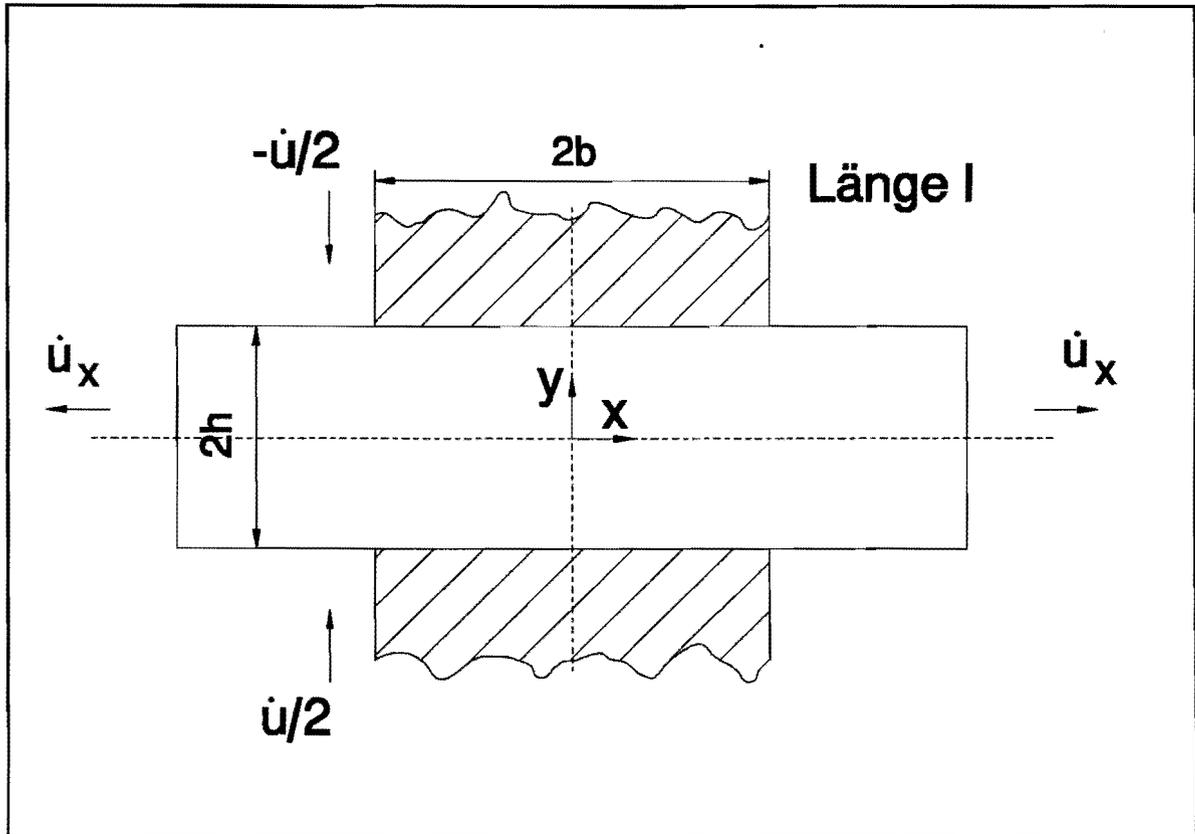


Bild App.B.1: Obere Schranke Modell.

Die Theorie der Oberen Schranke besagt, daß von allen kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfeldern \dot{u} das wirklich vorhandene den Ausdruck

$$P_m = \sigma_f \int_V \dot{\epsilon} dV + \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma} |\Delta \dot{u}_t| d\Delta + \frac{m\sigma_f}{\sqrt{3}} \int_{s_{fx}} |\dot{u}_t| dS - \int_{s_t} t_1 \dot{u}_1 dS \quad (B.1)$$

zu einem Minimum macht. Zur Minimierung von Gleichung (B.1) muß das Geschwindigkeitsfeld über einen oder mehrere freien Parameter verfügen. In dieser Form der Gleichung wird davon ausgegangen, daß der Werkstoff sich der Körper in einem Zustand plastischen Fließens befindet. Die Leistung, die von den Flächen an denen die Geschwindigkeit vorgegeben ist übertragen wird, bezeichnet mit P_m , ist Ziel der Berechnung. Dazu unterscheidet man die schon

erwähnten vier Teilleistungen:

- * Umformleistung oder Interne Leistung P_d .
- * Scherleistung P_r .
- * Reibleistung P_{fr} .
- * Externe Leistung P_E .

Weil es in unserem Fall keine Flächen gibt wo die Spannungen vorgegeben sind, und kein 'Umlenken' des Werkstoffes platzfindet, sind hier keine Externe Leistung bzw. Scherleistung vorhanden. Die hier durchzuführende Leistungsberechnung kann deshalb auf eine Berechnung zweier Anteile, Reib- und Umformleistung, begrenzt werden. Die Reibleistung wird durch die Lösung eines Flächenintegrals und die Umformleistung durch die Lösung eines Volumenintegrals gefunden. Man braucht deswegen den genauen Verlauf der Geometrie des Werkstücks während der Umformung. Zum Anfang wird auf eine Berechnung während der Umformung verzichtet und deswegen ist die Leistungsberechnung nur auf den Anfang der Umformung beschränkt.

B.2 Geschwindigkeitsfeld

Bei der folgenden Anwendung der Theorie der Oberen Schranke wird von der gleichen Geometrie der Probe und dem gleichen Koordinatensystem wie in der Spannungsanalyse ausgegangen, Bild App.B.1. Aus Symmetriegründen wird zunächst nur eine Hälfte der Probe betrachtet. Eine mögliche mathematische Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes ergibt sich, bei einer Stempelgeschwindigkeit oben und unten von $-\dot{u}/2$ bzw. $+\dot{u}/2$, durch

$$\dot{u}_x = \left\{ \alpha + \beta \left(\frac{y}{h} \right) + \gamma \left(\frac{y}{h} \right)^2 + \delta \left(\frac{y}{h} \right)^3 \right\} * \left(\frac{x}{b} \right) \dot{u} \quad (B.2)$$

wobei α , β , γ und δ die Minimalisierungsparameter sind. Zur Berechnung der Geschwindigkeit in Y-Richtung \dot{u}_y wird davon ausgegangen daß es sich hier um ebene Umformung handelt. Für die Formänderungsgeschwindigkeit in X- und Y-Richtung gilt:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} = \left(\alpha + \beta \left(\frac{y}{h} \right) + \gamma \left(\frac{y}{h} \right)^2 + \delta \left(\frac{y}{h} \right)^3 \right) \frac{\dot{u}}{b} = -\dot{\epsilon}_{yy} = -\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} \quad (B.3)$$

Hiermit gibt sich für die Geschwindigkeit in Y-Richtung:

$$\dot{u}_y = - \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \left(\frac{y}{h} \right) + \frac{\gamma}{3} \left(\frac{y}{h} \right)^2 + \frac{\delta}{4} \left(\frac{y}{h} \right)^3 \right) \frac{y}{b} \dot{u} + C(x) \quad (B.4)$$

Die Randbedingungen sorgen dafür, daß $C(x)$ eliminiert werden kann. Die folgenden Randbedingungen sollen berücksichtigt werden:

$$y = +h, \quad \dot{u}_y = -\frac{\dot{u}}{2} \rightarrow -\frac{\dot{u}}{2} = -\dot{u} \frac{h}{b} \left(\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\delta}{4} \right) + C(x) \quad (B.5)$$

$$y = -h, \quad \dot{u}_y = \frac{\dot{u}}{2} \rightarrow \frac{\dot{u}}{2} = - \left(-\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{3} + \frac{\delta}{4} \right) \frac{h}{b} \dot{u} + C(x) \quad (B.6)$$

$$\rightarrow C(x) = \left(\beta + \frac{\delta}{2} \right) \frac{h}{b} \frac{\dot{u}}{2} \quad (B.7)$$

Hieraus ergibt sich die Geschwindigkeit in Y-Richtung:

$$\dot{u}_y = - \left\{ \alpha \left(\frac{y}{h} \right) + \frac{\beta}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 + \frac{\gamma}{3} \left(\frac{y}{h} \right)^3 + \frac{\delta}{4} \left(\frac{y}{h} \right)^4 - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{4} \right\} \frac{h}{b} \dot{u} \quad (B.8)$$

B.3 Berechnung der Umformleistung

Die Umformleistung wie sie im ersten Glied von Gleichung (B.1) beschrieben ist, läßt sich für den Stauchversuch folgenderweise umschreiben:

$$P_d = \sigma_f \int_V \dot{\epsilon} dV \quad (B.9)$$

Hierin ist die Fließspannung als Konstanten zu betrachten. Dies bedeutet eine Beschränkung der Allgemeingültigkeit der Leistungsberechnung. Im unserem Fall ist das zu rechtfertigen. Die Vergleichsformänderungsgeschwindigkeit, beschrieben durch Gleichung (B.14), wird aus dem Geschwindigkeitsfeld aus Gleichung (B.2) berechnet.

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{x}{bh} \left(\beta + 2\gamma \left(\frac{y}{h} \right) + 3\delta \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) \dot{u} \quad (B.10)$$

$$\dot{\epsilon}_{xx}^2 = \left(\alpha + \beta \left(\frac{y}{h} \right) + \gamma \left(\frac{y}{h} \right)^2 + \delta \left(\frac{y}{h} \right)^3 \right)^2 \left(\frac{\dot{u}}{b} \right)^2 \quad (\text{B.11})$$

$$\dot{\epsilon}_{xy}^2 = \left(\frac{\beta}{2} + \gamma \left(\frac{y}{h} \right) + \frac{3\delta}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right)^2 \left(\frac{x\dot{u}}{bh} \right)^2 \quad (\text{B.12})$$

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}(\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2) + \frac{4}{3}\dot{\epsilon}_{xy}^2} = \quad (\text{B.13})$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3} \left\{ \left(\alpha + \beta \left(\frac{y}{h} \right) + \gamma \left(\frac{y}{h} \right)^2 + \delta \left(\frac{y}{h} \right)^3 \right)^2 \left(\frac{\dot{u}}{b} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} + \gamma \left(\frac{y}{h} \right) + \frac{3\delta}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right)^2 \left(\frac{x\dot{u}}{bh} \right)^2 \right\}}$$

(B.14)

Den Volumenintegral, den nur numerisch gelöst werden kann, hat den folgenden Form:

$$P_d = \sigma_f \int_{V_d} \dot{\epsilon} dV = \sigma_f l \int_{x=-b}^{x=+b} \int_{y=-h}^{y=+h} \sqrt{\frac{4}{3} \{ (\dots)^2 (\dots)^2 + (\dots)^2 (\dots)^2 \}} dx dy = \quad (\text{B.15})$$

$$= 2\sigma_f l \int_{x=0}^{x=+b} \int_{y=-h}^{y=+h} \sqrt{\frac{4}{3} \{ (\dots)^2 (\dots)^2 + (\dots)^2 (\dots)^2 \}} = \quad (\text{B.16})$$

$$= \frac{4\sigma_f l \dot{u}}{\sqrt{3}b} \int_{x=0}^{x=+b} \int_{y=-h}^{y=+h} \sqrt{\left(\alpha + \beta \left(\frac{y}{h} \right) + \gamma \left(\frac{y}{h} \right)^2 + \delta \left(\frac{y}{h} \right)^3 \right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} + \gamma \left(\frac{y}{h} \right) + \frac{3\delta}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right)^2 \left(\frac{x}{h} \right)^2} dx dy \quad (\text{B.17})$$

Für die dimensionslose Umformleistung gilt nun:

$$P_d^* = \frac{P_d}{\sigma_f b l \dot{u}} = \frac{4}{\sqrt{3}b^2} \int_{x=0}^{x=b} \int_{y=-h}^{y=h} \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2 (\dots)^2} dx dy \quad (\text{B.18})$$

Wenn auch x und y dimensionslos geschrieben werden gilt:

$$x^* = \frac{x}{b} \Rightarrow x = bx^* \Rightarrow dx = b dx^* \quad (\text{B.19})$$

$$y^* = \frac{Y}{h} \rightarrow y = hy^* \rightarrow dy = hdy^* \quad (\text{B.20})$$

$$P_d^* = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{x^*=0}^{x^*=1} \int_{y^*=-1}^{y^*=+1} \sqrt{(\alpha + \beta y^* + \gamma y^{*2} + \delta y^{*3})^2 \left(\frac{h}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} + \gamma y^* + \frac{3\delta}{2} y^{*2}\right)^2 x^{*2}} dx^* dy^* \quad (\text{B.21})$$

B.4 Berechnung der Reibleistung

Als Reibungsmodell wird das durch von Mises dargestellte Modell mit konstanten Reibungsfaktor m gewählt; dieses Prinzip wurden schon in den Spannungsanalyse verwendet (Gleichung A.8)

$$P_{fr} = \frac{\sigma_{fl} m}{\sqrt{3}} \int_{S_{fr}} |\dot{u}_t| dS = \quad (\text{B.22})$$

Auch hier werden die Reibungsbedingungen wieder ausgedrückt in eine Reibungszahl für den Oberstempel, m_o , und für den Unternstempel, m_u . Hierdurch setzt die Reibleistung sich aus zwei Teilen zusammen. Neben die Reibungsfaktoren, m_o und m_u , ist hier die Relativgeschwindigkeit \dot{u}_t von größten Bedeutung. Sie läßt sich aus der in Gleichung (B.2) beschriebenen Geschwindigkeit in x-Richtung an die Stellen $y=-h$ und $y=+h$ bestimmen. Hier ist ein relativ einfaches Flächenintegral über x (von $-b$ bis $+b$) zu lösen. Damit beträgt die Reibleistung:

$$P_{fr} = \frac{\sigma_f m_o l}{\sqrt{3}} \int_{x=-b}^{x=+b} |\dot{u}_x(y=+h)| dx + \frac{\sigma_f m_u l}{\sqrt{3}} \int_{x=-b}^{x=+b} |\dot{u}_x(y=-h)| dx = \quad (B.23)$$

$$= \frac{2\sigma_f m_o l}{\sqrt{3}} \int_{x=0}^{x=+b} |\dot{u}_x(y=+h)| dx + \frac{2\sigma_f m_u l}{\sqrt{3}} \int_{x=0}^{x=+b} |\dot{u}_x(y=-h)| dx = \quad (B.24)$$

$$= \frac{2\sigma_f m_o l \dot{u}}{\sqrt{3}b} |\alpha + \beta + \gamma + \delta| \int_{x=0}^{x=+b} x dx + \frac{2\sigma_f m_u l \dot{u}}{\sqrt{3}b} |\alpha - \beta + \gamma - \delta| \int_{x=0}^{x=+b} x dx = \quad (B.25)$$

$$= \frac{\sigma_f m_o b l \dot{u}}{\sqrt{3}} |\alpha + \beta + \gamma + \delta| + \frac{\sigma_f m_u b l \dot{u}}{\sqrt{3}} |\alpha - \beta + \gamma - \delta| = \quad (B.26)$$

$$= \frac{\sigma_f b l \dot{u}}{\sqrt{3}} (m_o |\alpha + \beta + \gamma + \delta| + m_u |\alpha - \beta + \gamma - \delta|) \quad (B.27)$$

Die Reibleistung dimensionslos geschrieben:

$$P_{fr}^* = \frac{P_{fr}}{\sigma_f b l \dot{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (m_o |\alpha + \beta + \gamma + \delta| + m_u |\alpha - \beta + \gamma - \delta|) \quad (B.28)$$

Für die Gesamtleistung:

$$P_m^* = P_d^* + P_{fr}^* \quad (B.29)$$

Wegen Volumeninvarianz gilt:

$$2 \int_{x=0}^{x=+b} \frac{\dot{u}}{2} dx = \int_{y=-h}^{y=+h} \dot{u}_x(x=+b) dy \Rightarrow \quad (B.30)$$

$$\dot{u}b = \frac{b}{b} \dot{u} \left[\alpha y + \frac{\beta}{2} \frac{y^2}{h} + \frac{\gamma}{3} \frac{y^3}{h^2} + \frac{\delta}{4} \frac{y^4}{h^3} \right]_{y=-h}^{y=+h} \Rightarrow \quad (B.31)$$

$$\alpha + \frac{\gamma}{3} = \frac{b}{2h} \quad (B.32)$$

Um das Geschwindigkeitsfeld zu finden wofür die Gesamtleistung minimal ist braucht man Gleichung (B.33) zu lösen.

$$\frac{\partial^3 P_m^*}{\partial \beta \partial \gamma \partial \delta} = 0, \quad \alpha = \frac{b}{2h} - \frac{\gamma}{3} \quad (\text{B.33})$$

A.5 Berechnung der Gesamtleistung für ein Geschwindigkeitsfeld ersten Grades

$$\dot{u}_x = \left(\alpha + \beta \frac{y}{h} \right) \frac{x}{b} \dot{u}$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} = \left(\alpha + \beta \frac{y}{h} \right) \frac{\dot{u}}{b} = -\dot{\epsilon}_{yy} = -\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}$$

$$\dot{u}_y = -\frac{\dot{u}}{b} \frac{\beta}{h} \frac{1}{2} y^2 + C(x)$$

Randbedingung: $y = +h, \dot{u}_y = -\frac{\dot{u}}{2} \rightarrow$

$$-\frac{\dot{u}}{2} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{u}}{b} \frac{\beta}{h} h^2 + C(x)$$

Randbedingung: $y = -h, \dot{u}_y = \frac{\dot{u}}{2} \rightarrow$

$$\frac{\dot{u}}{2} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{u}}{b} \frac{\beta}{h} h^2 + C(x)$$

$$C(x) = \frac{\beta}{2} \frac{h}{b} \dot{u}$$

$$\dot{u}_y = \frac{\dot{u}}{b} \left(\frac{\beta}{2} h - \frac{\beta}{2h} y^2 \right)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} = \frac{\beta}{2} \frac{x}{hb} \dot{u}$$

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2) + \frac{4}{3} \dot{\epsilon}_{xy}^2} = \sqrt{\frac{4}{3} (\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{xy}^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{\dot{u}}{b}\right)^2 \left\{ \left(\alpha + \beta \frac{y}{h}\right)^2 + \left(\frac{\beta x}{2h}\right)^2 \right\}}$$

$$P_d = \sigma_f \int_{V_d} \bar{\epsilon} dV = \sigma_f l \int_{x=-b}^{x=+b} \int_{y=-h}^{y=+h} \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{\dot{u}}{b}\right)^2 \left\{ \left(\alpha + \beta \frac{y}{h}\right)^2 + \left(\frac{\beta x}{2h}\right)^2 \right\}} dx dy =$$

$$= \frac{4 \sigma_f l \dot{u}}{\sqrt{3} b} \int_{x=0}^{x=+b} \int_{y=-h}^{y=+h} \sqrt{\left(\alpha + \beta \frac{y}{h}\right)^2 + \left(\frac{\beta x}{2h}\right)^2} dx dy$$

$$P_d^* = \frac{P_d}{\sigma_f b l \dot{u}} = \frac{4}{\sqrt{3} b^2} \int_{x=0}^{x=+b} \int_{y=-h}^{y=+h} \sqrt{\left(\alpha + \beta \frac{y}{h}\right)^2 + \left(\frac{\beta x}{2h}\right)^2} dx dy$$

$$x^* = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b x^* \Rightarrow dx = b dx^*$$

$$y^* = \frac{y}{h} \Rightarrow y = h y^* \Rightarrow dy = h dy^*$$

$$P_d^* = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{x^*=0}^{x^*=1} \int_{y^*=-1}^{y^*=+1} \sqrt{\left(\alpha + \beta y^*\right)^2 \left(\frac{h}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} x^*\right)^2} dx^* dy^*$$

$$P_{fr} = \frac{m \sigma_f}{\sqrt{3}} \int_{S_{fr}} |\dot{u}| dS =$$

$$P_{fr} = \frac{m_o \sigma_f l}{\sqrt{3}} \int_{x=-b}^{x=+b} |\dot{u}_x(y=+h)| dx + \frac{m_u \sigma_f l}{\sqrt{3}} \int_{x=-b}^{x=+b} |\dot{u}_x(y=-h)| dx =$$

$$P_{fr} = \frac{2 m_o \sigma_f l}{\sqrt{3}} \int_{x=0}^{x=+b} |\dot{u}_x(y=+h)| dx + \frac{2 m_u \sigma_f l}{\sqrt{3}} \int_{x=0}^{x=+b} |\dot{u}_x(y=-h)| dx =$$

$$= \frac{2 m_o \sigma_f l}{\sqrt{3}} \int_{x=0}^{x=+b} |\alpha + \beta| \frac{\dot{u}}{b} x dx + \frac{2 m_u \sigma_f l}{\sqrt{3}} \int_{x=0}^{x=+b} |\alpha - \beta| \frac{\dot{u}}{b} x dx =$$

$$= \frac{2 m_o \sigma_f l}{\sqrt{3}} |\alpha + \beta| \frac{\dot{u}}{b} b^2 + \frac{2 m_u \sigma_f l}{\sqrt{3}} |\alpha - \beta| \frac{\dot{u}}{b} b^2 =$$

$$= \frac{\sigma_f b l \dot{u}}{\sqrt{3}} (m_o |\alpha + \beta| + m_u |\alpha - \beta|)$$

$$P_{fr}^* = \frac{P_{fr}}{\sigma_f b l \dot{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (m_o |\alpha + \beta| + m_u |\alpha - \beta|)$$

$$P_m^* = P_d^* + P_{fr}^*$$

$$\text{Volumeninvarianz: } 2 \int_0^{x=+b} \frac{\dot{u}}{2} dx = \int_{y=-h}^{y=+h} \dot{u}_x(x=+b) dy \Rightarrow$$

$$\dot{u} b = \frac{b}{b} \dot{u} \left[\alpha y + \frac{\beta}{2} \frac{y^2}{h} \right]_{y=-h}^{y=+h} \Rightarrow \frac{b}{h} = 2\alpha$$

$$\frac{\partial P_m^*}{\partial \beta} = 0, \quad 2\alpha = \frac{b}{h}$$

A.6 Berechnung der Gesamtleistung für ein Geschwindigkeitsfeld fünften Grades

$$\dot{u}_x = \left\{ \alpha + \beta \left(\frac{y}{h} \right) + \gamma \left(\frac{y}{h} \right)^2 + \delta \left(\frac{y}{h} \right)^3 + \epsilon \left(\frac{y}{h} \right)^4 + \eta \left(\frac{y}{h} \right)^5 \right\} * \left(\frac{x}{b} \right) \dot{u}$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} = \left\{ \alpha + \beta \left(\frac{y}{h} \right) + \gamma \left(\frac{y}{h} \right)^2 + \delta \left(\frac{y}{h} \right)^3 + \epsilon \left(\frac{y}{h} \right)^4 + \eta \left(\frac{y}{h} \right)^5 \right\} * \left(\frac{\dot{u}}{b} \right) = -\dot{\epsilon}_{yy} = -\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}$$

$$\dot{u}_y = - \left\{ \alpha y + \frac{\beta}{2} \left(\frac{y^2}{h} \right) + \frac{\gamma}{3} \left(\frac{y^3}{h^2} \right) + \frac{\delta}{4} \left(\frac{y^4}{h^3} \right) + \frac{\epsilon}{5} \left(\frac{y^5}{h^4} \right) + \frac{\eta}{6} \left(\frac{y^6}{h^5} \right) \right\} \frac{\dot{u}}{b} + C(x)$$

$$\text{Randbedingung: } y = +h, \quad \dot{u}_y = -\frac{\dot{u}}{2} \Rightarrow$$

$$-\frac{\dot{u}}{2} = - \left(\alpha h + \frac{\beta}{2} h + \frac{\gamma}{3} h + \frac{\delta}{4} h + \frac{\epsilon}{5} h + \frac{\eta}{6} h \right) * \frac{\dot{u}}{b} + C(x)$$

Randbedingung: $y = -h, \dot{u}_y = \frac{\dot{u}}{2} \Rightarrow$

$$\frac{\dot{u}}{2} = -\left(-\alpha h + \frac{\beta}{2}h - \frac{\gamma}{3}h + \frac{\delta}{4}h - \frac{\epsilon}{5}h + \frac{\eta}{6}h\right) * \frac{\dot{u}}{b} + C(x)$$

$$0 = \left(-2\frac{\beta}{2}h - 2\frac{\delta}{4}h - 2\frac{\eta}{6}h\right) * \frac{\dot{u}}{b} + 2C(x) \Rightarrow C(x) = \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{4} + \frac{\eta}{6}\right) * \frac{h}{b} \dot{u}$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x}\right) = \frac{x\dot{u}}{2b} \left(\frac{\beta}{h} + \frac{2\gamma y}{h^2} + \frac{3\delta y^2}{h^3} + \frac{4\epsilon y^3}{h^4} + \frac{5\eta y^4}{h^5}\right) =$$

$$= \frac{x\dot{u}}{2bh} \left(\beta + \frac{2\gamma y}{h} + \frac{3\delta y^2}{h^2} + \frac{4\epsilon y^3}{h^3} + \frac{5\eta y^4}{h^4}\right) =$$

$$= \frac{x\dot{u}}{2bh} \left(\beta + 2\gamma\left(\frac{y}{h}\right) + 3\delta\left(\frac{y}{h}\right)^2 + 4\epsilon\left(\frac{y}{h}\right)^3 + 5\eta\left(\frac{y}{h}\right)^4\right)$$

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{4}{3}\dot{\epsilon}_{xy}^2 + \frac{2}{3}(\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2)} = \sqrt{\frac{4}{3}(\dot{\epsilon}_{xy}^2 + \dot{\epsilon}_{xx}^2)} =$$

$$= \frac{2\dot{u}}{\sqrt{3}b} \sqrt{\left(\alpha + \beta\left(\frac{y}{h}\right) + \gamma\left(\frac{y}{h}\right)^2 + \delta\left(\frac{y}{h}\right)^3 + \epsilon\left(\frac{y}{h}\right)^4 + \eta\left(\frac{y}{h}\right)^5\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{x}{2h}\right)^2 \left(\beta + 2\gamma\left(\frac{y}{h}\right) + 3\delta\left(\frac{y}{h}\right)^2 + 4\epsilon\left(\frac{y}{h}\right)^3 + 5\eta\left(\frac{y}{h}\right)^4\right)^2}$$

$$P_d = \sigma_f \int \dot{\epsilon} dV = \frac{2\dot{u}\sigma_f l}{\sqrt{3}b} \int_x \int_y \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2 (\dots)^2} dx dy =$$

$$= \frac{2\dot{u}\sigma_f l}{\sqrt{3}b} \int_{x=-b}^{x=+b} \int_{y=-h}^{y=+h} \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2 (\dots)^2} dx dy =$$

$$= \frac{4\dot{u}\sigma_f l}{\sqrt{3}b} \int_{x=0}^{x=b} \int_{y=-h}^{y=h} \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2 (\dots)^2} dx dy$$

$$P_d^* = \frac{P_d}{\sigma_f \dot{u} b l} = \frac{4}{\sqrt{3}b^2} \int_{x=0}^{x=b} \int_{y=-h}^{y=h} \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2 (\dots)^2} dx dy$$

$$x^* = \frac{x}{b} \Rightarrow x = bx^* \Rightarrow dx = b dx^*$$

$$P_d^* = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{x^*=0}^{x^*=1} \int_{y^*=-1}^{y^*=+1} \sqrt{(\alpha + \beta y^* + \gamma y^{*2} + \delta y^{*3} + \epsilon y^{*4} + \eta y^{*5})^2 \left(\frac{h}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} + \gamma y^* + \frac{3\delta}{2} y^{*2} + 2\epsilon y^{*3} + \frac{5\eta}{2} y^{*4}\right)^2 x^{*2}} dx^* dy^*$$

$$P_d^* = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{x^*=0}^{x^*=1} \int_{y^*=-1}^{y^*=+1} \sqrt{(\alpha + \beta y^* + \gamma y^{*2} + \delta y^{*3} + \epsilon y^{*4} + \eta y^{*5})^2 \left(\frac{h}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} + \gamma y^* + \frac{3\delta}{2} y^{*2} + 2\epsilon y^{*3} + \frac{5\eta}{2} y^{*4}\right)^2 x^{*2}} dx^* dy^*$$

$$P_{fx} = \frac{2m_o \sigma_f l}{\sqrt{3}b} \int_{x=0}^{x=b} |\dot{u}_x(y=+h)| dx + \frac{2m_u \sigma_f l}{\sqrt{3}b} \int_{x=0}^{x=b} |\dot{u}_x(y=-h)| dx =$$

$$= \frac{2\sigma_f l \dot{u}}{\sqrt{3}b} \left\{ m_o |\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \eta| \left[\frac{1}{2} X^2 \right]_{x=0}^{x=b} + m_u |\alpha - \beta + \gamma - \delta + \epsilon - \eta| \left[\frac{1}{2} X^2 \right]_{x=0}^{x=b} \right\} =$$

$$= \frac{\sigma_f b l \dot{u}}{\sqrt{3}} \{ m_o |\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \eta| + m_u |\alpha - \beta + \gamma - \delta + \epsilon - \eta| \}$$

$$P_{fx}^* = \frac{P_{fx}}{\sigma_f b l \dot{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ m_o |\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \eta| + m_u |\alpha - \beta + \gamma - \delta + \epsilon - \eta| \}$$

$$P_m^* = P_d^* + P_{fr}^*$$

$$\text{Volumeninvarianz: } 2 \int_0^{x=+b} \frac{\dot{u}}{2} dx = \int_{y=-h}^{y=+h} \dot{u}_x(x=+b) dy \Rightarrow$$

$$\dot{u}b = \frac{b}{b} \dot{u} \left[\alpha y + \frac{\beta}{2} \frac{y^2}{h} + \frac{\gamma}{3} \frac{y^3}{h^2} + \frac{\delta}{4} \frac{y^4}{h^3} + \frac{\epsilon}{5} \frac{y^5}{h^4} + \frac{\eta}{6} \frac{y^6}{h^5} \right]_{y=-h}^{y=+h} \Rightarrow$$

$$\frac{b}{h} = 2\alpha + \frac{2\gamma}{3} + \frac{\eta}{3}$$

$$\frac{\partial^5 P_m^*}{\partial \beta \partial \gamma \partial \delta \partial \epsilon \partial \eta} = 0, \quad 2\alpha = \frac{b}{h} - \frac{2\gamma}{3} + \frac{\eta}{3}$$

Anhang Bilder

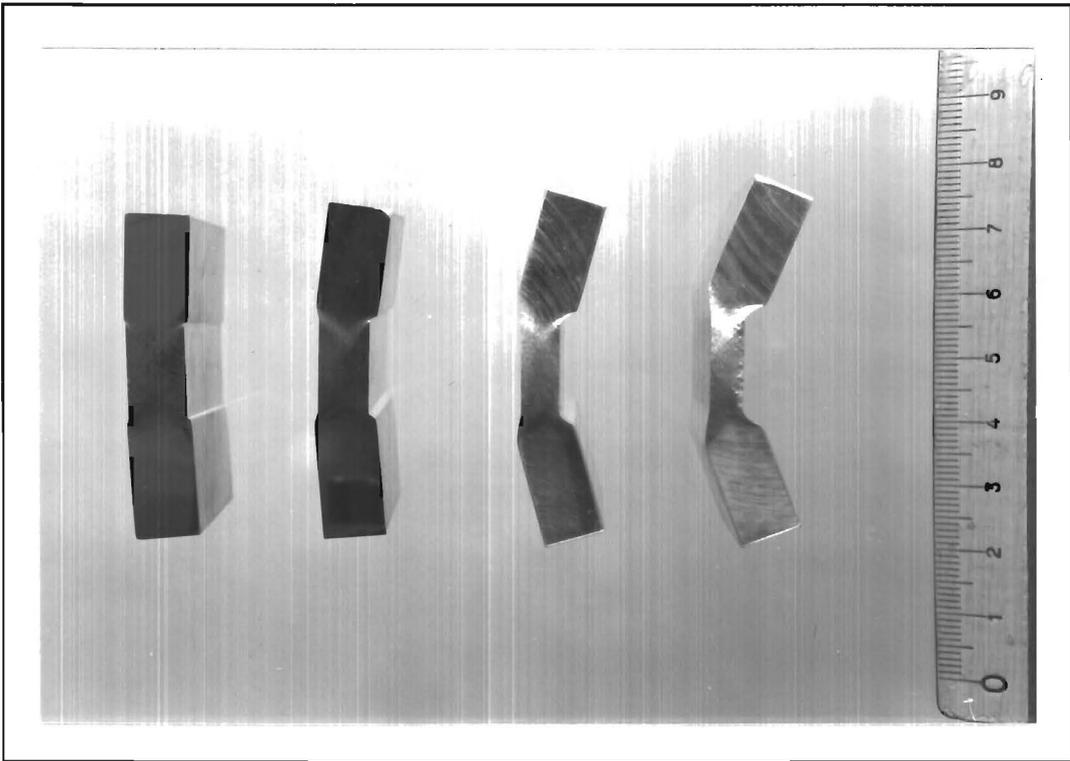


Bild B.1 10 mm Proben (Rüböl, trocken) mit 10, 20, 40 und 50 % Höhenabnahme.

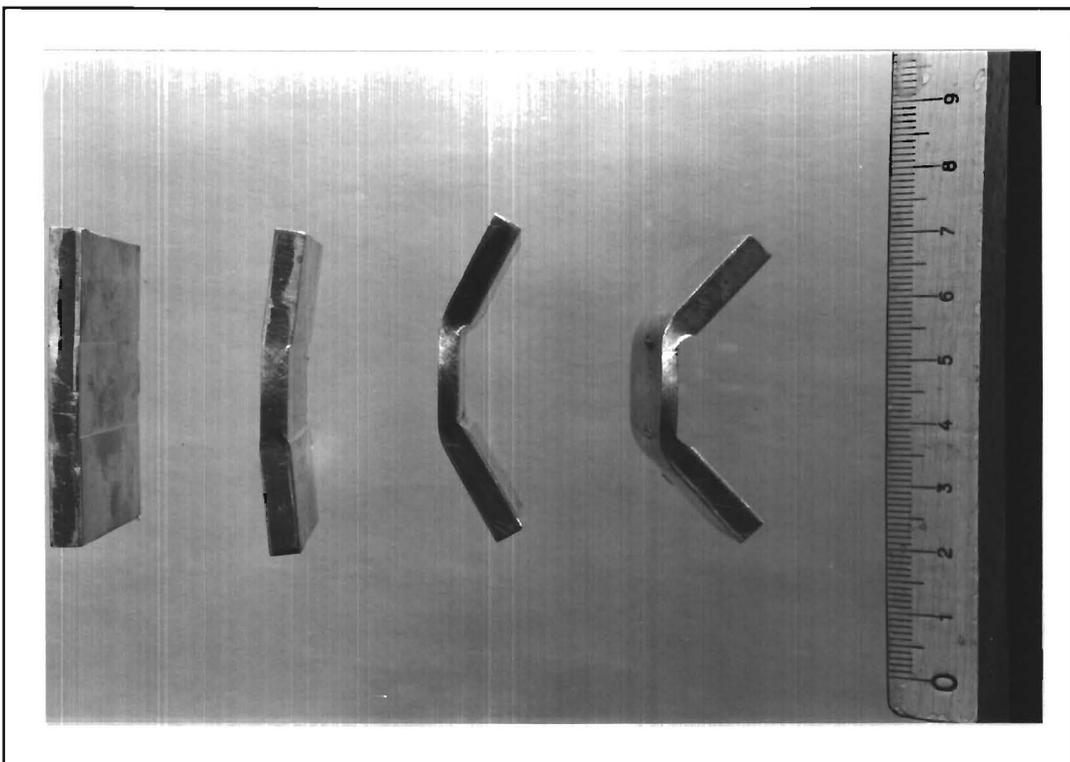


Bild B.2 5 mm Proben (Rüböl, trocken) mit 10, 20, 40 und 50 % Höhenabnahme.

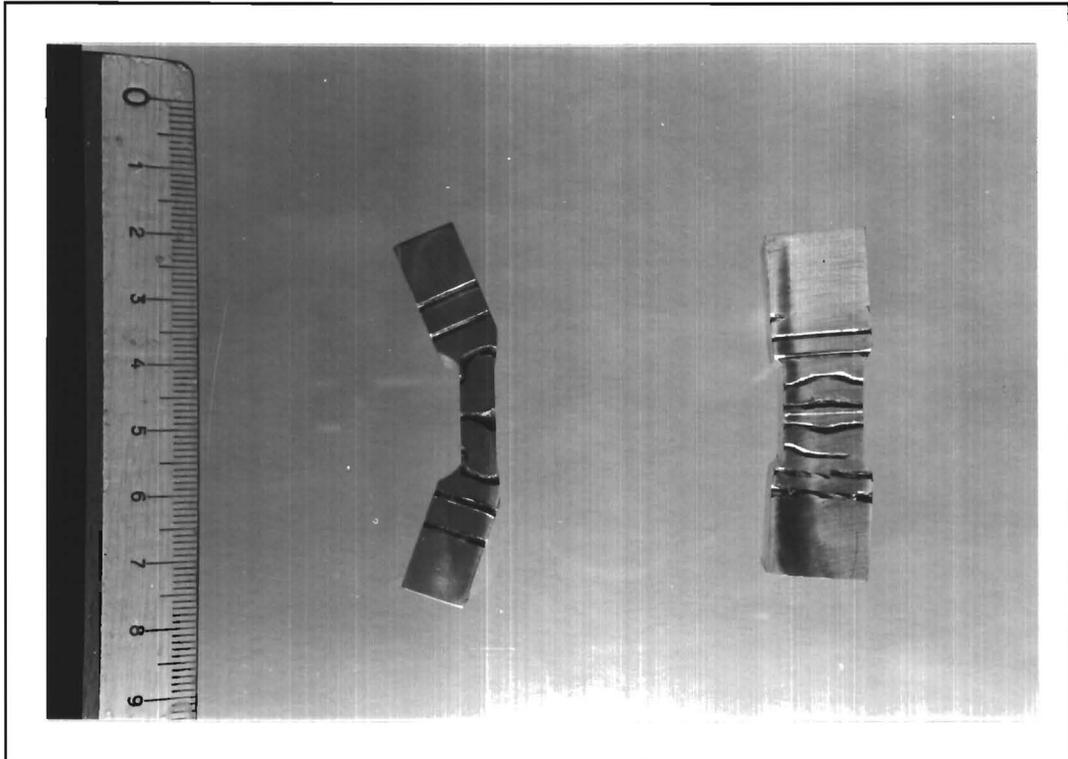


Bild B.3 15 mm und 10 mm Proben (Rüböl, trocken) mit 20 bzw. 50 % Höhenabnahme.

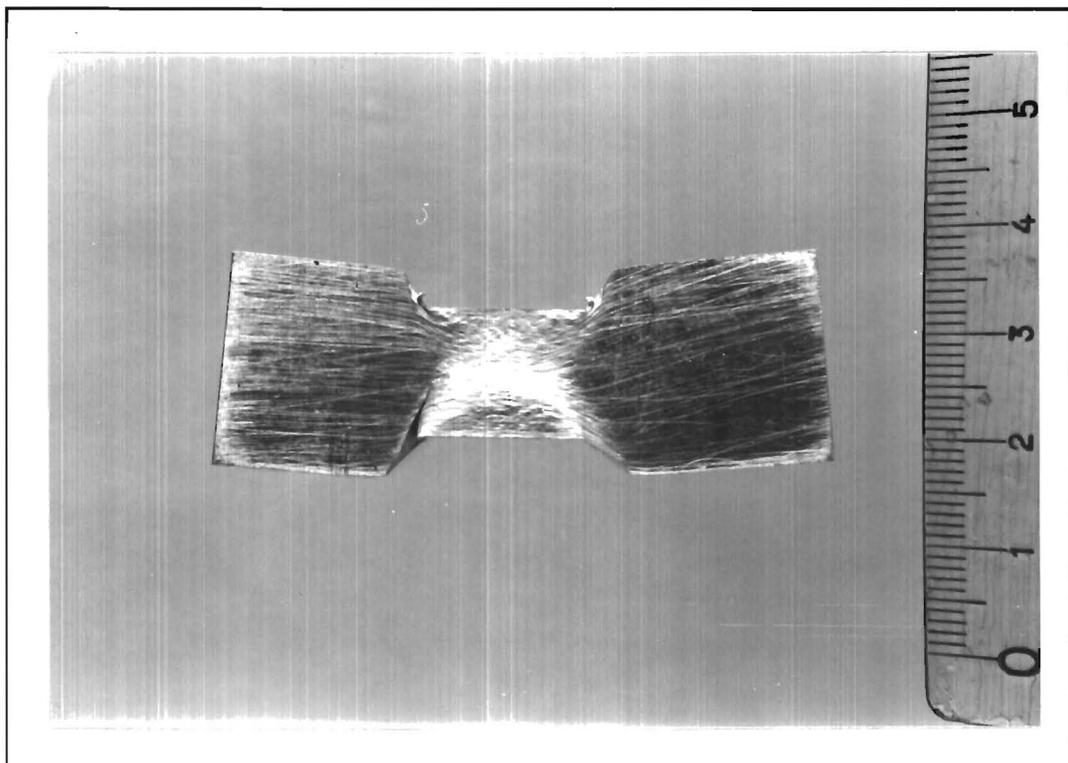


Bild B.4 20 mm Probe (Rüböl, trocken) mit 40 % Höhenabnahme.

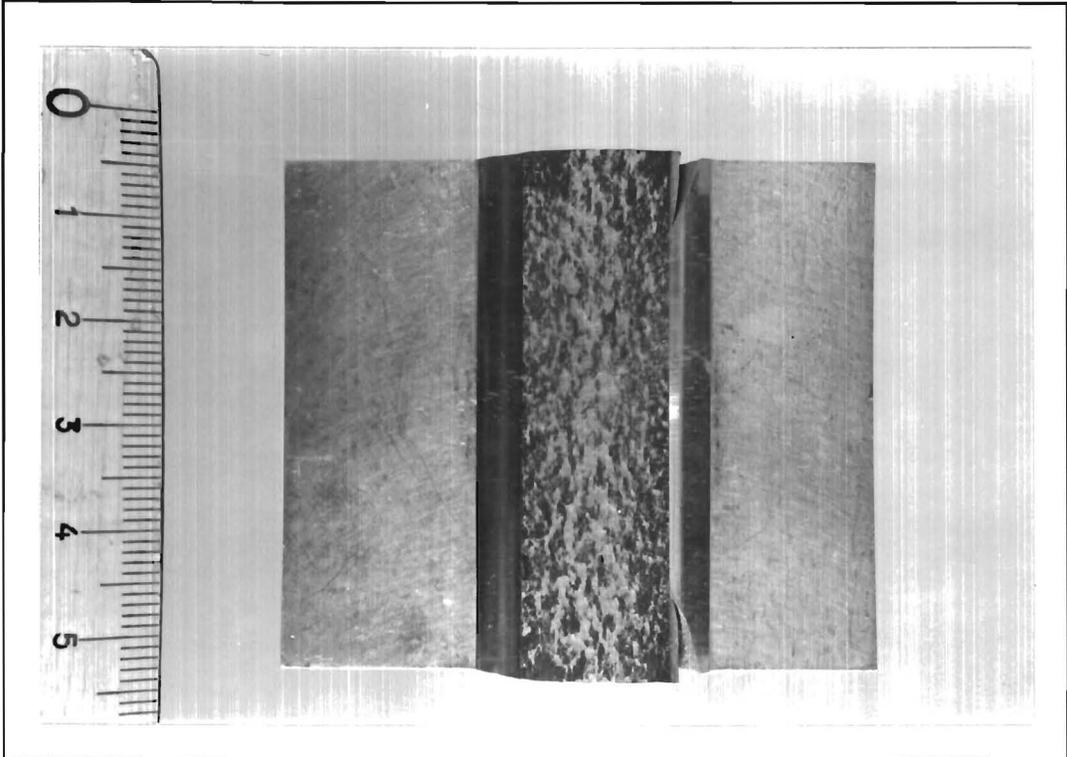


Bild B.5 20 mm Probe (Rüböl, trocken) mit 40 % Höhenabnahme.

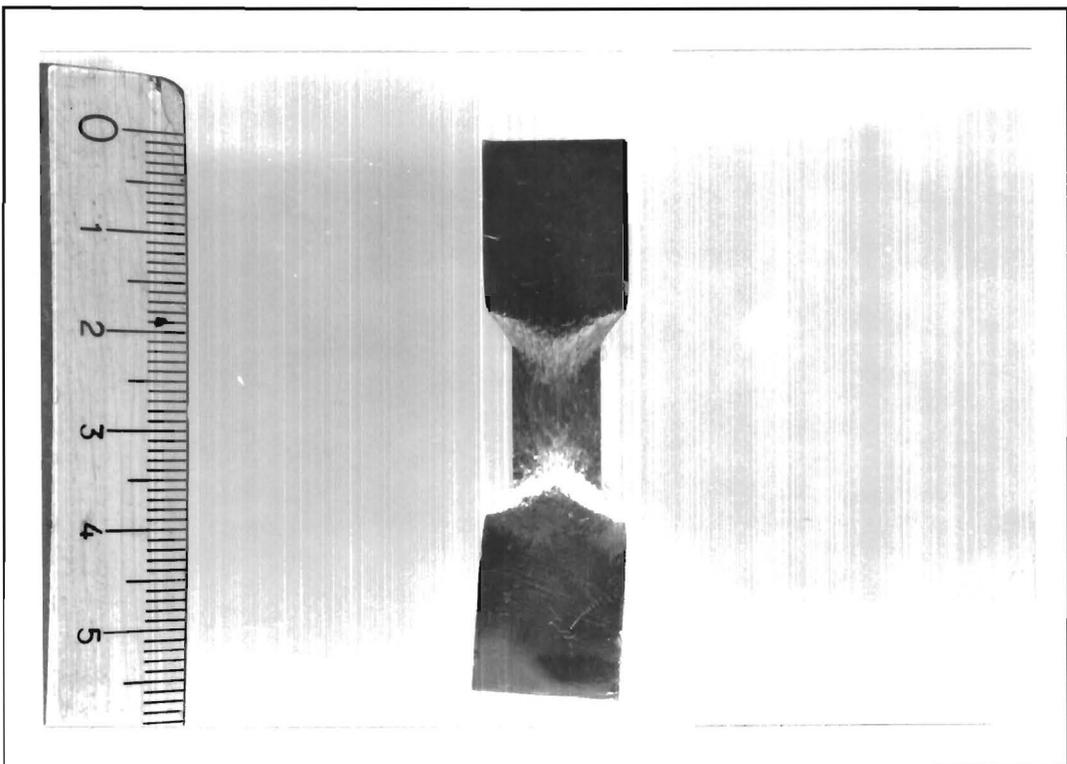


Bild B.6 15 mm Probe (Rüböl, Rüböl) mit 40 % Höhenabnahme. Symmetrische Stauchversuch mit asymmetrischer Verformung.

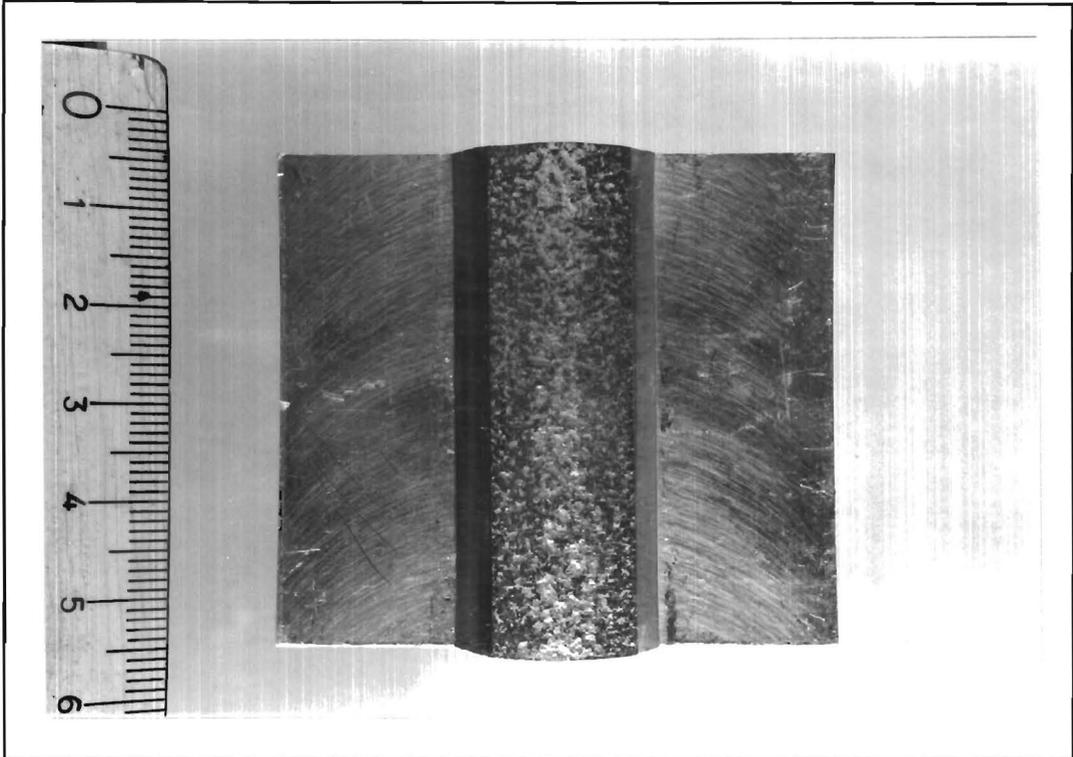


Bild B.7 20 mm Probe (Rüböl, Rüböl) mit 40 % Höhenabnahme. Symmetrischer Stauchversuch mit asymmetrischer Verformung. Seite ohne Körnerlöcher.

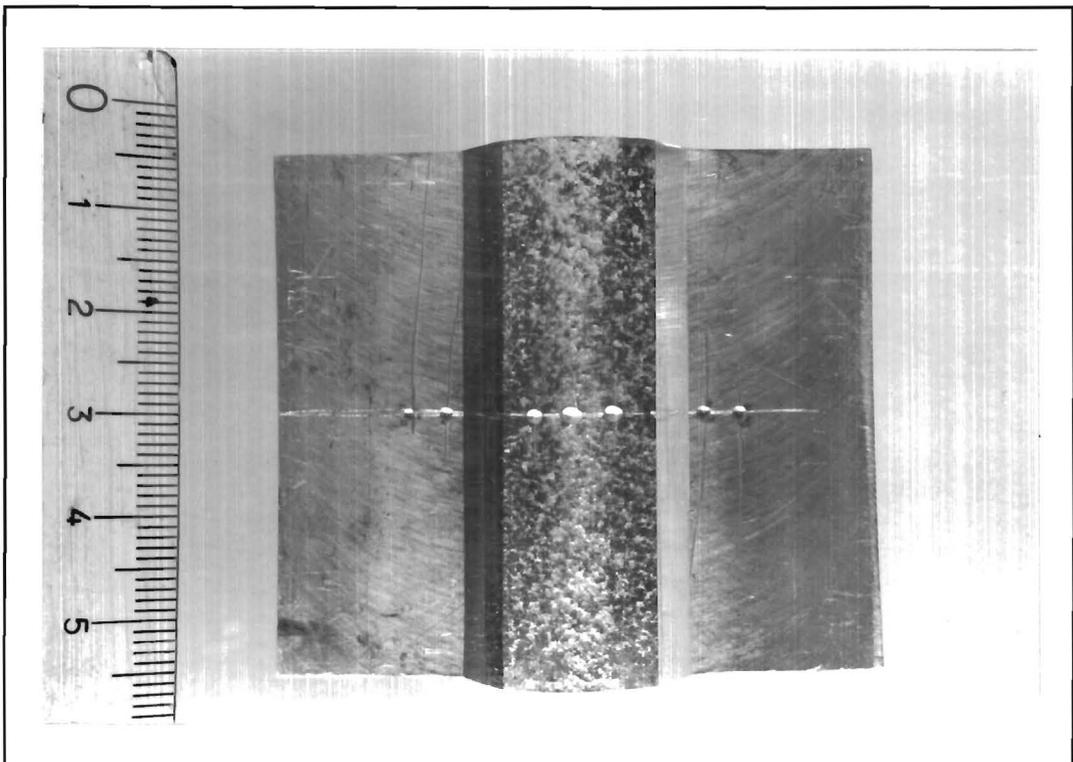


Bild B.8 15 mm Probe (Rüböl, Rüböl) mit 40 % Höhenabnahme. Symmetrischer Stauchversuch mit asymmetrischer Verformung. Seite mit Körnerlöcher.

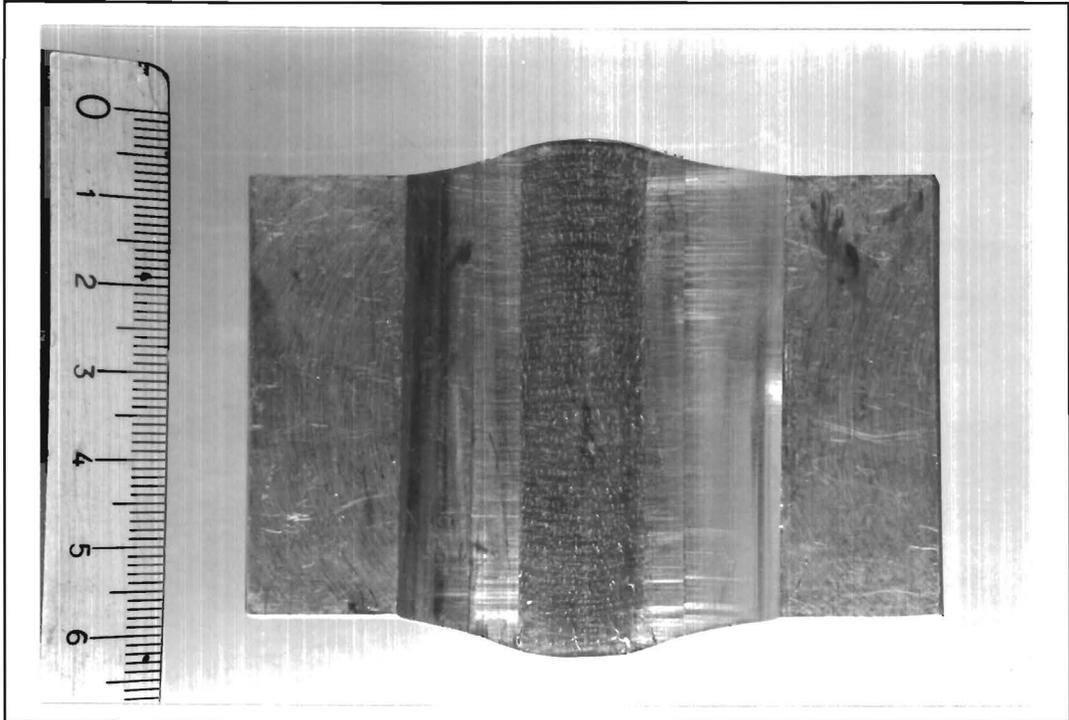


Bild B.9 15 mm Probe (Rüböl, Rüböl) mit 85 % Höhenabnahme. Symmetrischer Stauchversuch mit asymmetrischer Verformung. Plastische Instabilität, Verschiebung der Fließscheidenlinie.

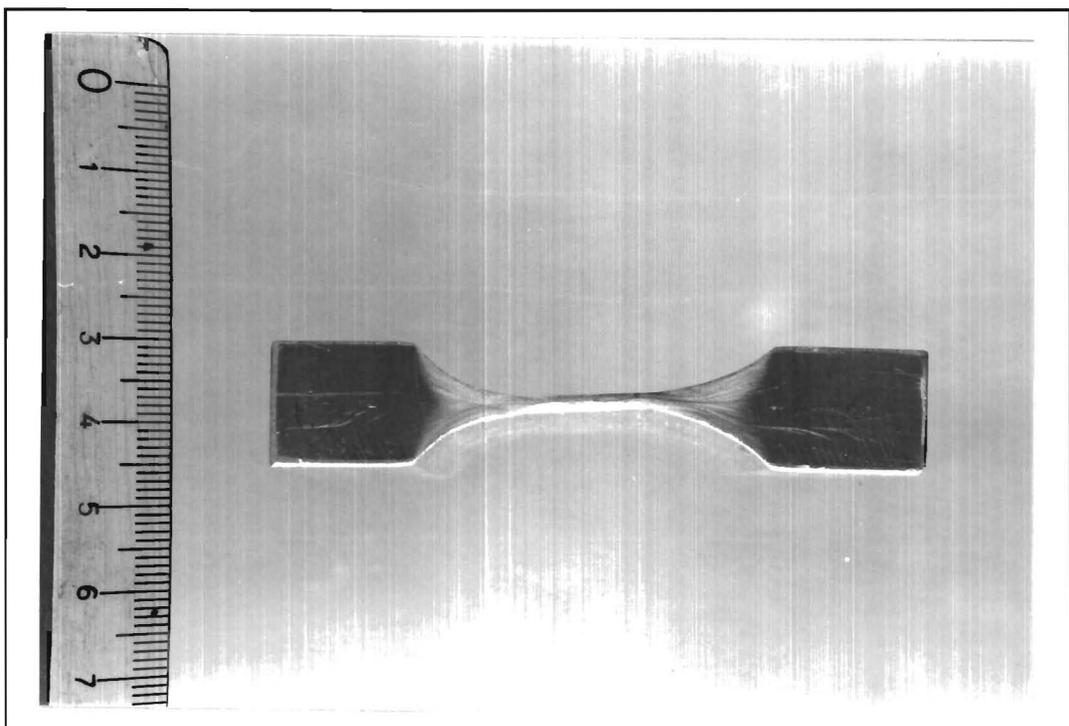


Bild B.10 15 mm Probe (Rüböl, Rüböl) mit 85 % Höhenabnahme. Symmetrischer Stauchversuch mit asymmetrischer Verformung.

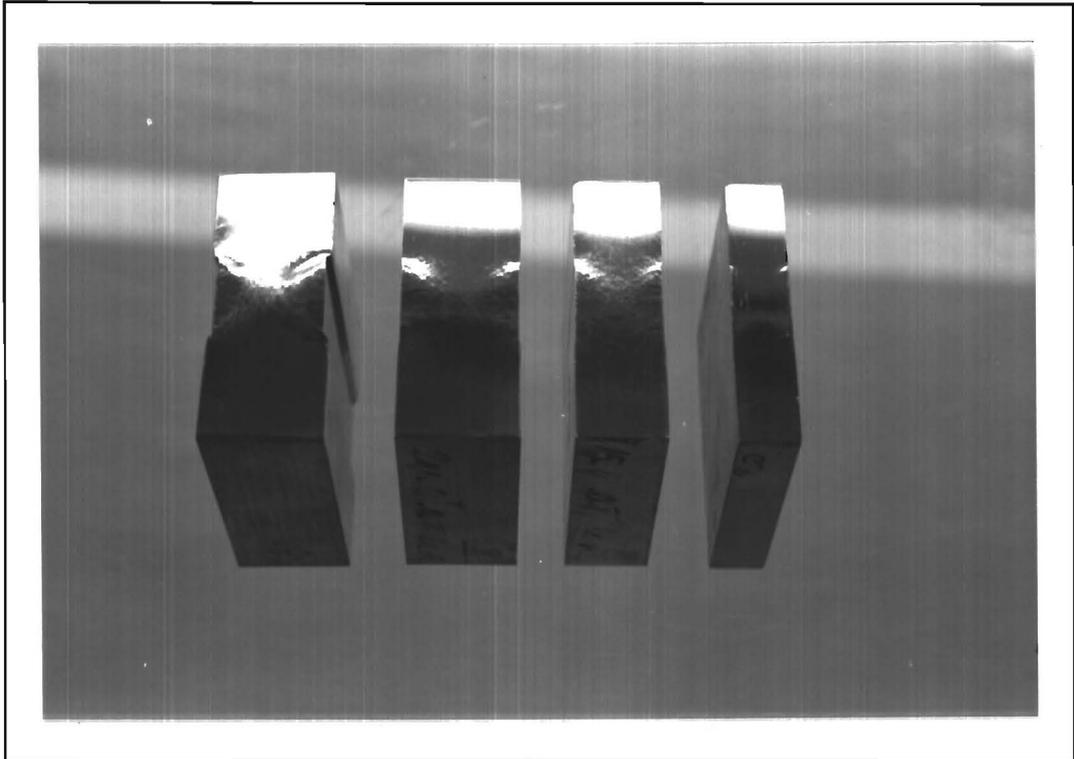


Bild B.11 20, 15, 10, 5 mm Proben (Rüböl, trocken). Gleitlinienfelder beim Anstauchen.

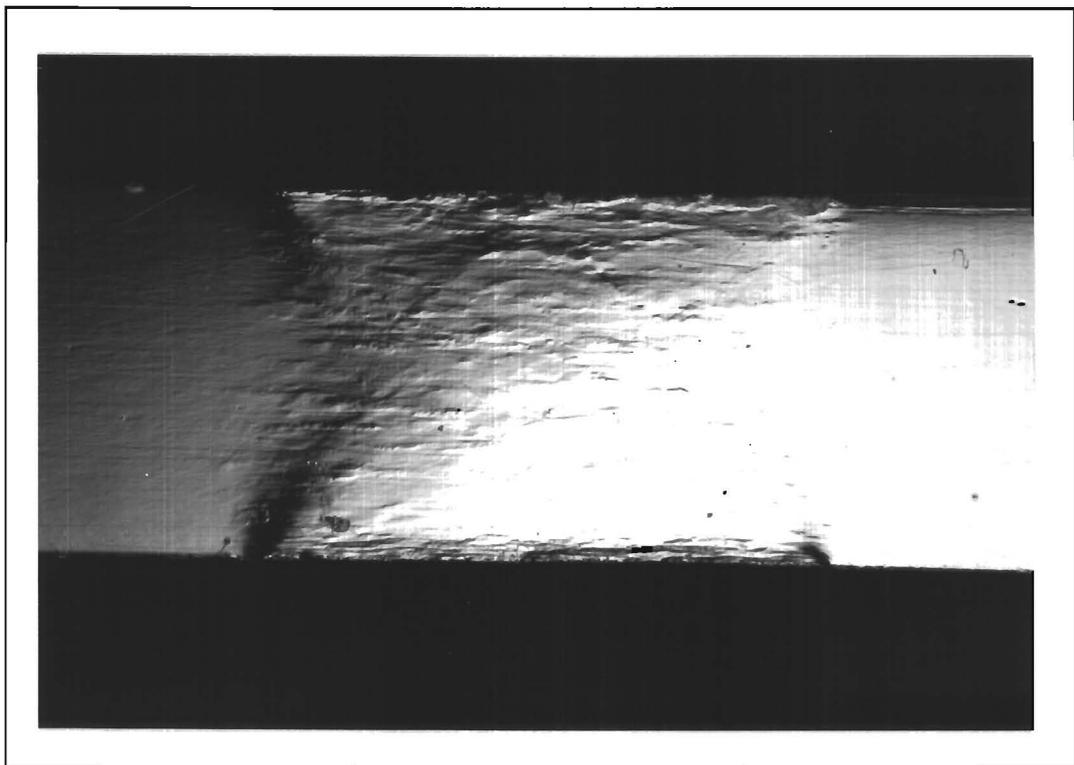


Bild B.12 10 mm Probe (unten Rüböl, oben trocken). Gleitlinienfelder beim Anstauchen.

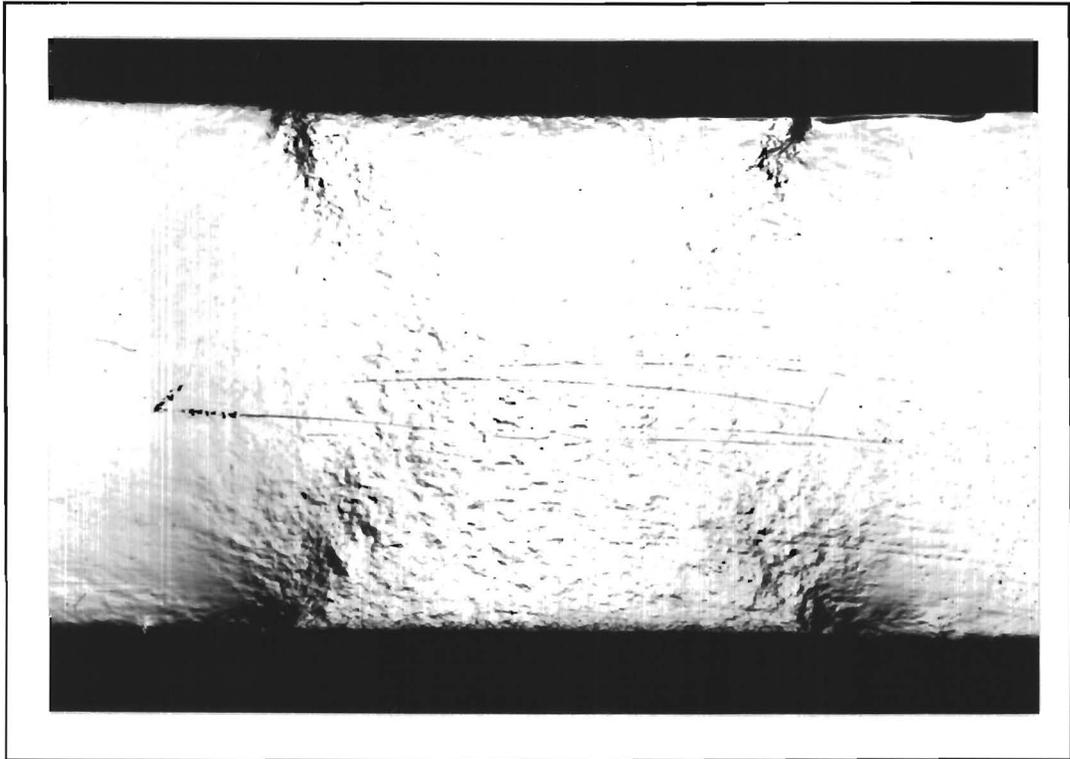


Bild B.13 15 mm Probe (unten Rüböl, oben trocken). Gleitlinienfelder beim Anstauchen.

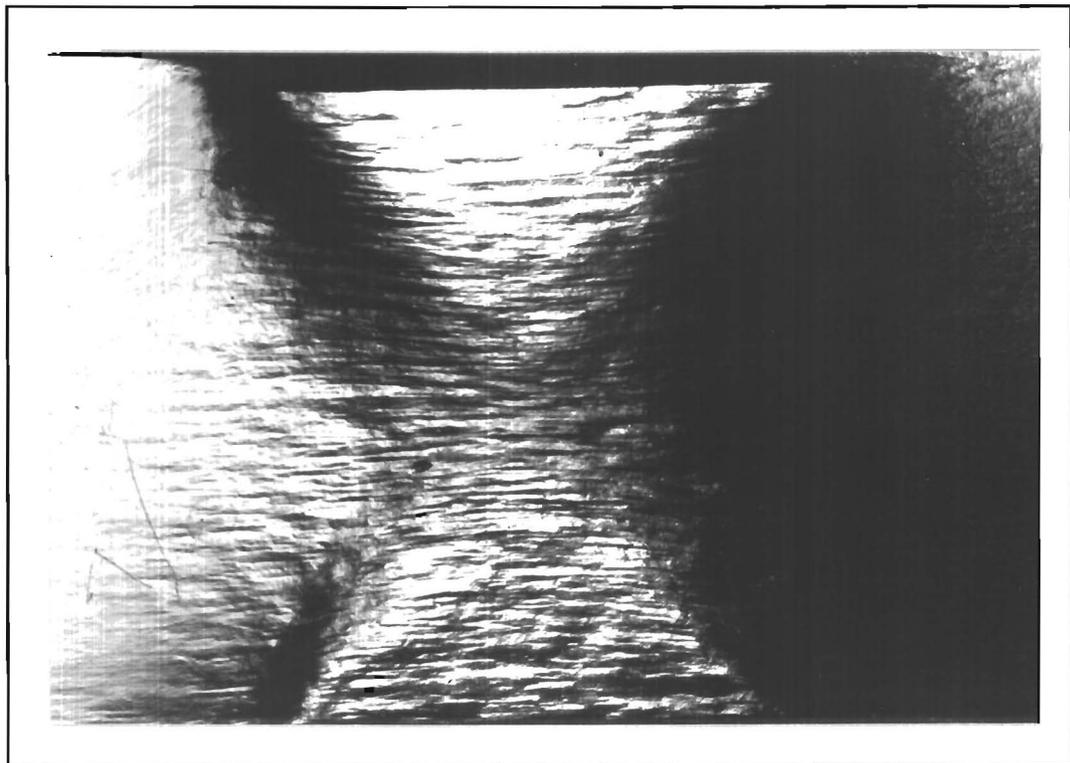


Bild B.14 20 mm Probe (unten Rüböl, oben trocken). Gleitlinienfelder bei 10 % Höhenabnahme.

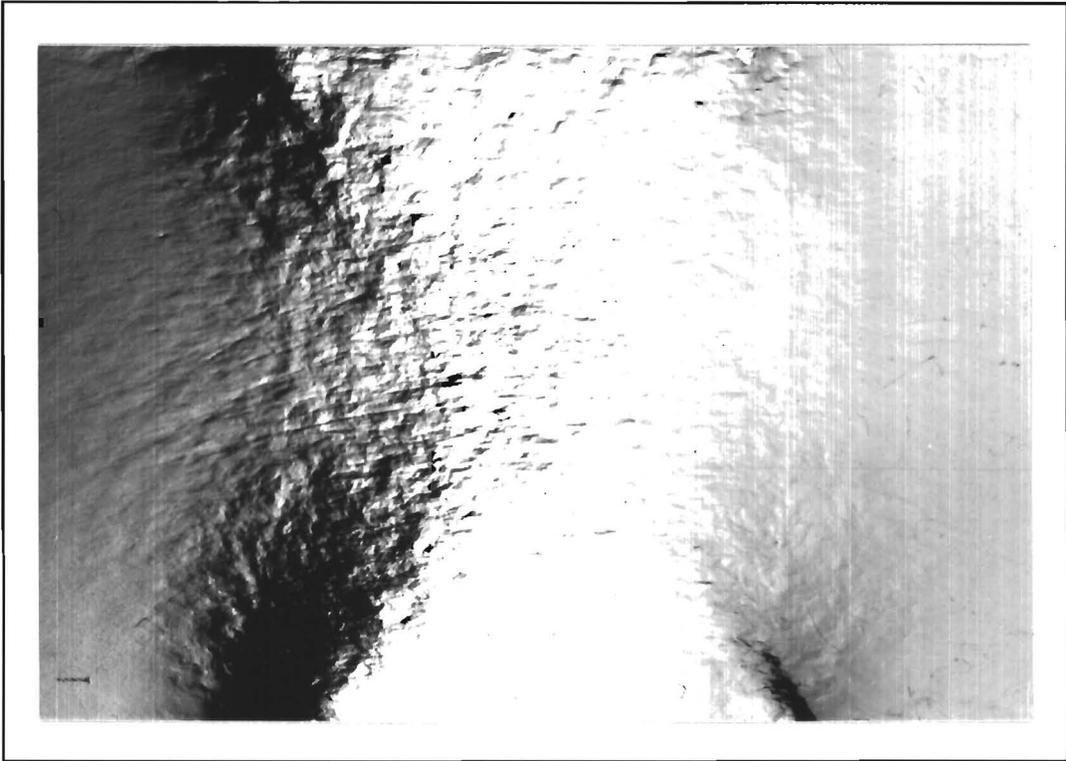


Bild B.15 20 mm Probe (unten Rüböl, oben trocken). Gleitlinienfelder beim Anstauchen.

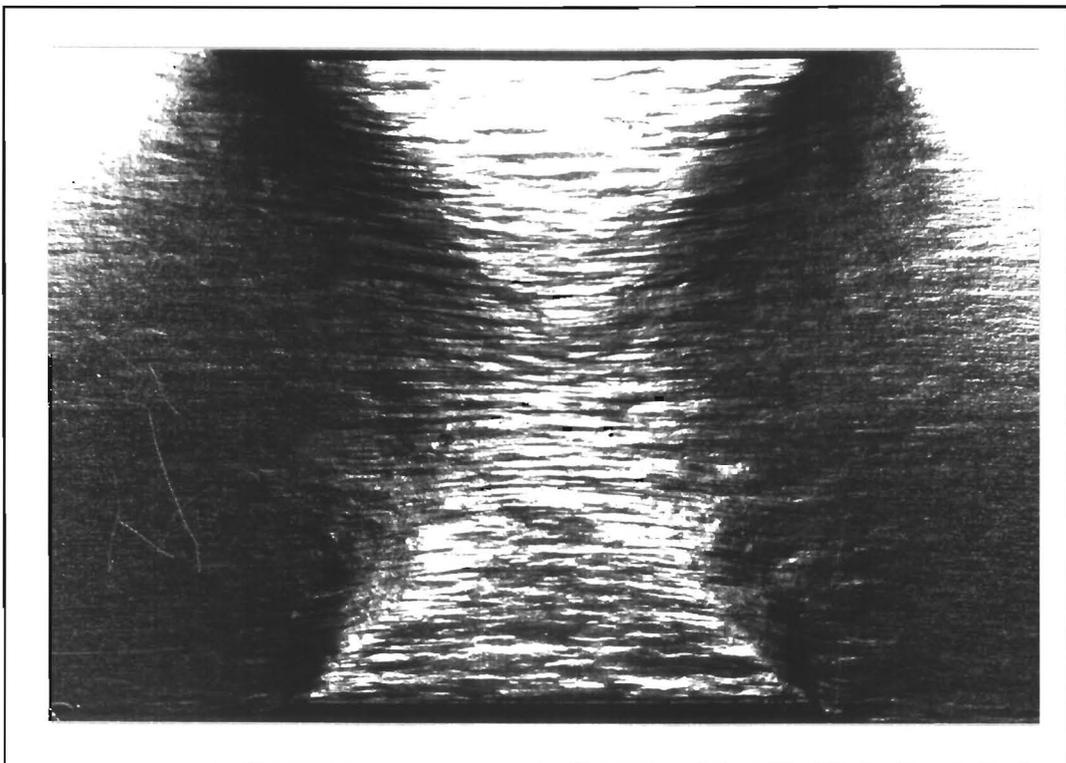


Bild B.16 20 mm Probe (unten Rüböl, oben trocken). Gleitlinienfelder bei 10 % Höhenabnahme.

Art der Asymmetrie	Ort der Asymmetrie		
	1) Walzgut	2) Walzen	3) übrige Walzwerkteile
A) Walz-Geometrie	A1) Dickenverteilung über die Bandbreite (Bandprofil), Spaltband	A2) Walzendurchmesser, Balligkeit (mechanisch, thermisch), Walzenschränkung, Horizontalversatz.	A3) Fluchtungsfehler Umlenrollen, Haspelachsen, Haspeldorn-Durchbiegung.
B) Walz-Kinematik	B1) Seitliches Verlaufen, nichthorizontaler Bandeinlauf, oder -auslauf (pass line)	B2) Walzendrehzahl, Schlepptwalzbetrieb, Arbeits- oder Stützwalzantrieb (Kammwalze, Twin drive).	B3) Ab- und Aufwickelvorgang (Wickelkrümmung), Handtuckeffekt an Umlenrollen.
C) Walz-Tribologie	C1) Oberflächenfeingestalt, Kühlung und Schmierung.	C2) Oberflächenfeingestalt, Kühlung und Schmierung.	C3)
D) Werkstoffeigenschaften	D1) Gefüge- und Härteverteilung über die Bandbreite (Härteprofil).	D2) Walzenhärte, Verschleißfestigkeit.	D3)

Bild 17: Die verschiedene Arten und Orte der Asymmetrie.

Ergebnisse des Stäbchenmodells für verschiedene Kombinationen von m_o / m_u

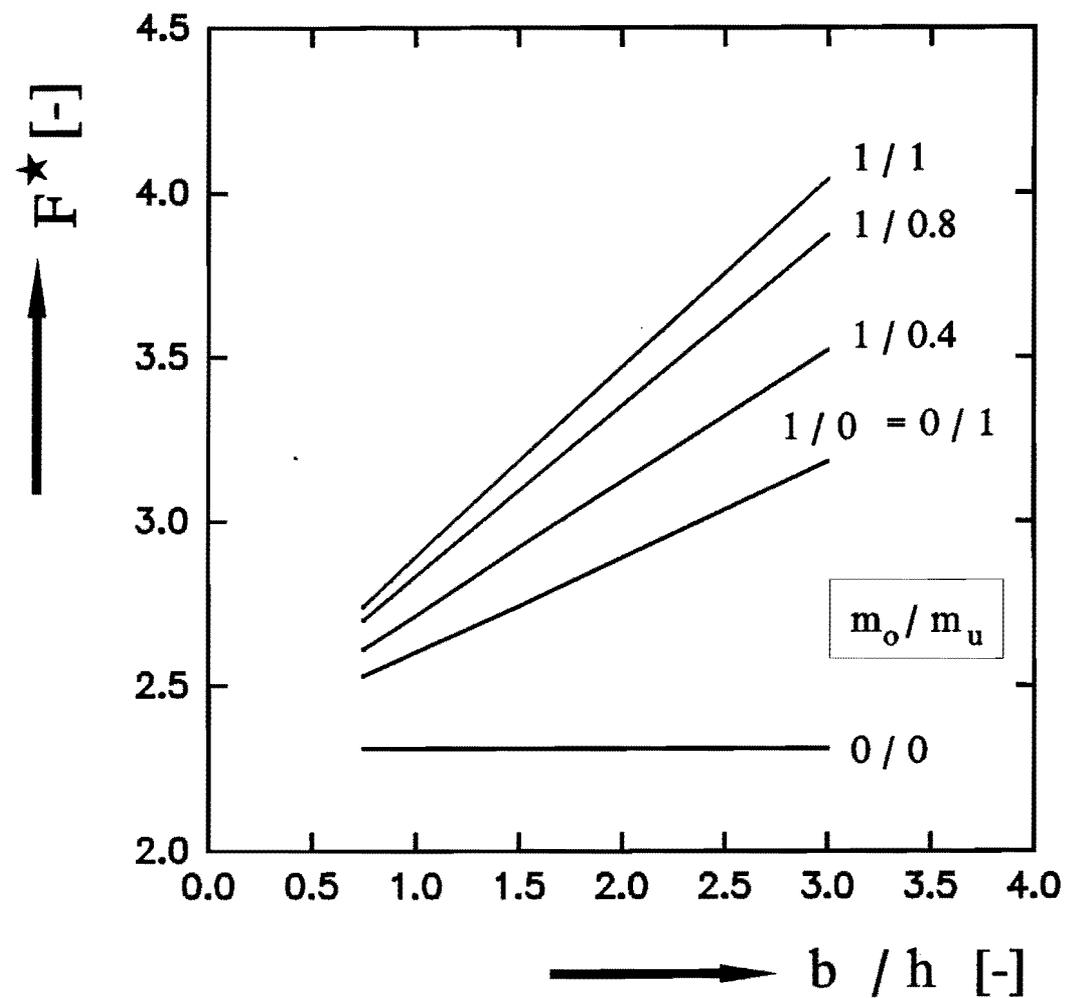
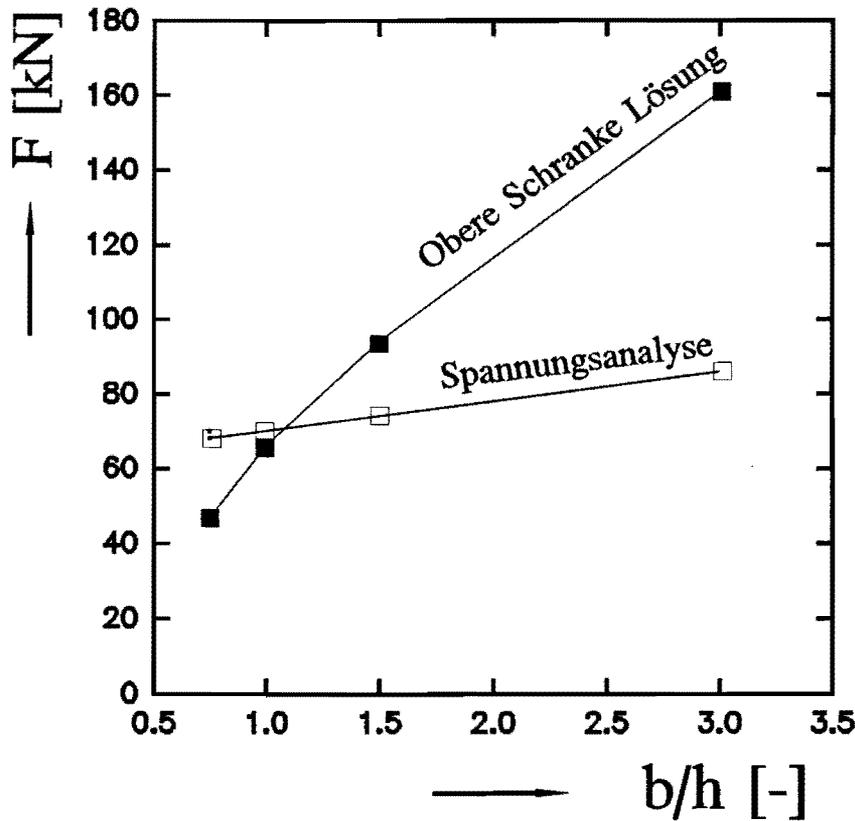


Bild 18: Dimensionslose Stauchkraft für $b/h = 0.75, 1, 1.5$ und 3 für variierende m_u - und m_o -Werten.

Umformgrad = 0 %
 $\varphi = 0$
 $\sigma_f = 36 + 99.6 \varphi^{0.214} = 36 \text{ N/mm}^2$
 $\bar{\sigma}_f = 36 \text{ N/mm}^2$
 $m_u = 0, m_o = 1$



Umformgrad = 40 %
 $\varphi = 0.511$
 $\sigma_f = 36 + 99.6 \varphi^{0.214} = 122 \text{ N/mm}^2$
 $\bar{\sigma}_f = 80 \text{ N/mm}^2$
 $m_u = 0, m_o = 1$

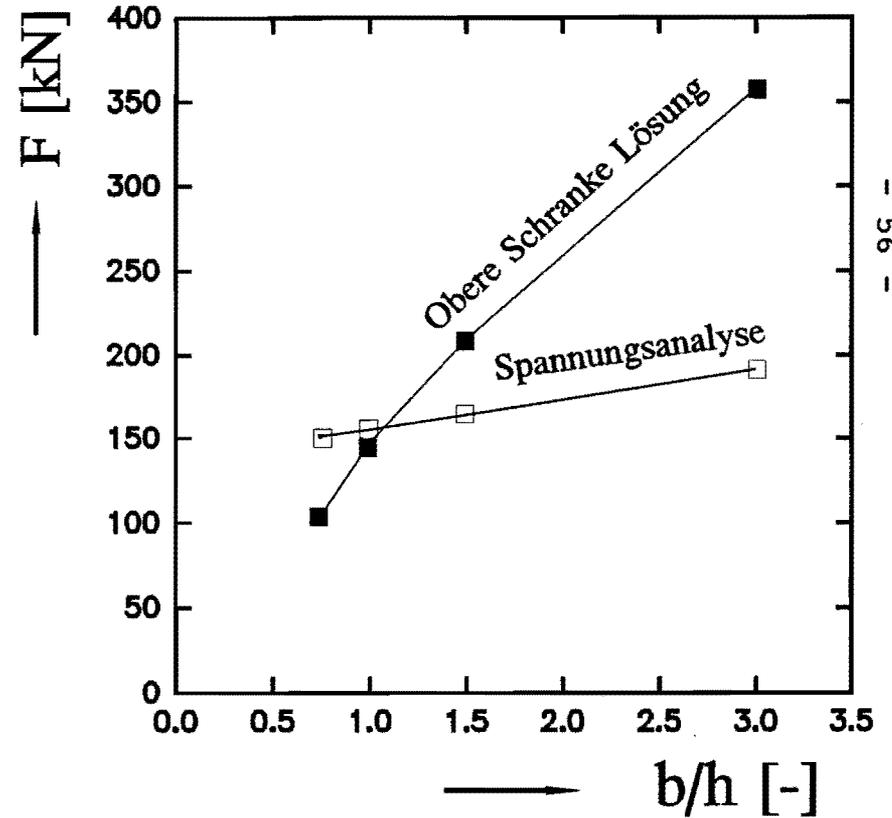


Bild 19: Stauchkraft für verschiedene b/h -Verhältnisse mit der Spannungsanalyse und Obere Schrankerechnung.

Umformgrad = 0 %
 $\varphi = 0$
 $\sigma_f = 36 + 99.6 \varphi^{0.214} = 36 \text{ N/mm}^2$
 $\bar{\sigma}_f = 36 \text{ N/mm}^2$
 $m_u = 0, m_o = 1$

Umformgrad = 40 %
 $\varphi = 0.511$
 $\sigma_f = 36 + 99.6 \varphi^{0.214} = 122 \text{ N/mm}^2$
 $\bar{\sigma}_f = 80 \text{ N/mm}^2$
 $m_u = 0, m_o = 1$

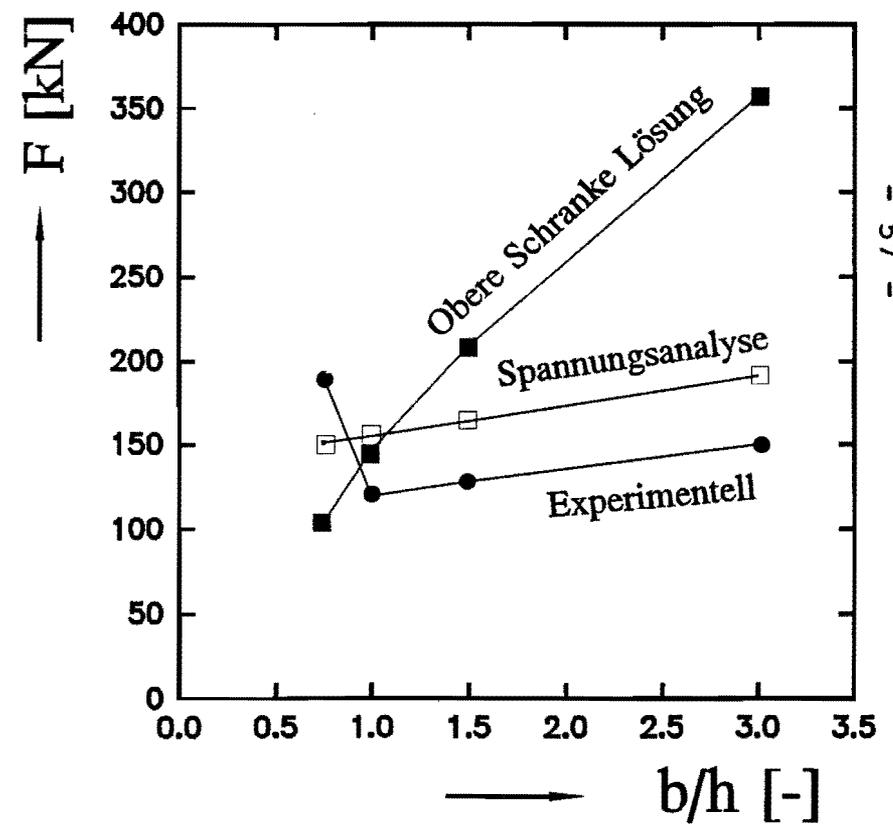
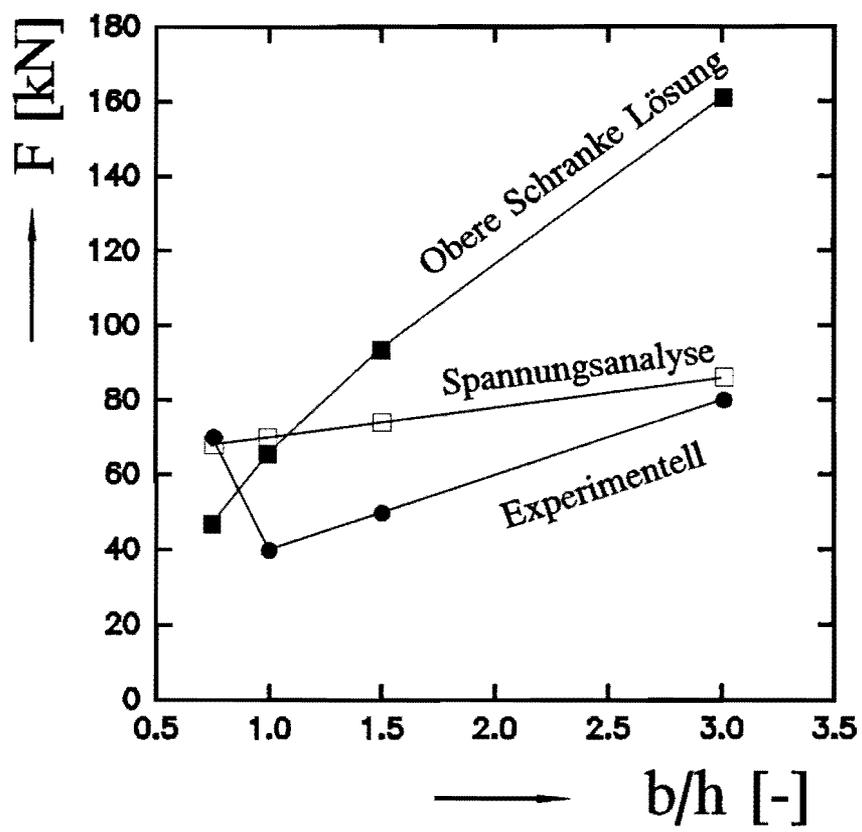
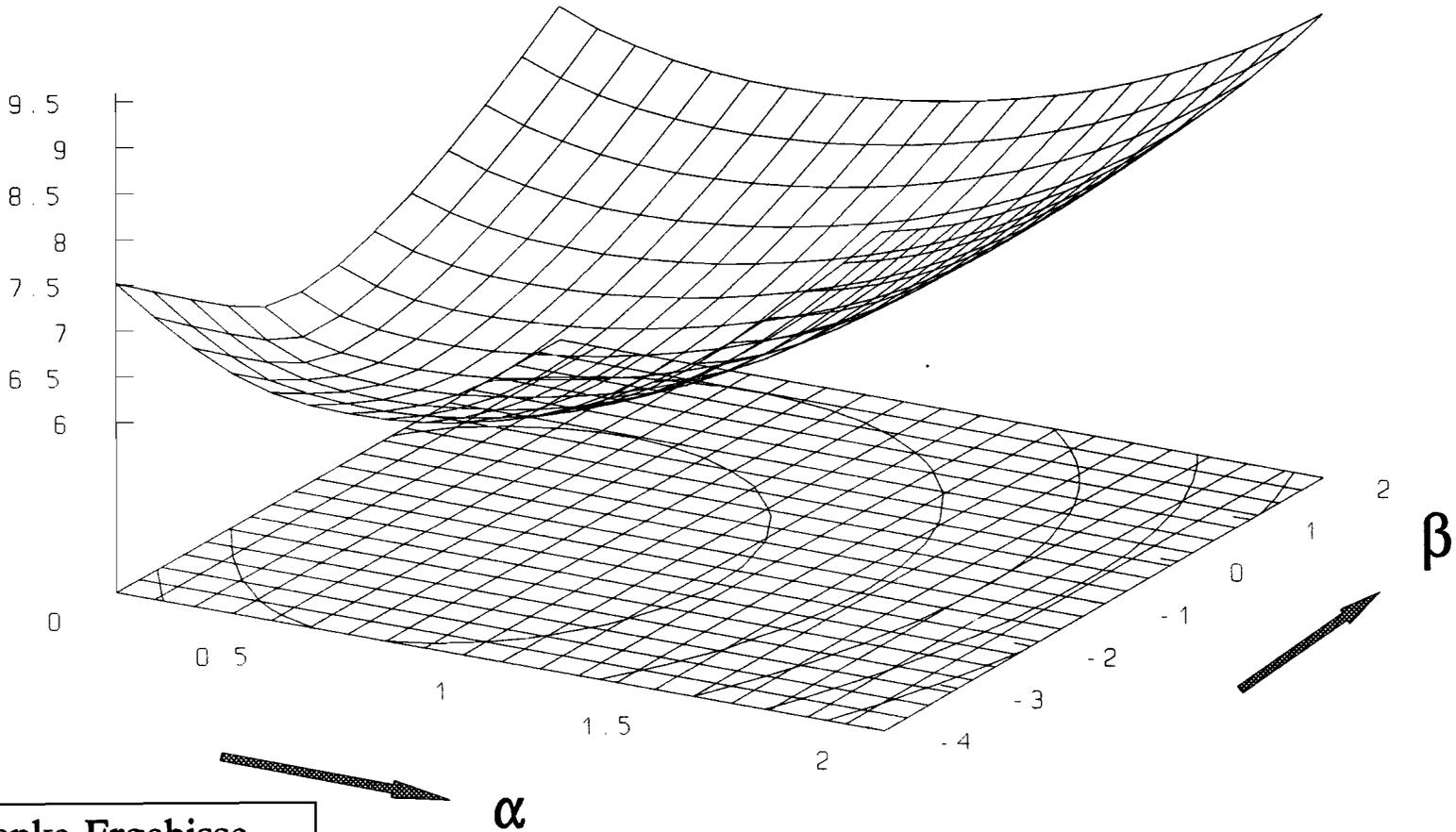


Bild 20: Stauchkräfte aus Versuch, Spannungsanalyse und Obere Schrankerechnung für verschiedene b/h.

$P^* [-]$

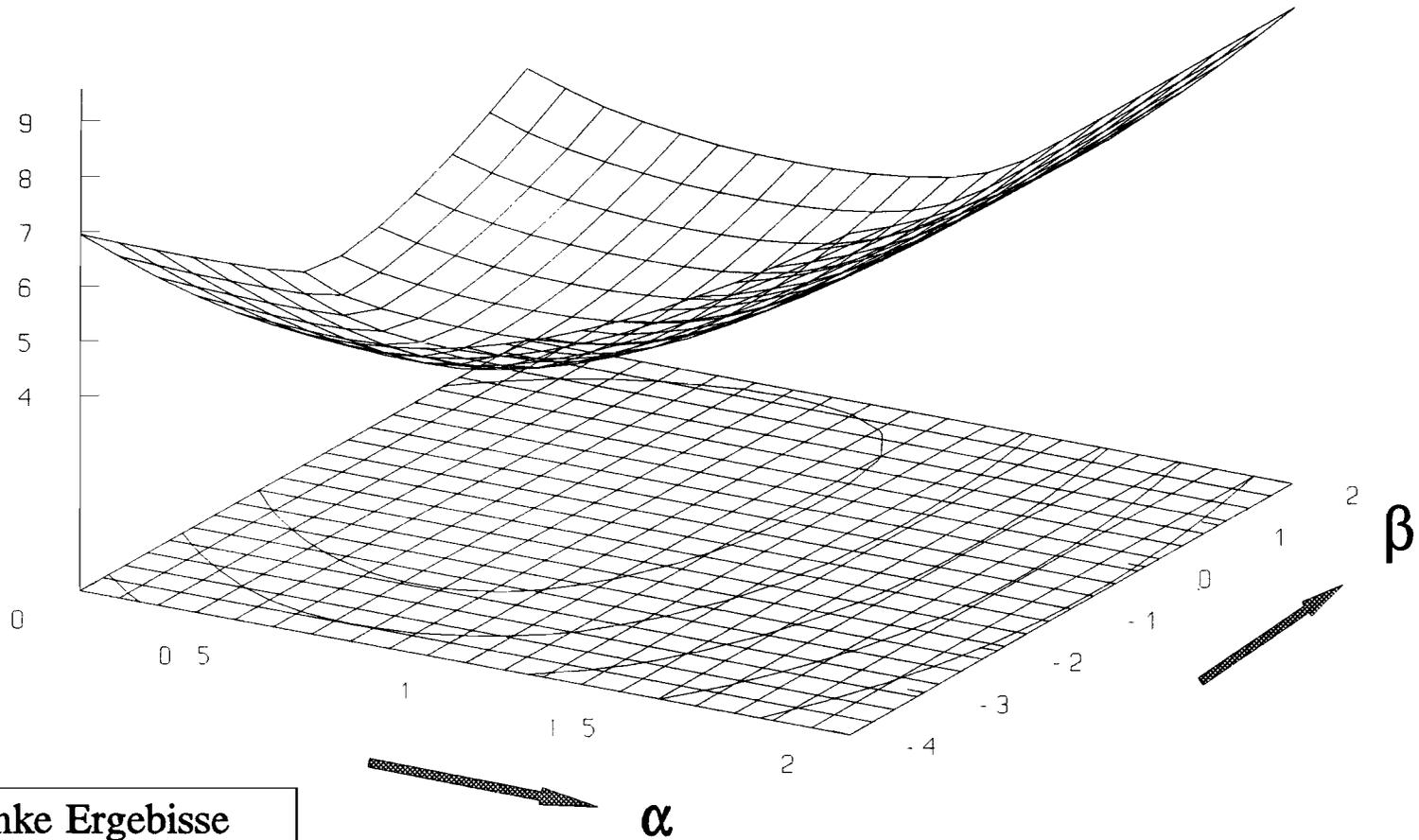


- 58 -

Obere Schranke Ergebnisse
Asymmetrisch Flachstauchen
 $m_u = 0, m_o = 1$
 $b/h = 3$

Bild 21: Die dimensionslose Leistung in Abhängigkeit der α und β für $b/h = 3$.

$P^* [-]$

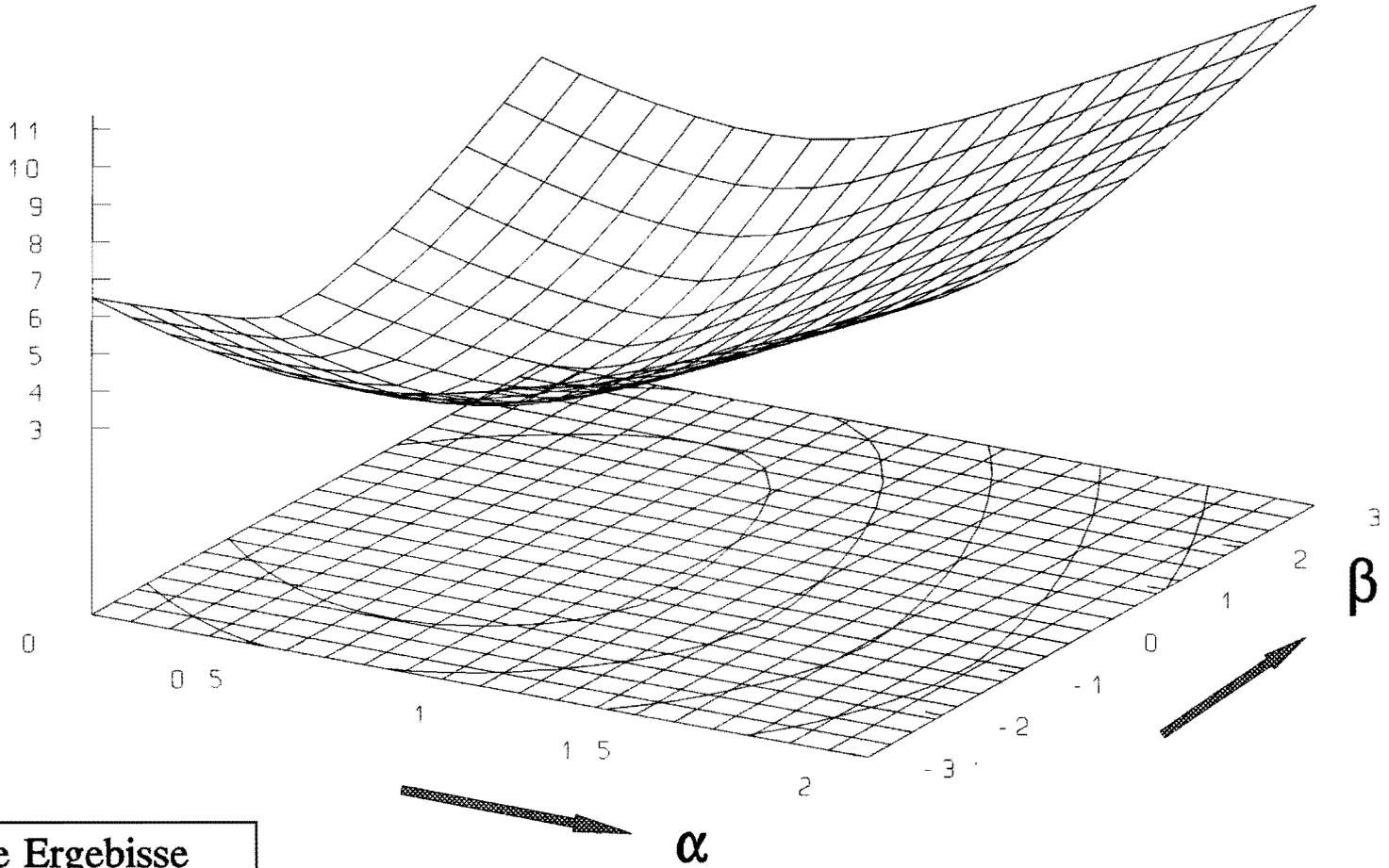


- 59 -

Obere Schranke Ergebnisse
Asymmetrisch Flachstauchen
 $m_u = 0, m_o = 1$
 $b / h = 1.5$

Bild 22: Die dimensionslose Leistung in Abhängigkeit der α und β für $b/h = 1.5$.

$P^* [-]$

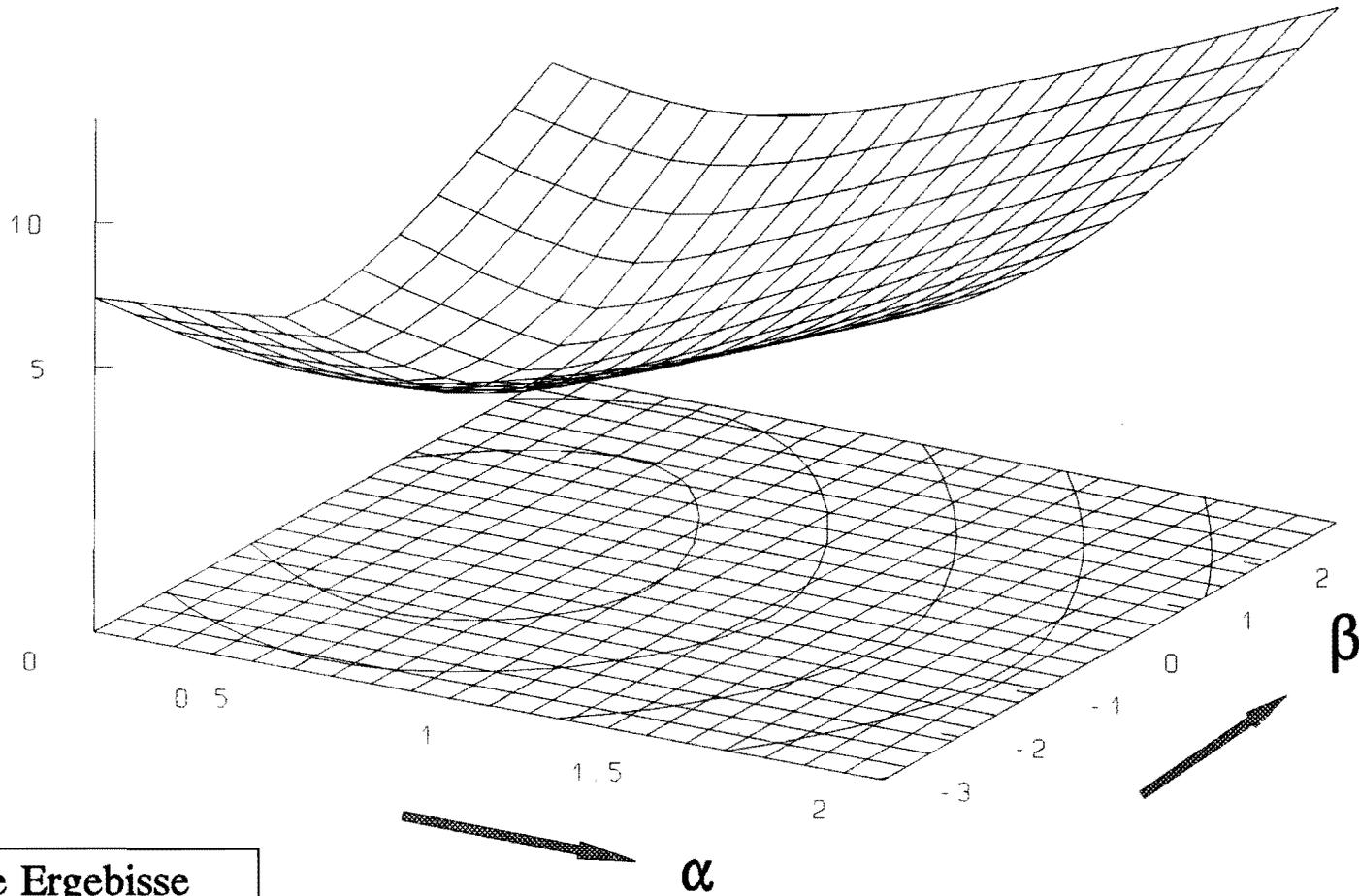


- 60 -

Obere Schranke Ergebnisse
Asymmetrisch Flachstauchen
 $m_u = 0, m_o = 1$
 $b / h = 1$

Bild 23: Die dimensionslose Leistung in Abhängigkeit der α und β für $b/h = 1$.

$P^* [-]$



- 61 -

Obere Schranke Ergebnisse
Asymmetrisch Flachstauchen
 $m_u = 0, m_o = 1$
 $b / h = 0.75$

Bild 24: Die dimensionslose Leistung in Abhängigkeit der α und β für $b/h = 0.75$.

$$\frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.346 - 1.918 y^* + 3.462 y^{*2} - 1.890 y^{*3} \} x^*$$

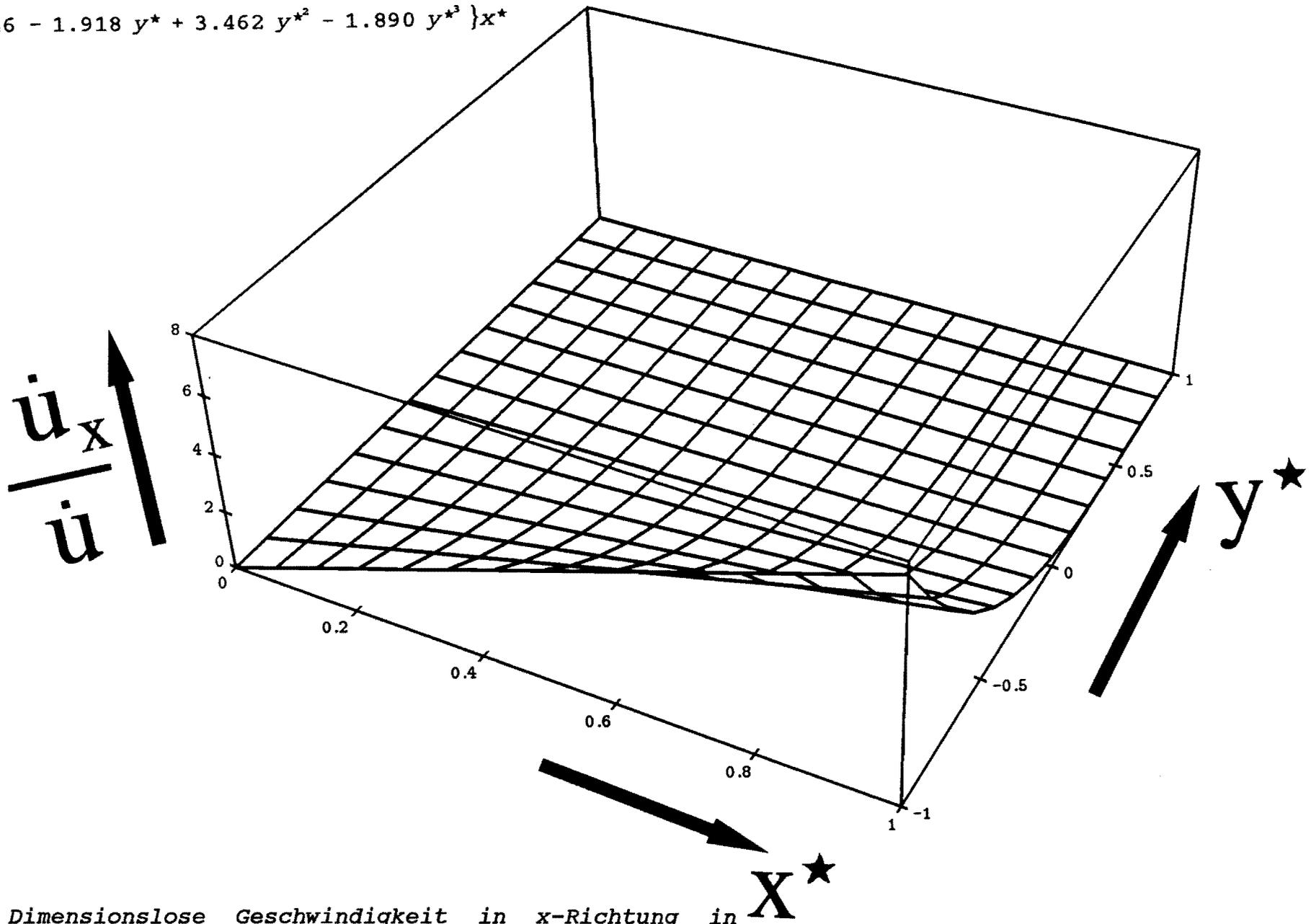
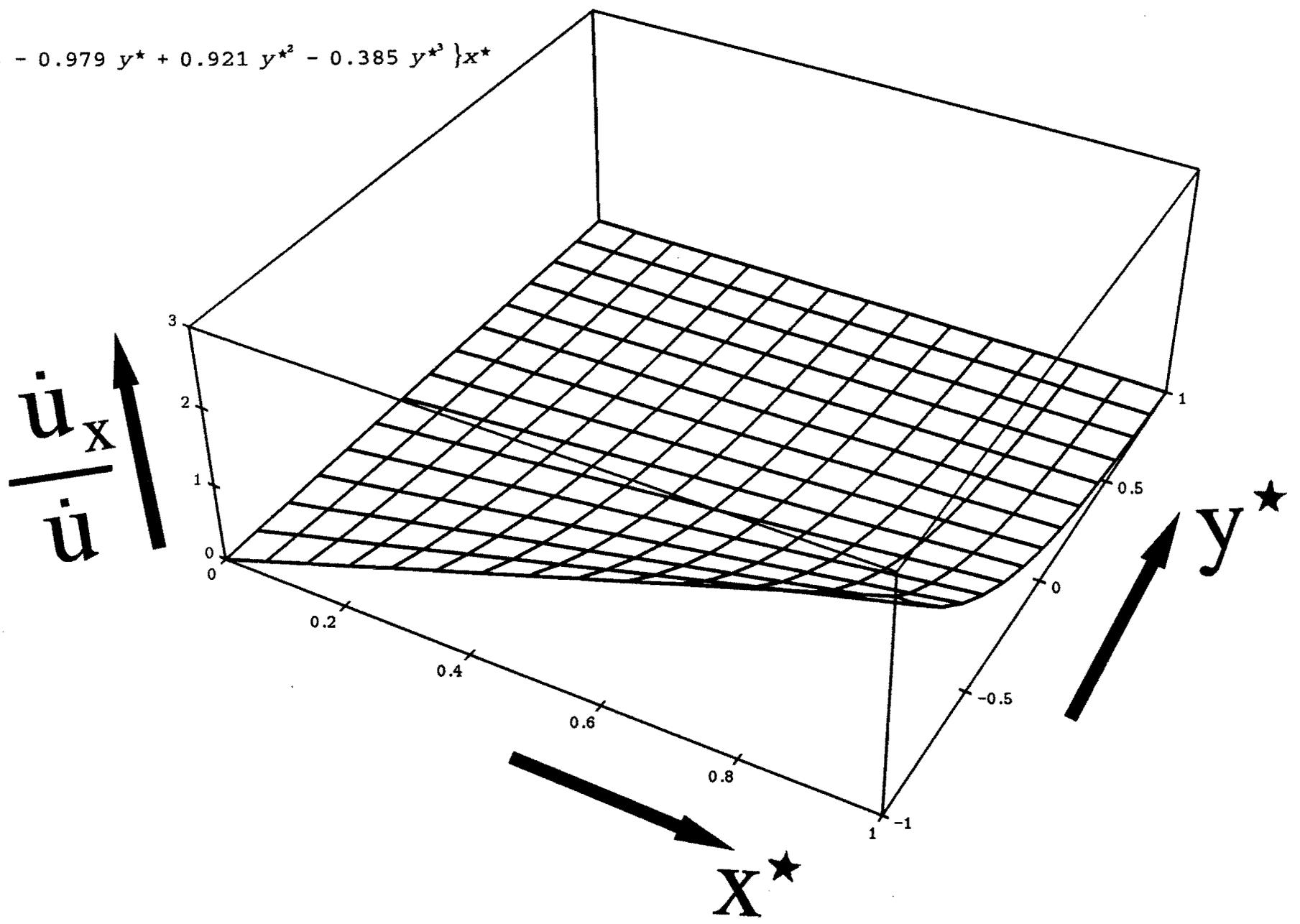


Bild 25: Dimensionslose Geschwindigkeit in x-Richtung in X^*

Abhängigkeit von dimensionslosen x und y für $b/h = 3$.

$$\frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.443 - 0.979 y^* + 0.921 y^{*2} - 0.385 y^{*3} \} x^*$$



ld 26: Dimensionslose Geschwindigkeit in x-Richtung in
 hängigkeit von dimensionslosen x und y für $b/h = 1.5$.

$$\frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.554 - 0.404 y^* - 0.162 y^{*2} + 0.010 y^{*3} \} x^*$$

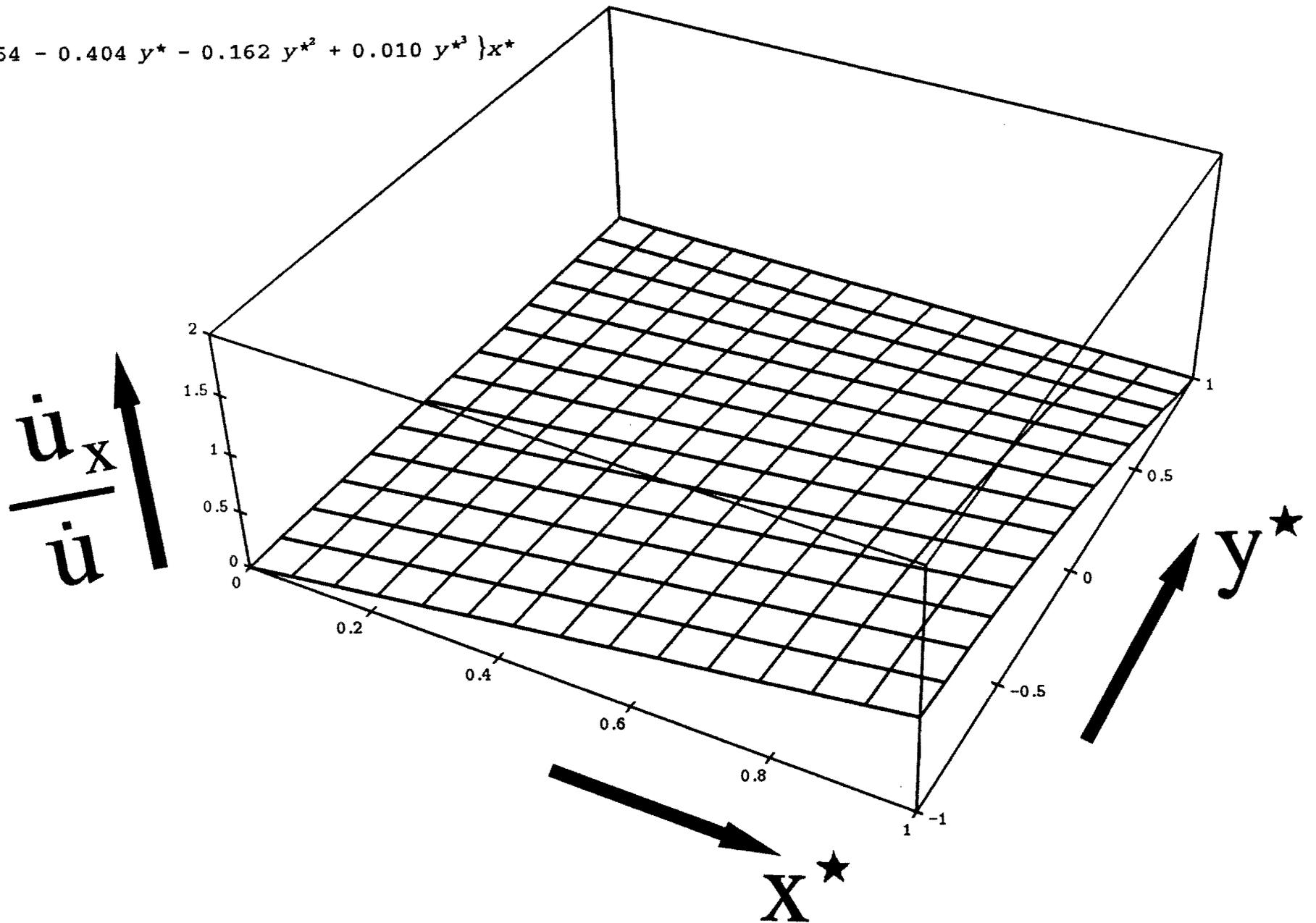


Bild 27: Dimensionslose Geschwindigkeit in x-Richtung in Abhängigkeit von dimensionslosen x und y für $b/h = 1$.

$$\frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.501 + 0.072 y^* - 0.378 y^{*2} - 0.195 y^{*3} \} x^*$$

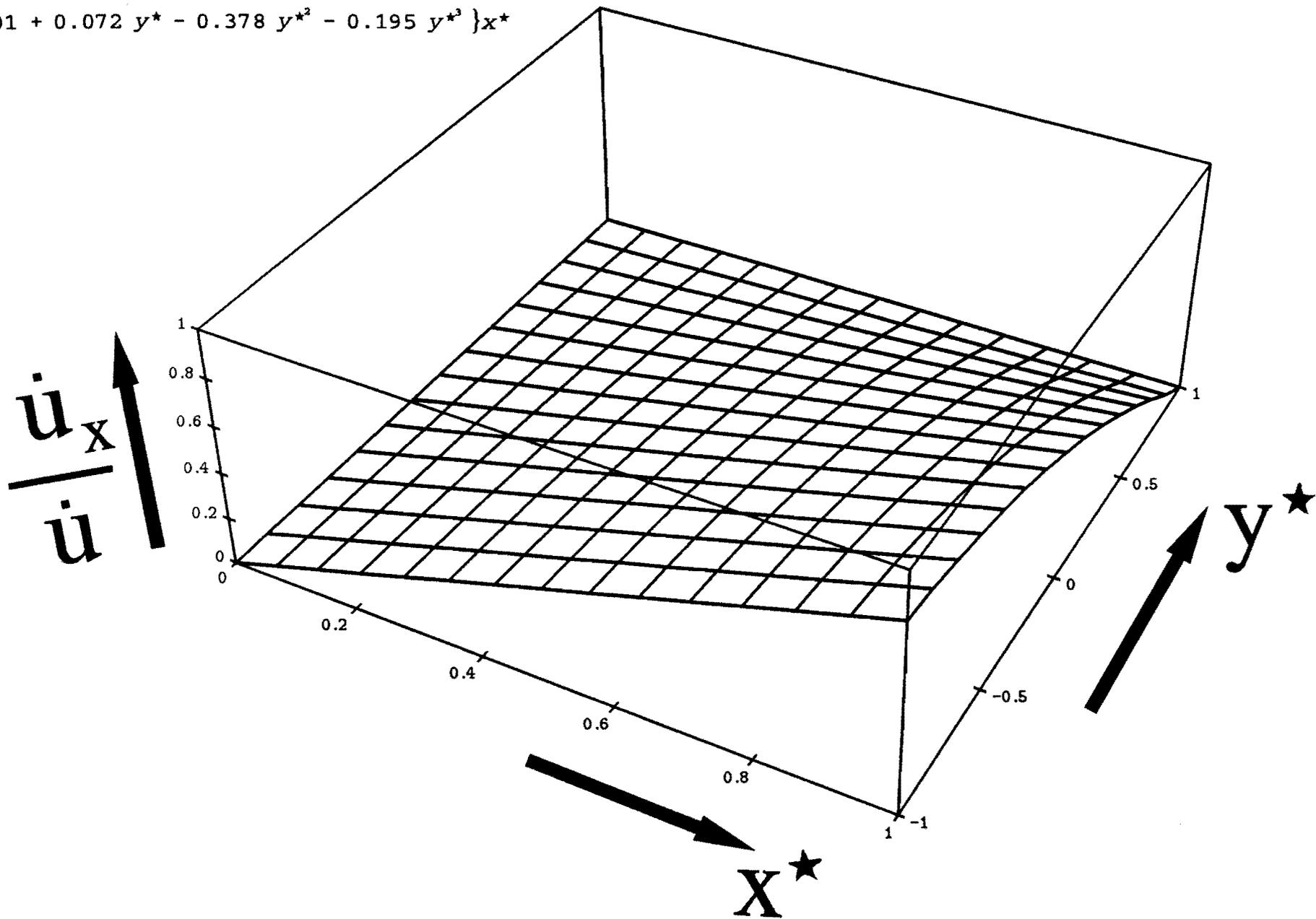


Bild 28: Dimensionslose Geschwindigkeit in x-Richtung in Abhängigkeit von dimensionslosen x und y für $b/h = 0.75$.

FEM-Rechnung
Asymmetrisch Flachstauchen
 $m_u = 0, m_o = 1$
 $h = 5 \text{ mm}$

25 mm

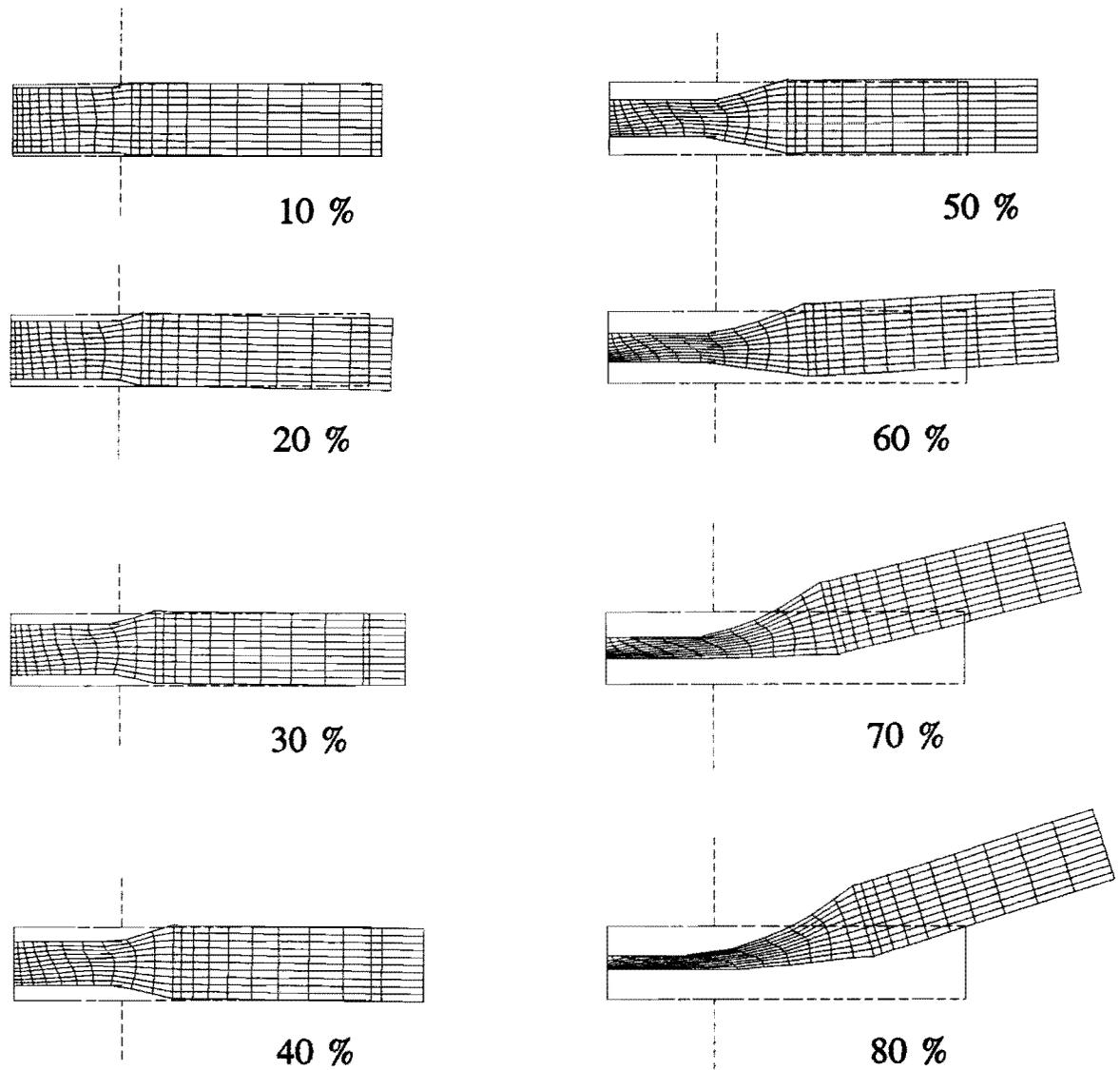
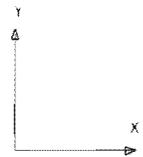


Bild 29: FEM-Ergebnisse für 5 mm - Probe.

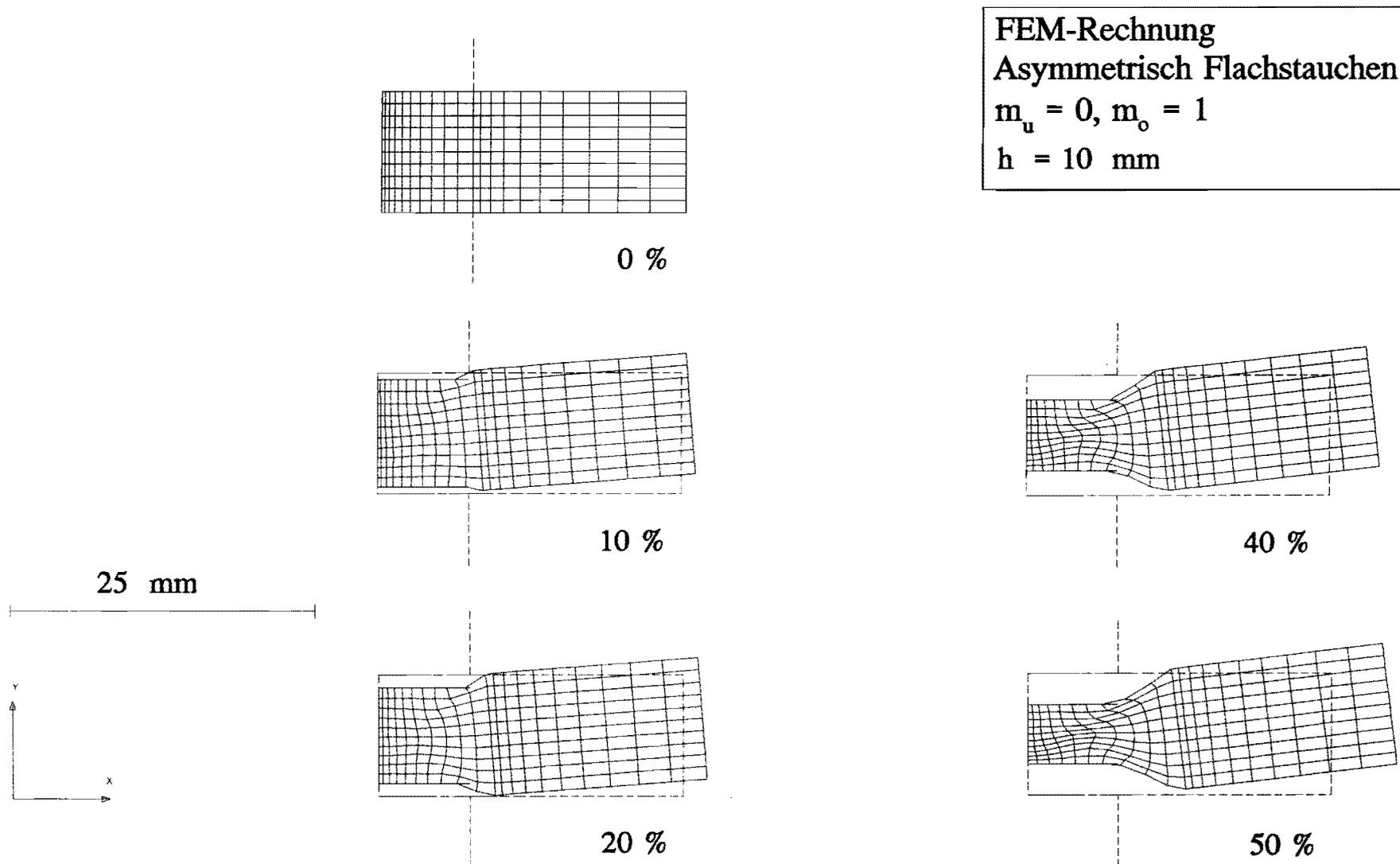
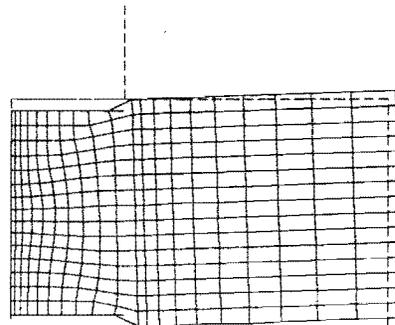
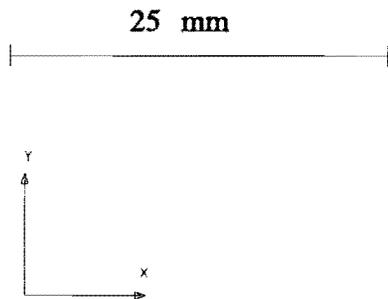
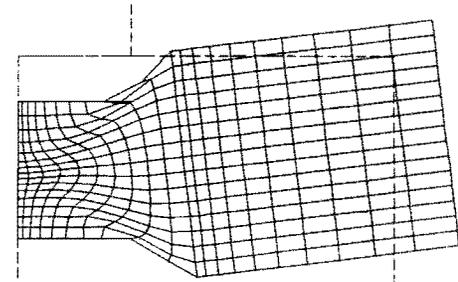


Bild 30: FEM-Ergebnisse für 10 mm - Probe.

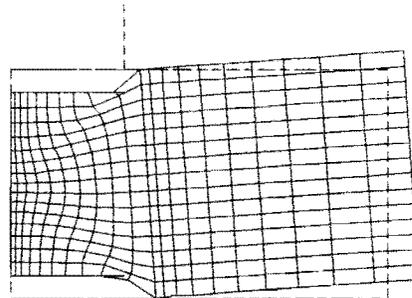
FEM-Rechnung
Asymmetrisch Flachstauchen
 $m_u = 0, m_o = 1$
 $h = 15 \text{ mm}$



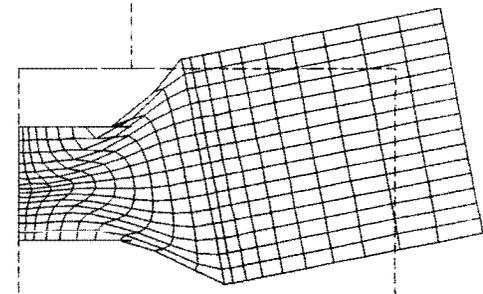
10 %



30 %



20 %



40 %

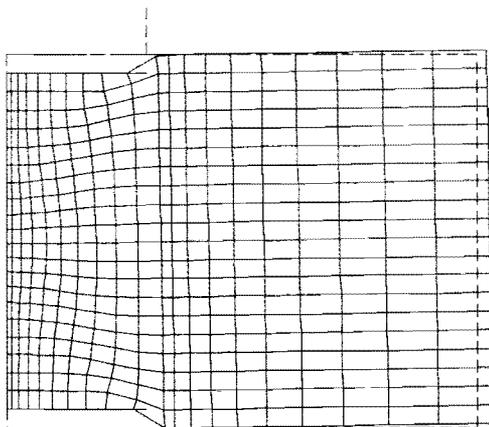
Bild 31: FEM-Ergebnisse für 15 mm - Probe.

FEM-Rechnung
Asymmetrisch Stauchen

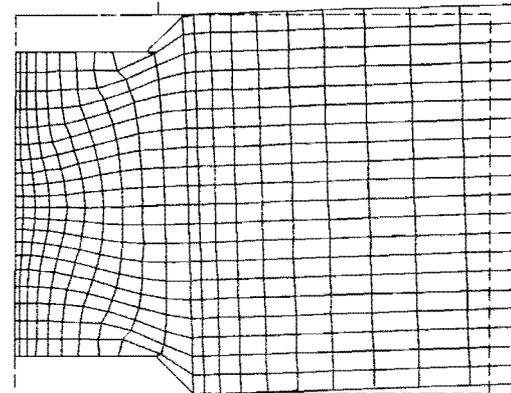
$$m_u = 0, m_o = 1$$

$$h = 20 \text{ mm}$$

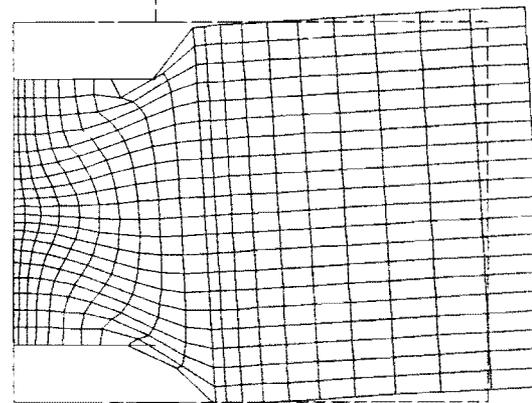
25 mm



10 %



20 %



30 %

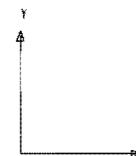
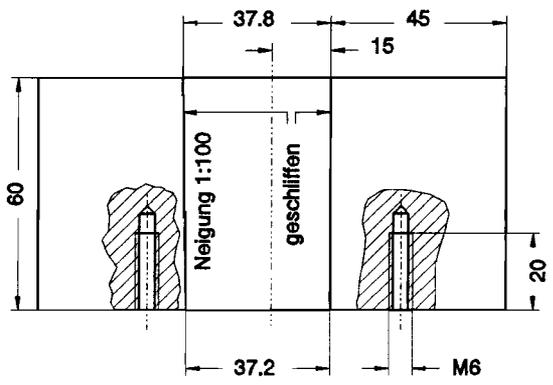
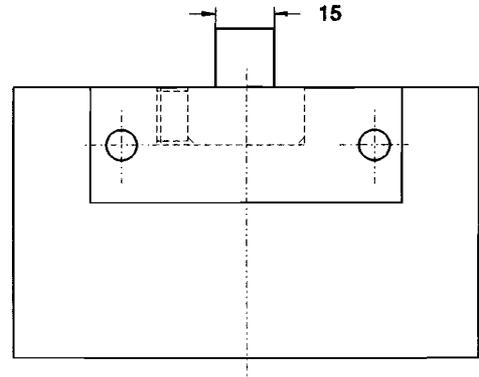
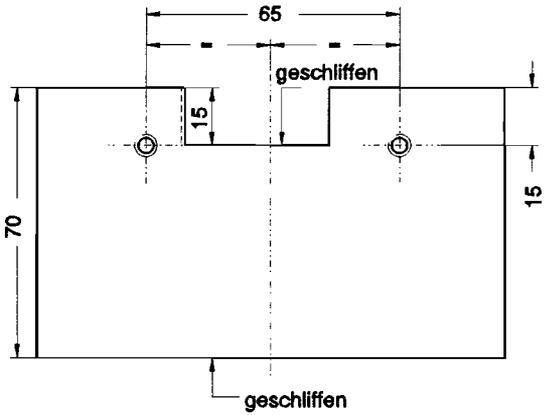
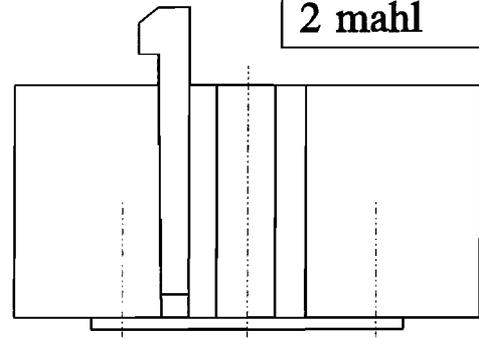


Bild 32: FEM-Ergebnisse für 20 mm - Probe.

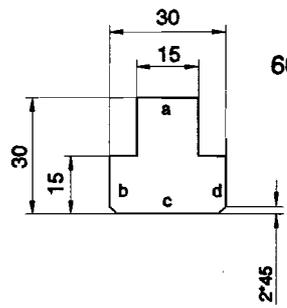
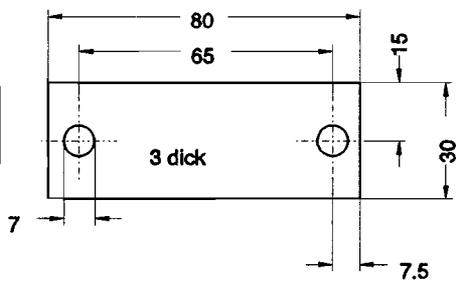
Stempelhalter
2 mahl



Nasenkeil 12*8*63 DIN 6887
2 mahl



2 mahl



60 lang
Werkstoff
1.26.01
60-62 HRC
a,b,c und d geschliffen

Stempel
2 mahl

Bild 33: Stempel und Stempelhalter.

Obere Schrankerechnung

Plastische Instabilität

$2h = 5 \text{ mm}$

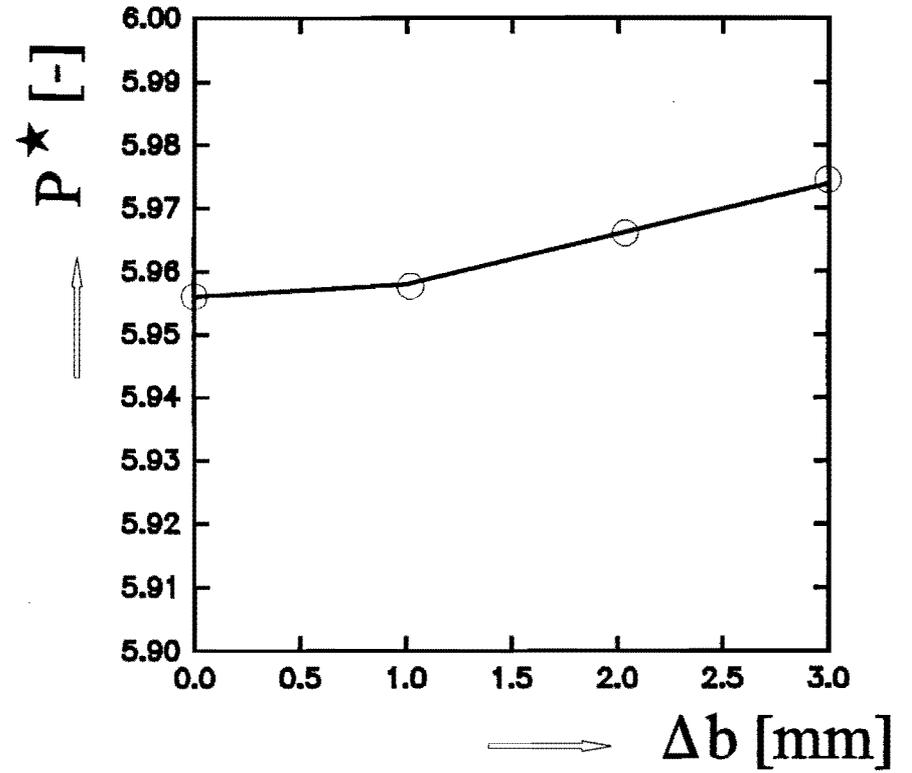
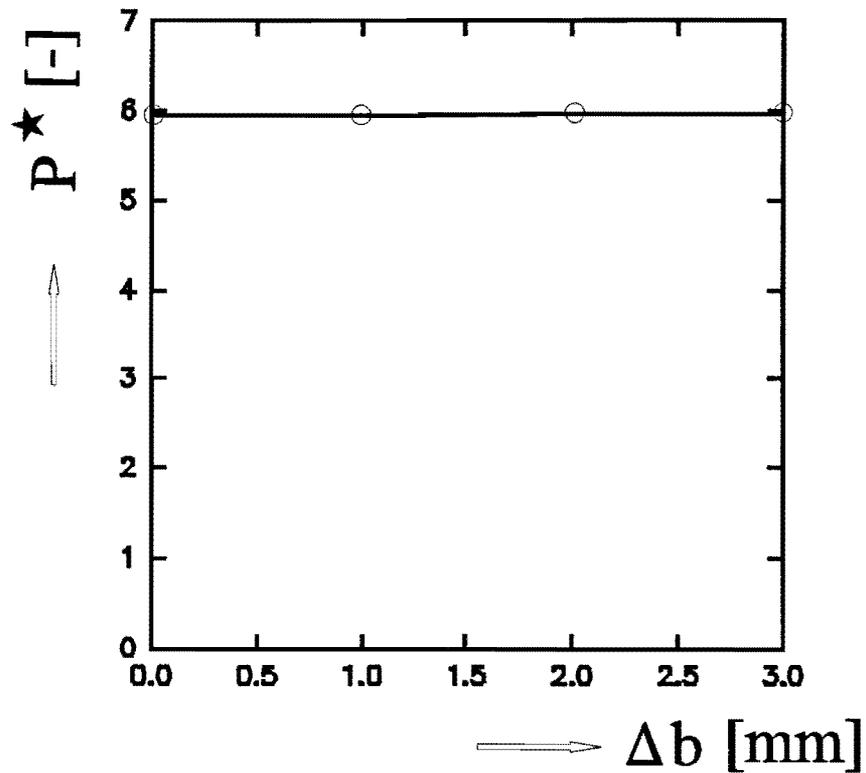


Bild 34: Ergebnisse der Obere Schrankerechnung für das plastische Instabilitätsmodell.

Anhang Versuche

V.1 Versuchstoffe

V.2 Versuchsaufbau

V.3 Versuchsdurchführung

V.4 Versuchsauswertung

V.5 Weitere Versuchsergebnisse

V.5.1 Zweidimensionale Stauchversuche

V.5.2 Dreidimensionale Stauchversuche

V.1 Versuchstoffe

Als Versuchswerkstoff diente Aluminium 99,5. Die Stauchproben wurden durch Sägen und Fräsen hergestellt. Nach der spanenden Bearbeitung wurden die Aluproben normalgeglüht, um homogene Werkstücke vorliegen zu haben, so daß die Einflüsse der Bearbeitung ausgeschlossen blieben. Die Fließspannung des Werkstoffes kann Bild B.19 entnommen werden.

Die Länge und Breite der Proben wurde mit $l_0 : b_0 = 50 \text{ mm} : 50 \text{ mm}$ konstant gehalten. Die Höhe der Proben wurde in 5 mm - Schritten variiert ($h_0 = 5, 10, 15, 20 \text{ mm}$). Einige der Proben wurden auf der Frontseite poliert, um Fließfiguren beim Anstauchen sichtbar zu machen. Zwei Proben ($h_0=10 \text{ mm}$ und $h_0=15 \text{ mm}$) bekamen Löcher mit einem Durchmesser von 1 mm, die nach dem Normalglühen mit Zinn ausgegossen wurden. Nach dem Stauchen wurden die Proben aufgesägt um die Verformung sichtbar zu machen, Bild B.3.

V.2 Versuchsaufbau

Zum Stauchen der Proben stand eine hydraulische Presse mit einer Maximalkraft von 2500 kN zur Verfügung. Kraft, Geschwindigkeit und Weg der Presse sind nicht zu steuern. Deswegen mußten Anschläge angefertigt werden um den Stauchweg zu begrenzen. Als Werkzeuge dienten zwei gehärtete Stempel, Bild B.33. Die Meßgrößen Stauchkraft und Stempelposition wurden mit einer Kraftmeßdose bzw. einem induktiven Wegaufnehmer erfaßt und mit zwei X,Y-Schreiber des Typs YEW 3033 X-Y REC aufgezeichnet. Schreiber 1 zeichnete die Kraft gegen den Weg auf, Schreiber 2 Kraft und Weg gegen die Zeit, Bild V.1.

V.3 Versuchsdurchführung

Die Proben wurden geschmiert mit Rüböl oder Graphit. Wenn nicht geschmiert, wurden die Oberflächen von Werkzeug und Werkstück mit Alkohol gereinigt.

Die Proben wurden mit verschiedenen Stempelwegen und Schmierstoffe gestaucht. Alle Versuche wurden bei Raumtemperatur

durchgeführt.

V.4 Versuchsauswertung

Die Proben wurden vor und nach dem Stauchen vermessen, d.h. die Höhe vor und nach dem Stauchen bestimmt. Aus den Diagrammen des Schreibers war nicht direkt zu ersehen, wo das Stauchen der Probe genau angefangen hatte, Bild V.2. Durch die Abmessungen des Wegaufnehmers mußte dieser ziemlich weit von die Stempel entfernt montiert werden, wodurch sich verschiedene elastische Durchbiegungseffekte in den Kraft-Weg-Kurven bemerkbar machten, Bild V.1. Diese Effekte sind bei größeren Höhenabnahmen (> 1.5 mm) vernachlässigbar, bei kleineren jedoch nicht, weil hier das Aufsetzen des Stempels auf die Anschläge, d.h. das Ende des Stauchens nicht so deutlich dem Diagramm entnommen werden kann. Zusammen können die elastische Effekte maximal 1 mm betragen. Hieraus gibt sich, daß mit Abnahme des Stauchwegs oder Abnahme der Anfangshöhe die Ungenauigkeit zunimmt.

V.5 Weitere Versuchsergebnisse

V.5.1 Zweidimensionale Stauchversuche

Am Anfang wurden zum Ausprobieren nur zwei Probenstücke gebohrt und mit Zinn ausgefüllt. Wegen die gute Ergebnisse wurde versucht mehrere Proben zu bohren um so für verschiedene Umformgrade die Verformungen sichtbar zu machen. Doch wegen der 15 mm Bohrtiefe gingen viele Bohren zu Bruch. Die Proben konnten nicht mehr gebraucht werden. Bild B.3 zeigt eine 15 mm Probe mit abgebrochenem Bohrer. Wegen die relativ geringe Verformung ist der Einfluß zu vernachlässigen. Das Problem beim Bohren gab noch ein anderes Ergebnis. Die 15 mm Proben hatten alle schon Körnerlöcher an einer Seite. Es wurde weiter nicht gebohrt, wie schon erklärt. Es wurde gedacht, daß der Einfluß dieser kleiner Löcher nach dem Normalglühen vernachlässigbar ist. Die Bilder B.6 und B.7 zeigen solcheine Probe, die symmetrisch gestaucht wurde (40%). Beide

Seiten wurden mit Rüböl geschmiert. Die Probe biegt sich dabei zu der Seite ohne Körnerlöcher aus. Es wurde angenommen, daß dieses Ergebnis auf Grund der Körnerlöcher zu erklären sei. Die Körnerlöcher fungierten als "künstliche Schmiertaschen". Später stellte sich heraus, daß diese Erklärung falsch war (V.5.2. Dreidimensionale Stauchversuche). Im Bild V.5 sind die gemessenen Kräfte für die verschiedene b/h-Verhältnisse aufgezeichnet.

Die asymmetrischen Stauchversuche mit Graphit (oben trocken, unten Graphit) ergaben ein ähnliches Bild wie die Versuche, die mit Rüböl durchgeführt wurden. Die Biegungen der Proben waren jedoch niedriger. Die geringere Schmierungscapazität des Graphits wurde mit Versuche bestätigt bei denen oben und unten mit Graphit bzw. Rüböl geschmiert wurde. Eine andere Sache ist die Verteilung des Grafits über die Kontaktfläche. Eine gleichmäßige Verteilung ist kaum zu erstellen.

V.5.2 Dreidimensionale Stauchversuche

Es wurde auch Versuche durchgeführt um die asymmetrische Effekte in Längsrichtung der Stempel zu untersuchen. Als Ausgangsposition wurde das im Abschnitt V.5.1 erwähnte Ergebnis genommen (asymmetrische Effekte durch Körnerlöcher?). Wie im Bild V.3 gezeigt wurde beide Kontaktflächen in zwei gleiche Oberflächen geteilt. Auf die Flächen A, B, C und D wurden Körnerlöcher angebracht, und manchmal auch nicht. Die Verteilung der Körnerlöcher über die Oberfläche ist Bild V.3 zu entnehmen. Es wurde an beider Seiten mit Rüböl geschmiert, und bis 40 % Höhenabnahme gestaucht. Die Ergebnisse waren alle gleich. Die Proben sahen aus wie im symmetrischen Fall. Die Körnerlöcher haben keinen Einfluß auf die Schmierwirkung Rüböls.

Die gleiche Versuche wurden durchgeführt ohne Körnerlöcher, aber mit Graphit statt Rüböl. Hier machten sich die dreidimensionalen asymmetrische Effekte bemerkbar. Im Bild V.4 sind die Ergebnisse grafisch dargestellt.

5 mm Probe mit 50% Flächenabnahme

Unten + oben Rüböl geschmiert

Anfangshöhe = 5,08 mm
Endhöhe = 2,60 mm
Stauchweg = 2,48 mm

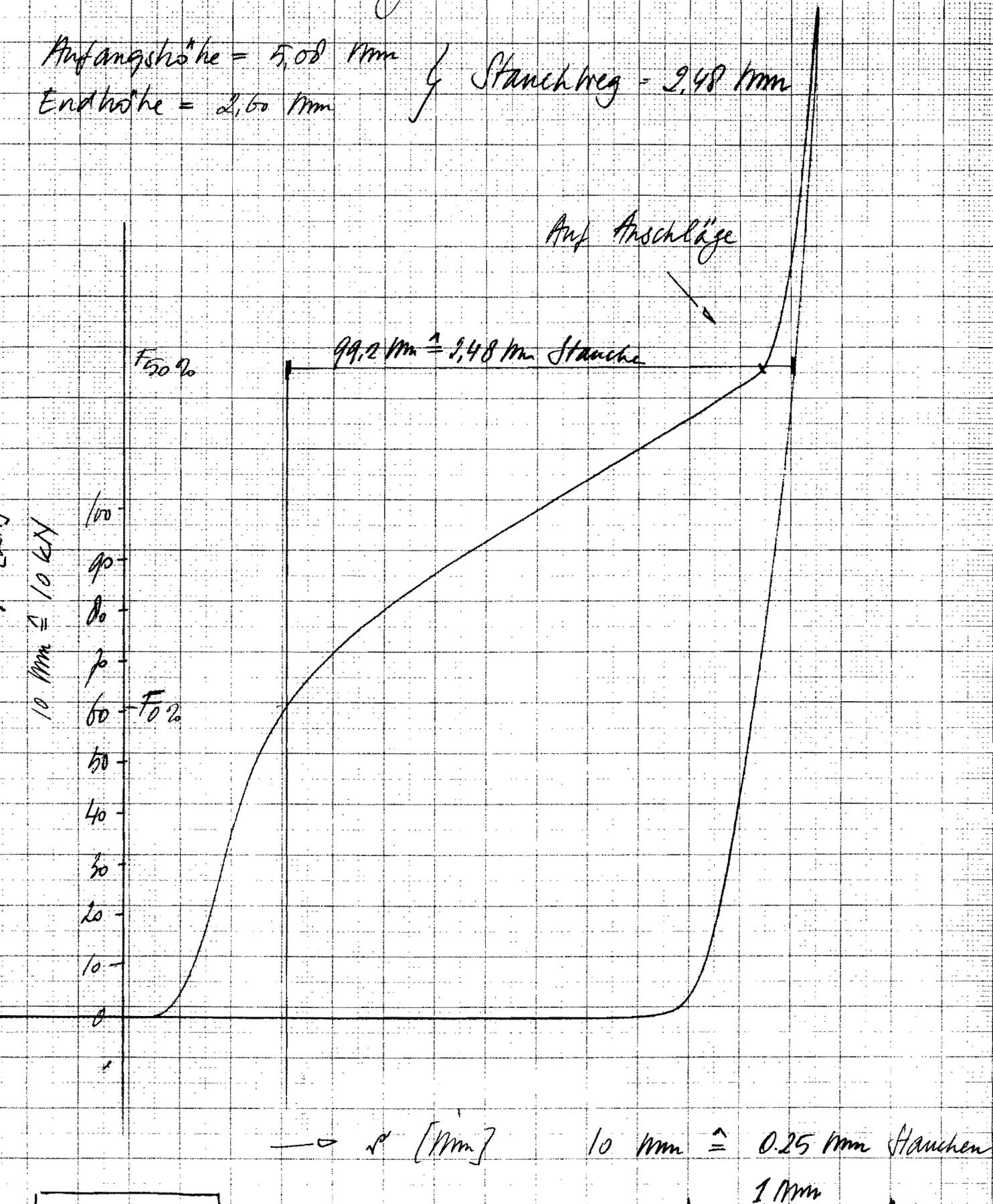


BILD V.1.

5 mm Probe mit 5% Höhenabnahme

Ober trocken unten Rühr geschmied

Anfangshöhe = 5,00 \int Stanzweg = 0,25 mm
Endhöhe = 4,75

Aber wo ist der Punkt wo der
Stempelhalter auf die
Anschläge läuft?



→ F_0 und F_5 %
sind gen nicht
genau zu
bestimmen!

BILD V.2

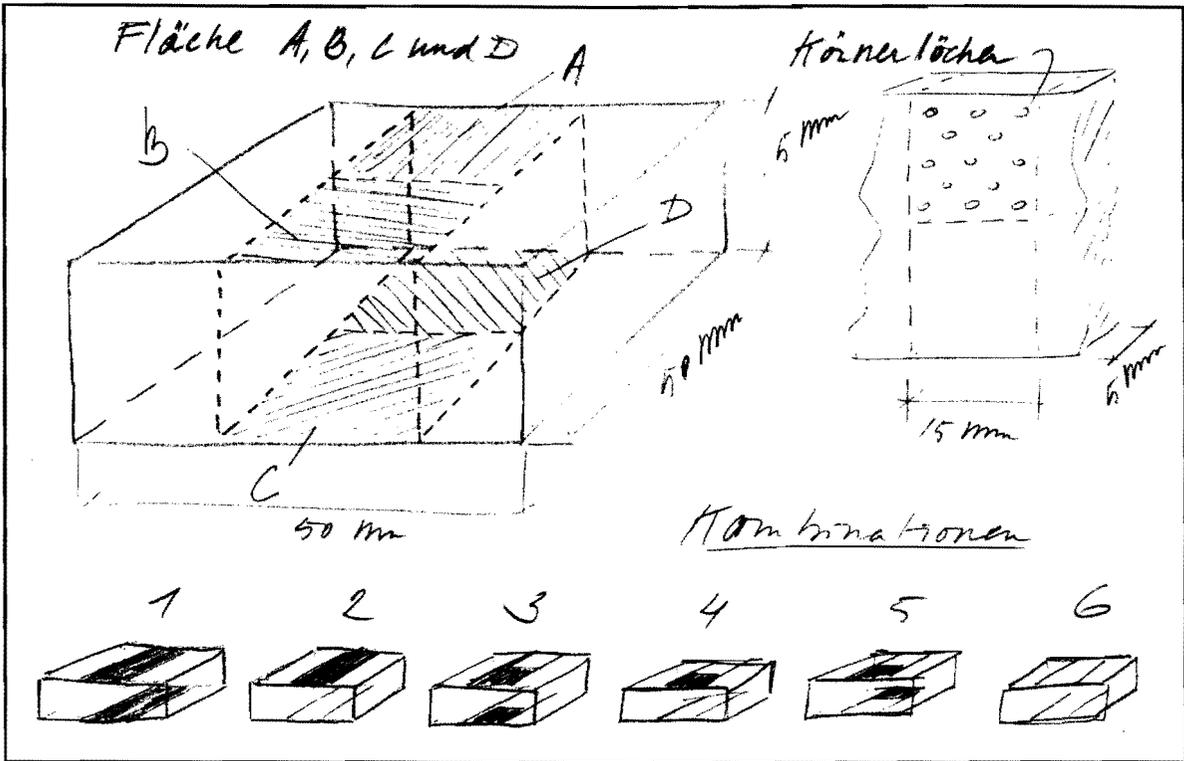


Bild V.3 Verteilung der Körnerlöcher.

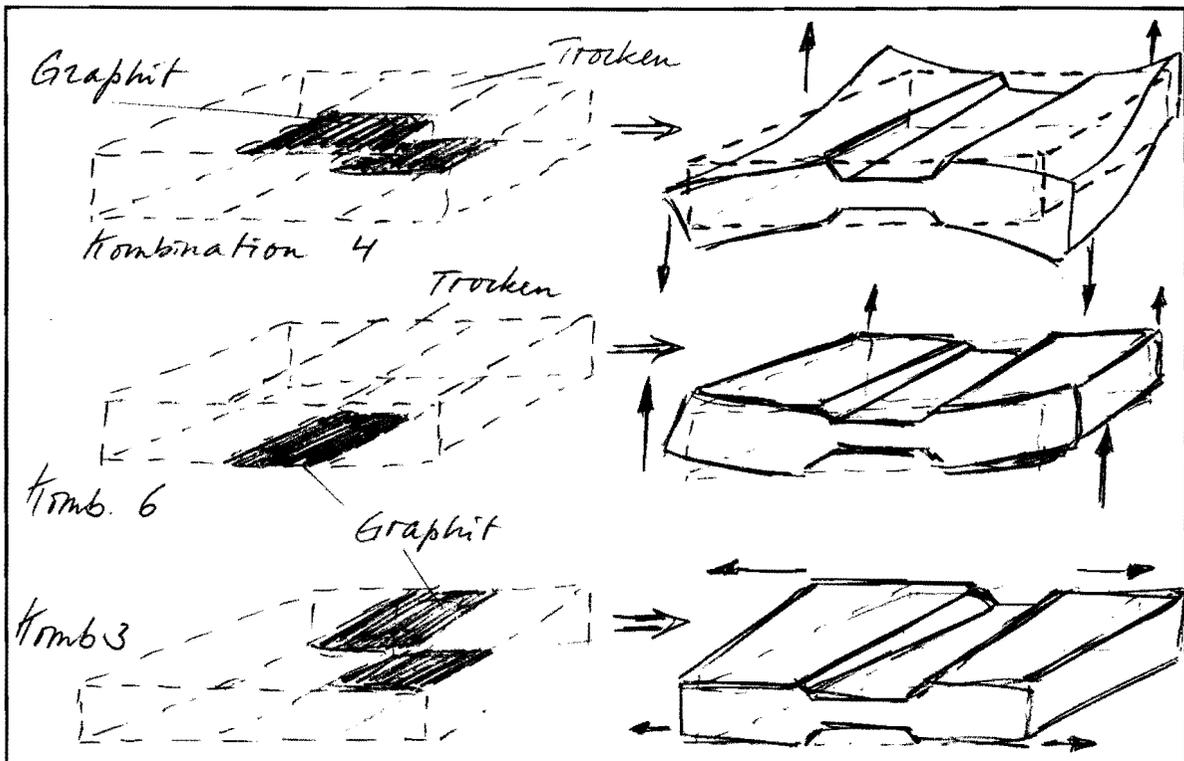


Bild V.4 Auswirkung der dreidimensionalen Asymmetrischen Schmierung.

b / h	h [mm]	F_0 [kN]	$F_{0.5}$ [kN]
3	5	70	150
1.5	10	50	130
1	15	35	127
0.75	20	73	190

Bild V.5 Gemessene Kräfte für $\varphi=0$ und $\varphi=0.5$.

Anhang Numerische Lösung eines Volumenintegrals & Ergebnisse der Obere Schrankerechnung

N.1 Numerische Lösung eines Volumenintegrals

N.2 Wirkung des Programms

N.2.1 Programm - INPUT

N.2.2 Programm - OUTPUT

N.3 Durchführung und Ergebnisse der Obere Schrankerechnungen

N.3.1 Durchführung der Obere Schrankerechnungen

N.3.2 Ergebnisse der Durchführung

N.3.3 Ergebnisse Geschwindigkeitsfeldes dritten Grades

N.3.4 Minimale Werte des Gesamtintegrals für verschiedene b/h-Verhältnisse

N.4 Theorie der numerischen Quadratur

N.1 Numerische Lösung eines Volumenintegrals

Zur numerischen Lösung des Volumenintegrals wurde ein Pascal-Programm [16,17,18] geschrieben, basierend auf der Simpson-Methode (Abschnitt N.4) [19,20]. Durch Änderung von Funktion und Parametern kann das Programm (Abschnitt N.2) sowohl für lineare Geschwindigkeitsfelder, als auch für Geschwindigkeitsfelder höheren Grades verwendet werden. Die Ergebnisse des Programmes werden vorher anhand von Standardintegralen kontrolliert. Hierbei stellte sich heraus, daß das Programm bei relativ niedriger Anzahl von Rechenschritten, das heißt bei relativ großen Intervallen dx und dy nicht genau war. Nur bei sehr kleinen Schritten war das Program hinreichend genau. Damit wurde die Rechenzeit zu lang. Im folgenden wurde daher zur numerischen Lösung des Volumenintegrals ein Programm zur Lösung von Flächenintegralen nach der Romberg-Methode (Abschnitt N.4) so umgeschrieben, daß es sich auch zur Lösung von Volumenintegralen eignet. Auch dieser Algorithmus wurde anhand von Standardintegrale kontrolliert. Auch dieses Programm (Abschnitt N.2) wurde so verändert, daß die Verwendung von Geschwindigkeitsfeldern verschiedenen Grades möglich ist. Der Rechenzeitbedarf war, bei der Anwendung von Geschwindigkeitsfeldern höheren Grades, auch sehr hoch. Eine Übertragung der Programme auf ein VAX-System gelang, aufgrund von Problemen mit der Kompatibilität der Pascal-Compiler nicht.

N.2. Wirkung des Programms

N.2.1. Programm - INPUT

Vor dem Start des Programms müssen einige Parameter und Zahlen eingeführt werden. Einige davon sind abhängig von dem gewähltem Geschwindigkeitsfeld:

Vom Geschwindigkeitsfeld abhängige Parameter:

- 1) Für das gewählte Geschwindigkeitsfeld gibt es eine Obere Schrankenlösung. Diese Funktion muß eingeführt werden bei "FUNCTION".
- 2) Auch die Zahl der Variablen, die deklariert werden müssen, hängt von dem gewähltem Geschwindigkeitsfeld ab. Die Deklaration findet statt unter "PROGRAMM".
- 3) Die Zahl der "LOOPS" ist auch abhängig von der Zahl der Parameter.

Vom Geschwindigkeitsfeld unabhängige Parameter:

Eine "PROCEDURE" wird mit Variablen aufgerufen, die von der Procedure benötigt werden. Es gibt zwei Procedures, "Romberg_one" und "Romberg_two". "Romberg_one" berechnet das Integral über das x-Interval. Das x-Interval ist in dx-Incmente unterteilt. Für jede Schrittstelle mit einem bestimmten x wird mit "Romberg_two" das Integral über das Interval y bestimmt. Die Variablen, die eine Procedure benötigt sind:

- 1) None, Ntwo.
- 2) Hone, Htwo.
- 3) Epsone, Epstwo.
- 4) Schaetzone, Schaetztwo.
- 5) Fehlerone, Fehlertwo.

Die Parameter mit "-one und -two" am Ende werden für die Procedure "Romberg_one", bzw. "Romberg_two" gebraucht. Ihre Bedeutung ist der oberen Seite des Programms zu entnehmen.

Nach dem Start werden dem Benutzer des Programms noch einige Fragen gestellt. Es sind Fragen über die Anfangsgeometrie der Probe, die in dem Geschwindigkeitsfeld gebrauchten Parameter, und die Reibungszahlen m_0 und m_u :

- 6) "Breite=": Es wird die Breite des Umformgebietes gefragt. In unserem Fall ist das die Breite der Stempel.
- 7) "Höhe=": Hiermit gibt man die Höhe des Umformgebietes ein.

- 8) "Range a von (a1) bis (a2), a1=, a2=": Es wird das Intervall für α gefragt (*).
- 9) "Schritt-Anzahl für Range a=": Hiermit gibt man die Zahl der Schritte ein, womit den Interval unterverteilt werden muß (*).
- 10) "Reibungswert unten mu=": Die Reibungs- m_u -Wert nach von Mises.
- 11) "Reibungswert oben mo=": Die Reibungs- m_o -Wert nach von Mises.

(*) Die Fragen dargestellt in 9) und 10) werden wiederholt für β , γ , δ , usw.

N.2.2 Programm - OUTPUT

Mit dem Durchlaufen der "LOOPS" werden, innerhalb der Grenzen des bestimmten Intervalles, α , β , γ , δ usw. variiert. Für jede Variation wird der damit zusammenhängende Integralwert bestimmt.

In einem durch das Programm geöffneten "File", werden die verschiedenen Parameter mit den berechneten Integralwerten abgespeichert (*). Auch wird eine durch das Programm bestimmte Fehlerschaetzung gegeben. Diese Fehlerschaetzung wurde nur als Hilfsmittel zur Kontrolle gebraucht. Durch das Umschreiben des Programms zur Lösung von Flächenintegralen in ein Programm zur Lösung von Volumenintegralen war der Wert der Fehlerschaetzung nicht mehr richtig. Es wurde nur überprüft, ob der Wert der Fehlerschaetzung im Verhältnis zum Gesamtintegralwert nicht zu groß wurde. Ein Fehler beim Durchlauf des Programms wird durch das Programm gemeldet.

(*) Es sei darauf hingewiesen das bei einen neuen Start des Programms die alten Dateien automatisch gelöscht werden. Falls die alten Dateien noch gebraucht werden, muß man sie vor einem neuen Programmmlauf umbenennen oder den Namen des "Outputfile" ändern.

Programm, basierend auf der Simpson Methode, zur Berechnung Obere Schrankelösung mit lineares Geschwindigkeitsfeldes.

```
PROGRAM oberen_schranken_integral_eine(input,out);
```

```
VAR PPIj,bl,br,hu,ho,z,s,  
    a,b,mu,mo,hohe,breidte,  
    sa,sb,  
    ra1,ra2,rb1,rb2,  
    Pfr1,Pfr2,Pfr,Pd1,Pd2,Pd3,Pd:real;  
k,l,  
nx,ny,na,nb:integer;  
out: text;
```

```
FUNCTION funktion(x,y,a,b,mu,mo,hohe,breidte:real):real;
```

```
BEGIN  
Pfr1:= (a+b) * (mo/(Sqrt(3)));  
Pfr2:= (a-b) * (mu/(Sqrt(3)));  
Pfr:= Pfr1 + Pfr2;  
Pd1:= 4/( (Sqrt(3)) * (breidte * breidte) );  
Pd2:= a + (b*(y/hohe)*(y/hohe));  
Pd3:= (b*x)/(2*hohe);  
Pd:= Pd1 * ( Sqrt((Pd2*Pd2) + (Pd3*Pd3)));  
funktion:= Pfr + Pd;  
END;
```

```
PROCEDURE power_zwei(x:real;VAR Pij:real);
```

```
VAR j:integer;  
y,Pi0,Pi1,Pi2:real;  
BEGIN  
Pi0:= 0;  
Pi1:= 0;  
Pi2:= 0;  
Pij:= 0;  
FOR j:= 0 TO (2*ny) DO  
BEGIN  
y:=hu + (j*z);  
IF (j=0) OR (j= 2*ny) THEN  
BEGIN  
Pi0:= Pi0 + funktion(x,y,a,b,mu,mo,hohe,breidte);  
END;  
IF j MOD 2 = 0 THEN  
BEGIN  
Pi2:= Pi2 + funktion(x,y,a,b,mu,mo,hohe,breidte);  
END;  
IF j MOD 2 = 1 THEN  
BEGIN  
Pi1:= Pi1 + funktion(x,y,a,b,mu,mo,hohe,breidte);  
END;  
END;  
Pij:= (z/3)*(Pi0 + 4*Pi1 + 2*Pi2);  
END;
```

```
PROCEDURE power_eins(VAR PPIj:real);
```

```
VAR i:integer;  
x,POj,P1j,P2j,Pij:real;  
BEGIN  
POj:= 0;  
P1j:= 0;  
P2j:= 0;  
PPIj:= 0;  
FOR i := 0 TO (2*nx) DO  
BEGIN  
x:= bl + (i*a);  
IF (i=0) OR (i= 2*nx) THEN  
BEGIN  
power_zwei(x,Pij);  
POj:= POj + Pij;  
END;  
IF i MOD 2 = 0 THEN  
BEGIN
```

```
        power_zwei(x,Pij);
        P2:= P2j + Pij;
    END;
    IF I MOD 2 = 1 THEN
        BEGIN
            power_zwei(x,Pij);
            P1j:= P1j + Pij;
        END;
    END;
    PPIj:= (a/3) * (P0j + 4 * P1j + 2 * P2j);
END;
```

```
{main}
BEGIN
    assign(out,'outains');
    rewrite(out);
    writeln;
    writeln('*****');
    writeln('**** Achtung !! Schritt-Anzahl immer INTEGER !!! ****');
    writeln('*****');
    writeln;
    write('    Breite links von x=0 : ');
    readln(bl);
    write('    Breite rechts von x=0 : ');
    readln(br);
    write('    Schritt-Anzahl x : ');
    readln(nx);
    write('    Höhe unter y=0 : ');
    readln(hu);
    write('    Höhe oben y=0 : ');
    readln(ho);
    write('    Schritt-Anzahl y : ');
    readln(ny);
    write('Range a von (a1) bis (a2), a1 = ');
    readln(ra1);
    write('          a2 = ');
    readln(ra2);
    write(' Schritt-Anzahl für range a = ');
    readln(na);
    write('Range b von (b1) bis (b2), b1 = ');
    readln(rb1);
    write('          b2 = ');
    readln(rb2);
    write(' Schritt-Anzahl für range b = ');
    readln(nb);
    write(' Reibungswert unter, mu = ');
    readln(mu);
    write(' Reibungswert oben, mo = ');
    readln(mo);
    a:= (br + bl)/(2 * nx);
    z:= (ho + hu)/(2 * ny);
    sa:= (ra2-ra1)/na;
    sb:= (rb2-rb1)/nb;
    breite:= bl + br;
    hohe:= hu + ho;
    BEGIN
        FOR k := 0 TO na DO
            FOR l := 0 TO nb DO
                BEGIN
                    a:= ra1 + k * sa;
                    b:= rb1 + l * sb;
                    power_eins(PPIj);
                    writeln;
                    writeln(out,'a: ',a:4:4, ' b: ',b:4:4);
                    writeln(out,'mu: ',mu:4:4, ' mo: ',mo:4:4, ' höhe: ',
                        hohe:4:4, ' breite: ',breite:4:4);
                    writeln;
                    write(out,'Leistung integriert');
                    write(out,' nach Simpson : ',PPIj);
                    writeln;
                END;
            END;
        END;
    close(out);
END.
```

Programm, basierend auf der Romberg Methode, zur Berechnung Obere Schrankelösung für Geschwindigkeitsfeld dritten Grad.

{ Numerische Quadratur für obere Schranke Lösung, Geschwindigkeitsfeld hoch drei

Die folgenden Prozeduren berechnen näherungsweise das Integral einer reellwertigen Funktion mit Hilfe der Romberg-Quadratur.

Die Unterprogramme haben die folgenden Parameter:

- (A) Real Ein Linke Grenze des Integrationsintervalls in die X-Richtung.
- (B) Real Ein Rechte Grenze des Integrationsintervalls in die X-Richtung.
- (C) Real Ein Linke Grenze des Integrationsintervalls in die Y-Richtung.
- (D) Real Ein Rechte Grenze des Integrationsintervalls in die Y-Richtung.
- Breite Real Aus Breite-Abmessung in die X-Richtung.
- Höhe Real Aus Höhe-Abmessung in die Y-Richtung.
- mu Real Ein Reibungswert (Von Mises) unten.
- mo Real Ein Reibungswert (Von Mises) oben.
- aa Real Ein Alpha-Parameter in das Geschwindigkeitsfeld.
- bb Real Ein Beta-Parameter in das Geschwindigkeitsfeld.
- cc Real Ein Gamma-Parameter in das Geschwindigkeitsfeld.
- dd Real Ein Delta-Parameter in das Geschwindigkeitsfeld.
- ra1,ra2,na Real Ein Anfangs- und Endwerte für Range alpha, Zahl der Schritte für Range.
- rb1,rb2,nb Real Ein Anfangs- und Endwerte für Range beta, Zahl der Schritte für Range.
- rd1,rd2,nd Real Ein Anfangs- und Endwerte für Range delta, Zahl der Schritte für Range.

- Qone Real Aus Wert des totale Volume-Integrals.
- Qtwo Real Aus Wert des Integrals in Y-Richtung.

- N Integer Ein Maximale Anzahl der Funktionsberechnungen, bzw. (None = Ntwo) Anzahl der Zeilen des Romberg-Schemas.
- H Real Ein Anfangsschrittweite bei der Romberg-Quadratur. (Hone = Htwo)
- Eps Real Ein Genauigkeitsforderung bei der Romberg-Quadratur. (Epsone = Eptwo)
- Schaetz Real Aus Fehlerschaetzung bei der Romberg-Quadratur. (Schaetzzone,Schaetztwo)
- Fehler Integer Aus Fehlerparameter. (Fehlerone,Fehlertwo) = 0: Nullstelle gefunden.
= 1: Parameter falsch.
= 2: Genauigkeitsanforderung nicht erfüllt.

Zusätzlich muss eine Funktion Funk zur Berechnung der Funktionswerte hinzugefügt werden

- Pd Real Aus Innere Leistung (Dimensionslos).
- Pfr Real Aus Reibungs Leistung (Dimensionslos). }

Program Obere_Schranke_Losung_Hoch_drie(input,out); { Testprogramm }

```

Var Qone, Qtwo, Schaetzzone, Schaetztwo: Real;
Fehlerone, Fehlertwo: Integer;
aa,bb,cc,dd,mu,mo,hohe,breite,hobr,
sa,sb,ad,
ra1,ra2,rb1,rb2,rd1,rd2,
Pfr1,Pfr2,Pfr,Pd1,Pd2,Pd3,Pd4,Pd5,Pd:real;
kk,ll,nn,
na,nb,nd:integer;
out: text;
    
```

Function Funk (X,Y: Real): Real; { Funktion, die integriert wird. }

```

BEGIN
Pfr1:= Abs((aa+bb+cc+dd)) * (mo/(Sqrt(3)));
Pfr2:= Abs((aa-bb+cc-dd)) * (mu/(Sqrt(3)));
Pfr:= Pfr1 + Pfr2;
Pd1:= (4/(Sqrt(3)));
Pd2:= ((aa+(y*(bb+(y*(cc+(y*dd)))))))*hobr);
Pd4:= (x*x);
Pd5:= ((bb/2)+(y*(cc+(y*((3*dd)/2))));
Pd3:= Pd4*Pd5*Pd5;
Pd:= Pd1 * (Sqrt((Pd2*Pd2)+Pd3));
Funk:= Pfr+Pd;
END;
    
```

```
Procedure Romberg_two (X,C,D: Real; Var Qtwo: Real; Var Fehlertwo: Integer; {X konstant, über Y integrieren}
  Htwo: Real; Ntwo: Integer; Eptwo: Real;
  Var Schaetztwo: Real);
```

```
Const AllesOk = 0; Parameter = 1; Schritte = 2;
```

```
Var I, K, M, NO: Integer;
```

```
H1, H2, XM: Real;
```

```
EL: Array[1..20] Of Real;
```

```
Begin If (Ntwo <= 1) Or (Ntwo > 20) Or (Eptwo <= 0.0) Then Begin
```

```
  Fehlertwo:=Parameter; Exit; End; { Parameter pruefen }
```

```
  If C = D Then Begin { Sonderfall: Leeres Intervall }
```

```
    Qtwo:=0.0; Schaetztwo:=0.0; Htwo:=0.0;
```

```
    Fehlertwo:=AllesOk; Exit; End;
```

```
  Htwo:= Abs(Htwo); If Abs(D-C) < Htwo Then Htwo:= Abs(D-C); { Sorge fuer richtige }
```

```
  If C > D Then Htwo:=-Htwo; { Anfangsschrittweite }
```

```
  If Htwo = 0 Then Htwo:= D - C;
```

```
  NO:= Trunc((D - C) / Htwo + 0.5); Htwo:= (D - C) / NO;
```

```
  Qtwo:= (Funk(X,C) + Funk(X,D)) / 2.0; { Bestimme erste Zeile des }
```

```
  For I:=1 To NO - 1 Do Qtwo:= Qtwo + Funk(X,C + I * Htwo); { Rombergschemas }
```

```
  EL[I]:= Htwo * Qtwo;
```

```
  For K:=2 To Ntwo Do Begin { Bestimme naechsten Integralwert }
```

```
    Htwo:= Htwo / 2.0; NO:= NO * 2;
```

```
    Qtwo:=0.0;
```

```
    I:=1; While I < NO Do Begin
```

```
      Qtwo:= Qtwo + Funk(X,C + I * Htwo);
```

```
      I:= I + 2; End;
```

```
      { Naechste Zeile des Rombergchemas }
```

```
    H1:=EL[I]; EL[I]:= Htwo * Qtwo + EL[I] / 2.0;
```

```
    XM:=1.0;
```

```
    For M:=2 To K Do Begin
```

```
      XM:= XM * 4.0;
```

```
      H2:=EL[M];
```

```
      EL[M]:= EL[M-1] + (EL[M-1] - H1) / (XM - 1.0);
```

```
      H1:=H2; End;
```

```
  Schaetztwo:= Abs(EL[K] - EL[K-1]); { Fehlerschaetzung }
```

```
  If Schaetztwo < Eptwo Then Begin
```

```
    Qtwo:=EL[K]; Fehlertwo:=AllesOk; Exit; End;
```

```
  End;
```

```
  Qtwo:=EL[Ntwo]; Fehlertwo:=Schritte;
```

```
End;
```

```
Procedure Romberg_one (A,B,C,D: Real; Var Qone: Real; Var Fehlerone: Integer; {Über X integrieren, }
  Hone: Real; None: Integer; Epsone: Real; {bei jede X mit Romberg_two, }
  Var Schaetzzone: Real); {über Y integrieren.}
```

```
Const AllesOk = 0; Parameter = 1; Schritte = 2;
```

```
Var I, K, M, NO: Integer;
```

```
H1, H2, XM: Real;
```

```
QtwoA, QtwoB, QtwoE, QtwoF, E, F: Real;
```

```
EL: Array[1..20] Of Real;
```

```
Begin If (None <= 1) Or (None > 20) Or (Epsone <= 0.0) Then Begin
```

```
  Fehlerone:=Parameter; Exit; End; { Parameter pruefen }
```

```
  If A = B Then Begin { Sonderfall: Leeres Intervall }
```

```
    Qone:=0.0; Schaetzzone:=0.0; Hone:=0.0;
```

```
    Fehlerone:=AllesOk; Exit; End;
```

```
  Hone:= Abs(Hone); If Abs(B-A) < Hone Then Hone:= Abs(B-A); { Sorge fuer richtige }
```

```
  If A > B Then Hone:=-Hone; { Anfangsschrittweite }
```

```
  If Hone = 0 Then Hone:= B - A;
```

```
  NO:= Trunc((B - A) / Hone + 0.5); Hone:= (B - A) / NO;
```

```
  Romberg_two(A,C,D, Qtwo, Fehlertwo, 0.0, 10, 1.0E-12, Schaetztwo);
```

```
  QtwoA:=Qtwo;
```

```
  Romberg_two(B,C,D,Qtwo, Fehlertwo, 0.0, 10, 1.0E-12, Schaetztwo);
```

```
  QtwoB:=Qtwo;
```

```
  Qone:= (QtwoA + QtwoB) / 2.0;
```

```
  { Bestimme erste Zeile des }
```

```
  E:= A+I*Hone;
```

```
Romberg_two(E,C,D,Qtwo, Fehlertwo, 0.0, 10, 1.0E-12, Schaetztwo);
QtwoE:=Qtwo;
For I:=1 To NO - 1 Do Qone:= Qone + QtwoE;      { Rombergschemes }
EL[1]:= Hone * Qone;

For K:= 2 To None Do Begin      { Bestimme naechsten Integralwert }
  Hone:= Hone / 2.0; NO:= NO * 2;
  Qone:=0.0;
  I:= 1; While I < NO Do Begin
    F:= A+I*Hone;
    Romberg_two(F,C,D,Qtwo, Fehlertwo, 0.0, 10, 1.0E-12, Schaetztwo);
    QtwoF:= Qtwo;
    Qone:= Qone + QtwoF;
    I:= I + 2; End;
  { Naechste Zeile des Rombergschemes }
  H1:= EL[1]; EL[1]:= Hone * Qone + EL[1] / 2.0;
  XM:= 1.0;
  For M:= 2 To K Do Begin
    XM:= XM * 4.0;
    H2:= EL[M];
    EL[M]:= EL[M-1] + (EL[M-1] - H1) / (XM - 1.0);
    H1:= H2; End;

  Schaetzone:= Abs(EL[K] - EL[K-1]);      { Fehlerschaetzung }
  If Schaetzone < Epsone Then Begin
    Qone:= EL[K]; Fehlerone:= AllesOk; Exit; End;
  End;
Qone:= EL[None]; Fehlerone:= Schritte;
End;
```

```
BEGIN      {Abfrage der Input-variablen}
assign(out,'outdrei');
rewrite(out);
writeln;
writeln('*****');
writeln('**** Achtung !! Schritt-Anzahl immer INTEGER !!! ****');
writeln('*****');
writeln;
write('          Breite = : ');
readln(breite);
write('          Höhe = : ');
readln(hohe);
write('Range a von (a1) bis (a2), a1 = ');
readln(ra1);
write('          a2 = ');
readln(ra2);
write(' Schritt-Anzahl für range a = ');
readln(na);
write('Range b von (b1) bis (b2), b1 = ');
readln(rb1);
write('          b2 = ');
readln(rb2);
write(' Schritt-Anzahl für range b = ');
readln(nb);
write('Range d von (d1) bis (d2), d1 = ');
readln(rd1);
write('          d2 = ');
readln(rd2);
write(' Schritt-Anzahl für range d = ');
readln(nd);
write(' Reibungswert unten, mu = ');
readln(mu);
write(' Reibungswert oben, mo = ');
readln(mo);
sa:=(ra2-ra1)/na;
sb:=(rb2-rb1)/nb;
sd:=(rd2-rd1)/nd;
hobr:=hohe/breite;
writeln(out,'breite = ',breite:4:4);
writeln(out,'höhe = ',hohe:4:4);
writeln(out,'Range alpha = ',ra1:4:4,' - ',ra2:4:4);
writeln(out,'Schritt alpha = ',sa:4:4);
writeln(out,'Range beta = ',rb1:4:4,' - ',rb2:4:4);
writeln(out,'Schritt beta = ',sb:4:4);
writeln(out,'Range delta = ',rd1:4:4,' - ',rd2:4:4);
```

```
writeln(out,'Schritt delta = ',ed:4:4);
writeln(out,'mu: ',mu:4:4,'mo: ',mo:4:4);
writeln(out);
writeln(out,'alpha= beta= gamma= delta= Romberg-Integral= Fehlerschaetz=');
writeln(out);
  BEGIN
    FOR kk := 0 TO na DO                {alpha,beta,gamma und delta variieren}
      FOR ll := 0 TO nb DO
        FOR nn := 0 TO nd DO
          BEGIN
            sa:= ra1 + kk*sa;
            bb:= rb1 + ll*sb;
            cc:= 3*((1/(2*hbrr))-sa);
            dd:= rd1 + nn*sd;
Romberg_one (0, 1, -1, 1, Qone, Fehlerone, 0.0, 10, 1.0E-8, Schaetzzone);
            writeln(out,aa:3:3,' ',bb:3:3,' ',cc:3:3,' ',dd:3:3,' ',Qone,' ',Schaetzzone);
            If Fehlerone = 0 Then
              Write(out)
            Else
              WriteLn(out,'Fehler bei Integralberechnung mit Romberg');

            If Fehlertwo = 0 Then
              Write(out)
            Else
              WriteLn(out,'Fehler bei Integralberechnung mit Romberg');

          END;
        END;
      END;
    END;
  close(out);
END.
```

Programm, basierend auf der Romberg Methode, zur Berechnung Obere Schrankelösung für Geschwindigkeitsfeldes dritten Grad. Die Randbedingung $m_0=1$ ist miteinbezogen.

{ Numerische Quadratur für obere Schranke Lösung, Geschwindigkeitsfeld hoch drei

Die folgenden Prozeduren berechnen näherungsweise das Integral einer reellwertigen Funktion mit Hilfe der Romberg-Quadratur.

Die Unterprogramme haben die folgenden Parameter:

(A) Real Ein Linke Grenze des Integrationsintervalls in die X-Richtung.
(B) Real Ein Rechte Grenze des Integrationsintervalls in die X-Richtung.
(C) Real Ein Linke Grenze des Integrationsintervalls in die Y-Richtung.
(D) Real Ein Rechte Grenze des Integrationsintervalls in die Y-Richtung.
Breite Real Aus Breite-Abmessung in die X-Richtung.
Höhe Real Aus Höhe-Abmessung in die Y-Richtung.
mu Real Ein Reibungswert (Von Mises) unten.
mo Real Ein Reibungswert (Von Mises) oben.
aa Real Ein Alpha-Parameter in des Geschwindigkeitsfeld.
bb Real Ein Beta-Parameter in des Geschwindigkeitsfeld.
cc Real Ein Gamma-Parameter in des Geschwindigkeitsfeld.
dd Real Ein Delta-Parameter in des Geschwindigkeitsfeld.
ra1,ra2,na Real Ein Anfangs- und Endwerte für Range alpha, Zahl der Schritte für Range.
rb1,rb2,nb Real Ein Anfangs- und Endwerte für Range beta, Zahl der Schritte für Range.

Qone Real Aus Wert des totale Volume-Integrals.
Qtwo Real Aus Wert des Integrals in Y-Richtung.

N Integer Ein Maximale Anzahl der Funktionsberechnungen, bzw.
(None = Ntwo) Anzahl der Zeilen des Romberg-Schemas.
H Real Ein Anfangsschrittweite bei der Romberg-Quadratur.
(Hone = Htwo)
Eps Real Ein Genauigkeitsforderung bei der Romberg-Quadratur.
(Epsone = Eptwo)
Schaetz Real Aus Fehlerschaetzung bei der Romberg-Quadratur.
(Schaetzone,Schaetztwo)
Fehler Integer Aus Fehlerparameter.
(Fehlerone,Fehlertwo) = 0: Nullstelle gefunden.
= 1: Parameter falsch.
= 2: Genauigkeitsanforderung nicht erfuilt.

Zusätzlich muss eine Funktion Funk zur Berechnung der Funktionswerte hinzugefügt werden

Pd Real Aus Innere Leistung (Dimensionslos).
Pfr Real Aus Reibungs Leistung (Dimensionslos). }

Program Obere_Schranke_Losung_Hoch_fuenf(input,out); { Testprogramm }

Var Qone, Qtwo, Schaetzzone, Schaetztwo: Real;
Fehlerone, Fehlertwo: Integer;
aa,bb,cc,dd,mu,mo,hohe,breite,hobr,
sa,sb,
ra1,ra2,rb1,rb2,
Pfr1,Pfr2,Pfr,Pd1,Pd2,Pd3,Pd4,Pd5,Pd:real;
li,mm,
na,nb:integer;
out: text;

Function Funk (X,Y: Real): Real; { Funktion, die integriert wird. }

BEGIN
Pfr1:= (Abs(aa+bb+cc+dd) * (mo/(Sqrt(3))));
Pfr2:= (Abs(aa-bb+cc-dd) * (mu/(Sqrt(3))));
Pfr:= Pfr1 + Pfr2;
Pd1:= (4/(Sqrt(3)));
Pd2:= (aa+(Y*(bb+(Y*(cc+(Y*(dd)))))*hobr);
Pd4:= (X*X);
Pd5:= ((bb/2)+(Y*(cc+(Y*((3*dd)/2)))));

```
Pd3:= Pd4*Pd5*Pd5;
Pd:= Pd1 * (Sqrt((Pd2*Pd2)+Pd3));
Funk:=Pfr+Pd;
END;
```

```
Procedure Romberg_two (X,C,D: Real; Var Qtwo: Real; Var Fehlertwo: Integer; {X konstant, über Y integrieren}
Htwo: Real; Ntwo: Integer; Epatwo: Real;
Var Schaeztwo: Real);
```

```
Const AllesOk = 0; Parameter = 1; Schritte = 2;
```

```
Var I, K, M, NO: Integer;
```

```
H1, H2, XM: Real;
```

```
EL: Array[1..20] Of Real;
```

```
Begin If (Ntwo <= 1) Or (Ntwo > 20) Or (Epatwo <= 0.0) Then Begin
Fehlertwo:=Parameter; Exit; End; { Parameter prüfen }
```

```
If C = D Then Begin { Sonderfall: Leeres Intervall }
```

```
Qtwo:=0.0; Schaeztwo:=0.0; Htwo:=0.0;
```

```
Fehlertwo:=AllesOk; Exit; End;
```

```
Htwo:= Abs(Htwo); If Abs(D-C) < Htwo Then Htwo:= Abs(D-C); { Sorge fuer richtige }
```

```
If C > D Then Htwo:=-Htwo; { Anfangsschrittweite }
```

```
If Htwo = 0 Then Htwo:= D - C;
```

```
NO:= Trunc((D - C) / Htwo + 0.5); Htwo:= (D - C) / NO;
```

```
Qtwo:= (Funk(X,C) + Funk(X,D)) / 2.0; { Bestimme erste Zeile des }
```

```
For I:=1 To NO - 1 Do Qtwo:= Qtwo + Funk(X,C + I * Htwo); { Rombergschemas }
```

```
EL[1]:= Htwo * Qtwo;
```

```
For K:=2 To Ntwo Do Begin { Bestimme naechsten Integralwert }
```

```
Htwo:= Htwo / 2.0; NO:= NO * 2;
```

```
Qtwo:=0.0;
```

```
I:=1; While I < NO Do Begin
```

```
Qtwo:= Qtwo + Funk(X,C + I * Htwo);
```

```
I:= I + 2; End;
```

```
{ Naechste Zeile des Rombergchemas }
```

```
H1:=EL[1]; EL[1]:= Htwo * Qtwo + EL[1] / 2.0;
```

```
XM:=1.0;
```

```
For M:=2 To K Do Begin
```

```
XM:= XM * 4.0;
```

```
H2:= EL[M];
```

```
EL[M]:= EL[M-1] + (EL[M-1] - H1) / (XM - 1.0);
```

```
H1:=H2; End;
```

```
Schaeztwo:= Abs(EL[K] - EL[K-1]); { Fehlerschaetzung }
```

```
If Schaeztwo < Epatwo Then Begin
```

```
Qtwo:=EL[K]; Fehlertwo:=AllesOk; Exit; End;
```

```
End;
```

```
Qtwo:=EL[Ntwo]; Fehlertwo:=Schritte;
```

```
End;
```

```
Procedure Romberg_one (A,B,C,D: Real; Var Qone: Real; Var Fehlerone: Integer; {Über X integrieren, }
Hone: Real; None: Integer; Epsone: Real; {bei jede X mit Romberg_two, }
Var Schaeztzone: Real); {über Y integrieren.}
```

```
Const AllesOk = 0; Parameter = 1; Schritte = 2;
```

```
Var I, K, M, NO: Integer;
```

```
H1, H2, XM: Real;
```

```
QtwoA, QtwoB, QtwoE, QtwoF, E, F: Real;
```

```
EL: Array[1..20] Of Real;
```

```
Begin If (None <= 1) Or (None > 20) Or (Epsone <= 0.0) Then Begin
Fehlerone:=Parameter; Exit; End; { Parameter prüfen }
```

```
If A = B Then Begin { Sonderfall: Leeres Intervall }
```

```
Qone:=0.0; Schaeztzone:=0.0; Hone:=0.0;
```

```
Fehlerone:=AllesOk; Exit; End;
```

```
Hone:= Abs(Hone); If Abs(B-A) < Hone Then Hone:= Abs(B-A); { Sorge fuer richtige }
```

```
If A > B Then Hone:=-Hone; { Anfangsschrittweite }
```

```
If Hone = 0 Then Hone:= B - A;
```

```
NO:= Trunc((B - A) / Hone + 0.5); Hone:= (B - A) / NO;
```

```
Romberg_two(A,C,D, Qtwo, Fehlertwo, 0.0, 20, 1.0E-12, Schaetztwo);
QtwoA:=Qtwo;
Romberg_two(B,C,D,Qtwo, Fehlertwo, 0.0, 20, 1.0E-12, Schaetztwo);
QtwoB:=Qtwo;
Qone:= (QtwoA + QtwoB) / 2.0;           { Bestimme erste Zeile des }
E:=A+I*Hone;
Romberg_two(E,C,D,Qtwo, Fehlertwo, 0.0, 20, 1.0E-12, Schaetztwo);
QtwoE:=Qtwo;
For I:=1 To NO - 1 Do Qone:= Qone + QtwoE;   { Rombergschemas }
EL[1]:= Hone * Qone;

For K:= 2 To None Do Begin                 { Bestimme naechsten Integralwert }
Hone:= Hone / 2.0; NO:= NO * 2;
Qone:=0.0;
I:=1; While I < NO Do Begin
F:=A+I*Hone;
Romberg_two(F,C,D,Qtwo, Fehlertwo, 0.0, 20, 1.0E-12, Schaetztwo);
QtwoF:=Qtwo;
Qone:= Qone + QtwoF;
I:= I + 2; End;
                                { Naechste Zeile des Rombergschemas }
H1:=EL[1]; EL[1]:= Hone * Qone + EL[1] / 2.0;
XM:= 1.0;
For M:= 2 To K Do Begin
XM:= XM * 4.0;
H2:=EL[M];
EL[M]:= EL[M-1] + (EL[M-1] - H1) / (XM - 1.0);
H1:=H2; End;

Schaetzzone:= Abs(EL[K] - EL[K-1]);         { Fehlerschaetzung }
If Schaetzzone < Epsone Then Begin
Qone:=EL[K]; Fehlerone:=AllesOk; Exit; End;
End;
Qone:= EL[None]; Fehlerone:= Schritte;
End;
```

```
BEGIN                                     (Abfrage der Input-Variablen)
assign(out,'outout');
rewrite(out);
writein;
writein('*****');
writein('**** Achtung !! Schritt-Anzahl immer INTEGER !!! ****');
writein('*****');
writein;
write('          Breite = : ');
readln(breite);
write('          Höhe = : ');
readln(hohe);
write('Range a von (a1) bis (a2), a1 = ');
readln(ra1);
write('          a2 = ');
readln(ra2);
write(' Schritt-Anzahl für range a = ');
readln(na);
write('Range b von (b1) bis (b2), b1 = ');
readln(rb1);
write('          b2 = ');
readln(rb2);
write(' Schritt-Anzahl für range b = ');
readln(nb);
write(' Reibungswert unten, mu = ');
readln(mu);
write(' Reibungswert oben, mo = ');
readln(mo);
sa:=(ra2-ra1)/na;
sb:=(rb2-rb1)/nb;
hobr:=hohe/breite;
writein(out,'breite = ',breite:4:4);
writein(out,'höhe = ',hohe:4:4);
writein(out,'Range alpha = ',ra1:4:4,' - ',ra2:4:4);
writein(out,'Schritt alpha = ',sa:4:4);
writein(out,'Range beta = ',rb1:4:4,' - ',rb2:4:4);
writein(out,'Schritt beta = ',sb:4:4);
writein(out,'mu: ',mu:4:4,'mo: ',mo:4:4);
writein(out);
```

```
writeIn(out,'alpha= beta= gamma= delta= Romberg-Integral= Fehlerschaetz=');
writeIn(out);
BEGIN
  FOR ll := 0 TO na DO
    FOR mm := 0 TO nb DO
      BEGIN
        aa:= ra1 + ll*sa;
        bb:= rb1 + mm*sb;
        cc:= 3*((1/(2*hobri))-aa);
        dd:= -aa-bb-cc;
Romberg_one (0, 1, -1, 1, Qone, Fehlerone, 0.0, 20, 1.0E-6, Schaetzone);
writeIn(out,aa:3:3,' ',bb:3:3,' ',cc:3:3,' ',dd:3:3,' ',Qone,' ',Schaetzone);
If Fehlerone = 0 Then
  Write(out)
Else
  WriteLn(out,'Fehler bei Integralberechnung mit Romberg_one(breite)');

If Fehlertwo = 0 Then
  Write(out)
Else
  WriteLn(out,'Fehler bei Integralberechnung mit Romberg_two(höhe)');

      END;
    END;
  close(out);
END.
```

Programm, basierend auf der Romberg Methode, zur Berechnung Obere Schrankelösung für Geschwindigkeitsfeldes fünften Grad.

{ Numerische Quadratur für obere Sohranke Lösung, Geschwindigkeitsfeld hoch fünf

Die folgenden Prozeduren berechnen naeherungsweise das Integral einer reellwertigen Funktion mit Hilfe der Romberg-Quadratur.

Die Unterprogramme haben die folgenden Parameter:

- (A) Real Ein Linke Grenze des Integrationsintervalls in die X-Richtung.
- (B) Real Ein Rechte Grenze des Integrationsintervalls in die X-Richtung.
- (C) Real Ein Linke Grenze des Integrationsintervalls in die Y-Richtung.
- (D) Real Ein Rechte Grenze des Integrationsintervalls in die Y-Richtung.
- Breite Real Aus Breite-Abmessung in die X-Richtung.
- Höhe Real Aus Höhe-Abmessung in die Y-Richtung.
- mu Real Ein Reibungswert (Von Mises) unten.
- mo Real Ein Reibungswert (Von Mises) oben.
- aa Real Ein Alpha-Parameter in das Geschwindigkeitsfeld.
- bb Real Ein Beta-Parameter in das Geschwindigkeitsfeld.
- cc Real Ein Gamma-Parameter in das Geschwindigkeitsfeld.
- dd Real Ein Delta-Parameter in das Geschwindigkeitsfeld.
- ee Real Ein Epsilon-Parameter in das Geschwindigkeitsfeld.
- ff Real Ein Eta-Parameter in das Geschwindigkeitsfeld.
- ra1,ra2,na Real Ein Anfangs- und Endwerte für Range alpha, Zahl der Schritte für Range.
- rb1,rb2,nb Real Ein Anfangs- und Endwerte für Range beta, Zahl der Schritte für Range.
- rc1,rc2,nc Real Ein Anfangs- und Endwerte für Range gamma, Zahl der Schritte für Range.
- rd1,rd2,nd Real Ein Anfangs- und Endwerte für Range delta, Zahl der Schritte für Range.
- re1,re2,ne Real Ein Anfangs- und Endwerte für Range epsilon, Zahl der Schritte für Range.

- Qone Real Aus Wert des totale Volume-Integrals.
- Qtwo Real Aus Wert des Integrals in Y-Richtung.

- N Integer Ein Maximale Anzahl der Funktionsberechnungen, bzw. Anzahl der Zeilen des Romberg-Schemas.
(None = Ntwo)
- H Real Ein Anfangsschrittweite bei der Romberg-Quadratur.
(Hone = Htwo)
- Eps Real Ein Genauigkeitsforderung bei der Romberg-Quadratur.
(Epsone = Eptwo)
- Schaetz Real Aus Fehlerschaetzung bei der Romberg-Quadratur.
(Schaetzone,Schaetztwo)
- Fehler Integer Aus Fehlerparameter.
(Fehlerone,Fehlertwo) = 0: Nullstelle gefunden.
= 1: Parameter falsch.
= 2: Genauigkeitsanforderung nicht erfüllt.

Zusätzlich muss eine Funktion Funk zur Berechnung der Funktionswerte hinzugefügt werden

- Pd Real Aus Innere Leistung (Dimensionslos).
- Pfr Real Aus Reibungs Leistung (Dimensionslos). }

Program Obere_Schranke_Losung_Hoch_fuenf(input,out); { Testprogramm }

```
Var Qone, Qtwo, Schaetzzone, Schaetztwo: Real;
Fehlerone, Fehlertwo: Integer;
aa,bb,cc,dd,ee,ff,mu,mo,hohe,breite,hobr,
sa,sb,sc,sd,se,
ra1,ra2,rb1,rb2,rc1,rc2,rd1,rd2,re1,re2,
Pfr1,Pfr2,Pfr,Pd1,Pd2,Pd3,Pd4,Pd5,Pd:real;
kk,ll,mm,nn,oo,
na,nb,nc,nd,ne:integer;
out: text;
```

Function Funk (X,Y: Real): Real; { Funktion, die integriert wird. }

```
BEGIN
Pfr1:= (Abs(aa+bb+cc+dd+ee+ff)) * (mo/(Sqrt(3)));
Pfr2:= (Abs(aa-bb+cc-dd+ee-ff)) * (mu/(Sqrt(3)));
Pfr:= Pfr1 + Pfr2;
Pd1:= (4/(Sqrt(3)));
Pd2:= (aa+(Y*(bb+(Y*(cc+(Y*(dd+(Y*(ee+(Y*ff)))))))))*hobr);
```

```

Pd4:= (X*X);
Pd5:= ((bb/2)+(Y*(oc+(Y*(((3*dd)/2)+(Y*((2*ee)+(Y*((5/2)*ff)))))))));
Pd3:= Pd4*Pd5*Pd5;
Pd:= Pd1 * (Sqrt((Pd2*Pd2)+Pd3));
Funk:= Pfr+Pd;
END;

```

```

Procedure Romberg_two (X,C,D: Real; Var Qtwo: Real; Var Fehlertwo: Integer; {X konstant, über Y integrieren}
Htwo: Real; Ntwo: Integer; Eptwo: Real;
Var Schaetztwo: Real);

```

```

Const AllesOk = 0; Parameter = 1; Schritte = 2;

```

```

Var I, K, M, NO: Integer;

```

```

H1, H2, XM: Real;

```

```

EL: Array[1..20] Of Real;

```

```

Begin If (Ntwo <= 1) Or (Ntwo > 20) Or (Eptwo <= 0.0) Then Begin
Fehlertwo:=Parameter; Exit; End; { Parameter pruefen }

```

```

If C = D Then Begin { Sonderfall: Leeres Intervall }
Qtwo:=0.0; Schaetztwo:=0.0; Htwo:=0.0;
Fehlertwo:=AllesOk; Exit; End;

```

```

Htwo:= Abs(Htwo); If Abs(D-C) < Htwo Then Htwo:= Abs(D-C); { Sorge fuer richtige }
If C > D Then Htwo:=-Htwo; { Anfangsschrittweite }
If Htwo = 0 Then Htwo:= D - C;
NO:= Trunc((D - C) / Htwo + 0.5); Htwo:= (D - C) / NO;

```

```

Qtwo:= (Funk(X,C) + Funk(X,D)) / 2.0; { Bestimme erste Zeile des }
For I:=1 To NO - 1 Do Qtwo:= Qtwo + Funk(X,C + I * Htwo); { Rombergschemas }
EL[1]:= Htwo * Qtwo;

```

```

For K:=2 To Ntwo Do Begin { Bestimme naechsten Integralwert }

```

```

Htwo:= Htwo / 2.0; NO:= NO * 2;

```

```

Qtwo:=0.0;

```

```

I:=1; While I < NO Do Begin

```

```

Qtwo:= Qtwo + Funk(X,C + I * Htwo);

```

```

I:= I + 2; End;

```

```

{ Naechste Zeile des Rombergschemas }

```

```

H1:=EL[1]; EL[1]:= Htwo * Qtwo + EL[1] / 2.0;

```

```

XM:= 1.0;

```

```

For M:=2 To K Do Begin

```

```

XM:= XM * 4.0;

```

```

H2:=EL[M];

```

```

EL[M]:= EL[M-1] + (EL[M-1] - H1) / (XM - 1.0);

```

```

H1:=H2; End;

```

```

Schaetztwo:= Abs(EL[K] - EL[K-1]); { Fehlerschaetzung }

```

```

If Schaetztwo < Eptwo Then Begin

```

```

Qtwo:= EL[K]; Fehlertwo:= AllesOk; Exit; End;

```

```

End;

```

```

Qtwo:= EL[Ntwo]; Fehlertwo:= Schritte;

```

```

End;

```

```

Procedure Romberg_one (A,B,C,D: Real; Var Qone: Real; Var Fehlerone: Integer; {Über X integrieren, }
Hone: Real; None: Integer; Epsone: Real; {bei jede X mit Romberg_two, }
Var Schaetzzone: Real); {über Y integrieren.}

```

```

Const AllesOk = 0; Parameter = 1; Schritte = 2;

```

```

Var I, K, M, NO: Integer;

```

```

H1, H2, XM: Real;

```

```

QtwoA, QtwoB, QtwoE, QtwoF, E, F: Real;

```

```

EL: Array[1..20] Of Real;

```

```

Begin If (None <= 1) Or (None > 20) Or (Epsone <= 0.0) Then Begin

```

```

Fehlerone:=Parameter; Exit; End; { Parameter pruefen }

```

```

If A = B Then Begin { Sonderfall: Leeres Intervall }

```

```

Qone:=0.0; Schaetzzone:=0.0; Hone:=0.0;

```

```

Fehlerone:=AllesOk; Exit; End;

```

```

Hone:= Abs(Hone); If Abs(B-A) < Hone Then Hone:= Abs(B-A); { Sorge fuer richtige }

```

```

If A > B Then Hone:=-Hone; { Anfangsschrittweite }

```

```

If Hone = 0 Then Hone:= B - A;

```

NO:= Trunc((B - A) / Hone + 0.5); Hone:= (B - A) / NO;

```
Romberg_two(A,C,D, Qtwo, Fehlertwo, 0.0, 10, 1.0E-12, Schaetztwo);
QtwoA:= Qtwo;
Romberg_two(B,C,D,Qtwo, Fehlertwo, 0.0, 10, 1.0E-12, Schaetztwo);
QtwoB:= Qtwo;
Qone:= (QtwoA + QtwoB) / 2.0;           { Bestimme erste Zeile des }
E:= A+I*Hone;
Romberg_two(E,C,D,Qtwo, Fehlertwo, 0.0, 10, 1.0E-12, Schaetztwo);
QtwoE:= Qtwo;
For I:= 1 To NO - 1 Do Qone:= Qone + QtwoE;   { Rombergeschemas }
EL[1]:= Hone * Qone;
```

```
For K:= 2 To None Do Begin           { Bestimme naechsten Integralwert }
Hone:= Hone / 2.0; NO:= NO * 2;
Qone:= 0.0;
I:= 1; While I < NO Do Begin
F:= A+I*Hone;
Romberg_two(F,C,D,Qtwo, Fehlertwo, 0.0, 10, 1.0E-12, Schaetztwo);
QtwoF:= Qtwo;
Qone:= Qone + QtwoF;
I:= I + 2; End;
```

{ Naechste Zeile des Rombergeschemas }

H1:= EL[1]; EL[1]:= Hone * Qone + EL[1] / 2.0;

XM:= 1.0;

For M:= 2 To K Do Begin

XM:= XM * 4.0;

H2:= EL[M];

EL[M]:= EL[M-1] + (EL[M-1] - H1) / (XM - 1.0);

H1:= H2; End;

Schaetzone:= Abs(EL[K] - EL[K-1]); { Fehlerschaetzung }

If Schaetzone < Epsone Then Begin

Qone:= EL[K]; Fehlerone:= AllesOk; Exit; End;

End;

Qone:= EL[None]; Fehlerone:= Schritte;

End;

BEGIN (Abfrage der Input-Variablen)

assign(out,'outfuenf');

rewrite(out);

writeln;

writeln('*****');

writeln('***** Achtung !! Schritt-Anzahl immer INTEGER !!! *****');

writeln('*****');

writeln;

write(' Breite = : ');

readln(breite);

write(' Höhe = : ');

readln(hohe);

write('Range a von (a1) bis (a2), a1 = ');

readln(ra1);

write(' a2 = ');

readln(ra2);

write(' Schritt-Anzahl für range a = ');

readln(na);

write('Range b von (b1) bis (b2), b1 = ');

readln(rb1);

write(' b2 = ');

readln(rb2);

write(' Schritt-Anzahl für range b = ');

readln(nb);

write('Range c von (c1) bis (c2), c1 = ');

readln(rc1);

write(' c2 = ');

readln(rc2);

write(' Schritt-Anzahl für range c = ');

readln(nc);

write('Range d von (d1) bis (d2), d1 = ');

readln(rd1);

write(' d2 = ');

readln(rd2);

write(' Schritt-Anzahl für range d = ');

readln(nd);

```
write('Range e von (e1) bis (e2), e1 = ');
readln(re1);
write('          e2 = ');
readln(re2);
write(' Schritt-Anzahl für range e = ');
readln(ne);
write(' Reibungswert unten, mu = ');
readln(mu);
write(' Reibungswert oben, mo = ');
readln(mo);
sa := (ra2-ra1)/ne;
sb := (rb2-rb1)/nb;
sc := (rc2-rc1)/nc;
sd := (rd2-rd1)/nd;
se := (re2-re1)/ne;
hobr := hohe/breite;
writeln(out,'breite = ',breite:4:4);
writeln(out,'höhe = ',hohe:4:4);
writeln(out,'Range alpha = ',ra1:4:4,' - ',ra2:4:4);
writeln(out,'Schritt alpha = ',sa:4:4);
writeln(out,'Range beta = ',rb1:4:4,' - ',rb2:4:4);
writeln(out,'Schritt beta = ',sb:4:4);
writeln(out,'Range gamma = ',rc1:4:4,' - ',rc2:4:4);
writeln(out,'Schritt gamma = ',sc:4:4);
writeln(out,'Range delta = ',rd1:4:4,' - ',rd2:4:4);
writeln(out,'Schritt delta = ',sd:4:4);
writeln(out,'Range epsilon = ',re1:4:4,' - ',re2:4:4);
writeln(out,'Schritt epsilon = ',se:4:4);
writeln(out,'mu: ',mu:4:4,'mo: ',mo:4:4);
writeln(out);
writeln(out,'alpha= beta= gamma= delta= epsilon= eta= Romberg-Integral= Fehlerschaetz=');
writeln(out);
BEGIN
  FOR kk := 0 TO na DO                {alpha,beta,gamma,delta,epsilon und eta variieren}
    FOR ll := 0 TO nb DO
      FOR mm := 0 TO nc DO
        FOR nn := 0 TO nd DO
          FOR oo := 0 TO ne DO
            BEGIN
              aa := ra1 + kk*sa;
              bb := rb1 + ll*sb;
              cc := rc1 + mm*sc;
              dd := rd1 + nn*sd;
              ee := re1 + oo*se;
              ff := 6*aa-(b/h) + ((2*cc)/3); {volumeninvarianz}
Romberg_one (0, 1, -1, 1, Qone, Fehlerone, 0.0, 10, 1.0E-6, Schaetzzone);
              writeln(out,aa:3:3,' ',bb:3:3,' ',cc:3:3,' ',dd:3:3,' ',ee:3:3,' ',ff:3:3,' ',Qone,' ',Schaetzzone);
            If Fehlerone = 0 Then
              Write(out)
            Else
              Writeln(out,'Fehler bei Integralberechnung mit Romberg');

            If Fehlertwo = 0 Then
              Write(out)
            Else
              Writeln(out,'Fehler bei Integralberechnung mit Romberg');

          END;
        END;
      END;
    END;
  END;
END;
close(out);
END.
```

N.3 Durchführung und Ergebnisse der Oberen Schrankerechnungen

N.3.1 Durchführung der Oberen Schrankerechnungen

Wie im Abschnitt N.2.2 erklärt stehen im Outputfile alle Gesamtleistungen in Abhängigkeit von den Parametern des Geschwindigkeitsfeldes mit ihren Fehlerschaetzungen. Aus den verschiedenen Werten des Gesamtintegrals erkennt man, ob die Funktion Minimumwerte besitzt. In der Nähe des Minimalwertes wählt man ein kleineres Interval für die Parameter. Danach läßt man das Programm wieder alle Gesamtintegrale berechnen für das neue bestimmte Interval. Die Zahl der Wiederholungen hängt von der gewünschten Genauigkeit und der Genauigkeit, die durch die Fehlerschaetzung gegeben wird, ab.

N.3.2 Ergebnisse der Durchführung

Es folgen einige Ergebnisse der Rechnung für den Fall, daß b/h gleich 3 ist. Im Abschnitt N.3.4. sind alle Ergebnisse der Rechnungen, die durchgeführt wurden, dargestellt.

breite = 15.0000
höhe = 5.0000
Range alpha = 0.5000 - 1.5000
Schritt alpha = 0.5000
Range beta = -10.0000 - 10.0000
Schritt beta = 0.5000
mu: 0.0000mo: 1.0000

alpha=	beta=	gamma=	delta=	Romberg-Integral=	Fehlerschaetz=
0.500	-10.000	3.000	6.500	1.08621308768634E+0001	1.57029717229307E-0007
0.500	-9.500	3.000	6.000	1.04376385863725E+0001	1.47396349348128E-0007
0.500	-9.000	3.000	5.500	1.00228284585610E+0001	1.37137249112129E-0007
0.500	-8.500	3.000	5.000	9.61816561184241E+0000	1.26194208860397E-0007
0.500	-8.000	3.000	4.500	9.22392925558961E+0000	1.14436261355877E-0007
0.500	-7.500	3.000	4.000	8.84024368583617E+0000	1.01776095107198E-0007
0.500	-7.000	3.000	3.500	8.46719653792388E+0000	8.80972947925329E-0008
0.500	-6.500	3.000	3.000	8.10504925102578E+0000	7.33853084966540E-0008
0.500	-6.000	3.000	2.500	7.75456599040826E+0000	5.74073055759072E-0008
0.500	-5.500	3.000	2.000	7.41762434911652E+0000	3.98358679376543E-0008
0.500	-5.000	3.000	1.500	7.09885772354755E+0000	1.88520061783493E-0008
0.500	-4.500	3.000	1.000	6.81426406395622E+0000	2.06348157938242E-0008
0.500	-4.000	3.000	0.500	6.56723436356858E+0000	3.73933289665729E-0007
0.500	-3.500	3.000	0.000	6.35053253509977E+0000	2.26500560529530E-0007
0.500	-3.000	3.000	-0.500	6.16875172739674E+0000	1.26878148876131E-0007
0.500	-2.500	3.000	-1.000	6.03591359779239E+0000	1.08586391434073E-0007
0.500	-2.000	3.000	-1.500	5.98224926935654E+0000	1.23160134535283E-0007
0.500	-1.500	3.000	-2.000	6.00953074186691E+0000	1.58506736824986E-0007
0.500	-1.000	3.000	-2.500	6.09041460612207E+0000	2.18336936086416E-0007
0.500	-0.500	3.000	-3.000	6.21468436764553E+0000	3.05233697872609E-0007
0.500	0.000	3.000	-3.500	6.37812086738268E+0000	4.02633393309265E-0007
0.500	0.500	3.000	-4.000	6.57679846754763E+0000	4.95274434797466E-0007
0.500	1.000	3.000	-4.500	6.80655412634223E+0000	5.73847501073033E-0007
0.500	1.500	3.000	-5.000	7.06340683859162E+0000	6.34929165244102E-0007
0.500	2.000	3.000	-5.500	7.34384362347919E+0000	6.77515345159918E-0007
0.500	2.500	3.000	-6.000	7.64489960663195E+0000	7.01111275702715E-0007
0.500	3.000	3.000	-6.500	7.96413129483699E+0000	7.03112164046615E-0007
0.500	3.500	3.000	-7.000	8.29955433652503E+0000	6.74888724461198E-0007
0.500	4.000	3.000	-7.500	8.64958002697676E+0000	5.96264726482332E-0007
0.500	4.500	3.000	-8.000	9.01296582751093E+0000	4.27200575359166E-0007
0.500	5.000	3.000	-8.500	9.38878970542282E+0000	9.58680175244808E-0008
0.500	5.500	3.000	-9.000	9.77646546205506E+0000	5.18942236572504E-0007
0.500	6.000	3.000	-9.500	1.01759061798221E+0001	4.56784619018435E-0008
0.500	6.500	3.000	-10.000	1.05879297596694E+0001	7.15954229235649E-0009
0.500	7.000	3.000	-10.500	1.10168351168541E+0001	2.63926086496890E-0007
0.500	7.500	3.000	-11.000	1.14591652710224E+0001	4.87198121845722E-0008
0.500	8.000	3.000	-11.500	1.19106950471469E+0001	6.93544279783964E-0008
0.500	8.500	3.000	-12.000	1.23699844167277E+0001	8.85338522493839E-0008
0.500	9.000	3.000	-12.500	1.28358243258283E+0001	1.06927473098040E-0007
0.500	9.500	3.000	-13.000	1.33072965647298E+0001	1.25117367133498E-0007
0.500	10.000	3.000	-13.500	1.37836731350835E+0001	1.42972567118704E-0007
1.000	-10.000	1.500	7.500	1.08718642103631E+0001	1.11540430225432E-0007
1.000	-9.500	1.500	7.000	1.04213189779985E+0001	9.37143340706825E-0008
1.000	-9.000	1.500	6.500	9.98137160582701E+0000	7.43602888169546E-0008
1.000	-8.500	1.500	6.000	9.55483024882192E+0000	5.25178620591760E-0008
1.000	-8.000	1.500	5.500	9.14518876612419E+0000	8.72096279636025E-0008
1.000	-7.500	1.500	5.000	8.76306380839378E+0000	8.47125193104148E-0007
1.000	-7.000	1.500	4.500	8.40671921722242E+0000	1.27009116113186E-0007
1.000	-6.500	1.500	4.000	8.07260336623585E+0000	4.19240677729249E-0007
1.000	-6.000	1.500	3.500	7.76116510683642E+0000	3.94320522900671E-0007
1.000	-5.500	1.500	3.000	7.47354162495321E+0000	2.34576873481274E-0007
1.000	-5.000	1.500	2.500	7.21145943404554E+0000	1.34532458286252E-0007
1.000	-4.500	1.500	2.000	6.97653739274392E+0000	4.59986040368676E-0008
1.000	-4.000	1.500	1.500	6.77125712086854E+0000	4.20550350099802E-0009
1.000	-3.500	1.500	1.000	6.59922818592895E+0000	6.87932908982038E-0009
1.000	-3.000	1.500	0.500	6.46613581869315E+0000	6.79574441164732E-0009
1.000	-2.500	1.500	0.000	6.38028061074147E+0000	6.03904481977224E-0009
1.000	-2.000	1.500	-0.500	6.34883314506442E+0000	6.00266503170133E-0009
1.000	-1.500	1.500	-1.000	6.36854499978654E+0000	6.22094376012683E-0009
1.000	-1.000	1.500	-1.500	6.43052180828001E+0000	5.36965671926737E-0009
1.000	-0.500	1.500	-2.000	6.52933480277716E+0000	1.57888280227780E-0009
1.000	0.000	1.500	-2.500	6.66236137802480E+0000	2.17041815631092E-0008
1.000	0.500	1.500	-3.000	6.82786486154287E+0000	5.81567292101681E-0008
1.000	1.000	1.500	-3.500	7.02302392550337E+0000	1.09670509118587E-0007
1.000	1.500	1.500	-4.000	7.24580902739399E+0000	1.72774889506400E-0007
1.000	2.000	1.500	-4.500	7.49321593486820E+0000	2.43519025389105E-0007

1.000 2.500 1.500 -5.000 7.76252322796790E+0000 3.18170350510627E-0007
1.000 3.000 1.500 -5.500 8.05125188951206E+0000 3.93800203098867E-0007
1.000 3.500 1.500 -6.000 8.35722937429091E+0000 4.87538484372199E-0007
1.000 4.000 1.500 -6.500 8.67859432181472E+0000 5.38420863449574E-0007
1.000 4.500 1.500 -7.000 9.01377284603950E+0000 6.04908584127982E-0007
1.000 5.000 1.500 -7.500 9.36144514118496E+0000 6.64716935716569E-0007
1.000 5.500 1.500 -8.000 9.72051161470881E+0000 7.14266207069159E-0007
1.000 6.000 1.500 -8.500 1.00900640207110E+0001 7.44417775422335E-0007
1.000 6.500 1.500 -9.000 1.04693616501463E+0001 7.39848474040627E-0007
1.000 7.000 1.500 -9.500 1.08578154868010E+0001 6.73928298056126E-0007
1.000 7.500 1.500 -10.000 1.12549807850155E+0001 5.03365299864438E-0007
1.000 8.000 1.500 -10.500 1.16605619992624E+0001 1.60493073053658E-0007
1.000 8.500 1.500 -11.000 1.20744395427464E+0001 4.55664121545851E-0007
1.000 9.000 1.500 -11.500 1.24968148980408E+0001 6.49306457489729E-0008
1.000 9.500 1.500 -12.000 1.29281942557136E+0001 5.18193701282144E-0008
1.000 10.000 1.500 -12.500 1.33717763870227E+0001 4.77302819490433E-0009
1.500 -10.000 -0.000 8.500 1.17584682210436E+0001 4.49392246082425E-0007
1.500 -9.500 -0.000 8.000 1.13525800335048E+0001 2.32772435992956E-0007
1.500 -9.000 -0.000 7.500 1.09572857199237E+0001 5.23083144798875E-0007
1.500 -8.500 -0.000 7.000 1.05727264125017E+0001 5.80810592509806E-0007
1.500 -8.000 -0.000 6.500 1.01993716985162E+0001 5.16083673574030E-0007
1.500 -7.500 -0.000 6.000 9.83795663496130E+0000 3.99464624933898E-0007
1.500 -7.000 -0.000 5.500 9.48947742879682E+0000 2.74201738648117E-0007
1.500 -6.500 -0.000 5.000 9.15521796829125E+0000 1.64844095706940E-0007
1.500 -6.000 -0.000 4.500 8.83680061016639E+0000 8.29604687169194E-0008
1.500 -5.500 -0.000 4.000 8.53626160115527E+0000 3.07918526232243E-0008
1.500 -5.000 -0.000 3.500 8.25615423673298E+0000 4.24915924668312E-0009
1.500 -4.500 -0.000 3.000 7.99968154024828E+0000 4.61295712739229E-0009
1.500 -4.000 -0.000 2.500 7.77084935833409E+0000 4.64208095784903E-0009
1.500 -3.500 -0.000 2.000 7.57458981301897E+0000 7.71353370510042E-0007
1.500 -3.000 -0.000 1.500 7.41866379718663E+0000 2.89910531137139E-0007
1.500 -2.500 -0.000 1.000 7.30280958826188E+0000 7.77654349803925E-0008
1.500 -2.000 -0.000 0.500 7.23637421050807E+0000 6.81384547129273E-0009
1.500 -1.500 -0.000 0.000 7.21809790058574E+0000 9.53150447458029E-0010
1.500 -1.000 -0.000 -0.500 7.23785750826848E+0000 8.59436113387346E-0008
1.500 -0.500 -0.000 -1.000 7.29767001465370E+0000 3.91999492421746E-0007
1.500 0.000 -0.000 -1.500 7.39245679478880E+0000 9.30507667362690E-0007
1.500 0.500 -0.000 -2.000 7.51968370066606E+0000 3.61615093424916E-0009
1.500 1.000 -0.000 -2.500 7.67697037983453E+0000 1.34896254166961E-0008
1.500 1.500 -0.000 -3.000 7.86190782359336E+0000 3.02970875054598E-0008
1.500 2.000 -0.000 -3.500 8.07205160986632E+0000 5.44241629540920E-0008
1.500 2.500 -0.000 -4.000 8.30499982627225E+0000 8.58854036778212E-0008
1.500 3.000 -0.000 -4.500 8.55848108905775E+0000 1.24156940728426E-0007
1.500 3.500 -0.000 -5.000 8.83041634880647E+0000 1.69049599207938E-0007
1.500 4.000 -0.000 -5.500 9.11889108376636E+0000 7.67031451687217E-0008
1.500 4.500 -0.000 -6.000 9.42244053876493E+0000 2.77068465948105E-0007
1.500 5.000 -0.000 -6.500 9.73947431978013E+0000 3.39874532073736E-0007
1.500 5.500 -0.000 -7.000 1.00688205276965E+0001 4.08472260460258E-0007
1.500 6.000 -0.000 -7.500 1.04094224801520E+0001 4.82556060887873E-0007
1.500 6.500 -0.000 -8.000 1.07603741749772E+0001 5.61107299290597E-0007
1.500 7.000 -0.000 -8.500 1.11209015460045E+0001 6.41666701994836E-0007
1.500 7.500 -0.000 -9.000 1.14903465002717E+0001 7.19461240805686E-0007
1.500 8.000 -0.000 -9.500 1.18681539849495E+0001 7.86109012551606E-0007
1.500 8.500 -0.000 -10.000 1.22538622143475E+0001 8.27945768833160E-0007
1.500 9.000 -0.000 -10.500 1.26470963175816E+0001 8.23725713416934E-0007
1.500 9.500 -0.000 -11.000 1.30475659997901E+0001 7.41449184715748E-0007
1.500 10.000 -0.000 -11.500 1.34550686621515E+0001 5.34215359948575E-0007

N.3.3 Ergebnisse Geschwindigkeitsfeldes dritten Grades

Auf Grund der asymmetrischen Randbedingungen kann die Oberen Schrankerechnung nicht auf ein Viertel der Probe beschränkt werden. Die Zahl der Parameter ist damit, im Gegensatz zum symmetrischem Fall, höher. Mit Zunahme der Parameter-Zahl ist die zur Verfügung stehende Rechenkapazität schnell nicht mehr ausreichend. Es wurde angefangen mit einem linearen Geschwindigkeitsfeld. Das lineare Geschwindigkeitsfeld enthält zwei Parameter α und β (Appendix B). Die Ergebnisse zeigten, daß für den Fall, in dem der Unterschied zwischen m_u und m_o extrem ist, nur nicht gewünschte Geschwindigkeitsfelder ($\alpha=0$, $\beta=0$ oder $\alpha+\beta=0$) das Gesamtintegral zu einem Minimum machen. Es wurde gerechnet für $m_u/m_o=0/1$, $0.1/0.9$ und $0.2/0.8$. Wie im Abschnitt 4.2 erklärt wird für den Fall $m_u/m_o=0/1$ die Zahl der variierenden Parameter beschränkt. Für ein lineares Geschwindigkeitsfeldes sind somit die Parameter schon bestimmt ($\alpha=b/2h$ und $\beta=-b/2h$). Damit fällt der Anteil der Reibleistung im Gesamtintegral weg.

Weiterhin wurde mit einem Geschwindigkeitsfeld dritten Grades gerechnet. Aus zeitlichen Gründen wurde hier nur mit dem Extremfall $m_u/m_o=0/1$ gerechnet. Auch hier gilt, daß der Anteil der Reibleistung im Gesamtintegral gleich Null ist. Bei diesem Integral wird für alle b/h -Verhältnisse ein Minimum gefunden. Doch die Vernachlässigung der Reibleistung macht das Ergebnis für b/h -Verhältnisse ab ungefähr $b/h \approx 1$ ungenau. Für die Werte im Gesamtintegral nimmt normalerweise der Einfluß der Reibleistung zu und der Einfluß der Umformleistung ab.

N.3.4. Minimale Werte des Gesamtintegrals für verschiedene b/h-Verhältnisse.

$b / h, m_{\dot{u}} m_o$	P_{Min}^*	Fehlerschaetzung	Geschwindigkeitsfeld.
3, 0, 1.	5.9557	$3.5 * 10^{-7}$	(a)
1.5, 0, 1.	3.4808	$8.5 * 10^{-7}$	(b)
1, 0, 1.	2.4401	$9.4 * 10^{-7}$	(c)
0.75, 0, 1.	1.7510	$6.3 * 10^{-8}$	(d)

Bild N.1. Minimalwerte für $m_u=0$ und $m_o=1$.

$$(a) : \frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.346 - 1.918 y^* + 3.462 y^{*2} - 1.890 y^{*3} \} x^*$$

$$(b) : \frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.443 - 0.979 y^* + 0.921 y^{*2} - 0.385 y^{*3} \} x^*$$

$$(c) : \frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.554 - 0.404 y^* - 0.162 y^{*2} + 0.010 y^{*3} \} x^*$$

$$(d) : \frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.501 + 0.072 y^* - 0.378 y^{*2} - 0.195 y^{*3} \} x^*$$

$b / h, m_{\dot{u}} m_o$	P_{Min}^*	Fehlerschaetzung	Geschwindigkeitsfeld.
3, 0.2, 1	7.4878	$8.0 * 10^{-9}$	(e)
1.5, 0.2, 1	3.9699	$5.0 * 10^{-8}$	(f)
1, 0.2, 1	2.5759	$4.2 * 10^{-8}$	(g)
0.75, 0.2, 1	1.7995	$7.0 * 10^{-8}$	(h)

Bild N.2. Minimalwerte für $m_u=0.2$ und $m_o=1$.

$$(e) : \frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.868 - 1.979 y^* + 1.896 y^{*2} - 0.785 y^{*3} \} x^*$$

$$(f) : \frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.724 - 0.817 y^* + 0.078 y^{*2} + 0.015 y^{*3} \} x^*$$

$$(g) : \frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.643 - 0.181 y^* - 0.429 y^{*2} - 0.033 y^{*3} \} x^*$$

$$(h) : \frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.517 + 0.125 y^* - 0.426 y^{*2} - 0.216 y^{*3} \} x^*$$

$b / h, m_{\dot{u}} m_o$	P_{Min}^*	Fehlerschaetzung	Geschwindigkeitsfeld.
3, 0.5, 1	8.9465	$4.1 * 10^{-9}$	(i)
1.5, 0.5, 1	4.3488	$3.9 * 10^{-7}$	(j)
1, 0.5, 1	2.6687	$5.2 * 10^{-8}$	(k)
0.75, 0.5, 1	1.8506	$9.9 * 10^{-8}$	(l)

Bild N.3. Minimalwerte für $m_u=0.5$ und $m_o=1$.

$$(i) : \frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 1.467 - 1.570 y^* + 0.099 y^{*2} + 0.004 y^{*3} \} x^*$$

$$(j) : \frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.960 - 0.349 y^* - 0.630 y^{*2} + 0.019 y^{*3} \} x^*$$

$$(k) : \frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.717 + 0.011 y^* - 0.651 y^{*2} - 0.077 y^{*3} \} x^*$$

$$(l) : \frac{\dot{u}_x}{\dot{u}} = \{ 0.533 + 0.120 y^* - 0.474 y^{*2} - 0.179 y^{*3} \} x^*$$

N.4 Theorie der numerischen Quadratur

9. NUMERISCHE QUADRATUR. *)

9.1 VORBEMERKUNGEN UND MOTIVATION.

Jede auf einem Intervall I_x stetige Funktion f besitzt dort Stammfunktionen F , die sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden, mit

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x), \quad x \in I_x.$$

Die Zahl $I(f; \alpha, \beta)$ heißt das *bestimmte Integral* der Funktion f über $[\alpha, \beta]$; es gilt der *Hauptsatz der Integralrechnung*

$$(9.1) \quad I(f; \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha), \quad [\alpha, \beta] \subset I_x,$$

f heißt *integrierbar* auf $[\alpha, \beta]$.

In der Praxis ist man in den meisten Fällen auf eine näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale $I(f; \alpha, \beta)$ mit Hilfe sogenannter *Quadraturformeln* angewiesen. Die Ursachen dafür können sein:

1. f hat eine Stammfunktion F , die nicht in geschlossener (integralfreier) Form darstellbar ist (z.B. $f(x) = (\sin x)/x$, $f(x) = e^{-x^2}$).
2. f ist nur an diskreten Stellen $x_k \in [\alpha, \beta]$ bekannt.
3. F ist in geschlossener Form darstellbar, jedoch ist die Ermittlung von F oder auch die Berechnung von $F(\alpha)$ und $F(\beta)$ mit Aufwand verbunden.

Ein mögliches Ersatzproblem für die Integration ist z.B. eine Summe

$$I(f; \alpha, \beta) \approx Q(f; \alpha, \beta) = \sum_k A_k f(x_k), \quad x_k \in [\alpha, \beta],$$

in welche diskrete Stützwerte $f(x_k)$, versehen mit Gewichten A_k , eingehen.

LITERATUR zu 9.1: [20], 9.1; [26], 6.1; [38], S.70; [66], III; [69].

9.2 INTERPOLATIONSQUADRATURFORMELN.

9.2.1 KONSTRUKTIONSMETHODEN.

Von dem Integranden f eines bestimmten Integrals $I(f; a, b)$ seien an $n+1$ paarweise verschiedenen und nicht notwendig äquidistanten Stützstellen $x_k \in [a, b] \subset [\alpha, \beta]$, $k=0(1)n$, die Stützwerte $y_k = f(x_k)$ bekannt. Dann liegt es nahe, durch die $n+1$ Stützpunkte $(x_k, y_k = f(x_k))$ das zugehörige Interpolationspolynom ϕ vom Höchstgrad n zu legen und das bestimmte Integral von ϕ über $[a, b]$: $I(\phi; a, b)$ als Näherungswert für das gesuchte

*) Ein Programm zur zweidimensionalen Integration ist in P 7.11 .2 zu finden, Programme zu diesem Kapitel in P 9.

Integral $I(f; a, b)$ zu benutzen. Mit dem Restglied $R(x)$ der Interpolation gilt

$$f(x) = \phi(x) + R(x), \quad x \in [a, b].$$

Für das Integral $I(f; a, b)$ erhält man somit

$$(9.2) \quad \begin{cases} I(f; a, b) = \int_a^b f(x) dx = Q(f; a, b) + E(f; a, b) \text{ mit} \\ Q(f; a, b) = I(\phi; a, b) = \int_a^b \phi(x) dx, \\ E(f; a, b) = I(R; a, b) = \int_a^b R(x) dx. \end{cases}$$

Nach Ausführung der Integration über ϕ bzw. R liefert $Q(f, a, b)$ die *Quadraturformel* und $E(f; a, b)$ das zugehörige *Restglied der Quadratur*. Die Quadraturformel ϕ dient als Näherungswert für $I(f; a, b)$; es gilt $Q(f; a, b) \approx I(f; a, b)$. Die Summe aus Q und E wird als *Integrationsregel* bezeichnet. Für die Quadraturformel erhält man die Darstellung

$$(9.3) \quad Q(f; a, b) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k).$$

Dabei ergeben sich bei gegebenen Stützstellen x_k und Integrationsgrenzen a, b die *Gewichte* A_k als Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(9.4) \quad \frac{1}{m+1} (b^{m+1} - a^{m+1}) = \sum_{k=0}^n A_k x_k^m, \quad m = 0(1)n,$$

bzw. ausführlich

$$(9.4') \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \\ \vdots \\ \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \end{pmatrix}.$$

Das System (9.4) ist eindeutig lösbar.

Mit dieser Methode kann also zu einem gegebenen Intervall $[a, b]$ und $n+1$ gegebenen paarweise verschiedenen und nicht notwendig äquidistanten Stützstellen $x_k \in [a, b]$ jeweils eine Interpolationsquadraturformel hergeleitet werden. Sind dann an diesen Stützstellen $x_k \in [a, b]$ Funktions-

werte $f(x_k)$ einer über $[a, b]$ zu integrierenden Funktion f bekannt, so liefert die Quadraturformel (9.3) einen Näherungswert für das Integral $I(f; a, b)$.

Für das Restglied $E(f; a, b)$ der Quadratur gilt mit (9.2)

$$E(f; a, b) = \int_a^b R(x) dx = \int_a^b (f(x) - \phi(x)) dx.$$

Falls also $f - \phi$ in $[a, b]$ das Vorzeichen mehrfach wechselt, heben sich positive und negative Fehler teilweise auf, so daß der resultierende Fehler selbst dann sehr klein werden kann, wenn ϕ keine gute Approximation von f darstellt, d.h. zwischen den Stützstellen stark von f abweicht. Durch Integration werden also Fehler geglättet. Mit (7.10) und $f \in C^{n+1}[a, b]$ erhält man für $E(f; a, b)$ die Darstellung

$$(9.5) \quad \begin{cases} E(f; a, b) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \pi(x) dx & \text{mit} \\ \xi = \xi(x, x_0, x_1, \dots, x_n) \in [a, b], \quad \pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \end{cases}$$

bzw.

$$(9.5') \quad E(f; a, b) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi^*) \int_a^b \pi(x) dx, \quad \xi^* \in [a, b],$$

falls überall in $[a, b]$ gilt $\pi(x) \geq 0$ oder $\pi(x) \leq 0$. Allgemein besitzt das Restglied für Funktionen $f \in C^{2n}[a, b]$ die folgende Darstellung:

(1) Unter Verwendung von $2n-1$ Stützstellen $x_k \in [a, b]$ gilt

$$E(f; a, b) = c_{2n-1} \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [a, b],$$

(2) unter Verwendung von $2n$ Stützstellen $x_k \in [a, b]$ gilt

$$E(f; a, b) = c_{2n} \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Die Koeffizienten c_{2n-1} bzw. c_{2n} hängen nur von den Stützstellen ab. In [2], Bd.1, S.186 ff. ist eine Tabelle der c_{2n} , c_{2n-1} für zwei bis elf Stützstellen angegeben. Zur Darstellung des Restgliedes vgl. man auch [14], III, § 10; [19], 7.1; [24], 6; [25], 8.2; [43], S.143-145.

9.2.2 NEWTON-COTES-FORMELN.

Mit Hilfe des linearen Gleichungssystems (9.4) lassen sich spezielle Quadraturformeln für äquidistante Stützstellen aufstellen. Die Randpunkte des Integrationsintervalls $[a, b]$ fallen dabei jeweils mit

Stützstellen des zu integrierenden Interpolationspolynoms zusammen. So konstruierte Formeln gehören zur Klasse der Newton-Cotes-Formeln.

Es wird unterschieden zwischen Quadraturformeln vom *geschlossenen* Typ und vom *offenen* Typ. Eine Quadraturformel heißt vom geschlossenen Typ, wenn die Randpunkte des Integrationsintervalls zu den Stützstellen gehören, andernfalls vom offenen Typ.

Mit einem oberen Index an Q und E wird im folgenden der Name der Quadraturformel gekennzeichnet, mit dem unteren Index die gewählte Schrittweite. Auf die Angabe von f in $Q(f; a, b)$ bzw. $E(f; a, b)$ wird verzichtet.

9.2.2.1 DIE SEHNENTRAPEZFORMEL.

Betrachtet man das Integral von f über $[a, b] = [0, h]$ und wählt die Randpunkte $x_0 = 0$, $x_1 = h$ als Stützstellen, so ergeben sich aus (9.4) wegen $n = 1$, $a = 0$, $b = h$ die Gewichte $A_0 = A_1 = \frac{h}{2}$, so daß die Quadraturformel (9.3) lautet

$$Q^{ST}(0, h) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) = \frac{h}{2} (f(0) + f(h)).$$

$Q^{ST}(0, h)$ heißt *Sehnentrapezformel* (ST-Formel). Für das zugehörige Restglied folgt mit (9.5') die Darstellung

$$E^{ST}(0, h) = \frac{1}{2} f''(\xi^*) \int_0^h x(x-h) dx = -\frac{h^3}{12} f''(\xi^*), \quad \xi^* \in [0, h], \quad f'' \in C[0, h].$$

Die ST-Formel besitzt somit die *lokale Fehlerordnung* $O(h^3)$. Geometrisch bedeutet $Q^{ST}(0, h)$ die Fläche des der Kurve $y = f(x)$ für $x \in [0, h]$ einbeschriebenen Sehnentrapezes. Zusammengefaßt folgt die *Sehnentrapezregel*

$$\int_0^h f(x) dx = Q^{ST}(0, h) + E^{ST}(0, h) = \frac{h}{2} (f(0) + f(h)) - \frac{h^3}{12} f''(\xi^*), \quad \xi^* \in [0, h].$$

Ist die Integration über ein ausgedehntes Intervall $[a, \beta]$ auszuführen, so zerlegt man $[a, \beta]$ in N Teilintervalle der Länge $h = \frac{\beta-a}{N}$; h heißt *Schrittweite*. Für das Integral von f über $[a, \beta]$ gilt dann die *summierte Sehnentrapezregel*

$$\begin{cases} \int_a^\beta f(x) dx = Q_h^{ST}(a, \beta) + E_h^{ST}(a, \beta) & \text{mit} \\ Q_h^{ST}(a, \beta) = \frac{h}{2} (f(a) + f(\beta) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(a+kh)) \\ E_h^{ST}(a, \beta) = -\frac{\beta-a}{12} h^2 f''(\eta), \quad \eta \in [a, \beta], \quad f'' \in C[a, \beta]. \end{cases}$$

Dabei sind $Q_h^{ST}(\alpha, \beta)$ die *summierte ST-Formel* und $E_h^{ST}(\alpha, \beta)$ das *Restglied der summierten ST-Formel*; die globale Fehlerordnung ist $O(h^2)$. Im Falle periodischer Funktionen f sollte grundsätzlich die ST-Formel angewandt werden, vgl. [20], S.287.

9.2.2.2 DIE SIMPSONSCHE FORMEL.

Betrachtet man das Integral von f über $[a, b] = [0, 2h]$ und wählt $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h$ als Stützstellen, so ergeben sich aus (9.4) wegen $n = 2, a = 0, b = 2h$ die Gewichte $A_0 = A_2 = \frac{1}{3}h, A_1 = \frac{4}{3}h$, so daß die Quadraturformel (9.3) lautet

$$Q^S(0, 2h) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) = \frac{h}{3} (f(0) + 4f(h) + f(2h)).$$

$Q^S(0, 2h)$ heißt *Simpsonsche Formel* (S-Formel). Für das Restglied der S-Formel gilt

$$E^S(0, 2h) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [0, 2h], \quad f^{(4)} \in C[0, 2h].$$

Die S-Formel besitzt somit die lokale Fehlerordnung $O(h^5)$. Zusammengefaßt folgt die *Simpsonsche Regel*

$$\int_0^{2h} f(x) dx = Q^S(0, 2h) + E^S(0, 2h) = \frac{h}{3} (f(0) + 4f(h) + f(2h)) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [0, 2h].$$

Zur Bestimmung des Integrals von f über ein ausgedehntes Intervall $[\alpha, \beta]$ zerlegt man $[\alpha, \beta]$ in $2N$ Teilintervalle der Länge $h = \frac{\beta-\alpha}{2N}$, so daß die *summierte Simpsonsche Regel* lautet

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = Q_h^S(\alpha, \beta) + E_h^S(\alpha, \beta) \quad \text{mit} \\ Q_h^S(\alpha, \beta) = \frac{h}{3} (f(\alpha) + f(\beta) + 4 \sum_{k=0}^{N-1} f(\alpha+(2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(\alpha+2kh)), \\ E_h^S(\alpha, \beta) = -\frac{h^5}{180} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [\alpha, \beta], \quad f^{(4)} \in C[\alpha, \beta]. \end{array} \right.$$

Dabei ist $Q_h^S(\alpha, \beta)$ die *summierte S-Formel* und $E_h^S(\alpha, \beta)$ das *Restglied der summierten S-Formel*. Die summierte S-Formel besitzt die globale Fehlerordnung $O(h^4)$.

BEMERKUNG 9.1. Ein Nachteil der S-Formel ist, daß immer eine gerade Anzahl von Teilintervallen der Länge h erforderlich ist, um die Formel anwenden zu können. Dieser Nachteil läßt sich aber durch Kombination

der S-Formel mit der 3/8-Formel im Falle einer ungeraden Zahl von Teilintervallen immer vermeiden, vgl. dazu Bemerkung 9.2 in Abschnitt 9.2.2.3.

9.2.2.3 DIE 3/8-FORMEL.

Betrachtet man das Integral von f über $[a, b] = [0, 3h]$ und wählt $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, x_3 = 3h$ als Stützstellen, so ergeben sich aus (9.4) wegen $n = 3, a = 0, b = 3h$ die Gewichte $A_0 = \frac{3}{8}h, A_1 = \frac{9}{8}h, A_2 = \frac{9}{8}h, A_3 = \frac{3}{8}h$. Die Quadraturformel (9.3) lautet damit

$$Q^{3/8}(0, 3h) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) = \frac{3h}{8} (f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h)).$$

$Q^{3/8}(0, 3h)$ heißt *3/8-Formel*. Für das Restglied der 3/8-Formel gilt

$$E^{3/8}(0, 3h) = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [0, 3h], \quad f^{(4)} \in C[0, 3h].$$

Die lokale Fehlerordnung ist somit $O(h^5)$. Zusammengefaßt folgt die *3/8-Regel*

$$\int_0^{3h} f(x) dx = Q^{3/8}(0, 3h) + E^{3/8}(0, 3h) = \frac{3h}{8} (f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h)) - \frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [0, 3h].$$

Zur Bestimmung des Integrals von f über ein ausgedehntes Intervall $[\alpha, \beta]$ zerlegt man $[\alpha, \beta]$ in $3N$ Teilintervalle der Länge $h = \frac{\beta-\alpha}{3N}$, so daß die *summierte 3/8-Regel* lautet

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = Q_h^{3/8}(\alpha, \beta) + E_h^{3/8}(\alpha, \beta) \quad \text{mit} \\ Q_h^{3/8}(\alpha, \beta) = \frac{3h}{8} (f(\alpha) + f(\beta) + 3 \sum_{k=1}^N f(\alpha+(3k-2)h) + \\ \quad + 3 \sum_{k=1}^N f(\alpha+(3k-1)h) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(\alpha+3kh)), \\ E_h^{3/8}(\alpha, \beta) = -\frac{h^5}{80} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [\alpha, \beta], \quad f^{(4)} \in C[\alpha, \beta]. \end{array} \right.$$

Dabei ist $Q_h^{3/8}(\alpha, \beta)$ die *summierte 3/8-Formel* und $E_h^{3/8}(\alpha, \beta)$ das *Restglied der summierten 3/8-Formel*. Die summierte 3/8-Formel besitzt die globale Fehlerordnung $O(h^4)$.

BEMERKUNG 9.2 Soll das Integral $I(f; \alpha, \beta)$ von f über $[\alpha, \beta]$ mit der globalen Fehlerordnung $O(h^4)$ berechnet werden bei vorgegebenem h , und ist es nicht möglich, das Intervall $[\alpha, \beta]$ in 2N oder 3N Teilintervalle der Länge h zu zerlegen, so empfiehlt es sich, die Simpsonsche Formel mit der 3/8-Formel zu kombinieren, da beide die Fehlerordnung $O(h^4)$ besitzen.

9.2.2.4 WEITERE NEWTON-COTES-FORMELN.

Bisher wurden drei Newton-Cotes-Formeln angegeben, die sich jeweils durch Integration des Interpolationspolynoms für f zu 2 bzw. 3 bzw. 4 Stützstellen ergaben. Hier werden vier weitere Formeln angegeben zu 5, 6, 7 und 8 Stützstellen. Diese Formeln werden sofort zusammen mit den Restgliedern aufgeschrieben, so daß sich folgende Regeln ergeben:

4/90-Regel (5 Stützstellen).

$$\int_0^{4h} f(x) dx = \frac{4h}{90} (7f(0) + 32f(h) + 12f(2h) + 32f(3h) + 7f(4h)) - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi^*),$$

$$\xi^* \in [0, 4h], \quad f^{(6)} \in C[0, 4h].$$

Summierte 4/90-Regel. Mit $h = \frac{\beta - \alpha}{4N}$ ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{4h}{90} (7f(\alpha) + 7f(\beta) + 32 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (4k-3)h) + 12 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (4k-2)h) +$$

$$+ 32 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (4k-1)h) + 14 \sum_{k=1}^{N-1} f(\alpha + 4kh)) - \frac{2(\beta - \alpha)}{945} h^6 f^{(6)}(\eta), \quad \eta \in [\alpha, \beta], \quad f^{(6)} \in C[\alpha, \beta].$$

5/288-Regel (6 Stützstellen).

$$\int_0^{5h} f(x) dx = \frac{5h}{288} (19f(0) + 75f(h) + 50f(2h) + 50f(3h) + 75f(4h) + 19f(5h)) +$$

$$- \frac{275}{12096} h^7 f^{(6)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [0, 5h], \quad f^{(6)} \in C[0, 5h].$$

Summierte 5/288-Regel. Mit $h = \frac{\beta - \alpha}{5N}$ ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{5h}{288} (19f(\alpha) + 19f(\beta) + 75 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (5k-4)h) +$$

$$+ 50 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (5k-3)h) + 50 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (5k-2)h) +$$

$$+ 75 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (5k-1)h) + 38 \sum_{k=1}^{N-1} f(\alpha + 5kh)) - \frac{55(\beta - \alpha)}{12096} h^6 f^{(6)}(\eta),$$

$$\eta \in [\alpha, \beta], \quad f^{(6)} \in C[\alpha, \beta].$$

6/840-Regel (7 Stützstellen).

$$\int_0^{6h} f(x) dx = \frac{6h}{840} (41f(0) + 216f(h) + 27f(2h) + 272f(3h) + 27f(4h) + 216f(5h) +$$

$$+ 41f(6h)) - \frac{9}{1400} h^9 f^{(8)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [0, 6h], \quad f^{(8)} \in C[0, 6h].$$

Summierte 6/840-Regel. Mit $\frac{\beta - \alpha}{6N}$ ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{6h}{840} (41f(\alpha) + 41f(\beta) + 216 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (6k-5)h) +$$

$$+ 27 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (6k-4)h) + 272 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (6k-3)h) +$$

$$+ 27 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (6k-2)h) + 216 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (6k-1)h) +$$

$$+ 82 \sum_{k=1}^{N-1} f(\alpha + 6kh)) - \frac{3(\beta - \alpha)}{2800} h^8 f^{(8)}(\eta), \quad \eta \in [\alpha, \beta], \quad f^{(8)} \in C[\alpha, \beta].$$

7/17280-Regel (8 Stützstellen).

$$\int_0^{7h} f(x) dx = \frac{7h}{17280} (751f(0) + 3577f(h) + 1323f(2h) + 2989f(3h) + 2989f(4h) +$$

$$+ 1323f(5h) + 3577f(6h) + 751f(7h)) - \frac{8163}{518400} h^9 f^{(8)}(\xi^*),$$

$$\xi^* \in [0, 7h], \quad f^{(8)} \in C[0, 7h].$$

Summierte 7/17280-Regel. Mit $h = \frac{\beta - \alpha}{7N}$ ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{7h}{17280} (751f(\alpha) + 751f(\beta) + 3577 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (7k-6)h) +$$

$$+ 1323 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (7k-5)h) + 2989 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (7k-4)h) +$$

$$+ 2989 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (7k-3)h) + 1323 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (7k-2)h) +$$

$$+ 3577 \sum_{k=1}^N f(\alpha + (7k-1)h) + 1502 \sum_{k=1}^{N-1} f(\alpha + 7kh)) - \frac{8163(\beta - \alpha)}{3628800} h^8 f^{(8)}(\eta),$$

$$\eta \in [\alpha, \beta], \quad f^{(8)} \in C[\alpha, \beta].$$

Eine Herleitung der Restglieder aller Newton-Cotes-Formeln ist in [10] Bd.1, 3.4.2; [19], S.323/4; [24], 6.1 und [43], S.144-146 zu finden.

Ist $n+1$ die Anzahl der verwendeten Stützstellen und bezeichnen wir mit $O(h^q)$ die lokale Fehlerordnung, so gilt für

- 1) gerades $n+1$: $q = n+2$,
- 2) ungerades $n+1$: $q = n+3$.

Die globale Fehlerordnung ist jeweils $O(h^{q-1})$.

Die genannten Newton-Cotes-Formeln sind Formeln vom geschlossenen Typ; Newton-Cotes-Formeln vom offenen Typ sind in '4', S.75 zu finden. Bei wachsendem Grad des integrierten Interpolationspolynoms, d.h. bei wachsender Anzahl (> 8) verwendeter Stützstellen, treten negative Gewichte auf, so daß die Quadraturkonvergenz nicht mehr gesichert ist (s. Abschnitt 9.6). Außerdem differieren die Koeffizienten bei zunehmendem Grad immer stärker voneinander, was zum unerwünschten Anwachsen von Rundungsfehlern führen kann. Deshalb werden zur Integration über große Intervalle anstelle von Formeln höherer Ordnung besser summierte Formeln niedrigerer Fehlerordnung mit hinreichend kleiner Schrittweite h oder das Romberg-Verfahren (Abschnitt 9.5) verwendet.

9.2.3 QUADRATURFORMELN VON MACLAURIN.

Bei den Formeln von Maclaurin liegen die Stützstellen jeweils in der Mitte eines Teilintervalls der Länge h , es sind also Formeln vom offenen Typ. Gewichte und Restglieder können z.B. mittels Taylorabgleich bestimmt werden.

9.2.3.1 DIE TANGENTENTRAPEZFORMEL.

Betrachtet man das Integral von f über $'a,b' = '0,h'$, wählt man eine Stützstelle x_0 in $'0,h'$ und fordert, daß diese möglichst günstig liegt, so daß sich Polynome vom Grad 0 und 1 exakt integrieren lassen, so ergeben sich aus (9.4) mit $n = 1$ die Lösungen $A_0 = h$, $x_0 = \frac{h}{2}$. Die Quadraturformel (9.3) lautet

$$Q^{TT}(0,h) = A_0 f(x_0) = h f\left(\frac{h}{2}\right).$$

$Q^{TT}(0,h)$ heißt Tangententrapezformel (TT-Formel), da sie geometrisch den Flächeninhalt des Trapezes bedeutet, dessen vierte Seite von der Tangente

an $f(x)$ im Punkt $\left(\frac{h}{2}, f\left(\frac{h}{2}\right)\right)$ gebildet wird.

Für das zugehörige Restglied folgt

$$E^{TT}(0,h) = \frac{h^3}{24} f''(\xi^*), \quad \xi^* \in [0,h], \quad f'' \in C[0,h].$$

Die lokale Fehlerordnung ist $O(h^3)$.

Zusammengefaßt folgt die *Tangententrapezregel*

$$\begin{cases} \int_0^h f(x) dx = Q^{TT}(0,h) + E^{TT}(0,h) \text{ mit} \\ Q^{TT}(0,h) = h f\left(\frac{h}{2}\right), \\ E^{TT}(0,h) = \frac{h^3}{24} f''(\xi^*), \quad \xi^* \in [0,h], \quad f'' \in C[0,h]. \end{cases}$$

Zur Bestimmung des Integrals von f über ein ausgedehntes Intervall $[\alpha, \beta]$ zerlegen wir $[\alpha, \beta]$ in N Teilintervalle der Länge $h = \frac{\beta-\alpha}{N}$, so daß die *summierte Tangententrapezregel* lautet

$$\begin{cases} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = Q_h^{TT}(\alpha, \beta) + E_h^{TT}(\alpha, \beta) \text{ mit} \\ Q_h^{TT}(\alpha, \beta) = h \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\alpha + (2k+1)\frac{h}{2}\right), \\ E_h^{TT}(\alpha, \beta) = \frac{h^2}{24} (\beta-\alpha) f''(\eta), \quad \eta \in [\alpha, \beta], \quad f'' \in C[\alpha, \beta]. \end{cases}$$

BEMERKUNG 9.3. Die beiden Trapezformeln (ST und TT) sind von derselben Fehlerordnung. Der Restgliedkoeffizient der TT-Formel ist nur halb so groß wie der der ST-Formel. Außerdem ist bei der Integration nach der TT-Formel stets ein Funktionswert weniger zu berechnen, da als Stützstellen die Intervallmitten genommen werden.

9.2.3.2 WEITERE MACLAURIN-FORMELN.

Im folgenden werden noch die Formeln für 2,3,4 und 5 Stützstellen angegeben und zusammen mit den zugehörigen Restgliedern als Integrationsregeln aufgeschrieben.

Regel zu 2 Stützstellen.

$$\int_0^{2h} f(x) dx = h \left(f\left(\frac{h}{2}\right) + f\left(\frac{3h}{2}\right) \right) + \frac{h^3}{12} f''(\xi^*), \quad \xi^* \in [0,2h], \quad f'' \in C[0,2h].$$

Summierte Regel. Mit $h = \frac{\beta-\alpha}{2N}$ ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = h \sum_{k=1}^{2N} f\left(\alpha + (2k-1)\frac{h}{2}\right) + \frac{\beta-\alpha}{24} h^2 f''(\eta), \quad \eta \in [\alpha, \beta], \quad f'' \in C[\alpha, \beta].$$

Regel zu 3 Stützstellen:

$$\int_0^{3h} f(x) dx = \frac{3h}{8} \left(3f\left(\frac{h}{2}\right) + 2f\left(\frac{3h}{2}\right) + 3f\left(\frac{5h}{2}\right) \right) + \frac{5103}{20480} h^5 f^{(4)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [0, 3h], \quad f^{(4)} \in C[0, 3h].$$

Summierte Regel: Mit $h = \frac{\beta - \alpha}{3N}$ ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{3h}{8} \sum_{k=1}^{N-1} \left(3f\left(\alpha + (6k+1)\frac{h}{2}\right) + 2f\left(\alpha + (6k+3)\frac{h}{2}\right) + 3f\left(\alpha + (6k+5)\frac{h}{2}\right) \right) + \frac{1701}{20480} (\beta - \alpha) h^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [\alpha, \beta], \quad f^{(4)} \in C[\alpha, \beta].$$

Regel zu 4 Stützstellen:

$$\int_0^{4h} f(x) dx = \frac{h}{12} \left(13f\left(\frac{h}{2}\right) + 11f\left(\frac{3h}{2}\right) + 11f\left(\frac{5h}{2}\right) + 13f\left(\frac{7h}{2}\right) \right) + \frac{103}{1440} h^5 f^{(4)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [0, 4h], \quad f^{(4)} \in C[0, 4h].$$

Summierte Regel: Mit $h = \frac{\beta - \alpha}{4N}$ ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{h}{12} \sum_{k=0}^{N-1} \left(13f\left(\alpha + (8k+1)\frac{h}{2}\right) + 11f\left(\alpha + (8k+3)\frac{h}{2}\right) + 11f\left(\alpha + (8k+5)\frac{h}{2}\right) + 13f\left(\alpha + (8k+7)\frac{h}{2}\right) \right) + \frac{103}{5760} (\beta - \alpha) h^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [\alpha, \beta], \quad f^{(4)} \in C[\alpha, \beta].$$

Regel zu 5 Stützstellen:

$$\int_0^{5h} f(x) dx = \frac{5h}{1152} \left(275f\left(\frac{h}{2}\right) + 100f\left(\frac{3h}{2}\right) + 402f\left(\frac{5h}{2}\right) + 100f\left(\frac{7h}{2}\right) + 275f\left(\frac{9h}{2}\right) \right) + \frac{435}{3170} \frac{546}{893} \frac{875}{824} h^7 f^{(6)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [0, 5h], \quad f^{(6)} \in C[0, 5h].$$

Summierte Regel: Mit $h = \frac{\beta - \alpha}{5N}$ ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{5h}{1152} \sum_{k=0}^{N-1} \left(275f\left(\alpha + (10k+1)\frac{h}{2}\right) + 100f\left(\alpha + (10k+3)\frac{h}{2}\right) + 402f\left(\alpha + (10k+5)\frac{h}{2}\right) + 100f\left(\alpha + (10k+7)\frac{h}{2}\right) + 275f\left(\alpha + (10k+9)\frac{h}{2}\right) \right) + \frac{87}{317n} \frac{109}{893} \frac{375}{824} (\beta - \alpha) h^6 f^{(6)}(\eta), \quad \eta \in [\alpha, \beta], \quad f^{(6)} \in C[\alpha, \beta].$$

Aus der Aufstellung ist erkennbar, daß die Formeln mit ungerader Stützstellenzahl ebenso wie bei den Newton-Cotes-Formeln die günstigeren Formeln sind. Die Formel für $n = 6$ wird nicht mehr angegeben, da sie dieselbe Fehlerordnung hat wie die für $n = 5$. In der Formel für $n = 7$ ist bereits ein negatives Gewicht, nämlich A_0 , so daß die Quadraturkonvergenz nicht mehr gesichert ist.

9.2.4 DIE EULER-MACLAURIN-FORMELN.

Die Euler-Maclaurin-Formeln entstehen durch Integration der Newtonschen Interpolationsformel $\tilde{N}_n(t)$ für absteigende Differenzen.

Es sei f $2n$ -mal stetig differenzierbar auf $[0, h]$. Betrachtet man das Integral von f über $[0, h]$ und wählt als Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = h$, so ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $f \in C^{2n}[0, h]$ eine *Euler-Maclaurin-Formel* (EM_n -Formel)

$$(9.6) \quad Q^{EM}_n(0, h) = \frac{h}{2} (f(0) + f(h)) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_{2j}}{(2j)!} h^{2j} (f^{(2j-1)}(0) - f^{(2j-1)}(h))$$

mit den Bernoullischen Zahlen

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \dots; \quad B_{2j+1} = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots$$

Das zugehörige Restglied lautet

$$(9.7) \quad E^{EM}_n(0, h) = -\frac{B_{2n}}{(2n)!} h^{2n+1} f^{(2n)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [0, h].$$

Zusammengefaßt folgt mit (9.6) und (9.7) für jedes n eine *Euler-Maclaurin-Regel*

$$\int_0^h f(x) dx = Q^{EM}_n(0, h) + E^{EM}_n(0, h).$$

Ist die Integration über ein ausgedehntes Intervall $[\alpha, \beta]$ zu erstrecken, so zerlegt man $[\alpha, \beta]$ in N Teilintervalle der Länge $h = \frac{\beta - \alpha}{N}$ und wendet eine EM_n -Formel und das zugehörige Restglied auf jedes Teilintervall an. Man erhält so die *summierte Euler-Maclaurin-Regel*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = Q^{EM}_n(\alpha, \beta) + E^{EM}_n(\alpha, \beta),$$

mit der *summierten Euler-Maclaurin-Formel*

$$(9.8) \quad Q^{EM}_n(\alpha, \beta) = \frac{h}{2} (f(\alpha) + f(\beta)) + \sum_{v=1}^{N-1} f(\alpha + v h) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_{2j}}{(2j)!} h^{2j} (f^{(2j-1)}(\alpha) - f^{(2j-1)}(\beta))$$

und dem *Restglied der summierten Euler-Maclaurin-Formel*

$$E^{EM}_n(\alpha, \beta) = -\frac{B_{2n}}{(2n)!} B_{2n} h^{2n} f^{(2n)}(\eta), \quad \eta \in [\alpha, \beta].$$

BEMERKUNG 9.4. Mit der Sehnen trapezformel kann man für (9.6) auch schreiben

$$Q^{EM}_n(0, h) = Q^{ST}(0, h) + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{c}_{2k} h^{2k}$$

und mit der summierten Sehnen trapezformel für (9.8)

$$Q_h^{EMn}(\alpha, \beta) = Q_h^{ST}(\alpha, \beta) + \sum_{k=1}^{n-1} c_{2k} h^{2k},$$

wobei die \tilde{c}_{2k} und c_{2k} unabhängig von h sind. Die einfache bzw. summierte Euler-Maclaurin-Formel setzt sich also aus der einfachen bzw. summierten Sehnenrapezformel und einem Korrekturglied zusammen. Für $n = 1$ sind die ST-Formel und die EM_n -Formel identisch.

9.2.5 FEHLERSCHÄTZUNGSFORMELN UND RECHNUNGSFEHLER.

Da in der Regel die Ableitungen $f^{(n+1)}(x)$ entweder nicht bekannt sind oder nur mit erheblichem Aufwand abgeschätzt werden können, ist die genaue Kenntnis des Restgliedkoeffizienten von geringem praktischen Nutzen. Wesentlich ist die Kenntnis der globalen Fehlerordnung $O(h^q)$ des Restgliedes; sie reicht aus, um unter Verwendung von zwei mit den Schrittweiten h_1 und h_2 berechneten Näherungswerten für das Integral einen Schätzwert für den wahren Fehler angeben zu können.

Wurde etwa das Integral $I(f; \alpha, \beta)$ näherungsweise mit der Schrittweite h_1 nach einer Quadraturformel der globalen Fehlerordnung $O(h_1^q)$ berechnet, so gilt

$$I(f; \alpha, \beta) = Q_{h_1}(\alpha, \beta) + E_{h_1}(\alpha, \beta)$$

$$\text{mit } E_{h_1}(\alpha, \beta) = O(h_1^q).$$

Für $i = 1$ und $i = 2$, q fest, erhält man die folgende Fehlerschätzungsformel für den Fehler $E_{h_1}(\alpha, \beta)$ des mit der Schrittweite h_1 berechneten Näherungswertes $Q_{h_1}(\alpha, \beta)$ für $I(f; \alpha, \beta)$:

$$(9.9) \quad E_{h_1}(\alpha, \beta) \approx \frac{Q_{h_1}(\alpha, \beta) - Q_{h_2}(\alpha, \beta)}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^q - 1} = E_{h_1}^*(\alpha, \beta).$$

Mit (9.9) läßt sich ein gegenüber $Q_{h_1}(\alpha, \beta)$ verbesserter Näherungswert $Q_{h_1}^*(\alpha, \beta)$ für $I(f; \alpha, \beta)$ angeben; es gilt

$$(9.10) \quad \begin{aligned} Q_{h_1}^*(\alpha, \beta) &= Q_{h_1}(\alpha, \beta) + E_{h_1}^*(\alpha, \beta) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^q - 1} \left(\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^q Q_{h_1}(\alpha, \beta) - Q_{h_2}(\alpha, \beta) \right). \end{aligned}$$

Wählt man speziell $h_2 = 2h_1$ und setzt $h_1 = h$, so erhält (9.9) die Form

$$(9.9') \quad E_h(\alpha, \beta) \approx \frac{Q_h(\alpha, \beta) - Q_{2h}(\alpha, \beta)}{2^q - 1}$$

und für $Q_h^*(\alpha, \beta)$ ergibt sich aus (9.10) die Beziehung

$$(9.10') \quad Q_h^*(\alpha, \beta) = \frac{1}{2^q - 1} (2^q Q_h(\alpha, \beta) - Q_{2h}(\alpha, \beta)).$$

Dabei sind $Q_h(\alpha, \beta)$ der mit der Schrittweite h berechnete Näherungswert, $Q_{2h}(\alpha, \beta)$ der mit der doppelten Schrittweite berechnete Näherungswert und $Q_h^*(\alpha, \beta)$ der gegenüber $Q_h(\alpha, \beta)$ verbesserte Näherungswert für $I(f; \alpha, \beta)$.

Für die Trapezformeln, die Simpsonsche Formel und die 3/8-Formel lauten die (9.9') entsprechenden Fehlerschätzungsformeln und die (9.10') entsprechenden verbesserten Näherungswerte Q_h^*

Sehnen- und Tangententrapezformel ($q = 2$):

$$E_h^{ST} \approx \frac{1}{3} (Q_h^{ST} - Q_{2h}^{ST}), \quad E_h^{TT} \approx \frac{1}{3} (Q_h^{TT} - Q_{2h}^{TT}),$$

$$Q_h^{*ST} = \frac{1}{3} (4 Q_h^{ST} - Q_{2h}^{ST}), \quad Q_h^{*TT} = \frac{1}{3} (4 Q_h^{TT} - Q_{2h}^{TT});$$

Simpsonsche Formel und 3/8-Formel ($q = 4$):

$$E_h^S \approx \frac{1}{15} (Q_h^S - Q_{2h}^S), \quad E_h^{3/8} \approx \frac{1}{15} (Q_h^{3/8} - Q_{2h}^{3/8}),$$

$$Q_h^{*S} = \frac{1}{15} (16 Q_h^S - Q_{2h}^S), \quad Q_h^{*3/8} = \frac{1}{15} (16 Q_h^{3/8} - Q_{2h}^{3/8}).$$

Mit Hilfe der Euler-Maclaurin-Formeln läßt sich zeigen, daß bei Verwendung der gegenüber Q_h^{ST} und Q_h^S verbesserten Näherungswerte Q_h^{*ST} und Q_h^{*S} für I sogar zwei h -Potenzen in der Fehlerordnung gewonnen werden; es gilt

$$I(f; \alpha, \beta) = Q_h^{*ST}(\alpha, \beta) + O(h^4)$$

bzw.

$$I(f; \alpha, \beta) = Q_h^{*S}(\alpha, \beta) + O(h^6),$$

vgl. auch Abschnitt 9.5.

RECHNUNGSFEHLER. Während der globale Verfahrensfehler z.B. im Falle der ST-Regel bzw. S-Regel von zweiter bzw. von vierter Ordnung mit $h \rightarrow 0$ abnimmt, wächst der Rechnungsfehler in beiden Fällen von der Ordnung $O(\frac{1}{h})$, so daß der Gesamtfehler (Verfahrensfehler plus Rechnungsfehler) nicht be-

liebig klein gehalten werden kann. Diese Aussage gilt auch für andere Quadraturformeln. Es ist empfehlenswert, die Schrittweite h so zu wählen, daß Verfahrensfehler und Rechnungsfehler von gleicher Größenordnung sind. Im Falle der ST-Regel ergibt sich nach [26], S.173 für den globalen Rechnungsfehler die Beziehung

$$r_h(\alpha, \beta) = \frac{1}{2h} (\beta - \alpha)^2 \epsilon,$$

wobei ϵ der maximale absolute Rechnungsfehler pro Rechenschritt ist.

LITERATUR zu 9.2: [2] Bd.1, 3.4; [4], 2.; [7], 4.3-4.5; [14], 10; [18], 13.2, 3,5; [19], 7.1; [20], 9.1; [24], 6; [25], 8.2; [26], 6.2-6.6; [28], § 2; [30], IV § 2.1-2; [32] H § 7.1-3; [34], 6.2; [35], 3.1; [38], 4.1, 4.2; [41], III § 6; [43] § 16 A; [45], § 13.1-5; [67] I, 3.2.1; [87], 8.

9.3 TSCHEBYSCHEFFSCHE QUADRATURFORMELN.

Bei der Konstruktion aller bisher behandelten Quadraturformeln vom Typ (9.3) wurden die $n+1$ Stützstellen $x_k \in [a, b]$ vorgegeben und die Gewichte A_k als Lösungen des für sie linearen Gleichungssystems (9.4) erhalten. Sind die Funktionswerte $f(x)$ des Integranden empirisch bestimmt und alle mit gleichen Fehlern behaftet, so wird der dadurch bedingte Fehler des Integralwertes am kleinsten, wenn alle Gewichte der Quadraturformel gleich sind.

Die Tschebyscheffschen Formeln haben die Form (9.3) mit gleichen Gewichten.

Man betrachtet das Integral von f über $[-h, h]$ und setzt die Tschebyscheffschen Regeln in der Form an

$$I(f; -h, h) = \int_{-h}^h f(x) dx = Q^{Ch}_{n+1}(-h, h) + E^{Ch}_{n+1}(-h, h),$$

wobei $n+1$ die Anzahl der Stützstellen $x_k \in [-h, h]$ ist. $Q^{Ch}_{n+1}(-h, h)$ heißt Tschebyscheffsche Formel (Ch_{n+1} -Formel) zu $n+1$ Stützstellen und $E^{Ch}_{n+1}(-h, h)$ ist das Restglied der Ch_{n+1} -Formel.

Die Gewichte A_k werden gleich groß vorgegeben

$$A_k = \frac{2h}{n+1}, \quad k = 0(1)n.$$

Es wird gefordert, daß die Quadraturformel $Q^{Ch}_{n+1}(-h, h)$ Polynome bis zum Grad $m = n+1$ exakt integriert. So erhält man aus (9.4) mit $m = 1(1)n+1$ für die $n+1$ Stützstellen x_k $n+1$ nichtlineare Gleichungen. Es muß also vorausgesetzt werden, daß sich die Funktionswerte $f(x)$ an den Stützstellen x_k berechnen oder aus einer Tabelle ablesen lassen; ist von f nur eine Wertetabelle bekannt, so sind die Tschebyscheffschen Formeln i.a. nicht anwendbar.

Für $n = 1$ sind in (9.4) $a = -h$, $b = h$, $m = 1, 2$, $A_0 = A_1 = h$ zu setzen. Man erhält die Lösungen $x_0 = -h/\sqrt{3}$, $x_1 = h/\sqrt{3}$, so daß die zugehörige Tschebyscheffsche Regel für 2 Stützstellen lautet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-h}^h f(x) dx = Q^{Ch}_2(-h, h) + E^{Ch}_2(-h, h) \quad \text{mit} \\ Q^{Ch}_2(-h, h) = h(f(-h/\sqrt{3}) + f(h/\sqrt{3})), \\ E^{Ch}_2(-h, h) = O(h^5). \end{array} \right.$$

Allgemein haben die Tschebyscheffschen Formeln mit $2v$ und $2v+1$ Stützstellen die lokale Fehlerordnung $O(h^{2v+3})$. Die Restgliedkoeffizienten sind in [2], Bd.1, S.219 zu finden.

Tabelle der Stützstellenwerte ([30], S.206):

n	x_k	$k = 0(1)n$	
1	$x_{0,1} = \pm 0,577350 h$		
2	$x_{0,2} = \pm 0,707107 h$	$x_1 = 0$	
3	$x_{0,3} = \pm 0,794654 h$	$x_{1,2} = \pm 0,187592 h$	
4	$x_{0,4} = \pm 0,832498 h$	$x_{1,3} = \pm 0,374541 h$	$x_2 = 0$
5	$x_{0,5} = \pm 0,866247 h$	$x_{1,4} = \pm 0,422519 h$	
	$x_{2,3} = \pm 0,266635 h$		
6	$x_{0,6} = \pm 0,883862 h$	$x_{1,5} = \pm 0,529657 h$	
	$x_{2,4} = \pm 0,323912 h$	$x_3 = 0$	

Reelle Werte x_k ergeben sich nur für $n = 0(1)6$ und $n = 8$.

Ist die Integration über ein ausgedehntes Intervall $[\alpha, \beta]$ zu erstrecken, so zerlegt man $[\alpha, \beta]$ in N Teilintervalle der Länge $2h$ mit $h = \frac{\beta - \alpha}{2N}$ und wendet auf jedes Teilintervall die entsprechende Ch_{n+1} -Formel an. Die Stützstellen sind dabei wie folgt zu transformieren:

$$x_k \rightarrow \alpha + (2j+1)h + x_k, \quad j = 0(1)N-1, \quad k = 0(1)n.$$

Man erhält so für $n = 1$ folgende *summierte Tschebyscheffsche Regel*

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f(x) dx = Q_h^{Ch_2}(\alpha, \beta) + E_h^{Ch_2}(\alpha, \beta) \quad \text{mit} \\ Q_h^{Ch_2}(\alpha, \beta) = h \sum_{j=0}^{N-1} \left(f\left(\alpha + (2j+1)h - \frac{h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\alpha + (2j+1)h + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) \right), \\ E_h^{Ch_2}(\alpha, \beta) = O(h^4). \end{array} \right.$$

Dabei ist $Q_h^{Ch_2}(\alpha, \beta)$ die *summierte Tschebyscheffsche Formel zu zwei Stützstellen* und $E_h^{Ch_2}(\alpha, \beta)$ das *Restglied der summierten Ch_2 -Formel*.

Die Tschebyscheffschen Formeln haben für eine gerade Anzahl von Stützstellen eine günstigere Fehlerordnung als die Newton-Cotes-Formeln.

LITERATUR zu 9.3: [2] Bd.1, 3.6; [20], 9.4; [24], 10; [43], § 16B.

9.4 QUADRATURFORMELN VON GAUSS.

Um die Gaußschen Formeln optimaler Genauigkeit zu erhalten, werden weder die Stützstellen noch die Gewichte vorgeschrieben, so daß in (9.4) insgesamt $2(n+1) = 2n+2$ freie Parameter enthalten sind. Die Forderung, daß die Quadraturformel Polynome bis zum Grad $2n+1$ exakt integriert, führt hier auf ein System von $2n+2$ Gleichungen für die $n+1$ Gewichte A_k und die $n+1$ Stützstellen x_k , $k = 0(1)n$; es lautet

$$\frac{1}{m+1} (b^{m+1} - a^{m+1}) = \sum_{k=0}^n A_k x_k^m, \quad m = 0(1)2n+1;$$

und ist linear bzgl. der Gewichte A_k und nichtlinear bzgl. der Stützstellen x_k . Man muß hier also voraussetzen, daß sich die Funktionswerte $f(x)$ an den sogenannten *Gaußschen Stützstellen* $x_k \in [a, b]$ berechnen oder aus einer Tabelle ablesen lassen. Ist von der Funktion f nur eine Wertetabelle bekannt, in der die Gaußschen Stützstellen im allgemeinen nicht auftreten werden, so berechnet man das Integral bei äquidistanten Stützstellen mittels einer Newton-Cotes-Formel oder einer Maclaurin-Formel und bei beliebigen Stützstellen mittels einer mit Hilfe des Systems (9.4) konstruierten Quadraturformel.

Für das Integral von f über $[a, b] = [-1, +1]$ läßt sich zeigen, daß die $n+1$ Gaußschen Stützstellen x_k gerade die Nullstellen der *Legendreschen Polynome* $P_{n+1}(x)$ in $[-1, +1]$ sind (s. hierzu z.B. [30], S.209; [37], 1.2; [38], S.86/87 sowie [20], S.277).

Betrachtet man nun das Integral von f über $[-h, +h]$ und setzt

$$\int_{-h}^{+h} f(x) dx = Q^{G_{n+1}}(-h, h) + E^{G_{n+1}}(-h, h) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + O(h^q),$$

so bezeichnet man diese Beziehung als *Gaußsche Regel*, $Q^{G_{n+1}}(-h, h)$ als *Gaußsche Formel* (G_{n+1} -Formel) und $E^{G_{n+1}}(-h, h)$ als *Festglied der G_{n+1} -Formel* zu $n+1$ Gaußschen Stützstellen.

Das Intervall $[-1, +1]$ muß zunächst immer auf $[-h, +h]$ transformiert werden. Dann ergeben sich für einige spezielle Gaußsche Quadraturformeln die folgenden Gewichte A_k und Stützstellen x_k , $k = 0(1)n$.

Tabelle der Gaußschen Stützstellenwerte und Gewichte:

n	$x_k, k = 0(1)n$	$A_k, k = 0(1)n$
0	$x_0 = 0$	$A_0 = 2h$
1	$x_{0,1} = \pm \frac{h}{\sqrt{3}}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577350269\right)$	$A_0 = A_1 = h$
2	$x_{0,2} = \pm \sqrt{0,6} h$ $x_1 = 0$ $\left(\sqrt{0,6} = 0,774596669\right)$	$A_0 = A_2 = \frac{5}{9} h = 0,5 h$ $A_1 = \frac{8}{9} h = 0,8 h$
3	$x_{0,3} = \pm 0,86113631 h$ $x_{1,2} = \pm 0,33998104 h$	$A_0 = A_3 = 0,34785485 h$ $A_1 = A_2 = 0,65214515 h$
4	$x_{0,4} = \pm 0,90617985 h$ $x_{1,3} = \pm 0,53846931 h$ $x_2 = 0$	$A_0 = A_4 = 0,23692689 h$ $A_1 = A_3 = 0,47862867 h$ $A_2 = \frac{128}{225} h = 0,568 h$
5	$x_{0,5} = \pm 0,93246951 h$ $x_{1,4} = \pm 0,66120939 h$ $x_{2,3} = \pm 0,23861919 h$	$A_0 = A_5 = 0,17132449 h$ $A_1 = A_4 = 0,36076157 h$ $A_2 = A_3 = 0,46791393 h$

Weitere Werte sind in [65], Table 25.4 angegeben.

Das Restglied besitzt die allgemeine Form

$$E^{G_{n+1}}(-h, h) = \frac{2^{2n+3}((n+1)!)^4}{(2n+3)(2n+2)!} h^{2n+3} f^{(2n+2)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [-h, h], \quad f^{(2n+2)} \in C[-h, h],$$

d.h. die lokale Fehlerordnung bei $n+1$ Stützstellen in $[-h, +h]$ ist $O(h^{2n+3})$.

Im folgenden werden zwei der Gaußschen Regeln explizit aufgeschrieben und zwar die für 2 und 3 Stützstellen $x_k \in [-h, +h]$:

1. $n = 1$ (2 Stützstellen):

$$\begin{cases} \int_{-h}^{+h} f(x) dx = Q^2(-h, h) + E^2(-h, h) & \text{mit} \\ Q^2(-h, h) = h \left(f\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right) \right), \\ E^2(-h, h) = \frac{h^5}{135} f^{(4)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [-h, +h], \quad f^{(4)} \in C[-h, +h]. \end{cases}$$

2. $n = 2$ (3 Stützstellen):

$$\begin{cases} \int_{-h}^{+h} f(x) dx = Q^3(-h, h) + E^3(-h, h) & \text{mit} \\ Q^3(-h, h) = \frac{h}{9} \left(5f(-\sqrt{0,6}h) + 8f(0) + 5f(\sqrt{0,6}h) \right), \\ E^3(-h, h) = \frac{h^7}{15750} f^{(6)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [-h, +h], \quad f^{(6)} \in C[-h, +h]. \end{cases}$$

Mit zwei Stützstellen erhält man eine Formel der lokalen Fehlerordnung $O(h^5)$, mit drei Stützstellen eine Formel der lokalen Fehlerordnung $O(h^7)$. Die Newton-Cotes-Formeln der lokalen Fehlerordnungen $O(h^5)$ und $O(h^7)$ erfordern dagegen drei bzw. fünf Stützstellen.

Für $n=4$ und $n=5$ lassen sich die Formeln an Hand der Tabelle der x_k, A_k leicht bilden. Dabei ist

$$E^4 = \frac{h^9}{3472875} f^{(8)}(\xi^*), \quad E^5 = \frac{h^{11}}{1237732650} f^{(10)}(\xi^*), \quad \xi^* \in [-h, +h].$$

Zur Bestimmung des Integrals von f über ein Intervall $[\alpha, \beta]$ teilt man $[\alpha, \beta]$ in N Teilintervalle der Länge $2h$: $h = \frac{\beta-\alpha}{2N}$. Die Stützstellen sind dabei wie folgt zu transformieren:

$$x_k \rightarrow \alpha + (2j+1)h + x_k, \quad j = 0(1)N-1, \quad k = 0(1)n.$$

Man erhält für $n = 1$ und $n = 2$ die folgenden summierten Gaußschen Regeln:

$$\begin{cases} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = Q_h^2(\alpha, \beta) + E_h^2(\alpha, \beta) & \text{mit} \\ Q_h^2(\alpha, \beta) = h \sum_{j=0}^{N-1} \left(f\left(\alpha + (2j+1)h - \frac{h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\alpha + (2j+1)h + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) \right), \\ E_h^2(\alpha, \beta) = \frac{\beta-\alpha}{270} h^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [\alpha, \beta], \quad f^{(4)} \in C[\alpha, \beta]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = Q_h^3(\alpha, \beta) + E_h^3(\alpha, \beta) & \text{mit} \\ Q_h^3(\alpha, \beta) = \frac{h}{9} \sum_{j=0}^{N-1} \left(5f\left(\alpha + (2j+1)h - \sqrt{\frac{3}{5}}h\right) + 8f\left(\alpha + (2j+1)h\right) + 5f\left(\alpha + (2j+1)h + \sqrt{\frac{3}{5}}h\right) \right), \\ E_h^3(\alpha, \beta) = \frac{\beta-\alpha}{31500} h^6 f^{(6)}(\eta), \quad \eta \in [\alpha, \beta], \quad f^{(6)} \in C[\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Die Gaußschen Formeln Q^{n+1} sind trotz ihrer optimalen Eigenschaften in bezug auf die Fehlerordnung für das Rechnen ohne elektronische Rechenhilfsmittel ungeeignet, da die Nullstellen der Legendreschen Polynome als Stützstellen und auch die Gewichte unglatte Zahlen sind. Da bei Verwendung einer Gaußschen Formel gegenüber einer Newton-Cotes-Formel gleicher Fehlerordnung nur etwa die Hälfte an Ordinaten benötigt werden, spart man etwa die Hälfte an Rechenzeit ein.

LITERATUR zu 9.4: [2] Bd.1, 3.5; [4] 2.10; [7], 4.6; [14], 12; [19], 7.3; [20], 9.4; [29] II, 9.5; [32], H § 7.9; [35], 3.5; [37]; [38], 4.3; [41], III § 6 V; [43], § 16.6; [45], § 13.6; [67] I, 3.2.3.

9.5 DAS VERFAHREN VON ROMBERG.

Das Verfahren von Romberg beruht auf der Approximation des Integrals $I(f; \alpha, \beta)$ durch die Sehnentrapezformel. Durch fortgesetzte Halbierung der Schrittweite und geeignete Linearkombination zugehöriger Approximationen für das Integral werden Quadraturformeln von höherer Fehlerordnung erzeugt (s. [20], S.281 ff.).

Man zerlegt $[\alpha, \beta]$ zunächst in N_0 Teilintervalle der Länge $h_0 = \frac{\beta-\alpha}{N_0}$ und setzt

$$N_j = 2^j N_0, \quad h_j = \frac{\beta-\alpha}{2^j N_0} = \frac{h_0}{2^j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

was der fortgesetzten Halbierung der Schrittweiten entspricht.

Das Integral von f über $[\alpha, \beta]$ erhält man in der Darstellung

$$I(f; \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = L_j^{(k)}(f) + O(h_j^{2(k+1)}),$$

dabei ist $L_j^{(k)}(f)$ die Quadraturformel der Fehlerordnung $O(h_j^{2(k+1)})$.

Die Rechnung wird *zeilenweise* nach dem folgenden Schema durchgeführt:

RECHENSHEMA 9.1 (Verfahren von Romberg).

$L_j^{(0)} = Q_{h_j}^{ST}(\alpha, \beta)$	$L_j^{(1)} = \frac{4L_{j+1}^{(0)} - L_j^{(0)}}{3}$	$L_j^{(2)} = \frac{16L_{j+1}^{(1)} - L_j^{(1)}}{15}$...	$L_j^{(m-1)}$	$L_j^{(m)}$
$L_0^{(0)}$	$L_0^{(1)}$				
$L_1^{(0)}$	$L_1^{(1)}$				
$L_2^{(0)}$	$L_2^{(1)}$	$L_0^{(2)}$			
\vdots	\vdots	\vdots			
$L_{m-1}^{(0)}$	$L_{m-2}^{(1)}$	$L_2^{(2)}$	\dots	$L_0^{(m-1)}$	
$L_m^{(0)}$	$L_{m-1}^{(1)}$	$L_{m-2}^{(2)}$...	$L_1^{(m-1)}$	$L_0^{(m)}$

Dabei können die $L_j^{(0)}$ nach der Formel

$$L_j^{(0)}(f) = Q_{h_j}^{ST}(\alpha, \beta) = \frac{h_j}{2} \left(f(\alpha) + f(\beta) + 2 \sum_{v=1}^{N_j-1} f(\alpha + v h_j) \right)$$

berechnet werden. Besser und schneller ist es, diese Formel nur für $j = 0$ zu verwenden und für $j = 1, 2, 3, \dots$ die sich daraus ergebende Formel

$$L_j^{(0)}(f) = \frac{1}{2} L_{j-1}^{(0)} + h_j \{ f(\alpha + h_j) + f(\alpha + 3h_j) + \dots + f(\beta - h_j) \} = \frac{1}{2} L_{j-1}^{(0)} + h_j \sum_{k=0}^{N_j-1-j} f(\alpha + (2k+1)h_j)$$

Die $L_j^{(k)}$ für $k \geq 1$ und $j=0, 1, 2, \dots$ werden nach der Formel

$$L_j^{(k)}(f) = \frac{1}{4^k - 1} \left(4^k L_{j+1}^{(k-1)}(f) - L_j^{(k-1)}(f) \right)$$

berechnet. Das Schema wird solange fortgesetzt, bis zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ gilt: $|L_0^{(m)} - L_1^{(m-1)}| < \epsilon$. Dann wird $L_0^{(m)}(f)$ als bester erreichter Näherungswert für $I(f; \alpha, \beta)$ verwendet; es gilt mit $m \leq n-1$ die Romberg-Regel

$$I(f; \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = L_0^{(m)}(f) + E^R_m(f; \alpha, \beta) \quad \text{mit}$$

$$E^R_m(f; \alpha, \beta) = (-1)^{m+1} \frac{\beta - \alpha}{2^{m(m+1)}} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} h_0^{2m+2} f^{(2m+2)}(\xi), \quad \xi \in [\alpha, \beta].$$

Unter der Voraussetzung $f \in C^{2n}[\alpha, \beta]$ konvergieren die Spalten $L_j^{(k)}$ des Schemas für jedes feste k und $j \rightarrow \infty$ linear gegen $I(f; \alpha, \beta)$. Ist f analytisch, so konvergieren die absteigenden Diagonalen des Schemas $L_j^{(k)}$ für festes j und $k \rightarrow \infty$ superlinear gegen $I(f; \alpha, \beta)$. Es läßt sich zeigen, daß sowohl die Spalten als auch die absteigenden Diagonalen $L_j^{(k)}$ gegen $I(f; \alpha, \beta)$ konvergieren, wenn nur die Stetigkeit von f vorausgesetzt wird.

BEMERKUNG 9.5. Das Verfahren von Romberg ist besonders für DVA geeignet. Es ist sicher günstiger in der Fortpflanzung von Rundungsfehlern als Quadraturformeln, die bezüglich der Fehlerordnung einer k -ten Linearkombination $L_j^{(k)}$ des Romberg-Verfahrens entsprechen würden, da dem Romberg-Verfahren die Sehnentrapezformel zugrunde liegt, die mit gleichen Gewichten arbeitet. Die Ausführungen in Bemerkung 8.1 gelten auch hier.

LITERATUR zu 9.5: [4], 2.7; [7], 4.4; [14], 11; [18], 13.7; [20], 9.5; [25], 8.4; [26], 6.5; [32], H § 7.2; [34], 6.2.2; [35], 3.2-4; [38], 4.2.2; [41], III § 8; [87], 8.3.

9.6 KONVERGENZ DER QUADRATURFORMELN.

SATZ 9.1. Eine Quadraturformel der Form

$$(9.11) \quad Q^{(n)}(f; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}), \quad x_k^{(n)} \in [\alpha, \beta],$$

konvergiert für $n \rightarrow \infty$ und für jede in $[\alpha, \beta]$ stetige Funktion f genau dann gegen $I(f; \alpha, \beta)$, d.h.

$$(9.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q^{(n)}(f; \alpha, \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = I(f; \alpha, \beta),$$

wenn

- (9.12) für jedes Polynom $f \in P$ der Form (6.9) erfüllt ist und
- eine Konstante K existiert, so daß $\sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| < K$ für jedes n gilt.

Wendet man (9.11) auf $f(x) = 1$ an, so erhält man mit 1.

$$Q^{(n)}(1; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} = \int_{\alpha}^{\beta} dx = \beta - \alpha.$$

Sind alle Gewichte $A_k^{(n)} > 0$, so ist 2. sicher erfüllt; treten dagegen negative Gewichte auf, so kann $|A_0^{(n)}| + |A_1^{(n)}| + \dots + |A_n^{(n)}|$ bei genügend großem n beliebig groß werden.

LITERATUR zu 9.6: [2] Bd.I, 3.7; [19], 7.5.2; [20], 9.6; [41], III § 7. Ergänzende Literatur zu Kap. 9: [80 a]; [81 b]; [86 a], § 6; [91 a], 8; [92b], Bd. 2, 13.