

MASTER

Het onderzoek naar enkele verschijnselen welke optreden bij smeltveiligheden

Vermij, L.

Award date:
1965

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK

Groep HOGE SPANNINGEN EN HOGE STROMEN

HET ONDERZOEK NAAR ENKELE VERSCHIJNSELEN
WELKE OPTREDEN BIJ SMELTVEILIGHEDEN.

L. Vermij.

EH - 65 - A1.

Afstudeeronderzoek verricht
onder leiding van
Prof.dr. D.Th.J. ter Horst.

Inhoudsopgave.

	<u>blz.</u>
Hfdst. 1. Inleiding.	1.1.
2. De verwarming van metalen draden door een doorgaande elektrische stroom.	2.1.
Theoretische beschouwingen.	
2.1. Opstelling van de energiebalans.	2.1.
2.2. Oplossing van de energiebalans voor de stationaire toestand.	2.8.
2.3. Oplossing van de energiebalans voor het geval van adiabatische verwarming.	2.21.
3. Meting van de stationaire temperatuursverdeling langs zilveren draden die door een doorgaande elektrische stroom worden verhit.	3.1.
3.1. Metingen aan in lucht uitgespannen draden.	3.1.
3.2. Berekeningen en vergelijkingen met de theorie.	3.23.
3.3. De invloed van gaatjes in een zilverband op de temperatuursverdeling.	3.50
4. Meting van de stationaire temperatuursverdeling van ronde zilverdraden in zand.	4.1.
4.1. De meetmethode.	4.1.
4.2. Meetresultaten en berekeningen.	4.5.
4.3. Vergelijking met de theorie.	4.13.
5. De verwarming van een smeltdraad door een sinusvormige wisselstroom.	5.1.
5.1. Metingen in een laagspanningscircuit.	5.1.
5.2. Metingen in een hoogspanningscircuit.	5.11.
6. Het doorsmelten van de smeltdraad.	6.1.
6.1. Beschrijving van een aantal natuurkundige verschijnselen.	6.1.
6.2. Experimentele resultaten.	6.4.
7. Geraadpleegde literatuur.	7.1.

Aanhangsel I.

blz.

I.1.

Het verband tussen de stralingsenergie die door een ronde metalen draad in één richting wordt uitgezonden, en de temperatuur van die draad.

Met literatuuroverzicht op blz. I.19.

Aanhangsel II.

II.1.

Enkele speciale kwesties en mogelijkheden voor verder onderzoek.

II.1. Meting van de lichtboogenergie met behulp van een hallmultiplicator.

II.1.

II.2. Invloed van het skineffekt in metalen draden.

II.7.

1. Inleiding.

De natuurkundige verschijnselen welke optreden in een smeltveiligheid, zijn in hoofdzaak in twee belangrijke hoofdstukken onder te brengen:

- 1.1. De verschijnselen welke optreden tot aan het moment van smelten van de smeltdraad. Deze zijn in hoofdzaak van warmtetechnische aard.
- 1.2. De verschijnselen welke optreden vanaf het moment van smelten. Dit is een complex van verschijnselen welke van geheel andere aard zijn als de onder 1.1 genoemde verschijnselen.

Vragen omtrent nominaalstroom, minimum smeltstroom e.d. worden beheerst door de onder 1.1 genoemde verschijnselen, terwijl het afschakelvermogen, afschakeltijd, de boogenergie, etc. beheerst worden door de onder 1.2 genoemde verschijnselen.

De verschijnselen genoemd onder de punten 1.1 en 1.2 hebben echter, alhoewel ze van totaal verschillende aard zijn, een zelfde oorzaak, nl. een door de smeltdraad vloeiende elektrische stroom. De grootte van deze stroom is alleen bepalend voor de vraag of alleen warmtetechnische verschijnselen zich zullen voordoen, of dat zich zowel de verschijnselen genoemd onder 1.1 als die genoemd onder 1.2 zich voor zullen doen.

In eerste instantie interesseerde mij de vraag naar de nominaalstroom en de minimum smeltstroom. Dit is, zoals reeds opgemerkt, in hoofdzaak een warmtetechnisch probleem.

De minimum smeltstroom immers is die stroom, waarbij de smeltdraad na oneindig lange tijd smelt. Hier speelt dus de temperatuur van de draad de hoofdrol. Deze temperatuur wordt echter bepaald, behalve door de hoeveelheid toegevoerde energie, d.w.z. door de grootte van de stroom, door de gehele configuratie van de smeltveiligheid. Om de temperatuur van de draad te kunnen bepalen dient de vraag beantwoord te worden waar en op welke wijze de warmte welke in de smeltdraad wordt geproduceerd, aan de omgeving kan worden afgestaan. Of, met andere woorden, de temperatuur van de smeltdraad wordt bepaald door het evenwicht tussen toegevoerde en afgevoerde energie aan en van de smeltdraad.

Nu is het spreken over de temperatuur van de smeltdraad niet erg zinvol, aangezien de smeltdraad, als gevolg van axiale warmte-afgifte, bij een doorgaande elektrische stroom niet over de gehele lengte dezelfde temperatuur aan zal nemen. De temperatuur is dus een functie van de coördinaat in axiale richting van de draad.

Deze temperatuursverdeling langs de draad is zowel theoretisch (hoofdstuk 2) als experimenteel (hoofdstukken 3 en 4) onderzocht. Hierboven zijn reeds naast elkaar genoemd de nominaalstroom en de minimum smeltstroom. Deze beide stroomwaarden zijn niet gelijk. De minimum smeltstroom is hierboven reeds omschreven. Betreffende de nominaalstroom vinden we in de verschillende voorschriften omschrijvingen die alle ongeveer op hetzelfde neerkomen^{*)}. Aan de hand van deze voorschriften kunnen we definiëren: De nominaalstroom is die stroom waarmee de smeltveiligheid, geplaatst in zijn houder, continu belast kan worden zonder dat zijn gedrag op enigerlei wijze verandert en zonder dat maximaal voorgeschreven temperatuursverhogingen aan enig deel van de smeltveiligheid of de houder, overschreden worden. De nominaalstroom van een bepaalde smeltveiligheid wordt aangegeven door de fabrikant.

Verder geeft het voorschrift VDE 0635/3.63 in par. 16 aan dat smeltveiligheden van een bepaalde nominaalstroom I_n een stroom welke 30 - 50% groter is dan I_n gedurende een aantal voorgeschreven uren moet kunnen voeren zonder af te schakelen.

De nominaalstroom is dus kleiner dan de minimum smeltstroom. Hoeveel kleiner hangt af van de constructie van de smeltband en van de gehele smeltveiligheid.

Bij nominaalstromen en minimum smeltstromen gaat het om stationaire temperatuursverdelingen, bij stromen die groter zijn dan de minimum smeltstroom speelt het temperatuursverloop als functie van de tijd een belangrijke rol. Immers, dit temperatuursverloop bepaalt in hoofdzaak de z.g. smeltkarakteristiek van de smeltveiligheid. Nu wordt in veel theoretische beschouwingen er van uitgegaan, dat de verwarming van de smeltband bij grote en zeer grote stromen een adiabatisch proces is.

^{*)} Zie de voorschriften VDE 0635/3.63 par.2;
B.S. 2692:1956, Section 1.3.
B.S. 88:1952, Section 2.

Aan deze adiabatisch verwarming worden in hoofdstuk 2 enige theoretische beschouwingen gewijd. In hoofdstuk 5 zijn een aantal experimentele resultaten vermeld, welke tot doel hebben na te gaan in hoeverre een smeltdraad onder verschillende omstandigheden beschouwd kan worden als een adiabatisch geheel.

De natuurkundige verschijnselen welke optreden tijdens en na het smelten van een smeltdraad zijn zowel theoretisch als experimenteel het moeilijkst grijpbaar. Vooral het gedrag van een smeltveiligheid bij stromen van de grootte-orde tot 10x de nominaalstroom (het z.g. overstroomgebied) is in veel opzichten nog niet begrepen. In hoofdstuk 6 worden de resultaten van een aantal experimenten in dit overstroomgebied vermeld. Tevens worden in ditzelfde hoofdstuk een aantal natuurkundige verschijnselen besproken die zich bij het smelten van de smeltdraad voordoen.

De in dit hoofdstuk vermelde experimenten en ontwikkelde inzichten resulteren nauwelijks in een beter begrijpen van het gedrag van een smeltdraad tijdens en direct na het smelten, dit zou een veel grondiger en langduriger onderzoek vergen.

2. De verwarming van metalen draden door een doorgaande elektrische stroom.

Theoretische beschouwingen.

We zullen thans trachten met behulp van de warmteleer een uitdrukking te vinden voor de stationaire temperatuursverdeling langs een metalen draad, welke wordt verhit door een doorgaande elektrische stroom. Voorts zullen in het volgende enkele betrekkingen worden afgeleid voor het temperatuursverloop als functie van de tijd bij snelle, adiabatistische verwarming van een geleider door elektrische stroom.

2.1. Opstelling van de energiebalans.

We veronderstellen een cilindrische geleider met cirkelvormige doorsnede. Door de geleider loopt een elektrische stroom ten grootte I .

Tengevolge van deze stroom zal de draad worden verhit, dat wil zeggen, er wordt energie aan de draad toegevoerd.

Bij de opstelling van de energiebalans gaan we uit van de volgende veronderstellingen:

- Aan de omgeving wordt uitsluitend warmte afgegeven als gevolg van conductie, en wel:
 - a) als gevolg van conductie in radiale richting, dus warmteafgifte aan het medium dat de draad omgeeft,
 - b) als gevolg van conductie in axiale richting, dus warmteafgifte aan de uiteinden van de draad.
- Warmteafgifte tengevolge van convectie en/of straling laten we buiten beschouwing.
- De temperatuur heeft over de gehele draaddoorsnede dezelfde waarde. In de draad bestaat dus in radiale richting geen temperatuursgradiënt. We zullen in het vervolg nog aantonen dat deze veronderstelling gerechtvaardigd is.

Beschouw nu een metalen draad waarvoor de volgende grootheden gelden:

2.2.

ρ : soortelijke weerstand $[\Omega m]$

γ : soortelijke massa $[kg m^{-3}]$

λ_1 : warmtegeleidingscoëfficiënt $[W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}]$

c : soortelijke warmte

(voor vaste stoffen geldt met goede benadering: $c_p = c_v = c$)

r_1 : straal van de ronde draad

Deze draad is opgesteld in een medium met warmtegeleidingscoëfficiënt $\lambda_2 [W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}]$

Van deze draad beschouwen we een stukje ten lengte dx , zie fig. 2.1.1., blz. 2.3.

Door grensvalk I stroomt in de tijd dt een warmtehoeveelheid naar binnen, groot:

$$H_x(x) \cdot \pi r_1^2 \cdot dt$$

Hierin is H de warmtestroomdichtheid $[W.m^{-2}]$

Door grensvalk II stroomt in de tijd dt een warmtehoeveelheid naar buiten, groot:

$$H_x(x+dx) \cdot \pi r_1^2 \cdot dt$$

In radiale richting wordt aan het oppervalk van het beschouwde draadelement in de tijd dt door geleiding afgegeven een hoeveelheid warmte:

$$H_r(r) \cdot 2\pi r_1 dx \cdot dt.$$

In het stukje dx wordt in de tijd dt tengevolge van de stroom I een warmte geproduceerd:

$$I^2 dR dt.$$

2.4.

Hierin is dR de weerstand van het beschouwde draadelementje, in de richting van I , dus in axiale richting gemeten.

Voor dR kunnen we schrijven:

$$dR = \frac{\rho dx}{\pi r_1^2}$$

De totale netto warmtetoevoer aan het draadelementje bedraagt dus:

$$\begin{aligned} & [H_x(x) - H_x(x+dx)] \cdot \pi r_1^2 dt - H_{r_1}(r) \cdot 2\pi r_1 \cdot dx dt + I^2 \frac{\rho}{\pi r_1^2} dx \cdot dt = \\ & = - \frac{\partial H}{\partial x} dx \cdot \pi r_1^2 dt - H_{r_1}(r) \cdot 2\pi r_1 dx dt + I^2 \frac{\rho}{\pi r_1^2} dx \cdot dt. \end{aligned}$$

Deze warmtetoevoer zorgt voor een temperatuursverhoging van de draad, groot:

$$\pi r_1^2 \cdot \gamma dx \cdot c dT$$

Hierin is T de draadtemperatuur.

Voor de warmtestroomdichtheid H_x kunnen we opschrijven:

$$H_x = -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}$$

Hiermede wordt de energiebalans:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dt \cdot \pi r_1^2 - H_{r_1}(r) \cdot 2\pi r_1 \cdot dx dt + I^2 \frac{\rho}{\pi r_1^2} dx dt = \pi r_1^2 \gamma c dx dt.$$

en deze vergelijking is om te werken tot:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2}{r_1} H_{r_1}(r) + \int^2 \rho = \gamma c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

(2.1.1.)

2.3.

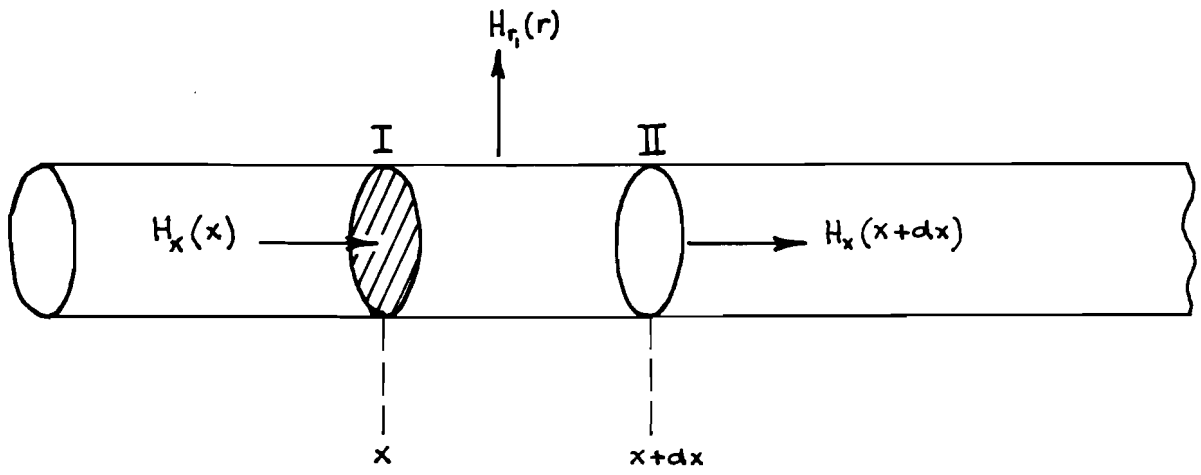


Fig. 2.1.1

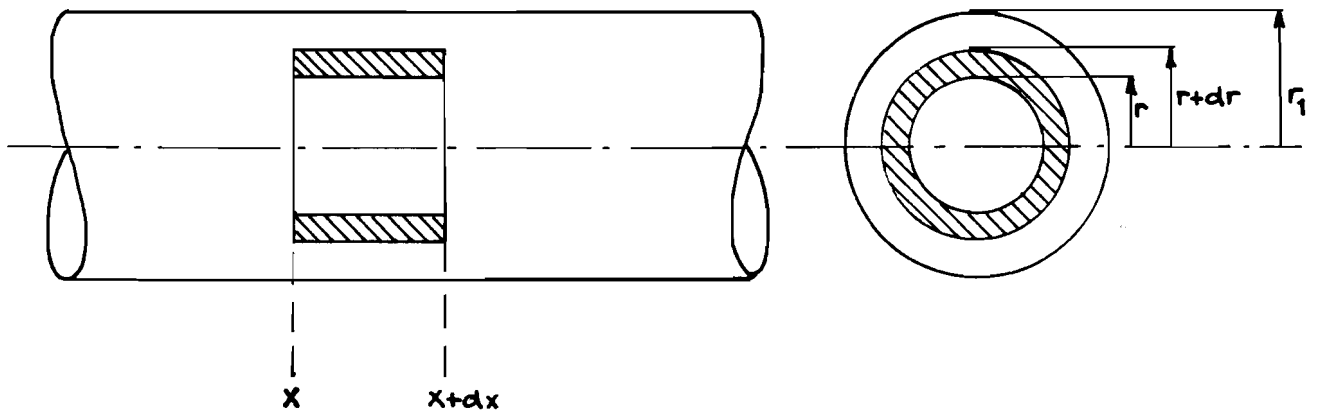


Fig. 2.1.2

Hierin is J de stroomdichtheid volgens:

$$J = \frac{I}{\pi r^2} \quad [\text{A.m}^{-2}].$$

Vergelijking (2.1.1) stelt de energiebalans voor zolang we alleen de warmtegeleiding voor het verlies verantwoordelijk stellen. In de literatuur wordt deze vergelijking veelal aangeduid als de Kirchhoff-betrekking.

We zullen thans aantonen dat we mogen aannemen, dat in de draad in radiale richting geen temperatuursgradiënt bestaat. We beschouwen daartoe het draadelementje zoals geschetst in fig. 2.1.2, blz.23 Dit volume-element bevindt zich tussen de axiale coördinaten x en $x+dx$. De straal van het volume-element bevindt zich tussen r en $r+dr$. We veronderstellen, dat in dit element in axiale richting geen temperatuursverschillen bestaan. In radiale richting krijgt dit volume-element in de tijd dt een hoeveelheid warmte toegevoerd ten bedrage van:

$$H_r(r) \cdot 2\pi r \, dx \, dt \equiv \phi(r)$$

Het volume-element geeft in radiale richting door de wand $r+dr$ gedurende de tijd dt een hoeveelheid warmte af ten bedrage van:

$$\phi(r+dr) = \phi(r) + \frac{\partial \phi}{\partial r} dr$$

De netto hoeveelheid warmte die in radiale richting aan het volume-element wordt toegevoerd, bedraagt dus:

$$\begin{aligned} \phi(r+dr) - \phi(r) &= \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = \\ &= 2\pi \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) \, dx \, dr \, dt. \end{aligned}$$

Algemeen geldt: $H_r = -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial r}$

zodat geldt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} dr = -2\pi \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_1 r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dx dt dr.$$

Tengevolge van de stroom I wordt in het volume-element een hoeveelheid warmte geproduceerd ten bedrage van:

$$\rho j^2 \cdot 2\pi r \cdot dr dx dt$$

De totaal toegevoerde warmte veroorzaakt een temperatuurstijging van het volume-element. Deze temperatuurstijging volgt uit:

$$2\pi r \cdot \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dr dx dt.$$

De energiebalans voor het beschouwde volume-elementje onder de gemaakte veronderstellingen luidt dus:

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_1 r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + r \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = j^2 \rho r. \quad (2.1.2.)$$

We veronderstellen nu dat we de stationaire toestand hebben bereikt. Dan gaat vergelijking (2.1.2) over in:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\lambda_1 r \frac{dT}{dr} \right) = j^2 \rho$$

Uitwerken levert:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\rho}{\lambda_1} j^2 = 0. \quad (2.1.3.)$$

We weten dat voor metalen de wet van Wiedemann en Franz geldt:

$$\lambda_1 \rho = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^2 T. \quad (2.1.4.)$$

Hierin is: k : de konstante van Boltzman
 ε : de lading van een elektron.

Met behulp van (2.1.4) gaat (2.1.3) over in:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + a^2 T = 0$$

$$\text{met } a^2 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{k}{\varepsilon} \cdot \frac{J}{\lambda_1} \right)^2 \quad (2.1.5.)$$

Met $x = ar$ volgt dan:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dT}{dx} + T = 0 \quad (2.1.6.)$$

De oplossing van (2.1.6) is een Bessel-functie van de nulde orde:

$$T = J_0(ra) \quad (2.1.7.)$$

De grootte-orde van a vinden we uit:

$$a = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{k}{\varepsilon} \cdot \frac{J}{\lambda_1} = \frac{\pi \cdot 1,38}{\sqrt{3} \cdot 1,60} \cdot 10^{-4} \cdot \frac{J}{450} = 0,35 J \cdot 10^{-6} [\text{m}^{-1}].$$

Stel $J = 10^8 \text{ Am}^{-2}$.

Dus $a = 35 \text{ m}^{-1}$.

r is van de orde van 0,2 mm, dus:

$$\alpha r = 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 35 = 7 \cdot 10^{-3} \ll 1$$

Dus voor de oplossing (2.1.7) kunnen we schrijven:

$$T = T_0 \left[1 - \frac{\alpha^2 r^2}{4} \right] \quad (2.1.8.)$$

Uit deze vergelijking kunnen we besluiten, dat de geleider over de gehele cirkelvormige doorsnede een vrijwel konstante temperatuur zal hebben.

2.2. Oplossing van de energiebalans voor de stationaire toestand.

Na oneindig lange tijd geldt:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

zodat vergelijking (2.1.1) dan overgaat in:

$$\lambda_1 \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2}{r_1} H_r(r) + \int_0^2 \rho = 0. \quad (2.2.1.)$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking geeft de stationaire temperatuursverdeling $T = T(x)$, dus de temperatuursverdeling indien er een stationair evenwicht is tussen toegevoerde en geproduceerde warmte enerzijds en afgevoerde warmte (radiaal en axiaal) anderzijds.

In vergelijking (2.2.1) zit nog de onbekende term $H_{r_1}(r)$. We zullen trachten voor deze term een uitdrukking te vinden en we gaan daarbij uit van het feit, dat in het stationaire geval algemeen geldt:

$$\lambda_2 \frac{\partial T(r, x)}{\partial r} = - H(r). \quad (2.2.2.)$$

De vergelijkingen (2.2.1) en (2.2.2) kunnen opgevat worden als twee simultane differentiaalvergelijkingen.

Vergelijking (2.2.2) geldt algemeen, we zijn echter alleen geïnteresseerd in de warmtestroomdichtheid H ter plaatse $r = r_1$, welke volgens (2.2.2) dus behoort bij een temperatuursgradiënt $\frac{\delta T}{\delta r}$ ter plaatse $r = r_1$.

We beschouwen een klein stukje draad ter lengte dx met zijn omgeving. We nemen aan dat in de stationaire toestand de temperatuur van dit stukje draad overal dezelfde is. Voorts nemen we aan dat zich in de omgeving van de draad ergens een cylinder met straal $r = r_2$ bevindt waar geldt $T = T_0$ (T_0 is de temperatuur van de niet verwarmde omgeving). Zie fig. 2.2.1.

De door de draad in radiale richting afgegeven warmte, t.w.:

$$H_r(r) \cdot 2\pi r_1 \cdot dx \cdot dt$$

zal slechts de in fig. 2.2.1 geschetste schijf met straal $r = r_2$ verwarmen. Deze laatste veronderstelling is uiteraard slechts gerechtvaardigd indien de temperatuursgradiënt in de x-richting niet al te groot is.

Met de hierboven gemaakte veronderstellingen kunnen we uit vergelijking (2.2.2) de in radiale richting afgevoerde warmte ter plaatse $r = r_1$ berekenen.

Uit (2.2.2) volgt door integratie:

$$T(r) = - \frac{H(r)}{\lambda_2} r + K$$

Waarin K de integratiekonstante is.

K kan bepaald worden uit de randvoorwaarde:

ter plaatse $r = r_2$ geldt: $T = T_0$.

Dan volgt:

$$T_0 = - \frac{H(r)}{\lambda_2} r_2 + K$$

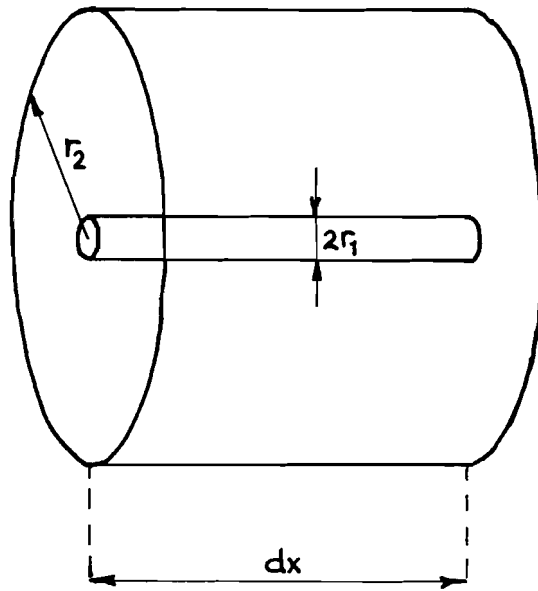


Fig. 2.2.1

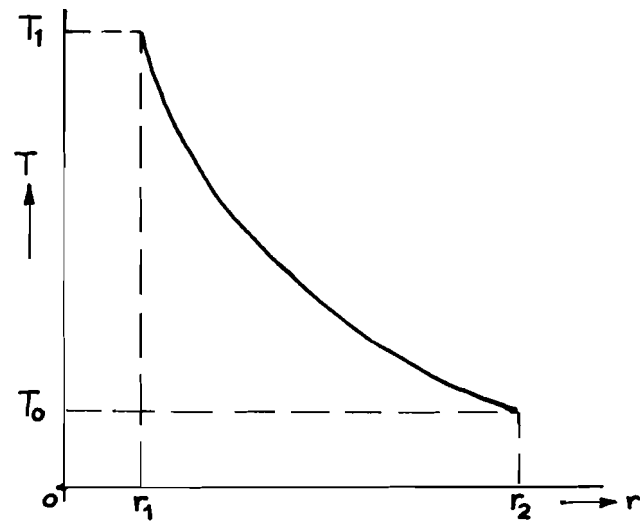


Fig. 2.2.2

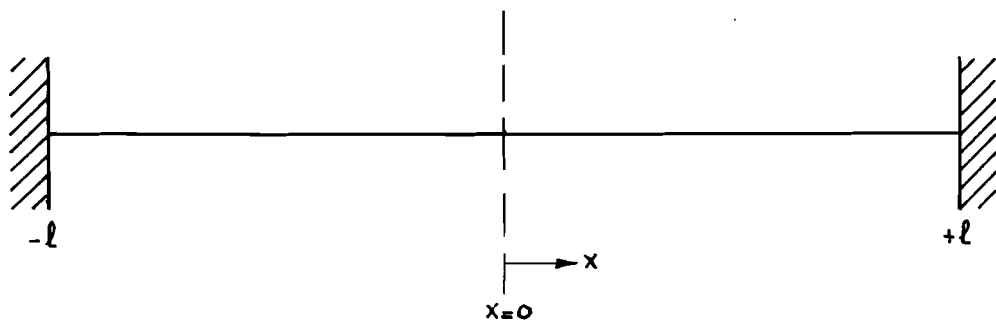


Fig. 2.2.3.

waaruit volgt:

$$K = T_0 + \frac{H(r)}{\lambda_2} \cdot r_2$$

Dit levert:

$$T = T_0 + \frac{H(r)}{\lambda_2} (r_2 - r)$$

Ter plaatse $r = r_1$ geldt: $T = T_1$ (draadtemperatuur).

Dus:

$$T_1 = T_0 + \frac{H_{r_1}}{\lambda_2} (r_2 - r_1)$$

Hieruit volgt dan:

$$H_{r_1} = \frac{\lambda_2 (T_1 - T_0)}{r_2 - r_1}$$

De gevonden uitdrukking voor H_{r_1} is in wezen niets anders dan de temperatuursgradiënt in de r -richting, ter plaatse $r = r_1$. De fysische betekenis van r_2 blijkt uit fig. 2.2.2.

Het komt erop neer, dat het temperatuurverval in de r -richting lineair is verondersteld.

De uitdrukking voor H_{r_1} ingevuld in (2.2.1) levert:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{2\lambda_2 (T_1 - T_0)}{r_1 (r_2 - r_1)} + \int^2 \rho = 0$$

De grootheid ρ is temperatuursafhankelijk.

We nemen voorlopig aan, dat deze temperatuursafhankelijkheid gegeven wordt door de betrekking:

$$\rho = \rho_0 (1 + \beta T)$$

Hierin is:

$$\rho_0 \text{ de specifieke weerstand bij } T = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \quad [\Omega\text{m}]$$

$$\beta \text{ de temperatuurscoëfficiënt van de weerstand} \quad [^\circ\text{C}^{-1}]$$

We veronderstellen, dat β onafhankelijk van de temperatuur is.

Met deze uitdrukking voor ρ wordt de D.V.:

$$\lambda_1 \frac{d^2 T_1}{dx^2} - \frac{2\lambda_2 (T_1 - T_0)}{r_1 (r_2 - r_1)} + j^2 \rho_0 (1 + \beta T_1) = 0$$

of:

$$\lambda_1 \frac{d^2 T_1}{dx^2} + \left[j^2 \beta \rho_0 - \frac{2\lambda_2}{r_1 (r_2 - r_1)} \right] T_1 = - \left[j^2 \rho_0 + \frac{2\lambda_2}{r_1 (r_2 - r_1)} T_0 \right]$$

We noemen:

$$G = \frac{2\lambda_2}{r_1 (r_2 - r_1)}$$

Dan volgt:

$$\lambda_1 \frac{d^2 T_1}{dx^2} + [j^2 \beta \rho_0 - G] T_1 = - [j^2 \rho_0 + G T_0] \quad (2.2.3.)$$

Vergelijking (2.2.3) is een lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde, welke dus eenvoudig kan worden opgelost.

We schrijven:

$$\lambda_1 \frac{d^2 T_1}{dx^2} + a T_1 = - b. \quad (2.2.4.)$$

met:

$$a = J^2 \beta \rho_0 - G$$
$$b = J^2 \rho_0 + G T_0$$

Vergelijking (2.2.4) heeft als particuliere oplossing:

$$T_1 = - \frac{b}{a}$$

We dienen dus nog de homogene vergelijking:

$$\lambda_1 \frac{d^2 T_1}{dx^2} + a T_1 = 0$$

op te lossen.

Het getal b is altijd groter dan nul.

Het getal a echter kan in principe zowel groter als kleiner dan nul zijn. In een volgende paragraaf zal echter getoond worden dat het getal a in vrijwel alle praktische gevallen kleiner dan nul is.

We voeren daarom in:

$$a' = -a = G - J^2 \beta \rho_0 \quad (2.2.4a.)$$

en we lossen op:

$$\lambda_1 \frac{d^2 T_1}{dx^2} - a' T_1 = 0$$

Hiervan is de karakteristieke vergelijking:

$$\lambda_1 p^2 = a'$$

Dus:

$$p = \pm \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}$$

De algemene oplossing luidt dus:

$$T_1 = A e^{x\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} + B e^{-x\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} + \frac{b}{a'}$$

Randvoorwaarden:

We denken ons de draad ingeklemd ter plaatse $x = 1$ en $x = -1$. (Zie fig. 2.2.3.)

We hadden verondersteld, dat de metalen blokken waarin de draad is geklemd een warmtecapaciteit hebben die zeer veel groter is dan die van de draad. Dit betekent, dat de draad aan de uiteinden op kamertemperatuur T_0 blijft.

Dus: Bij $x = \pm 1$ geldt: $T_1 = T_0$.

Uit symmetrie-overwegingen volgt voorts:

$$\text{Bij } x = 0 \quad \text{geldt: } \frac{dT_1}{dx} = 0$$

Uit de laatste randvoorwaarde volgt: $A = B$.

Uit de eerste randvoorwaarde volgt:

$$T_0 = A \left[e^{\frac{l\sqrt{a'}}{\lambda_1}} + e^{-\frac{l\sqrt{a'}}{\lambda_1}} \right] + \frac{b}{a'}$$

zodat voor A volgt:

$$A = \frac{T_0 - \frac{b}{a'}}{e^{\frac{l\sqrt{a'}}{\lambda_1}} + e^{-\frac{l\sqrt{a'}}{\lambda_1}}}$$

De uiteindelijke oplossing wordt dus:

$$T_1 = \left(T_0 - \frac{b}{a'} \right) \frac{e^{x\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} + e^{-x\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}}}{e^{\frac{l\sqrt{a'}}{\lambda_1}} + e^{-\frac{l\sqrt{a'}}{\lambda_1}}} + \frac{b}{a'}$$

of:

$$T_1 = \left(T_0 - \frac{b}{a'}\right) \frac{\cosh x \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}}{\cosh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} + \frac{b}{a'} \quad (2.2.5a.)$$

Herschreven:

$$T_1 = \frac{b}{a'} \left[1 - \frac{\cosh x \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}}{\cosh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} \right] + T_0 \frac{\cosh x \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}}{\cosh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} \quad (2.2.5b.)$$

De maximale temperatuur T_m treedt op ter plaatse $x = 0$.
Daar geldt:

$$\cosh x \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} = 1$$

Dus:

$$T_m = \frac{b}{a'} \left[1 - \frac{1}{\cosh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} \right] + \frac{T_0}{\cosh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} \quad (2.2.6.)$$

Indien: $l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} \geq 6$, dan geldt: $\cosh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} \geq 200$

zodat in dat geval met goede benadering geldt:

$$T_{\max} = \frac{b}{a'} = \frac{j^2 \rho_0 + \gamma T_0}{\gamma - j^2 \beta \rho_0} \quad (2.2.7.)$$

Vergelijking (2.2.7) is eveneens de uitkomst van de berekening van de draadtemperatuur indien geen rekening wordt gehouden met de warmte-afgifte aan de uiteinden, dus als gesteld wordt $\frac{dT}{dx} = 0$.

Vergelijking (2.2.4) gaat in dat geval nl. over in:

$$aT_1 = -b$$

ofwel: $-a'T_1 = -b$.

Waaruit volgt:

$$T_1 = \frac{b}{a'}$$

De invloed van de uiteinden op de maximale draadtemperatuur wordt dus duidelijk uit vergelijking (2.2.6).

Uit het bovenstaande blijkt, dat het in zijn algemeenheid niet juist is als beweerd wordt, dat de invloed van de uiteinden verwaarloosd mag worden indien de draad maar lang genoeg is. Behalve de lengte l spelen nog een aantal andere parameters een rol, zoals blijkt uit voorwaarde (2.2.8).

$$l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} = l \sqrt{\frac{G - J^2 \beta \rho_0}{\lambda_1}} \geq 6. \quad (2.2.8.)$$

Indien aan deze voorwaarde is voldaan, dan volgt vergelijking (2.2.7). Indien in deze vergelijking T_{\max} de smeltemperatuur T_s van de draad is, dan volgt hieruit een voorwaarde voor de maximale stroomdichtheid J_{\max} , dit is die stroomdichtheid waarbij de draad na oneindig lange tijd smelt. Uit (2.2.7) volgt voor J_{\max} :

$$J_{\max}^2 = \frac{G(T_s - T_0)}{\rho_0(1 + \beta T_s)}$$

of:

$$j_{\max}^2 = \frac{G \Delta T_s}{\rho_s} \quad (2.2.9.)$$

waarin: $\Delta T_s = T_s - T_0$

$$\rho_s = \rho_0 (1 + \beta T_s), \quad \text{dit is de specifieke weerstand bij } T = T_s.$$

Indien G van een bepaalde smeltveiligheid bekend is, dan kan de smeltstroom en dus ook de nominaalstroom van deze smeltveiligheid eenvoudig worden bepaald. Dit geldt ook indien niet aan de voorwaarde van betrekking (2.2.8) is voldaan, zoals uit betrekking (2.2.6) volgt. De berekening van de smeltstroom wordt dan alleen iets gecompliceerder. Het belang van de faktor G is uit het bovenstaande gebleken. We zullen aan deze faktor dus nog een afzonderlijke beschouwing wijden.

Uit de bovenstaande afleiding wordt duidelijk, dat de faktor G als volgt tot stand komt:

$$G = \frac{\lambda_2 \cdot A}{q \cdot P} \quad [W \cdot m^{-3} \cdot ^\circ C^{-1}]$$

Hierin is:

λ_2 : de specifieke warmtegeleiding van het medium waarin de smeltband is uitgespannen.

A : het koelend oppervlak van de smeltband per eenheid van lengte.

q : de doorsnede van de smeltband.

P : deze faktor is in het voorgaande $r_2 - r_1$.

Ze geeft in het algemeen dus de dikte van de laag aan waarover het gehele temperatuurverschil staat. De dikte van deze laag ("grenslaag") zal afhankelijk zijn van de fysische konstanten van het medium waarin de smeltband is uitgespannen.

G wordt dus bepaald door de gehele configuratie van een smeltveiligheid. Men zou daarom aan de faktor G de naam "patroonskonstante" kunnen geven.

Hoe kan G worden bepaald?

Behalve uit de temperatuursverdeling (zie hierover in een volgende paragraaf) kan G worden bepaald uit de weerstandstoename van de smeltband die door een stroom I van bekende grootte wordt doorlopen.

Een stukje draad ter lengte dx heeft een weerstand dR, groot:

$$dR = \frac{\rho(T) dx}{\pi r^2} = \frac{\rho_0 [1 + \beta T(x)] dx}{\pi r^2}$$

De temperatuursverdeling langs de draad zij symmetrisch, dus:

$$R = 2 \cdot \frac{\rho_0}{\pi r^2} \int_0^l [1 + \beta T(x)] dx$$

of:

$$R = 2 \frac{\rho_0}{\pi r^2} l + 2 \frac{\rho_0 \beta}{\pi r^2} \int_0^l T(x) dx$$

zodat:

$$R = R_0 + 2 \frac{\rho_0 \beta}{\pi r^2} \int_0^l T(x) dx$$

Voor T(x) kunnen we betrekking (2.2.5a) invullen.

Dit geeft:

$$\begin{aligned} \int_0^l T(x) dx &= \frac{T_0 - \frac{b}{a'}}{\cosh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} \int_0^l \cosh x \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} dx + \frac{b}{a'} l \\ &= \frac{T_0 - \frac{b}{a'}}{\cosh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_1}{a'}} \cdot \sinh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} + \frac{b}{a'} l \end{aligned}$$

Dus volgt:

$$R = R_0 + 2 \frac{\rho_0 \beta}{\pi r_1^2} \left[\frac{b}{a'} l - \sqrt{\frac{\lambda_1}{a'}} \left(\frac{b}{a'} - T_0 \right) \tanh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} \right] \quad (2.2.10.)$$

met $a' = \gamma - J^2 \beta \rho_0$ en $b = J^2 \rho_0 + \gamma T_0$

De konstanten λ , β , ρ_0 zijn bekend (uit handboeken). De konstanten l en J , alsmede de weerstandstoename $R - R_0$ zijn door meting te bepalen. De enige onbekende in vergelijking (2.2.10) is dus de faktor G . Uit de gemeten weerstandstoename bij bekende stroom I kan dus in principe de patroonskonstante G van een bepaalde smeltveiligheid bepaald worden. Zoals hierboven is betoogd, heeft G een zinvolle fysische betekenis ook voor een smeltband van betrekkelijk willekeurige afmetingen. Ook van een smeltveiligheid van betrekkelijk willekeurige afmetingen moet dus op deze wijze de patroonskonstante G kunnen worden bepaald.

In een artikel van Wintergerst^{*)} wordt voor de smeltstroom I_S afgeleid:

$$I_S^2 = \frac{2 r_1^3 \cdot \pi^2 \cdot \alpha}{\rho_s} \cdot T$$

Hierin is α het warmte-overdrachtsgetal, gedefinieerd volgens:

$$\alpha = \frac{2 r_1 \alpha}{\lambda_2}$$

^{*)} E. Wintergerst: Über die Schmelzzeit von Schmelzsicherungen. Z.f. angew. Physik II-Band, 114 (1950) blz. 167-174.

De grootheid die door Wintergerst χ wordt genoemd wordt in de meeste publicaties aangeduid als het Nusselt-getal Nu , dus $Nu = \chi$.

Voor I_s^2 is dus te schrijven:

$$I_s^2 = \frac{r_1^2 \pi^2 \lambda_2}{\rho_s} \cdot T \cdot Nu.$$

waaruit volgt voor de stroomdichtheid:

$$J_s^2 = \frac{\lambda_2}{r_1^2 \rho_s} \cdot T \cdot Nu. \quad (2.2.11.)$$

T heeft in deze formules de betekenis van ΔT_s uit betrekking (2.2.9). I_s is de smeltstroom, J_s de smeltstroomdichtheid. J_s komt dus overeen met J_{\max} uit de vergelijking (2.2.9). De betrekkingen (2.2.9) en (2.2.11) zijn vergelijkbaar, zodat we kunnen schrijven:

$$\frac{\lambda_2}{r_1^2 \rho_s} \cdot T \cdot Nu = \frac{G}{\rho_s} \cdot T$$

zodat voor G volgt:

$$G = \frac{\lambda_2}{r_1^2} \cdot Nu$$

Hierboven is G gedefinieerd als:

$$G = \frac{2\lambda_2}{r_1(r_2 - r_1)}$$

zodat voor Nu geschreven kan worden:

$$Nu = \frac{2r_1}{r_2 - r_1}$$

Volgens deze betrekking is het Nusselt-getal inderdaad een dimensieloos getal.

Wintergerst heeft zijn formule voor I_g afgeleid voor een draad uitgespannen in een gas (met verwaarlozing van de warmte-afvoer via de uiteinden). In het geval van Wintergerst vindt de warmte-afvoer plaats door vrije convectie. In die context heeft het dus zin om over een getal van Nusselt en over een warmte-overdrachtsgetal α te praten. In ons geval echter, waarbij de warmte-afvoer in radiale richting alleen door geleiding plaats vindt, is het Nusselt-getal, en dus ook α , zonder betekenis.

Toch is er een duidelijke overeenstemming tussen de door Wintergerst in zijn hierbovenaangehaalde artikel afgeleide betrekking en de in het voorgaande genoemde formule voor J_g . De grootheid G vervult dan ongeveer de functie van het warmte-overdrachtsgetal α .

We kunnen ons dan afvragen of het mogelijk is de warmte-afvoer tengevolge van vrije convectie van een in een gas opgestelde draad die door een doorgaande elektrische stroom verwarmd wordt, beschreven kan worden als warmte-afvoer in radiale richting tengevolge van geleiding.

In het volgende zal aangetoond worden, dat deze veronderstelling voor wat betreft draden die horizontaal in lucht zijn uitgespannen, overeenstemt met de experimenten. Hierbij speelt de grootheid G een belangrijke rol.

2.3. Oplossing van de energiebalans voor het geval van adiabatische verwarming.

Indien er geen warmte wordt afgestaan aan het medium dat de smeltdraad omgeeft, geldt:

$$H_r = 0$$

Indien voorts geen warmte-afgifte plaats vindt in axiale richting, geldt:

$$\frac{dT}{dx} = 0$$

zodat de energiebalans voor adiabatische opwarming luidt:

$$J^2 \rho = j_c \frac{dT}{dt}$$

of, met $\rho = \rho_0(1 + \beta T)$:

$$J^2 \rho_0 (1 + \beta T) = \gamma^c \frac{dT}{dt} \quad (2.3.1.)$$

We zullen nu vergelijking (2.3.1) oplossen voor een sprongfunctie in de stroom en voor een sinusvormige stroom.

2.3.1. Sprongfunctie in de stroom.

Een sprongfunctie in I betekent een sprongfunctie in J , zodat (2.3.1) wordt:

$$J^2 u(t) \cdot \rho_0 [1 + \beta T(t)] = \gamma^c \frac{dT(t)}{dt}$$

Deze vergelijking geeft als oplossing:

$$e^{\frac{\beta J^2 \rho_0}{\gamma^c} t} = 1 + \beta T$$

of:

$$T = \frac{1}{\beta} \left[e^{\frac{t}{\tau_1}} - 1 \right] \quad (2.3.2a)$$

met:

$$\tau_1 = \frac{\gamma^c}{\beta J^2 \rho_0} \quad (2.3.2b)$$

τ_1 is hierin dus de tijdconstante die behoort bij adiabatiscbe verwarming.

Uit de metingen (zie onder punt 5) zal blijken, dat het in sommige gevallen zinvol is te veronderstellen, dat niet slechts de draad adiabatiscb verwarmd wordt, doch dat de draad met een

zich om de draad bevindende mantel opgevat kan worden als een adiabatisch geheel.

We zullen daarom ook de tijdconstante berekenen voor de draad plus die mantel. We noemen deze tijdconstante τ_2 . Voor dit geval stellen we de energiebalans opnieuw op, met in achtname van de in de aanhef van dit hoofdstuk gemaakte veronderstellingen.

De straal van de draad zij weer r_1 , de straal van de cilindervormig gedachte mantel zij r_2 .

Voorts zij de spec. massa en de spec. warmte van het draadmateriaal resp. ρ_1 en c_1 en de overeenkomstige grootheden van het mantelmateriaal ρ_2 resp. c_2 .

De energiebalans voor een klein deeltje ter lengte dx , waardoor een stroom I loopt, luidt dan:

$$I^2 \frac{\rho dx}{\pi r_1^2} dt = \left[\pi r_1^2 \rho_1 c_1 + \pi (r_2^2 - r_1^2) \rho_2 c_2 \right] dx dT$$

Invoeren van de stroomdichtheid $j = \frac{I}{\pi r_1^2}$ en van de betrekking $\rho = \rho_0(1 + \beta T)$ levert dan:

$$j^2 \rho_0 (1 + \beta T) = \left(c_1 \rho_1 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2} c_2 \rho_2 \right) \frac{dT}{dt} \quad (2.3.3.)$$

met als oplossing:

$$T = \frac{1}{\beta} \left(e^{\frac{t}{\tau_2}} - 1 \right) \quad (2.3.4a.)$$

waarin:

$$\tau_2 = \frac{c_1 \rho_1 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2} c_2 \rho_2}{j^2 \rho_0 \beta} \quad (2.3.4b.)$$

Vergelijking (2.3.4b) is nog om te werken tot:

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2} \cdot \frac{c_2 \gamma_2}{\hat{j}^2 \beta \rho_0}$$

of:

$$\tau_2 = \tau_1 \left(1 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2} \cdot \frac{c_2 \gamma_2}{c_1 \gamma_1} \right) \quad (2.3.4c.)$$

2.3.2. Sinusvormige stroom.

De stroom door de draad, en dus de stroomdichtheid zij van de gedaante:

$$j = \hat{j} \sin \omega t.$$

Betrekking (2.3.1) wordt hiermee:

$$\hat{j}^2 \sin^2 \omega t \cdot \rho_0 (1 + \beta T) = \gamma_1 c_1 \frac{dT}{dt}$$

of:

$$\frac{\rho_0}{\gamma_1 c_1} \cdot \hat{j}^2 \sin^2 \omega t \, dt = \frac{dT}{1 + \beta T}$$

Hieruit volgt door integratie tussen de grenzen 0 en t :

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{\rho_0}{\gamma_1 c_1} \cdot \hat{j}^2 \left[\frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right] = \frac{1}{\beta} \lg (1 + \beta T)$$

waaruit dan volgt:

$$T = \frac{1}{\beta} \left[e^{\alpha \beta} - 1 \right] \quad (2.3.5a.)$$

met:

$$\alpha = \frac{\hat{\beta}_0 \hat{I}^2}{2\omega \gamma_1 c_1} \left[\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right] \quad (2.3.5b.)$$

Voor gegeven \hat{I} en ω is de kromme $T = T(t)$ nu te berekenen.
Er zitten in deze kromme buigpunten ter plaatse

$$\omega t = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Dit blijkt als volgt:

We maken het differentiaalquotient $\frac{dT}{dt}$ op en we stellen dit gelijk 0.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\beta} e^{\alpha\beta} \frac{d(\alpha\beta)}{dt} = e^{\alpha\beta} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Hieraan wordt voldaan indien:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\hat{\beta}_0 \hat{I}^2}{2\omega \gamma_1 c_1} \left[\omega - \frac{1}{2} \cos \omega t \cdot 2\omega \right] = 0$$

Hieruit volgt: $\cos 2\omega t = 1$

zodat voor ωt volgt: $\omega t = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

Het verloop van de temperatuur is schetsmatig weergegeven in fig. 2.3.1., blz. 2.26

Dat ter plaatse $k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$ buigpunten optreden blijkt uit het feit dat $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0$ voor $\omega t = k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$

Er bestaat een lineair verband tussen de weerstand R en de temperatuur volgens:

$$R = R_0 (1 + \beta T) = R_0 e^{\alpha\beta} \quad (2.3.6.)$$

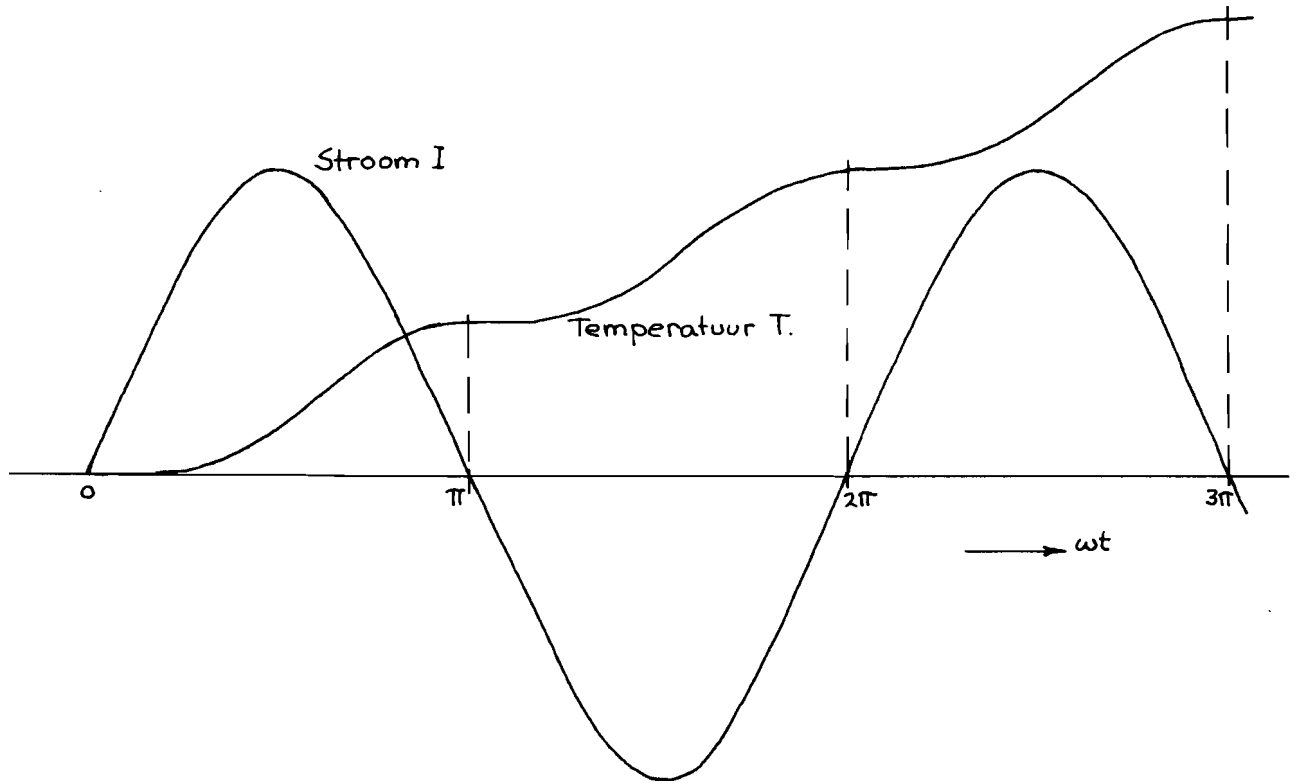


Fig. 2.3.1

Het temperatuursverloop als functie van de tijd in een metalen geleider die verhit wordt door een doorgaande wisselstroom $I = \hat{I} \sin \omega t$.

Met behulp van betrekking (2.3.6) is ook het spanningsverloop over de draad te berekenen:

$$V = I.R$$

Dus:
$$V(t) = \hat{I} \sin \omega t \cdot R_0 e^{\alpha \beta} \quad (2.3.7.)$$

De spanning $V(t)$ is een vrij eenvoudig te registreren grootheid. We zullen aan betrekking (2.3.7) dan ook nog enige aandacht besteden.

Waar heeft de functie volgens betrekking (2.3.7) extreme waarden? We berekenen hiertoe het differentiaalquotiënt $\frac{dV}{dt}$ en we stellen dit gelijk aan nul.

$$\frac{dV}{dt} = \hat{I} R_0 \left[\sin \omega t \cdot e^{\alpha \beta} \frac{d(\alpha \beta)}{dt} + e^{\alpha \beta} \cdot \omega \cdot \cos \omega t \right] = 0.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\hat{I} R_0 \omega^2}{\gamma_1 \epsilon_1 \omega} \sin^3 \omega t + \cos \omega t = 0$$

of:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega \tau} \sin^3 \omega t + \cos \omega t &= 0 \\ \text{met } \tau_1 &= \frac{\gamma_1 \epsilon_1}{\beta \hat{I} R_0 \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.8.)$$

Deze vergelijking kunnen we grafisch oplossen. In fig. 2.3.2. is uitgezet $\sin^3 \omega t$ als functie van ωt . Tevens is in deze figuur uitgezet $-\omega \tau \cos \omega t$ als functie van ωt , voor een aantal waarden van $\omega \tau$. De snijpunten van de kromme $\sin^3 \omega t$ met de krommen $-\omega \tau \cos \omega t$ leveren de oplossing van vergelijking (2.3.8).

Deze oplossing is grafisch uitgezet in fig. 2.3.3. Deze figuur geeft dus het verband tussen de hoekverschuivingen van de maxima van stroom en spanning en $\omega \tau$.

De exponent $\alpha\beta$ speelt in het bovenstaande een belangrijke rol.

$$\alpha\beta = \frac{(\beta\rho_0\hat{j})^2}{2\omega\gamma_1c_1} \left[\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right]$$

$$= \frac{1}{2\omega\tau} \left[\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right].$$

De tijdconstante τ heeft in deze betrekking de betekenis van τ_1' . Nemen we echter weer aan dat de draad plus een zich hierom bevindende cilindrische mantel met straal r_2 adiabatisch wordt opgewarmd tengevolge van de stroom $\hat{I} = \hat{I} \sin \omega t$, dan volgen identieke betrekkingen voor het temperatuurs-, weerstands- en spanningsverloop als functie van de tijd. Echter heeft dan de tijdconstante τ in alle betrekkingen de betekenis van τ_2' .

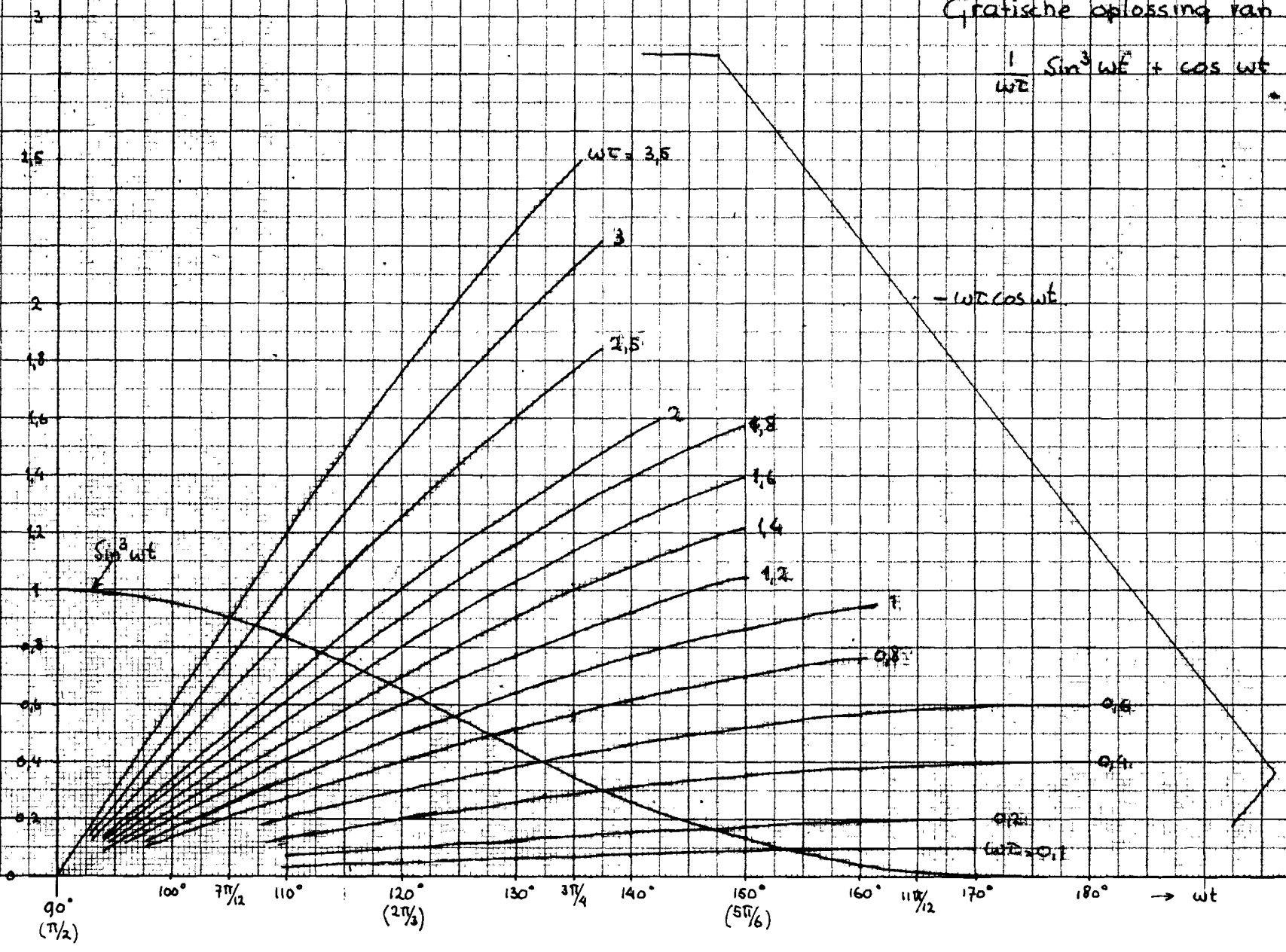
Uit metingen van het spanningsverloop als functie van de tijd bij een sinusvormige stroom door een smeltdraad kan met behulp van de hierboven afgeleide betrekkingen worden nagegaan of de opwarming bepaald wordt door de tijdconstante van de draad alléén of door de tijdconstante van de draad met een zich om de draad bevindende mantel. Tevens is het mogelijk enige gevolgtrekkingen te maken omtrent de dikte van deze mantel.

$\uparrow \sin^3 wt$
 $-\cos wt$

Fig 2.3.2

Grafische oplossing van de vergelijking

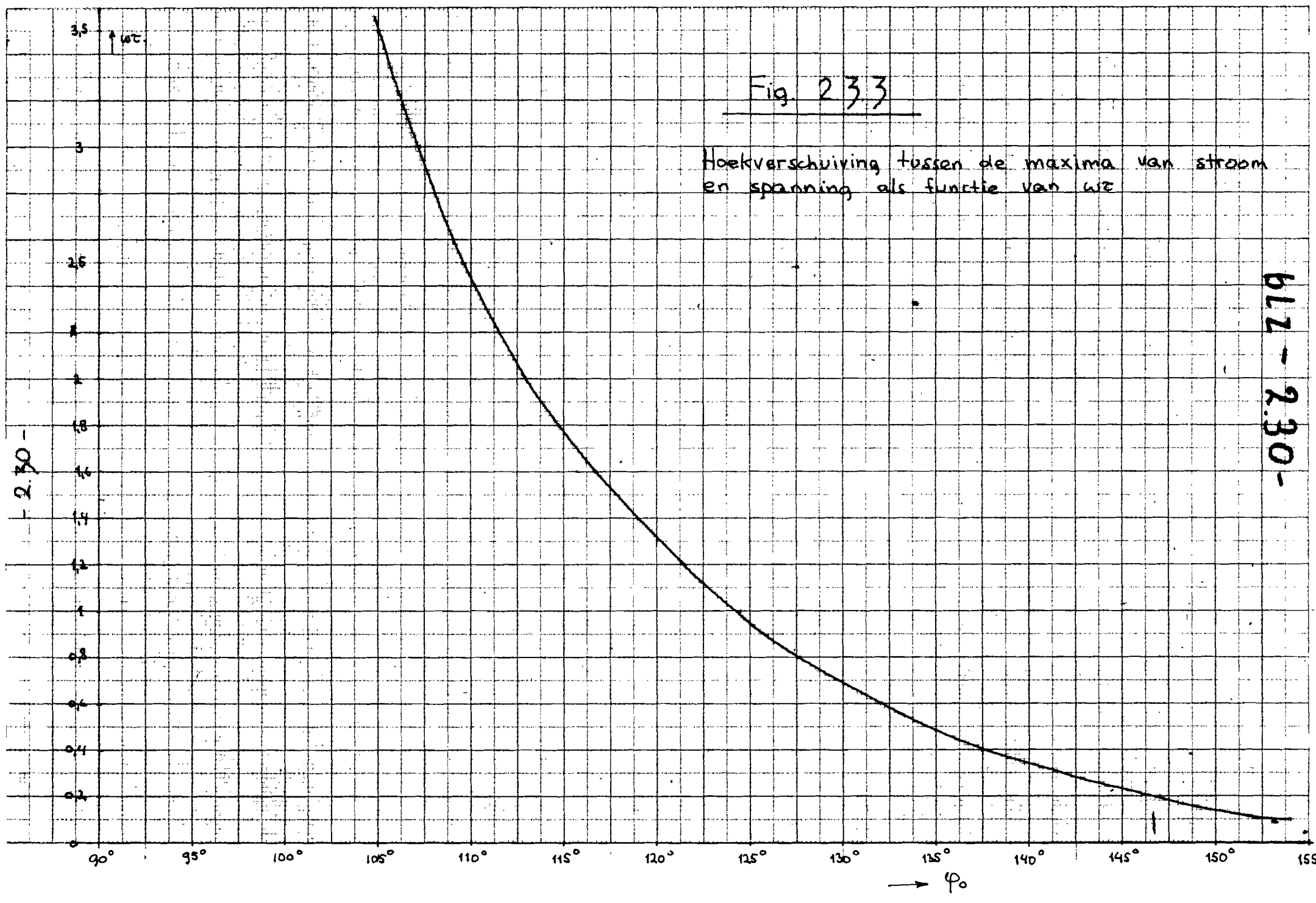
$$\frac{1}{wt} \sin^3 wt + \cos wt = a$$



-612.2.29-

Fig. 233

Hoekverschuiving tussen de maxima van stroom
en spanning als functie van ωR



- 2.30 -

612 - 230 -

3. Meting van de stationaire temperatuursverdeling langs zilveren draden die door een doorgaande elektrische stroom worden verhit.

Getracht is de temperatuursverdeling langs draden van verschillende cirkelvormige en rechthoekige doorsneden te bepalen. Deze draden waren horizontaal uitgespannen in lucht of in fijnkorrelig kwartzand (zilverzand). De temperatuursverdeling langs deze draden is bepaald bij verschillende draadlengten.

Voorts is voor een aantal gevallen een vergelijking gemaakt van de door meting verkregen resultaten met het theoretisch te verwachten temperatuursverdeling, zoals die in een voorgaand hoofdstuk is afgeleid.

3.1. Metingen aan in lucht uitgespannen draden.

3.1.1. De meetmethode.

De meting van de temperatuursverdeling van in lucht uitgespannen draden geschiedde met behulp van een infrarood gevoelige televisiecamera (vidicon-camera), fabr. Philips, type GM 4930/00.

De meetopstelling is weergegeven in fig. 3.1.01. De zilverdraad was aan de uiteinden ingeklemd in twee messing blokken van zodanige afmetingen, dat de warmtecapaciteit van deze messing blokken zeer groot is ten opzichte van de warmtecapaciteit van de draad. Hiermede werd bereikt, dat de draad ter plaatse $x = 1$ en $x = -1$ op kamertemperatuur bleef. De afstand tussen de messing blokken was instelbaar van 0 tot ca. 30 cm. De zilverdraad werd doorlopen door een wisselstroom, welke werd onttrokken aan een transformator 220/2,5/5 Volt. Deze transformator werd gevoed door een regeltransformator. Deze regeltransformator was primair via een spanningsstabilisator aangesloten aan 220 Volt. De stroom door de zilverdraad kon ingesteld worden met behulp van de regeltransformator, terwijl de spanningsstabilisator er voor zorgde dat de ingestelde stroom, nadat de draad zijn eindtemperatuur had bereikt, nauwkeurig konstant bleef. De stroom werd gemeten met een A-meter, fabr. Nieaf, nauwkeurigheid 0,5%. Bovendien kon aan de messing blokken een voltmeter worden aangesloten, waarop dus de spanning over de zilverdraad kon worden afgelezen.

De draad was afgeschermd door een perspex kap om te voorkomen dat tengevolge van tocht de temperatuur van de draad tijdens de meting zou veranderen. Deze perspex kap had zodanige afmetingen,

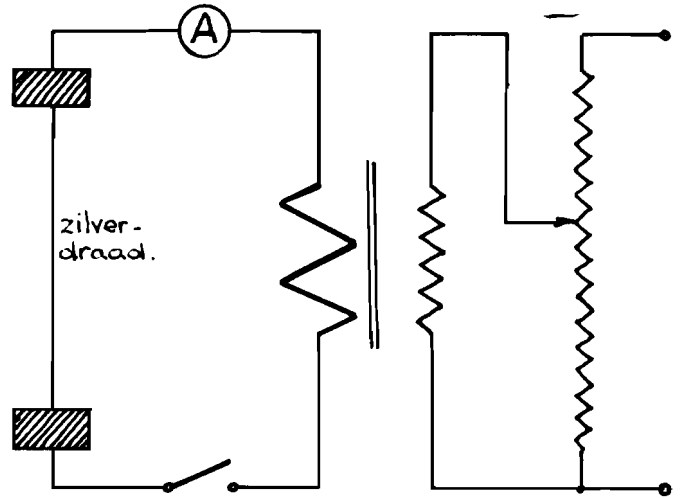
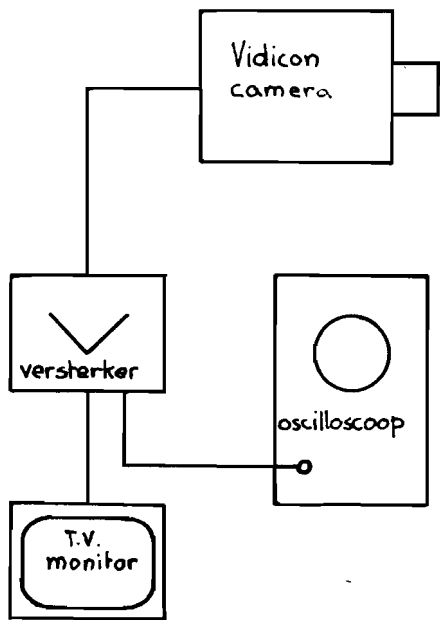


Fig. 3.1.01

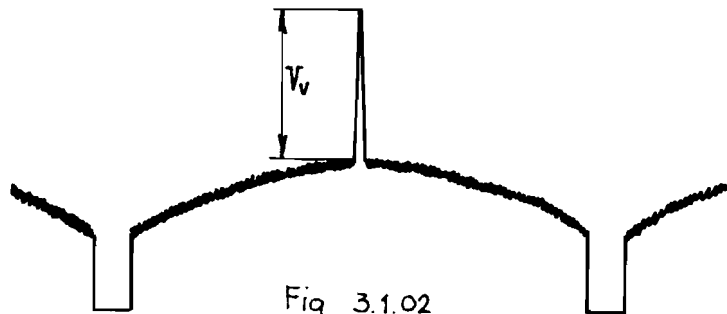


Fig 3.1.02

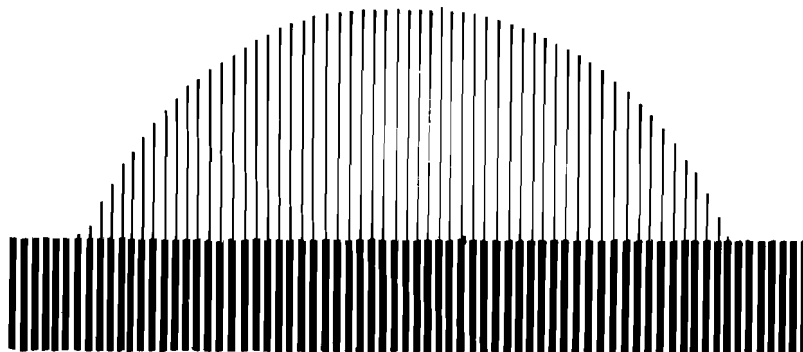


Fig. 3.1.03

dat de vrije convectie om de draad niet noemenswaardig werd verstoord.

In deze perspex beschermkap was een gleuf aangebracht. De vidicon-camera werd door deze gleuf heen op de draad gericht. Dit om te voorkomen dat geen absorptie van infraroodstraling in het perspex op zou treden, alvorens deze straling de vidicon-camera bereikte (maximale gevoeligheid dus).

Het signaal van de vidicon-camera werd via een versterker, fabr. Philips, type GM 4948/00 toegevoerd aan een televisie-monitor, fabr. Philips, type GM 4949/30, en een oscilloscoop, fabr. Tektronix, type 555.

De vidicon-camera werd op zijn zijkant gelegd. Hiermede werd bereikt dat de horizontaal uitgespannen draad verticaal op de beeldbuis van de monitor kwam te staan. De 625 beeldlijnen konden toen worden gebruikt om de draad af te tasten (te "scannen") met maximaal 625 meetpunten.

De monitor speelde bij de metingen slechts een ondergeschikte rol, ze diende alleen als hulpmiddel om de draad zo scherp mogelijk te kunnen afbeelden op de gevoelige laag van de vidicon-camera, met behulp van een op deze camera aangebrachte lens. De werkelijke metingen werden verricht met behulp van de oscilloscoop. Dit geschiedde als volgt:

De door de vidicon-camera opgevangen infrarood-straling wordt omgezet in een spanning, die via de versterker wordt toegevoerd aan de TV-monitor en aan de oscilloscoop. Omdat de afbeelding van de draad op de beeldbuis van de monitor verticaal staat, geeft elke beeldlijn op één plaats, nl. ter plaatse van de afbeelding van de draad, een "zwarting" te zien. Deze "zwarting", dat wil zeggen, de spanning die op de beeldbuis deze "zwarting" veroorzaakt, is een maat voor de door de vidicon-camera ontvangen stralingsenergie ter plaatse van de draad en ter plaatse van de betreffende beeldlijn.

Zetten we één van de 625 beeldlijnen op de oscilloscoop, dan verkrijgen we een beeld zoals in fig. 3.1.02 is geschetst. De grootte van de spanningspiek V_v in deze figuur is op te meten en deze is evenredig met de door de camera ontvangen energie van de betreffende plaats op de zilverdraad. Wordt de tijdbasis van de oscilloscoop zodanig gekozen dat alle 625 beeldlijnen naast elkaar op het scherm van de oscilloscoop zichtbaar worden, dan ontstaat een beeld zoals geschetst in fig. 3.1.03. De dunne lijnen uit deze figuur zijn dan

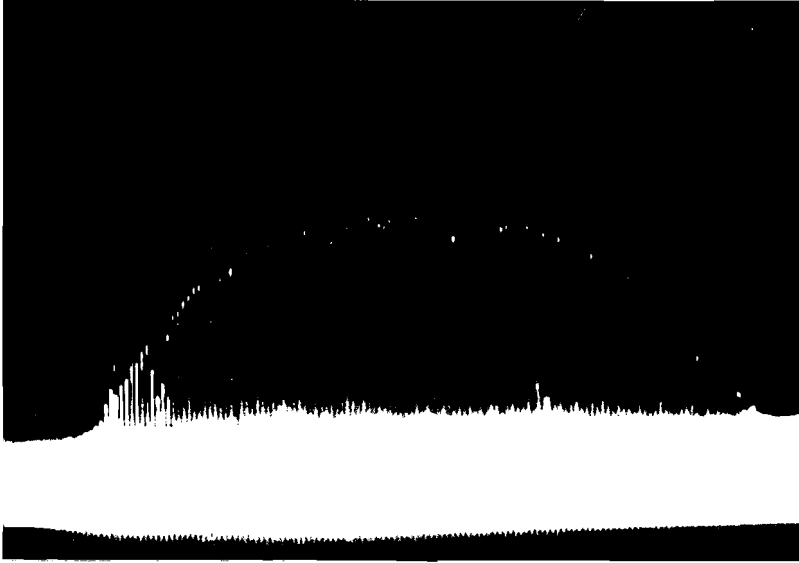


Fig. 3.1.04.

De verdeling van de uitgezonden energie door een ronde draad, zichtbaar gemaakt op de oscilloscoop.



Fig. 3.1.05.

Enkele spanningspieken V_v , zoals ze op de oscilloscoop zichtbaar konden worden gemaakt.

de spanningspieken V_v uit fig. 3.1.02 op elke beeldlijn. Fig. 3.1.04 geeft een fotografische opname van het scope-beeld — van drie van de 625 beeldlijnen. Deze foto komt dus overeen met de schets van fig. 3.1.02. Fig. 3.1.05 laat een fotografische opname zien van het beeld op de oscillograaf, zoals dat schetsmatig is weergegeven in fig. 3.1.03.

Het is met de Tektronix-oscilloscoop, type 555, mogelijk met behulp van een "trigger-delay"-eenheid een willekeurig te kiezen deel van één tijdbasis op de tweede tijdbasis op een andere tijden amplitudeschaal af te beelden. Van deze mogelijkheid werd gebruik gemaakt om de meest gunstige oscilloscoopbeelden te produceren, waarvan in de figuren 3.1.04 en 3.1.05 er twee zijn getoond.

In fig. 3.1.05 is de verdeling van de door de draad uitgezonden energie als functie van de plaats zichtbaar gemaakt. Het begin en het eindpunt van de draad werden steeds met een gloeiend voorwerp, voorzien van een scherpe punt, aangewezen. Deze scherpe punten waren ook te zien op de oscilloscoop. Op deze wijze was het mogelijk de uitgezonden stralingsenergie als functie van x/l te bepalen. Hieruit kan de temperatuur als functie van x/l worden afgeleid. Hoe dit kan worden gedaan en welke metingen moesten worden verricht teneinde het verband tussen stralingsenergie en temperatuur op te sporen, zal in een volgende paragraaf worden behandeld.

De grootte van de spanning V_v was behalve van de uitgezonden stralingsenergie, ook afhankelijk van de instellingen van de versterker en van de plaats van de vidicon-camera ten opzichte van de draad. Bovendien werd wel de energieverdeling, en daaruit de temperatuursverdeling bepaald, de absolute waarde van de temperatuur was hiermede nog niet bekend. Om deze te leren kennen is tenminste één ijkpunt nodig. Daarom werd de volgende procedure bij de metingen gevolgd:

Van een draad van 25 cm lengte werd bij een bepaalde stroom de temperatuur in het midden van de draad bepaald met behulp van tempilaq. Dit is de handelsnaam van een preparaat dat door Tempil Corporation te New York in de handel wordt gebracht en dat de eigenschap heeft bij een vrij nauwkeurig bepaalde temperatuur te smelten en daarbij te verkleuren. Voor de bepaling van temperaturen moet men dus de beschikking hebben over een vrij groot aantal

flacons van deze tempilaq. Door enig proberen met verschillende soorten tempilaq kan dan de eindtemperatuur in het midden van de draad bij een gekozen stroomsterkte worden bepaald. Vervolgens werd een nieuwe draad van gelijke lengte en diameter aangebracht (de emissiviteit van de draad veranderde aanzienlijk door de hierop aangebrachte tempilaq) en door deze draad werd nauwkeurig dezelfde stroom als in het vorige geval gestuurd. Van deze draad werd getracht een zo goed mogelijk beeld op de oscilloscoop te verkrijgen door instellen van vidicon-camera en versterker. De instellingen van versterker en vidicon-camera werden bij de seriemetingen die hierna volgden, nauwkeurig konstant gehouden. Op deze wijze was bij die bepaalde instelling van camera en versterker het verband bekend tussen één temperatuur en de daarbij behorende spanning.

3.1.2. Experimentele bepaling van het verband tussen uitgezonden stralingsenergie en temperatuur van een zilverdraad.

Op zilverdraden van 0,4 mm en 0,8 mm diameter werd een Pt - Pt, 18% Rh thermokoppel voorzichtig gepuntlast (zie fig. 3.1.06).

Een dergelijke draad werd in de messing blokken geklemd. Vervolgens werd een stroom door deze draad gestuurd waardoor de draad werd verwarmd. De draad werd kort ingespannen (ca. 8 cm draadlengte). Hierdoor was de invloed van de uiteinden (axiale warmte-afgifte) groot, dus de warmte-afvoer via het thermokoppel relatief kleiner. De thermospanning werd gemeten met een buisvoltmeter fabr.

Keithley, type 610B, met een nauwkeurigheid van 1%. De koude las werd in een bak olie op kamertemperatuur gelegd, zodat in feite met de voltmeter de temperatuursverhoging van de hete las werd gemeten.

De temperatuursverdeling van de draad met thermokoppel werd op de oscilloscoop zichtbaar gemaakt op de wijze zoals onder 3.1.1. beschreven. De vidicon-camera "zag" de draad in een stand zoals geschetst in fig. 3.1.07. Op de oscilloscoop verscheen een beeld zoals in fig. 3.1.08 is weergegeven.

Tengevolge van het feit dat de emissiviteit van platina groter is dan die van zilver, verschijnt ter plaatse van het thermokoppel een bobbel in de omhullenden van alle spanningen V_v (zie fig. 3.1.08).

Daarna werd de spanning V_v afgelezen ter plaatse A in fig.

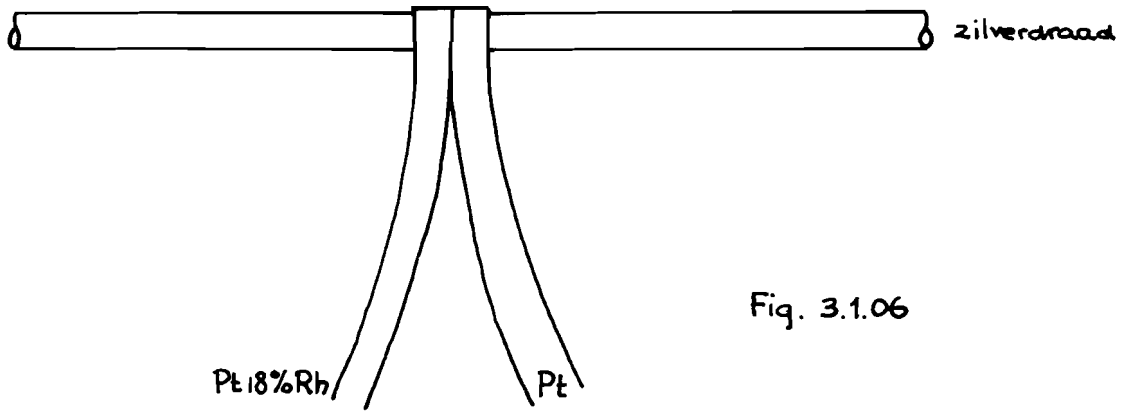


Fig. 3.1.06

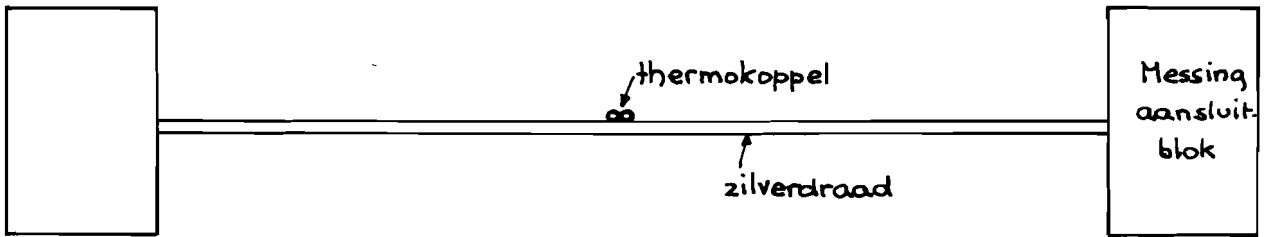


Fig. 3.1.07

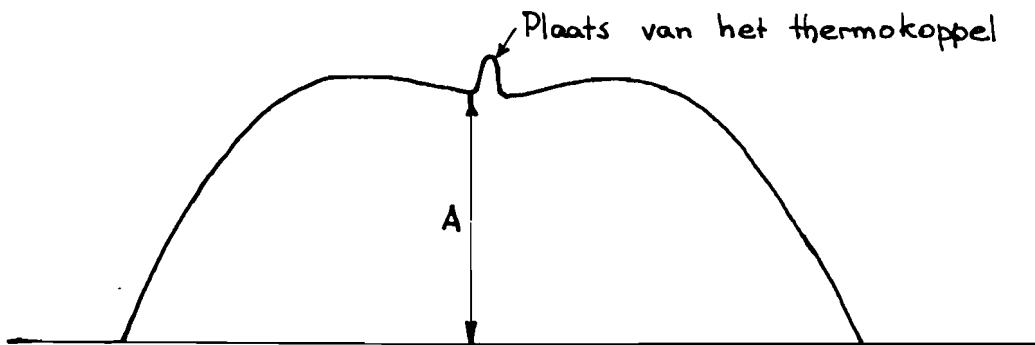


Fig. 3.1.08

3.1.08, dus direct naast de bobbel.

De temperatuur van de draad kon worden veranderd door de stroom te variëren. Aldus kon bij verschillende temperaturen de spanning V_v op de oscilloscoop worden afgelezen. In fig. 3.1.09 is de ijkarakteristiek van de gebruikte thermokoppels weergegeven.

Op deze wijze zijn 7 series metingen verricht, waarbij de temperatuur van de draad ter plaatse van het thermokoppel werd bepaald als functie van de spanning V_v ter plaatse A in fig. 3.1.08. De meetresultaten van 3 series metingen zijn op dubbel logaritmische schaal uitgezet in de grafiek van fig. 3.1.10.

In tabel 3.I zijn de meetresultaten die behoren bij kromme 1, weergegeven.

Zoals fig. 3.1.10 laat zien, is bij benadering het verband tussen V_v en T van de gedaante: $V_v = AT^n$

De exponent n kan gevonden worden uit de hellingshoek van de in fig. 3.1.10 getekende rechten. Voor de lijnen 1 en 2 in fig. 3.1.10 geldt: $n = 3,8$. Voor de lijn 3 in fig. 3.1.10 geldt: $n = 4,15$. Uit alle 7 series metingen werd de waarde van n bepaald, deze bleek te variëren tussen $n = 3,6$ en $n = 4,2$.

Voor alle volgende temperatuursmetingen is aangenomen dat het verband tussen V en T als volgt luidt:

$$V_v = AT^4. \tag{3.1.2.1}$$

Tabel 3.I.

I (Amp)	Thermospanning (mV)	Temp. (°C)	Vidiconspanning V_v (Volts)	$\frac{V_v}{V_{v_{max}}}$
	2	635	2,1 = $V_{v_{max}}$	1
	1,9	617	2	0,952
50	1,7	585	1,6	0,763
49	1,49	545	1,35	0,642
48	1,25	500	1	0,476
47	1	448	0,65	0,309
46	0,87	420	0,46	0,219
45	0,74	387	0,3	0,143
44	0,6	350	0,16	0,076

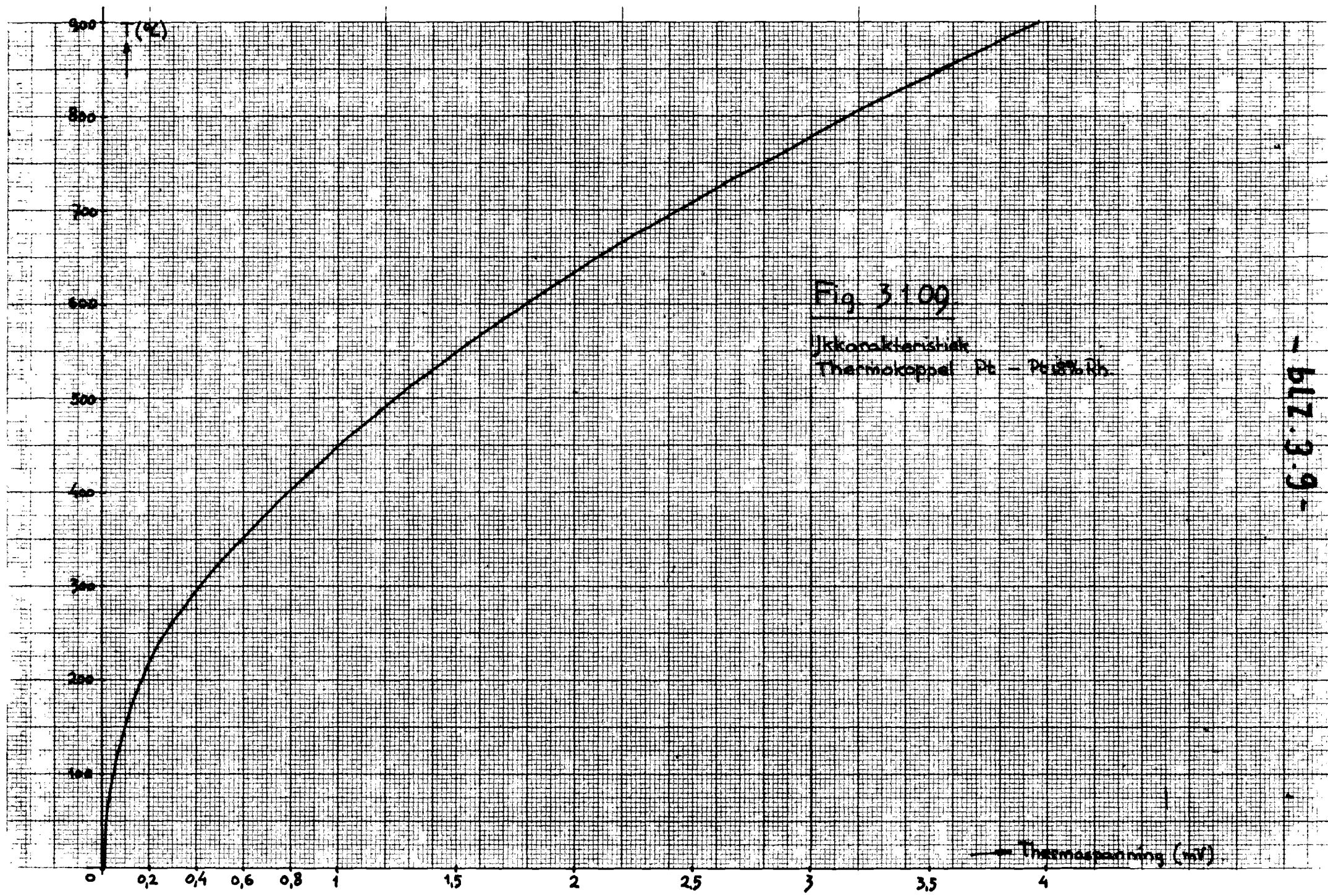


Fig. 3.100

Иконтактный
Термопара Pt - Pd18%Rh

- блз. 3.9 -

Thermospanning (mV)

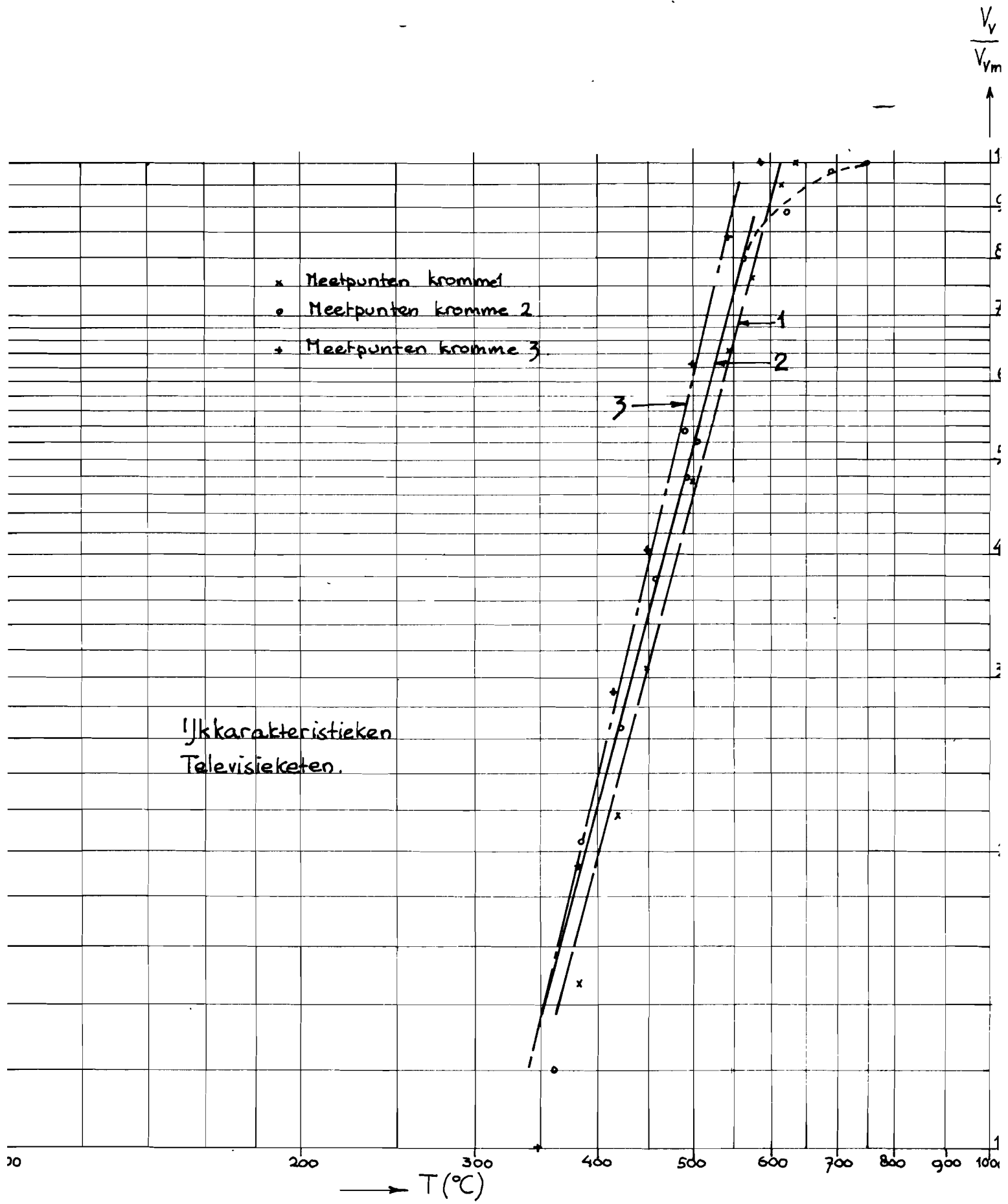


Fig. 3.1.10.

waarin A een konstante is.

Ook langs theoretische weg is het mogelijk dit verband te vinden, hiervoor zij verwezen naar een aanhangsel.

De relatie (3.1.2.1) geldt slechts in een beperkt gebied zoals uit fig. 3.1.10 blijkt. Welk gebied dit is hangt mede af van de instelling van de versterker. Om deze reden waren meerdere series metingen noodzakelijk. Uit de kromme 2 van fig. 3.1.10 blijkt, dat er zoiets bestaat als een "maximale zwarting" op de monitor. Bij welke temperatuur deze optreedt hangt af van de instelling van de versterker.

Om deze reden is het noodzakelijk dat bij elke serie temperatuursmetingen steeds begonnen wordt bij de hoogste temperatuur, met behulp van het beeld op de oscilloscoop kon de versterkerinstelling nl. zo worden gekozen, dat bij die temperatuur deze "maximale zwarting" nog niet was bereikt.

Verder blijkt, dat bij lagere temperaturen de relatie (3.1.2.1) minder goed klopt. De relatie blijft geldig tot ongeveer 400°C , beneden deze temperatuur wordt de exponent van T groter dan 4.

3.1.3. Meetresultaten van metingen aan zilverdraad van ronde en rechthoekige doorsnede.

De temperatuursverdeling werd bepaald van cilindrische zilveren draden met een diameter van 0,2 mm en 0,4 mm en van zilveren banden van rechthoekige doorsnede 1 x 0,13 mm. De doorsnede van deze zilveren banden is ongeveer gelijk aan die van een ronde draad van 0,4 mm diameter. De temperatuursverdeling werd van draden van verschillende lengten gemeten.

Aan draden van de volgende lengten werd gemeten:

Draden van 0,2 mm diameter:

$2l = 25, 20, 15, 12, 11$ en 10 cm.

Draden van 0,4 mm diameter:

$2l = 25, 20, 17, 15, 14, 13$ en 12 cm.

Band 1 x 0,13 mm:

$2l = 25, 20, 17, 15, 14, 13, 12, 11$ en 10 cm.

Verder zijn nog metingen verricht aan banden 1 x 0,13 mm, waarin één of meerdere gaatjes waren geboord. Van één band, waarin 3 gaatjes waren geboord, is de temperatuursverdeling bepaald als functie van de lengte van die band. Hierbij was $2l = 25, 20, 15$ en 13 cm.

Een serie metingen aan draden met dezelfde doorsnede, doch met verschillende draadlengten, werd uitgevoerd bij dezelfde stroomsterkte in de draden.

Steeds werd begonnen met de langste draad, dus met de draad waarvan verwacht mocht worden dat hij in het midden de hoogste stationaire temperatuur zou aannemen. Van deze langste draad werd de maximale temperatuur, dus de temperatuur in het midden van de draad, bepaald met behulp van tempilaq. Vervolgens werden bij gelijke instelling van vidicon-camera en versterker de temperatuursverdelingen van draden met een kleinere lengte, maar met dezelfde doorsnede, bepaald.

De omhullende van alle spanningspieken V_v bij één meting werd opgetekend op grafiekpapier en als functie van x/l werd nu het quotiënt $\frac{V_v}{V_{v\max}}$ bepaald. Hierbij is $V_{v\max}$ de vidiconspanning die optrad in het midden van de draad, dus ter plaatse $x/l = 0$. Hieruit werd afgeleid dat waarde van $\frac{T}{T_{\max}}$ volgens de relatie

$$\frac{V_v}{V_{v\max}} = \left(\frac{T}{T_{\max}} \right)^4 \quad (3.1.3.1)$$

waarin T_{\max} de temperatuur in het midden van de draad van een bepaalde lengte is. Deze is voor de langste draad bekend. Voor die draad geldt $\frac{V_v}{V_{v\max}} = 1$ voor $\frac{x}{l} = 0$.

Op dat punt geldt ook $\frac{T}{T_{\max}} = 1$.

Bij alle metingen is aangenomen dat relatie (3.1.3.1) slechts geldt voor temperaturen groter dan 400°C .

De waarde van $\frac{T}{T_{\max}}$ uit de gevonden waarde van $\frac{V_v}{V_{v\max}}$

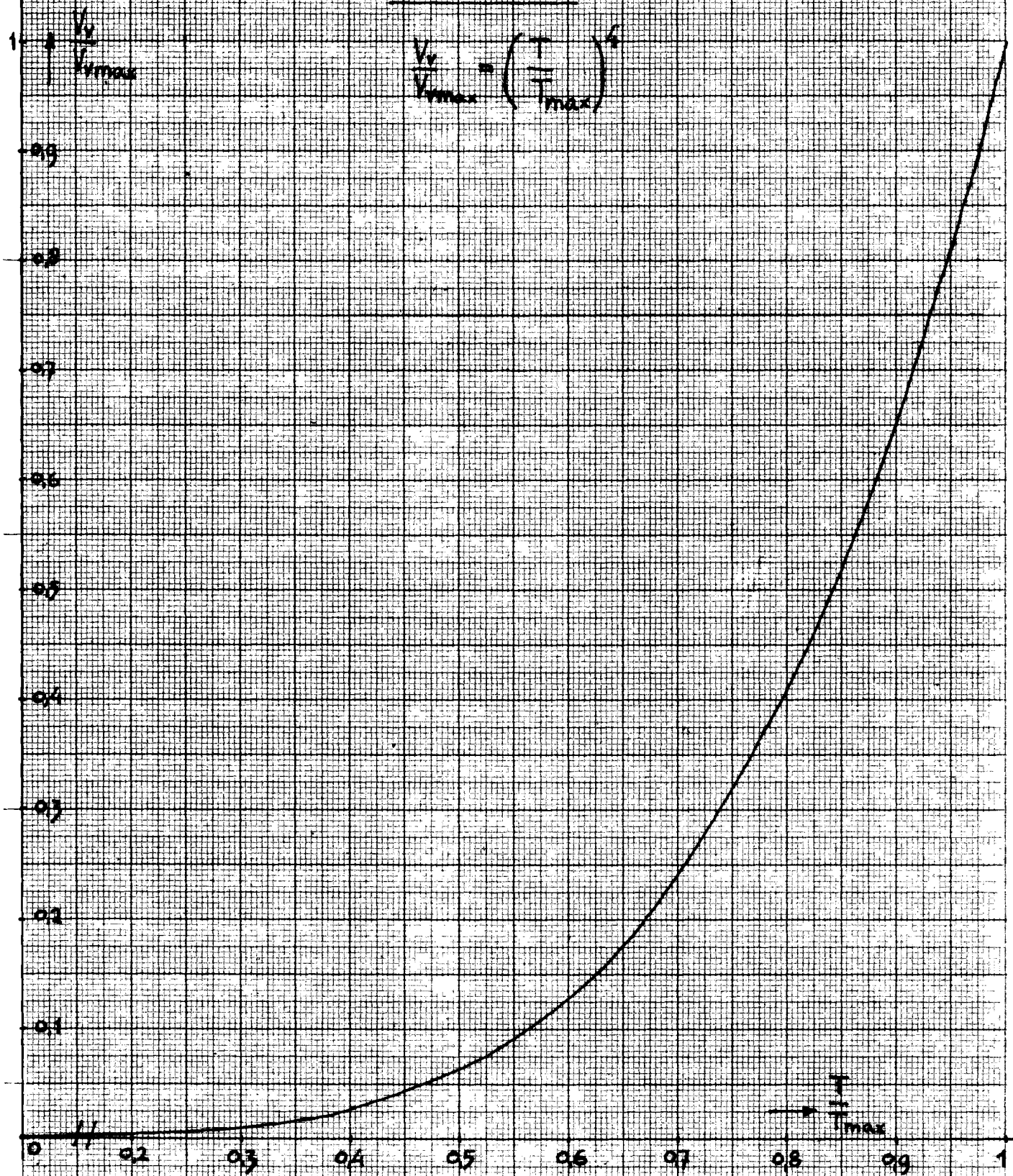
voor een bepaalde waarde van $\frac{x}{l}$ werd bepaald met behulp van de grafiek van fig. 3.1.11.

3.1.3.1. Metingen aan draden met een diameter van 0,2 mm.

Hierbij was de ingestelde stroom in alle gevallen 6,3 Amp. De maximale temperatuur van de langste draad (25 cm) was bij deze stroomsterkte $720^\circ\text{C} \pm 10^\circ\text{C}$ (tempilaq-meting). De op de bovenomschreven wijze bepaalde temperatuur als functie van x/l is

- 012. 0.13 -
- b12.3.13 -

Fig 3111



uitgezet in de grafieken van fig. 3.1.12. In deze grafiek is de lengte (2l) parameter.

3.1.3.2. Metingen aan draden met een diameter van 0,4 mm.

De ingestelde stroom door de draden was in alle gevallen 14,5 Amp.

De maximale temperatuur T_{\max} van de langste draad (25cm) was bij deze stroom $750^{\circ}\text{C} \pm 10^{\circ}\text{C}$ (tempilaq-meting).

De resultaten zijn uitgezet in de grafieken van fig. 3.1.13. De lengte 2l is weer parameter.

Voorts werd bij deze serie metingen het spanningsverlies over de draad gemeten met behulp van een buisvoltmeter, fabr. Philips, type GM 6012, nauwkeurigheid 3%. De resultaten hiervan zijn verzameld in tabel 3.II.

Tabel 3.II.

2l (cm)	I (Amp)	V (Volts)	R (m Ω)
25	14,5	1,9	131
20	14,5	1,46	100,5
17	14,5	1,21	83,5
15	14,5	0,995	68,5
14	14,5	0,915	63
13	14,5	0,84	58
12	14,5	0,765	53

De weerstand R is bepaald als quotiënt van V en I voor elk geval. R heeft dus steeds de betekenis van een gemiddelde weerstand.

Ter illustratie worden in de tabellen 3,III en 3,IV de meetwaarden en de hieruit afgeleide waarden voor T genoteerd van de metingen aan de draden van 25 cm lengte en 12 cm lengte.

-617.3.15-

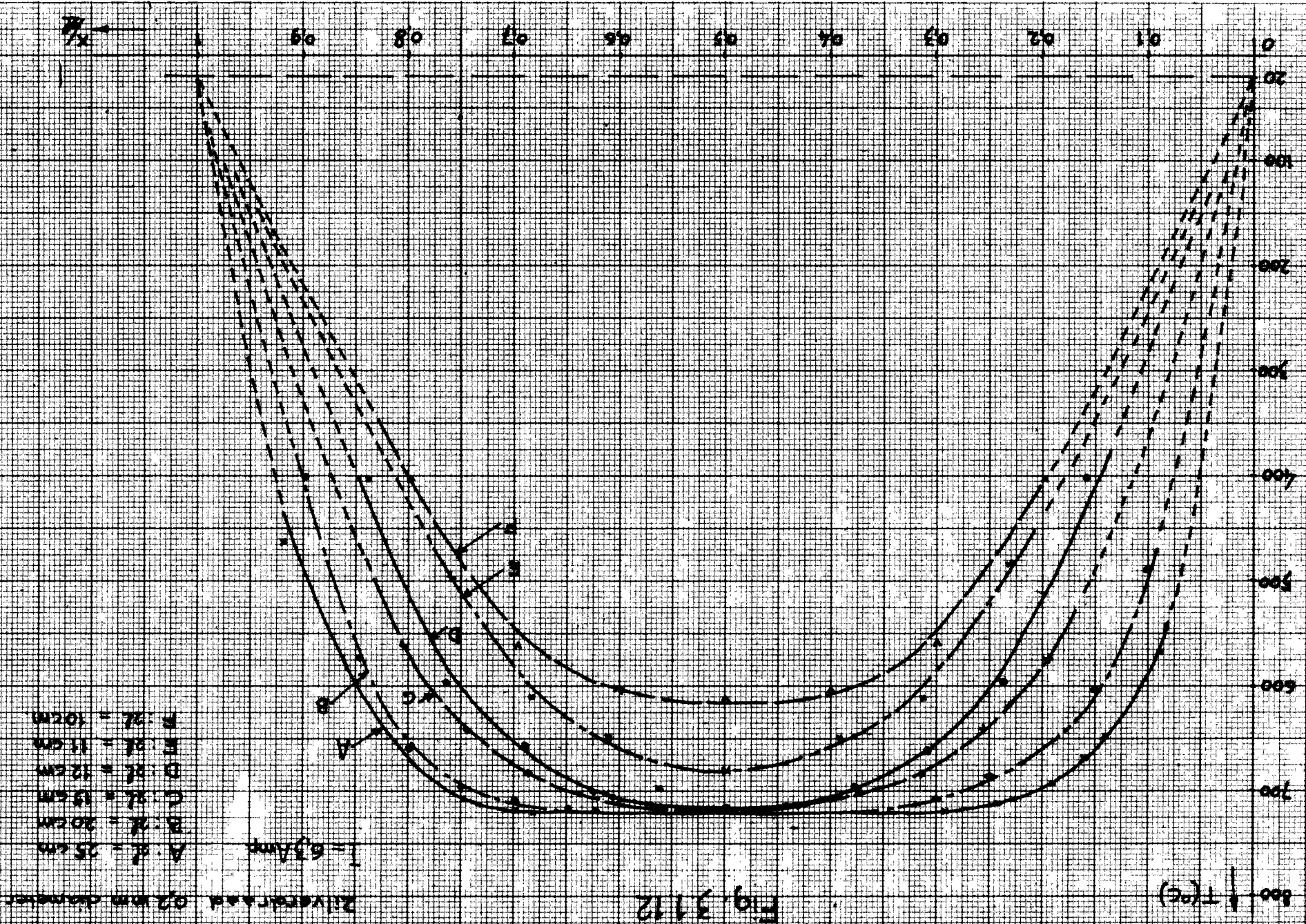


Fig. 3112

- 617.3.16 -

- A: $\lambda = 25$ km
- B: $\lambda = 20$ km
- C: $\lambda = 17$ km
- D: $\lambda = 15$ km
- E: $\lambda = 14$ km
- F: $\lambda = 13$ km
- G: $\lambda = 12$ km

$f = 14.5$ kHz

Zilindrica 0.4 mm Ø

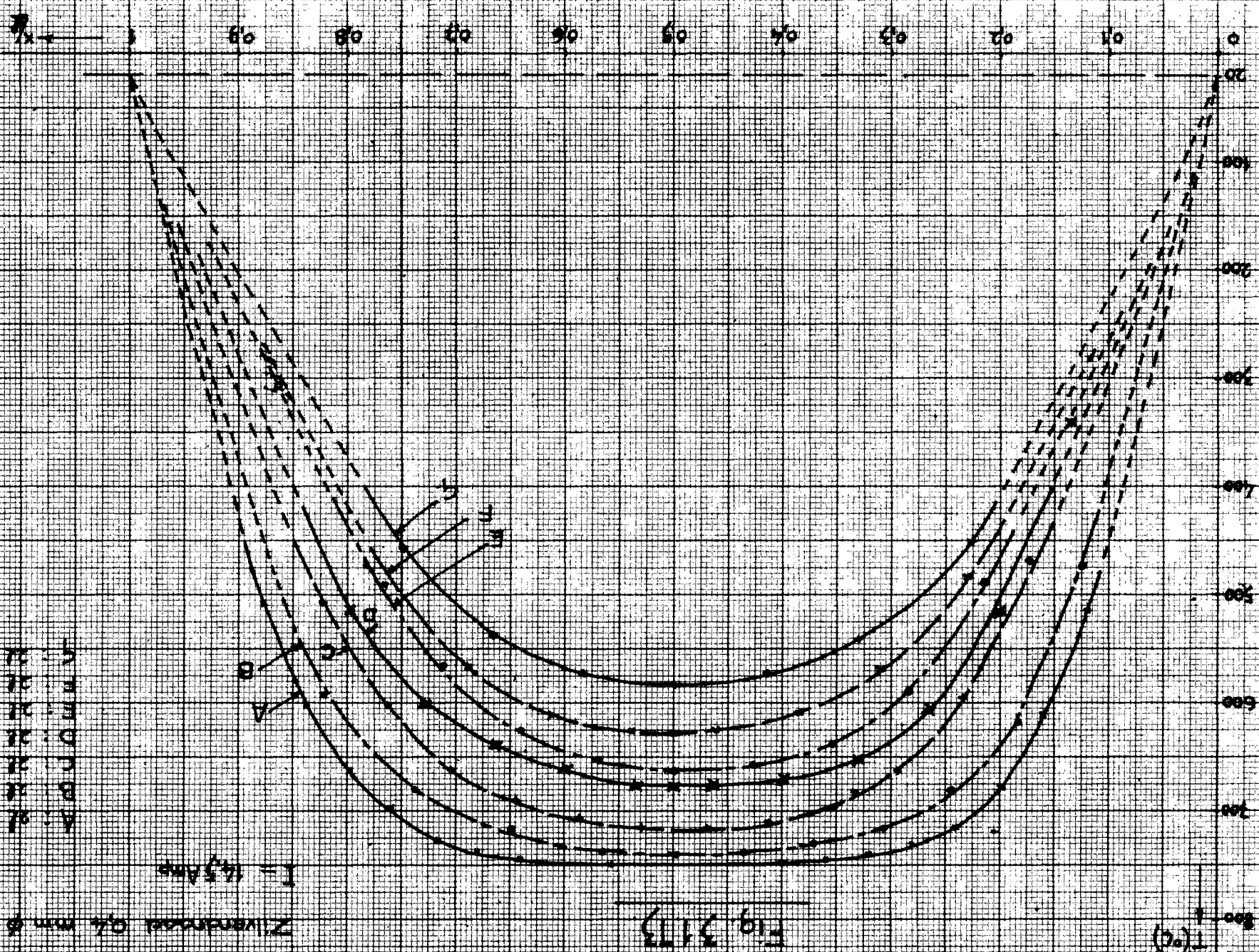


Fig. 3173

f (kHz)

Tabel 3.III.

2l = 25 cm.

x (cm)	x/l	$\frac{v}{v_{\max}}$	$\frac{T}{T_{\max}}$	T(°C)
-12,5	-1	0	0	20
-10,5	-0,84	0	?	?
- 9,5	-0,76	0,23	0,69	519
- 8,5	-0,68	0,46	0,82	613
- 7,5	-0,6	0,67	0,905	680
- 6,5	-0,52	0,83	0,955	717
- 5,5	-0,44	0,9	0,975	731
- 4,5	-0,36	0,96	0,99	742
- 3,5	-0,28	0,98	0,995	747
- 2,5	-0,2	1	1	750
0	0	1	1	750
1,5	0,12	1	1	750
2,5	0,2	0,99	0,997	749
3,5	0,28	0,98	0,995	747
4,5	0,36	0,94	0,985	739
5,5	0,44	0,88	0,97	729
6,5	0,52	0,75	0,93	698
7,5	0,7	0,61	0,885	663
8,5	0,68	0,42	0,805	603
9,5	0,76	0,21	0,68	510
10,5	0,84	0	?	?
12,5	1	0	0	20

Tabel 3.IV.

2l = 12 cm.

x (cm)	x/l	$\frac{V_v}{V_{\max}}$	$\frac{T}{T_{\max}}$	T(°C)
-6	-1	0	0	20
-4	-0,67	0	?	?
-3	-0,5	0,13	0,6	450
-2	-0,33	0,27	0,72	540
-1	-0,167	0,345	0,765	573
0	0	0,37	0,78	584
1	0,167	0,35	0,765	573
2	0,35	0,276	0,72	540
3	0,5	0,138	0,61	458
4	0,67	0	?	?
6	1	0	0	20

3.1.3.3. Metingen aan niet doorboorde zilverband 1 x 0,13 mm.

Bij alle metingen was de band met zijn grootste vlakke zijde naar de vidicon-camera toegekeerd.

De stroomsterkte in de banden werd steeds ingesteld op 16 Amp.

De maximale temperatuur T_{\max} van de langste band was $775^{\circ}\text{C} \pm 15^{\circ}\text{C}$ (tempilaq-meting).

De resultaten van deze metingen zijn weergegeven in de grafieken van fig. 3.1.14.

3.1.3.4. Metingen aan geperforeerde zilverbanden 1 x 0,13 mm.

De stroomsterkte in de banden waaraan gemeten werd, was in alle gevallen 16 Amp, zodat de resultaten vergelijkbaar zijn met die van punt 3.1.3.3.

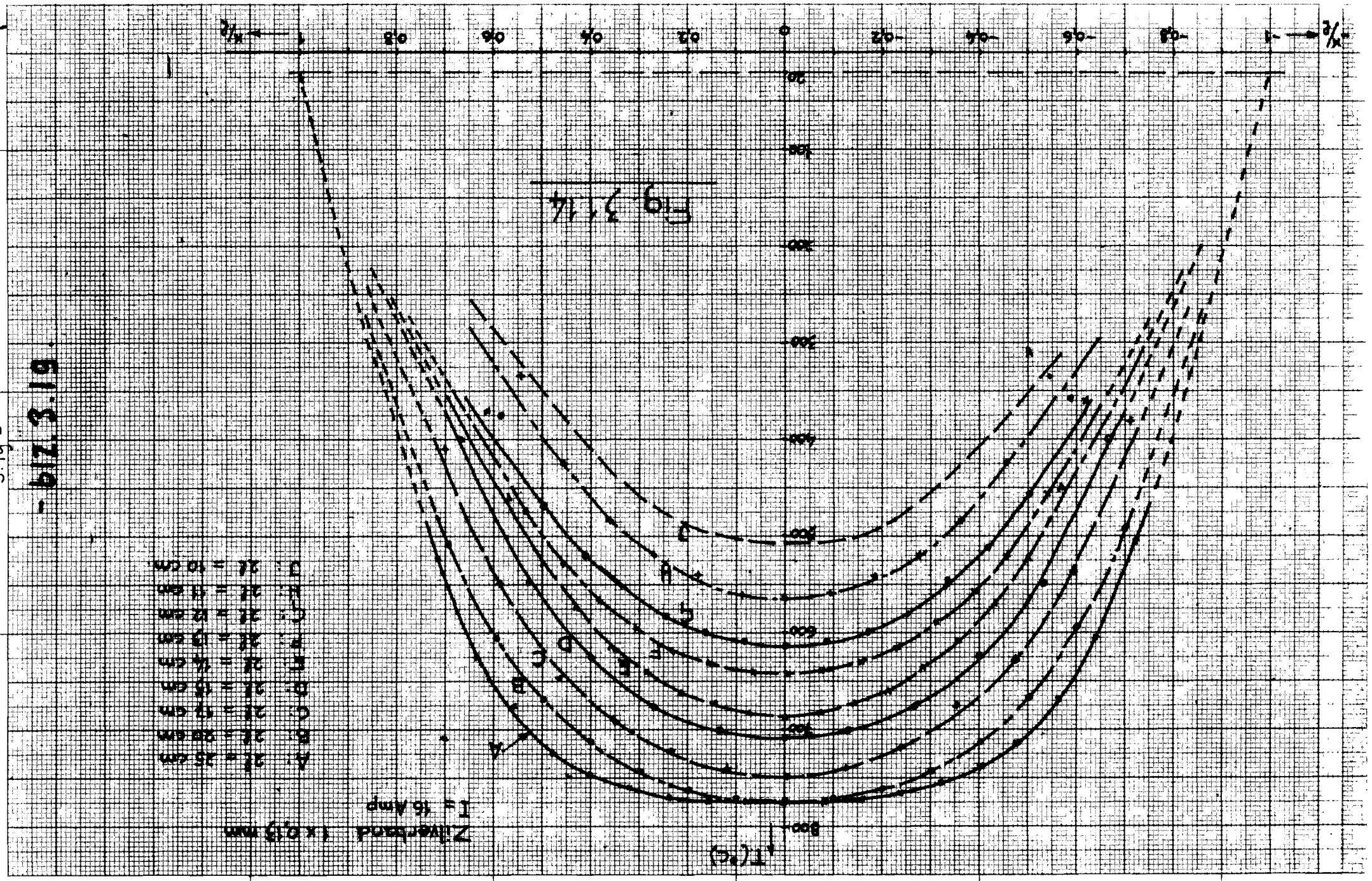
Als T_{\max} wordt genomen de temperatuur ter plaatse $x/l = 0$ bij $2l = 25,5$ cm en $I = 16$ Amp. van een band zonder gaatjes. In een band met gaatjes kan nu dus de temperatuur groter worden dan T_{\max} .

-b12.3.19.

- A. $z_1 = 25 \text{ cm}$
- B. $z_1 = 20 \text{ cm}$
- C. $z_1 = 15 \text{ cm}$
- D. $z_1 = 10 \text{ cm}$
- E. $z_1 = 5 \text{ cm}$
- F. $z_1 = 0 \text{ cm}$
- G. $z_1 = -5 \text{ cm}$
- H. $z_1 = -10 \text{ cm}$
- I. $z_1 = -15 \text{ cm}$
- J. $z_1 = -20 \text{ cm}$
- K. $z_1 = -25 \text{ cm}$

Zylinder $(\times 0,19 \text{ mm})$
 $I = 16 \text{ Amp}$

Fig. 3.14



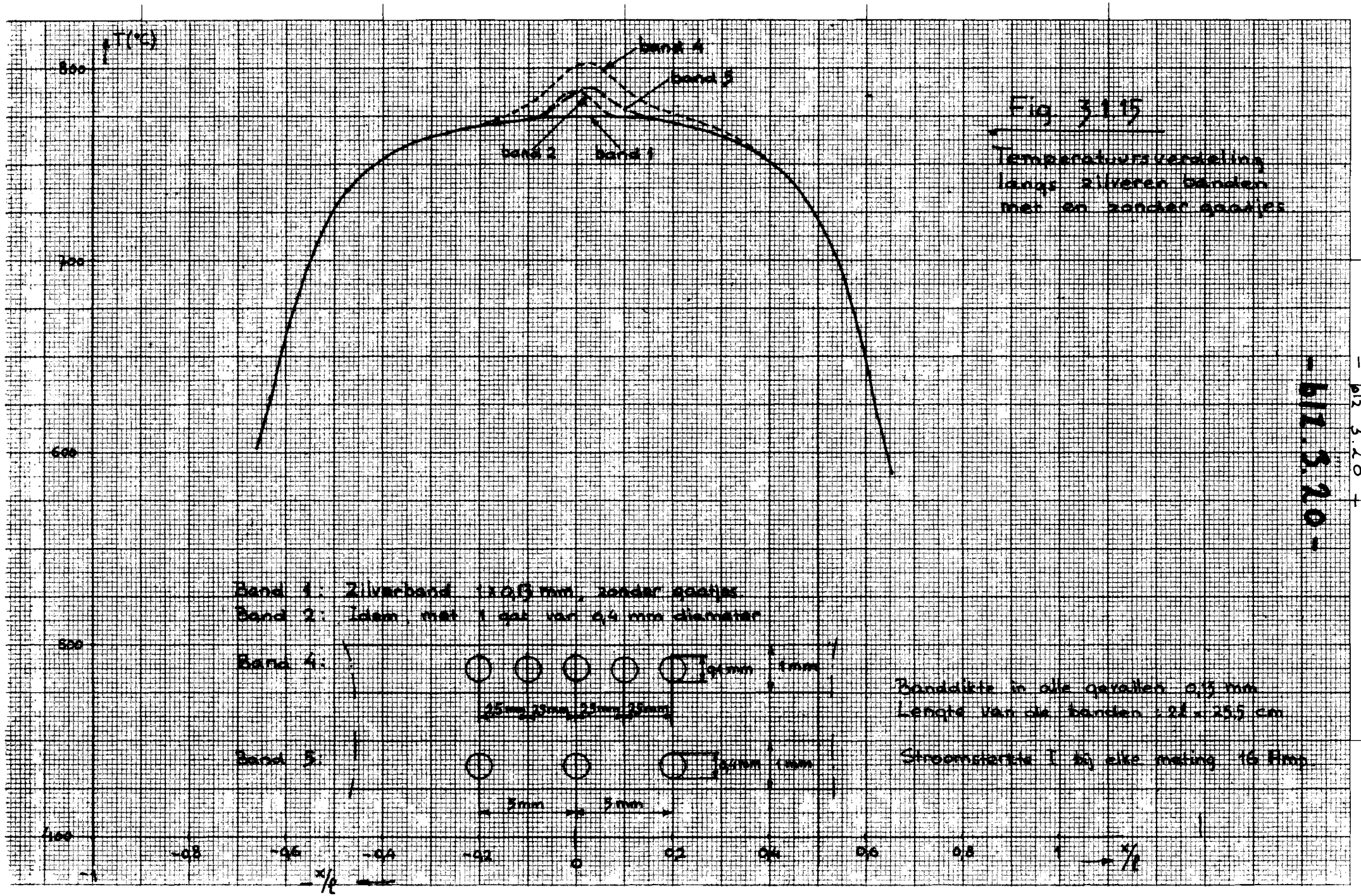
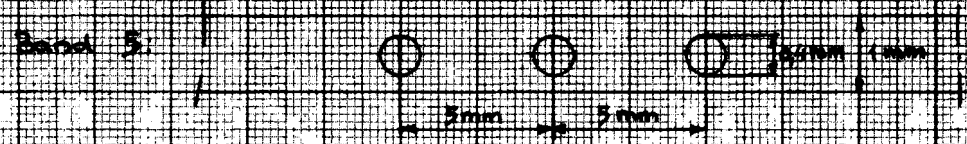
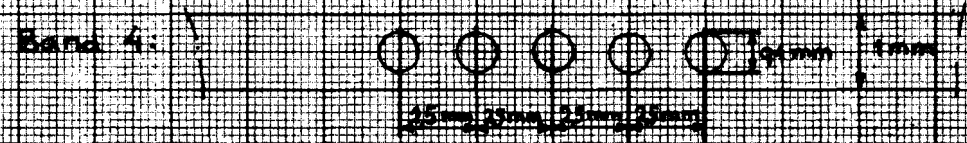


Fig 3.15
 Temperatuursverdeling
 langs zilveren banden
 met en zonder gaatjes

Band 1: Zilverband 1x0,3 mm, zonder gaatjes
 Band 2: Idem, met 1 gat van 0,4 mm diameter



Banddikte in alle gevallen 0,15 mm
 Lengte van de banden: 21-25,5 cm
 Stroomsterkte I bij elke meting 16 Amp

- 617.5.20 -

- 612.3.20 +

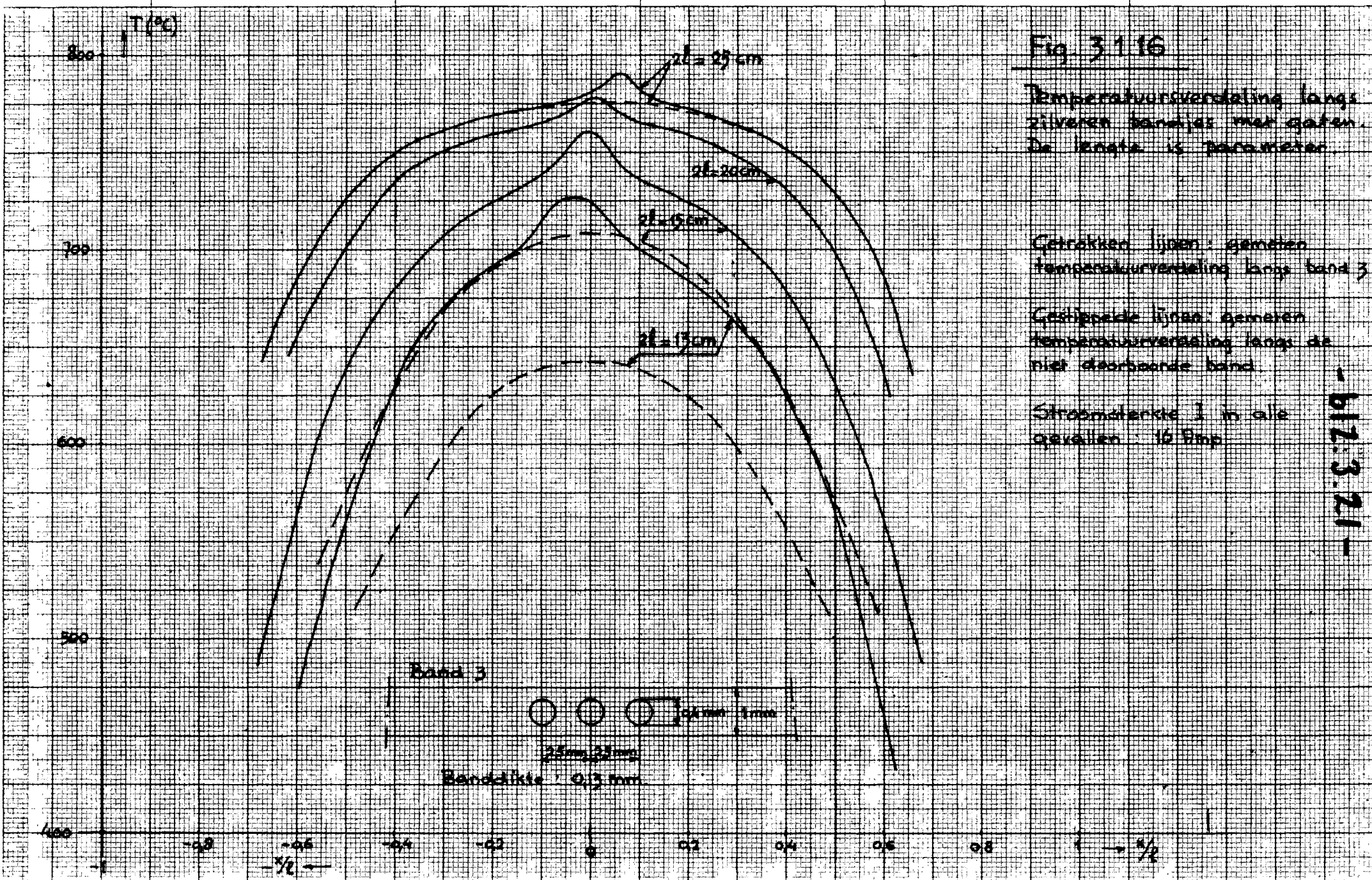


Fig 3116

Temperatuurverdeling langs zilveren bandjes met gaten. De lengte is parameter.

Getrokken lijnen: gemeten temperatuurverdeling langs band 3

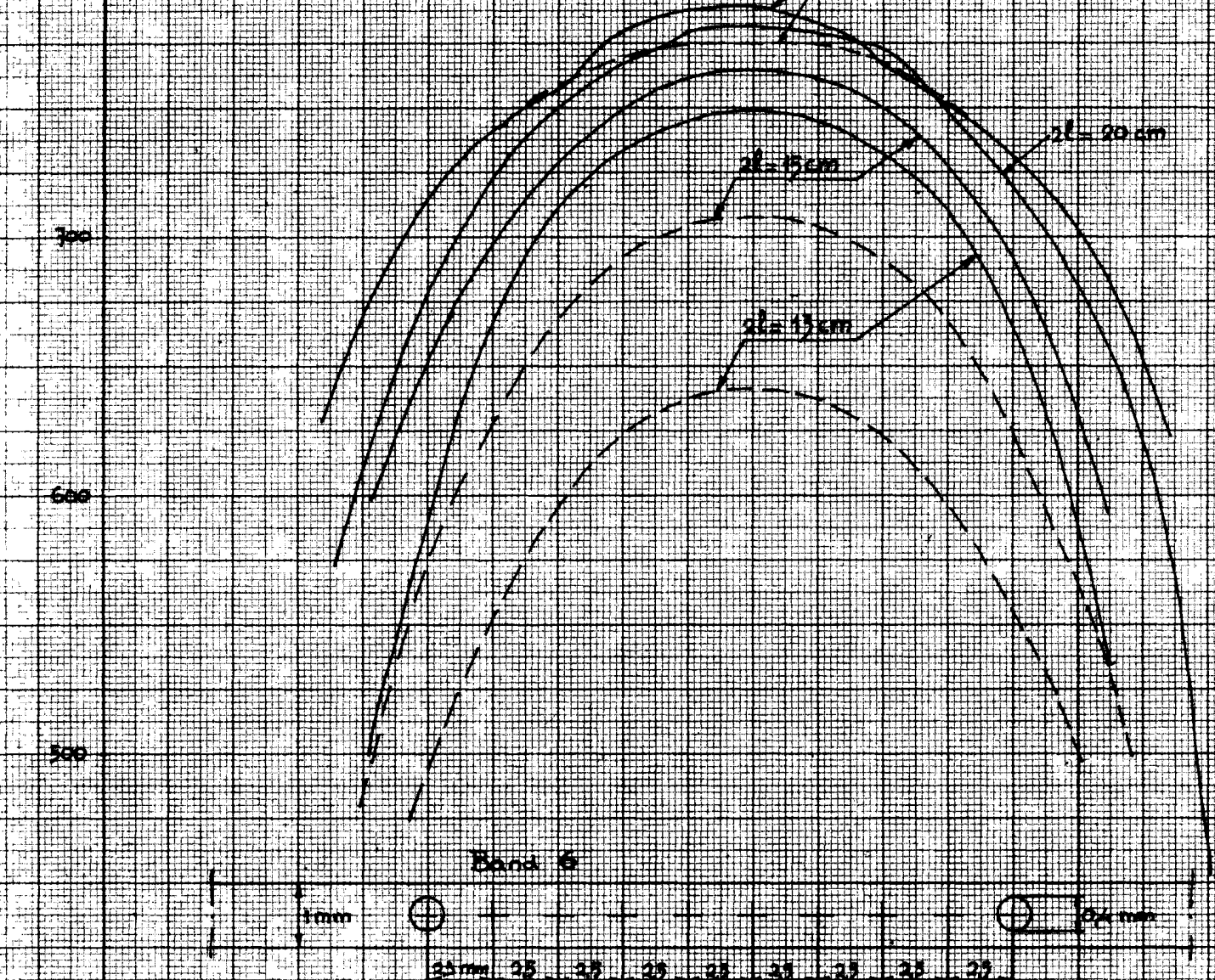
Gestippelde lijnen: gemeten temperatuurverdeling langs de niet doorsaande band

Stroomsterkte 1 in alle gevallen 16 Amp

-612:3:21-

Fig. 3.17

800 T(°C)



Temperatuursverdeling langs zilveren bandjes met gaten. De lengte is parameter.

Gevulde lijnen: gemeten temperatuurverdeling aan band 6

Gestippelde lijnen: gemeten temperatuurverdeling aan de niet doorboorde band.

Stroomsterkte I in alle gevallen: 16 Am

- W1.8.22 -

Band 6

1mm



25mm 25 25 25 25 25 25 25



102mm

Banddikte: 0.3 mm

400

-0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

De grafieken van fig. 3.1.15 laten de resultaten zien van metingen aan banden met resp. geen gat, één gat, 3 gaatjes en 5 gaatjes. De diameter van de gaatjes was in alle gevallen 0,4 mm. De plaats van de gaatjes is in fig. 3.1.15 aangegeven. Bij deze serie metingen was de lengte van alle bandjes dezelfde, nl. 25,5 cm.

Bij de volgende series metingen werd de stationaire temperatuurverdeling bepaald van bandjes met hetzelfde aantal gaten, welke eveneens op dezelfde onderlinge afstanden waren aangebracht, maar met verschillende lengten. De grafieken van de figuren 3.1.16 en 3.1.17 geven van deze metingen de resultaten. In deze figuren zijn gestippeld ter vergelijking tevens de temperatuurverdelingen van bandjes zonder gaatjes van dezelfde lengten weergegeven. Deze laatste temperatuurverdelingen zijn de resultaten van de metingen genoemd onder punt 3.1.3.3.

Op deze wijze is de invloed van gaatjes in smeltbanden op de temperatuurverdeling vrij goed na te gaan. Het boren van de gaatjes in de bandjes diende zeer voorzichtig te geschieden.

Braamvorming moest zoveel mogelijk worden vermeden, afbramen was nl. niet mogelijk, omdat tengevolge van het afbramen beschadigingen van het oppervlak ontstonden. Ter plaatse van deze beschadigingen werd de emissiviteit van het zilver veranderd en dit veroorzaakte uiteraard meetfouten. Een bandje waarvan de gaatjes na het boren zeer voorzichtig waren afgebraamd, leverde op de oscilloscoop een grillige energieverdeling, waaruit niets meer te concluderen viel. Ook een braam is een beschadiging die de stralingsemmissie beïnvloedt, vandaar dat de gaatjes geboord werden in een boormal, waardoor braamvorming tot een minimum werd gereduceerd. Metingen met enkele van de aldus geboorde bandjes leverde reproduceerbare resultaten op.

3.2. Berekeningen en vergelijkingen met de theorie.

Uit de metingen volgens punt 3.1.3.2. (fig. 3.1.13) kan een experimenteel verband worden afgeleid tussen de maximale temperatuur T_m in het midden van een draad als functie van de lengte van die draad.

Deze maximale temperaturen zijn verzameld in tabel 3.V en als functie van de draadlengte $2l$ uitgezet in de grafiek van fig. 3.2.01 (kromme I).

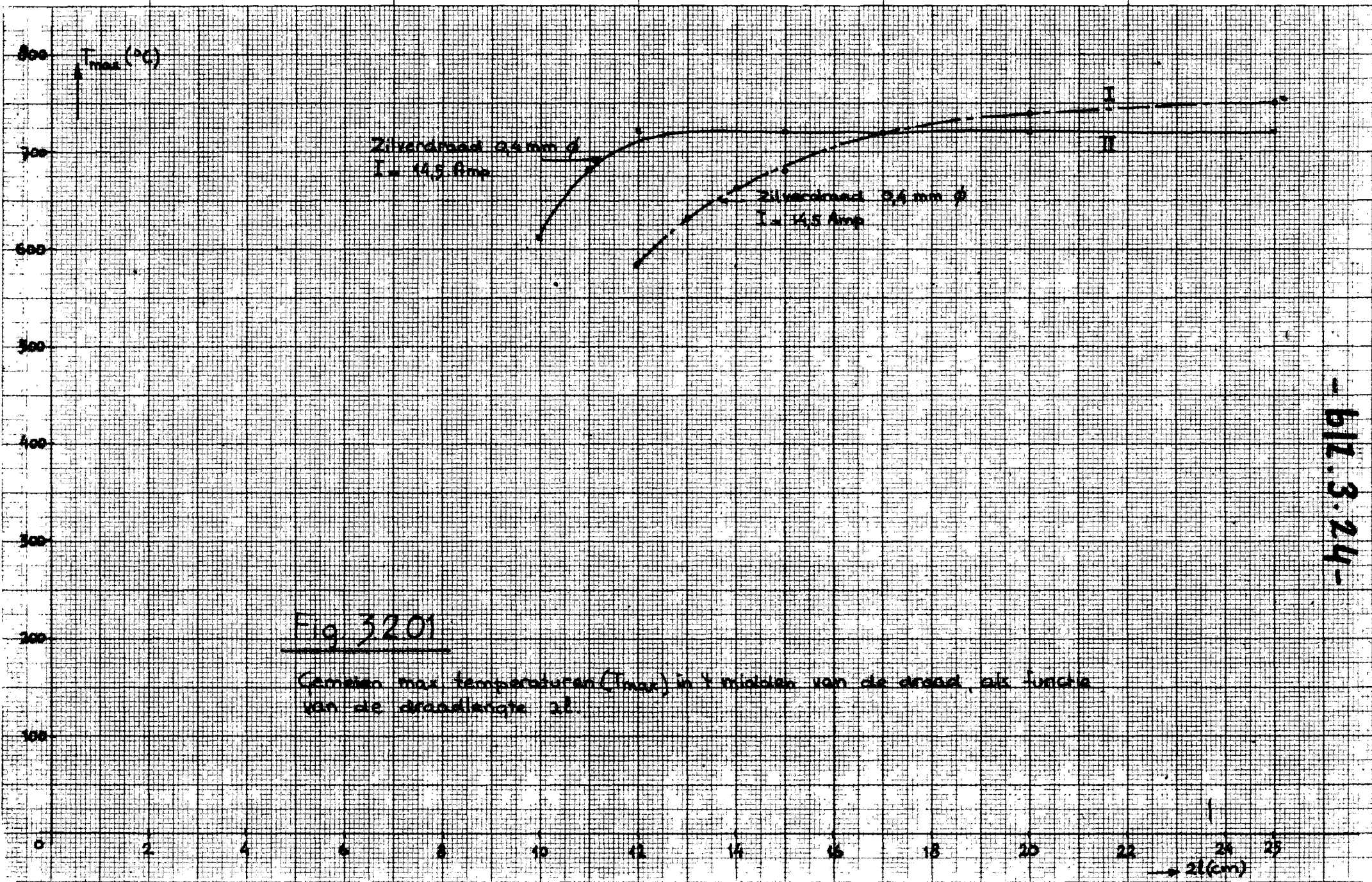


Fig 3201

Gemeten max temperaturen (T_{max}) in χ midden van de draad, als functie van de draadlengte l .

- b11.3.24 -

Tabel 3.V.

2l (cm)	T_m (°C)	$\frac{T_m}{T_{\max}}$
25	750	1
20	742	0,99
17	720	0,96
15	680	0,907
14	664	0,887
13	630	0,84
12	584	0,78

Deze kromme kan ook worden berekend volgens de onder paragraaf 2.2. afgeleide betrekking (2.2.6) :

$$T_m = \frac{b}{a'} \left[1 - \frac{1}{\cosh. l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} \right] + \frac{T_0}{\cosh. l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}}$$

In fig. 3.2.02 is dit theoretisch verband in grafiek gebracht, waarbij T_m is uitgezet als functie van $l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}$

De faktor l is bekend, terwijl voor λ_1 een waarde is te vinden in handboeken.

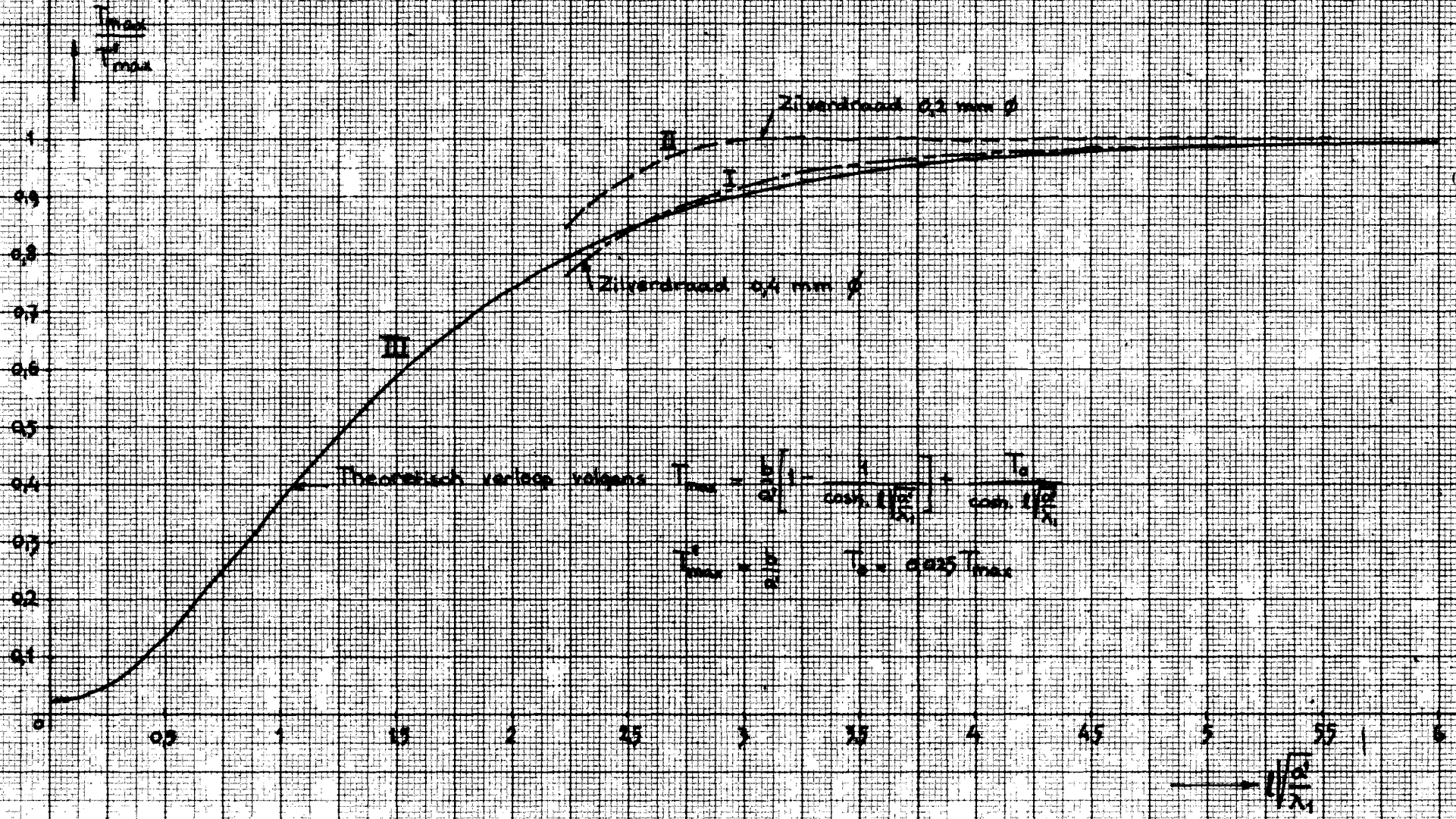
De faktor a' is gedefinieerd volgens betrekking (2.2.4a).

$$a' = G - J^2 \beta \rho_0$$

Hierin is de patroonskonstante G de enige onbekende.

Vergelijking van kromme I van fig. 3.1.18 en de theoretische kromme van fig. 3.1.19 moet een waarde op kunnen leveren voor $\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}$. Met deze waarde kan dan de temperatuursverdeling langs een draad van een bepaalde lengte en bij een gegeven stroomdichtheid worden berekend volgens betrekking (2.2.5b):

Fig 32.02



-612.8.26-

$$T = \frac{b}{a'} \left[1 - \frac{\cosh x \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}}{\cosh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} \right] + T_0 \frac{\cosh x \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}}{\cosh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}}$$

Hierbij wordt dus verondersteld dat $\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}$ onafhankelijk is van de temperatuur en van de lengte. De variabele $2l$ uit fig. 3.2.01 moet nu dus met een zodanige konstante vermenigvuldigd worden, dat kromme I van fig. 3.2.01 zo goed mogelijk samenvalt met de theoretische kromme van fig. 3.2.02. Dit lukt met een waarde van

$$\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} = 0,376 \text{ cm}^{-1}.$$

Voorts dienen we in aanmerking te nemen, dat de theoretische waarde van $\frac{T_m}{T_{\max}}$ langzamer tot zijn asymptoot 1 nadert dan bij kromme I van fig. 3.2.01. We stellen daarom dat bij $2l = 25 \text{ cm}$ de waarde van $\frac{T_m}{T_{\max}}$ gelijk is aan 0,98 in plaats van aan 1. Een dergelijke verandering is met het oog op de meetnauwkeurigheid zeker toelaatbaar.

Met deze gegevens kunnen we tabel 3.VI samenstellen.

Tabel 3.VI.

$2l$ (cm)	$l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}$	$\frac{T_m}{T_{\max}}$ (gemeten)	$\frac{T_m}{T_{\max}}$ (grafiek)
25	4,7	1	0,98
20	3,76	0,99	0,97
17	3,2	0,96	0,94
15	2,82	0,907	0,89
14	2,64	0,887	0,87
13	2,45	0,84	0,823
12	2,26	0,78	0,763

De waarden uit de vierde kolom van tabel 3.VI zijn als functie van de waarden uit de tweede kolom uit deze tabel eveneens uitgezet in fig. 3.2.02 (kromme I). Het blijkt dat deze experimentele kromme

het theoretisch verloop zeer goed benadert.

Met deze waarde van $\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} = 0,376 \text{ cm}^{-1}$ berekenen we de temperatuursverdeling langs draden met een diameter van 0,4 mm en van verschillende lengten en deze berekende temperatuursverdelingen vergelijken we met de gemeten temperatuursverdelingen.

Hierbij bedenken we nog dat voor lange draden geldt (zoals onder 2.2. is afgeleid):

$$T_{\max} = \frac{b}{a'}$$

We hadden gesteld dat $T_m = 0,98 T_{\max}$ en we waren uitgegaan van een maximum temperatuur van 750°C ($T_m = 750^\circ\text{C}$), zodat voor T_{\max} geldt:

$$T_m = 750^\circ\text{C} = 0,98 \frac{b}{a'}$$

Dus:

$$T_{\max} = \frac{b}{a'} = \frac{750}{0,98} = 765^\circ\text{C}$$

Met behulp van deze gegevens omtrent de maximum temperatuur kan dus nu het theoretisch verloop van de temperatuursverdeling worden berekend volgens betrekking (2.2.5b). Het resultaat van deze berekeningen geven de krommen van de figuren 3.2.03 t/m 3.2.09. In deze figuren is tevens het gemeten temperatuursverloop getekend zoals dat is verkregen uit de metingen genoemd onder paragraaf 3.1.3.2. (fig. 3.1.13).

De overeenkomst tussen de op deze wijze berekende temperatuursverdelingen en het experiment is zeer behoorlijk.

Bepaling van G.

De waarde voor $\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} = 0,376 \text{ cm}^{-1}$ blijkt dus goed te voldoen. Hieruit kan een waarde voor G worden berekend, indien we de waarde kennen van λ_1 . Landolt-Bornstein^{*)} geeft voor zilver op:
 $\lambda_1 = 450 \text{ Wm}^{-1}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

*)

- 623.119 -

$$T = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\cos \alpha \sqrt{\frac{R}{\rho}}}{\cos \alpha \sqrt{\frac{R}{\rho}}} - \frac{\cos \alpha \sqrt{\frac{R}{\rho}}}{\cos \alpha \sqrt{\frac{R}{\rho}}} \right]$$

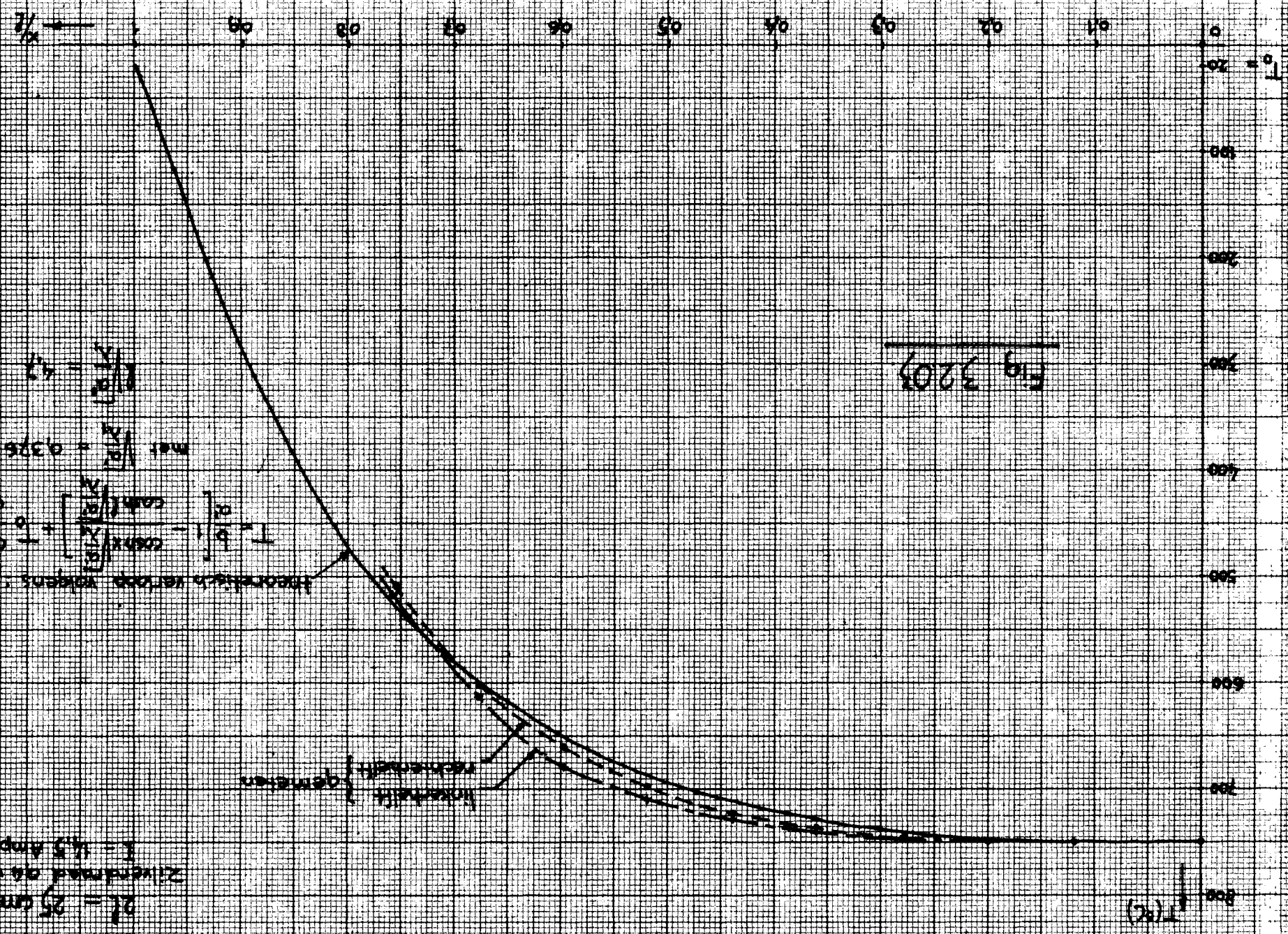
$$\text{mit } \sqrt{\frac{R}{\rho}} = 0,376$$

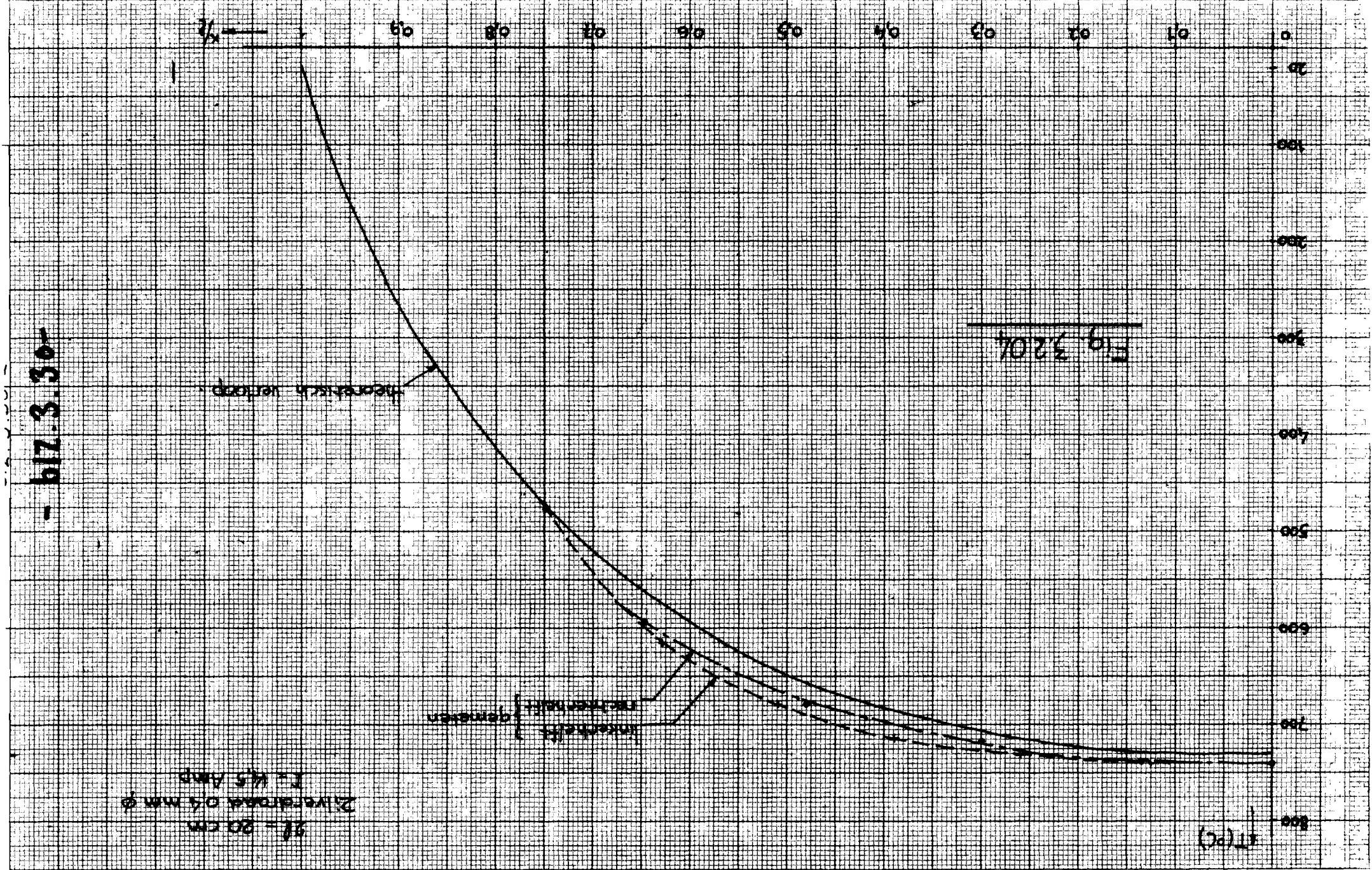
$$\frac{R}{\rho} = 4,7$$

$dL = 25 \text{ cm}$
 $Zylinderwand d = 10 \text{ mm}$
 $I = 14,5 \text{ Amp}$

theoretisch
 gemessen

Fig 3203



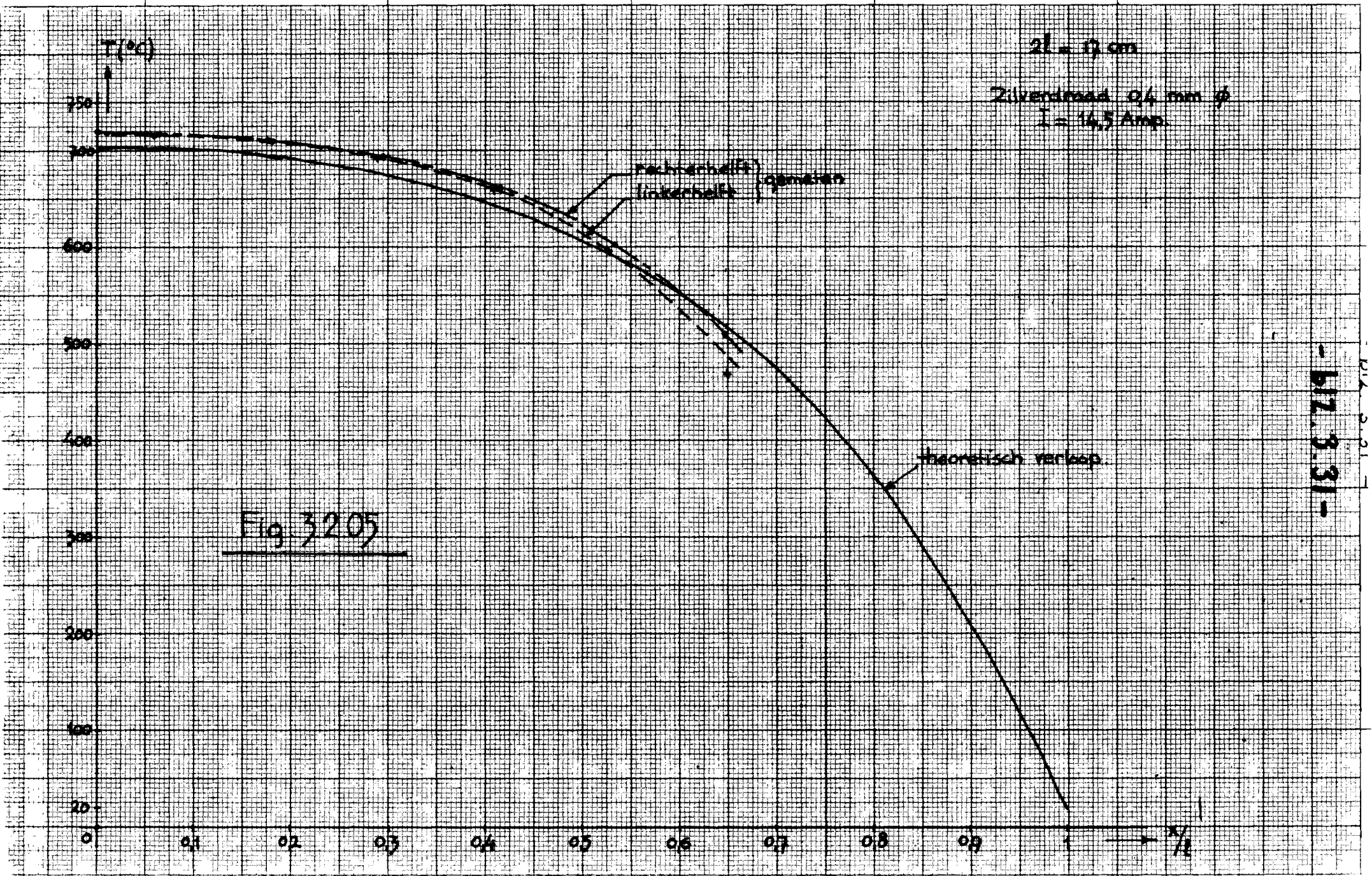


- blz. 3. 30 -

Fig. 3204

Zylinderabstand 25 mm
 T = 45 Amp

T(°C)



2L - 15 cm
Zilverdraad 0,4 mm ϕ
I = 14,5 Amp.

T(°C)

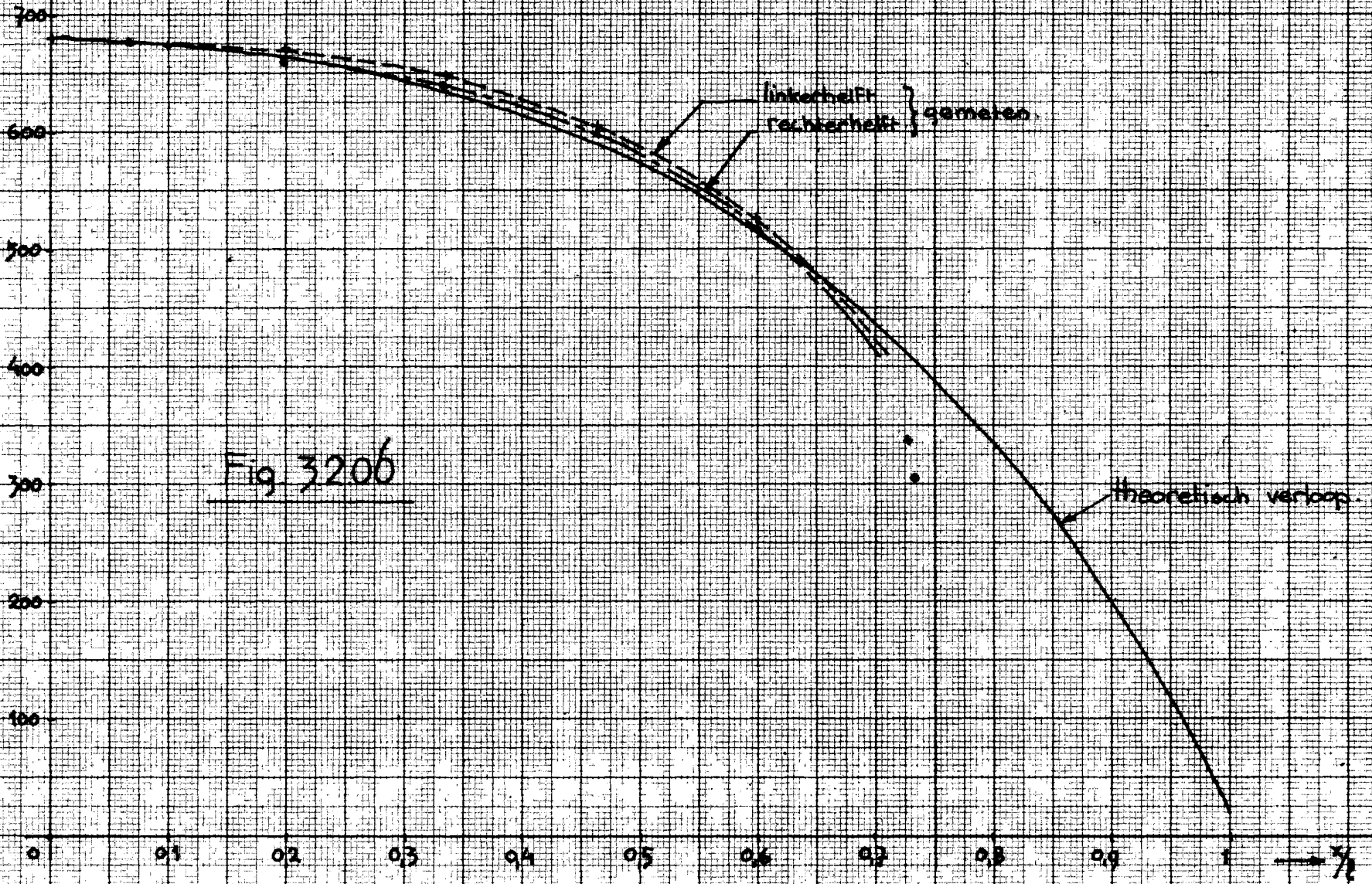


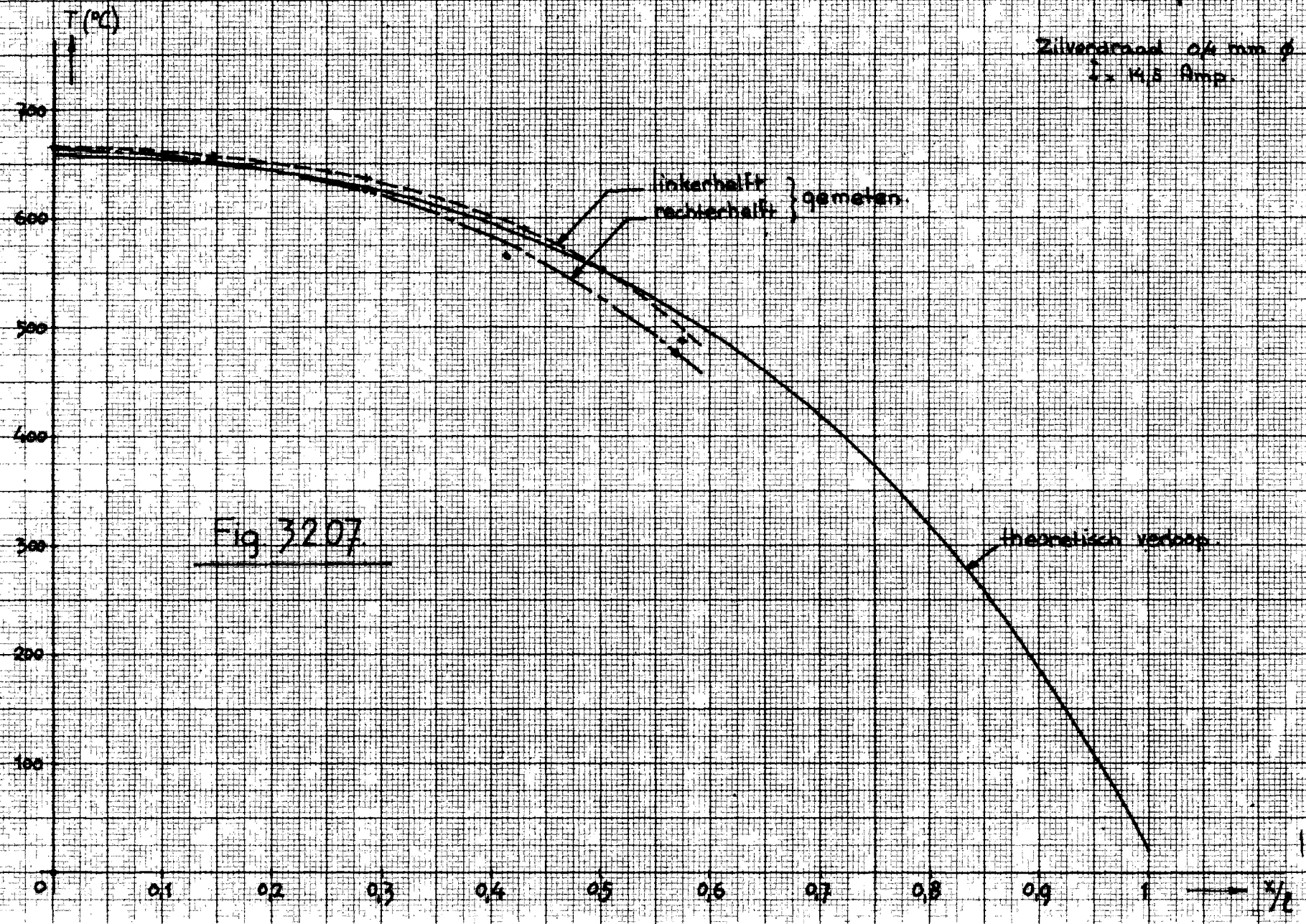
Fig 3206

- 617.3.52 -

012 5.82

$2L = 16 \text{ cm}$

Zilverdraad $0.6 \text{ mm } \phi$
 $I = 14.5 \text{ Amp.}$



- 617.9.83 -
- 012.2.53 -

T (°C)

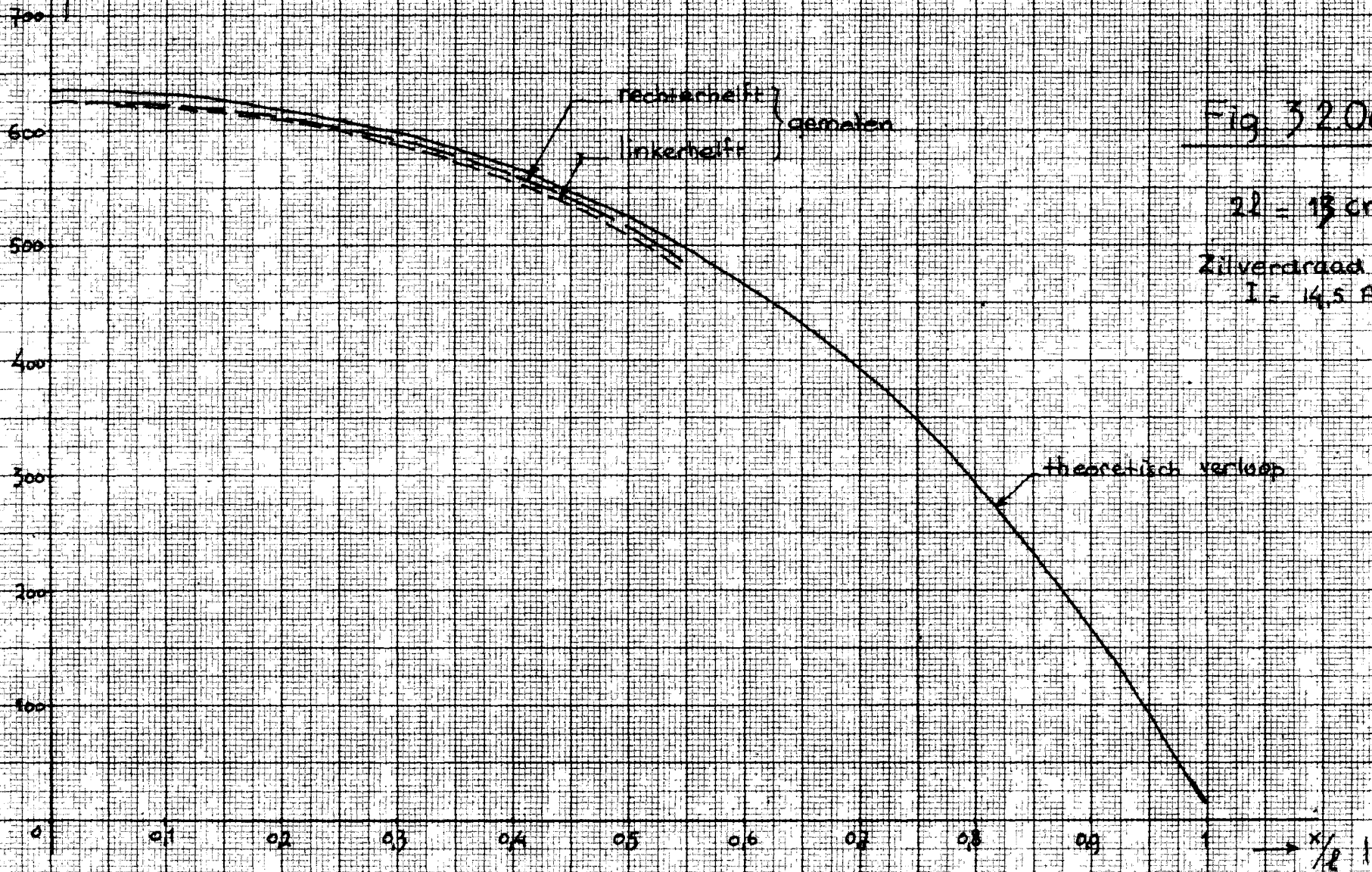


Fig. 3208

$2l = 18$ cm

Zilverdraad 0.4 mm ϕ
 $I = 14.5$ Amp

- 617 3.34 -

$2l = 12 \text{ cm}$

Zilverdraad 0,4 mm
 $I = 14,5 \text{ Amp}$

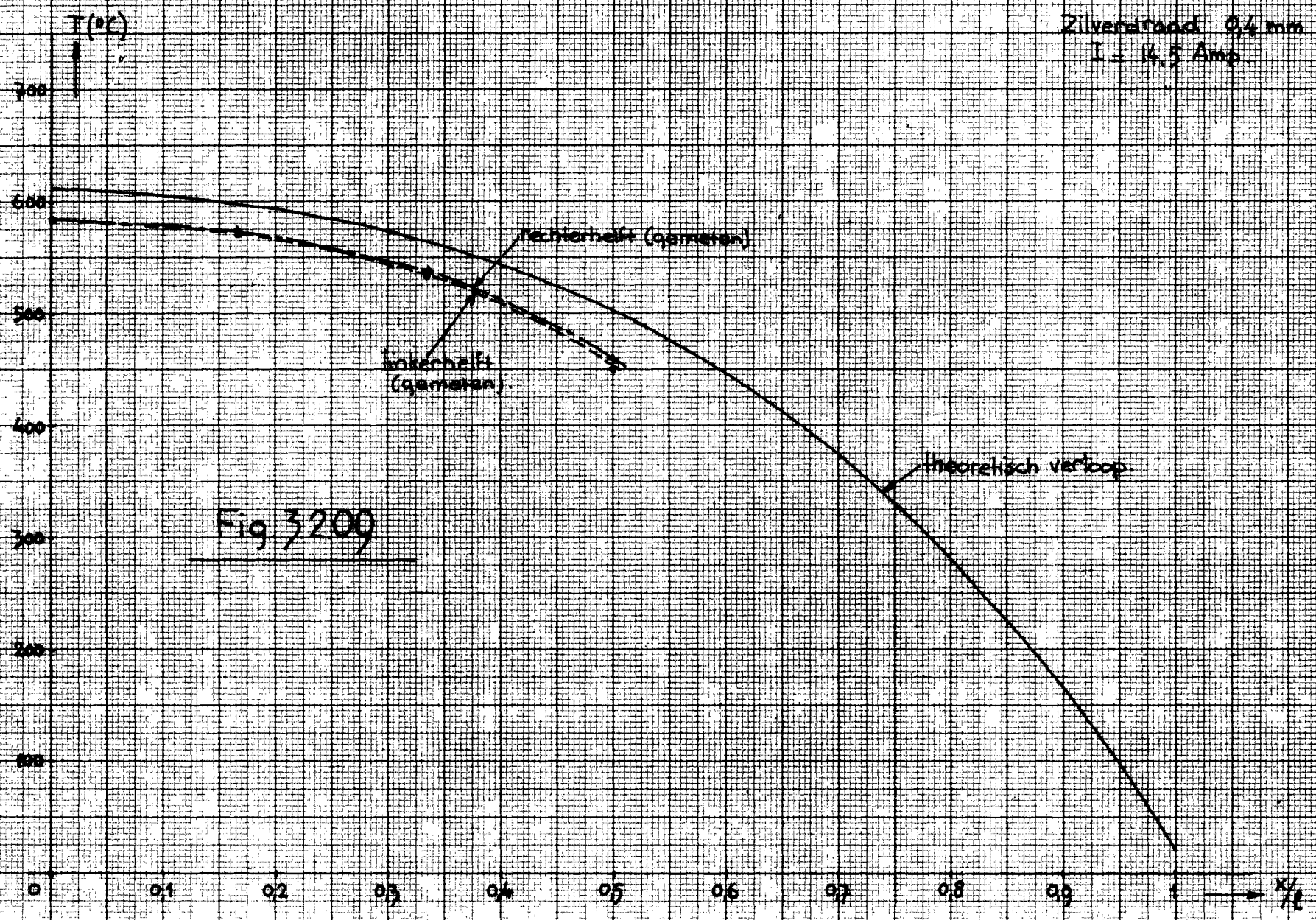


Fig 3200

- 617.3.35 -

Hiermee vinden we:

$$\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} = 37,6 \text{ m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{a'}{\lambda_1} = 1400 \text{ m}^{-2}$$

$$\text{Dus : } a' = 1400 \cdot 450 = 6,3 \cdot 10^5 \text{ Wm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$a' = \gamma - \int^2 \beta \rho_0 \quad , \quad \text{ofwel } G = a' + \int^2 \beta \rho_0$$

Volgens Landolt-Bornstein geldt voor zilver:

$$\beta = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad (\text{gemiddelde waarde})$$

$$\rho_0 = 1,49 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega\text{m}$$

Verder was $I = 1,45 \text{ A}$ in een draad met een diameter van $0,4 \text{ mm}^2$.

Dus volgt voor J :

$$J = \frac{14,5}{\pi \cdot 2 \cdot 10^{-8}} = 1,15 \cdot 10^8 \text{ Am}^{-2}$$

$$\text{Dus } G = 6,3 \cdot 10^5 + 1,15^2 \cdot 10^{16} \cdot 4,4 \cdot 10^{-3} \cdot 1,49 \cdot 10^{-8} = \underline{\underline{15 \cdot 10^5}} \text{ Wm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Ook op andere wijze kan G worden bepaald.

Voor lange draden geldt nl. zoals in het voorgaande is afgeleid:

$$T_{\max} = \frac{b}{a'}$$

Uit het verloop van grafiek I in fig. 3.2.02 blijkt dat de maximale temperatuur van een draad van 25 cm lengte reeds zeer dicht bij de maximale temperatuur van een oneindig lange draad moet liggen. We hebben in het voorgaande hiervan reeds een schatting gemaakt, nl. bij $2l = 25 \text{ cm}$ geldt $T_m = 0,98 T_{\max}$, als T_{\max} de maximale temperatuur van een oneindig lange draad is.

Gemeten is: $T_m = 750^\circ\text{C}$ bij $2l = 25 \text{ cm}$, zodat $T_{\max} = \frac{750}{0,98} = 765^\circ\text{C}$.

Voor T_{\max} is te schrijven:

$$T_{\max} = \frac{b}{a'} = \frac{j^2 \rho_0 + G T_0}{G - j^2 \beta \rho_0} = 765 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Hierin is G de enige onbekende.

Dus volgt:

$$G \left(\frac{b}{a'} - T_0 \right) = j^2 \rho_0 \left(\beta \frac{b}{a'} + 1 \right)$$

of:

$$G = \frac{j^2 \rho_0 \left(\beta \frac{b}{a'} + 1 \right)}{\frac{b}{a'} - T_0}$$

Indien we hierin de hierboven genoemde getalwaarden invoeren, dan volgt voor G :

$$G = \underline{11,5 \cdot 10^5} \text{ Wm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Deze waarde van G ligt in dezelfde grootte-orde als de hierboven gevonden waarde voor G .

Een derde mogelijkheid voor het bepalen van G is door meting van de weerstandstoename van de draad. Hierover is onder punt 2.2. reeds enige mededeling gedaan.

In fig. 3.2.10 is betrekking (2.2.10), t.w.:

$$\Delta R = 2 \frac{\rho_0 \beta}{\pi r^2} \left[\frac{b}{a'} l - \sqrt{\frac{\lambda_1}{a'}} \left(\frac{b}{a'} - T_0 \right) \tanh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} \right]$$

in grafiek gebracht voor een zilverdraad van 0,4 mm diameter, bij een stroom van 14,5 Amp.

Fig. 3210

De weerstandstoename ΔR als functie van G volgens de relatie:

$$\Delta R = \frac{2\rho_0 \beta}{\pi r^2} \left[\frac{b}{a} \ell - \sqrt{\lambda} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) \tanh \sqrt{\frac{a}{\lambda}} \right]$$

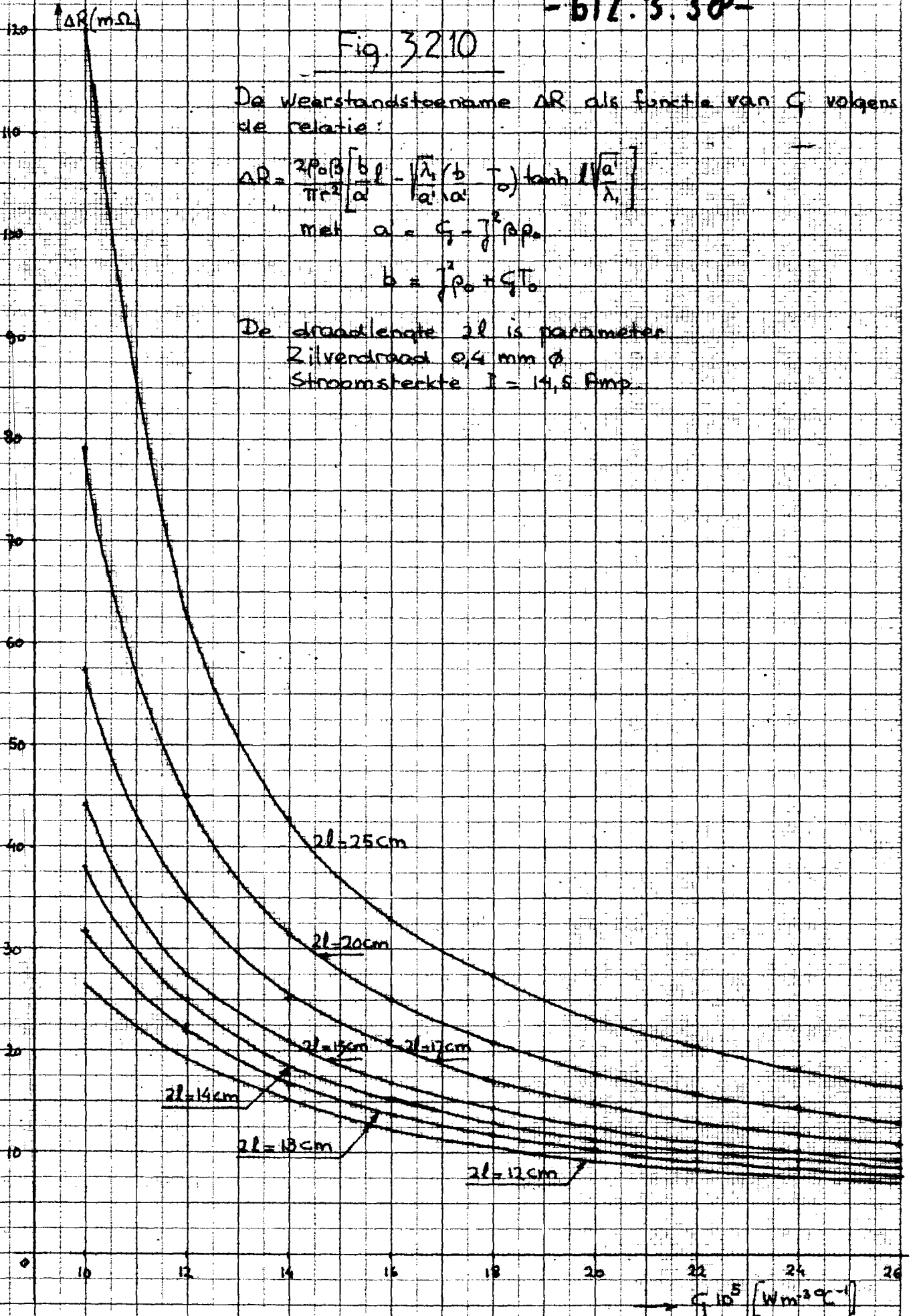
met $a = G - j^2 \rho_0$

$b = j^2 \rho_0 + G T_0$

De draadlengte 2ℓ is parameter

Zilverdraad $\phi = 4 \text{ mm}$

Stroomsterkte $I = 14,5 \text{ Amp}$



$G \cdot 10^5 \text{ [Wm}^{-3}\text{C}^{-1}\text{]}$

In deze figuur is uitgezet de weerstandstoename ΔR als functie van de patroonskonstante G , met de draadlengte $2l$ als parameter.

Met behulp van deze grafieken is het in principe mogelijk uit de gemeten weerstandstoename bij een gegeven draadlengte $2l$ de patroonskonstante G te bepalen.

In tabel 3.II zijn enkele meetresultaten verzameld (zie onder paragraaf (3.1.3.2) van een draad van 0,4 mm diameter bij een stroom van 14,5 Amp.

In tabel 3.VI zijn deze meetresultaten nogmaals vermeld met de daarbij behorende waarden van de weerstandstoename ΔR .

De kolom R_{20} ($m\Omega$) is berekend als volgt:

De weerstand bij $0^{\circ}C$, t.w. R_0 volgt uit:

$$R_0 = \frac{2l \cdot \rho_0}{q}$$

De weerstand bij $20^{\circ}C$, t.w. R_{20} volgt dan uit:

$$R_{20} = R_0(1 + \beta T) = R_0(1 + 4 \cdot 10^{-3} \cdot 20) = 1,08 R_0$$

Voor deze temperatuursinterval geldt nl. volgens Landolt-Bornstein:

$$\beta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}C^{-1}$$

De weerstandstoename ΔR is berekend volgens:

$$\Delta R = R - R_{20}$$

Tabel 3.VI.

2l (cm)	R (mΩ)	R ₂₀ (mΩ)	R (mΩ)
25	131	32	99
20	100,5	25,5	75
17	83,5	21,7	61,8
15	68,5	19,2	49,3
14	63	17,9	45,1
13	58	16,6	41,4
12	53	15,3	37,7

Gaan we nu na waar deze gemeten waarden van ΔR bij elke draadlengte in de grafieken van fig. 3.2.10 liggen, dan blijkt dat bij verschillende draadlengte verschillende waarden van G gevonden worden. Dit is uiteraard onwaarschijnlijk.

In fig. 3.2.11 is de weerstandstoename ΔR uitgezet als functie van $2l$ zoals deze voor ons geval volgt uit betrekking (2.2.10), met G als parameter. In dezelfde figuur zijn de waarden van ΔR uit tabel 3.VI uitgezet als functie van $2l$. Nu blijkt dat het experimentele verloop een helling te zien geeft die ongeveer overeenkomt met de helling van de lijn voor $G = 12 \cdot 10^5 \text{ Wm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ in dezelfde figuur. En deze waarde van G komt weer goed overeen met de in het voorgaande gevonden waarden voor G . Het ligt voor de hand te veronderstellen, dat bij de meting van de draadweerstand een konstante fout is gemaakt (b.v. een overgangsweerstand die steeds meegemeten werd).

We zullen nu uit de gemeten maximale temperatuur aan een draad van 0,2 mm diameter de waarde van G en met behulp van G de temperatuursverdeling berekenen. Deze berekende temperatuursverdeling zullen we vergelijken met de gemeten temperatuursverdeling. Gemeten is dat een stroomsterkte $I = 6,3 \text{ Amp.}$ in een zilverdraad van 0,2 mm diameter een maximale temperatuur T_m deed ontstaan van 720°C (zie fig. 3.2.01). We stellen deze temperatuur gelijk aan $\frac{b}{a}$, , dus:

$\Delta R (m\Omega)$

Fig 3-211

De weerstandstoename ΔR als functie van de draadlengte z_l van een zilverdraad 0,4 mm diameter bij een stroomsterkte van 14,5 Amp. G_r is parameter

De getrokken lijnen zijn berekend volgens:

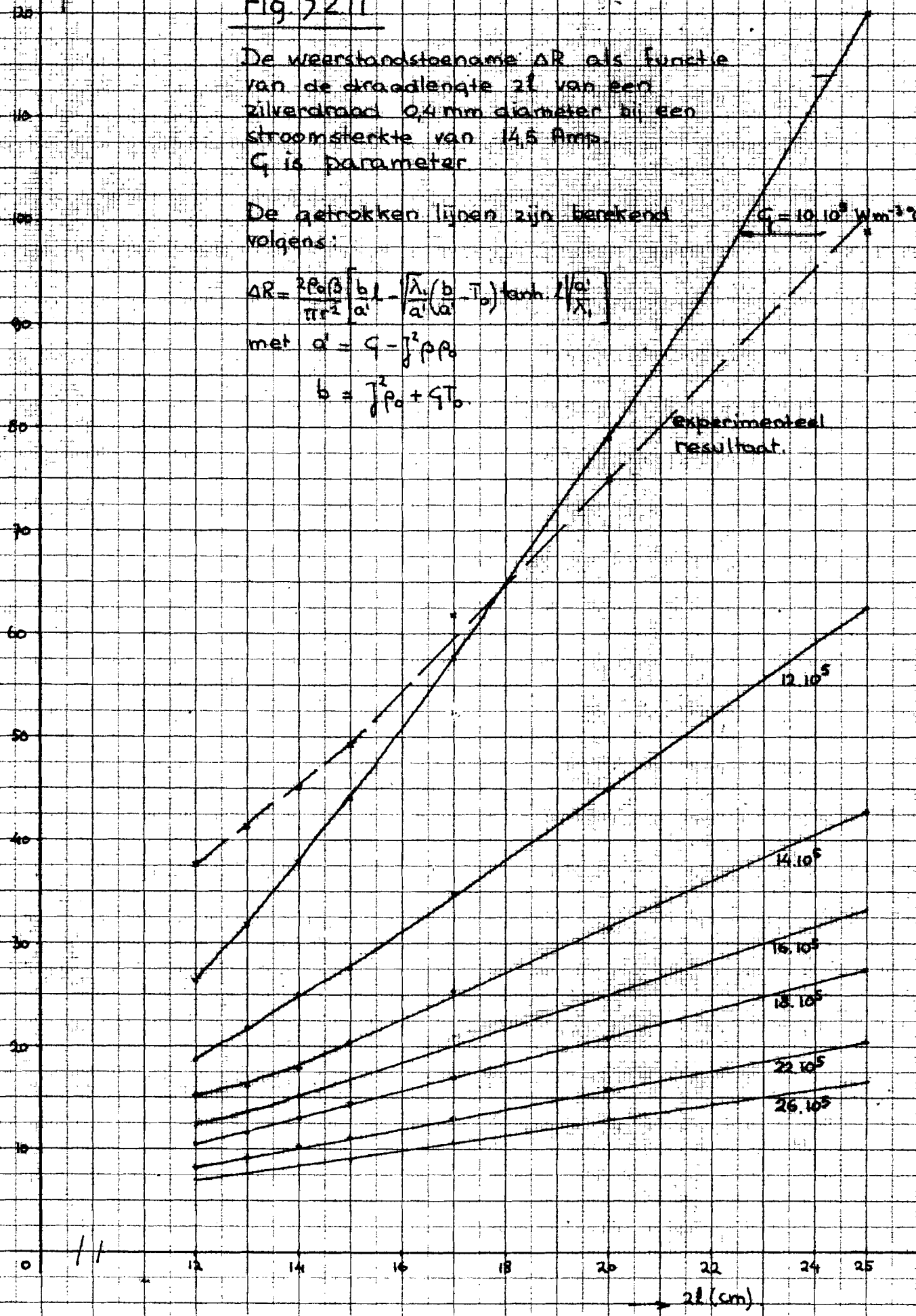
$$\Delta R = \frac{2\rho_0\beta}{\pi r^2} \left[\frac{b}{a'} - \sqrt{\frac{\lambda_0}{a'(\lambda_0 + T_0)}} \tanh \left(\frac{a'}{\lambda_0} \right) \right]$$

met $a' = G_r - j^2 \rho_0$

$b = j^2 \rho_0 + G_r T_0$

$G_r = 10 \cdot 10^5 \text{ Wm}^{-2}\text{C}^{-1}$

experimenteel resultaat.



$$T_{\max} = 720^{\circ}\text{C} = \frac{b}{a'} = \frac{j^2 \rho_0 + \zeta T_0}{\zeta - j^2 \beta \rho_0}$$

Met: $\rho_0 = 1,49 \cdot 10^{-8} \text{ m}$

$$\beta = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

$$T_0 = 20^{\circ}\text{C}.$$

$$I = 6,3 \text{ Amp} \Rightarrow J = 2 \cdot 10^8 \text{ Am}^{-2}$$

volgt hieruit voor G een waarde van

$$G = \underline{3,57 \cdot 10^6} \text{ Wm}^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}.$$

Hiermede berekenen we $\sqrt{\frac{a'}{\lambda}}$

$$a' = \zeta - j^2 \beta \rho_0 = 93 \cdot 10^4 \text{ Wm}^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

met $\lambda_1 = 450 \text{ Wm}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ volgt hieruit:

$$\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} = 45 \text{ m}^{-1} = 0,45 \text{ cm}^{-1}$$

Met deze waarde voor $\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}$ zijn de waarden in de 2^e kolom van tabel 3.VII berekend. De beide andere kolommen in deze tabel vermelden gemeten waarden.

Tabel 3.VII.

2l (cm)	$l\sqrt{\frac{\alpha'}{\lambda_1}}$	T_m	$\frac{T_m}{T_{\max}}$
25	5,6	720	1
20	4,5	720	1
15	3,4	720	1
12	2,8	720	1
11	2,5	680	0,94
10	2,25	610	0,85

De waarden van tabel 3.VII zijn eveneens uitgezet in fig. 3.2.02 (kromme II). Vergelijking van de krommen II en III uit fig. 3.2.02 is niet helemaal correct, aangezien kromme III is uitgerekend voor de in de draad van 0,4 mm diameter optredende stroomdichtheid, en deze verschilt iets van de stroomdichtheid die optrad in de draad van 0,2 mm. De stroomdichtheid in de draad van 0,2 mm is iets groter dan in die van 0,4 mm. Kromme III zal dus iets moeten verschuiven in de richting van kromme II. De overeenstemming tussen theorie en experiment is dan ook redelijk te noemen.

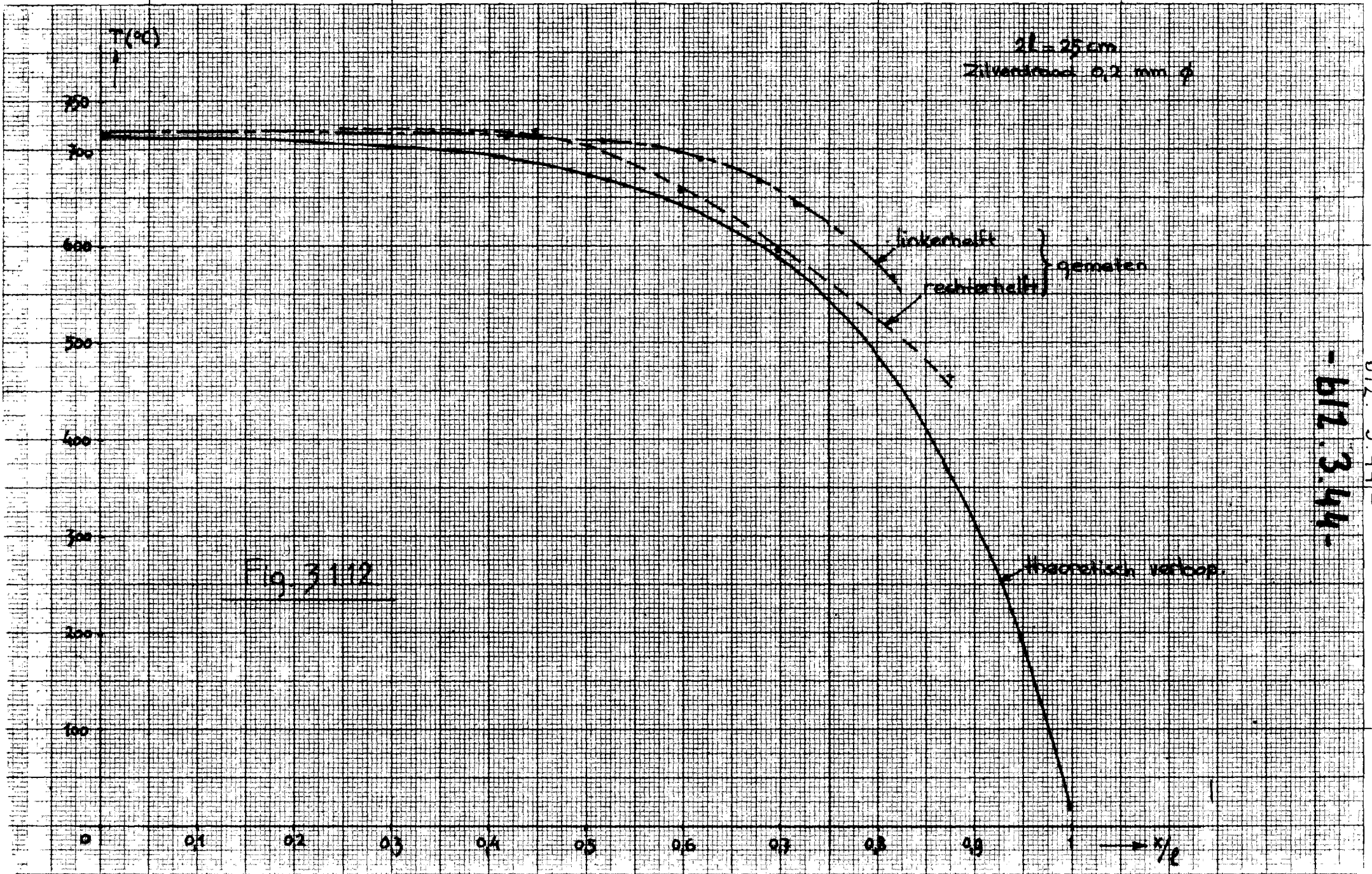
Met $\sqrt{\frac{\alpha'}{\lambda_1}} = 0,45 \text{ cm}^{-1}$ is de temperatuursverdeling uitgerekend voor een draad van 25 cm lengte en 0,2 mm diameter. Het resultaat geeft fig. 3.2.12. Tevens is in deze figuur het gemeten temperatuursverloop getekend, zoals dat ook reeds was weergegeven in fig. 3.1.12.

De grenslaag.

De patroonskonstante G is in het voorgaande gedefinieerd als:

$$G = \frac{2\lambda_2}{r_1(r_2 - r_1)} = \frac{2\lambda_2}{G \cdot \Delta r}$$

λ_2 is hierin de warmtegeleidbaarheid van het medium dat de zilverdraad omgeeft, in ons geval dus van de lucht. Δr noemen we de grenslaag.



In principe is uit de gevonden waarden voor G een grenslaag Δr te berekenen indien λ_2 bekend is. Nu is λ_2 een temperatuursafhankelijke functie. Deze temperatuursafhankelijkheid is grafisch voorgesteld in fig. 3.1.13.*)

Om enig idee te krijgen van de grootte-orde van Δr nemen we voor λ_2 een gemiddelde waarde. We stellen $\lambda_2 = 0,05 \text{ Wm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Bij een draad van 0,4 mm diameter berekenen we waarden voor G die varieerden tussen $11,5 \cdot 10^5$ en $15 \cdot 10^5 \text{ Wm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Uit $G = 15 \cdot 10^5 \text{ Wm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ volgt een waarde voor Δr groot:

$$\Delta r = \underline{0,33} \text{ mm.}$$

Uit $G = 11,5 \cdot 10^5 \text{ Wm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ volgt: $r = \underline{0,435} \text{ mm.}$

De grenslaag Δr is dus zeer dun.

Bij een draad van 0,2 mm diameter berekenen we voor G :

$$G = 3,57 \cdot 10^6 \text{ Wm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Met dezelfde waarde voor λ_2 volgt hieruit voor de grenslaag:

$$\Delta r = \underline{0,28} \text{ mm.}$$

Deze waarde is van dezelfde grootte-orde als bij een draad van 0,4 mm diameter.

Wat is eigenlijk deze grenslaag?

Bij de afleiding van de betrekking voor de stationaire temperatuurverdeling langs een draad (paragraaf 2.2) zijn we er van uitgegaan, dat de warmte-afgifte in radiale richting uitsluitend door warmtegeleiding tot stand komt. Warmte-afgifte als gevolg van stroming hebben we geheel buiten beschouwing gelaten. Toch blijkt deze theorie goed in overeenstemming te zijn met de temperatuurverdeling langs in lucht uitgespannen draden en hierbij wordt algemeen aangenomen, dat de warmte-afgifte als gevolg van stroming van de lucht langs de draad tot stand komt.

In feite hebben we bij de afleiding dus aangenomen dat zich rond de draad een stilstaande laag lucht bevindt (de grenslaag), waarbinnen het gehele temperatuursverval bestaat. Met behulp van deze grenslaag is de faktor G gedefinieerd. Deze veronderstelling blijkt, voor wat betreft dunne, horizontaal uitgespannen draden in lucht, niet in strijd te zijn met experimentele resultaten, zoals hierboven is aangetoond.

*) De gegevens voor deze figuur zijn ontleend aan Gröber/Erk/Grigull: Wärmeübertragung. Springer Verlag, 3e druk, 1961.

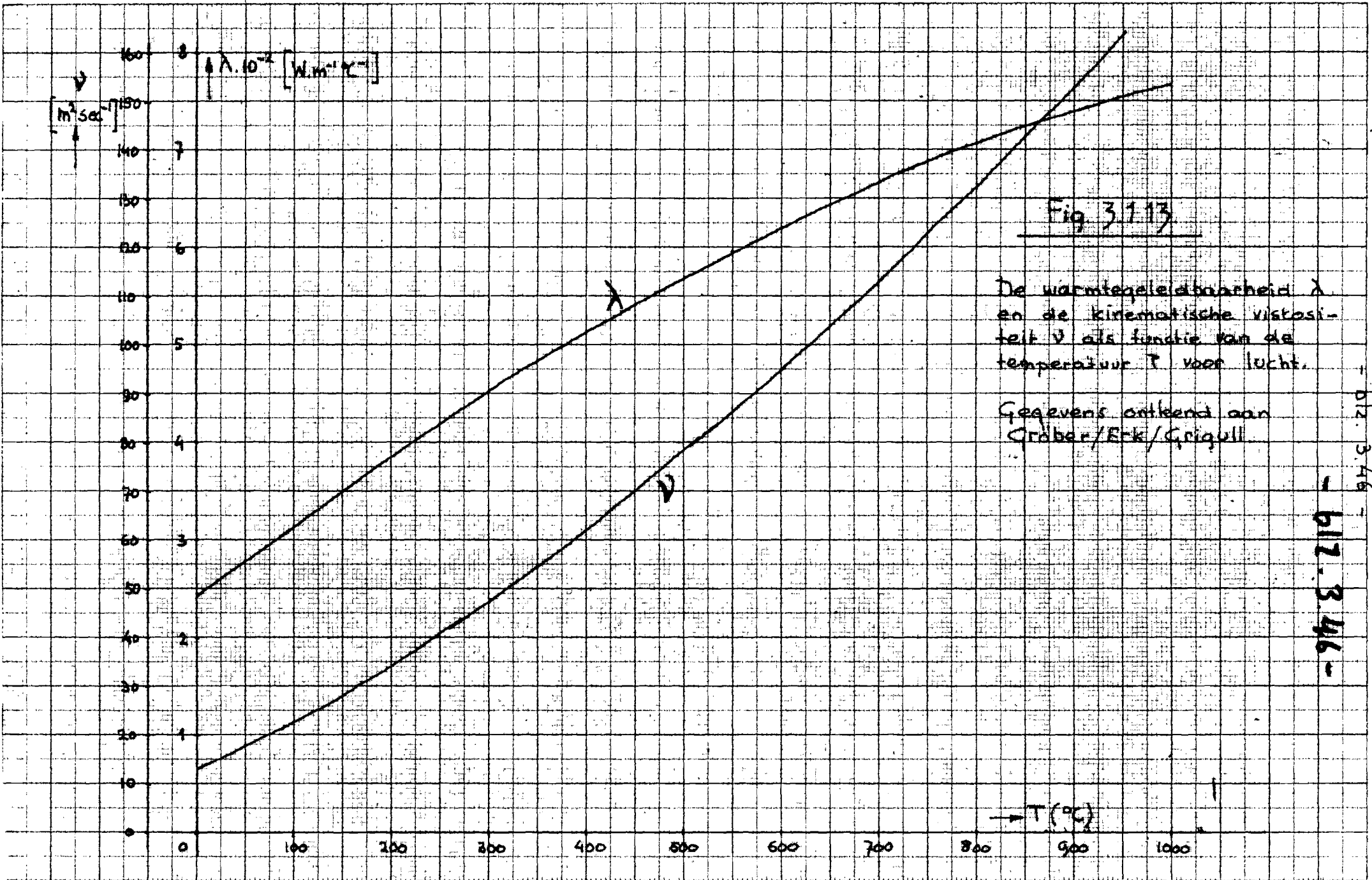
$\lambda \cdot 10^{-2} \text{ [W.m}^{-1}\text{.}^{\circ}\text{C}^{-1}\text{]}$
 $\nu \text{ [m}^2\text{.sec}^{-1}\text{]}$

Fig 3.1.13

De warmtegeleidsbaarheid λ
 en de kinematische viscositeit ν
 als functie van de
 temperatuur T voor lucht.

Gegevens ontleend aan
 Gröber/Erk/Grigull

- b12. 3.46 -
 - b17. 3.46 -



Langmuir heeft reeds verondersteld dat deze grenslaag bestond^{*)}. In een artikel van Elenbaas^{**)} wordt aan deze grenslaag eveneens enige aandacht besteed.

De hoge temperatuur van de draad doet de viscositeit belangrijk toenemen (zie fig. 3.2.13). Het gas vlak bij de draad zou hierdoor vrijwel stil kunnen gaan staan, d.w.z. geen driftsnelheid in een bepaalde richting meer hebben. Bovendien neemt de warmtegeleidbaarheid van lucht bij hogere temperatuur toe (zie: fig. 3.2.13), tengevolge waarvan dus het warmtetransport door geleiding toeneemt. Het gedrag van de warmtegeleidbaarheid en de viscositeit bij hogere temperaturen zou dus het bestaan van deze grenslaag plausibel kunnen maken.

Bovendien veronderstelde Langmuir dat aan de buitenzijde van de grenslaag de temperatuursgradiënt $\frac{dT}{dr}$ onafhankelijk is van de draaddiameter r_1 . Dan is echter ook aan te tonen dat de dikte van de grenslaag Δr onafhankelijk is van de kromming van het draadoppervlak.

Inderdaad volgde uit het experiment dat bij draden van 0,2 mm diameter en 0,4 mm diameter de dikte van de grenslaag Δr van dezelfde grootte-orde is. Teneinde hieromtrent nog enige experimentele gegevens te verkrijgen zijn nog metingen gedaan aan zilverband van rechthoekige doorsnede 1 x 0,13 mm. (Zie onder 3.1.3.3, fig. 3.1.14). Uit fig. 3.1.14 volgt fig. 3.2.14. Deze figuur geeft het verband tussen de maximale temperatuur in het midden van de band als functie van de bandlengte $2l$.

Weer is getracht, door keuze van $\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_1}}$ de grafiek van fig. 3.2.14 in overeenstemming te brengen met het theoretisch verloop. Het resultaat geeft fig. 3.2.15. De krommen A en B in deze figuur zijn de "vertaalde" grafiek van fig. 3.2.14: Kromme A is uitgerekend met $\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_1}} = 0,376 \text{ cm}^{-1}$ terwijl kromme B is uitgerekend met $\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_1}} = 0,36 \text{ cm}^{-1}$.

De overeenstemming met de theorie is, zoals uit deze figuur blijkt, zeer behoorlijk.

^{*)} I. Langmuir, Phys. Rev. 34, 401 (1912).

^{**)} W. Elenbaas: The dissipation of heat by free convection from vertical and horizontal cylinders. Journal of Applied Physics 19, 1148 (1948).

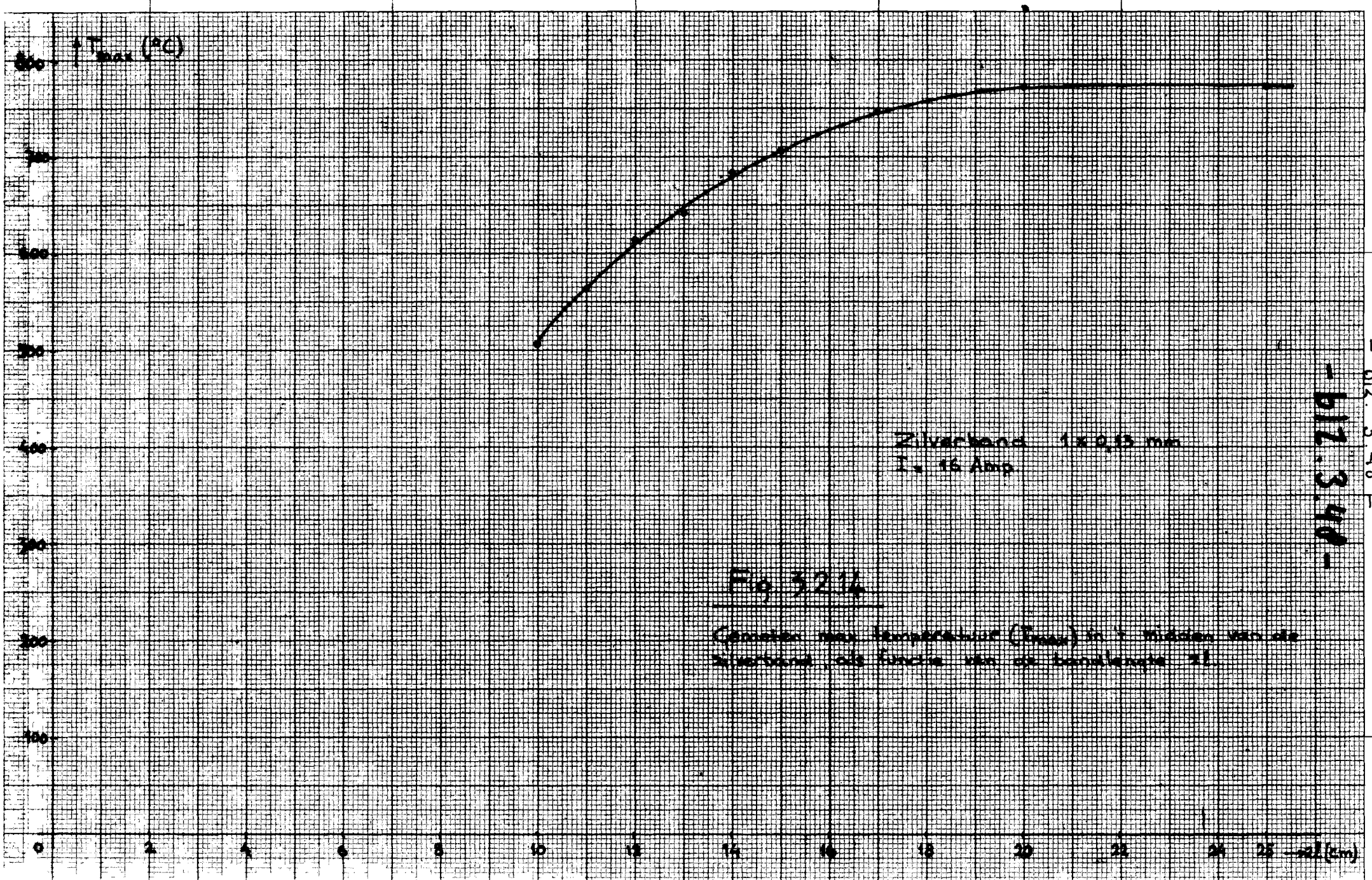


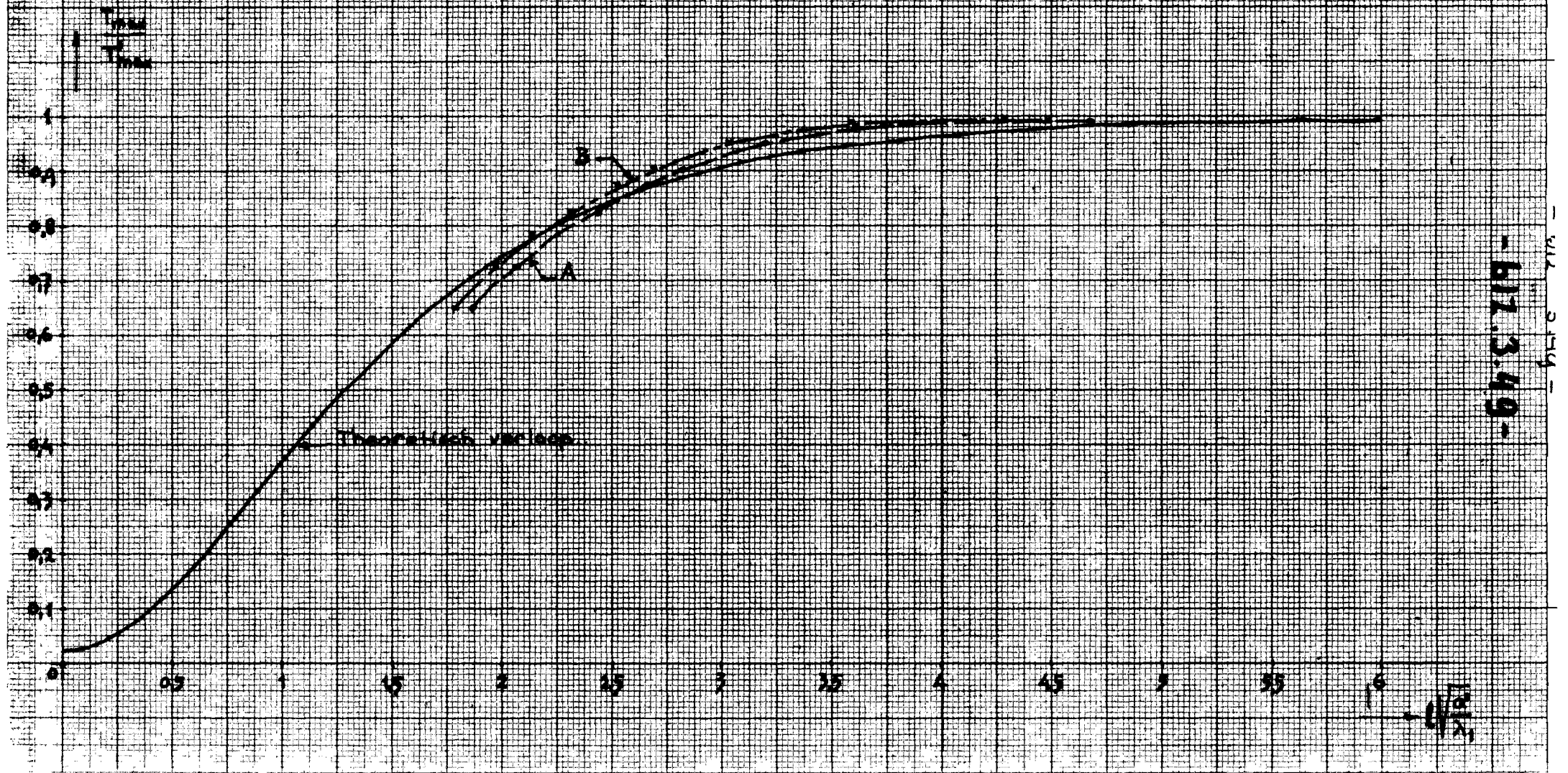
Fig. 3214

Gemeten max. temperatuur (T_{max}) in 7 milliden van de
 startpunt, de einde van de bandlengte 21.

-617.340-

Fig. 3.2.15

Zilverband 12013mm
I = 16 Amp



- 617.3.49 -

De zilverband 1 x 0,13 mm heeft bijna dezelfde doorsnede als een ronde draad van 0,4 mm diameter. Uit metingen aan draden van 0,4 mm diameter volgde een waarde van $\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} = 0,376 \text{ cm}^{-1}$ zodat dus uit metingen aan band en aan ronde draad eenzelfde waarde van a' en dus van G volgt. Bijgevolg moet ook de dikte van de grenslaag Δr in beide gevallen van dezelfde grootte-orde zijn. De veronderstelling dat de dikte van de grenslaag onafhankelijk is van de kromming van het draadoppervlak blijkt dus met dit experiment in overeenstemming. Aan deze grenslaag wordt in een artikel van Senftleben^{*)} een interessante beschouwing gewijd. Senftleben gaat niet uit van een stilstaande gaslaag, zoals Elenbaas en Langmuir, maar van een stromend medium rond de draad. Hij toont echter aan dat de temperatuursverdeling in deze stromende laag zodanig is, dat deze opgevat kan worden als te zijn veroorzaakt door geleiding.

3.3. De invloed van gaatjes in een zilverband op de temperatuursverdeling.

Uit het theoretisch verloop van de maximale temperatuur in het midden van de band als functie van de bandlengte $2l$ (zie fig. 3.2.15) blijkt dat de temperatuursverhoging bij zeer korte bandlengte zeer klein is. De kromme loopt in de buurt van de oorsprong over een zekere lengte bijna vlak. Dit betekent dat een plaatselijke verdunning of een gat in een zilverband maar een kleine invloed heeft op de temperatuur ter plaatse van de verdunning of het gat. De invloed van de uiteinden van de verdunning (dus de axiale warmte-afgifte) is groot.

De metingen genoemd onder 3.1.3.4 bevestigen dit (zie de figuren 3.1.15, 3.1.16 en 3.1.17).

Verder blijkt dat door het aanbrengen van gaten in de band de invloed van de uiteinden op dat gedeelte van de band waarin de gaten zijn aangebracht, aanzienlijk vermindert, de maximale temperatuur in het midden van een korte band is maar weinig lager dan de maximale temperatuur bij zeer lange banden.

Dit resultaat ligt enigszins voor de hand. Immers, de maximale temperatuur, waarvoor geldt:

$$T_{\max} = \frac{b}{a},$$

komt tot stand in het midden van een zodanig lange draad dat de

^{*)} H. Senftleben: Z.f. angew. Physik, III. Band, H.10 (1951), pp. 361.

axiale warmte-afgifte via de uiteinden geen invloed meer uitoefent op de temperatuur in het midden van de draad. Voor deze axiale warmte-afgifte geldt echter (zie onder 2.1)

$$\phi_x = \lambda_1 \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}$$

waarin A het draadoppervlak voorstelt.

Brengen we nu gaten in de band aan, dan verkleinen we daardoor A. Bijgevolg zal ϕ_x afnemen. De invloed van de uiteinden bij een korte band zal dus afnemen en de temperatuur zal in belangrijke mate worden bepaald door het evenwicht tussen energietoevoer en radiale warmte-afgifte. Dit wil zeggen, de temperatuur in het midden van de band zal dichterbij $T_{\max} = \frac{b}{a}$ komen te liggen. Aan de andere kant moeten gaatjes, welke niet in het midden van een lange band zijn aangebracht, een invloed hebben op de temperatuursverdeling in die zin, dat de temperatuur over een groter traject een ongeveer konstante waarde aanneemt.

De temperatuursverdeling langs een smeltdraad heeft uiteraard invloed op de hoedanigheid van het afschakelproces en op de z.g. smeltkarakteristiek.

Het aanbrengen van gaatjes op geschikte plaatsen in de smeltband is een methode om de temperatuursverdeling te beïnvloeden. De onder 3.1.3.4. genoemde metingen zijn mede bedoeld als voorbeeld hoe de invloed van veranderingen in de smeltband op de temperatuursverdeling kan worden nagegaan. Het zou een terrein van onderzoek kunnen zijn om na te gaan welke invloed de temperatuursverdeling heeft op het afschakelproces en de smeltkarakteristiek. Dat de meting van de temperatuursverdeling dan dient te geschieden aan een draad uitgespannen in lucht, is niet zo'n ernstig nadeel. Immers, in het bovenstaande is aangetoond dat in lucht de overeenkomst tussen theorie en experiment behoorlijk is als we aannemen dat de radiale warmte-afgifte door conductie tot stand komt. Indien de draad wordt omgeven door zand of een ander medium, dan mogen we eigenlijk met meer reden aannemen dat de radiale warmte-afgifte door conductie plaats vindt (convectie is dan niet mogelijk). Indien we dan van lucht en van b.v. zand de parameters kennen die

deze radiale warmte-afgifte bepalen, dan kunnen de meetresultaten van metingen aan een smeltband in lucht "vertaald" worden voor een smeltband in zand.

4. Meting van de stationaire temperatuursverdeling van ronde zilverdraden in zand.

4.1. De meetmethode.

Fig. 4.1.1. geeft een schets van de gebruikte proefpatroon welke de mogelijkheid in zich bergt de smeltdraad te vervangen.

De messing stoppen zitten met klempassing in de polyvoltbuis. In de messing stoppen is een doorlopend gat met schoefdraad M10 aangebracht, waarin een aansluitbout kan worden geschroefd. Tevens kan door deze gaten de patroon met zand worden gevuld.

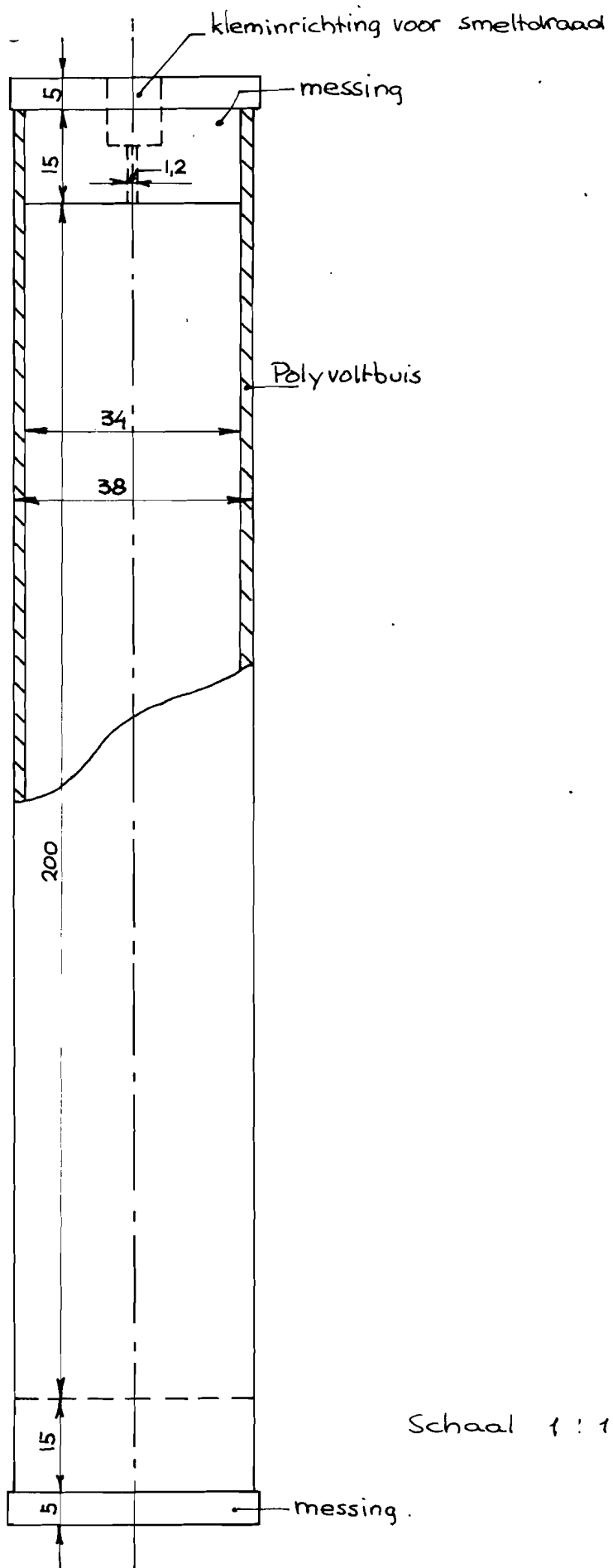
In de 5 mm rand van de messing stoppen is een gat van 4 mm \emptyset aangebracht, waarin een stekkerpen past, voor aansluiting van een buisvoltmeter voor meting van het spanningsverlies over de draad. De draadlengte kan worden gewijzigd door de messing stoppen aan te brengen in een polyvoltbuis van een andere lengte.

Het schema van de meetopstelling is reeds in fig. 3.1.01 weergegeven, de televisieketen deed echter bij de metingen aan draden in zand, niet mee.

De temperatuursmetingen zelf werden uitgevoerd met behulp van het reeds eerder genoemde tempilaq. Hiermede werd de draad plaatselijk dun ingesmeerd. Nadat de tempilaq gedroogd was werd de draad in de patroon geplaatst. Vervolgens werd de patroon gevuld met zand.

Het zand werd steeds goed aangeklopt. Het vullen van, evenals het weer laten leeglopen van de patroon diende voorzichtig te geschieden, de kans was nl. zeer reëel dat het tempilaq door het langs de draad stromende zand, van de draad verwijderd werd. Dit was de oorzaak van nogal een aantal mislukkingen.

Een aldus toegeruste patroon werd in het meetcircuit aangesloten, waarna er een stroom van bekende grootte door de patroon werd gestuurd. Tevens werd de spanning over de patroon gemeten met behulp van een buisvoltmeter, fabr. Philips, type GM 6012, nauwkeurigheid 3%. Hiermede kon tevens nagegaan worden wanneer de eindtemperatuur was bereikt, nl. wanneer er geen spanningstoename bij konstant gehouden stroom meer geconstateerd kon worden. Het aanbrengen van de tempilaq geschiedde als volgt: De draad werd steeds aan twee kanten ingesmeerd met verschillende soorten tempilaq, zoals fig. 4.1.2. in een doorsnedetekening laat zien:



Schaal 1 : 1.

Fig. 4.1.1.

Proefpatroon met mogelijkheid van verwisselen van smeltdraden.

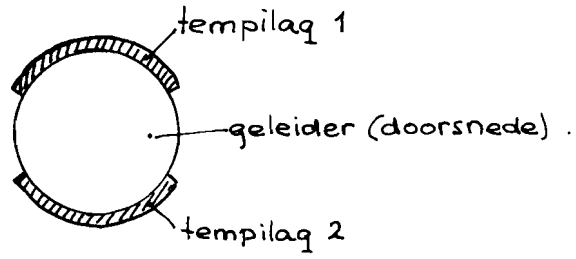


Fig. 4.1.2.

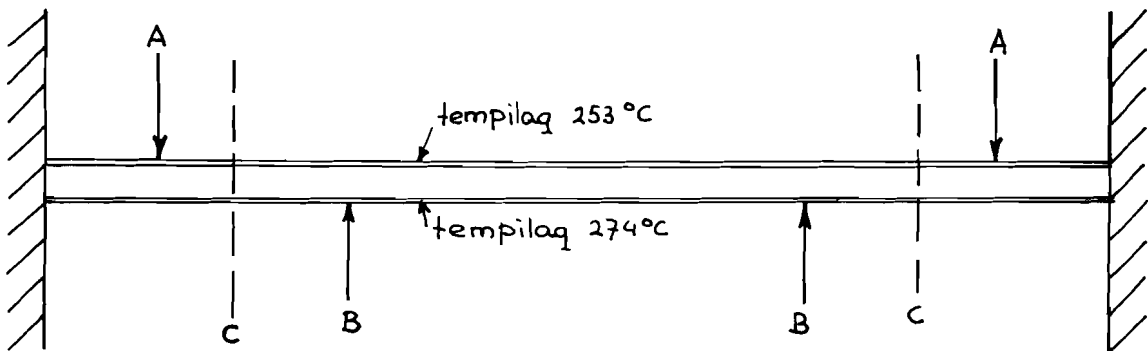


Fig. 4.1.3.

De eerste draad werd over de gehele lengte op deze wijze ingesmeerd. Op deze wijze kunnen in principe 4 meetpunten worden verkregen. Zij b.v. tempilaq 1 een lak voor 253°C en tempilaq 2 voor 274°C en zij de stroom zo groot dat de maximum temperatuur groter dan 274°C wordt, dan zijn op de draad 4 plaatsen te onderkennen waar de tempilaq overgaat van gesmolten, dus verkleurde toestand naar niet gesmolten toestand.

Neem aan dat ter plaatse A de tempilaq 253°C is gesmolten (zie fig. 4.1.3) en ter plaatse B de tempilaq 274°C , dan werden op deze wijze 4 meetpunten verkregen, nl. de beide punten A en de beide punten B. Een volgende draad werd met nauwkeurig dezelfde stroom verhit, echter werd nu tempilaq 226°C en 253°C vanaf de uiteinden tot aan b.v. C in fig. 4.1.3. aangebracht, terwijl tussen de plaatsen aangeduid met C tempilaq 274°C en 302°C werd aangebracht. Op deze wijze kunnen 8 meetpunten worden verkregen.

Deze metingen werden herhaald met steeds fijnere verdelingen van de tempilaq totdat de "temperatuurssprongen" in de verschillende beschikbare soorten tempilaq groter waren geworden dan de temperatuursverschillen aan de draad in een door twee soorten tempilaq bestreken gebied. Nadat de eindtemperatuur van de draad werd bereikt werd de patroon uit de meetopstelling genomen. Het zand werd uit de patroon "gegoten" en de draad werd zeer voorzichtig uit de patroon verwijderd.

Het herkennen van de gesmolten tempilaq trajecten vereiste enige oefening, van sommige soorten tempilaq was de verkleuring moeilijk te zien, andere soorten gaven voordat ze gesmolten waren reeds een verkleuring te zien, terwijl ze, nadat ze gesmolten waren, een andere verkleuring te zien gaven. Van elk soort tempilaq moest dit eerst worden nagegaan op een draad in lucht die werd verhit. Dan was nl. goed te zien wanneer de tempilaq smolt (druppelvorming) en kon dus ook worden vastgesteld hoe de tempilaq verkleurde als hij gesmolten was geweest.

Een andere moeilijkheid bij deze metingen was dat het zand vastbakte aan gesmolten en bijna gesmolten tempilaq. Het (zeer voorzichtig) verwijderen van deze aangekoekte zandkorrels heeft ook nogal wat mislukkingen veroorzaakt, met het zand werd meermalen de tempilaq verwijderd, zodat de gehele meting moest worden herhaald.

Met een hoeveelheid geduld en enig voorzichtig manipuleren werden

op de bovenomschreven wijze een aantal meetresultaten verkregen, waarvan in de volgende paragraaf mededeling zal worden gedaan.

4.2. Meetresultaten en berekeningen.

4.2.1. Ronde zilverdraad 0,4 mm diameter, 20 cm lang.

Stroomsterkte $I = 20$ Amp.

Meetpunten:

253 °C op 8 mm van de uiteinden,

274 °C was nergens gesmolten.

De temperatuursverdeling verloopt dus bijzonder vlak, zie fig. 4.2.1.

Bij $I = 20$ Amp. werd een spanningsverschil V over de patroon gemeten, groot $V = 1,03$ V.

Hierbij behoort:

$$R_{gem} = \frac{1,03}{20} = 51,5 \text{ m}\Omega$$

Dit is een gemiddelde weerstand.

Indien de temperatuursverdeling zo vlak verloopt, dan moet gelden:

$$T_{gem} \approx T_{max}$$

Maar dan moet ook gelden:

$$R_{gem} \approx R_{max}$$

En dan moet de temperatuursverhoging berekend kunnen worden uit de gemeten weerstand van de draad.

We weten:

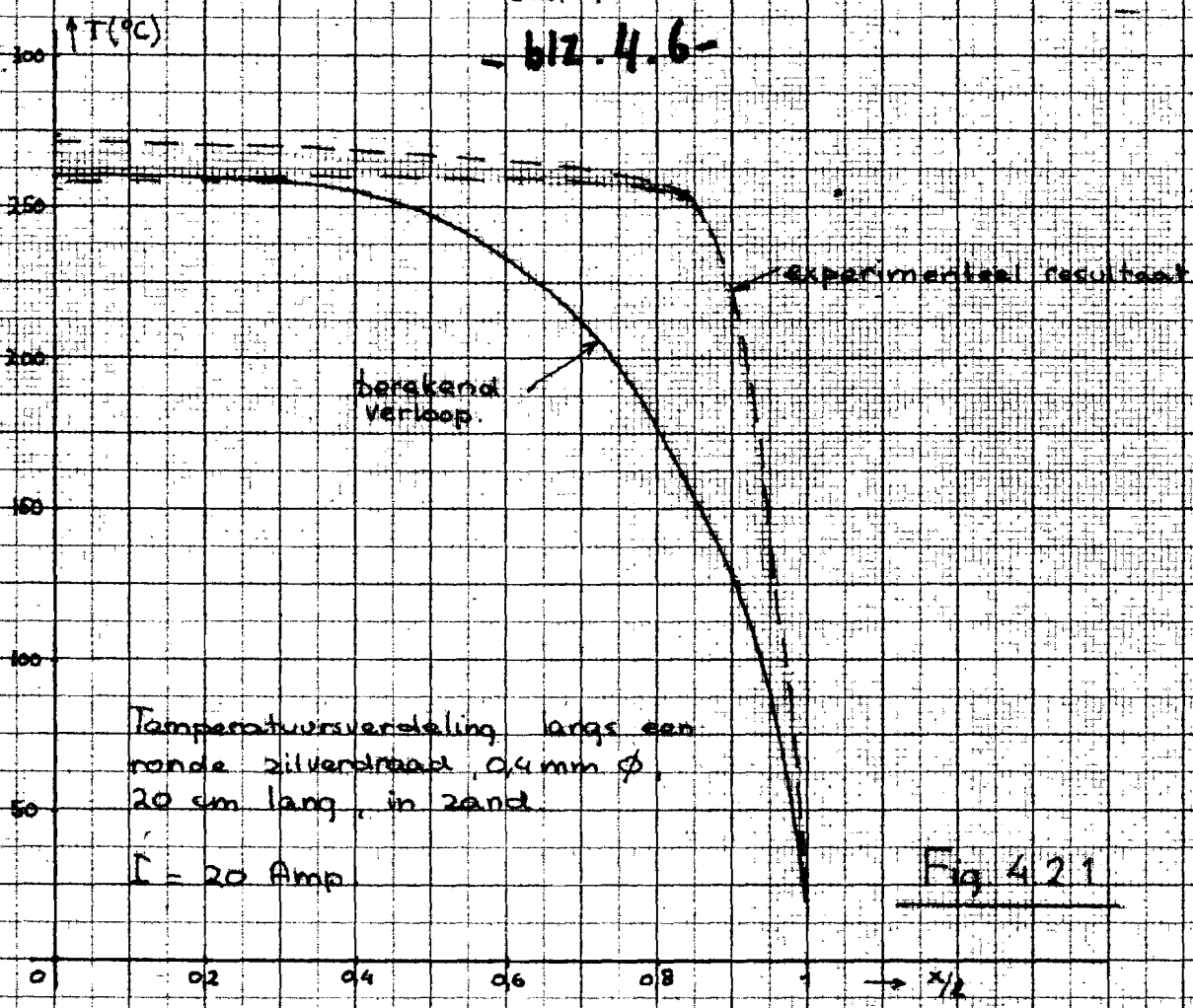
$$R = R_0(1 + \beta T)$$

en

$$R_0 = \frac{2l \cdot \rho_0}{q}$$

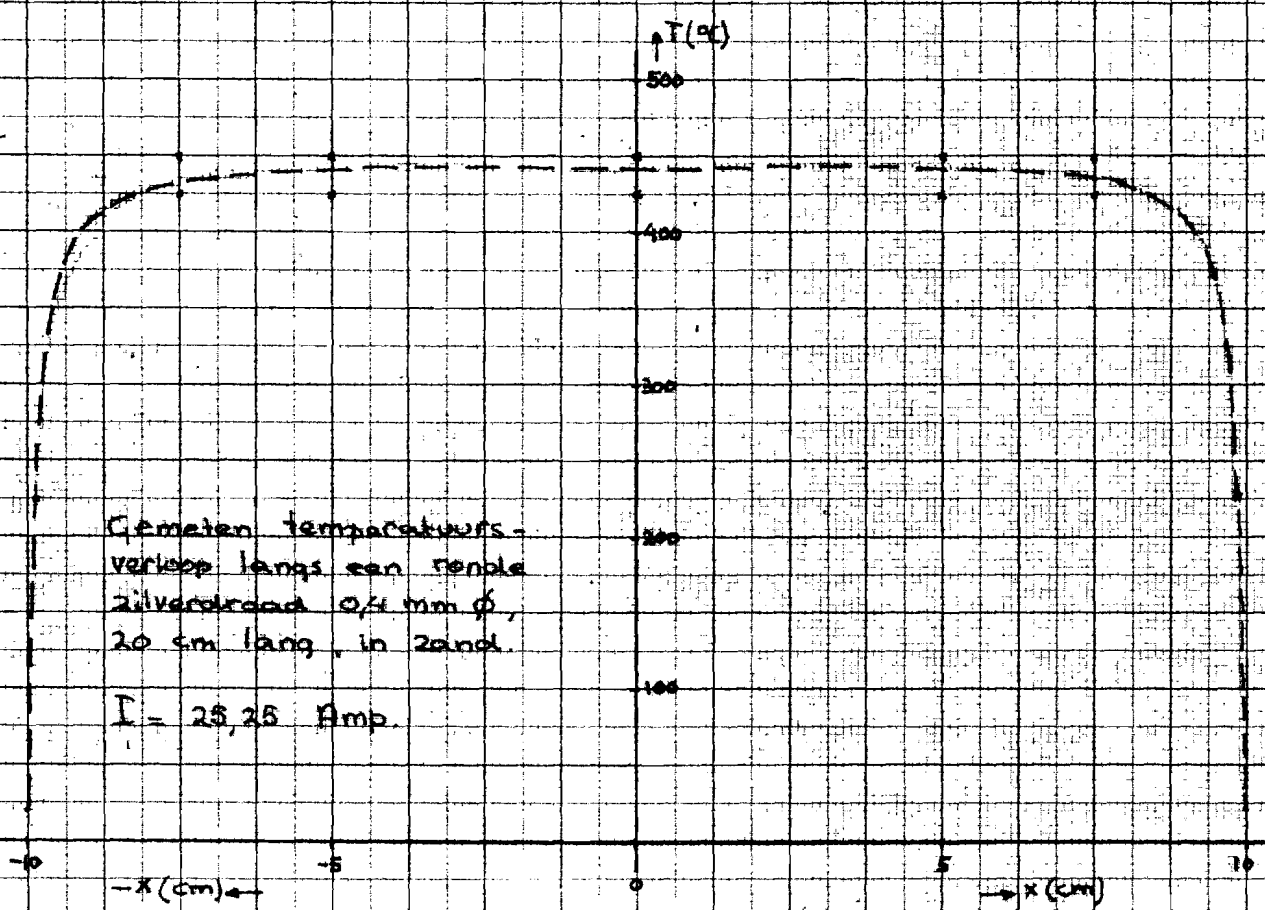
- blz. 4.6 -

- blz. 4.6 -



Temperatuursverdeling langs een
 ronde zilverdraad 0,4 mm ϕ ,
 20 cm lang, in zand.
 $I = 20$ Amp

Fig. 4.2.1



Gemeten temperatuurs-
 verloop langs een ronde
 zilverdraad 0,4 mm ϕ ,
 20 cm lang, in zand.
 $I = 25,25$ Amp.

Fig. 4.2.2

Met gegevens, ontleend aan Landolt-Bornstein t.w.:

$$\rho_0 = 1,49 \cdot 10^{-8} \Omega m$$

$$\beta = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

volgt voor dit geval voor R_0 :

$$R_0 = 23,6 \text{ m}\Omega$$

De weerstandstoename ΔR is dus

$$\Delta R = R - R_0 = 51,5 - 23,6 = 27,9 \text{ m}\Omega$$

Nu is $\Delta R = R_0 \beta T$ waaruit voor T volgt:

$$T = \underline{\underline{285 \text{ } ^\circ\text{C}}}$$

Indien V 3% lager zou zijn (deze afwijking is mogelijk in verband met de nauwkeurigheid van de gebruikte buis-voltmeter) zou gelden:

$$V = 1,00 \text{ Volt} \quad \text{en dus} \quad R = 50 \text{ m}\Omega.$$

Dan volgt voor de temperatuur:

$$T = \underline{\underline{254 \text{ } ^\circ\text{C}}}$$

Het met tempilaq bereikte resultaat dat de temperatuur langs de gehele draad praktisch een konstante waarde heeft, klopt dus wel met het resultaat verkregen uit de weerstandsbepaling. De uit de weerstandsbepaling verkregen temperatuur is immers binnen de meetnauwkeurigheid gelijk aan de temperatuur van de draad zoals die met tempilaq is bepaald.

Opmerking:

Er is nog een meting gedaan aan een zilverdraad van 0,4 mm diameter, 20 cm lang, waarop geen tempilaq was aangebracht.

De gemeten spanning over de draad was bij een stroom van 20 Amp. nauwkeurig gelijk aan die over de draad met tempilaq (1,03 Volt). Het is dus waarschijnlijk dat de tempilaq de temperatuursverdeling niet beïnvloedt.

4.2.2. Ronde zilverdraad 0,4 mm diameter, 20 cm lang, stroomsterkte

$I = 25,25$ Amp.

Het meetresultaat genoemd onder 4.2.1 werd bereikt door een aantal malen proberen met verschillende soorten tempilaq.

Als de temperatuur langs een draad in zand echter nagenoeg konstant is, dan kan de temperatuur worden voorspeld uit de meting van de weerstand, zoals hierboven werd aangetoond. Dit maakt de keuze van de tempilaq, of de keuze van de stroom bij reeds aangebrachte tempilaq, aanzienlijk eenvoudiger.

Deze procedure is gevolgd bij alle verdere metingen.

In het onderhavige geval werd gemeten:

Draadtemperatuur T langs vrijwel de gehele draad:

$$427^{\circ}\text{C} < T < 454^{\circ}\text{C}.$$

Een niet gesmolten gedeelte in een vlak bij de uiteinden aangebracht klein traject tempilaq 226°C was niet waar te nemen. De temperatuursverdeling is geschetst in fig. 4.2.2.

De eindwaarde van het spanningsverschil V over de draad bedroeg bij een stroom van 25,25 Amp.: $V = 1,86$ Volt.

Hieruit resulteert: $R = 73,5$ m Ω .

Uit de weerstandstoename ten opzichte van het resultaat volgens 4.2.1. berekenen we de temperatuurstoename ΔT ten opzichte van het vorige geval. Dit heeft het voordeel dat eventuele meetfouten ten gevolge van b.v. overgangsweerstanden worden geëlimineerd.

Volgens 4.2.1.: $R_1 = 51,5$ m $\Omega \pm 3\%$.

Temperatuur: gemeten $253^{\circ}\text{C} < T_1 < 274^{\circ}\text{C}$.

Berekend: $T_1 = 285^{\circ}\text{C}$.

Volgens 4.2.2.: $R_2 = 73,5 \text{ m}\Omega \pm 3\%$
 $427^\circ\text{C} < T_2 < 454^\circ\text{C}$.

Dus volgt voor $\Delta R_{12} = R_2 - R_1 = 22 \text{ m}\Omega$,

en $\Delta T_{12} = T_2 - T_1$ levert

$$201^\circ\text{C} < \Delta T_{12} < 153^\circ\text{C}.$$

Berekening van ΔT_{12} uit ΔR_{12} levert:

$$\begin{aligned} R_2 - R_1 &= R_0(1 + \beta T_2) - R_0(1 + \beta T_1) = \\ &= R_0\beta(T_2 - T_1) = R_0\beta \Delta T_{12} \end{aligned}$$

Hieruit:

$$\Delta T_{12} = 211^\circ\text{C}.$$

In aanmerking genomen de nauwkeurigheid van de weerstandsbepaling is dit resultaat binnen de meetnauwkeurigheid gelijk aan het met tempilaq behaalde resultaat.

4.2.3. Ronde zilverdraad 0,2 mm diameter, lengte 10 cm.

Stroomsterkte $I = 13$ Amp.

De met tempilaq gemeten temperatuursverdeling is weergegeven in fig. 4.2.3. Ook hier is dus weer de temperatuur T langs de draad praktisch konstant, en wel

$$677^\circ\text{C} < T < 704^\circ\text{C}.$$

Spanningsverlies over de draad:

Bij $I = 12,5$ A : $V = 2,29$ Volt (eindwaarde)

Dus: $R = \frac{2,29}{12,5} = 183 \text{ m}\Omega$.

- b12 4.10 -

- b12 4.10 -

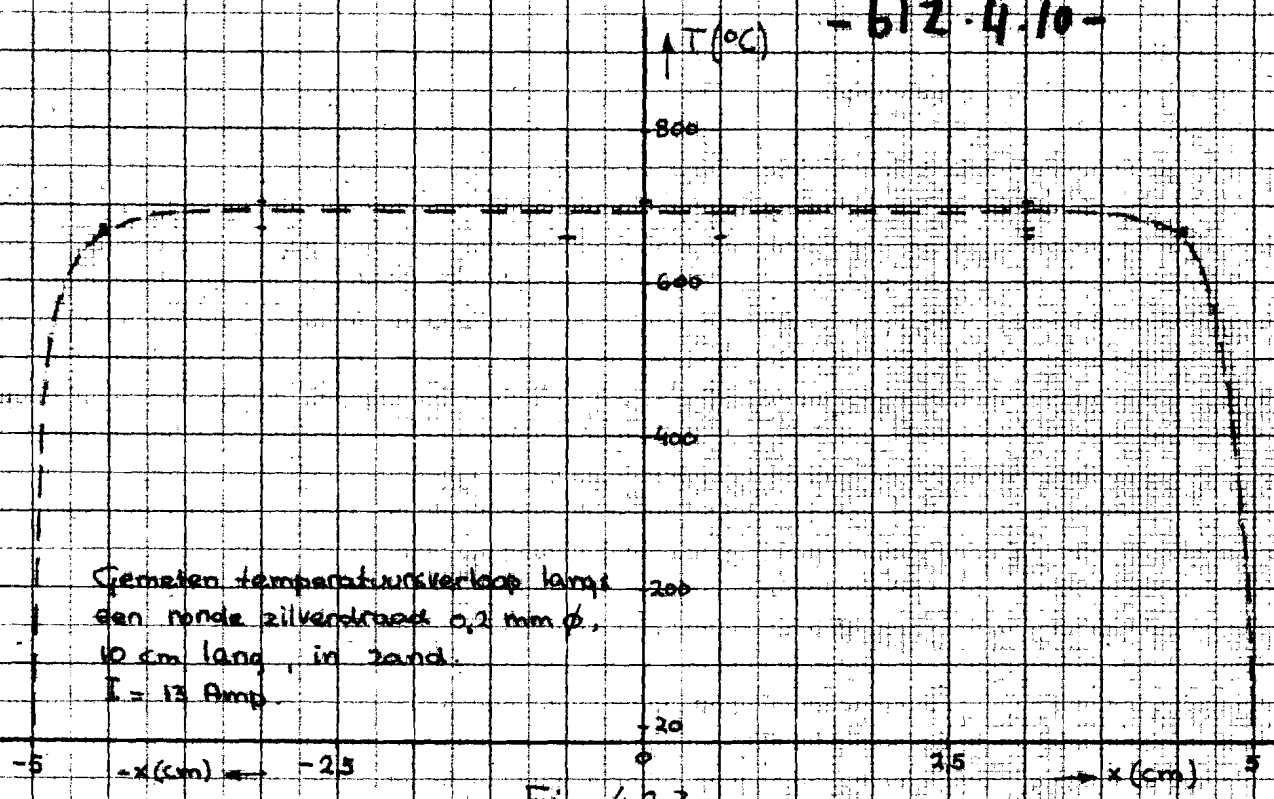


Fig. 4.2.3

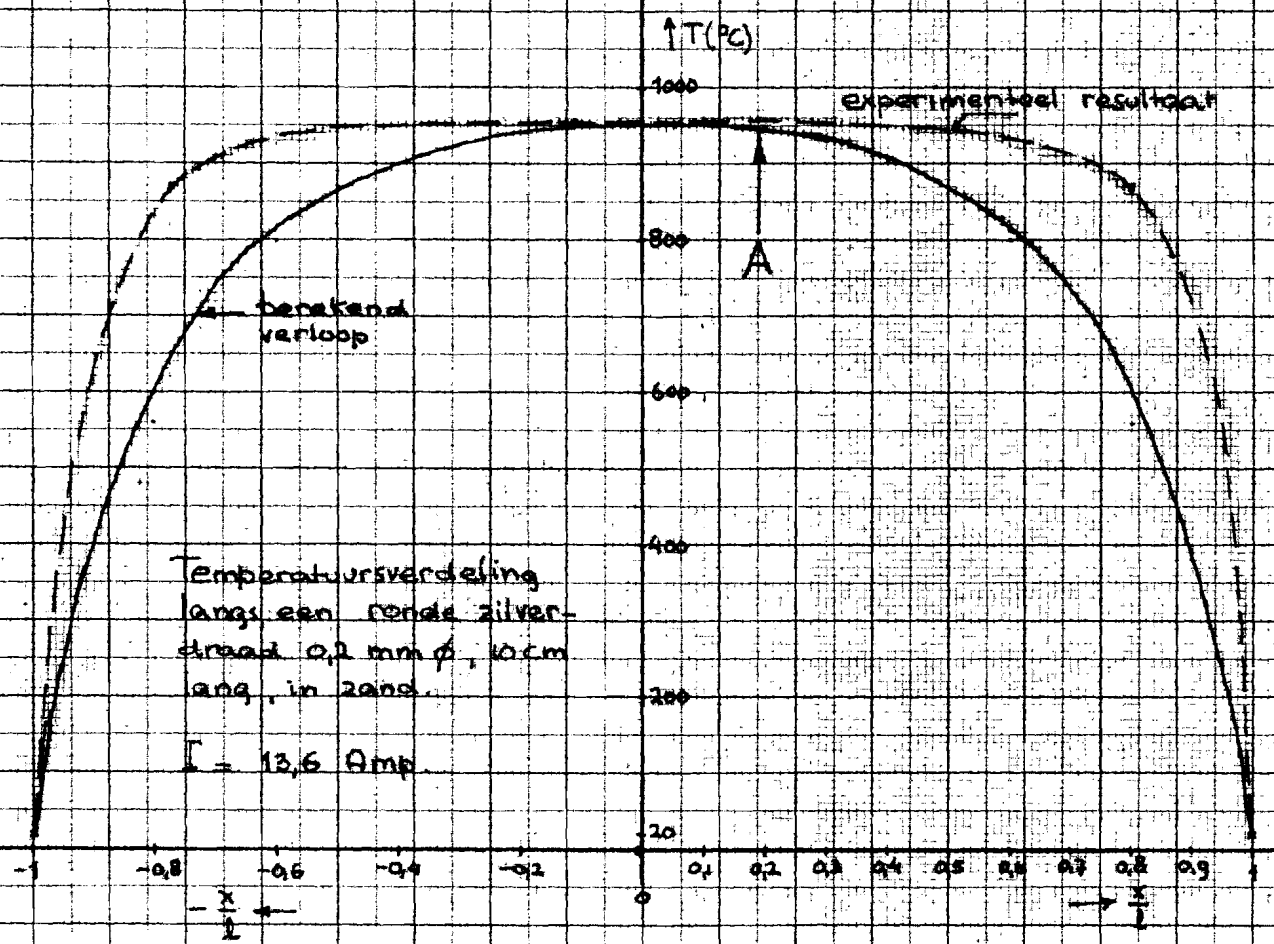


Fig. 4.2.4

Bij $I = 13 \text{ A}$: $V = 2,54 \text{ Volt}$ (eindwaarde)

Dus:
$$R = \frac{2,54}{13} = 195 \text{ m}\Omega.$$

Uit deze laatste waarde van R berekenen we de temperatuursverhoging.

$$R_0 = \frac{2l \cdot \rho_0}{q}$$

0,2 mm diameter levert: $q = 31,4 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2.$

Voor R_0 volgt:

$$R_0 = \frac{0,1 \cdot 1,49 \cdot 10^{-8}}{31,4 \cdot 10^{-9}} = 47,5 \text{ m}\Omega.$$

Dus $\Delta R = R - R_0 = 195 - 47,5 = 147,5 \text{ m}\Omega.$

Hieruit volgt voor T :

$$T = \frac{\Delta R}{R_0 \cdot \beta} = \frac{147,5}{47,5 \cdot 4,4} \cdot 10^3 = 705^\circ\text{C}.$$

Deze waarde is binnen de meetnauwkeurigheid weer gelijk aan de met tempilaq bepaalde waarde.

4.2.4. Ronde zilverdraad 0,2 mm diameter, lengte 10 cm.

Bij deze meting werd de stroom langzaam opgevoerd totdat de draad doorsmolt. De draad was bestreken met tempilaqsoorten van 871°C en 954°C (smeltpunt zilver 960°C).

De temperatuursverdeling is weergegeven in fig. 4.2.4. Ter plaatse A in deze figuur is de draad gesmolten. In tabel 4-I zijn de resultaten van de spanningsmetingen verzameld.

Tabel 4-I.

I (Amp)	V (Volt)	R (mΩ)	T (°C)
10	1,18	118	337
12,5	2,38	190	681
13	2,74	210	779
13,5	3,4	252	978

De draad smolt door bij een stroom van bijna 13,6 Amp.

In tabel 4-I zijn tevens de weerstandswaarden genoteerd, zoals die volgen uit de gemeten stromen en spanningen.

Voorts zijn in deze tabel de temperaturen genoemd die op bovengeschreven wijze berekend zijn uit de weerstandstoename van de draad.

Uit deze weerstandstoename zou volgen dat de temperatuur hoger wordt dan de smeltemperatuur van zilver (960°C). Dit is natuurlijk onwaarschijnlijk.

Landolt-Bornstein geeft voor de specifieke weerstand van zilver bij de smeltemperatuur in nog vaste toestand van dit metaal een waarde: $\rho_s = 8,2 \cdot 10^{-8} \Omega m$.

Voorts dienen we te bedenken dat de draad tengevolge van de verhitting langer wordt.

Er geldt:

$$l = l_0(1 + qT)$$

Volgens het "Handbook of Chemistry and Physics", 44th edition, geldt: $q = 20 \cdot 10^{-6} m^{-1}$.

Hieruit volgt: $l = 0,102$ meter bij 960°C.

We berekenen nu de weerstand R_s bij de smeltemperatuur T_s :

$$R_s = \frac{l_s \rho_s}{q} = \frac{0,102 \cdot 8,2 \cdot 10^{-8}}{3,14 \cdot 10^{-8}} = 267 m\Omega.$$

Deze waarde stemt beter overeen met de gemeten waarde.

$\beta = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$ is een gemiddelde waarde die geldt voor het gehele temperatuurstraject van 20°C tot 960°C . De benadering is voor $T = T_s$ dus iets aan de grove kant.

4.3. Vergelijking met de theorie.

Voor een tweetal gevallen in de theoretische temperatuursverdeling berekend volgens betrekking (2.2.5b):

$$T_1 = \frac{b}{a'} \left[1 - \frac{\cosh x \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}}{\cosh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}} \right] + T_0 \frac{\cosh x \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}}{\cosh l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}}}$$

We berekenen eerst de temperatuursverdeling van een draad van 0,4 mm diameter, 20 cm lang, bij een stroom $I = 20$ Amp. (zie meting 4.2.1).

Gemeten is $T_m \simeq 260^\circ\text{C}$.

Dus:

$$\frac{b}{a'} = \frac{j^2 \rho_0 + \gamma T_0}{\gamma - j^2 \beta \rho_0} = 260^\circ\text{C}$$

$$I = 20 \text{ Amp.} \quad \Rightarrow \quad J = 1,59 \cdot 10^8 \text{ Am}^{-2}.$$

$$T_0 = 20^\circ\text{C}.$$

$$\beta = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}.$$

$$\rho_0 = 1,49 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega\text{m}.$$

Hiermede volgt voor G :

$$G = \underline{3,36 \cdot 10^6} \text{ Wm}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}.$$

Dan volgt voor a' :

$$a' = \gamma - j^2 \beta \rho_0 = 1,7 \cdot 10^6 \text{ Wm}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}.$$

Voor zilver geldt: $\lambda_1 = 450 \text{ Wm}^{-1}\text{°C}^{-1}$, zodat

$$\frac{a'}{\lambda_1} = 3780 \text{ m}^{-2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} = 61,5 \text{ m}^{-1} = 0,615 \text{ cm}^{-1}.$$

2l = 20 cm, dus volgt: $l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} = 6,15.$

De met deze waarden berekende kromme is eveneens getekend in fig. 4.2.1.

Het tweede geval dat we berekenen is dat van een draad van 0,2 mm diameter, 10 cm lang, bij een stroom $I = 13,6$ Amp. (zie meting 4.2.4). Bij deze stroom is de draad doorgesmolten, zodat geldt $T_m = \frac{b}{a'} = 960^\circ\text{C}.$

Uit:

$$\frac{b}{a'} = 960^\circ\text{C} = \frac{j^2 \rho_0 + \gamma T_0}{\gamma - j^2 \beta \rho_0}$$

berekenen we weer de waarde van G .

Dit levert op:

$$\gamma = 15,5 \cdot 10^6 \text{ Wm}^{-3}\text{°C}^{-1}$$

Dan volgt voor a' :

$$a' = \gamma - j^2 \beta \rho_0 = 3,1 \cdot 10^6 \text{ Wm}^{-3}\text{°C}^{-1}$$

Met $\lambda_1 = 450 \text{ Wm}^{-1}\text{°C}^{-1}$ volgt dan:

$$\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} = 0,83 \text{ cm}^{-1}.$$

$$2l = 10 \text{ cm, dus: } l \sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} = 4,15.$$

Met deze waarde kunnen we weer volgens betrekking (2.2.5b) de temperatuursverdeling langs de draad berekenen.

Het resultaat is weergegeven in fig. 4.2.4.

De berekende waarden liggen in beide gevallen lager dan de gemeten waarden. Om in fig. 4.2.4. theorie en experiment met elkaar in overeenstemming te brengen, moet gelden:

$$\sqrt{\frac{a'}{\lambda_1}} \approx 1,5 \text{ cm}^{-1}$$

$$\text{Dan volgt voor } a' : \quad a' \approx 10^7.$$

Dit betekent dat in dit geval voor G moet gelden:

$$G \approx 2,2 \cdot 10^7 \text{ Wm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

De uit de maximale temperatuur bepaalde waarde voor G is dus te laag.

Uit:

$$\frac{b}{a'} = T_m = \frac{j^2 \rho_0 + G T_0}{G - j^2 \beta \rho_0}$$

volgt:

$$G = \frac{j^2 \rho_0 (1 + \beta T_m)}{T_m - T_0}$$

Indien $T_m = T_s$ (smelttemperatuur), kan ook geschreven worden:

$$G = \frac{j^2 \rho_s}{T_s - T_0}$$

Met $\rho_s = 8,2 \cdot 10^{-8} \Omega m$ volgt voor G :

$$G = 16,5 \cdot 10^6 \text{ Wm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Deze waarde is inderdaad iets hoger, maar is toch nog belangrijk kleiner dan $22 \cdot 10^6 \text{ Wm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Evenals in het geval van draden in lucht kunnen we thans ook uit de waarde van G de dikte van een grenslaag bepalen. G is gedefinieerd volgens:

$$G = \frac{2\lambda_2}{r_1(r_2 - r_1)} = \frac{2\lambda_2}{r_1 \cdot \Delta r}.$$

Nu blijkt het moeilijk te zijn voor λ_2 (de warmtegeleidbaarheid van zand) een waarde te vinden.

Volgens Landolt-Bornstein geldt bij $T = 18^\circ\text{C}$ voor droog zand:

$$\lambda_2 = 0,295 \text{ Wm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Voor zand met 10% water geldt bij $T = 18^\circ\text{C}$:

$$\lambda_2 = 1,05 \text{ Wm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Hieruit blijkt van welk een groot belang de vochtigheidsgraad van het zand is voor de temperatuur van de smeltdraad bij een bepaalde stroom.

Volgens Stroever^{*)} geldt: $\lambda_2 = 0,33 \text{ Wm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ bij $T = 20^\circ\text{C}$, voor droog zand.

Het Handbook of Chemistry and Physics, 44th edition geeft:

$$\lambda_2 = 0,39 \text{ Wm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

bij kamertemperatuur.

^{*)} Stroever: Applied Heat Transmission, McGraw Hill 1941.

Metingen in de groep warmtetransport van de onderafdeling voor Technische Natuurkunde gaven als resultaat:

$$\lambda_2 = 0,24 \text{ Wm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad \text{voor zand met grovere korrel,}$$

$$\lambda_2 = 0,33 \text{ Wm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad \text{voor zand met fijne korrel.}$$

Deze waarden zijn het gemiddelde van een groot aantal metingen en practicumverslagen uit deze groep. Ze gelden voor $T = 20^\circ\text{C}$. Hieruit blijkt, dat de korrelgrootte van enig belang is voor de stationaire temperatuur bij een bepaalde stroom door de draad.

Geen enkel handboek gaf uitsluitend over de vraag hoe λ_2 afhangt van de temperatuur.

Hieromtrent werd geraadpleegd:

1. Landolt-Bornstein: Zahlenwerte und Functionen, 6e Auflage.
2. Handbook of Chemistry and Physics, 44th edition 1962-63.
3. Smithsonian Physical Tables, 4th revised edition 1956.
4. American Institute of Physics Handbook, 2nd edition, McGraw Hill 1963.
5. Chemical Engineers Handbook, 3rd edition, McGraw Hill 1950.
6. Stroeve: Applied Heat Transmission, McGraw Hill 1950.
7. Gröber/Erk/Grigull: Wärmeübertragung, Berlin 1961 (3e druk).

Wel werden in enkele handboeken van enige met zand verwante materialen een aantal waarden van λ vermeld bij verschillende temperaturen, b.v. van SiO_2 , zandsteen, vuurvaste klei, etc. Uit deze getallen krijgt men de indruk dat van al dit soort materialen de warmtegeleidbaarheid bij hogere temperatuur toeneemt, en wel met een factor 1,5 à 4 in een temperatuurstraject van 0 - 1000°C.

Het is eigenlijk een opmerkelijke zaak dat van zand de warmtegeleidbaarheid als functie van de temperatuur niet bekend is, immers iedere fabrikant van smeltveiligheden vult zijn smeltveiligheid met zand. En juist de warmtegeleidbaarheid van het zand bepaalt voor een belangrijk gedeelte de temperatuur van de smeltband.

Stellen we dat voor zand geldt: $\lambda_2 = 0,3 \text{ Wm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Uit $\dot{q} = 16,5 \cdot 10^6 \text{ Wm}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ (zie boven) volgt dan met:

$$r_1 = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m} :$$

$$\Delta r = \frac{2\lambda_2}{\zeta \cdot r_1} = 0,36 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \underline{\underline{0,36 \text{ mm}}}.$$

Uit $\zeta = 3,36 \cdot 10^6 \text{ Wm}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ (zie boven) volgt met $r_1 = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$:

$$\Delta r = \frac{2\lambda_2}{\zeta \cdot r_1} = \underline{\underline{0,89 \text{ mm}}}.$$

In beide berekende gevallen was de maximale temperatuur echter belangrijk verschillend. Dit zou kunnen betekenen, dat in het ene geval een grotere waarde voor λ_2 genomen moet worden dan in het andere geval.

In het geval waaruit berekend werd $\zeta = 16,5 \cdot 10^6 \text{ Wm}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ was de temperatuur bijna 4x zo groot als in het andere geval. Als we aannemen dat dan gerekend moet worden met een gemiddelde warmtegeleidbaarheid λ_2 die 2x zo groot is, dan komen de beide berekende grenslaagdikten dicht bij elkaar.

Met de hierboven bedoelde afhankelijkheid van λ_2 van de temperatuur is wellicht ook plausibel te maken dat de gemeten temperatuursverdeling langs een draad in zand vlakker verloopt dan de berekende.

Immers in het midden van de draad is de temperatuur het grootst. Het zand dat daar tegen de draad aanligt, zal daar de grootste warmtegeleidingscoëfficiënt bezitten. Dit wil zeggen, de warmteafgifte van de draad aan de omgeving is in het gebied van de hoogste temperatuur, dus in het midden van de draad, het grootst en dit betekent dat daar de afkoeling het grootst is. Dit zal de temperatuursverdeling beïnvloeden in die zin dat de kromme $T = T(x/l)$ vlakker zal gaan verlopen.

Uit de metingen volgens 4.2. is ook op andere wijze nog een waarde voor ΔT te berekenen.

We gaan uit van de meting volgens 4.2.3. Het door de draad opgenomen vermogen W_d als de eindtemperatuur bereikt is, laat zich gemakkelijk berekenen uit de stroom door en de spanning over de draad.

We vinden: $W_d = I \cdot V = 13 \cdot 2,54 = 33$ Watt.

Dit vermogen wordt omgezet in warmte.

In de stationaire toestand is er evenwicht tussen afgevoerde en geproduceerde warmte. De totale warmtestroom van de draad naar zijn omgeving moet dus 33 Watt bedragen. Hieruit is de warmtestroomdichtheid H_r te berekenen, als we de warmte-afgifte in axiale richting buiten beschouwing laten (het vlakke temperatuurverloop langs de draad rechtvaardigt deze verwaarlozing).

De totale oppervlakte van de draad bedraagt:

$$3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-1} = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.$$

Dus is H_r :

$$H_r = \frac{33}{6,28} \cdot 10^5 = 5,3 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2.$$

We weten ook dat geldt:

$$(H_r)_{r=r_1} = \lambda_2 \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=r_1}$$

Als we weer stellen dat voor λ_2 geldt: $\lambda_2 = 0,3 \text{ Wm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ dan volgt:

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=r_1} = \frac{(H_r)_{r=r_1}}{\lambda_2} = \frac{5,3 \cdot 10^5}{0,3} = 17,7 \cdot 10^5 \text{ } ^\circ\text{C m}^{-1}$$

Het totale temperatuurverschil met de omgeving bedraagt rond 675°C .

Als we aannemen dat de temperatuur in de grenslaag lineair met de straal r verloopt, dan volgt hieruit een waarde voor de dikte van de grenslaag, te weten:

$$\Delta r = \frac{675}{17,7 \cdot 10^5} = 0,38 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,38 \text{ mm.}$$

Ook deze waarde is weer van dezelfde grootte-orde als de waarden van Δr uit voorgaande berekeningen.

5. De verwarming van een smeltdraad door een sinusvormige wisselstroom.

Gemeten werd het spanningsverloop als functie van de tijd over smeltdraden van verschillende doorsneden, horizontaal uitgespannen in zand of in lucht, gedurende de eerste periodes direct na het inschakelen van een sinusvormige wisselstroom. De uit deze metingen verkregen resultaten zullen worden vergeleken met de theoretische resultaten volgens paragraaf 2.3.2.

Als energiebron werd steeds gebruikt een condensatorbatterij, welke werd ontladen over een smoorspoel. In hetzelfde circuit werd dan de smeltdraad opgenomen.

Deze methode heeft het voordeel dat altijd in de stroomnuldoorgang geschakeld wordt, de stroom door de smeltdraad heeft dan steeds voor $t > 0$ de gedaante:

$$I = \hat{I} \cdot \sin. \omega t$$

Een nadeel is, dat de amplitude van de wisselstroom door de smeltdraad geen constante waarde heeft.

Wanneer echter de kwaliteitsfaktor van het LC-circuit voldoende groot is, kunnen we elke halve periode van de stroom opvatten als sinusvormig.

De metingen zijn eerst verricht in een laagspanningscircuit. Met de beschikbare middelen was het echter niet mogelijk een circuit op te bouwen met een voldoende grote kwaliteitsfaktor. De stroom dempte te snel uit, zodat reeds de eerste halve periode van de stroom belangrijk afweek van de sinusvorm.

Deze metingen zijn in het volgende volledigheidshalve vermeld, ze zijn echter om de bovenvermelde reden minder betrouwbaar dan de daarna genoemde metingen, waarbij de smeltdraden waren opgenomen in een hoogspanningscircuit. Hierbij was het wel mogelijk een voldoende grote kwaliteitsfaktor van de LC-kring te bereiken.

5.1. Metingen in een laagspanningscircuit.

5.1.1. De meetmethode.

Het schema van de meetopstelling is weergegeven in fig. 5.1.1.

Als voedingsbron voor het opladen van de condensatorbatterij werd gebruikt een PSA, fabr. Philips, voor een maximale spanning van 300 Volt gelijkspanning. De capaciteit was een condensatorbank van

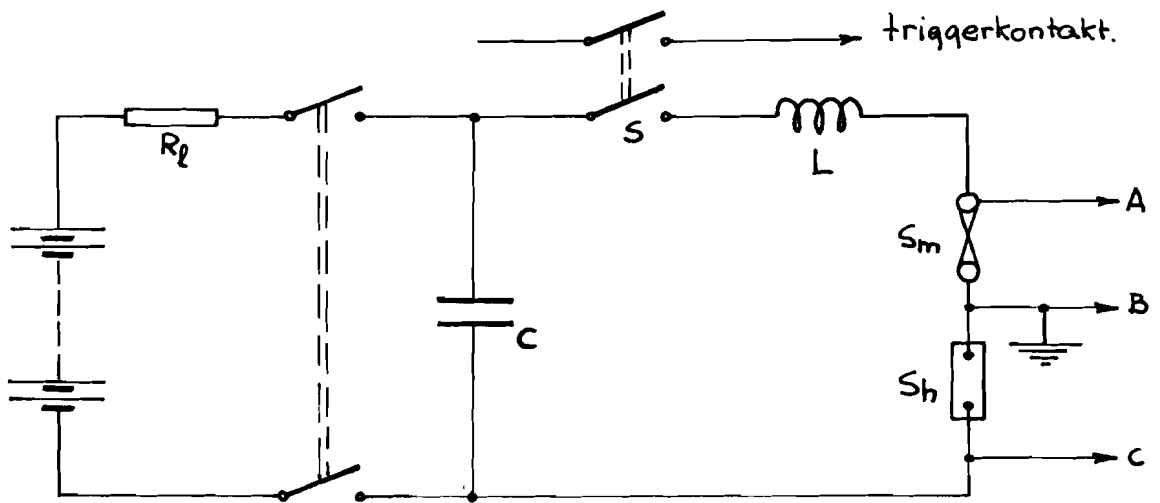


Fig. 5.1.1.

C: Condensatorbatterij $52 \times 40 \mu\text{F} = 2080 \mu\text{F}$, 300V.

S: handbediende schakelaar

S_m : Smeltdraad

S_h : Shunt 100mV, 100 Amp.

A, B en C: osilloscoop aansluitingen

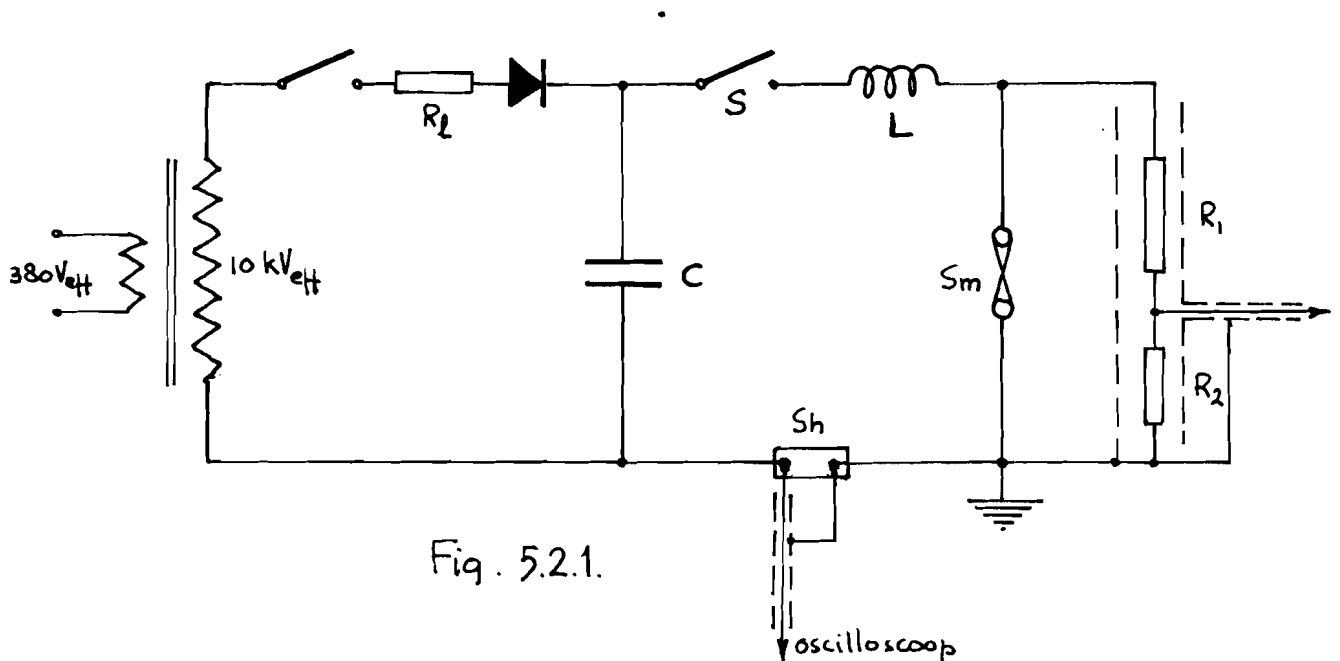


Fig. 5.2.1.

R_1 en R_2 : afgeschermdde spanningsdeler

$R_1 = 5 \text{ M}\Omega$ $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$.

S_h : coaxiaalshunt.

52 condensatoren van elk $40 \mu\text{F}$, 300 Volt, welke parallel waren geschakeld. De totale capaciteit bedroeg dus $2080 \mu\text{F}$. De grootte van de zelfinductie was niet nauwkeurig bekend. Het was ook niet zozeer belangrijk deze te weten, omdat zowel de stroom als de spanning geregistreerd werden. Stroom en spanning werden geregistreerd op een oscilloscoop fabr. Tektronix, type 555. Het verloop van deze grootheden als functie van de tijd werd fotografisch vastgelegd.

De spanning over de smeltdraad werd rechtstreeks gemeten, de stroom werd gemeten door het spanningsverlies over een shunt fabr. Nieaf, 100 A, 100 mV te registreren.

5.1.2. Meetresultaten en berekeningen.

De figuren 5.1.2 en 5.1.3 geven de resultaten te zien van metingen aan een ronde zilverdraad van 20 cm lengte met een diameter van 0,4 mm, welke horizontaal in lucht was uitgespannen.

Deze figuren zijn verkregen door de met behulp van een polaroid-camera gemaakte fotografische opnamen in een vergrotingskoker te plaatsen en deze vergrotingskoker zo in te stellen dat op een onder de vergrotingskoker gelegd stuk grafiekpapier de opname precies 3x vergroot te zien was. Het beeld op het grafiekpapier was dan eenvoudig over te tekenen.

Uit deze vergrote opnamen op grafiekpapier kan nauwkeuriger het weerstandsverloop, zoals dat berekend kan worden uit het verloop van stroom en spanning, worden bepaald. Dit uit het experiment volgende weerstandsverloop naar de tijd is tevens in de figuren 5.1.2 en 5.1.3 getekend.

Voorts is in deze figuren het theoretisch verloop getekend van de weerstand, zoals dat volgt uit de betrekking:

$$R = R_0 e^{\alpha\beta} \quad (2.3.6)$$

Hierbij is gerekend met de tijdconstante van de draad alleen, dus met τ_1 .

Betrekking (2.3.6) geldt echter voor een sinusvormige stroom en uit de figuren 5.1.2 en 5.1.3 is reeds aanstonds herkenbaar dat de stroom, ook gedurende de eerste halve periode, niet sinusvormig

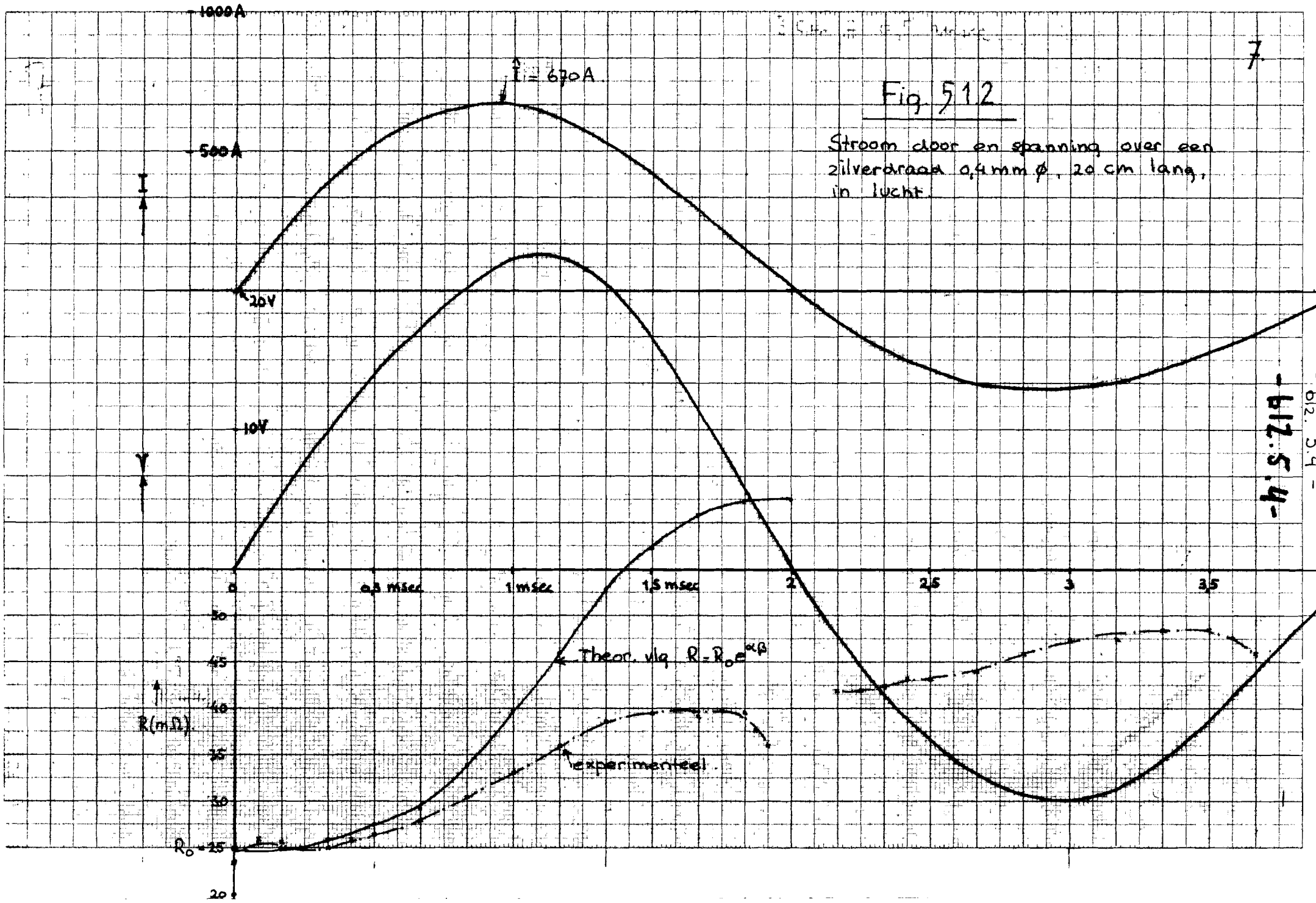


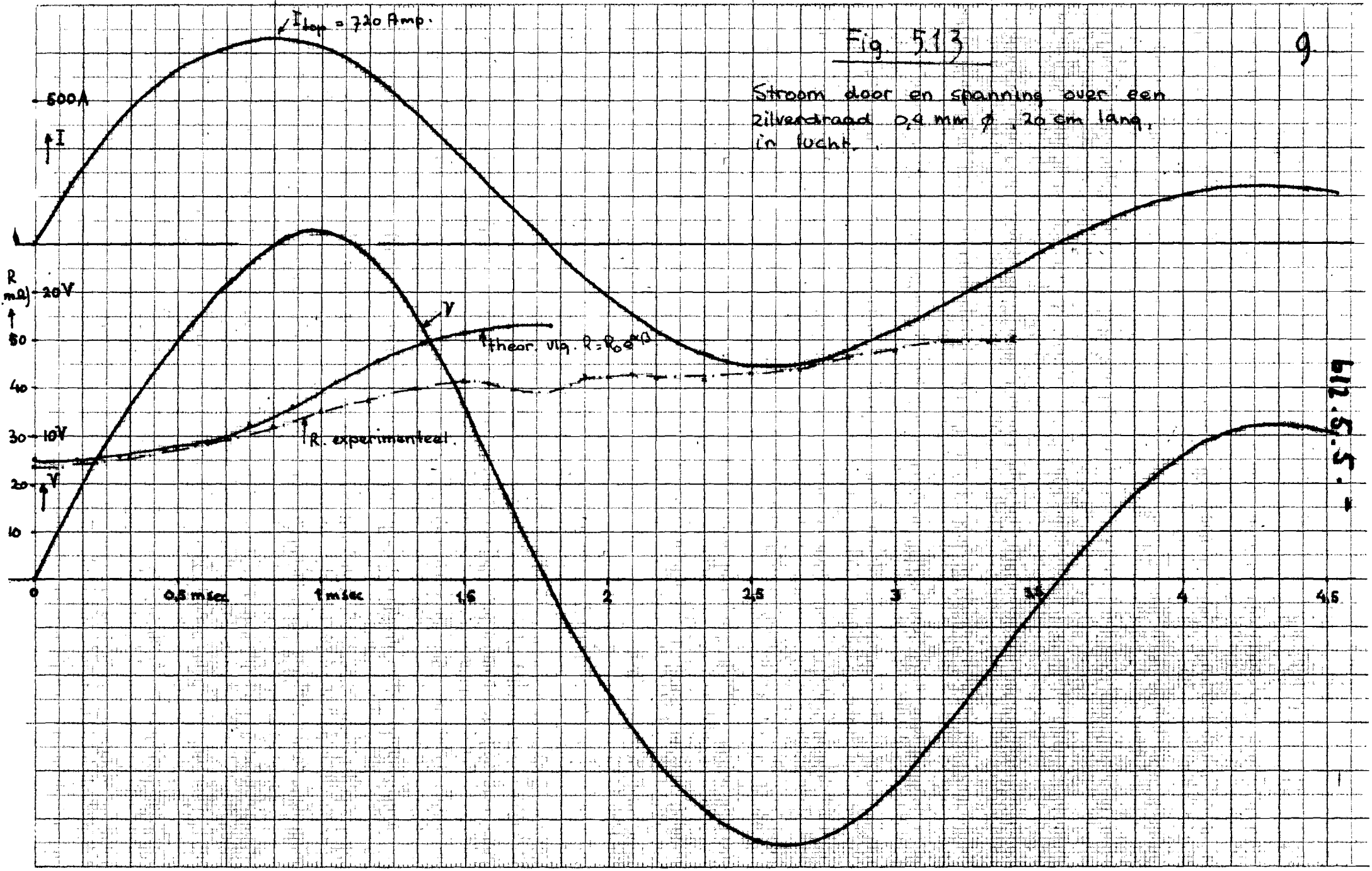
Fig. 512

Stroom door en spanning over een zilverdraad 0,4 mm ϕ , 20 cm lang, in lucht.

- 612.54 -

Fig. 5.13

Stroom door en spanning over een zilverdraad 0,4 mm ϕ , 20 cm lang, in lucht.



612.5.5.5

is. Het is dan ook niet zeer zinvol een vergelijking te treffen tussen theorie en experiment.

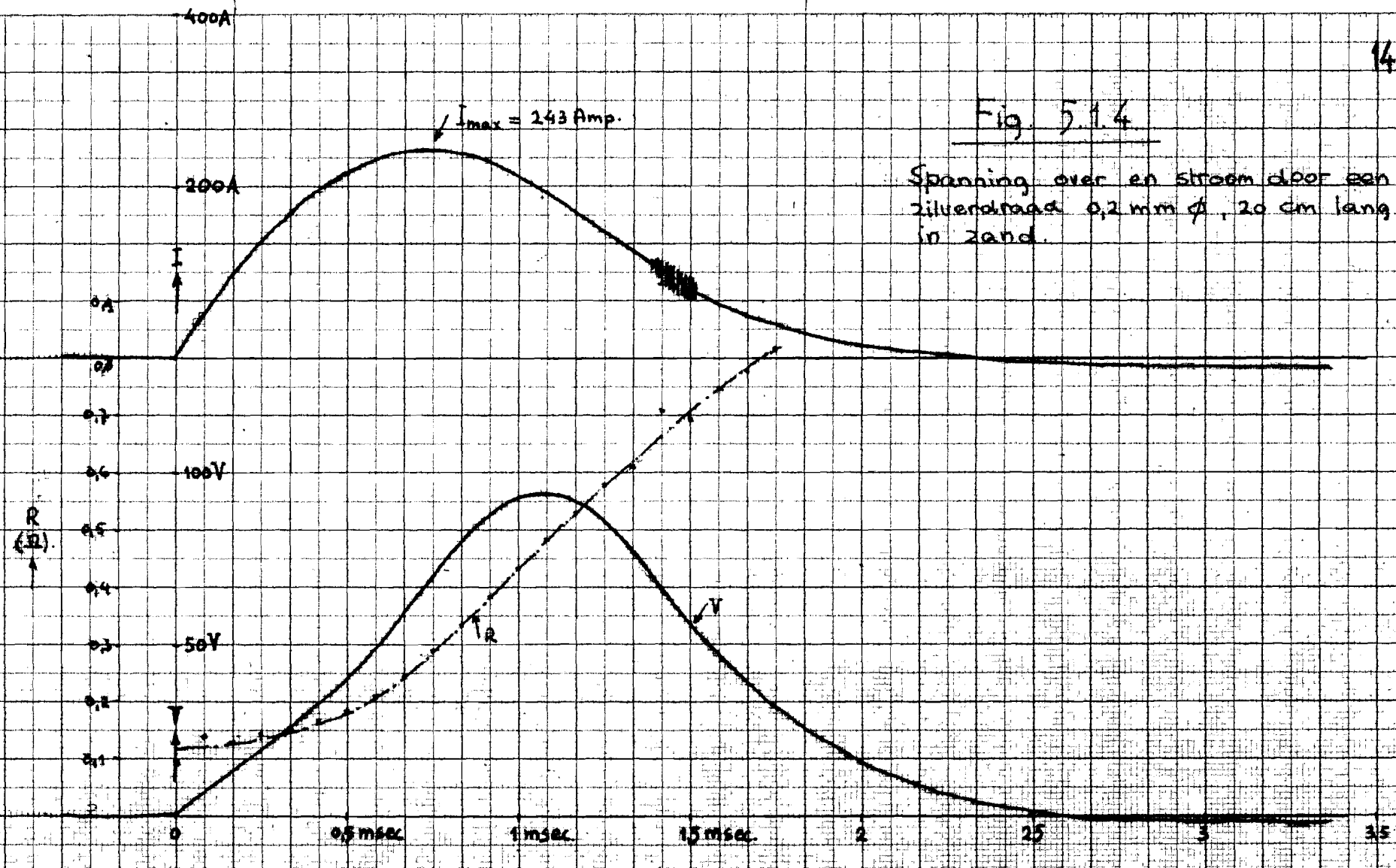
De figuren 5.1.4 t/m 5.1.7 laten de meetresultaten zien van draden van 20 cm lengte, welke horizontaal uitgespannen waren in zand. Deze draden werden gemonteerd in een proefpatroon zoals geschetst in fig. 4.1.1. Ook in deze figuren is het weerstandsverloop, zoals dat volgt uit het geregistreerde verloop van stroom en spanning, getekend, alsmede het theoretisch verloop van de weerstand volgens vergelijking (2.3.6). Ook hierbij is gerekend met de tijdconstante τ_1 .

In figuur 5.1.7 is gestippeld het sinusvormige stroomverloop aangegeven, waarmede het theoretisch verloop van de weerstand R als functie van de tijd, volgens verg. (2.3.6) is berekend. Vergelijking van werkelijk en sinusvormig stroomverloop laat zien dat in werkelijkheid in een bepaalde tijd méér energie aan de draad wordt toegevoerd dan uit een sinusvormig verloop van de stroom zou volgen. De temperatuur, en dus de weerstand van de draad, moet dus in diezelfde tijd groter worden.

Een zorgvuldige vergelijking met de theorie laten de getoonde meetresultaten om de hierboven vermelde reden niet toe, ze laten echter wel zien dat er een verschuiving plaats vindt tussen de maxima van stroom en spanning in die zin, dat het maximum in de spanning op een later tijdstip optreedt als het maximum in de stroom. Deze verschuiving is groter naarmate de stroom groter is, dus de tijdconstante kleiner is. De verschuiving ten opzichte van elkaar van de maxima in stroom en spanning, kan fysisch worden verklaard door op te merken dat, als de stroom al gaat afnemen, de weerstand nog blijft toenemen. De spanning is het produkt van I en R . Wanneer nu de weerstand sneller toeneemt dan de stroom afneemt (en dit is direct na het maximum van de stroom het geval) dan zal de spanning blijven toenemen. Dit betekent dan dat de spanning op een later tijdstip zijn maximum zal bereiken dan de stroom. Dat de spanning nl. door een maximum zal moeten gaan, volgt uit de volgende redenering. Er komt een tijdstip waarop de weerstand niet meer toeneemt en wel tijdens de nuldoorgang van de stroom. Dan wordt geen energie aan de draad toegevoerd, de temperatuur en dus de weerstand kan dan niet verder stijgen. Tijdens de nuldoorgang is de stroom echter een afnemende functie, dus moet daar de spanning ook noodzakelijk een afnemende functie zijn. Hieruit kunnen we concluderen dat de spanning een maximum moet hebben.

Fig. 5.1.4

Spanning over en stroom door een zilverdraad 0,2 mm ϕ , 20 cm lang, in zand.

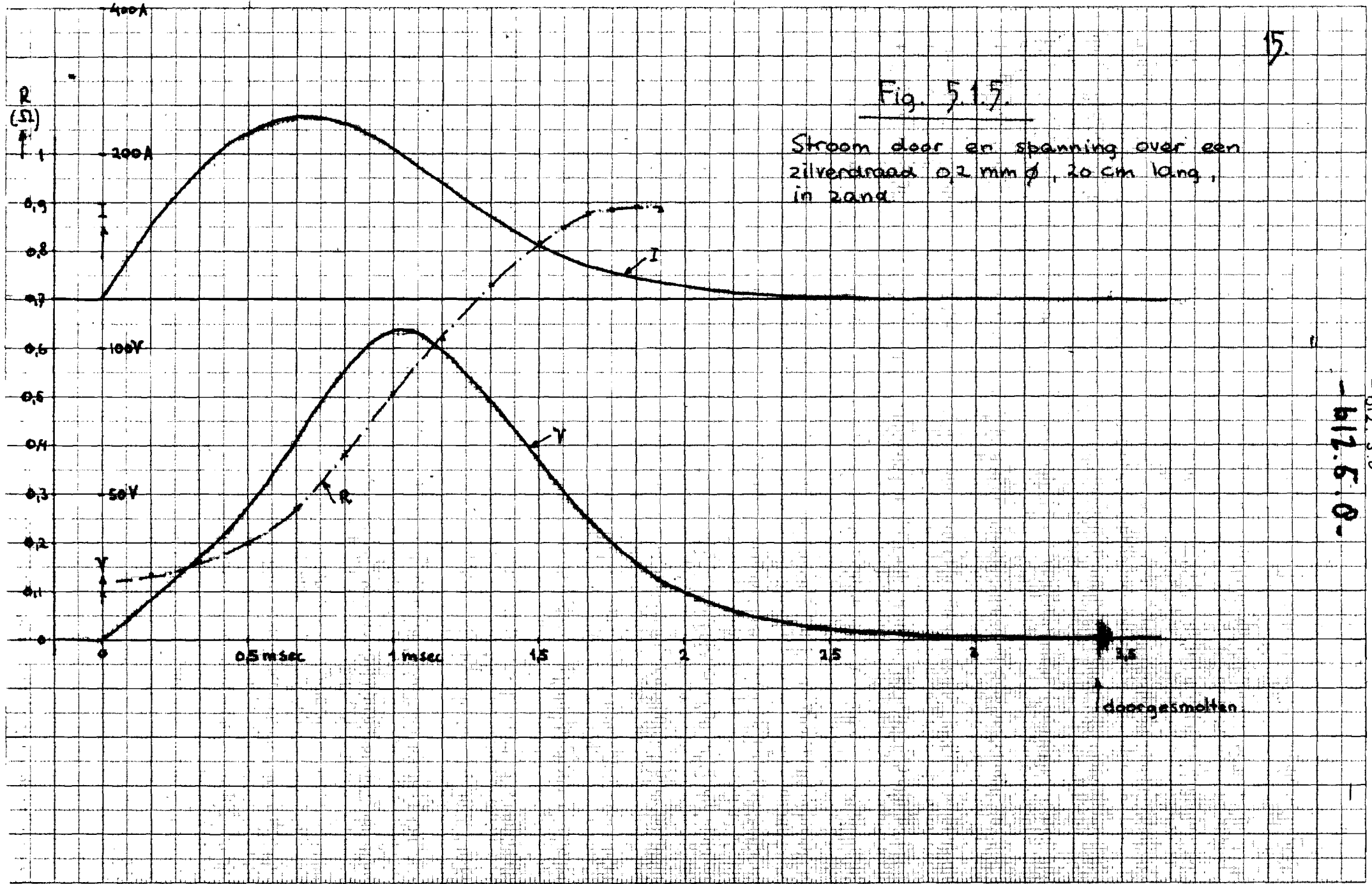


R_0 maat: 95 m Ω

- 612.5.4 -

Fig. 5.15

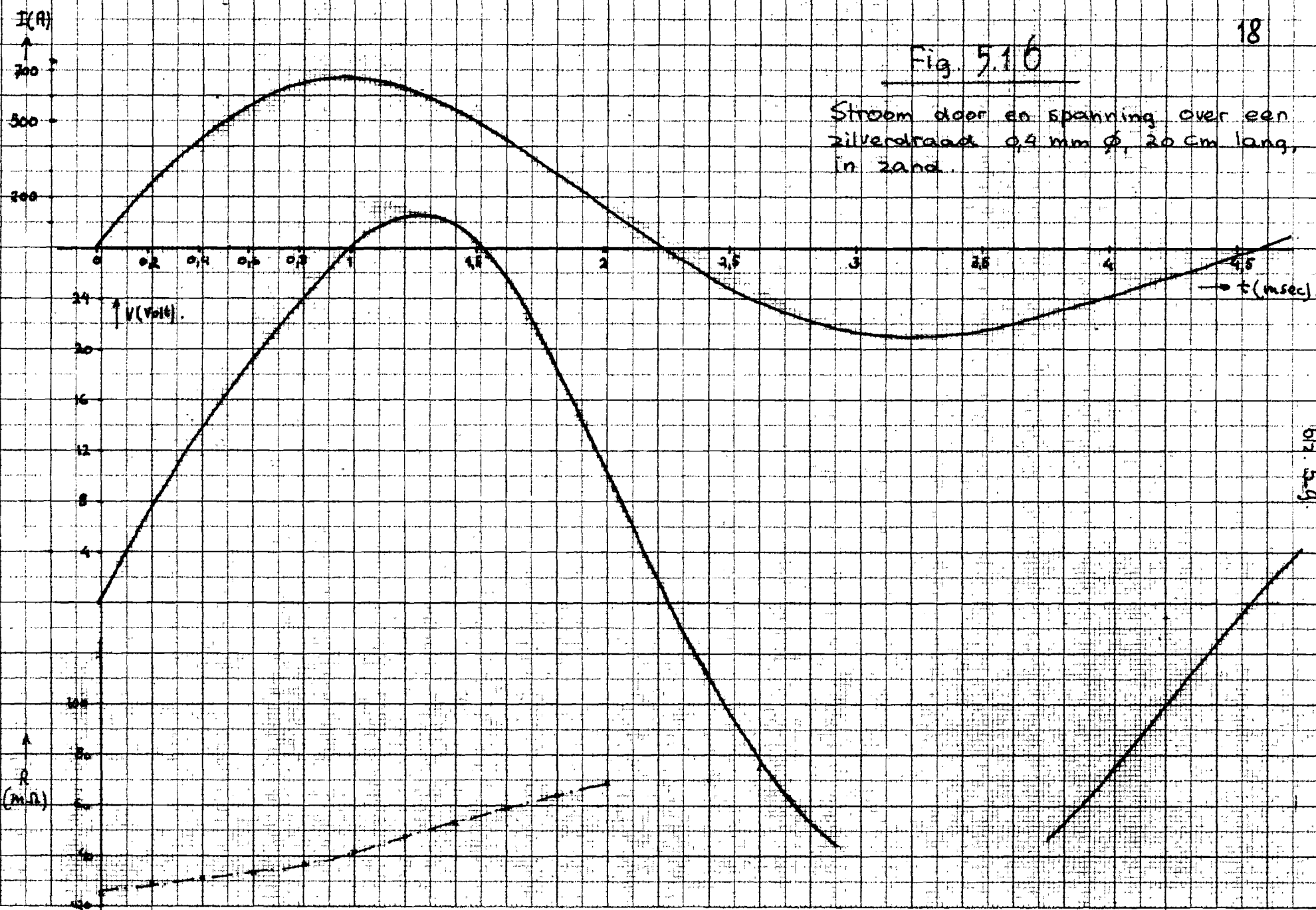
Stroom door en spanning over een zilverdraad 0,2 mm ϕ , 20 cm lang, in zand.



-012.5.8-
-612.5.8-

Fig. 5.16

Stroom door en spanning over een zilverdraad 0,4 mm ϕ , 20 cm lang, in zand.



67-5-9

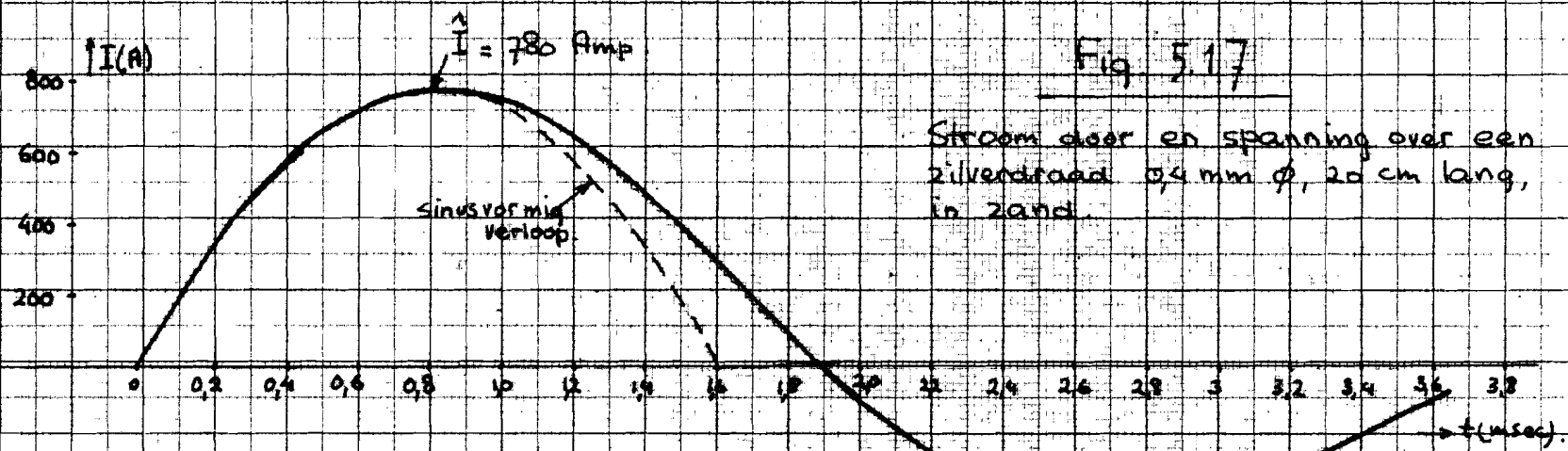
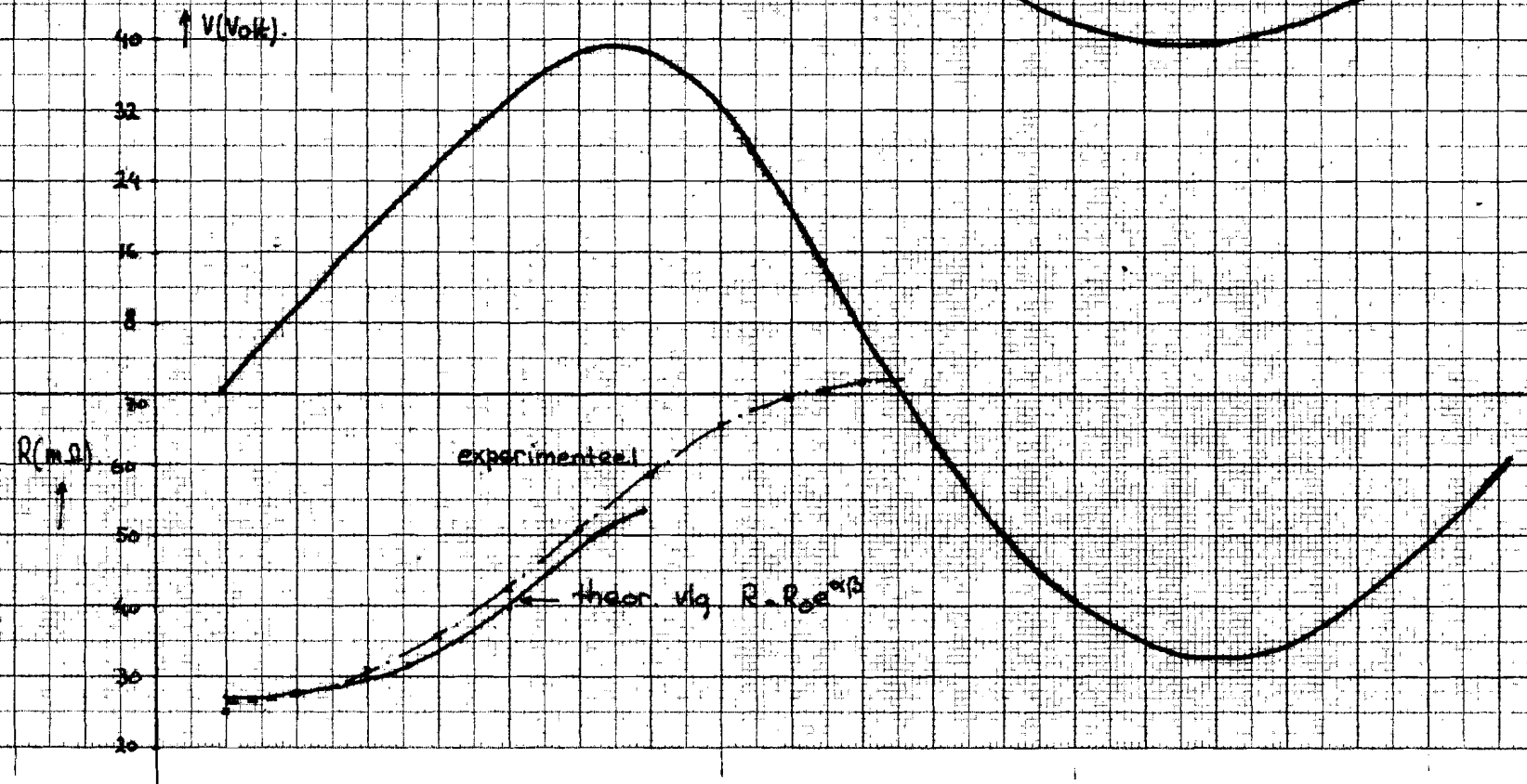


Fig 5.17

Stroom door en spanning over een zilverdraad 0,4 mm ϕ , 20 cm lang, in zand.



- 617.5.10 -

5.2. Metingen in een hoogspanningscircuit.

5.2.1. De meetmethode.

Het schema van de meetopstelling is weergegeven in fig. 5.2.1. Als capaciteit werd gebruikt een condensatorbatterij bestaande uit 4 condensatoren van elk $27,8 \mu\text{F}$, 15 kV parallel. De spanning over de smeltdraad werd gemeten via een spanningsdeler. Dit was noodzakelijk om te voorkomen dat bij doorsmelten van de smeltdraad de volle spanning op de oscilloscoopingang zou komen te staan. De gebruikte shunt was een afgeschermd shunt, fabr. Haefely. Voor het overige verliep de meting geheel zoals in het vorige geval.

5.2.2. Meetresultaten en berekeningen.

De stroom door en de spanning over de smeltdraad werden geregistreerd zoals hierboven onder 5.1 reeds omschreven. Het spannings- en stroomverloop werd geregistreerd bij verschillende waarden van de stroomsterkte door de draad en bij verschillende frequenties van de stroom, aan draden uitgespannen in zand en in lucht. Uit een aantal oscillografische opnamen voor draden in zand is de verschuiving tussen de maxima in de stroom en in de spanning tijdens de eerste halve periode opgemeten. Voorts is voor een aantal gevallen de tijdconstante τ_1' berekend volgens:

$$\tau_1' = \frac{\gamma_1 c_1}{\beta \hat{j}^2 \rho_0}$$

Voor zilver geldt: $\frac{\gamma_1 c_1}{\beta \rho_0} = 4 \cdot 10^{16} \text{ A}^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{m}^{-4}$.

Dus τ_1' kan voor elk geval worden bepaald uit de uit de oscillogrammen opgemeten waarde voor \hat{j} . Met deze berekende waarde voor τ_1' en met de uit elk oscillogram bepaalde waarde voor ω rad/sec kan een waarde voor $\omega \tau$ worden gevonden.

In tabel 5-I zijn een aantal op bovenomschreven wijze verkregen resultaten samengebracht.

In deze tabel is ϕ_0 de hoek tussen het moment van inschakelen en het eerste maximum in de spanning. De verschuiving tussen de beide

Tabel 5-I.

volgnr.	ω (rad/sec)	\hat{I} (Amp)	τ_1' (sec)	$\omega\tau$	φ_0 ($^\circ$)
1	314	54,5	$1,33 \cdot 10^{-2}$	4,2	100
2	314	61	$1,07 \cdot 10^{-2}$	3,35	102
3	314	66,6	$0,89 \cdot 10^{-2}$	2,8	104
4	314	74	$0,72 \cdot 10^{-2}$	2,27	107,5
5	317	69,5	$0,81 \cdot 10^{-2}$	2,57	103
6	317	77,3	$0,66 \cdot 10^{-2}$	2,1	106,5
7	317	82,4	$0,58 \cdot 10^{-2}$	1,84	108
8	317	70,6	$0,795 \cdot 10^{-2}$	2,52	105
9	1570	55	$1,32 \cdot 10^{-2}$	23	92,1
10	1570	65,5	$0,92 \cdot 10^{-2}$	14,5	92,7
11	1570	85	$0,55 \cdot 10^{-2}$	8,6	95,4
12	1570	102,5	$0,265 \cdot 10^{-2}$	4,15	100
13	3100	166	$1,44 \cdot 10^{-3}$	4,46	99,5
14	3100	199	$1,00 \cdot 10^{-3}$	3,1	101,2
15	3100	224	$0,79 \cdot 10^{-3}$	2,45	105,5
16	3100	256	$0,6 \cdot 10^{-3}$	1,86	115,5
17	3100	290	$0,47 \cdot 10^{-3}$	1,46	119,5
18	3100	310	$0,405 \cdot 10^{-3}$	1,25	122,5

maxima bedraagt dus $\varphi_0 = 90^\circ$.

In fig. 5.2.2. zijn deze resultaten uitgezet. Tevens is in deze figuur het theoretisch verband tussen $\omega\tau$ en φ_0 uitgezet, zoals dat volgt uit de vergelijking (2.3.8), t.w.:

$$\frac{1}{\omega\tau} \sin^3 \varphi_0 + \cos \varphi_0 = 0.$$

Deze vergelijking is grafisch opgelost op dezelfde wijze als dit is gedaan in de figuren 2.3.2 en 2.3.3, echter voor andere waarden van $\omega\tau$ en φ_0 .

Het blijkt dat het aan tabel 5-I ontnomen verloop $\varphi_0 = \varphi_0(\omega\tau)$ kwalitatief ongeveer hetzelfde is als het theoretisch berekende verloop. De experimentele kromme ligt echter voor frequenties van 50 en 250 Hz ($\omega = 314$ rad/sec, resp. 1570 rad/sec) iets lager dan de theoretisch kromme. De meetpunten welke verkregen zijn bij 50 Hz en 250 Hz vormen met elkaar ongeveer een vloeiende lijn, de punten 1 en 12 uit tabel 5-I liggen zelfs nagenoeg op elkaar. Aan de metingen bij 50 Hz en 250 Hz zullen we allereerst enige aandacht besteden.

De meetpunten zijn bepaald met gebruikmaking van de tijdconstante τ_1' voor de draad alleen. Deze tijdconstante is, blijkens fig. 5.2.2, kennelijk te klein.

We stellen nu dat de theoretische kromme behoort bij waarden τ_2' welke groter zijn dan de voor de bepaling van de meetpunten gebruikte waarden τ_1' . Nu blijkt uit fig. 5.2.2 dat er om en nabij een constante verhouding bestaat tussen τ_2' en τ_1' . Deze verhouding is van de grootte-orde:

$$\frac{\tau_2'}{\tau_1'} \approx \frac{4}{3} = \underline{1,33}.$$

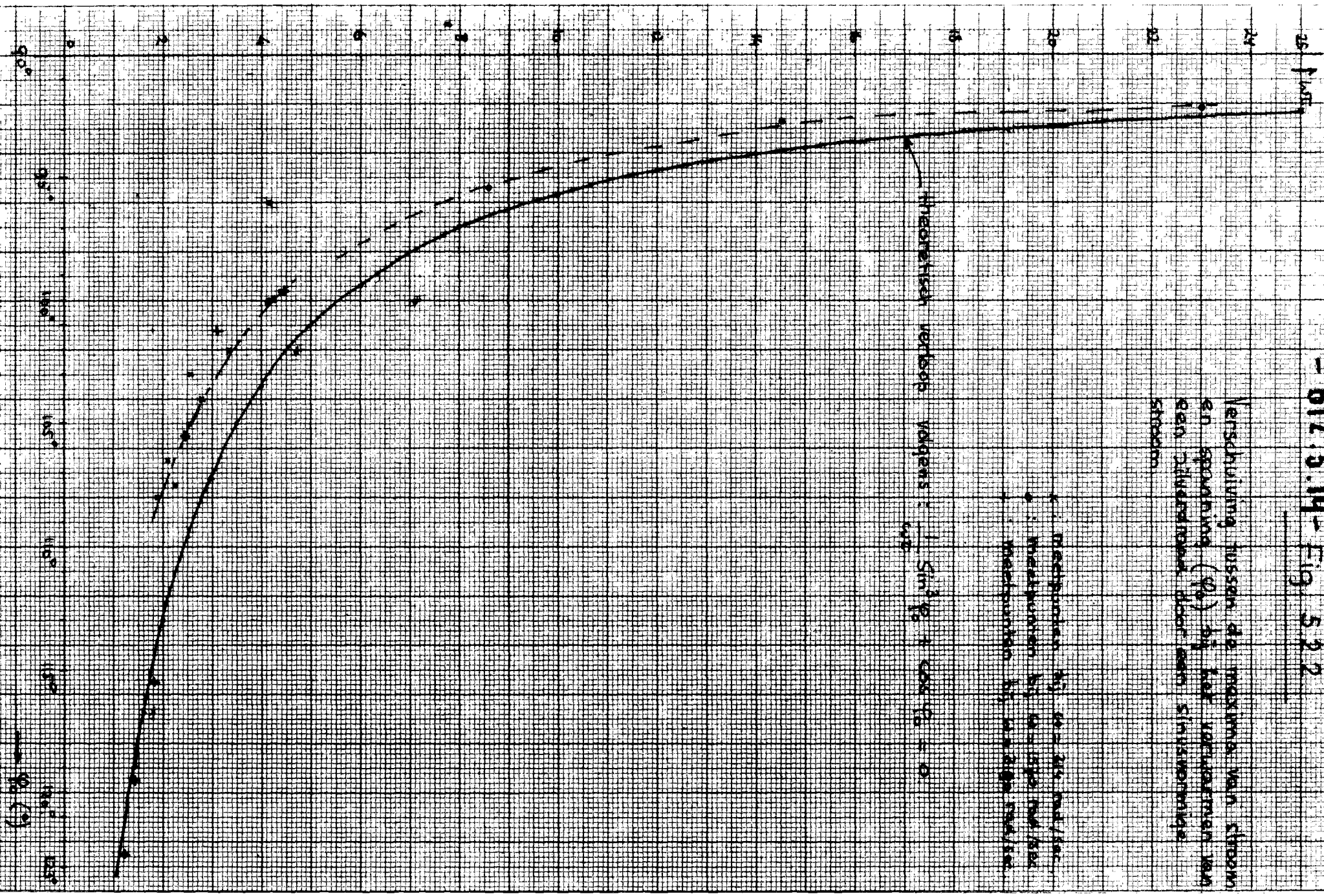
We merken nog op, dat we aan de grootte τ_2' nog geen enkele fysische betekenis hebben gegeven, we hebben slechts geconstateerd dat de theoretische tijdconstante τ_1' te klein is om de grootte

- b12.5.14 - Fig. 5.22

Verschuiving tussen de maxima van stroom en spanning (φ_0) bij het voortwaaieren van een zilverdraad door een sinusvormige stroom.

- meetpunten φ_0 $\varphi_0 = 215$ millisek.
- meetpunten bij $\varphi_0 = 150$ millisek.
- meetpunten bij $\varphi_0 = 100$ millisek.

theoretisch verloop volgens: $\frac{1}{\omega T} \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = 0$



van de gemeten hoek φ_0 te kunnen verklaren. Om dit in formulevorm tot uitdrukking te kunnen brengen, is de grootte τ_2' ingevoerd.

De tijdconstante τ' bepaalt, behalve de hoek φ_0 , ook het verloop van de weerstand als functie van de tijd, volgens betrekking (2.3.6)

$$R = R_0 e^{\alpha\beta}$$

waarin:

$$\alpha\beta = \frac{1}{2\omega\tau'} \left(\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right).$$

Het weerstandsverloop als functie van de tijd kan experimenteel worden verkregen uit het verloop van de stroom en de spanning als functie van de tijd. Voor een drietal gevallen is dit gedaan. In fig. 5.2.3. is op vergrote schaal het stroom- en spanningsverloop als functie van de tijd getekend, alsmede het hieruit bepaalde weerstandsverloop (kromme I). Tevens is in deze figuur uitgezet het theoretisch weerstandsverloop voor de eerste halve periode, zoals dat volgt uit de betrekking $R = R_0 e^{\alpha\beta}$. Hierin is verwerkt

$$\tau = \tau_1' = \frac{2,51}{\hat{j}^2 \beta \rho_0}.$$

Het resultaat van deze berekening geeft kromme II in fig. 5.2.3. De theoretische kromme ligt aanzienlijk hoger dan de experimentele kromme.

Getracht is nu een waarde $\tau = \tau_1'$ te vinden zodanig dat het theoretisch verloop overeenkomt met de experimentele kromme.

We kunnen voor dit geval berekenen:

$$\tau_1' = 0,66 \cdot 10^{-2} \text{ sec.}$$

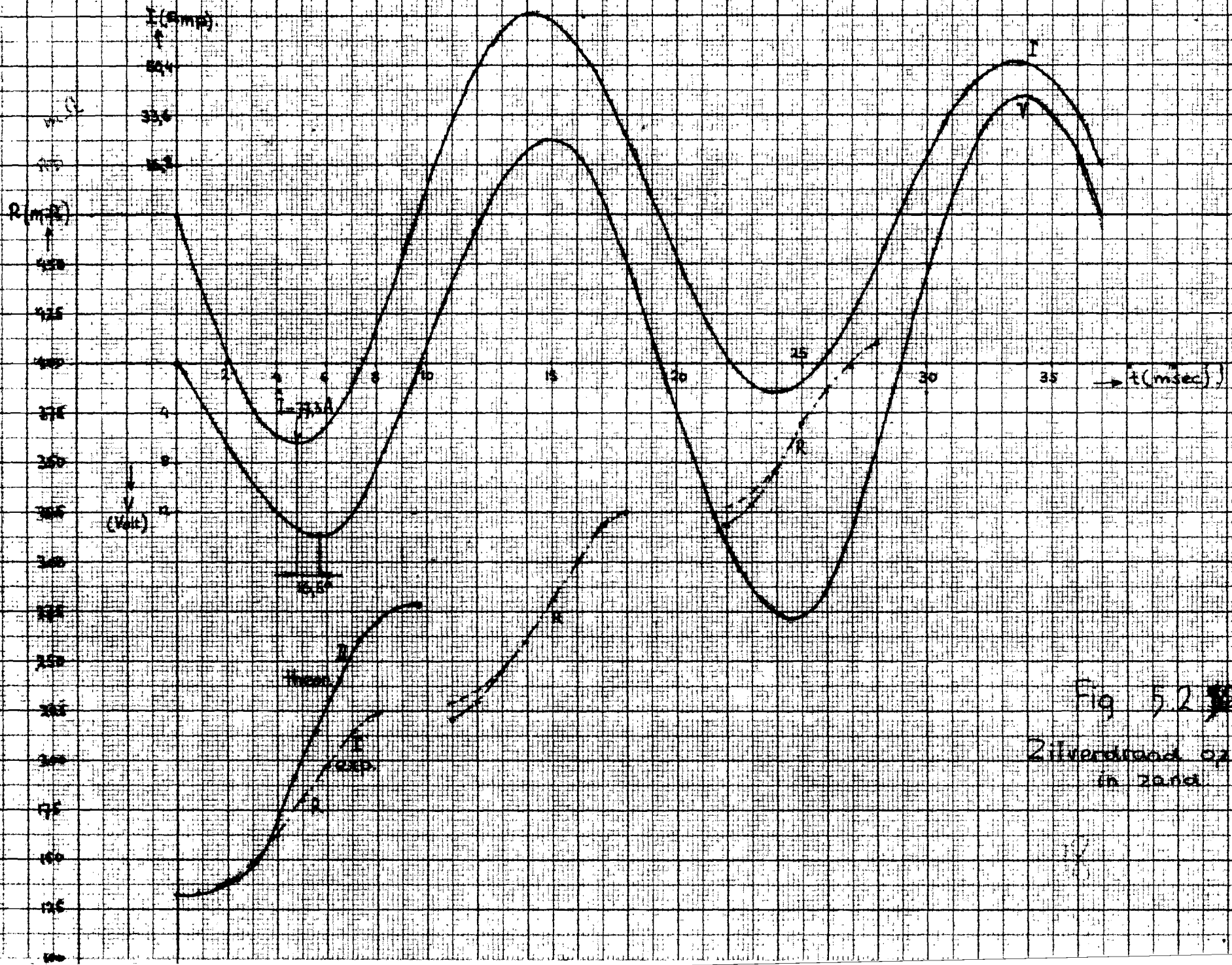


Fig 5.2

21V rod rod of mm ϕ
in sand

- 617.5.16 -

Met $\tau_2' = 0,875 \cdot 10^2$ sec. kunnen we een weerstandsverloop berekenen dat het experimentele verloop binnen de meetnauwkeurigheid volgt.

Hieruit volgt voor de verhouding van τ_2' en τ_1' :

$$\frac{\tau_2'}{\tau_1'} = \frac{0,875}{0,66} = 1,33.$$

Fig. 5.2.3. is verkregen bij een meting aan een draad in zand. Uit deze figuur is meetpunt 6 van tabel 5-I bepaald.

We zien dus dat de uit de verschuiving van de maxima gevonden verhouding tussen τ_2' en τ_1' voor dit geval goed overeenstemt met de waarde van τ_2'/τ_1' zoals die volgt uit een vergelijking tussen het experimentele en het theoretische weerstandsverloop.

Ook bij draden in lucht blijkt in principe hetzelfde weerstandsverloop op te treden. We zullen twee experimenten aan draden in lucht nader beschouwen.

In fig. 5.2.4 is op vergrote schaal het stroom- en spanningsverloop getekend zoals dat is geregistreerd aan een zilverdraad van 0,2 mm diameter, uitgespannen in lucht.

In dezelfde figuur is het uit dit stroom- en spanningsverloop berekende weerstandsverloop getekend (kromme I). Het met $\hat{I} = 68,5$ Amp en $\tau = \tau_1'$ berekende theoretische weerstandsverloop is in deze figuur weergegeven door kromme II. Ook in dit geval lukt het met een grotere waarde van de tijdconstante τ een theoretisch weerstandsverloop te vinden dat goed overeenstemt met het experimentele weerstandsverloop. We kunnen berekenen:

De theoretische tijdconstante $\tau_2' = 0,84 \cdot 10^{-2}$ sec.

Aanpassing van de tijdconstante op

$$\tau_2' = 1,16 \cdot 10^{-2} \text{ sec}$$

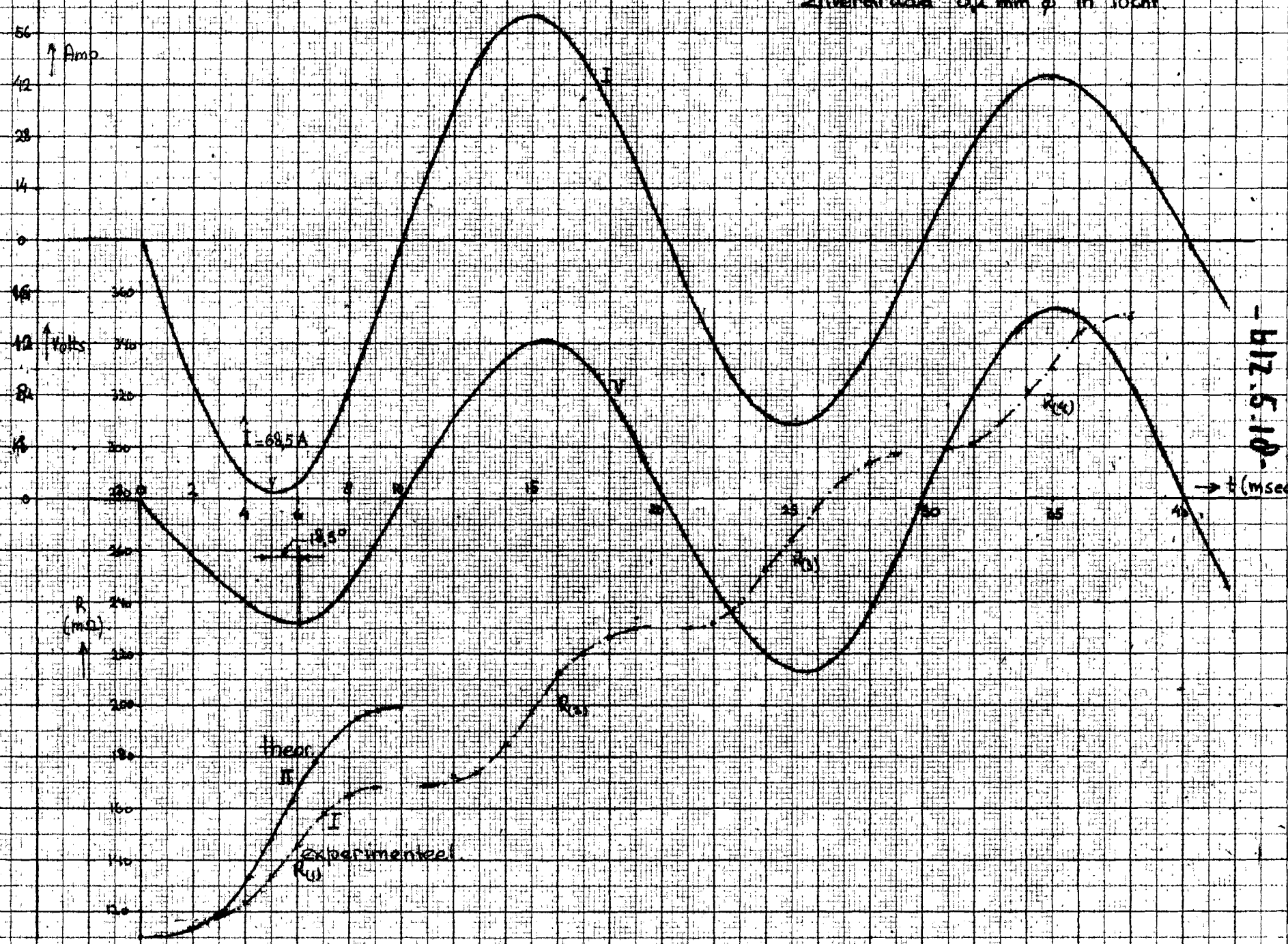
geeft een weerstandsverloop dat nauwkeurig gelijk loopt met kromme I uit fig. 5.2.4.

Voor de verhouding van τ_2' en τ_1' vinden we dus:

$$\frac{\tau_2'}{\tau_1'} = \frac{1,16}{0,84} = 1,38.$$

Fig. 5.2

Zilverdraad 0,2 mm ϕ in lucht



Deze waarde ligt in dezelfde grootte-orde als de hierboven gevonden waarden voor τ_2'/τ_1' , welke volgen uit metingen van draden in zand.

Fig. 5.2.5. geeft de meetresultaten weer van een ander experiment met een zilverdraad van 0,2 mm diameter in lucht.

In deze figuur is kromme I het uit het geregistreeerde stroom- en spanningsverloop bepaalde weerstandsverloop.

In dit geval vinden we voor de theoretische tijdconstante τ_1' :

$$\tau_1' = 1,03 \cdot 10^{-2} \text{ sec.}$$

Met deze tijdconstante kunnen we kromme II uit fig. 5.2.5 berekenen. Ook deze kromme ligt weer belangrijk hoger dan de experimentele kromme.

Met een waarde voor de tijdconstante, t.w.:

$$\tau_2' = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$$

is kromme III in fig. 5.2.5 berekend. Deze kromme volgt het experimentele verloop (kromme I) vrij behoorlijk.

We vinden nu voor de verhouding van τ_2' en τ_1' :

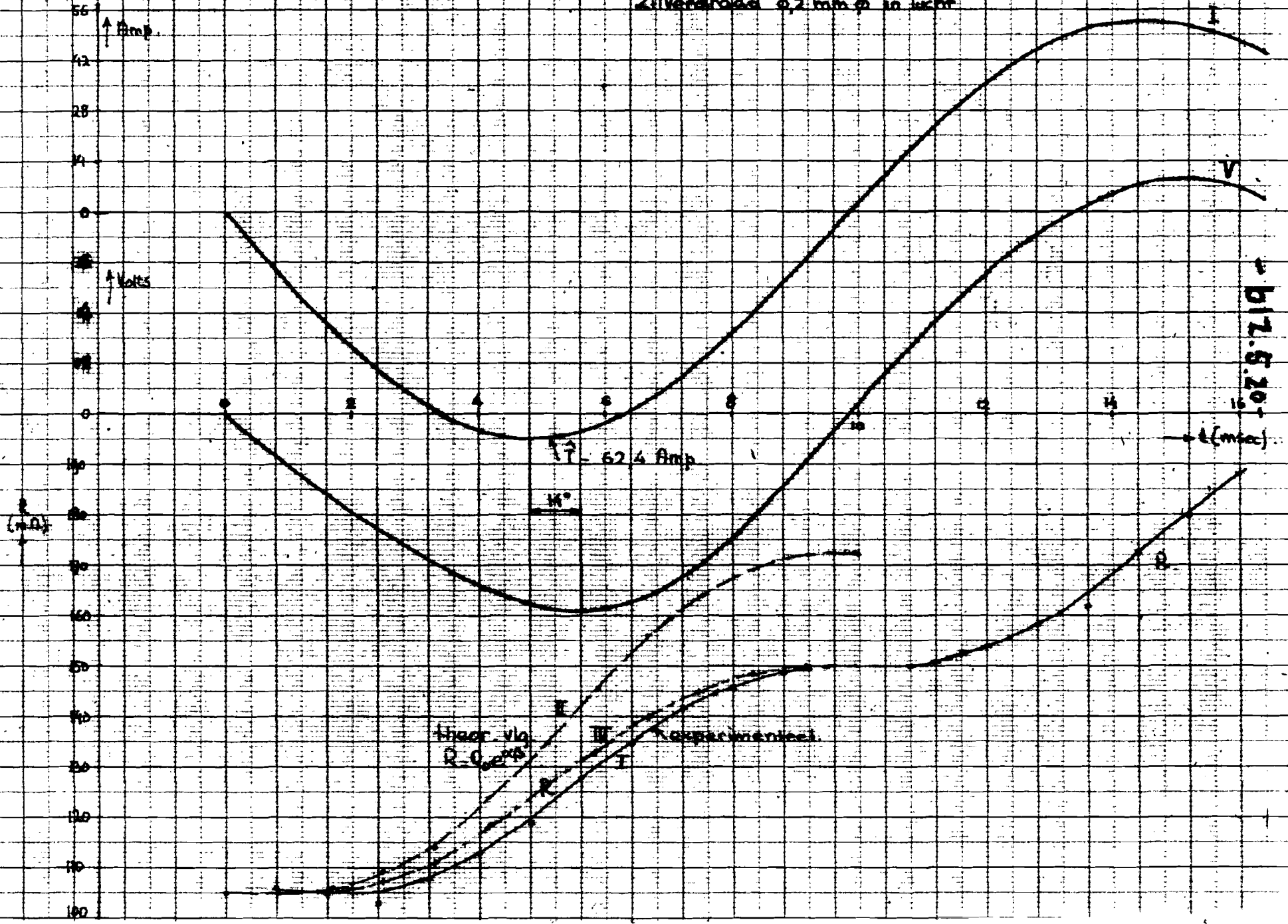
$$\frac{\tau_2'}{\tau_1'} = \frac{1,4}{1,03} = 1,36.$$

Ook deze waarde ligt in dezelfde grootte-orde als de hierboven gevonden waarden voor τ_2'/τ_1' .

Uit een aantal experimenten bij frequenties van 50 en 250 Hz aan draden in zand en in lucht volgt dus dat de "adiabatische" tijdconstante τ_1' te klein is om de experimentele resultaten kwantitatief te verklaren. We hebben gevonden dat we een grotere tijdconstante τ_2' moeten introduceren om de experimenten te kunnen verklaren. Verder zagen we dat er een vaste verhouding blijkt te bestaan tussen τ_2' en τ_1' in het door de experimenten bestreken gebied.

Fig 5.25

Zilverdraad 0,2 mm ϕ in lucht



De grootheid τ_2 is echter een tijdconstante die een adiabatisch verwarmingsproces kwantitatief verklaart. Hieruit kan men de gevolgtrekking maken dat er wél sprake is van een adiabatisch proces, echter, dit adiabatisch proces wordt beheerst door een tijdconstante welke groter is dan die welke volgt uit de karakteristieke grootheden van de zilverdraad.

Dit experimentele gegeven voert tot de veronderstelling dat niet de draad alleen, maar de draad met een zich om de draad bevindende cilindrische mantel met straal r_2 volgens een adiabatisch proces wordt verwarmd. De tijdconstante τ_2' behoort dan bij de draad plus deze mantel.

In paragraaf 2.3 is reeds een betrekking afgeleid voor de grootheid τ_2' welke bepalend is voor de adiabatische verwarming van een draad met een zich om de draad bevindende mantel. We vonden:

$$\tau_2' = \tau_1' \left(1 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2} \cdot \frac{c_2 \gamma_2}{c_1 \gamma_1} \right). \quad (2.3.4c)$$

Met de hierboven gevonden verhouding voor $\frac{\tau_2'}{\tau_1'}$ volgt hieruit:

$$1 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2} \cdot \frac{c_2 \gamma_2}{c_1 \gamma_1} \approx \frac{4}{3} \quad (5.2.1)$$

of:

$$\left(\frac{r_2^2}{r_1^2} - 1 \right) \frac{c_2 \gamma_2}{c_1 \gamma_1} \approx \frac{1}{3}$$

Indien we stellen: $\frac{c_2 \gamma_2}{c_1 \gamma_1} = K$ dan volgt:

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} \approx \frac{1}{3K} + 1. \quad (5.2.2)$$

Aan handboeken ontleneu we:

Voor zilver: $c_1 \approx 200 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

$$\rho_1 \approx 10,5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

Voor lucht:

$$c_2 \approx 1000 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\rho_2 \approx 1 \text{ kg m}^{-3}$$

} gemiddelde waarden

Voor zand:

$$c_2 \approx 650 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\rho_2 \approx 2500 \text{ kg m}^{-3}.$$

Uit deze waarden volgt voor K:

voor de combinatie zilver-lucht:

$$K_1 = 0,52 \cdot 10^{-3}$$

voor de combinatie zilver-zand:

$$K_2 = 0,775.$$

Hieruit kunnen we de straal r_2 berekenen.

Voor zand volgt: $r_2 \approx 1,2 r_1$

Dus: $r_2 \approx 0,12 \text{ mm}.$

Dit geeft een manteldikte $\Delta r = \underline{\underline{0,02 \text{ mm}}}.$

Voor lucht volgt: $r_2 = 43,5 r_1.$

Dus: $r_2 = 4,35 \text{ mm}.$

Dit geeft een manteldikte $\Delta r = \underline{\underline{4,25 \text{ mm}}}.$

Uit (5.2.1) volgt:

$$\frac{(r_2^2 - r_1^2) c_2 \gamma_2}{r_1^2 c_1 \gamma_1} \approx \frac{1}{3} \quad (5.2.3)$$

De totale warmtecapaciteit van de mantel ter lengte $2l$ is:

$$2l \cdot \pi \cdot (r_2^2 - r_1^2) c_2 \gamma_2 = V_m \cdot C_2 \quad (5.2.4)$$

Hierin is: V_m : het volume van de mantel,

C_2 : de warmtecapaciteit per volume-eenheid van de mantel.

Evenzo gelukt voor de draad:

$$2l \cdot \pi \cdot r^2 \cdot c_1 \gamma_1 = V_d C_1 \quad (5.2.5)$$

en dit is de totale warmtecapaciteit van deze draad van dezelfde lengte.

In fig. 5.2.5 is: V_d : het volume van de draad,

C_1 : de warmtecapaciteit per volume-eenheid van de draad.

Het blijkt dus dat vergelijking (5.2.3) ook als volgt geschreven kan worden:

$$\frac{V_m \cdot C_2}{V_d \cdot C_1} \approx \frac{1}{3} \quad (5.2.6)$$

Hieruit blijkt dat de bovengenoemde veronderstelling neerkomt op het volgende:

De draad wordt adiabatisch verwarmd samen met een mantel om de draad, waarvan de totale warmtecapaciteit rond een derde is van de totale warmtecapaciteit van de draad.

In enkele artikelen van v. Liempt en de Vriend^{*)} is een beschrijving van een aantal experimenten te vinden waarmee aangetoond wordt dat de verwarming van een smeltdraad door een doorgaande elektrische stroom gedurende een tijd van ca. 0,1 msec. opgevat kan worden als een adiabatisch proces.

^{*)} J.A.M. van Liempt en J.A. de Vriend:

Z. für Physik 93 (1934) pp. 100 e.v.

Idem 98 (1936) pp. 133 e.v.

Dit resultaat wordt door een aantal auteurs*) gebruikt als basis voor hun beschouwingen, het is echter in strijd met onze waarnemingen in die zin, dat niet alleen de draad (zoals v. Liempt en de Vriend aangeven), maar de draad met een mantel om de draad adiabatisch verwarmd wordt.

We zullen aan de experimenten en berekeningen van v. Liempt en de Vriend dan ook enige aandacht besteden.

In vergelijking (2.3.2b) is τ_1 gedefinieerd als:

$$\tau_1 = \frac{\gamma_1 c_1}{\beta \hat{j}^2 \rho_0} \quad (2.3.2b)$$

Hierbij is verondersteld dat de stroom op het tijdstip $t=0$ ingeschakeld wordt (stapfunctie).

Voor $t > 0$ is de stroom een gelijkstroom.

In vergelijking (2.3.8) is τ_1' gedefinieerd als:

$$\tau_1' = \frac{\gamma_1 c_1}{\beta \rho_0 \hat{j}^2} \quad (2.3.8)$$

Hierin is \hat{j} de maximale waarde van een sinusvormige stroomdichtheid.

Voor het temperatuursverloop vonden we bij een stapfunctie in de stroom:

$$T(t) = \frac{1}{\beta} \left(e^{t/\tau_1} - 1 \right) \quad (2.3.2a)$$

*) O.a. door H. Laple: ETZ 58 (1937) H.14 pp. 369 e.v.

H.H. Johann: ETZ 58 (1937) H.25 pp. 684 e.v.

E. Wintergerst: Z. angew. Physik II. Band (1950) H.4 pp. 167 e.v.

Bij een sinusvormige stroom vonden we voor het temperatuursverloop:

$$T(t) = \frac{1}{\beta} (e^{\alpha\beta} - 1) \quad (2.3.5a)$$

met

$$\alpha\beta = \frac{1}{2\omega\tau_1} \left(\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right) \quad (2.3.5b)$$

Indien we \hat{J} vervangen door J_{eff} , dan is duidelijk dat geldt:

$$\tau_1' = \frac{\gamma_1 c_1}{2\beta \rho_0 \hat{J}_{\text{eff}}^2}$$

Als we stellen $\tau_1'' = \frac{\gamma_1 c_1}{\beta \rho_0 \hat{J}_{\text{eff}}^2}$, dan is dus $\tau_1' = \frac{\tau_1''}{2}$.

Maan dan geldt ook $\tau_1'' = \tau_1$, als we in de betrekking voor τ_1 de stroomdichtheid J opvatten als een effectieve waarde.

In dit geval geldt:

$$\alpha\beta = \frac{1}{\omega\tau_1} \left(\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right)$$

of:

$$\alpha\beta = \frac{t}{\tau_1} - \frac{1}{2\omega\tau_1} \sin 2\omega t. \quad (5.2.7)$$

Het is dan duidelijk dat de temperatuur bij verhitting door een wisselstroom op de punten $2\omega t = k\pi$ ($k=0,1,2,\dots$) samenvalt met de temperatuur bij verwarming door een ten tijde $t=0$ ingeschaalde gelijkstroom. Immers als $2\omega t = k\pi$ ($k=0,1,2,\dots$), dan geldt $\sin 2\omega t = 0$ dus is $\alpha\beta = \frac{t}{\tau_1}$. Dan is in beide gevallen de ex-

ponent van ϵ dezelfde.

In fig. 5.2.6 is het verloop van de temperatuur als functie van de tijd weergegeven, zoals dat volgt uit een berekening volgens de formules (2.3.2a) en (2.3.5a).

In beide gevallen is gekozen:

$$\tau_1 = \tau_1'' = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ sec.}$$

In het geval van verwarming door wisselstroom is gekozen

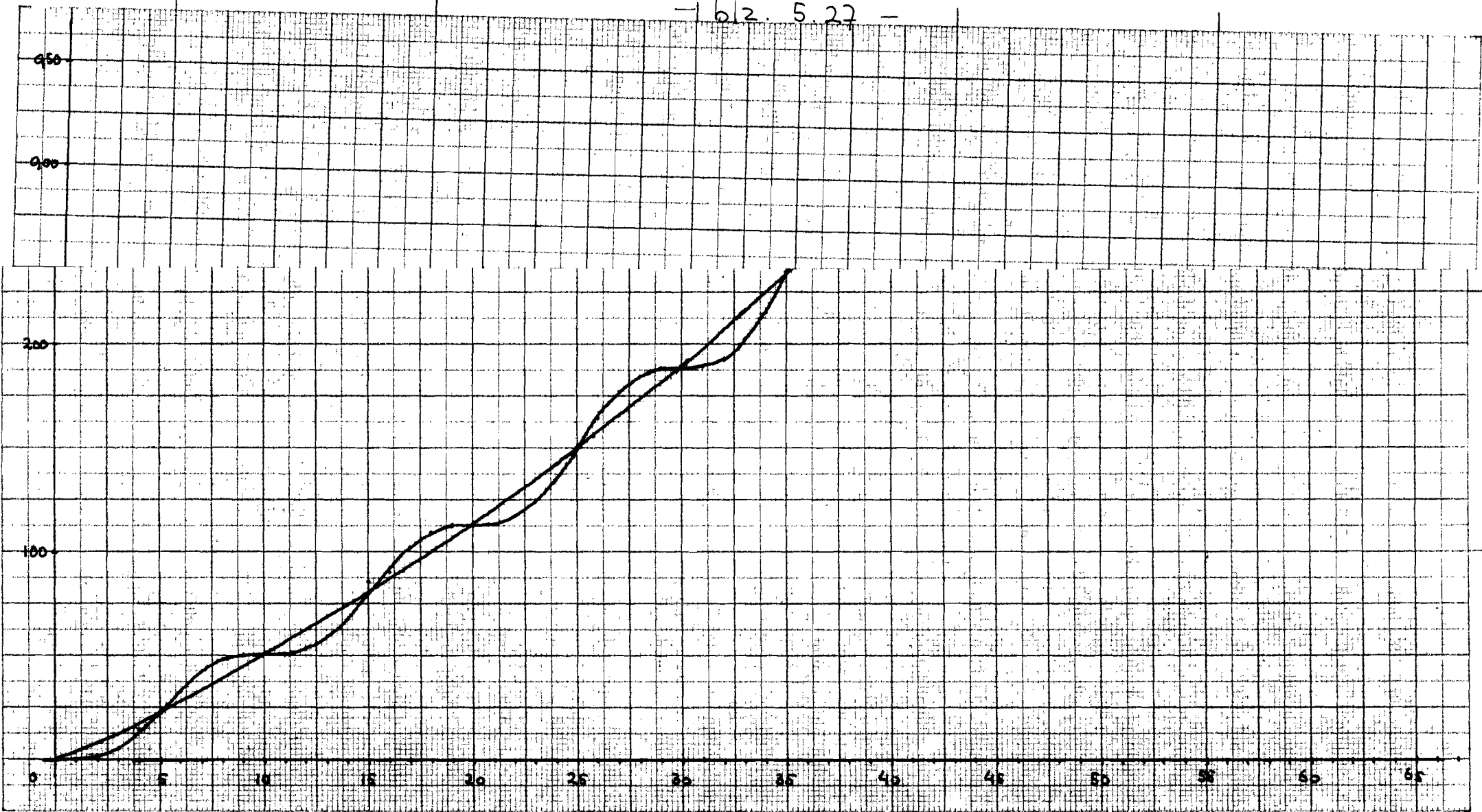
$$\omega = 314 \text{ rad/sec (f = 50 Hz).}$$

De krommen van fig. 5.2.6 dienen slechts als voorbeeld om duidelijk te maken dat de doorsmelttijd bij verhitting door wisselstroom anders kan zijn dan bij verhitting door gelijkstroom, indien slechts enkele perioden worden beschouwd. De temperatuur van 200°C b.v. wordt bij wisselstroom bereikt in 33 msec, bij gelijkstroom in rond 31 msec. Welnu, van Liempt en de Vriend hebben de doorsmelttijd bepaald bij verhitting door wisselstroom en deze doorsmelttijd lag steeds in de orde van de tijd van 3 perioden of kleiner. In hun waarnemingen is dan ook een grote spreiding in de uitkomsten op te merken, echter het aantal waarnemingen was veel te klein om hieruit een goed gemiddelde te nemen. Bovendien hebben zij het gemiddelde genomen door aan te nemen dat waarnemingen volgens een Gauss-functie verdeeld waren. Dit laatste is, zoals blijkt uit fig. 5.2.6 beslist niet het geval. Verder hebben zij bij doorsmelten tijdens de eerste halve periode gerekend met de topwaarde van de stroom, terwijl zij de afschakeltijd berekenden volgens een betrekking die overeenkomt met (2.3.2a).

Van Liempt en de Vriend geven voor hun experimenten op een nauwkeurigheid van omstreeks 17%. Voeg hierbij de mogelijke onnauwkeurigheid als gevolg van het feit dat zij met wisselstroom hun experimenten hebben uitgevoerd, en we komen op een totale fout die dicht in de buurt van de 30% zal liggen.

Er behoeft dus geen tegenspraak te zijn tussen de experimenten van van Liempt en de Vriend en de in dit verslag beschreven experimenten, immers, hierboven is aangetoond dat ongeveer geldt: $\frac{\tau_1'}{\tau_1''} \approx 1,33$.

- 162.5.22 -



Thans zullen we nog enige aandacht besteden aan de metingen welke zijn verricht bij een frequentie van ca. 500 Hz ($\omega = 3100$ rad/sec). Bij deze frequentie zijn de meetpunten 13 t/m 18 uit tabel 5-I verkregen.

Allereerst merken we op dat de meetpunten 13, 14 en 15 vrij goed overeenstemmen met de kromme zoals die was bepaald uit de metingen bij 50 Hz en 250 Hz (zie de grafiek van fig. 5.2.2). De meetpunten 16, 17 en 18 evenwel liggen vrijwel op de theoretische kromme van fig. 5.2.2.

Teneinde na te gaan wat hiervan de mogelijke oorzaak zou kunnen zijn, hebben we van de gevallen genoemd onder 15 en 18 in tabel 5-I het experimentele en het theoretische weerstandsverloop gedurende de eerste halve periode bepaald. De resultaten hiervan zijn te zien in de figuren 5.2.7 en 5.2.8 op blz. 5.29 en 5.30.

In fig. 5.2.7 vinden we een soortgelijk verschil tussen theorie en experiment zoals we dat bij vorige gevallen reeds hebben ontmoet. Voor dit geval kunnen we berekenen:

$$\tau_1' = 0,79 \text{ msec.}$$

Met deze tijdconstante is kromme II in fig. 5.2.7 berekend. Met een iets grotere tijdconstante t.w.

$$\tau_2' = 1,0 \text{ msec}$$

kunnen we een weerstandsverloop berekenen dat het experimentele verloop (kromme II in fig. 5.2.7) goed volgt.

In dit geval vinden we dus voor de verhouding van de tijdconstanten τ_2' en τ_1' :

$$\frac{\tau_2'}{\tau_1'} = \frac{1}{0,79} = \underline{1,266.}$$

Deze verhouding is weer van dezelfde grootte-orde als bij vorige gevallen.

In het geval van fig. 5.2.8 krijgen we een iets ander beeld. Uit deze meting is meetpunt nr. 18 uit tabel 5-I bepaald en we zagen reeds dat hierbij de gemeten verschuiving tussen de maxima in stroom en spanning overeenstemde met de theorie. Dit zou er op duiden dat in dit geval de verwarming van de draad beheerst wordt door de

-B17.5.29-

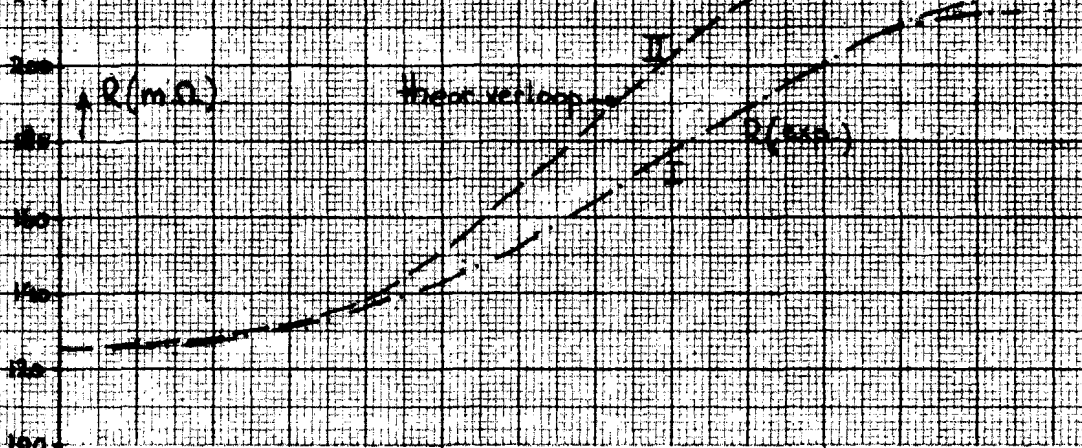
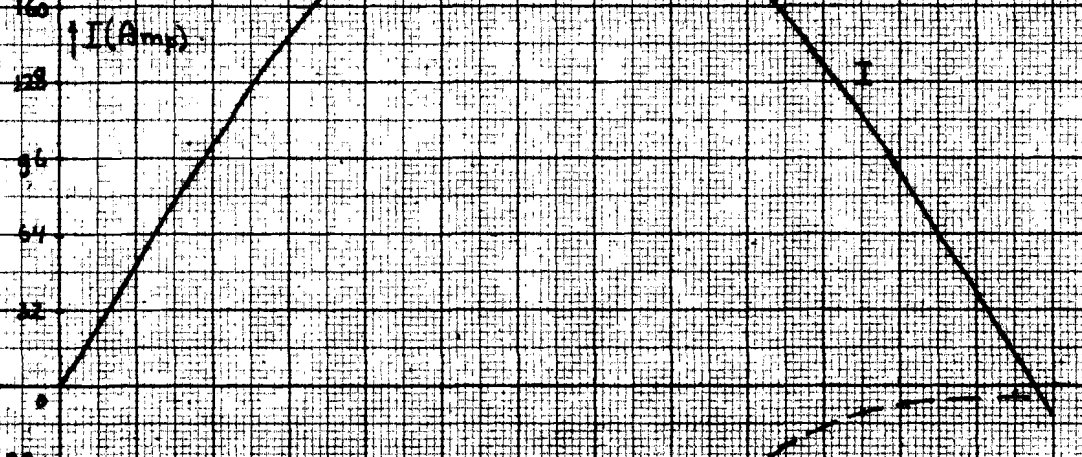
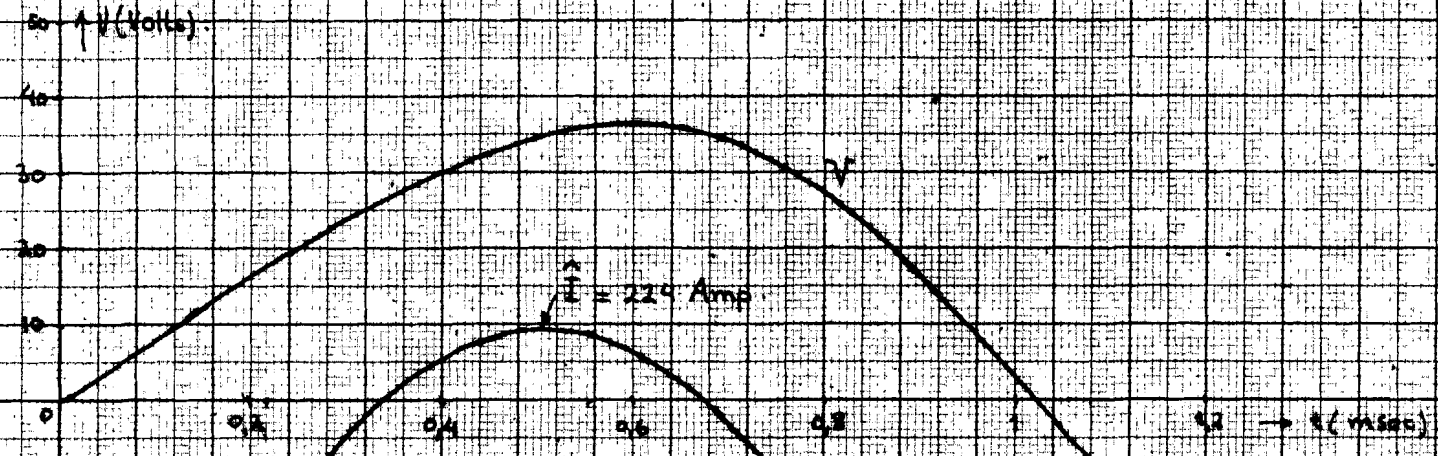


Fig 527

Theoretisch en experimenteel
Weerstandverloop van een zonde
zilversonde 52 mm ϕ , 20 cm lang
in zand

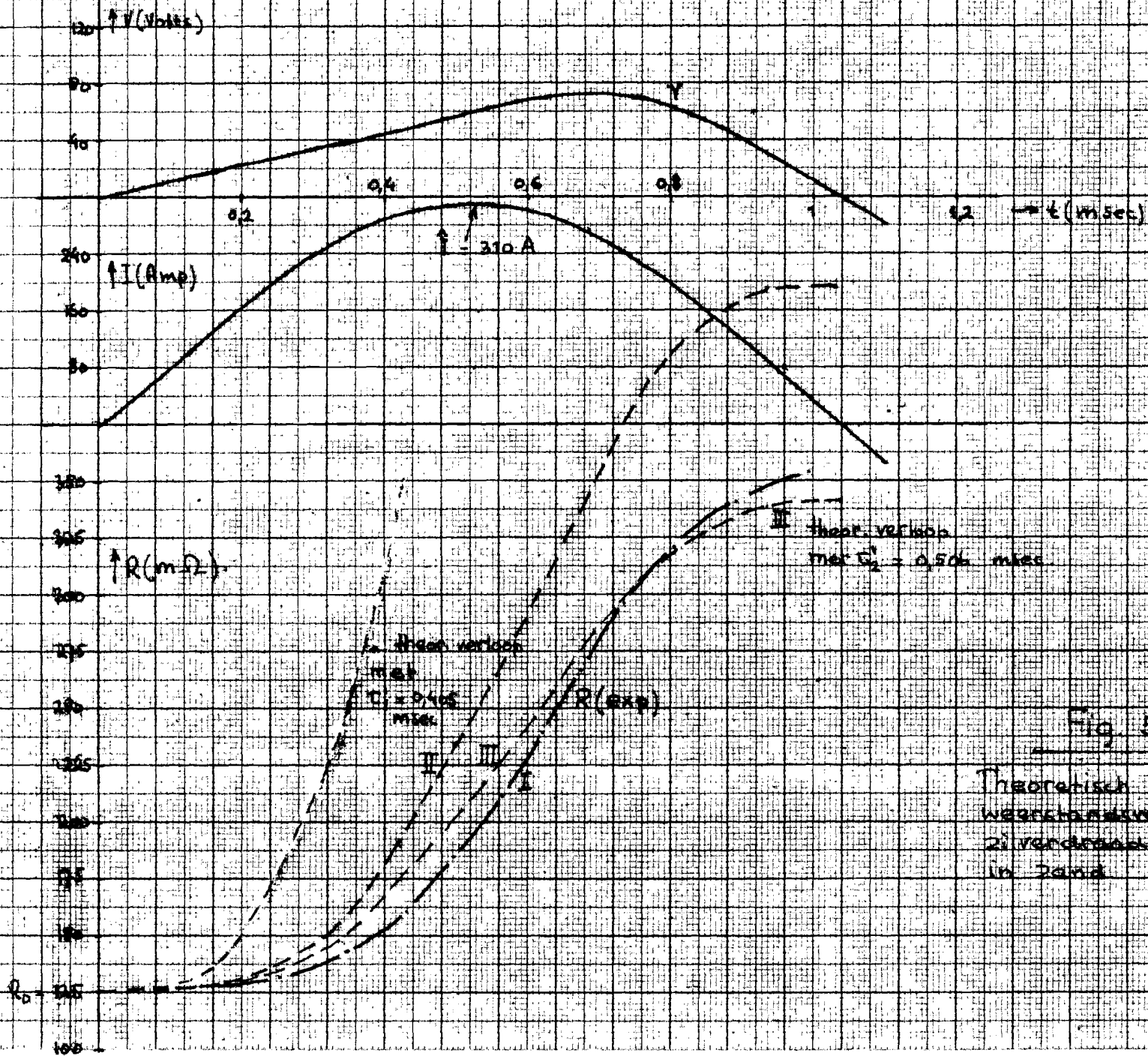


Fig. 5.2.8

Theoretisch en experimenteel weerstandverloop van een koper-
 zij-ventroede 0,3 mm ϕ 20 cm lang,
 in zand.

p12 5.30

"adiabatische tijdconstante" τ_1' , dus van de draad alleen. Beschouwen we echter het experimentele weerstandsverloop (fig. 5.2.8, kromme I) dan blijkt dit vrij aanzienlijk af te wijken van het theoretische verloop (kromme II in fig. 5.2.8) dat berekend is met de theoretische tijdconstante: $\tau_1' = 0,405 \text{ msec}$. Voorts blijkt dat we het experimentele weerstandsverloop niet goed meer kunnen benaderen met een andere waarde van de tijdconstante. In alle gevallen werd voor de bepaling van τ_2' uitgegaan van de weerstand R_e ten tijde $\omega t = \pi$. Uit het quotient van R_e en R_0 volgt namelijk een waarde voor $e^{\alpha\beta}$, en dus voor $\alpha\beta$ bij $\omega t = \pi$. Hieruit kon dan een waarde voor τ_2' worden bepaald. Met deze waarde werd steeds het weerstandsverloop opnieuw berekend en we constateerden steeds een redelijke overeenstemming tussen experiment en de met de op deze wijze bepaalde waarde voor τ_2' berekende kromme voor $R=R(t)$.

Deze procedure geeft voor het geval van fig. 5.2.8 geen bevredigende overeenstemming meer. Zelfs indien we uitgaan van een lagere waarde voor R_e dan de gemeten waarde, dan blijkt dat het berekende weerstandsverloop minder steil verloopt dan het gemeten verloop.

Kromme III van fig. 5.2.8 is berekend met een tijdconstante

$\tau_2' = 0,506 \text{ msec}$. Deze kromme benadert enigszins het experimentele verloop, de weerstandstoename is echter minder steil dan van kromme I.

Overigens vinden we met deze waarde van τ_2' voor de verhouding van de tijdconstanten een getal dat weer van dezelfde grootte-orde is als bij vorige gevallen, nl.

$$\frac{\tau_2'}{\tau_1'} = \frac{0,506}{0,405} = \underline{1,265}$$

In fig. 5.2.8 is te zien dat de experimentele kromme over een gedeelte ongeveer dezelfde hellingshoek heeft als het middenstuk van de met τ_1' berekende theoretische kromme. Dit kan verklaren dat de "theoretische" verschuiving tussen de maxima van stroom en spanning wordt waargenomen in dit geval. Immers, het maximum in de spanning zal daar optreden waar het produkt van R en I maximaal is. Dit wil zeggen, het maximum treedt daar op waar de relatieve weerstandstoename gelijk is aan de relatieve stroomafname. Als nu over een zeker gebied na het stroommaximum de werkelijke weerstandstoe-

name gelijk is aan de theoretische weerstandstoename, dan zal het spanningsmaximum daar komen te liggen waar het theoretisch verwacht wordt. Dit behoeft echter niet te betekenen dat er overeenstemming is tussen theoretisch en experimenteel verloop.

Uit het bovenstaande blijkt dus dat de op pag. 5.21 uitgesproken en op de daaropvolgende pagina's verder uitgewerkte veronderstelling slechts een benadering van de werkelijkheid kan zijn. We willen hier slechts volstaan met deze constatering. In hoeverre met de gemaakte veronderstelling gewerkt kan worden bij praktische problemen en hoe het verwarmingsproces in werkelijkheid verloopt zou het onderwerp van verder onderzoek kunnen zijn.

Op enkele zaken zij hier nog geattendeerd:

- a) De tijdkonstanten waarbij de gemeten verschuiving tussen de maxima overeenkomt met de theorie, zijn van de orde van de halve periode tijd en kleiner.
- b) Voordat de mantel rond de draad opgewarmd kan worden, dat wil zeggen, voordat er warmte-overdracht van de draad naar de mantel plaats kan vinden, moet er een temperatuursverschil tussen draad en mantel bestaan. Uit deze overweging is aan te voelen dat de adiabatiscbe verwarming van draad plus mantel niet door een enkele tijdkonstante beschreven kan worden. Onze veronderstelling is op zijn mooist een vereenvoudiging van de werkelijkheid.

6. Het doorsmelten van de smeltdraad.

Voordat we een beschrijving en een bespreking geven van de meetresultaten zullen we enkele natuurkundige verschijnselen noemen die op zullen of kunnen treden tijdens en na het smeltproces in een zilveren draad tengevolge van een doorgaande elektrische stroom.

6.1. Beschrijving van een aantal natuurkundige verschijnselen.

6.1.1. Weerstandsverandering.

De specifieke weerstand ρ van zilver vertoont bij het smeltpunt (960°C) een sprong. Dit is weergegeven in fig. 6.1.1. Deze figuur is ontleend aan Landolt-Bornstein. Dit betekent dat de weerstand van een zilverdraad bij smelten plotseling ca. 2x zo groot wordt. Nadat de zilverdraad gesmolten is, neemt de weerstand weer toe volgens een bij benadering lineaire functie.

Volgens Landolt-Bornstein vertonen van alle metalen alleen goud en zilver deze sprong in de soortelijke weerstand bij het smeltpunt. Het gedrag van de specifieke weerstand (of van de geleidbaarheid) van zilver bij hogere temperaturen dan de smeltemperatuur ontleenen we aan een artikel van O. Mayr^{*)}. Zie figuur 6.1.2.

De verdampingstemperatuur van zilver ligt bij 2075°C . Volgens Mayr is in het bereik van 2075°C - 3200°C zilverdamp een hoogwaardige isolator als b.v. lucht of andere gassen. Bij 3200°C zet de thermo-ionisatie in. Bij ca. 4600°C is de geleidbaarheid van zilverdamp weer ongeveer even groot als bij zilver van 0°C .

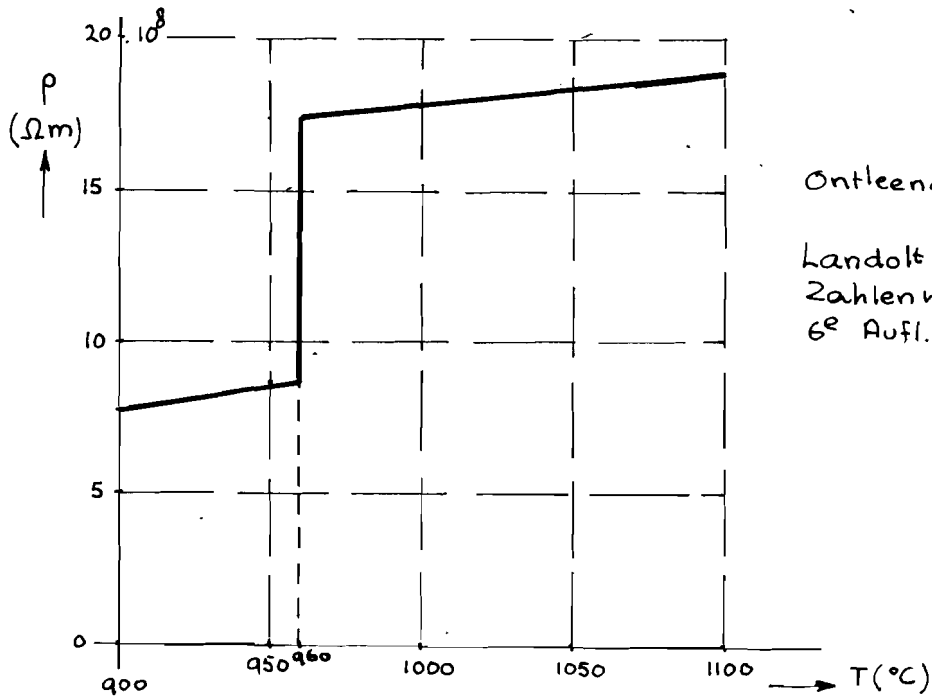
Verder geeft Mayr in dit artikel aan dat bij 3200°C het volume van zilverdamp bij atmosferische druk ca. 6000 x zo groot is als het volume van zilver bij 0°C .

6.1.2. Vervorming van de draad.

Indien de draad gesmolten is, zal, tengevolge van de bij elke vloeistof optredende oppervlaktespanning, de draad trachten uiteen te vallen in vloeistofbolletjes.

^{*)} O. Mayr: ETZ 55 (1934) H 31, pp. 757 - 760,
H 32, pp. 791 - 794,
H 34, pp. 837 - 840.

Geleidbaarheid van zilver.



Ontleend aan:

Landolt - Bornstein :
Zahlenwerte und Funktionen,
6^e Aufl.

Fig. 6.1.1.

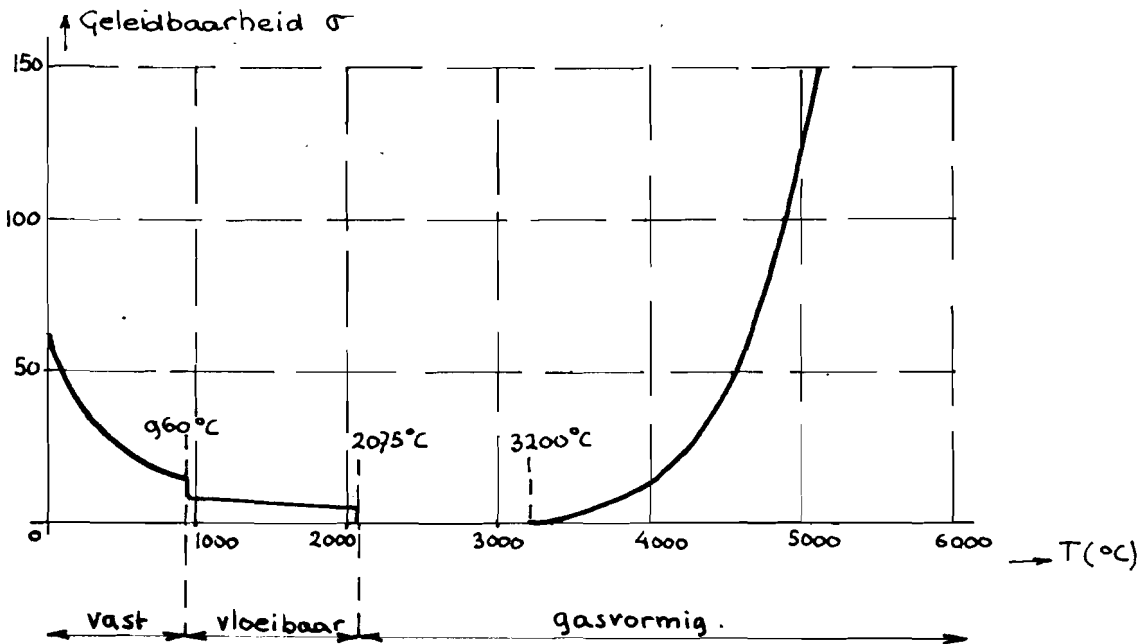


Fig. 6.1.2.

Ontleend aan: O. Mayr, ETZ 55 (1934) H. 3

Echter, zodra deze bolletjes zich beginnen te vormen, d.w.z. zodra de gesmolten draad zijn cilindrische vorm verloren heeft, zal de stroomdichtheid in de draad plaatselijk toenemen. Hierdoor zal dan de draad niet over de gehele lengte verdampen, maar zeer plaatselijk, er blijven "eilandjes" gesmolten metaal over.

Ende ^{*)} geeft aan dat deze bolletjesvorming een tijd vergt van ca. 10^{-3} sec. Dit zou betekenen dat bij zeer grote stromen deze bolletjes zich niet zullen vormen, de draad is dan verdampt voordat zich bolletjes op de draad manifesteren.

In een artikel van Läßple ^{**)} wordt gezegd dat bij stroomdichtheden van $10^9 - 10^{10} \text{ Am}^{-2}$ de draad over vrijwel de gehele lengte smelt onder vorming van een "Perlenkette von Tropfen". Bij stroomdichtheden groter dan 10^{10} Am^{-2} komt het volgens Läßple niet tot druppelvorming, de draad verdampt in zijn geheel voordat hij de cilindervorm verlaten heeft.

^{*)} W. Ende : Ann. Physik 5, Folge 17 (1933) S.460.

^{**)} H. Läßple : ETZ 58 (1937) H.14, S.369.

6.2. Experimentele resultaten.

De experimenten zijn verricht in een laagspanningscircuit volgens fig. 5.1.1. en in een hoogspanningscircuit volgens fig. 5.2.1.

De meetmethode was geheel zoals omschreven in hoofdstuk 5.

Bij de metingen in het laagspanningscircuit zijn twee fotografische opnamen van het oscilloscoopbeeld gemaakt, waarop het stroom- en spanningsverloop tijdens het doorsmelten is afgebeeld.

Deze beide opnamen zijn (vergroot) weergegeven in de figuren 6.2.1. en 6.2.2. Het oscillogram van fig. 6.2.1. is opgenomen aan een draad in lucht, dat van fig. 6.2.2. is opgenomen aan eenzelfde draad in zand. Uit deze opnamen blijkt dat de spanning over, en dus de weerstand van de draad op een zeker tijdstip een plotselinge verandering ondergaat.

Het weerstandsverloop, berekend uit de figuren 6.2.1 en 6.2.2 is uitgezet in fig. 6.2.3. In deze figuur zijn tevens de grafieken voor het theoretisch verloop van de weerstand getekend. De stroomvorm in beide gevallen week echter zoveel af van de sinusvorm waardoor de theoretische krommen berekend zijn, dat een vergelijking tussen theorie en experiment niet erg zinvol is. De sprong in de weerstand kan worden verklaard uit het in paragraaf 6.1.1. besproken gedrag van de specifieke weerstand bij het smeltpunt.

Uit de sprong in de specifieke weerstand ρ kan worden berekend hoe de weerstand van een ronde zilverdraad van 0,2 mm diameter en 20 cm lengte moet veranderen als hij over de gehele lengte op hetzelfde moment zou smelten.

In fig. 6.1.3. is de weerstand bij 960°C in vaste toestand aangegeven, evenals de weerstand bij 960°C in vloeibare toestand van de gehele draad.

De weerstandssprongen die gemeten zijn, zijn rond $1/3$ deel van de weerstandssprong die zou ontstaan wanneer de gehele draad zou smelten. Het ligt dus voor de hand dat ongeveer $1/3$ deel van de draden in zeer korte tijd gesmolten is. De weerstandssprong van de draad in lucht is iets kleiner dan van de draad in zand.

Dit, en het feit dat de gemeten weerstand van een draad in lucht (kromme II, fig. 6.1.3) lager blijft dan van een draad in zand, maken het aannemelijk dat ook bij deze snelle opwarming in ongeveer 1 msec. de temperatuursverdeling langs een draad in lucht ook onder deze omstandigheden minder vlak verloopt dan van een draad in zand.

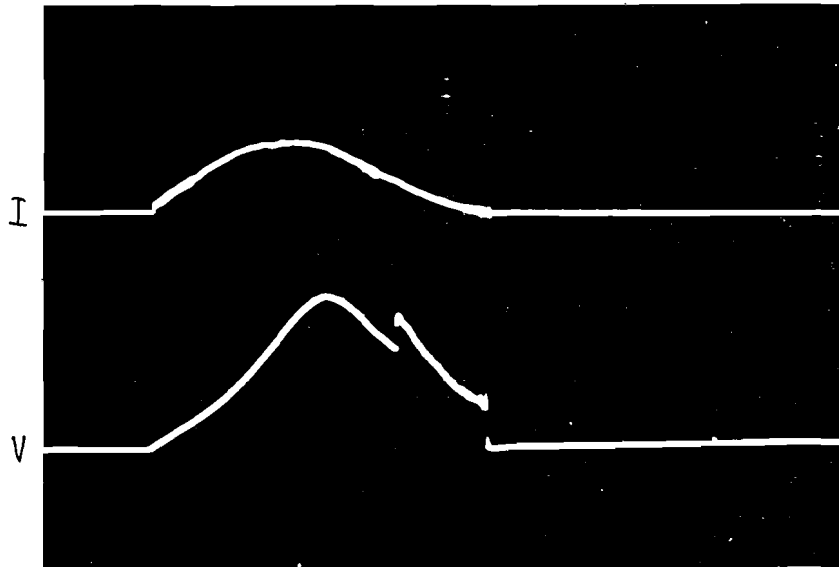


Fig. 6.2.1.

Stroom- en spanningsverloop
bij doorsmelten van een
zilverdraad 0,2 mm \emptyset ,
20 cm lang, in lucht.
I : 500 Amp/cm.
V : 50 V/cm.
tijdbasis 0,5 msec/cm.

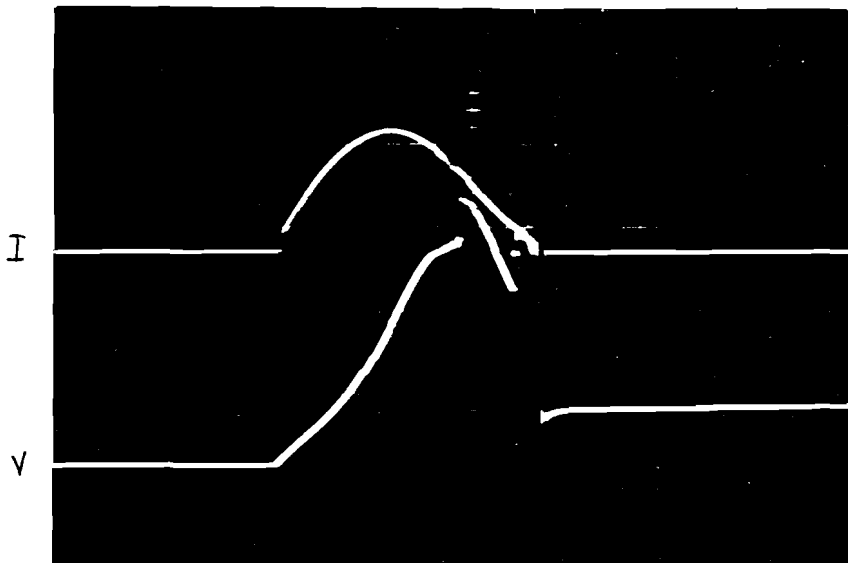
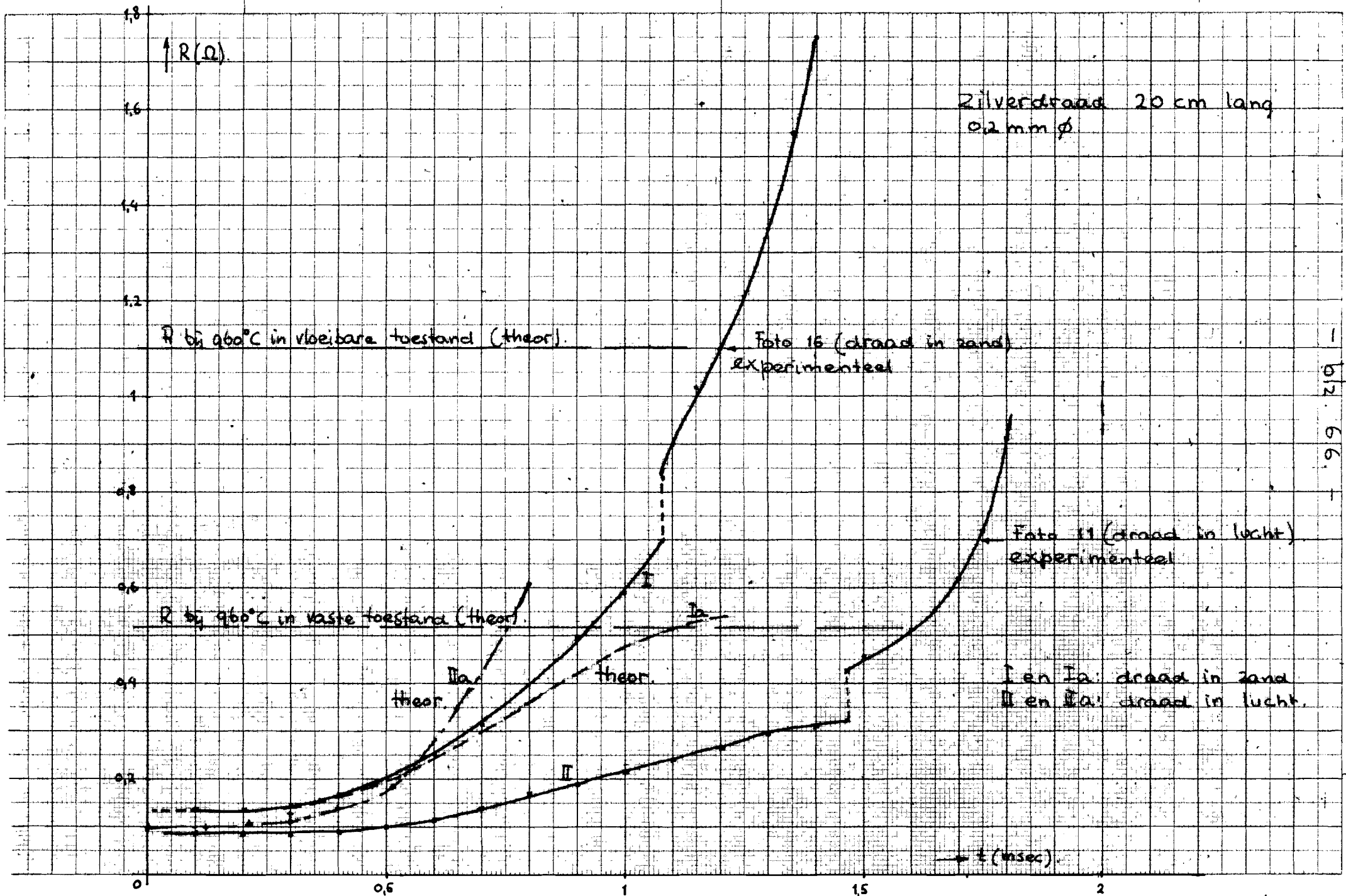


Fig. 6.2.2.

Stroom- en spanningsverloop
bij doorsmelten van een
zilverdraad 0,2 mm \emptyset ,
20 cm lang, in zand.
I : 200 Amp/cm.
V : 50 V/cm.
tijdbasis 0,5 msec/cm.



- 612.66 -

Dit zou echter betekenen dat van adiabatische opwarming geen sprake is. Er is dan kennelijk warmte-afgifte aan de uiteinden en de relatieve invloed van de uiteinden wordt dan weer bepaald door de warmte-afleiding in radiale richting.

Deze weerstandssprongen zijn bij metingen in een hoogspanningscircuit veel minder duidelijk waar te nemen, tenminste, het is mij (nog) niet goed gelukt hiervan gehoorlijke fotografische opnamen te produceren.

Overigens heeft de meting in een hoogspanningscircuit het voordeel, dat vanwege de veel grotere kringkwaliteit, afschakeling, dus smelten van de draad, na een aantal perioden mogelijk is. Dit is een voordeel omdat de draad wordt opgewarmd door een stroom van een grotere amplitude dan die waarbij hij doorsmelt. We kunnen in principe in een hoogspanningscircuit dus draden doorsmelten in het overstromgebied. Door de keuze van L en C kan bovendien nog enigszins ingesteld worden welke spanning de draad bij die overstroom moet kunnen afschakelen.

Het registreren van spanning en stroom is dan echter bijzonder moeilijk, in verband met het programmeren van de schakelcyclus. Het is nl. nooit geheel zeker van te voren te voorspellen op welk tijdstip de draad door zal smelten.

Gedeeltelijk is het afschakelproces in het verloop van stroom en spanning te zien in de figuren 6.2.4 en 6.2.5 voor resp. een draad in lucht en een draad in zand. Ook in deze figuren zijn sprongen in de spanning waar te nemen, echter veel minder duidelijk dan in de figuren 6.2.1 en 6.2.2.

Verder zijn in deze figuren meerdere sprongen in de spanning te zien. Het is echter niet mogelijk hieruit te concluderen dat de draad in gedeeltes na elkaar smelt. De totale grootte van alle sprongen bij elkaar is nl. veel groter dan de totale weerstandssprong, die zou ontstaan als de gehele draad in één kern zou smelten, toelaat. Hier is dus kennelijk meer aan de hand.

In veel gevallen is geconstateerd dat de smeltdraad vervormt. De foto van fig. 6.2.6. laat enkele doorgesmolten zilverdraden zien van verschillende diameter. In alle drie gevallen was de draad horizontaal uitgespannen in lucht en is hij doorgesmolten bij een

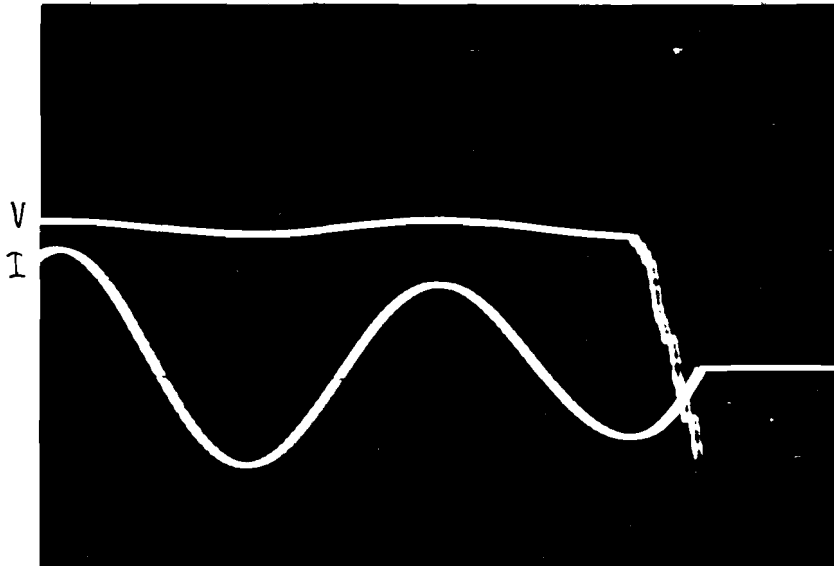


Fig. 6.2.4.

Stroom- en spannings-
verloop bij doorsmelten
van een zilverdraad
0,2 mm \emptyset , 20 cm lang,
in lucht.

I : 35 A/cm.

V : 250 V/cm.

tijdbasis 5 msec/cm.

Afschakeling na $3\frac{1}{4}$ periode.

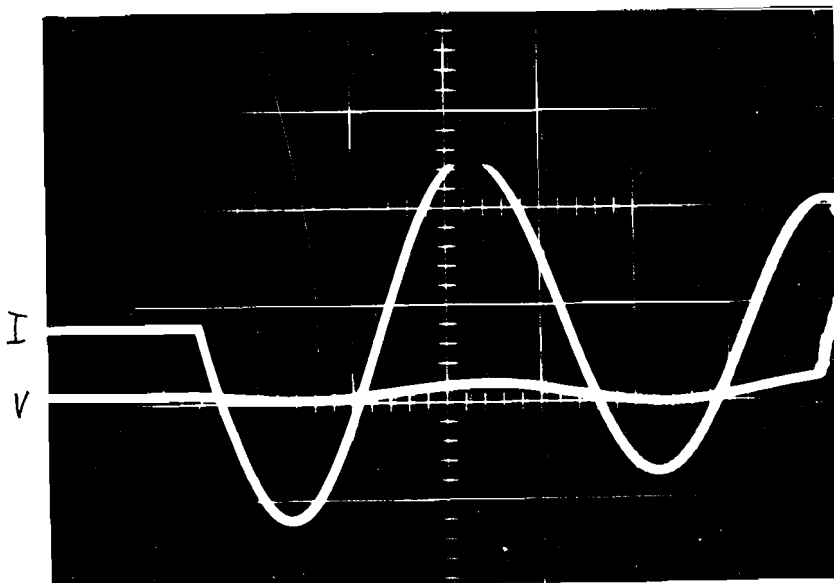


Fig. 6.2.5.

Stroom- en spannings-
verloop bij doorsmelten
van een zilverdraad
0,2 mm \emptyset , 20 cm lang,
in zand.

I : 42 A/cm.

V : 250 V/cm.

tijdbasis 5 msec/cm.

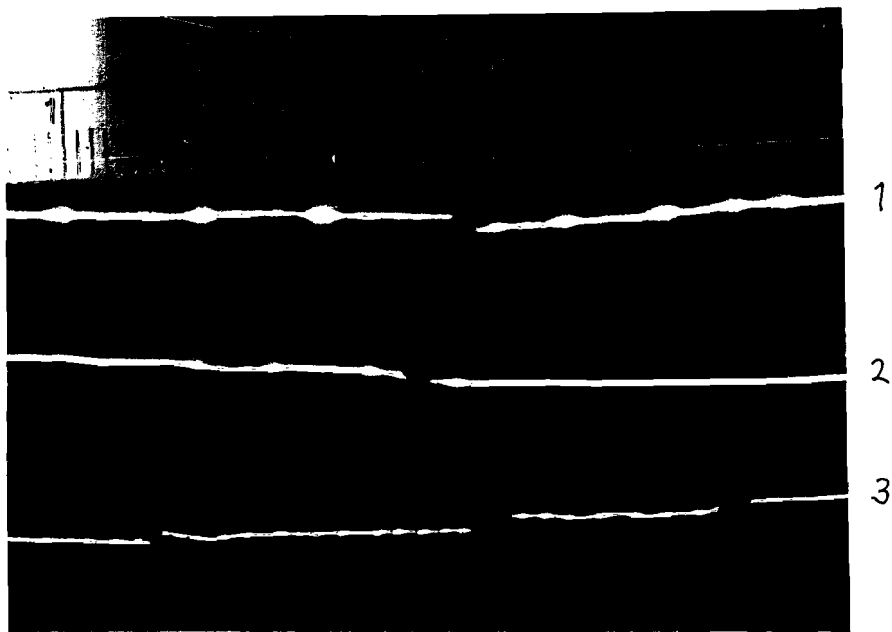


Fig. b.2.6.

Doorgesmolten zilverdraden.

1 : zilverdraad 0,6 mm diameter.

2 : zilverdraad 0,4 mm diameter.

3 : zilverdraad 0,2 mm diameter.

stroom die slechts weinig groter was dan de minimum smeltstroom. De onderste draad (0,2 mm diameter) is gesmolten bij een stroom van ca. 9 Amp.

Dit betekent een stroomdichtheid $J \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ Am}^{-2}$. De resten van de draad waarmee de opname van fig. 6.2.1. is gemaakt vertoonden eveneens hetzelfde bolletjes motief. De maximale stroom bij deze proef was ca. 400A en dit komt overeen met een stroomdichtheid $J \simeq 1,3 \cdot 10^{10} \text{ Am}^{-2}$.

Verder was bij deze proef de draad in ca. 6 stukken uiteengevallen.

In tabel 6-I is een overzicht gegeven van een aantal doorsmeltproeven.

In de tweede kolom is aangegeven of de draad in lucht, dan wel in zand was uitgespannen.

In de derde kolom is de maximumwaarde van de stroom in de laatste halve periode vóór het doorsmelten aangegeven. Hiermee corresponderen de in de 4e kolom genoemde stroomdichtheden.

De smelttijd is de tijd vanaf het inschakelmoment tot het moment van smelten van de draad, zoals dat uit de foto's naar voren komt. De afschakeltijd is de tijd vanaf het moment van inschakelen tot het moment van stroomonderbreking.

In de laatste kolom is de toestand van de draad na het doorsmelten aangegeven.

Met "bolletjes motief" wordt bedoeld een draad met een hoedanigheid als in fig. 6.2.6. is getoond.

Fig. 6.2.10 toont de overblijfselen van de draden waarvan het stroom- en spanningsverloop tijdens doorsmelten is weergegeven in de figuren 6.2.8. en 6.2.5. De gladde draad behoort bij fig. 6.2.5.

Tabel 6-I.

Fig.	omstandigheid	\hat{I} (Amp)	\hat{J} (Am ⁻²)	smelttijd (msec)	afschakel- tijd (msec)	Hoedanigheid van draad na doorsmelten.
6.2.1.	lucht	420	$1,3 \cdot 10^{10}$	1,46	2	bolletjes motief
6.2.2.	zand	286	$9 \cdot 10^9$	1,08	1,56	bolletjes motief
6.2.4.	lucht	26	$8 \cdot 10^8$	65	70	bolletjes motief
6.2.5.	zand	53	$16,8 \cdot 10^8$	33	?	glad
6.2.7.	lucht	28	$9 \cdot 10^8$	68	70	bolletjes motief
6.2.8.	lucht	22	$7 \cdot 10^8$	72	80	bolletjes motief
6.2.9.	zand	48,5	$15,5 \cdot 10^8$	44	58	glad.

Uit dit overzicht blijkt dat bij stroomdichtheden van rond 10^9 Am⁻² draden in lucht wel het bolletjes motief vertonen en draden in zand niet, terwijl bij stromen van rond 10^{10} Am⁻² ook draden in zand het bolletjes motief vertonen.

Het was zelfs zo dat een draad die gedeeltelijk niet onder het zand lag, bij een stroomdichtheid van rond 10^9 Am⁻² alleen een bolletjes motief vertoonde op die plaatsen waar de draad niet onder het zand lag. Dit is enkele malen waargenomen.

Fig. 6.2.7. geeft van draden in lucht een grensgeval in die zin, dat een nauwelijks meetbare verhoging van de stroom de draad in een groot aantal kleine bolletjes uiteen deed spatten. Deze bolletjes werden weggeslingerd. Wanneer de stroom nog heel weinig werd opgevoerd, explodeerde de draad. Er was dan van de draad niets meer terug te vinden. Deze explosie ging gepaard met een luide knal.

In een artikel van Kleen ^{*)} vinden we een uitvoerige beschrijving van een aantal experimenten waarmee deze bolletjesvorming werd bestudeerd (Kleen spreekt over buikvorming).

Kleen heeft gevonden, dat deze buikvorming alleen optreedt bij zeer zuivere oppervlakken, dus alleen bij edelmetalen. Een kleine oxydlaag verhindert reeds het ontstaan van buiken.

^{*)} W. Kleen : Ann. Physik 5, Folge 11 (1931), S.579 e.v.

Voorts vond Kleen dat de dikte van de buiken (gemeten in radiale richting) afhankelijk is van de stroom waarbij de draad smelt.

Bij de grootste stroom ontstaan bolletjes die niet meer door een "hals" aan elkaar verbonden zijn. Dit laatste is in overeenstemming met één der bovenomschreven experimenten.

Kleen toont verder aan, dat $\frac{d}{2R} = \text{konstant}$ voor draden van eenzelfde materiaal.

Hierin is: d : de afstand tussen twee buiken gemeten in axiale richting,

$2R$: de oorspronkelijke draaddiameter.

Voor zilver vond hij: $\frac{d}{2R} = 2,31$.

Inderdaad blijkt uit fig. 6.2.6. dat de afstand tussen de buiken onderling toeneemt naarmate de draaddiameter toeneemt.

Tenslotte heeft Kleen ontdekt dat de wegsplattende bolletjes van een gesmolten draad elektrisch geladen zijn. Hij constateerde dit door draden te laten doorsmelten in elektrische en magnetische velden en in die situatie de banen van de deeltjes te fotograferen. Voor dit verschijnsel wordt in het artikel van Kleen geen verklaring gegeven, hij constateert slechts dat deze lading vrij aanzienlijk is. Deze lading zou er de oorzaak van kunnen zijn, dat de bolletjes met geweld worden weggeslingerd, zoals hierboven reeds is gememoreerd.

De waargenomen buikvorming in zilveren draden wordt in het artikel van Kleen enigermate kwantitatief verklaard uitgaande van de in de gesmolten zilverdraad optredende oppervlaktetenspanningen. Dit wijst er m.i. op dat elektrodynamische krachtwerkingen bij deze bolletjesvorming geen of een ondergeschikte rol spelen.

Baxter meent dat elektrodynamische krachtwerkingen bij deze bolletjesvorming wel een rol spelen (H.W. Baxter: Electric Fuses, London 1950, pp. 71 e.v.). Hij zegt verder dat bij stromen tot 500 Amp. deze bolletjes in een tijd kleiner dan 10^{-3} sec tot stand komen, zonder dit verder aan te tonen. Deze tijd van 10^{-3} sec wordt echter ook genoemd door Ende (zie blz. 6.3), die echter bij de bepaling van deze tijd geen rekening heeft gehouden met elektrodynamische krachten.

De vraag blijft bestaan waarom klaarblijkelijk in lucht gemakkelijker bolletjes ontstaan dan in zand.

Er zijn twee omstandigheden waarmee dit wellicht plausibel kan worden gemaakt.

1. Lucht laat uiteraard veel gemakkelijker een vrije vervorming toe dan een vaste stof die de draad omgeeft. Echter, men zou dan verwachten dat de draad ruw zou worden, onregelmatig gevormd. Immers, het zand ligt niet overal aan tegen de draad, slechts gedeeltelijk.
2. Wellicht is het mogelijk dat het zand het draadoppervlak iets verontreinigt, waardoor bolletjesvorming moeilijker zal gaan. Waargenomen is dat bij doorgesmolten draden in zand, de zandkorrels vrij vast aan de draad zaten. Ze waren met de vingers moeilijk te verwijderen.

De bolletjesvorming in een zilverdraad kan in zand leiden tot eilandjesvorming. Tussen deze eilandjes komt dan een boog tot stand. Dit is zichtbaar in fig. 6.2.11.

Op deze foto kunnen we enkele "eilandjes", dus zilveren deeltjes, onderscheiden, waartussen zich een rups bevindt. Tussen de bolletjes heeft dus een boog gestaan. De stroomdichtheid waarbij deze draad is doorgesmolten, bedroeg ongeveer $3,5 \cdot 10^9 \text{ Am}^{-2}$ topwaarde. Het is niet geheel onwaarschijnlijk dat in dit geval een boog ontstaan is voordat verdamping van het metaal optrad. Immers, zoals Kleen heeft aangetoond en zoals ook is waargenomen bij het doorsmelten van een draad in lucht, ontstaan bij bepaalde waarden van de stroomdichtheid bolletjes die niet meer met elkaar verbonden zijn. Het ontstaan van deze bolletjes kan volgens Kleen verklaard worden uit de oppervlaktespanningen van het vloeibare zilver.

Als deze bolletjes in zand zouden ontstaan, waar ze dus niet weg kunnen vliegen, dan ontstaat tussen deze bolletjes gewis een boog: het zijn immers metalen delen die eerst met elkaar verbonden waren en vervolgens van elkaar verwijderd worden.

Dit zou dan in tegenspraak zijn tot wat Lappler zegt in zijn reeds eerder genoemde artikel. Lappler zegt daar nl. dat onderbreking van de stroombaan eerst mogelijk is nadat de vloeistof is verdampt.

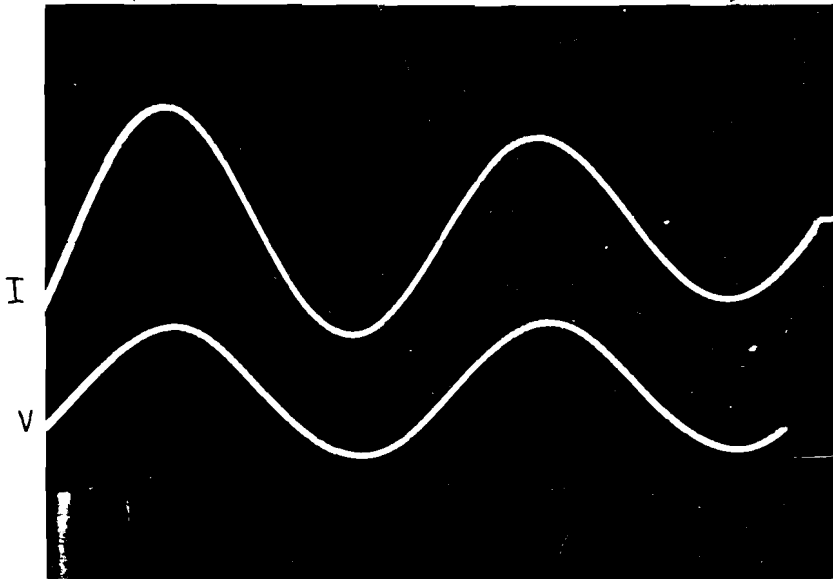


Fig. 6.2.7.

Stroom- en spannings-
verloop aan zilverdraad
0,2 mm \emptyset , 20 cm lang,
in lucht.

I : 35 A/cm.

V : 25 V/cm.

tijdbasis 5 msec/cm.

Afschakeling na $3\frac{1}{2}$ periode.

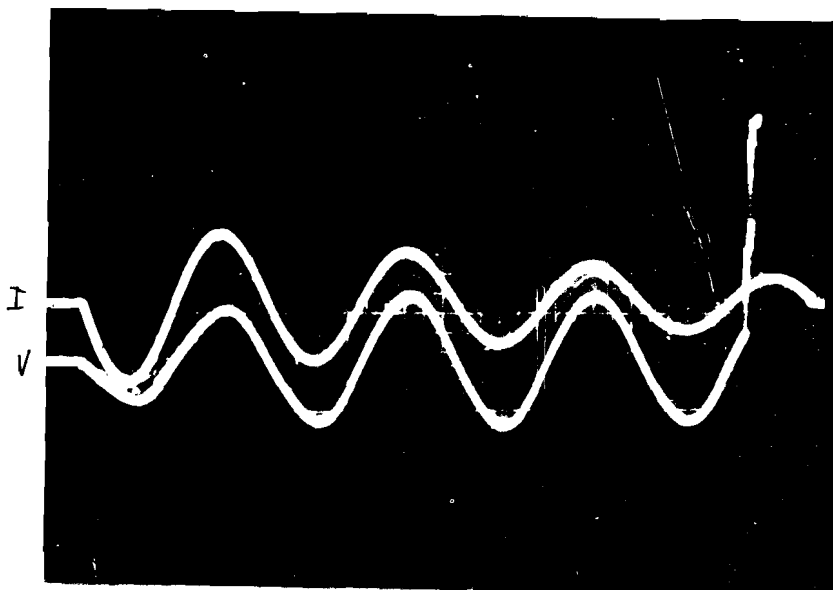


Fig. 6.2.8.

Stroom- en spannings-
verloop aan zilverdraad
0,2 mm \emptyset , 20 cm lang,
in lucht.

I : 87,5 A/cm.

V : 25 V/cm.

tijdbasis 10 msec/cm.

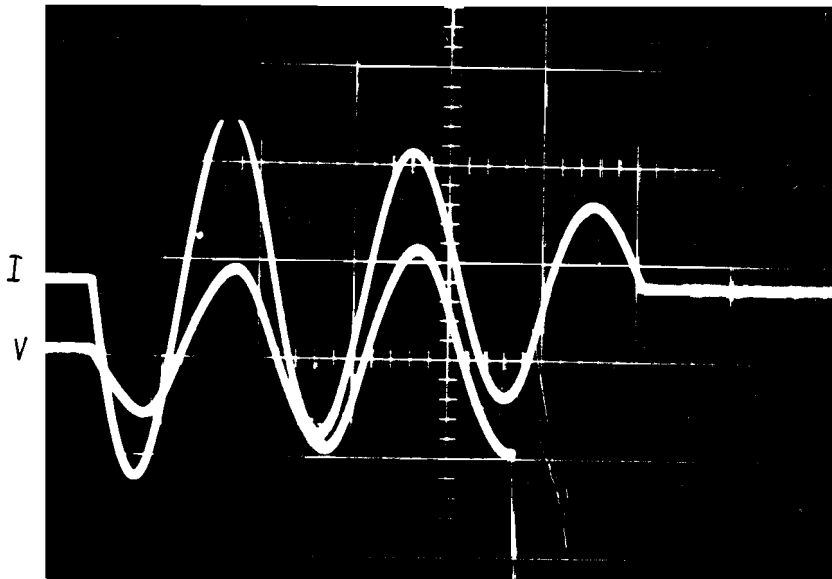


Fig. 6.2.9.

Stroom-en spanningsverloop aan een zilverdraad 0,2 mm \emptyset , 20 cm lang, in zand.

I : 42 A/cm.

V : 25 V/cm.

tijdbasis 10 msec/cm.

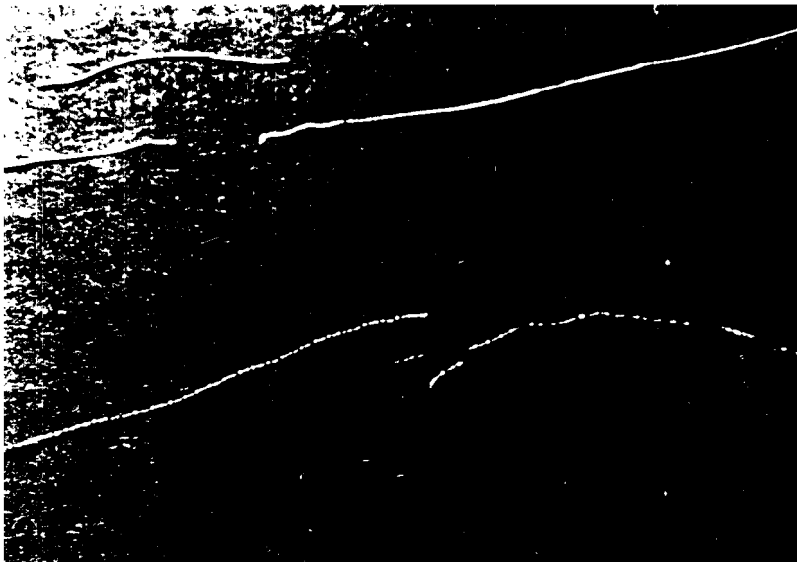


Fig. 6.2.10.

Zilverdraadresten na doorsmelten in lucht (1) en in zand(2)engevolge van een stroomdichtheid van dezelfde grootteorde.

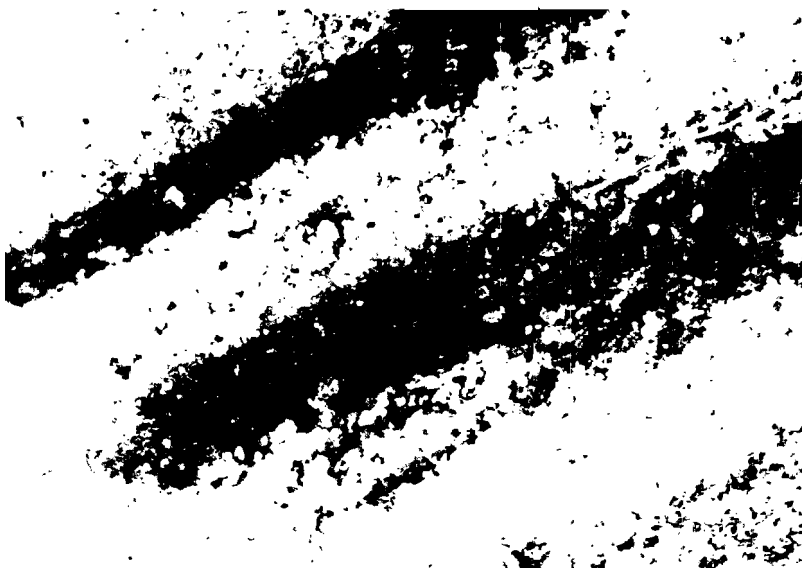


Fig. 6.2.11.

"Eilandjesvorming" na doorsmelten van een zilverdraad in zand.

7. Geraadpleegde literatuur.

1. Jakob: Heat Transfer, Vol.I.
New York / London 1958, 6e druk.
2. U. Grigull, Gröber-Erk:
Die Grundgesetze der Wärmeübertragung.
Springer Verlag 1955.
3. H.S. Carslaw and J.C. Jaeger:
Conduction of heat in solids.
Oxford University Press 1959.
4. Prof.dr. D.A. de Vries:
Collegediktaat Warmtetransport en -overdracht.
(Najaarssemester 1960) T.H.E.
5. W.H. Preece: On the Heating Effects of Electric Current.
Proc. of the Royal Society apr. 1884.
6. G.J. Meyer: Beitrag zur Kenntnis der Abschmelz-Sicherungen.
Diss. Berlin 1906.
7. H.W. Baxter: Electric fuses.
London 1950.
8. J.A.M. v. Liempt:
Zur Theorie des Grenzstromes bei Schmelzsicherungen.
Zeitschrift für Physik 86 (1933) pp. 387.
9. J.A.M. van Liempt & J.A. de Vriend:
Die Schmelzzeit dünner Schmelzsicherungen.
Z. für Physik 93 (1934) pp. 100; 98 (1936) pp. 133.
10. J. Fischer: Die stationäre Temperatur stromdurchflossener,
langer Drähte.
Archiv für Elektrotechnik XL. Band, H.4 (1952) pp. 262.
11. J. Fischer: Die stationäre Temperatur stromdurchflossener,
mässig langer Drähte.
Archiv für Elektrotechnik XL. Band, H.3 (1951) pp. 141.

- 12. E. Wintergerst:
Über die Schmelzzeit von Schmelzsicherungen.
Zeitschrift für angew. Physik II. Band H.4 (1950) pp.167.

- 13. J.W. Gibson: The High Rupturing Capacity Cardridge Fuse.
Part I : G.E.C. Journal August 1940, pp. 103.
Part II: G.E.C. Journal Febr. 1941, pp. 150.

- 14. Susanne Bors: Beitrag zur Frage der Alterung von Schmelzsicherungen.
E.&M. 29 (1962) H.6, pp.131.

- 15. H. Läßle: Die Vorgänge bei der Kurzschlussunterbrechung durch
schnell-abschaltende Hochspannungssicherungen.
V.D.E. Fachbericht 6 (1934).

- 16. H. Läßle: Die Lichtbogenlöschung in körnigem Loschmittel bei
Hochspannungssicherungen.
ETZ 58 (1937) H.14, pp. 369; H.16, pp. 426.

- 17. K.A. Lohausen: Hochspannungssicherungen.
E.&M. 53 (1935), H.33, pp. 385.

Aanhangsel I.

Het verband tussen de stralingsenergie die door een ronde metalen draad in één richting wordt uitgezonden, en de temperatuur van die draad.

Beschouw een ronde metalen draad. Door deze draad loopt een zo grote stroom dat de draad een aanzienlijke temperatuursverhoging heeft ten opzichte van zijn omgeving.

Door deze draad wordt dan een hoeveelheid energie in de vorm van warmtestraling uitgezonden.

We zullen nu trachten na te gaan hoe groot bij een zekere temperatuur T van de draad de uitgezonden energie in één richting is (zie fig. I-1).

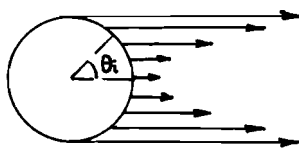


Fig. I-1.

Deze situatie was nl. aanwezig bij de meting van de temperatuursverdeling langs een ronde zilverdraad met behulp van een infrarood-gevoelige vidicon camera (zie hfdst. 3). De vidicon camera ontvangt nl. de energie

die door de draad in één richting wordt uitgezonden.

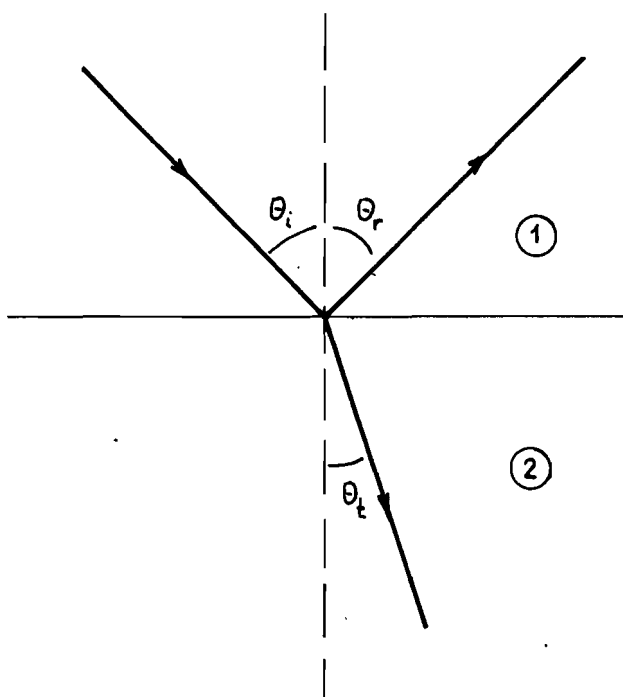


Fig. I-2.

Veronderstel: een elektromagnetische straling met golflengte λ , komende uit medium 1 (vacuum) treft onder een hoek θ_i (zie fig. I-2) het grensvlak tussen de media 1 en 2.

Een gedeelte ρ wordt onder de hoek θ_r gereflecteerd, een gedeelte α treedt in medium 2. We veronderstellen dat dit gedeelte geheel in medium 2 wordt geabsorbeerd.

Dan geldt dus:

$$\alpha + \rho = 1$$

Verder definiëren we een brekingsindex n als volgt:

$$n = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t}$$

Voorts definiëren we een emissiecoëfficiënt ϵ als volgt:

Zij W de door een willekeurig oppervlak uitgezonden straling per oppervlakte-eenheid en W_2 de door een zwart oppervlak uitgezonden straling per oppervlakte-eenheid [$W.m^{-2}$] dan geldt volgens de wet van Kirchhoff:

$$\frac{W}{W_2} = \epsilon < 1$$

Algemeen geldt dat de hoeveelheid straling die door een oppervlak wordt geabsorbeerd (bij opvallende straling dus) gelijk is aan de hoeveelheid die wordt uitgezonden (b.v. bij verhitting van dit oppervlak), dus $\epsilon = \alpha$

Van een zwarte straler kennen we het verband tussen de uitgezonden energie W_2 en de temperatuur $T(^{\circ}K)$, nl. de wet van Stefan - Boltzmann:

$$W_2 = \sigma T^4 \quad (I-1)$$

Hierin is σ een fysische konstante. Deze hangt dus niet af van het materiaal, de temperatuur, etc. Voor een grijze straler geldt:

$$W = \epsilon \sigma T^4 \quad (I-2)$$

Hierin is ϵ de emissiecoëfficiënt.

Dit is voor een grijze straler een getal kleiner dan 1. De emissiecoëfficiënt ϵ van een metaal echter is een functie van de golflengte λ (dus van de temperatuur), de soortelijke weerstand r^* van het metaal, de hoek θ waaronder de straling wordt uitgezonden en de polarisatie van de uitgezonden straling. Bovendien is de soortelijke weerstand r ook weer een functie van de temperatuur, zodat verwacht kan worden dat het verband tussen W en T gegeven wordt door een exponent van T die ongelijk 4 is.

*) We schrijven hier voor de soortelijke weerstand r in plaats van ρ , om geen verwarring te krijgen met de reflectiecoëfficiënt die we in het voorgaande reeds ρ hebben genoemd.

Uit de theorie elektromagnetisch veld volgt voor de reflectiecoëfficiënt $\rho^{*})$ bij één golflengte λ en bij een invalshoek $\theta_i = 0$:

$$\rho_{\lambda,0} = \frac{2n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 2n + 1} \quad (\text{I-3})$$

en voor de brekingsindex n :

$$n = \sqrt{\frac{\mu \lambda c}{4\pi r}} \quad (\text{I-4})$$

Hierin is μ de permeabiliteit ^{**)}

c de lichtsnelheid [m sec⁻²]

λ de golflengte [m]

r de soortelijke weerstand [Ωm]

Voorts volgt uit de theorie elektromagnetisch veld dat ρ afhangt van de hoek θ_i en van de polarisatie van de straling.

Indien van een elektromagnetische golf de vector \underline{E} loodrecht staat op het vlak van inval dat wordt gevormd door de richting van de golf (poyntingse vector) en een lijn loodrecht op het metaaloppervlak, dan geldt:

$$\rho_{\lambda,\theta_i,n} = \frac{2n^2 - 2n \cos \theta_i + \cos^2 \theta_i}{2n^2 + 2n \cos \theta_i + \cos^2 \theta_i} \quad (\text{I-5})$$

*) We geven de volgende beschouwing voor de reflectiecoëfficiënt ρ . Dit is rekentechnisch iets gemakkelijker. Ze geldt echter ook voor de emissiecoëfficiënt ϵ , aangezien geldt $\epsilon + \rho = 1$.

***) μ kan geschreven worden als $\mu = \mu_0 / \mu_r$, waarin μ_0 de permeabiliteit in vacuum voorstelt. In het MKS-stelsel geldt $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$.

(De index n wijst op: \underline{E} in de richting van de normaal op het vlak van inval.)

Indien \underline{E} evenwijdig is met het vlak van inval, dan geldt:

$$\rho_{\lambda, \theta, p} = \frac{2n^2 \cos^2 \theta_i - 2n \cos \theta_i + 1}{2n^2 \cos^2 \theta_i + 2n \cos \theta_i + 1} \quad (\text{I-6})$$

(De index p wijst op: \underline{E} parallel met het vlak van inval.)

Voor $\theta_i = 0^\circ$ gaan de betrekkingen (I-5) en (I-6) beide over in betrekking (I-3).

Voor de betrekkingen (I-4) t/m (I-6) zal in het volgende nog een afleiding worden gegeven.

We mogen aannemen dat in de door een metaal uitgezonden straling de beide polarisaties even vaak voorkomen. Dan geldt:

$$\epsilon_{\lambda, \theta} = \frac{\epsilon_{\lambda, \theta, n} + \epsilon_{\lambda, \theta, p}}{2} \quad (\text{I-7a})$$

en

$$\rho_{\lambda, \theta} = \frac{\rho_{\lambda, \theta, n} + \rho_{\lambda, \theta, p}}{2} \quad (\text{I-7b})$$

Betrekking (I-7b) schrijven we in de volgende gedaante:

$$2\rho_{\lambda, \theta} = \rho_{\lambda, \theta, n} + \rho_{\lambda, \theta, p} \quad (\text{I-7c})$$

Voor elk van de beide termen in (I-7c) hebben we hierboven reeds een uitdrukking gegeven, t.w. de formules (I-5) en (I-6). We zullen deze beide formules iets nader beschouwen.

De reflectiecoëfficiënt $\rho_{\lambda, \theta, n}$ volgens betrekking (I-5) heeft een minimum voor $\theta_i = 0$.

Voor metalen geldt: $n \gg 1$. Voor zilver varieert n tussen ca. 30 en ca. 120 in het temperatuurstraject van $200 - 960^\circ\text{C}$.

Hieruit volgt dan dat bij $\theta_i = 0$ de reflectiecoëfficiënt in de orde is van 0,97 - 0,99. Dus de emissiecoëfficiënt ϵ is bij $\theta_i = 0$ van de orde van 1% - 3%. Deze is dus voor zilver bijzonder klein. Voor $\theta_i = 90^\circ$ geldt: $\rho_{\lambda, \theta_i, n} = 1$ en dus $\epsilon_{\lambda, \theta_i, n} = 0$.

De reflectiecoëfficiënt $\rho_{\lambda, \theta_i, n}$ volgens betrekking (I-6) vertoont als functie van θ_i een geheel ander verloop. Het is duidelijk dat deze functie een extreme waarde aanneemt voor $\theta_i = 0^\circ$. Dit is echter een maximum, zoals zal blijken. Verder geldt ook hier dat voor $\theta_i = 90^\circ$: $\rho_{\lambda, \theta_i, n} = 1$ en dus $\epsilon_{\lambda, \theta_i, n} = 0$. We bepalen van formule (I-6) de afgeleide naar θ_i en we stellen deze gelijk nul. Het is voldoende om alleen de teller van de afgeleide te bepalen.

$$\begin{aligned} \text{Teller } \frac{\partial \rho_{\lambda, \theta_i, n}}{\partial \theta_i} &= (2n^2 \cos^2 \theta_i + 2n \cos \theta_i + 1)(-4n^2 \cos \theta_i \sin \theta_i + 2n \sin \theta_i) - \\ &- (2n^2 \cos^2 \theta_i - 2n \cos \theta_i + 1)(-4n^2 \cos \theta_i \sin \theta_i - 2n \sin \theta_i) = 0. \end{aligned}$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan indien geldt:

$$n = 0 \quad (\text{I-8a})$$

$$\sin \theta_i = 0 \rightarrow \theta_i = 0 \quad (\text{I-8b})$$

$$2n^2 \cos^2 \theta_i = 1 \quad (\text{I-8c})$$

Voor elk van de voorwaarden (I-8a) t/m (I-8c) is de noemer van de afgeleide ongelijk nul, zodat deze betrekkingen de voorwaarden geven voor $\frac{\partial \rho_{\lambda, \theta_i, n}}{\partial \theta_i} = 0$.

Voorwaarde (I-8a) heeft geen zin. Voorwaarde (I-8b) hadden we reeds verwacht. Dit blijkt een maximum op te leveren. Voorwaarde (I-8c) levert twee minima op. De ligging van deze minima wordt bepaald door:

$$\cos \theta_{i, m} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2n} \quad (\text{I-9})$$

Zoals reeds boven is vermeld is $n \gg 1$ voor metalen. $\cos \theta_{i_m}$ wordt dus een zeer klein getal, wat dus betekent dat θ_{i_m} maar weinig kleiner zal zijn dan 90° .

Substitueren we de voorwaarde (I-8c) in de betrekking (I-6), dan blijkt voor de reflectiecoëfficiënt ter plaatse van dit minimum $\rho_{m,p}$ te gelden:

$$\rho_{m,p} = \frac{1 - 2\sqrt{\frac{1}{2}} + 1}{1 + 2\sqrt{\frac{1}{2}} + 1} = 0,176.$$

Dit blijkt dus een getal te zijn, onafhankelijk van n en dus onafhankelijk van λ en van r . Alleen de plaats van dit minimum is een functie van n . In figuur I-3 is een grafische voorstelling gegeven van de betrekkingen (I-5) en (I-6) voor twee verschillende waarden van de parameter n .

In de buurt van $\theta_i = 90^\circ$ is $\rho_{\lambda, \theta, n}$ ongeveer gelijk aan 1, zeker indien n groot is.

Bij de hoek die bepaald wordt door voorwaarde (I-8c) kunnen we vergelijking (I-7c) met goede benadering dus als volgt schrijven:

$$2\rho_m = \rho_{m,p} + 1$$

Zodat voor ρ_m volgt:

$$\rho_m = \frac{1,176}{2} = 0,588.$$

Voor het maximum van de emissiecoëfficiënt ϵ_m geldt dan:

$$\epsilon_m = 1 - \rho_m = 0,412.$$

Voor het maximum van de uitgezonden energie W_m geldt:

$$\frac{W_m}{W_z} = \epsilon_m$$

$$\text{ofwel: } W_m = \epsilon_m \sigma T^4 = 0,412 \sigma T^4. \quad (\text{I-10})$$

Keren we nu terug tot ons probleem van de ronde metalen draad waarvoor de in één richting uitgezonden energie wordt opgevangen door het vidicon.

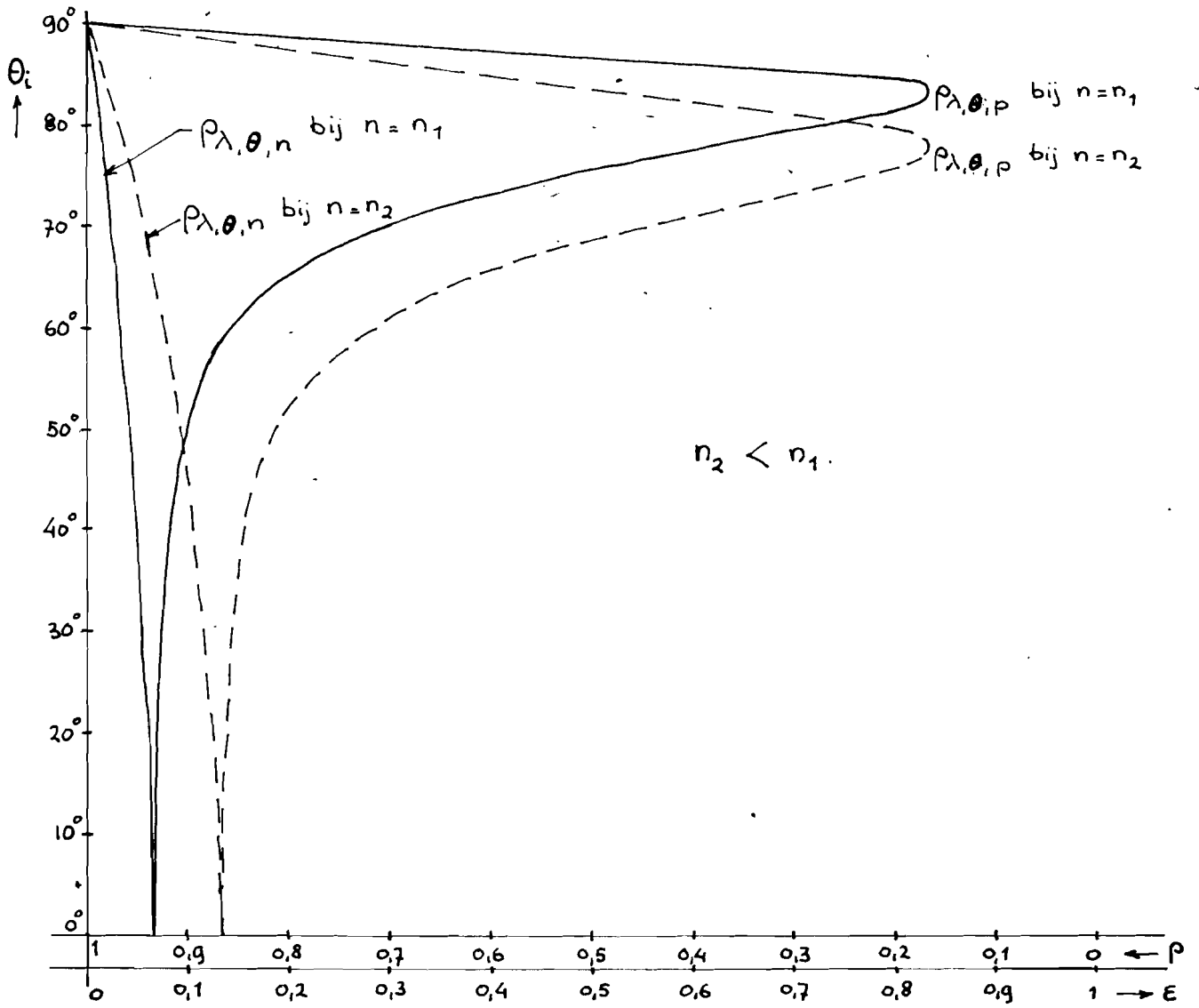


Fig. I-3.
De reflectiecoëfficiëntpals functie van de hoek θ_i van metaal.

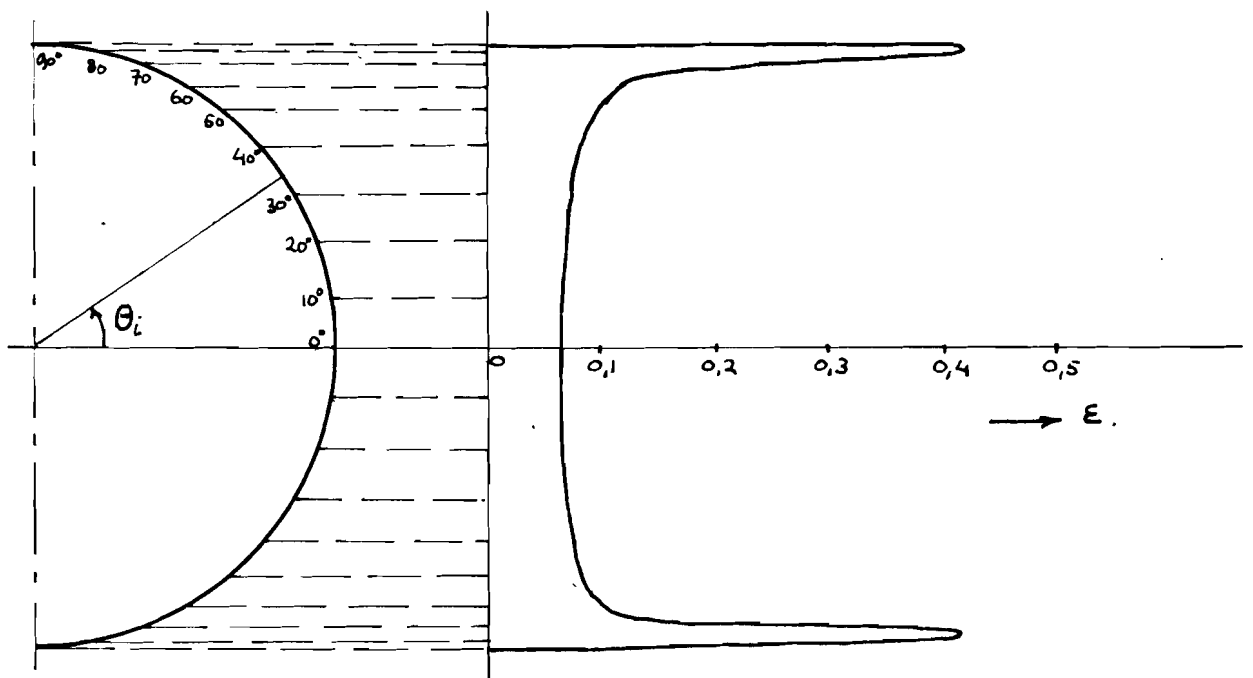


Fig. I-4.
De emissiecoëfficiënt E als functie van de plaats op een ronde metalen geleider, voor uitgezonden straling in één richting.

Deze draad zendt in de richting van het vidicon infrarood-straling uit onder hoeken θ_i met het metaaloppervlak continu variërend van -90° to $+90^\circ$. Uit de bovenstaande berekening volgt dan dat de emissiviteit een functie zal zijn van de radiale coördinaat. Dit is weergegeven in fig. I-4. Het vidicon ontvangt dus van de rand van de draad de grootste hoeveelheid stralingsenergie en deze maximale energie W_m wordt bepaald door de betrekking (I-10).

Als we dus een draad afbeelden op de gevoelige laag van het vidicon dan zal, aangenomen dat dit vidicon een voldoende groot oplossend vermogen heeft, de uitgangsspanning evenredig zijn met $\epsilon_{\lambda\theta} \cdot \sigma \cdot T^4$. De grootste waarde van deze uitgangsspanning zal dan evenwel evenredig zijn met $0,412 \cdot \sigma \cdot T^4$, en het is juist deze grootste waarde die we op de oscilloscoop aflezen.

Dit resultaat nu komt overeen met het experimentele resultaat (zie paragraaf 3.1.2, blz. 3.6 e.v.).

Afleiding van de betrekkingen (I-3) t/m (I-6).

Bij deze afleiding gaan we uit van enkele betrekkingen welke afgeleid zijn in het collegediktat van Prof.dr.ir. A.A.Th.M. van Trier: Theoretische elektrotechniek, deel IIIb en IV, uitgave maart 1961. We geven allereerst een korte samenvatting van deze betrekkingen. Veronderstel een vlakke elektromagnetische golf treft een oppervlak dat wordt gevormd door het x-y vlak van een coördinaten systeem. Dit oppervlak zij dus een plat vlak. De elektromagnetische golf treft dit oppervlak onder een hoek θ .

Er zijn twee gevallen te onderscheiden, namelijk een geval waarbij de elektrische vector \underline{E} loodrecht op het x-y vlak en evenwijdig met het x-z vlak staat, en een tweede geval waarbij de \underline{E} -vector evenwijdig aan de y-as ligt. Het eerste geval is aangegeven in fig. I-5. De propagatierichting ligt hierbij dus volgens de vector \underline{n} . In dit geval kunnen E^i en H^i (de invallende golf op vlak xy), E^t en H^t (de doorgelaten golf), E^r en H^r (de gereflecteerde golf) voorgesteld worden door:

$$\left. \begin{aligned} E_x^i &= A \cos \theta_i \cdot \exp j \left[\omega t - \beta_1 x \sin \theta_i - \beta_2 z \cos \theta_i \right] \\ E_z^i &= -A \sin \theta_i \cdot \exp j \left[\omega t - \beta_1 x \sin \theta_i - \beta_2 z \cos \theta_i \right] \\ H_y^i &= \frac{A}{Z_{01}} \cdot \exp j \left[\omega t - \beta_1 x \sin \theta_i - \beta_2 z \cos \theta_i \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-11})$$

Hierbij is verondersteld dat de invallende golf in een medium loopt waarvan de elektrische geleidingscoëfficiënt $\sigma = 0$. Veronderstel dat dit medium vacuum is. Voor de gereflecteerde golf volgt een dergelijk stelsel vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} E_x^r &= B \cos \theta_r \exp j \left[\omega t - \beta_1 x \sin \theta_r + \beta_2 z \cos \theta_r \right] \\ E_z^r &= B \sin \theta_r \exp j \left[\omega t - \beta_1 x \sin \theta_r + \beta_2 z \cos \theta_r \right] \\ H_y^r &= -\frac{B}{Z_{01}} \cdot \exp j \left[\omega t - \beta_1 x \sin \theta_r + \beta_2 z \cos \theta_r \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-12})$$

I - ga.

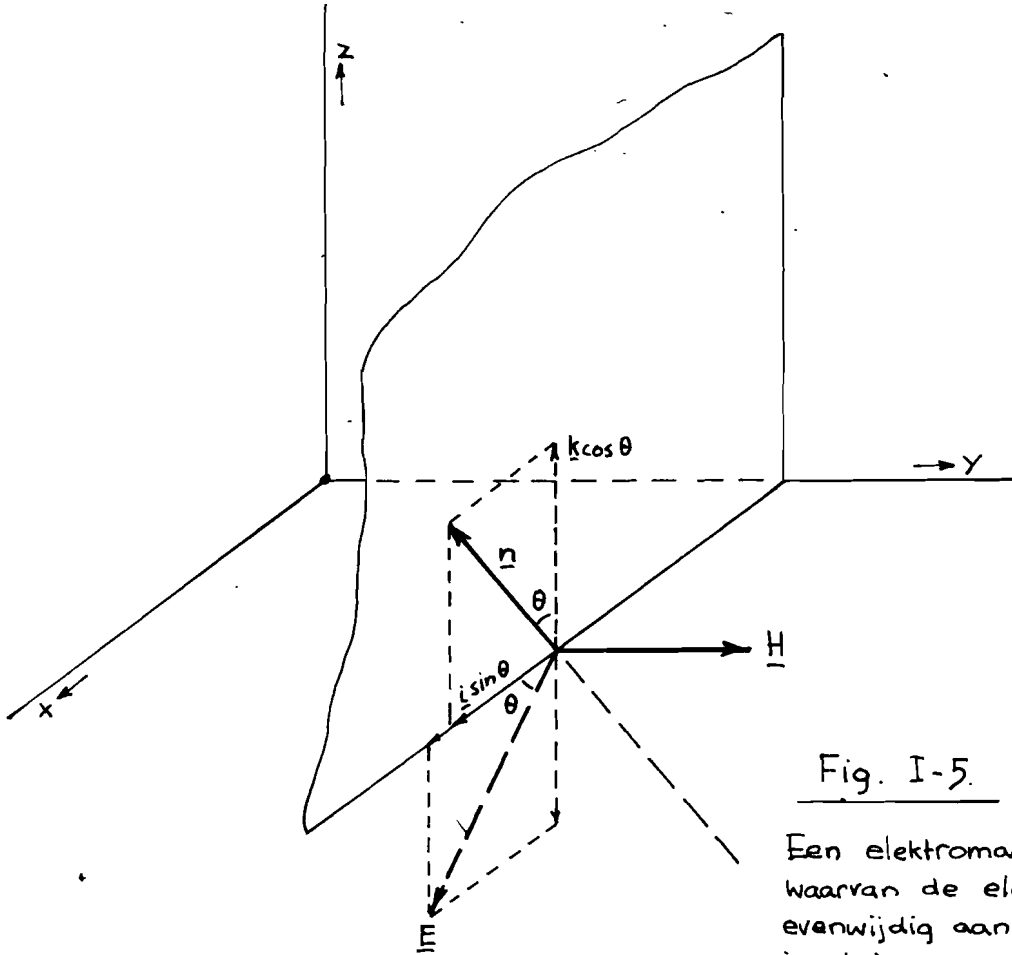
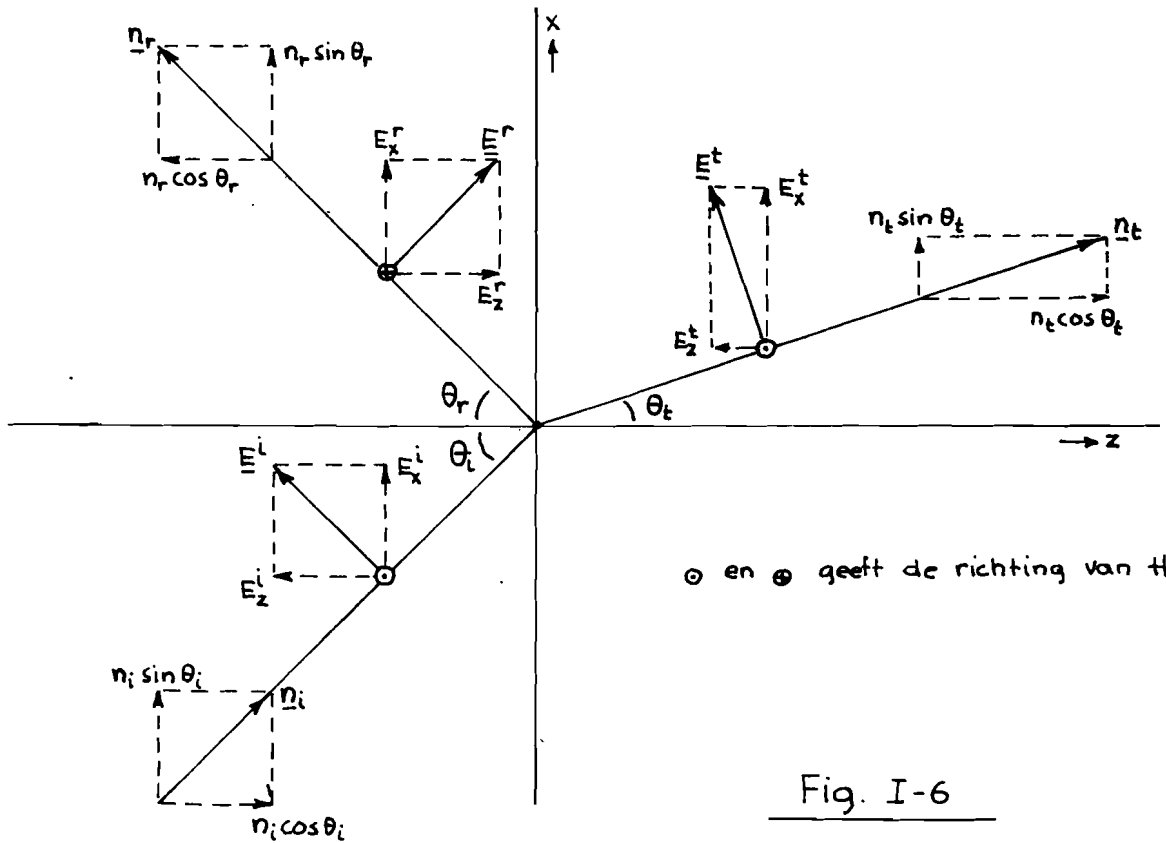


Fig. I-5.

Een elektromagnetische golf waarvan de elektrische vector evenwijdig aan het vlak van inval is.



⊙ en ⊗ geeft de richting van H.

Fig. I-6

De componenten van \underline{E} en \underline{H} uit fig. I-5.

Voor de doorgelaten golf geldt:

$$\left. \begin{aligned} E_x^t &= C \cos \theta_t \cdot \exp j [\omega t - \beta_2 x \sin \theta_t - \beta_2 z \cos \theta_t] \\ E_z^t &= -C \sin \theta_t \cdot \exp j [\omega t - \beta_2 x \sin \theta_t - \beta_2 z \cos \theta_t] \\ H_y^t &= \frac{C}{Z_{02}} \cdot \exp j [\omega t - \beta_2 x \sin \theta_t - \beta_2 z \cos \theta_t] \end{aligned} \right\} \quad (I-13)$$

In de stelsels vergelijkingen (I-11) t/m (I-13) is:

$$\beta_m = \omega \sqrt{\mu_m \cdot \epsilon_m}$$

Voor vacuum geldt dus $\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{v}$
als bovendien geldt:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}$$

ω is hierin de cirkelfrequentie van de harmonische golven.
Verder geldt voor de karakteristieke impedantie Z_0 :

$$Z_{0m} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_m}{\sigma_m + j\omega\epsilon_m}}$$

In vacuum geldt dus $Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

Tot zover de samenvatting uit het diktaat van Prof. van Trier.

In het volgende zal een methode worden gevolgd die iets afwijkt van die welke in het hierboven genoemde diktaat is te vinden.

We voeren in:

$$\beta_1 = \frac{\omega n_1}{v} \quad (\text{I-14a})$$

en

$$\beta_2 = \frac{\omega n_2}{v} \quad (\text{I-14b})$$

Hierin zijn n_1 en n_2 voorlopig fenomenologische grootheden.
Hiermede wordt het stelsel vergelijkingen (I-13) :

$$\left. \begin{aligned} E_x^t &= C \cos \theta_t \cdot \exp j\omega \left[t - \frac{n_2}{v} (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t) \right] \\ E_z^t &= -C \sin \theta_t \cdot \exp j\omega \left[t - \frac{n_2}{v} (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t) \right] \\ H_y^t &= \frac{C}{Z_{02}} \cdot \exp j\omega \left[t - \frac{n_2}{v} (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t) \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-15})$$

Met (I-14a) volgen voor de stelsels vergelijkingen (I-12) en (I-13) soortgelijke uitdrukkingen.

De randcondities aan het grensvlak $z = 0$ zijn :

$$\begin{aligned} E_x^i + E_x^r &= E_x^t \\ H_y^i + H_y^r &= H_y^t \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$A \cos \theta_i \exp j\omega F_i(x, 0, t) + B \cos \theta_r \exp j\omega F_r(x, 0, t) = C \cos \theta_t \exp j\omega F_t(x, 0, t)$$

en

$$\frac{A}{Z_{01}} \exp j\omega F_i(x, 0, t) - \frac{B}{Z_{01}} \exp j\omega F_r(x, 0, t) = \frac{C}{Z_{02}} \exp j\omega F_t(x, 0, t)$$

waarin:

$$\begin{aligned} F_i(x, z, t) &= t - n_1 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i) \\ F_r(x, z, t) &= t - n_1 (x \sin \theta_r - z \cos \theta_r) \\ F_t(x, z, t) &= t - n_2 (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t) \end{aligned} \quad (\text{I-16})$$

Aan de randcondities moet voldaan zijn voor iedere waarde van x en t . We vinden dus uit de randcondities:

1°. De cofactoren van de e-machten moeten voldoen aan:

$$\left. \begin{aligned} A \cos \theta_i + B \cos \theta_r &= C \cos \theta_t \\ \frac{A}{Z_{01}} - \frac{B}{Z_{01}} &= \frac{C}{Z_{02}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-17})$$

2°. De exponenten van de e-machten moeten voldoen aan:

$$t - n_1 \cdot x \cdot \sin \theta_i = t - n_1 \cdot x \cdot \sin \theta_r = t - n_2 \cdot x \cdot \sin \theta_t \quad (\text{I-18})$$

Uit (I-17) volgt:

$$\frac{B}{A} = \frac{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} - \frac{Z_{01}}{Z_{02}}}{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} + \frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \quad (\text{I-19a})$$

en

$$\frac{C}{A} = \frac{2}{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} + \frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \quad (\text{I-19b})$$

Uit (I-18) volgt:

$$\theta_i = \theta_r$$

en

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} \quad (\text{I-20})$$

In het voorgaande is gesteld: $\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}$ dus $\frac{\omega}{v} = \frac{\omega \cdot n_1}{v}$,
dus $n_1 = 1$ (vacuum).

We vinden dus:

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{1}{n_2} \quad (\text{I-21})$$

Dit is de brekingswet van Snellius:

Wanneer we de uitdrukkingen voor \underline{E}_x^t en \underline{H}_x^t (verg. (I-15)) introduceren in de basisvergelijkingen van Maxwell, t.w.

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (\text{I-22})$$

en

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \quad (\text{I-23})$$

dan vinden we na enig rekenen uit (I-22):

$$Z_{o2} = \frac{\mu \cdot v}{n_2} \quad (\text{I-24})$$

en uit (I-23):

$$Z_{o2} = \frac{j\omega \frac{n_2}{v}}{\sigma + j\omega\epsilon} \quad (\text{I-25})$$

Het is duidelijk dat de beide betrekkingen (I-24) en (I-25) identiek moeten zijn.

We kunnen dit bereiken door te veronderstellen dat geldt:

$$n_2 = n_2' - j n_2'' \quad (\text{I-26})$$

We kunnen dan n_2' en n_2'' oplossen uit de betrekkingen (I-24) en (I-25).

Na enig rekenwerk volgt:

$$n_2'^2 - n_2''^2 = \epsilon \mu v^2$$

$$2n_2' n_2'' = \frac{\sigma \mu v^2}{\omega}$$

waaruit volgt:

$$\left. \begin{aligned} n_2'^2 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right] \\ n_2''^2 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-27})$$

waarin verwerkt is $v^2 = \frac{1}{\epsilon \mu}$ (zie collegediktaat van Prof. van Trier).

We kunnen nu $\frac{B}{A}$ als functie van de hoek θ_i bepalen.

Dan weten we echter ook de reflectiecoëfficiënt ρ . Immers ρ is niets anders dan de absolute waarde van het quotiënt van de vectoren van Poynting $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$ van de invallende en de gereflecteerde golf. Nu is af te leiden dat ook geldt:

$$\rho = \left| \frac{\underline{S}^r}{\underline{S}^i} \right| = \left| \frac{\underline{E}^r \times \underline{H}^r}{\underline{E}^i \times \underline{H}^i} \right| = \left| \frac{B}{A} \right|^2$$

Dus:

$$\rho = \left| \frac{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} - \frac{Z_{01}}{Z_{02}}}{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} + \frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right|^2 \quad (\text{I-28})$$

Voor $\frac{Z_{01}}{Z_{02}}$ kunnen we met behulp van (I-25) schrijven:

$$\frac{Z_{01}}{Z_{02}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{n_2}{\mu \cdot v} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{n_2}{\mu_0 \mu_r} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{n_2}{\mu_r}$$

Indien geldt $\frac{u_r}{u_t} = 1$, dan is dus:

$$\frac{Z_{01}}{Z_{02}} = n_2 = n_2' - j n_2''$$

Verder kunnen we uit verg. (I-28) $\cos \theta_t$ elimineren door: $\sin \theta_t = \frac{1}{n_2} \sin \theta_i$.

Wanneer we deze berekening uitvoeren, dan volgt:

$$\rho = \frac{1 + |n|^2 \cos^2 \theta_i - |n| \sqrt{2} \cos \theta_i}{1 + |n|^2 \cos^2 \theta_i + |n| \sqrt{2} \cos \theta_i} \quad (\text{I-29})$$

waarin :

$$|n_2| = |n| = \sqrt{n'^2 + n''^2}$$

Voor een geleider is de dielektrische verschuivingsstroom zeer klein ten opzichte van de geleidingsstroom, zodat geldt $\sigma \gg \omega \epsilon$. Hiermede worden de vergelijkingen (I-27):

$$n'^2 = \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + 1$$

$$n''^2 = \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} - 1$$

zodat voor $|n|$ volgt: $|n| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$.

Hierboven is n gedefinieerd als $n = \frac{v\beta}{\omega}$

Volgens het collegediktaat van Prof. van Trier geldt voor geleiders:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (\text{I-30})$$

zodat voor n volgt:

$$n = \frac{v}{\omega} \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}$$

Voor metalen geldt dus:
$$n = \frac{|n|}{\sqrt{2}}$$

Indien we dit invullen in betrekking (I-29) volgt rechtstreeks betrekking (I-6).

Deze betrekking geldt dus voor een elektromagnetische golf waarvan de \underline{E} -vector evenwijdig aan het vlak van inval ligt.

De afleiding voor de betrekking (I-5), waarbij dus de \underline{E} -vector loodrecht op het vlak van inval staat, verloopt geheel analoog aan de hierboven gegeven afleiding voor betrekking (I-6).

Tenslotte geven we nog een afleiding van betrekking (I-4) voor de brekingsindex n .

We bedenken hierbij dat n ook gedefinieerd kan worden als

$$n = \frac{\lambda_v}{\lambda_m}$$

waarin λ_v de golflengte in vacuum

λ_m de golflengte in het metaal.

Dit volgt direkt uit:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}$$

(Zie collegediktaat Prof. van Trier, pag. 107.)

De fasesnelheid v volgt uit

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

Voor het metaal geldt dus $\lambda_m = \frac{2\pi}{\beta}$

Verder geldt voor een geleider (zie boven):

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

dus:

$$\lambda_m = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (\text{I-31})$$

Voor vacuum geldt: $\lambda_v = \frac{2\pi c}{\omega}$ (I-32)

Hierin is c de lichtsnelheid.

Uit (I-31) en (I-32) volgt dus:

$$\frac{\lambda_v}{\lambda_m} = n = \frac{2\pi c}{\omega} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \sqrt{\frac{c^2 \mu \sigma}{2\omega}}$$

Met $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda_v}$ wordt dit:

$$\frac{\lambda_v}{\lambda_m} = n = \sqrt{\frac{c \mu \sigma \lambda_v}{4\pi}} = \sqrt{\frac{\mu \lambda_v c}{4\pi r}} \quad (\text{I-4})$$

omdat $\sigma = \frac{1}{r}$.

We zien dus ook dat λ in betrekking (I-4) de betekenis heeft van de golflengte van de uitgezonden straling, dus de golflengte van de straling in vacuum.

Literatuur bij aanhangsel I.

1. Prof.dr.ir. A.A.Th.M. van Trier: Collegediktaat Theoretische elektrotechniek, deel IIIb en IV.
Uitg. maart 1961, T.H.E.
2. C. Davisson and J.R. Weeks: The relation between the total thermal emission power of a metal and its electrical resistivity.
J. Opt. Soc. of America, Vol. 8, mei 1924, nr. 5, pp. 581.
3. E. Schmidt und E. Eckert: Richtungsverteilung der Wärmestrahlung.
Forschung Bd. 6 (1935), H. 4, pp. 175.
4. A.G. Worthing: Temperature radiation emissivities and emittances.
~~in~~ "Temperature, its measurement and control in Science and Industry.
Am. Inst. of Physics, Uitg. Reinbold, 7e druk, 1958.

Aanhangsel II.Enkele speciale kwesties en mogelijkheden voor verder onderzoek.II.1. Meting van de lichtboogenergie met behulp van een hallmultiplicator.

In principe komt het meten van de lichtboogenergie bij het openen van een schakelaar of bij het doorsmelten van een smeltveiligheid neer op het bepalen van de integraal:

$$W_b = \int_{t_1}^{t_2} I(t) \cdot V_b(t) dt.$$

Hierin is W_b de boogenergie [Watt sec]
 $I(t)$ de stroom door de boog
 $V_b(t)$ de boogspanning
 t de tijd.

Aangenomen is hierbij dat er een lichtboog aanwezig is gedurende het tijdsinterval van t_1 tot t_2 .

Het momentele produkt $W_b(t) = I(t) \cdot V_b(t)$ kan in principe worden bepaald met behulp van een hallmultiplicator. De mogelijkheid hiertoe is aangetoond met een experiment dat is uitgevoerd in de schakeling van fig. II.1-1.

De werking is als volgt:

In het veld van de spoel Sp wordt een hallsonde geplaatst. Door deze hallsonde vloeit een stroom i_s waarvan de momentele waarde bepaald wordt door de boogspanning V_b . De hall spanning V_H , welke wordt gemeten tussen de punten 3 en 4 in fig. II.1-1, wordt bepaald, behalve door enkele geometrische grootheden en materiaalkonstanten van de hallsonde, door het produkt van de magnetische inductie B en de stroom i_s .

Nu is de magnetische inductie van het veld waarin de hallsonde is geplaatst, evenredig met de stroom I in het hoofdcircuit. Deze stroom vloeit ook door de lichtboog.

De stroom i_s is evenredig met de boogspanning V_b , derhalve is de hallspanning V_H evenredig met het produkt van I en V_b , dus met de lichtboogenergie W_b .

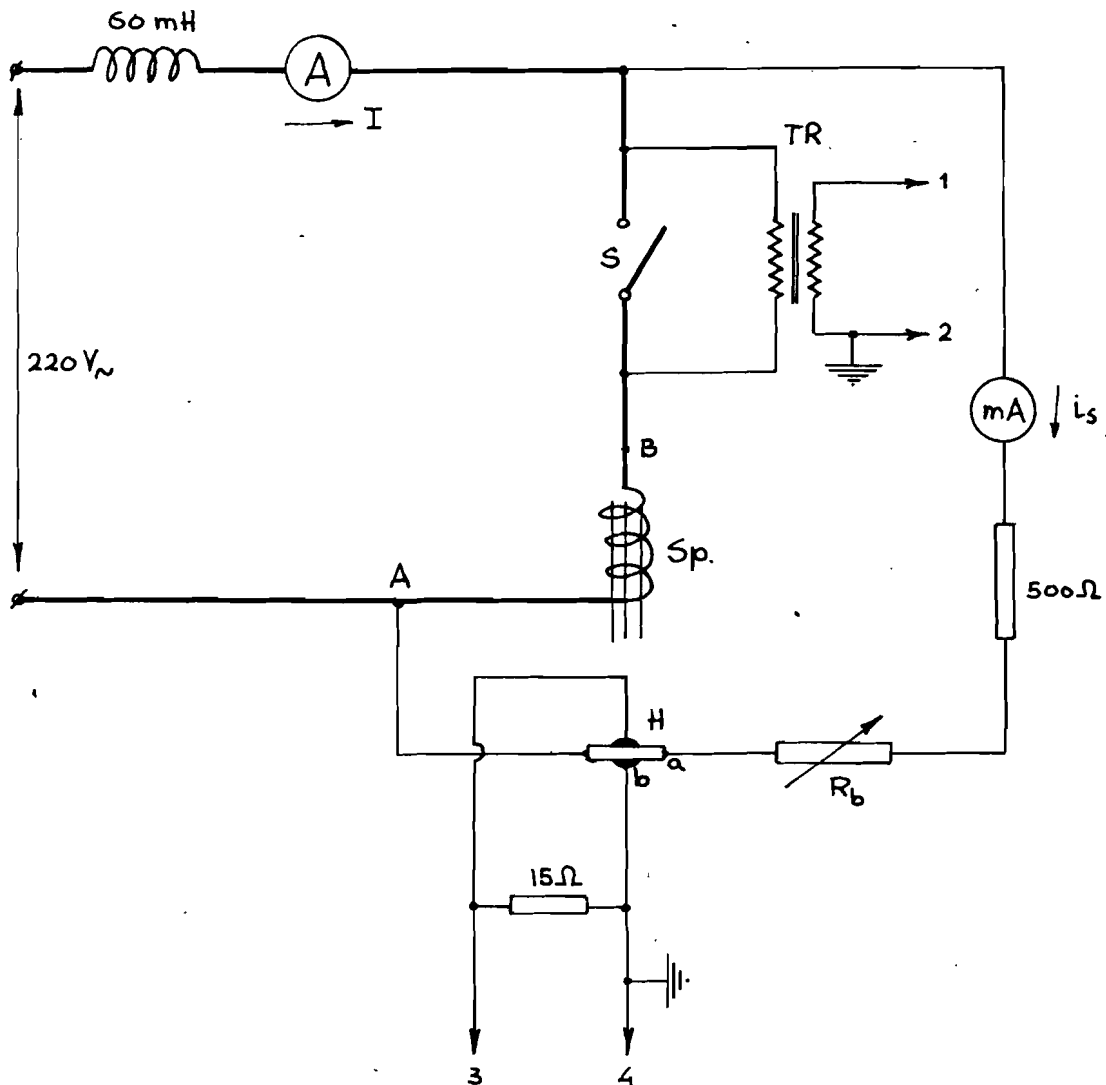


Fig. II .1 - 1

S: Schakelaar waarvan de lichtboogenergie wordt bepaald.

TR: Transformator fabr. General Radio, type 578 -A, overzetverhouding 4:1, frequentiebereik 20 Hz - 10 000 Hz.

Sp: Spoel met ferrietkern.

H : Hallsonde (ferrietsonde), fabr. Siemens, type MB 26.

1 en 2: Oscilloscoop aansluitingen boogspanning

3 en 4: Oscilloscoop aansluitingen boogenergie.

I : Stroom door het hoofdcircuit

i_s : Stuurstroom door hallsonde.

Dus: $V_H(t) :: W_b(t) = I(t) \cdot V_b(t)$

Enkele bijzonderheden van de meetopstelling:

Het moet voorkomen worden dat in de hallsonde een stroom kan gaan lopen van a naar b (zie fig. II .1-1). Met andere woorden, de verbinding a - b mag geen deel uitmaken van een gesloten stroomcircuit. Indien van a naar b namelijk een stroom loopt, dan wordt over de punten 3 en 4 een spanning gemeten die niet veroorzaakt wordt door i_s en B. Om aan deze voorwaarde te kunnen voldoen is transformator TR aangebracht. We werkten namelijk met een oscilloscoop (Tektronix type 555) die geen gescheiden ingangen bezat. Zou de transformator TR niet zijn aangebracht, dan zou via het gemeenschappelijk punt op de oscilloscoop (3 en 4) in de hallsonde een stroom gaan vloeien van a naar b, indien over de schakelaar S een zekere spanning aanwezig is. Het maakt in wezen geen verschil of de punten 1 en 2, dan wel de punten 3 en 4 via een transformator op de oscilloscoop zijn aangesloten.

Het stuurstroomcircuit voor de hallsonde kan ter plaatse A of ter plaatse B worden verbonden met het hoofdcircuit. In het geval deze verbinding ter plaatse B wordt gemaakt, loopt de stuurstroom i_s ook door de spoel Sp . Er ontstaat dan een klein magnetisch veld, ook indien door schakelaar S geen stroom vloeit. Dit geeft een miswijzing in de hallspanning.

Indien het stuurstroomcircuit met A wordt verbonden, zoals is aangegeven in fig. II .1-1, dan wordt i_s niet alleen bepaald door de spanning over de schakelaar V_b , maar door $V_b + V_{AB}$. De keuze van de toe te passen schakeling hangt af van de grootte van i_s en V_{AB} . Dit probleem is in wezen hetzelfde als de aansluiting van de spanningsspoel van een Wattmeter.

De gebruikte hallsonde was geschikt voor een maximale stuurstroom i_s van 500 mA, terwijl de spanning V_{AB}

bij een stroom van $I = 10$ Amp slechts enkele volts bedroeg. Daarom werd ter plaatse A aangesloten.

De weerstand van 500 diende om te waarborgen dat i_s steeds kleiner dan 500 mA was. Met R_b kon i_s worden ingesteld.

De inwendige weerstand in stuurstroomrichting van de hallsonde is afhankelijk van de magnetische inductie van het veld waarin de hallsonde is geplaatst. In het algemeen moet dus de weerstand in het stuurstroomcircuit (R_b) veel groter zijn dan deze inwendige weerstand, zodat i_s vrijwel niet wordt beïnvloed door de verandering van de inwendige weerstand.

Voor metingen in een hoogspanningscircuit verdient het aanbeveling een hallsonde te kiezen waarvoor de maximaal toelaatbare stuurstroom klein is. Dan is namelijk ook het in de weerstand R_b gedissipeerde vermogen niet al te groot, de afmetingen van R_b kunnen dan binnen redelijke grenzen worden gehouden.

Geschikt is een hallsonde fabr. Siemens, type SV 110, voor een stuurstroom van 10, 15 of 25 mAmp.

Fig. II.1-2 laat een oscillografische opname zien van het verloop van de spanning over de contacten van een schakelaar, alsmede het hierbij behorende verloop van de hallspanning V_H .

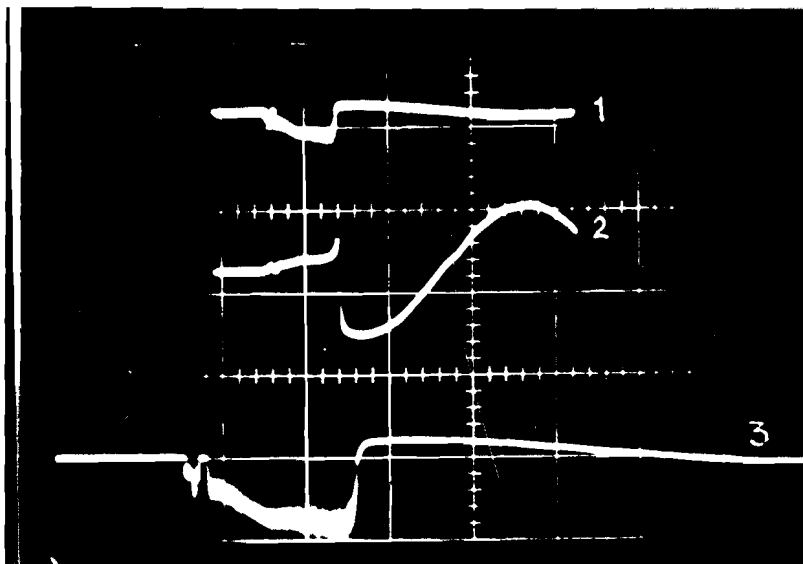


Fig. II.1-2.

Bij fig. II.1-2 :

1 : Hallspanning V_H

2 : Spanning over de kontakten V_B

3 : Idem 1, op vergróte schaal.

Tijdbasis 1 en 2 : 5 msec/cm.

Tijdbasis 3 : 2 msec/cm.

Literatuur.

1. Prof.dr. D.Th.J. ter Horst: 8e semester college THE.
2. H. Bitter: Zur Frage der Lichtbogenarbeit in Hochspannungs- und Hochleistungssicherungen.
ETZ-B, Bd. 12 (1960) no. 25, pp. 608.
3. E. Stepanek & S. Wagner: Gerät zur Messung der Lichtbogenenergie beim Öffnen von Starkstromschaltern.
Elektrie. 14 (1960) H.5, pp. 161.

Betreffende Hallgeneratoren:

4. H. Borschlein: Präzisionsmessung hoher Gleichstrom.
Siemens Z. 32 (1958) H.5, pp. 323.
5. F. Kuhrt und K. Maaz: Messung hoher Gleichströme mit Hallgeneratoren.
ETZ-A 77 (1956), pp. 487.
6. K. Maaz und R. Schmid: Hochstromjoch mit Hallgeneratoren.
ETZ-A 78 (1957) pp. 734.

Zie verder Siemens Zeitschrift 28 (1954) dat vrijwel geheel gewijd is aan hallgeneratoren.

II.2. De invloed van skineffekt in een smeltdraad.

Een eenheidsstroomsprong in een metalen draad geeft tengevolge van het skineffekt direkt na het inschakelen een belangrijke weerstandstoename. Om deze reden is het b.v. onmogelijk om een eenheidsstroomsprong te registreren met behulp van een normale shunt.

Enkele metingen:

Gemeten is het spanningsverloop over een Nieaf shunt welke was opgenomen in een circuit waarin een eenheidsstroomsprong werd gecreëerd.

De Nieaf shunt bestond uit een ronde metalen staaf van 6 mm diameter.

Fig. II.2-1 geeft het spanningsverloop over deze shunt zoals dat op de oscilloscoop is geregistreerd. De spanning V_{stat}

werd veroorzaakt door een stationaire stroom

$$I_{stat} = 4 \text{ Amp.}$$

De spanningspiek V_m bedroeg ongeveer 8x de spanning V_{stat} .

Voorts werd het spanningsverloop geregistreerd over een shunt bestaande uit 8 parallele ronde metalen draden van elk 2 mm diameter.

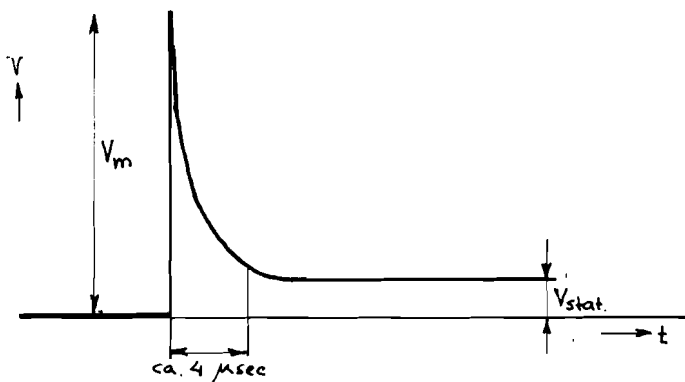


Fig. II.2-1.

De onderlinge afstand tussen de draden was 10 mm. De totale doorsnede van deze 8 draden tezamen is ongeveer gelijk aan de doorsnede van de Nieaf shunt. Deze shunt werd in het circuit opgenomen in plaats van de Nieaf shunt. Het spanningsverloop over deze shunt direkt na het aanbrengen van de eenheidsstroomsprong is weergegeven in fig. II.2-2.

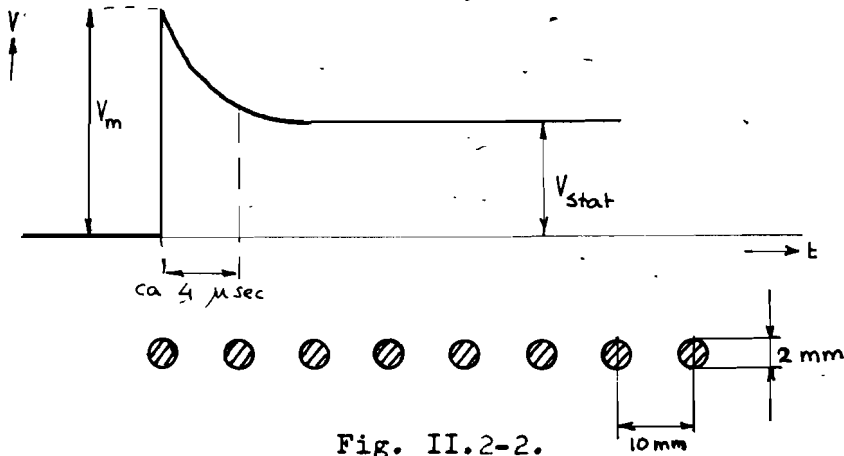


Fig. II.2-2.

De stationaire spanning V_{stat} behoort weer bij een stationaire stroom $I_{stat} = 4$ Amp. In dit geval is echter de maximale spanning V_m ongeveer 2x zo groot als de stationaire spanning V_{stat} .

Deze experimenten zijn een bevestiging voor het reeds lang bekende feit dat de configuratie van de geleider van invloed is op de mate waarin stroomverdringing in de geleider optreedt. Nu kan men zich afvragen of het mogelijk is door de één of andere listige constructie van de smeltband een smeltveiligheid te ontwerpen die bij zeer grote stromen gebruik maakt van deze stroomverdringing.

Een zeer grote kortsluitstroom betekent in het algemeen een zeer sterke stroomtoename in een tijdsinterval direkt na het tot stand komen van de kortsluiting.

Tengevolge van deze stroomverdringing zou bij een juiste constructie van de smeltband in enkele delen van deze smeltband gedurende korte tijd een veel grotere stroomdichtheid kunnen ontstaan dan in andere delen. Deze delen zullen dan het eerst smelten indien de stroom voldoende groot is.

Hierdoor zou eventueel kunnen worden bereikt:

- a) Afkappen van de stroom bij een lagere waarde dan die waarbij de stroomverdringing verwaarloosbaar is.
- b) Een zekere mate van getrapte afschakeling.

Dit zou het onderwerp van verder onderzoek kunnen zijn.