

## MASTER

### Statistische dynamica met behulp van de methode van de complex omhullende

Raaymakers, J.A.L.J.

*Award date:*  
1996

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

STATISTISCHE DYNAMICA MET BEHULP  
VAN DE METHODE VAN DE COMPLEX  
OMHULLENDE

J.A.L.J. Raaymakers

WFW-report: 95.162

Afstudeerhoogleraar: prof. dr. ir. J.W. Verheij  
Coach: dr. ir. G. Verbeek  
Examencommissie: prof. dr. ir. J.W. Verheij  
dr. ir. A. de Kraker  
dr. D.A. Overdijk  
dr. ir. G. Verbeek

Eindhoven, december 1995

Technische Universiteit Eindhoven  
Faculteit Werktuigbouwkunde  
Vakgroep Fundamentele Werktuigbouwkunde



# Summary

When analysing dynamical problems in the high frequency range, problems arise with numerical methods such as the finite element method (FEM). The high frequency enforces the meshsize to be small, which makes model generation and computational costs relatively high.

For high frequency problems a commonly known alternative is Statistical Energy Analysis (SEA) (Lyon, 1975; Scharton & Lyon, 1968; Fahy, 1994; de Langhe & Sas, 1994; Rodrigo *et al.*, 1994). Unfortunately, in this method some assumptions have been made concerning a high modal-density. These assumptions limit SEA to analyse only the high frequency range.

At this time, research is done (Fahy, 1994) to improve the conventional SEA concept. Also, research is done to alternative methods for the middle and high frequency range. Several alternatives are proposed to replace SEA and fill up the gap between low and high frequency problems.

These alternative methods have been investigated (Raaymakers, 1995). From this investigation it can be concluded that none of the proposed alternative methods can replace SEA at this time.

In (Raaymakers, 1995) Complex Envelope Displacement Analysis (CEDA) is chosen as the most promising and interesting method. This method transforms the one-dimensional wave equation to a complex differential equation, prescribing the complex envelope of the original displacement variable. This complex differential equation can be solved using a coarse meshsize. The original CEDA was restricted to analyse only undamped longitudinal waves in a homogeneous beam.

In this report CEDA is extended to damped longitudinal waves. Also an extensive, general treatment of the boundary conditions of the complex envelope differential equation is presented.

With increasing excitation frequency, solutions of deterministic problems are strongly dependent on the not always accurately known systemparameters. For this reason a statistic technique is applied to CEDA.

At this moment the complex envelope method is not yet capable of being used in a practical manner. To successfully use CEDA, one has to improve two aspects of the method. The first aspect is the possibility to transform more complex differential equations. This seems possible for many linear differential equations. Secondly, CEDA must be reformulated in a finite element formulation. Discretisation of the transformed equation is no problem. However, with an example it will be explained why the application of a finite element method is quite difficult. The model problem we use is a longitudinal wave in an axial harmonically excited homogeneous rod with uniform cross-section. The rod is fixed at both boundaries. The equation of motion of this model problem results in a real second-order boundary problem with two real Dirichlet boundary conditions. This boundary problem will be called the physical boundary problem. The two real boundary conditions will be called the physical boundary

conditions. The differential equation will be called the physical differential equation. Transformation of this physical differential equation results in a complex second-order differential equation in terms of the complex envelope. This differential equation will be called the CE differential equation. This complex CE differential equation needs two complex or four real boundary conditions to have a unique solution. The two physical boundary conditions can be transformed to two real boundary conditions in terms of the complex envelope. The other two boundary conditions will be called the free boundary conditions. In principle, these two free boundary conditions can be chosen freely. Each choice will give a complex envelope solution which can be transformed to the physical solution. Unfortunately, only a specific way of choosing these free boundary conditions will result in a smooth complex envelope solution. For the problems in this report, the free boundary conditions can be chosen easily in an effective manner, but in the general case this is not evident.

A response-surface method is applied to CEDA for modelling the stochastic system. This method seems only useful for systems with a smooth response-surface. In the usual case, one can better use CEDA in combination with a Monte-Carlo approach.

The final conclusion is that CEDA can be used successfully, when it will be possible to automatize the CEDA concept. This is a point that needs further investigation.

# Samenvatting

Bij het analyseren van dynamische problemen treden in het algemeen problemen op met numerieke oplosmethoden zoals de eindige elementenmethode (FEM), indien systemen bij hoge frequenties doorgerekend dienen te worden. Oorzaak hiervan is dat de elementgrootte bij eindige elementenmethoden bepalend is voor de maximale frequentie. Bij hoge frequenties wordt de elementgrootte hierdoor dusdanig klein dat het numerieke probleem ten gevolge van een onaanvaardbaar lange rekentijd praktisch onoplosbaar wordt.

Een bekend alternatief voor hoogfrequente analyses is Statistische Energie Analyse ('Statistical Energy Analysis', SEA) (Lyon, 1975; Scharton & Lyon, 1968; Fahy, 1994; de Langhe & Sas, 1994; Rodrigo *et al.*, 1994). In de formulering van deze methode zijn echter enkele aannamen gedaan die een nadrukkelijke ondergrens voor het frequentiebereik vastleggen. Ook zijn de betrouwbaarheidsintervallen van de berekening over het algemeen onbekend. Nog steeds wordt onderzoek gedaan naar het verbeteren van het conventionele SEA concept (Fahy, 1994). Ook wordt onderzoek verricht naar alternatieve methoden voor het midden- en hoogfrequente gebied. Er zijn diverse methoden voorgesteld die bedoeld zijn ter vervanging van SEA.

In een literatuuronderzoek (Raaymakers, 1995) zijn deze mogelijke alternatieven onderzocht. Uit dit literatuuronderzoek kan geconcludeerd worden dat geen van de voorgestelde alternatieven in dit stadium een vervanging voor SEA kan zijn.

Uit het literatuuronderzoek is de 'complex envelope displacement analysis' (CEDA) als meest veelbelovende methode gekozen. Deze methode transformeert een reële differentiaalvergelijking naar een complexe differentiaalvergelijking in termen van de complex omhullende van de oorspronkelijke oplossing. Deze complexe vergelijking is numeriek aantrekkelijker op te lossen. Het oorspronkelijke CEDA was alleen in staat om ongedempte longitudinale trillingen in een homogene balk te analyseren.

In dit rapport is CEDA uitgebreid voor gedempte longitudinale problemen. Ook is een uitgebreide, algemene behandeling van de randvoorwaarden (RVW) van de complexe vergelijking afgeleid.

Bij toename van de excitatiefrequentie blijken deterministische methoden zoals CEDA sterk afhankelijk van de niet altijd exact bekende systeemp parameters. Na een literatuuronderzoek naar statistische analysetechnieken, is daarom een statistische techniek aan CEDA toegevoegd.

Op dit moment is de complex omhullende methode nog niet in een stadium dat deze op efficiënte wijze kan worden toegepast. Om CEDA efficiënt toe te passen dient de methode op twee punten uitgebreid te worden. Ten eerste dienen complexere vergelijkingen getransformeerd te worden. Dit lijkt voor veel lineaire vergelijkingen mogelijk. Ten tweede dient CEDA geautomatiseerd te worden, zodat een eindige elementenpakket gebruikt kan worden om oplossingen te berekenen. Het discretiseren van de getransformeerde differentiaalvergelijking levert geen problemen. Aan de hand van een modelprobleem zal uitgelegd

worden waarom het automatiseren toch moeilijk is. Als modelprobleem nemen we een ongedempte longitudinale trilling in een axiaal harmonisch geëxciteerde, tweezijdig ingeklemde, homogene balk met uniforme dwarsdoorsnede. De bewegingsvergelijking hiervan resulteert in een reëel tweede-orde RVW-probleem met twee Dirichlet-RVW. Dit RVW-probleem noemen we het fysische-RVW-probleem. De twee reële RVW noemen we de fysische-RVW. De differentiaalvergelijking noemen we de fysische-differentiaalvergelijking. Transformeren van de fysische-differentiaalvergelijking levert een complexe differentiaalvergelijking in termen van de complex omhullende van de fysische oplossing. Deze complexe differentiaalvergelijking noemen we de CE-differentiaalvergelijking. Deze CE-differentiaalvergelijking heeft twee complexe, of vier reële, RVW nodig om een eenduidige oplossing te hebben. De twee fysische-RVW kunnen getransformeerd worden naar twee reële RVW in termen van de complex omhullende. De twee overige reële RVW noemen we de vrije-CE-RVW. Deze vrije-CE-RVW zijn in principe willekeurig te kiezen. Elke keuze resulteert in een specifieke complex omhullende oplossing. Al deze oplossingen gaan na transformatie over in de gezochte fysische oplossing. Echter, de gladheid van de uiteindelijke oplossing van het CE-RVW-probleem, dus de complex omhullende, is afhankelijk van de juiste keuze van de twee vrije-CE-RVW. Voor de modelproblemen in dit rapport is het eenvoudig om deze vrije-CE-RVW goed te kiezen. Voor meer algemene problemen is dit waarschijnlijk niet het geval.

Stochastische systemen zijn geanalyseerd nadat een responsie-oppervlak methode is toegevoegd aan CEDA. Deze methode blijkt alleen geschikt voor systemen met een glad responsie-oppervlak. Over het algemeen kan men CEDA beter in combinatie met een Monte-Carlo methode gebruiken.

Als eindconclusie kan gesteld worden dat CEDA pas efficiënt gebruikt kan gaan worden indien men in staat is de gehele analyse te automatiseren. Dit vormt een punt voor verder onderzoek.

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>1</b>
1.1	Midden- en hoogfrequente analyses . . . . .	1
1.2	Probleemstelling en doel . . . . .	2
1.3	Opzet van dit rapport . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Complex Omhullende Analyse</b>	<b>3</b>
2.1	De complex omhullende . . . . .	3
2.2	Probleembeschrijving . . . . .	8
2.3	Methode Overdijk . . . . .	9
2.3.1	Theorie . . . . .	9
2.3.2	Uitvoering . . . . .	12
2.3.3	Evaluatie . . . . .	14
2.4	Methode Carcaterra . . . . .	17
2.4.1	Theorie . . . . .	17
2.4.2	Uitvoering . . . . .	18
2.4.3	Evaluatie . . . . .	20
2.5	Gedempte Complex Omhullende Analyse . . . . .	21
2.5.1	Theorie . . . . .	21
2.5.2	Uitvoering . . . . .	29
2.5.3	Evaluatie . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Statistische Complex Omhullende Analyse</b>	<b>35</b>
3.1	Gradaties van stochastisch gedrag . . . . .	35
3.2	Statistische methoden . . . . .	36
3.3	Discussie . . . . .	38
3.4	Stochastische systemen en DCEDA . . . . .	39
3.5	Numerieke uitvoering . . . . .	40
3.5.1	Probleemformulering . . . . .	41
3.5.2	Methoden . . . . .	43
3.6	Resultaten . . . . .	46
3.7	Conclusies . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Discussie</b>	<b>51</b>
4.1	Aandachtspunten bij hoogfrequente analyses . . . . .	51
4.2	Gedempte complex omhullende analyse (DCEDA) . . . . .	53



<b>5 Conclusies en aanbevelingen</b>	<b>55</b>
5.1 Conclusies . . . . .	55
5.2 Aanbevelingen . . . . .	57
<b>Literatuurlijst</b>	<b>58</b>
<b>A Afleiding en analytische oplossing van een longitudinaal golfprobleem</b>	<b>61</b>
A.1 Afleiding differentiaalvergelijking . . . . .	61
A.2 Exacte oplossing . . . . .	62
A.3 Eigenfrequenties en eigenmodes . . . . .	63
A.4 Dimensieloze beschrijving . . . . .	64
<b>B Transformatie van de differentiaalvergelijking</b>	<b>65</b>
<b>C Numerieke integratie van de CEDA vergelijking</b>	<b>66</b>
<b>D Evaluatie van de beginvoorwaarden van de methode van Overdijk</b>	<b>68</b>
<b>E Samenvatting numerieke resultaten van de deterministische methoden</b>	<b>70</b>
E.1 Samenvatting numerieke resultaten van de complex omhullende methoden . .	70
E.2 Afwijkingen ten opzichte van de exacte oplossing . . . . .	71
<b>F Numerieke resultaten van de statistische methoden</b>	<b>72</b>
F.1 Monte-Carlo oplossingen . . . . .	72
F.2 Resultaten van de responsie-oppervlak methode in combinatie met een exacte solver . . . . .	74
F.3 Resultaten van de responsie-oppervlak methode in combinatie met de DCEDA solver . . . . .	79
<b>G Mogelijke toepassing van een eindige elementenformulering</b>	<b>84</b>
G.1 Keuze van de RVW . . . . .	84
G.2 Galerkin formulering . . . . .	85

# Symbolenlijst

$u$	reële of complexe scalar of functie
$U$	Fourier-getransformeerde van de functie $u$
$\tilde{u}$	Hilbert-getransformeerde van de functie $u$
$\hat{u}$	analytische functie behorende bij de functie $u$
$\dot{u}$	differentiatie naar de tijd
$\ddot{u}$	dubbele differentiatie naar de tijd
$u'$	differentiatie naar de plaats
$u''$	dubbele differentiatie naar de plaats
$\mathbf{u}$	kolom
$\mathbf{U}$	matrix
$\underline{u}$	stochastische reële of complexe scalar of functie
$E[\underline{u}] = \mu_u$	verwachte waarde van $\underline{u}$
$\text{var}(\underline{u}) = \sigma_u^2$	variantie van $\underline{u}$
$\text{cov}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$	covariantie van $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$
$c$	fasesnelheid
$c_0$	fasesnelheid van een longitudinale golf in een balk
$f$	frequentie in Hz
$\omega$	frequentie in radialen per seconde
$\omega_e$	excitatie frequentie in radialen per seconde
$k_e$	reëel golfgetal $\omega_e/c_0$
$k_c$	complex golfgetal
$k_s$	veerstijfheid
$\eta$	verliesfactor
$\varepsilon(x)$	eenheids-stapfunctie
$\delta(x)$	dirac-puls
$h(x)$	impulsresponsie-functie

# Voorwoord

Dit rapport beschrijft het onderzoek ten behoeve van het afstuderen als werktuigbouwkundig ingenieur aan de Technische Universiteit Eindhoven. De eindstudie is uitgevoerd bij de vakgroep Fundamentele Werktuigbouwkunde (WFW) van de faculteit Werktuigbouwkunde.

Aanleiding van dit afstudeerrapport is het in de afstudeerperiode uitgevoerde literatuuronderzoek (Raaymakers, 1995) naar mogelijke alternatieven voor ‘Statistical Energy Analysis’ (Lyon, 1975; Scharton & Lyon, 1968; Fahy, 1994).

Ten eerste wil ik Bert Verbeek en Jan Verheij bedanken voor de begeleiding van dit afstudeerproject. Veel dank gaat uit naar Judit Vennix voor het nakijken van dit rapport. Hierbij wil ik ook mijn ouders, broer, vrienden en vriendinnen bedanken voor de leuke tijd gedurende deze afstudeerperiode.

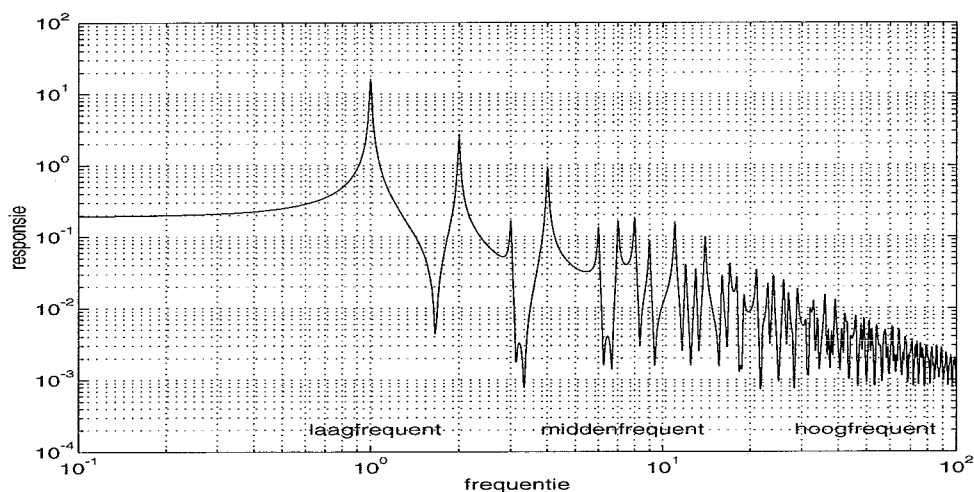
Jeroen Raaymakers  
Oirschot, december 1995

# Hoofdstuk 1

## Inleiding

### 1.1 Midden- en hoogfrequente analyses

Bij het analyseren van dynamische problemen treden in het algemeen problemen op met numerieke oplossingsmethoden zoals de eindige elementenmethode (FEM), indien systemen bij hoge frequenties doorgerekend dienen te worden. Oorzaak hiervan is dat de elementgrootte bij eindige elementenmethoden bepalend is voor de maximale frequentie. Bij hoge frequenties wordt de elementgrootte hierdoor dusdanig klein dat het numerieke probleem ten gevolge van een onaanvaardbaar lange rekentijd praktisch onoplosbaar wordt. In figuur 1.1 wordt een indicatie gegeven van het laag-, midden- en hoogfrequent gebied. Een bekend alternatief



Figuur 1.1: Indicatie van laag-, midden- en hoogfrequent gebied.

voor hoogfrequente analyses is Statistische Energie Analyse ('Statistical Energy Analysis', SEA) (Lyon, 1975; Scharton & Lyon, 1968; Fahy, 1994; de Langhe & Sas, 1994; Rodrigo *et al.*, 1994). De methode wordt met name gebruikt bij geluidsproblemen. In de formulering van deze methode zijn echter enkele aannamen gedaan die een nadrukkelijke ondergrens voor het frequentiebereik vastleggen. Ook zijn de betrouwbaarheidsintervallen van de berekening over het algemeen onbekend. Het praktisch toepassen van de methode vereist inzicht in

verschillende methoden op zowel experimenteel, numeriek als analytisch gebied. Nog steeds wordt onderzoek gedaan naar het verbeteren van het conventionele SEA concept (Fahy, 1994). Ook wordt onderzoek verricht naar alternatieve methoden voor het midden- en hoogfrequente gebied. Er zijn diverse methoden voorgesteld die bedoeld zijn ter vervanging van SEA.

## 1.2 Probleemstelling en doel

De afstudeeropdracht heeft als doel het inventariseren van de voorgestelde alternatieve methoden en het beoordelen van deze methoden op mogelijke bruikbaarheid en betrouwbaarheid. Daarnaast zal afhankelijk van het resultaat van de inventarisatie, een van deze methoden diepgaand onderzocht worden en mogelijk worden verbeterd. Vervolgens kan deze methode worden geïmplementeerd in een numeriek softwarepakket en worden gevalideerd aan de hand van een modelprobleem of een praktijkvoorbeeld. Het onderzoek beperkt zich tot lineaire systemen. Het uiteindelijke doel is het verkrijgen van inzicht in de problemen die optreden in het midden- en hoogfrequente gebied, de voordelen en beperkingen van SEA, de mogelijkheden van de alternatieven en het uitbreiden en inschatten van de mogelijkheden van het als beste verkozen alternatief.

## 1.3 Opzet van dit rapport

Het eerste deel van de opdracht bestaat uit een literatuuronderzoek naar de voorgestelde alternatieven. Dit onderzoek en de conclusie hiervan zijn gerapporteerd (Raaymakers, 1995). Uit dit literatuuronderzoek is de 'complex envelope displacement analysis' (CEDA) als het meest belovende en meest interessante alternatief gekozen. De basis van deze methode is gelegd door Carcaterra (Carcaterra & Sestieri, 1994).

In hoofdstuk 2 wordt de complex omhullende analyse (CEDA) uitgebreid behandeld. Met name wordt een nieuwe, meer algemene behandeling van de randvoorwaarden (RVW) gepresenteerd. De wijze waarop de RVW in (Carcaterra & Sestieri, 1994) worden opgelegd, is niet algemeen toepasbaar. Door gebruik te maken van de nieuwe methode om de RVW toe te passen, is het mogelijk om het oorspronkelijke CEDA te gebruiken voor een gedempt probleem. Deze techniek noemen we de gedempte complex omhullende analyse (DCEDA).

Omdat zowel CEDA als DCEDA deterministische methoden zijn, die in het hoogfrequente gebied erg gevoelig zijn voor variaties in systeem- en excitatieparameters, wordt in hoofdstuk 3 een statistische techniek aan DCEDA toegevoegd. Het geheel noemen we statistische complex omhullende analyse (SCEDA) en is een combinatie van DCEDA en een responsie-oppervlakte techniek. De nieuwe variant wordt vergeleken met 3 andere statistische methoden (de exacte numerieke oplossing, de Monte-Carlo techniek en de responsie-oppervlak methode) die gebruik maken van de analytische oplossing als deterministische solver.

Het rapport wordt afgesloten met een discussie in hoofdstuk 4 en de conclusies en aanbevelingen in hoofdstuk 5.

## Hoofdstuk 2

# Complex Omhullende Analyse

De basis van de CEDA ('complex envelope displacement analysis') is te beschrijven door de volgende drie stappen:

- transformatie van een differentiaalvergelijking;
- oplossen van de getransformeerde differentiaalvergelijking;
- terugtransformatie van de oplossing.

Bij geen enkele stap gaat informatie verloren. Afgezien van numerieke fouten levert de methode dus de exacte oplossing van een probleem.

### 2.1 De complex omhullende

In deze paragraaf wordt de transformatie van een hoogfrequent signaal naar een glad signaal behandeld. De basis hiervan is de Hilberttransformatie. Voor de Hilberttransformatie zijn enkele verschillende definities in omloop. De oorzaak hiervan zijn de verschillende definities van de Fouriertransformatie (Cijsouw, 1992). In dit rapport worden de volgende definities (Crandall, 1979) voor de Fouriertransformatie en zijn inverse gehanteerd

$$U(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-jkx} dx \quad (2.1)$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(k)e^{jkx} dk \quad (2.2)$$

De Hilberttransformatie (Bracewell, 1965; Titchmarsh, 1948; Erdélyi *et al.*, 1954) van een functie kan men definiëren in plaats- en golfgetaldomein<sup>1</sup>. In het plaatsdomein is de Hilbert-getransformeerde  $\tilde{u}(x)$  van  $u(x)$  een convolutie met  $\frac{1}{\pi x}$ <sup>2</sup>.

$$\tilde{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{\pi(x - \tau)} d\tau \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>De gebruikelijke Fourierparameters tijd  $t$  en frequentie  $\omega$  zijn hier vervangen door plaats  $x$  en golfgetal  $k$ .

<sup>2</sup>Dit is de definitie volgens Carcaterra. In de meeste literatuur wordt een minteken toegevoegd.

In het golfgetaldomein resulteert dit in een vermenigvuldiging met  $-j\text{sign}(k)$ .

$$\tilde{U}(k) = -j\text{sign}(k)U(k) \quad (2.4)$$

Het analytische signaal  $\hat{u}(x)$  wordt vervolgens gedefinieerd als  $\hat{u}(x) = u(x) + j\tilde{u}(x)$  (Bracewell, 1965; Carcaterra & Sestieri, 1994). Indien we dit signaal moduleren met een complexe e-macht  $e^{-jk_0x}$  dan resulteert dit in de zogenaamde complex omhullende ('complex envelope', CE)

$$\bar{u}(x) = \hat{u}(x)e^{-jk_0x} \quad (2.5)$$

Tabel 2.1 toont de transformatie van  $u(x) = \cos(k_0x)$ . De figuren 2.1 t/m 2.5 tonen een numerieke transformatie van dit signaal voor  $k_0 = 10.2\pi$ . Ter illustratie is hier het signaal niet geheel passend in het 'tijd'-blok gezet, zodat enige numerieke afwijkingen ten opzichte van de exacte transformatie volgens tabel 2.1 plaatsvinden.

algemeen				
signaal	aard	naam	opgebouwd uit	golfgetalspectrum
$u(x)$	reëel	oorspronkelijk signaal		$U(k)$
$\tilde{u}(x)$	reëel	Hilbert-getransformeerde		$-j\text{sign}(k)U(k)$
$\hat{u}(x)$	complex	analytisch signaal	$u(x) + j\tilde{u}(x)$	$2\varepsilon(k)U(k)$
$\bar{u}(x)$	complex	'complex envelope'	$\hat{u}(x)e^{-jk_0x}$	$2\varepsilon(k + k_0)U(k + k_0)$
voorbeeld				
signaal	figuur	naam	plaatsdomein	golfgetalspectrum
$u(x)$	figuur 2.1	oorspronkelijk signaal	$\cos(k_0x)$	$\pi[\delta(k + k_0) + \delta(k - k_0)]$
$\tilde{u}(x)$	figuur 2.2	Hilbert-getransformeerde	$\sin(k_0x)$	$\pi j[\delta(k + k_0) - \delta(k - k_0)]$
$\hat{u}(x)$	figuur 2.4	analytisch signaal	$e^{jk_0x}$	$2\pi\delta(k - k_0)$
$\bar{u}(x)$	figuur 2.5	'complex envelope'	1	$2\pi\delta(k)$

Tabel 2.1: Hilberttransformatie, analytisch signaal en de complex omhullende.

De CE heeft voor bepaalde vormen van  $u(x)$  bijzondere eigenschappen. Dit is het beste te zien in het golfgetaldomein. Stel dat  $u(x)$  een *reëel* signaal is en het bijbehorende golfgetalspectrum  $U(k)$  op het positieve deel van de golfgetal-as geconcentreerd is tussen de golfgetallen

$$k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k \quad (2.6)$$

Indien we hiervan de CE bepalen dan blijkt het golfgetalspectrum hiervan geconcentreerd rond  $k = 0$ , bovendien geldt

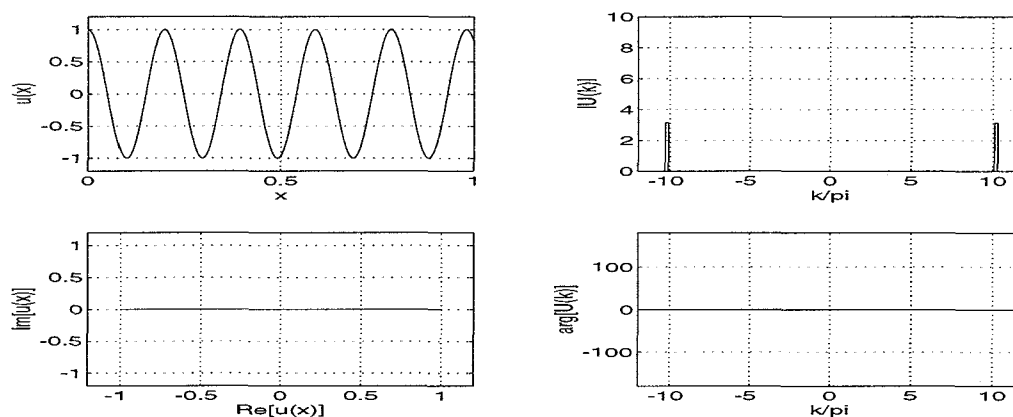
$$\bar{U}(k) = 0 \quad \forall \quad |k| > \Delta k \quad (2.7)$$

Voor integratie van dit signaal zijn volgens het bemonsteringstheorema van Shannon (Mulders, 1993) veel minder discretisatiepunten nodig. Het oorspronkelijke signaal is vervolgens uit de CE te herleiden via de inverse-transformatie

$$u(x) = \text{Re}[\bar{u}(x)e^{jk_0x}] = \text{Re}[\bar{u}(x)] \cos(k_0x) - \text{Im}[\bar{u}(x)] \sin(k_0x) \quad (2.8)$$

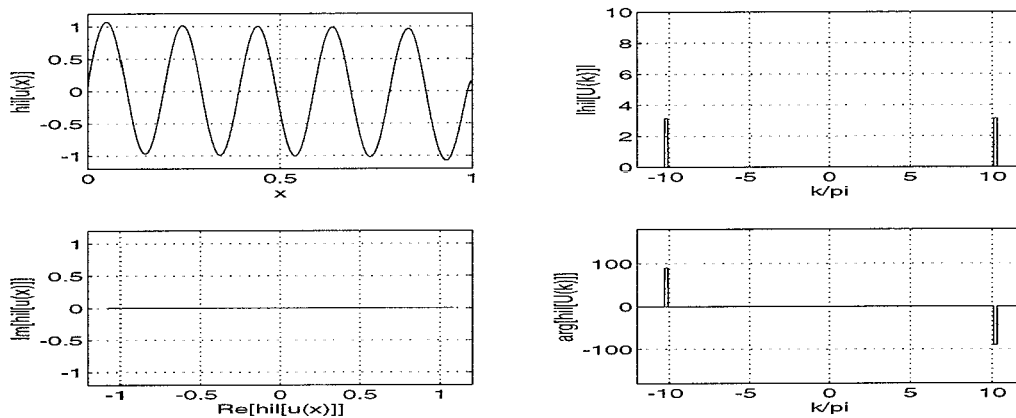
Zoals reeds eerder opgemerkt dient het oorspronkelijke signaal  $u(x)$  reëel te zijn. Dit kan eenvoudig ingezien worden door achtereenvolgens  $e^{jk_0x}$  en  $e^{-jk_0x}$  te transformeren naar CE-signalen met behulp van de rekenregels (tabel 2.1) in het golfgetaldomein. Het resultaat hiervan is 2 respectievelijk 0. Reproducieren van het oorspronkelijke signaal met behulp van (2.8)

resulteert in  $2 \cos(k_0 x)$  respectievelijk 0. Omdat reële signalen een symmetrisch spectrum bevatten en er dus geen informatieverlies plaatsvindt bij het nul stellen van het negatieve deel van het spectrum is het oorspronkelijke signaal weer te herleiden. Voor complexe signalen is het spectrum niet symmetrisch en vindt informatieverlies plaats zodat reconstructie niet meer mogelijk is.

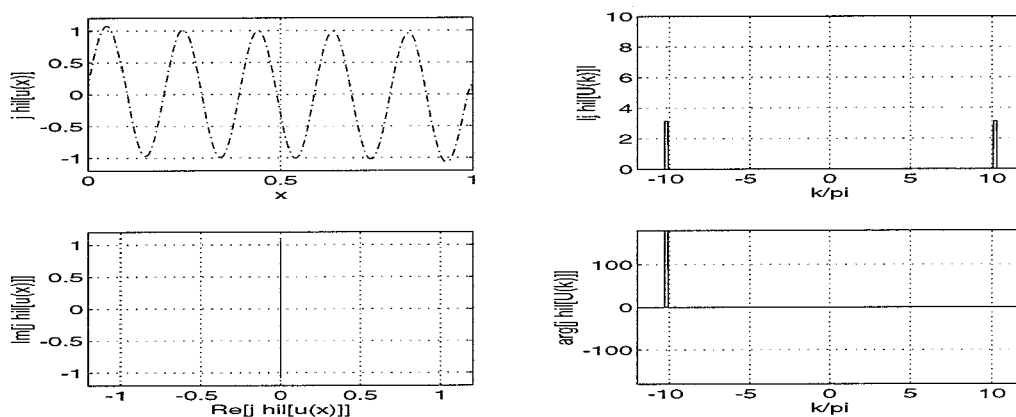


Figuur 2.1: Het oorspronkelijke signaal  $u(x) = \cos(10.2\pi x)$ . Linksboven is  $u(x)$  afgebeeld in het plaatsdomein. Linksonder is  $u(x)$  in het complexe vlak afgebeeld. Hierbij is het imaginaire deel van  $u(x)$  op de verticale as uitgezet tegen het reële deel van  $u(x)$  op de horizontale as. In de twee rechtse grafieken is de functie  $u(x)$  Fourier-getransformeerd naar het golfgetaldomein. De modulus en het argument van het golfgetalspectrum zijn uitgezet tegen  $k/\pi$ .

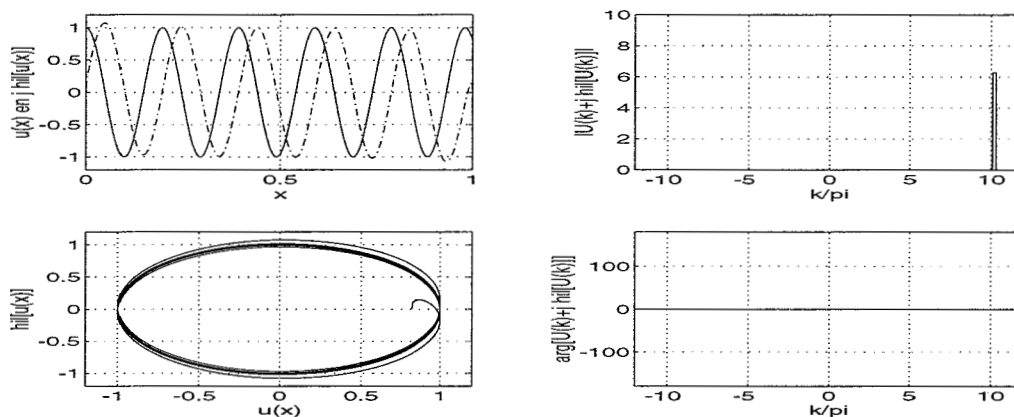




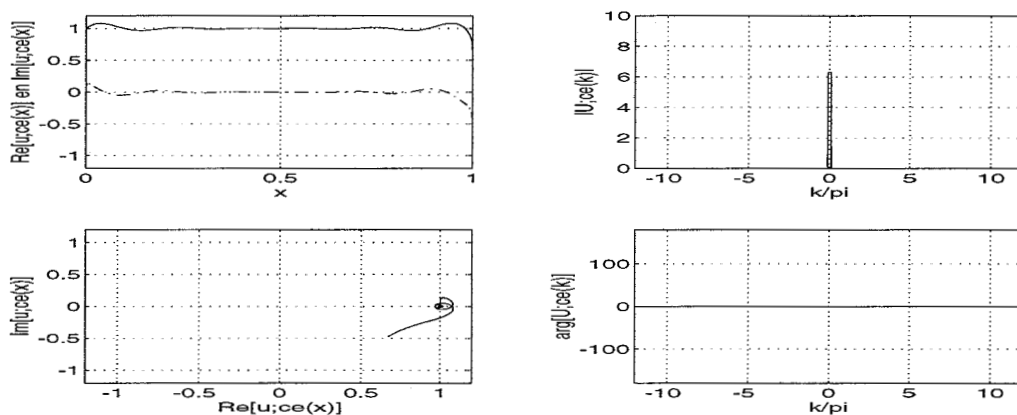
Figuur 2.2: De Hilbert-getransformeerde  $\tilde{u}(x)$ . Bij een exacte transformatie is deze gelijk aan  $\sin(10.2\pi x)$ . Omdat het oorspronkelijke signaal  $u(x)$  niet passend in het 'tijd'-vak is geplaatst, treedt echter een afwijking op. Linksboven is  $\tilde{u}(x)$  afgebeeld in het plaatsdomein. Linksonder is de Hilbert-getransformeerde  $\tilde{u}(x)$  in het complexe vlak afgebeeld. Hierbij is het imaginaire deel van  $\tilde{u}(x)$  op de verticale as uitgezet tegen het reële deel van  $\tilde{u}(x)$  op de horizontale as. In de twee rechtse grafieken is de Hilbert-getransformeerde  $\tilde{u}(x)$  Fourier-getransformeerd naar het golfgetaldomein. De modulus en het argument van het golfgetalspectrum zijn uitgezet tegen  $k/\pi$ .



Figuur 2.3: De met  $j$  vermenigvuldige Hilbert-getransformeerde  $j\tilde{u}(x)$ . Bij een exacte transformatie is deze gelijk aan  $j \sin(10.2\pi x)$ . Omdat het oorspronkelijke signaal  $u(x)$  niet passend in het 'tijd'-vak is geplaatst, treedt echter een afwijking op. Linksboven is  $j\tilde{u}(x)$  afgebeeld in het plaatsdomein. Linksonder is  $j\tilde{u}(x)$  in het complexe vlak afgebeeld. Hierbij is het imaginaire deel van  $j\tilde{u}(x)$  op de verticale as uitgezet tegen het reële deel van  $j\tilde{u}(x)$  op de horizontale as. In de twee rechtse grafieken is  $j\tilde{u}(x)$  Fourier-getransformeerd naar het golfgetaldomein. De modulus en het argument van het golfgetalspectrum zijn uitgezet tegen  $k/\pi$ . Het belangrijke effect van deze vermenigvuldiging is de extra fase verschuiving van 90 graden over het gehele golfgetaldomein.



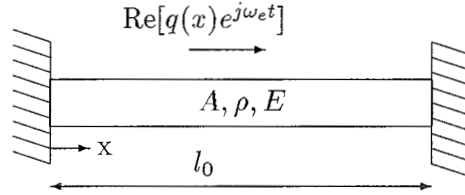
Figuur 2.4: Het analytisch signaal  $\hat{u}(x) = u(x) + j\tilde{u}(x)$ . Bij een exacte transformatie is deze gelijk aan  $\cos(10.2\pi x) + j\sin(10.2\pi x) = e^{j10.2\pi x}$ . Omdat het oorspronkelijke signaal  $u(x)$  niet passend in het 'tijd'-vak is geplaatst, treedt echter een afwijking op. Linksboven is het reële (doorgetrokken lijn) en het imaginaire deel (stippellijn) van het analytisch signaal  $\hat{u}(x)$  afgebeeld in het plaatsdomein. Linksonder is het analytische signaal  $\hat{u}(x)$  in het complexe vlak afgebeeld. Hierbij is het imaginaire deel van  $\hat{u}(x)$  op de verticale as uitgezet tegen het reële deel van  $\hat{u}(x)$  op de horizontale as. In de twee rechtse grafieken is  $\hat{u}(x)$  Fourier-getransformeerd naar het golfgetaldomein. De modulus en het argument van het golfgetalspectrum zijn uitgezet tegen  $k/\pi$ .



Figuur 2.5: De complex omhullende  $\tilde{u}(x)$ . Bij een exacte transformatie en de keuze  $k_0 = 10.2\pi$  is deze gelijk aan 1. Linksboven is het reële (doorgetrokken lijn) en het imaginaire deel (stippellijn) van de complex omhullende  $\tilde{u}(x)$  afgebeeld in het plaatsdomein. Linksonder is de complex omhullende  $\tilde{u}(x)$  in het complexe vlak afgebeeld. Hierbij is het imaginaire deel van  $\tilde{u}(x)$  op de verticale as uitgezet tegen het reële deel van  $\tilde{u}(x)$  op de horizontale as. In het exacte geval zouden de hele functie afgebeeld worden in het punt  $1 + 0j$ . Omdat het oorspronkelijke signaal  $u(x)$  niet passend in het 'tijd'-vak is geplaatst, treedt echter een afwijking op. In de twee rechtse grafieken is  $\tilde{u}(x)$  Fourier-getransformeerd naar het golfgetaldomein. De modulus en het argument van het golfgetalspectrum zijn uitgezet tegen  $k/\pi$ . Opvallend is het golfgetalspectrum dat geconcentreerd is rond het punt  $k = 0$ .

## 2.2 Probleembeschrijving

Het CEDA van Carcaterra (Carcaterra & Sestieri, 1994) behandelt een ongedempte longitudinale trilling in een axiaal harmonisch geëxciteerde, tweezijdig ingeklemde, homogene balk met uniforme dwarsdoorsnede (figuur 2.6). Stellen we de harmonische excitatie gelijk aan



Figuur 2.6: Longitudinaal geëxciteerde balk.

$$p(x, t) = \text{Re}[q(x)e^{j\omega_e t}] \quad (2.9)$$

en de oplossing van de longitudinale verplaatsing gelijk aan

$$w(x, t) = \text{Re}[u(x)e^{j\omega_e t}] \quad (2.10)$$

en vullen we deze in in de betreffende bewegingsvergelijkingen (Miklowitz, 1978; Graff, 1975) dan resulteert dit in het volgende reële tweede-orde RVW-probleem<sup>3</sup> (bijlage A)

$$\begin{aligned} u''(x) + k_e^2 u(x) &= -\frac{q(x)}{E} = r(x) \\ u(0) &= 0 \\ u(l_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

met

$$k_e^2 = \frac{\rho\omega_e^2}{E} \quad (2.12)$$

Later wordt in het rapport demping aan dit systeem toegevoegd. Dit kan door het definiëren van een complexe elasticiteitsmodulus (Cremer *et al.*, 1988). Omdat bij de methode van Overdijk ook de differentiaalvergelijking behorende bij een massa-veer-demper systeem wordt beschreven<sup>4</sup>, is in dit rapport het probleem algemener gedefinieerd. Met behulp van deze algemene definitie is ook (2.11) te beschrijven. Het centrale probleem in dit hoofdstuk wordt het oplossen van het volgende complexe tweede-orde twee-punts RVW-probleem

$$\begin{aligned} u''(x) + au'(x) + bu(x) &= r(x) \quad \forall \quad 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

met  $u$  en de constanten  $a$  en  $b$  complexe grootheden. Met deze vergelijking kunnen diverse fysische systemen worden beschreven:

<sup>3</sup>Randvoorwaarde-probleem.

<sup>4</sup>De differentiaalvergelijking is hiervoor geschikt. De Dirichlet-RVW dienen echter nog te worden aangepast zodat een beginvoorwaarde probleem kan worden opgelost.

1.  $a = 0$ ,  $\text{Im}[b] = 0$  en  $\text{Re}[b] = k_c^2$  beschrijft een ongedempte longitudinale trilling in een axiaal harmonisch geëxciteerde, tweezijdig ingeklemde, homogene balk met uniforme dwarsdoorsnede. Dit is het probleem dat door Carcaterra (Carcaterra & Sestieri, 1994) wordt behandeld en (2.13) gaat dan ook over in (2.11).
2.  $\text{Re}[a] = d/m$ ,  $\text{Re}[b] = k_s/m$ ,  $\text{Im}[a] = \text{Im}[b] = 0$  beschrijft een massa-veer-demper systeem met  $d$  de dempingsconstante van een visceuze demper.
3.  $a = 0$ ,  $b = k_s/m + jh/m$ , beschrijft een massa-veer-demper systeem met  $h$  de dempingsconstante van een demper met hysteresis of structurele demping (de Kraker, 1992).
4.  $a = 0$  en  $b = k_c^2$ , waarin  $k_c$  het complexe golfgetal zoals gedefinieerd in bijlage A, beschrijft systeem 1 echter met demping.

In dit hoofdstuk wordt voortdurend gerefereerd aan zowel (2.13) als aan deze fysische systemen. De exacte oplossing van (2.13) wordt gepresenteerd in bijlage A.

De basis van het CEDA concept van Carcaterra is een transformatie van zowel een signaal als een differentiaalvergelijking. Deze transformatie wordt op een dusdanige wijze geformuleerd dat de nieuwe vergelijking numeriek aantrekkelijker is op te lossen.

Het eerste artikel over CEDA (Carcaterra & Sestieri, 1994) behandelt systeem 1, maar is niet erg duidelijk geformuleerd, met name de aanpak van de RVW van de getransformeerde complexe differentiaalvergelijking is onduidelijk. Daarom wordt in dit hoofdstuk eerst een andere methode behandeld. Deze methode van Overdijk is in staat om zowel de systemen 1 en 2 op te lossen en is meer gestructureerd opgezet. Ook verschaft deze methode een duidelijke inleiding in CEDA vanwege het feit dat de RVW op een eenvoudige manier toegepast worden. Na de werkwijze van Overdijk zal de methode van Carcaterra worden gepresenteerd.

Omdat we stochastisch gedrag in het systeem van probleem 1 willen aanbrengen, bijvoorbeeld omdat de positie van het excitatiepunt niet exact bekend is, is het noodzakelijk dat demping in het systeem wordt geïmplementeerd<sup>5</sup>. Dit kan door definitie van een complexe elasticiteitsmodulus, die resulteert in een complex golfgetal  $k_c$  (bijlage A). Hierdoor gaat systeem 1 over in systeem 4.

Indien we een complex golfgetal  $k_c$  introduceren, resulteert dit in een complexe oplossing  $u(x)$ . Echter voor het toepassen van CEDA dient de oplossing reëel te zijn (paragraaf 2.1). Hiervoor is de gedempte complex omhullende analyse (DCEDA) ontwikkeld. Het betreft hier een uitbreiding van de methode van Carcaterra. DCEDA kan alle mogelijke systemen die beschreven worden door (2.13) oplossen. De methode wordt behandeld in paragraaf 2.5.

## 2.3 Methode Overdijk

### 2.3.1 Theorie

De eerste opzet van deze methode door Overdijk is gebaseerd op systemen die beschreven kunnen worden met (2.13) waarbij alle parameters reëel zijn.

Omdat CEDA gebruikt maakt van signaaltransformaties, is het noodzakelijk om deze vergelijking te transformeren naar een vergelijking over het gehele  $x$ -domein. Hiertoe definiëren

<sup>5</sup>Indien men een parameter als een Gaussisch stochastische variabele definieert en vervolgens een ensemble-middeling gaat uitvoeren doorloopt men hierbij altijd alle resonantiefrequenties. Voor een ongedempt systeem resulteert dit in oneindig hoge opslingeringen waardoor de verwachting niet bepaald kan worden.

we het signaal  $g(x)$  als volgt

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \quad \forall \quad x \leq 0 \\ g(x) &= r(x) \quad \forall \quad 0 < x < 1 \\ g(x) &= 0 \quad \forall \quad x \geq 1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

en beschouwen we de volgende differentiaalvergelijking die geldig is op het gehele domein

$$u''(x) + au'(x) + bu(x) = g(x) \quad \forall \quad -\infty < x < \infty \tag{2.15}$$

De algemene oplossing van (2.15) kan geschreven worden als

$$\begin{aligned} p_1 \neq p_2 \quad \rightarrow \quad u(x) &= Ae^{p_1 x} + Be^{p_2 x} + \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(x - \tau) d\tau \\ p_1 = p_2 \quad \rightarrow \quad u(x) &= Ae^{p_1 x} + Bxe^{p_1 x} + \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(x - \tau) d\tau \end{aligned} \tag{2.16}$$

met  $h(\tau)$  de impulsresponsie en  $p_1$  en  $p_2$  de nulpunten (bijlage A) van het karakteristieke polynoom  $z^2 + az + b$ . De eerste twee termen in (2.16) noemen we de homogene oplossing. De convolutie-integraal wordt de stationaire oplossing genoemd. De oneindige integratiegrenzen in deze stationaire oplossing kunnen vervangen worden door de randen van het RVW-probleem,  $x = 0$  en  $x = 1$ . Dit wordt hier niet gedaan omdat we deze stationaire oplossing nog willen gaan transformeren, waarbij de functie  $g(\tau)$  overgaat in  $\hat{g}(\tau)$ , welke over het oneindige domein ongelijk aan nul is. Toepassen van de twee RVW (2.13) op (2.16) levert de oplossing van het RVW-probleem (2.13)

$$\begin{aligned} p_1 \neq p_2 \quad \rightarrow \quad u(x) &= -\frac{e^{p_1 x} - e^{p_2 x}}{e^{p_1} - e^{p_2}} \alpha_0 + \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(x - \tau) d\tau \\ p_1 = p_2 \quad \rightarrow \quad u(x) &= -xe^{-p_1(1-x)} \alpha_0 + \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(x - \tau) d\tau \end{aligned} \tag{2.17}$$

waarin de scalar  $\alpha_0$  gelijk is aan

$$\alpha_0 = \int_0^1 g(\tau)h(1 - \tau) d\tau \tag{2.18}$$

Het numeriek bepalen van deze oplossing is mogelijk door het afzonderlijk oplossen van de twee termen in (2.17). De eerste term in (2.17) wordt bepaald door een numerieke berekening van  $\alpha_0$  en noemen we in het vervolg de alfa-term. Het numeriek integreren van (2.15) met beginvoorwaarden  $u(0) = u'(0) = 0$  levert de convolutie-integraal, dus de stationaire term, van (2.17) voor  $0 \leq x \leq 1$ . Het optellen van deze twee oplossingen levert de uiteindelijke oplossing van het RVW-probleem. Belangrijk is het om in te zien dat de twee RVW verwerkt zijn in de alfa-term van (2.17) en dat de stationaire term van (2.17) onafhankelijk is van de RVW<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Uit de beginselen van de signaaltheorie (Cijsouw, 1992) is bekend dat de Fouriertransformatie van de oneindige convolutie-integraal het produkt van de frequentiespectra van  $G(\omega)$  en  $H(\omega)$  is. Door het beschouwen van frequentiespectra van signalen zijn dus geen inschakelverschijnselen te beschrijven. Voor het oplossen van een RVW-probleem dient een specifiek inschakelverschijnsel aan de stationaire oplossing toegevoegd te worden. Dit inschakelverschijnsel komt tot uitdrukking in de alfa-term van (2.17) en is dus afhankelijk van de twee RVW.

Bij het voorgaande is nog geen CEDA toegepast. Wanneer nu het golfgetalspectrum van  $u(x)$  geconcentreerd is rond het golfgetal  $k_0$  is het zinvol om CEDA toe te passen<sup>7</sup>. Definieren we

$$\bar{u}(x) = [u(x) + j\tilde{u}(x)]e^{-jk_0x} \quad (2.19)$$

dan is aan te tonen (bijlage B) dat de differentiaalvergelijking (2.15) is te transformeren naar

$$\bar{u}''(x) + (a + 2jk_0)\bar{u}'(x) + (b - k_0^2 + jak_0)\bar{u}(x) = \bar{g}(x) \quad (2.20)$$

Hierbij wordt gebruik gemaakt van het feit dat  $u(x)$  en  $g(x)$  zijn gedefinieerd over het gehele domein. Vervolgens stellen we de modulatiefrequentie  $k_0$ , die men vrij kan kiezen, gelijk aan het golfgetal  $k_e$ , wat een combinatie is van materiaaleigenschappen en excitatiefrequentie. Voor systeem 1 ( $a = 0$  en  $b = k_e^2$ ) gaat (2.20) met  $k_0 = k_e$  dan over in

$$\bar{u}''(x) + 2jk_0\bar{u}'(x) = \bar{g}(x) \quad (2.21)$$

Door numerieke integratie van (2.20) en toepassen van de inverse-transformatie (2.8) kan nu het stationaire deel van de oplossing van (2.17) worden bepaald. Bij deze numerieke integratie kan een grotere integratiestap gehanteerd worden, omdat de oplossing ten gevolge van de transformatie glad is. Essentieel bij deze aanpak is het feit dat de alfa-term in (2.17) numeriek bepaald moet worden op een conventionele manier. Bij het numeriek berekenen van de stationaire term van (2.17) zijn géén RVW nodig. Ook bij het berekenen van de stationaire oplossing van de getransformeerde differentiaalvergelijking (2.20) zijn géén RVW nodig.

Het bepalen van de stationaire oplossing van (2.20) kan door middel van een numerieke integratie van (2.20) die start in het punt  $x = -\infty$  met twee beginvoorwaarden  $\bar{u} = 0$  en  $\bar{u}' = 0$ . Willen we de integratie starten op  $x = 0$  in plaats van  $x = -\infty$  dan zullen andere beginvoorwaarden toegepast moeten worden. Deze worden bepaald met behulp van de impulsresponsie van (2.20). Na evaluatie van de nulpunten van het karakteristieke polynoom van (2.20) blijken deze gelijk aan de nulpunten van (2.15) vermeerderd met de constante term  $-jk_0$ . Hieruit volgt voor de impulsresponsie van (2.20)

$$\bar{h}(\tau) = e^{-jk_0\tau}h(\tau) \quad (2.22)$$

De stationaire oplossing van (2.20), en tevens de complex omhullende van de stationaire oplossing van (2.15), is nu te schrijven als

$$\bar{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(x - \tau)\bar{g}(\tau) d\tau = e^{-jk_0x} \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \tau)[g(\tau) + j\tilde{g}(\tau)] d\tau \quad (2.23)$$

Evaluatie van (2.23) op het punt  $0^+$  levert de beginvoorwaarden voor de numerieke integratie

$$\begin{aligned} \bar{u}(0^+) &= j \int_{-\infty}^{\infty} h(-\tau)\tilde{g}(\tau) d\tau \\ \bar{u}'(0^+) &= k_0 \int_{-\infty}^{\infty} h(-\tau)\tilde{g}(\tau) d\tau + j \int_{-\infty}^{\infty} h'(-\tau)\tilde{g}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.24)$$

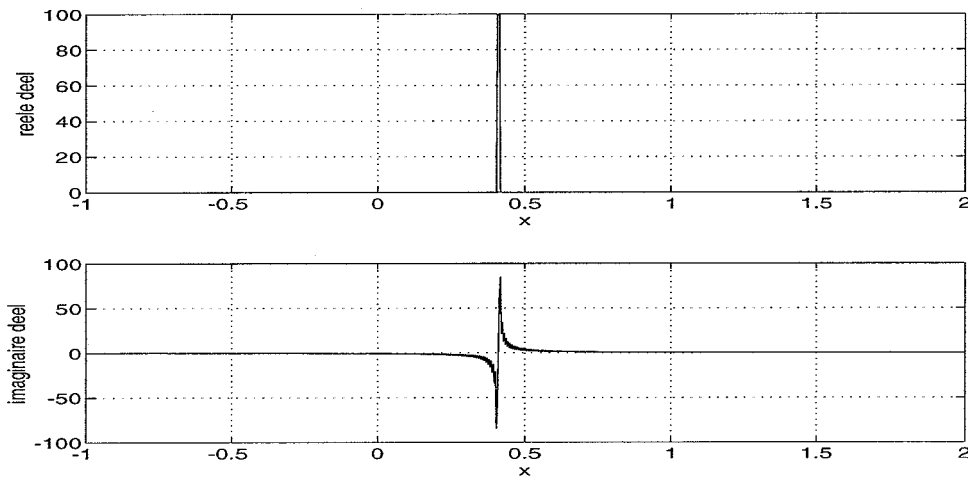
<sup>7</sup> $k_0$  is het golfgetal van een functie in het plaatsdomein en is analoog aan  $\omega_0$  voor een functie in het tijddomein.

Omdat de impulsresponsie  $h(-\tau)$  voor  $\tau > 0$  gelijk is aan nul, kan men de bovengrens vervangen door nul. De ondergrens dient echter oneindig te blijven. De numerieke integratie van deze uitdrukkingen vormt een beperking van deze methode. Dit punt wordt later nog behandeld in de evaluatie (paragraaf 2.3.3) en in bijlage D.

### 2.3.2 Uitvoering

Bovenstaande werkwijze is in een Matlab-programma geïmplementeerd. De werkwijze zal stapsgewijs worden toegelicht aan de hand van een voorbeeldberekening. Deze berekening is uitgevoerd voor het ongedempte systeem 1 met  $k_e^2 = \omega_e^2/c_0^2$ , waarin  $1/c_0^2 = \pi^2$  en  $\omega_e = 20.6$ . Als excitatie is een puntkracht in het punt  $l_e = 0.41$  aangebracht, waardoor geldt  $r(x) = \delta(x - 0.41)$ . Op deze wijze beschouwen we in feite de dimensieloze vergelijking uit bijlage A.4. De excitatiefrequentie ligt nu tussen de  $20^e$  en  $21^e$  eigenfrequentie van het systeem.

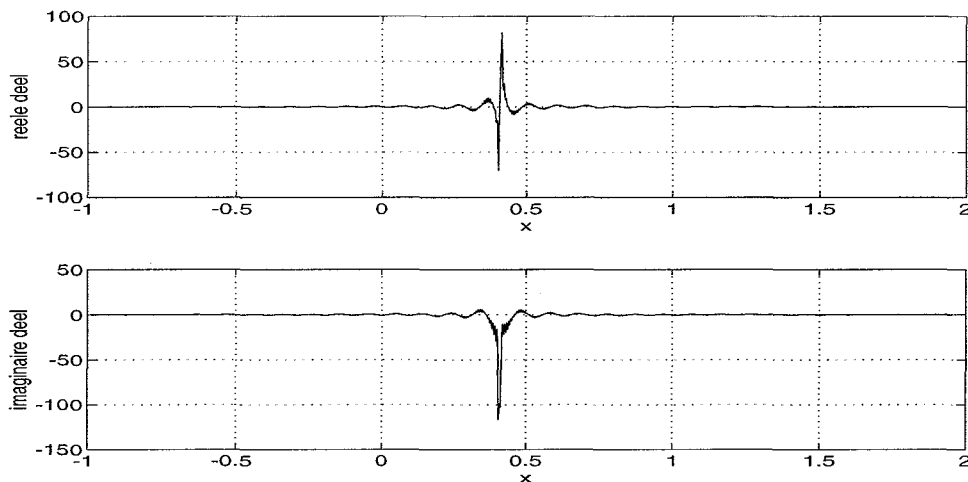
1. Bepalen van  $\alpha_0$  door middel van een numerieke evaluatie van (2.18) bij fijne discretisatie. Hiervoor is het dus noodzakelijk om de impulsresponsie van het systeem te kennen. Hier is deze impulsresponsie analytisch bepaald.
2. Bepalen van  $\bar{g}$  door middel van het uitvoeren van een numerieke Hilberttransformatie en een modulatie bij fijne discretisatie. In figuur 2.7 ziet men het reële deel (bovenste



Figuur 2.7: Analytische belasting  $\hat{g}(x) = g(x) + j\tilde{g}(x)$ .

grafiek) en het imaginaire deel (onderste grafiek) van de analytische belasting  $\hat{g}$ . Het reële deel is de oorspronkelijke puntexcitatie<sup>8</sup>  $g(x) = \delta(x - l_e)$ . Het imaginaire deel is de Hilberttransformatie van  $g(x)$  en is gelijk aan  $\tilde{g}(x) = \pi^{-1}(x - l_e)^{-1}$ . Ten behoeve van een betere Hilberttransformatie is het domein vergroot van 0 tot 1 naar  $-1$  tot 2. In figuur 2.8 zien we het reële deel (bovenste grafiek) en het imaginaire deel (onderste grafiek) van de complex omhullende van de excitatie  $\bar{g}(x)$ . Deze is gelijk aan de met  $e^{-jk_0x}$  vermenigvuldigde analytische belasting  $\hat{q}(x)$  uit figuur 2.7. Hierbij is de modulatiefrequentie  $k_0$  gelijk gekozen aan het golfgetal  $k_e$ .

<sup>8</sup>Deze puntexcitatie wordt in de numerieke uitvoering benaderd door een puls met een breedte  $dx$  en een hoogte  $1/dx$  zodat de zeefeigenschap bij benadering voldoet.

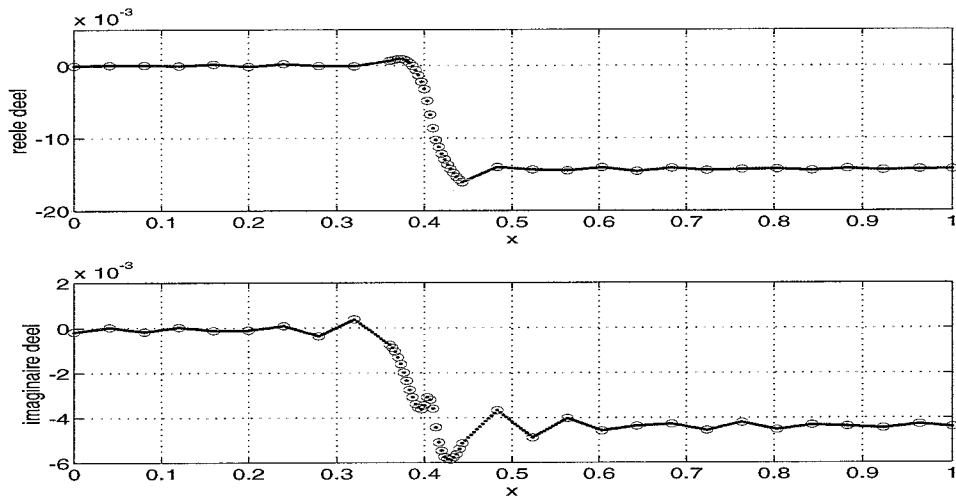


Figuur 2.8: CE-belasting  $\bar{g}(x) = \hat{g}(x)e^{-jk_0x}$ .

3. Numerieke evaluatie van de beginvoorwaarden (2.24) waarbij de integratie van  $-\infty$  tot  $\infty$  wordt vervangen door de grenzen  $-2$  respectievelijk  $0$ . Omdat de impulsresponsie  $h(-\tau)$  voor  $\tau > 0$  gelijk is aan nul, kan men de bovengrens vervangen door nul. De ondergrens is gekozen op basis van een visuele inspectie van  $\tilde{q}(x)$ . Op het punt  $x = -2$  is  $\tilde{q}(x)$  namelijk praktisch gelijk aan nul. Over het algemeen zal de nauwkeurigheid van het verkregen resultaat niet hoog zijn. In dit specifieke geval blijkt de uitkomst goed te voldoen (bijlage D).
4. Numerieke integratie van (2.21) met de in de vorige stap bepaalde beginvoorwaarden en met een variabele integratie stap, die afhankelijk is van de gladheid van  $\bar{g}(x)$  (bijlage C). In figuur 2.9 wordt deze integratie getoond door de grote punten. Essentieel aan deze methode is het feit dat de integratie niet met nul start. Dit is te zien aan het imaginaire deel. Ook is duidelijk het effect van de variabele integratiestap te zien. Rond het punt  $l_e = 0.41$  wordt de integratiestap automatisch verkleind.
5. Lineaire interpolatie van de verkregen omhullende van de stationaire oplossing. In figuur 2.9 is dit te zien aan de kleine zwarte stippen tussen de grotere discretisatiepunten.
6. Demodulatie van de verkregen complex omhullende van de stationaire oplossing met behulp van (2.8). In figuur 2.10 is de met  $e^{jk_0x}$  gedemoduleerde complex omhullende van de stationaire oplossing te zien. Het reële deel (bovenste grafiek) hiervan is de gezochte stationaire oplossing.
7. Optellen van de stationaire oplossing en de bijdrage van de alfa-term uit (2.17) levert de totale oplossing van het RVW-probleem. In figuur 2.11 wordt de totale oplossing  $u(x)$  gegenereerd door sommatie van de stationaire term en de alfa-term. De uiteindelijke oplossing van het RVW-probleem kan bepaald worden met behulp van (2.10)

$$w(x, t) = \text{Re}[u(x)e^{j\omega_e t}] \quad (2.25)$$





Figuur 2.9: CE van de stationaire oplossing voor en na de interpolatie. De numeriek gegeneerde oplossing is aangegeven door de grote punten. De tussenliggende zwarte stippen zijn geïnterpoleerde punten.

Een belangrijke eigenschap van de methode van Overdijk is de noodzakelijke variabele integratie stap. Het rechterlid van (2.20),  $\bar{g}(x)$  is bij een puntexcitatie namelijk

$$\bar{g}(x) = \delta(x - l_e)e^{-jk_0 l_e} + \frac{e^{-jk_0 x}}{\pi(x - l_e)}j \quad (2.26)$$

Deze uitdrukking kan met een redelijke nauwkeurigheid grof gediscetiseerd worden op een afstand van  $l_e$ , maar moet echter fijn gediscetiseerd worden in de nabijheid van  $l_e$ . Voor de numerieke integratie is de tweede-orde differentiaalvergelijking (2.20) getransformeerd naar een eerste-orde stelsel. Vervolgens is een achterwaarts differentieschema toegepast. Een voorwaarts differentieschema (formule van Euler) bleek minder goed te voldoen (van Steenhoven, 1984). Runge-Kutta schema's zijn niet direct toepasbaar vanwege de meerdere evaluaties van het rechterlid (Lapidus & Seinfeld, 1971). Het exacte algoritme voor de numerieke integratie van 2.20 is te vinden in bijlage C.

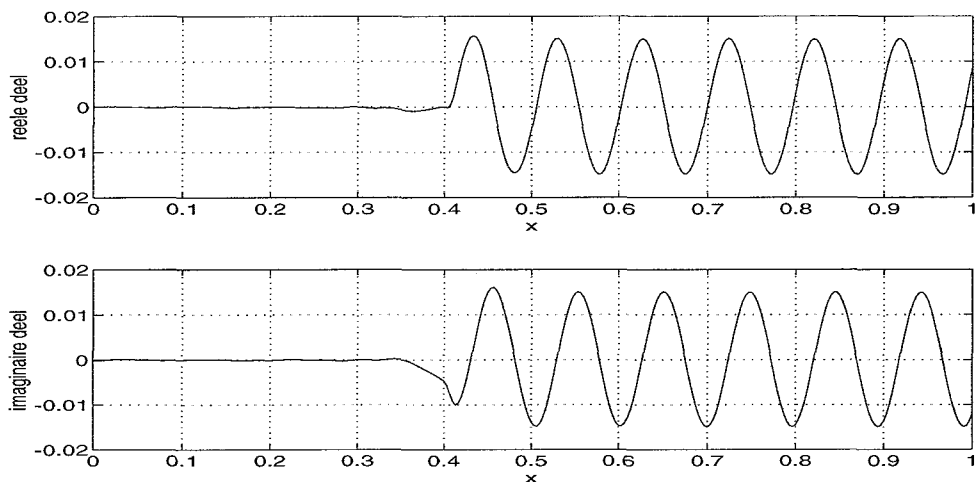
### 2.3.3 Evaluatie

De werkwijze van Overdijk is succesvol toegepast op systemen 1 en 2. In figuur 2.12 wordt de oplossing vergeleken met de analytische oplossing. In bijlage E wordt een vergelijking met de andere twee CEDA methoden, met FEM<sup>9</sup> en met een Fredholm integraal, oplossing gepresenteerd.

De methode bevat echter enkele nadelen. Het eerste nadeel is de noodzakelijke evaluatie van het getal  $\alpha_0$ . Deze moet fijn gediscetiseerd plaatsvinden vanwege het feit dat de impulsresponsie hoogfrequent is.

Het tweede nadeel vormt een aanzienlijke beperking bij deze aanpak. Het betreft hier de numerieke evaluatie van de beginvoorwaarden (2.24). Deze beginvoorwaarden zijn voor

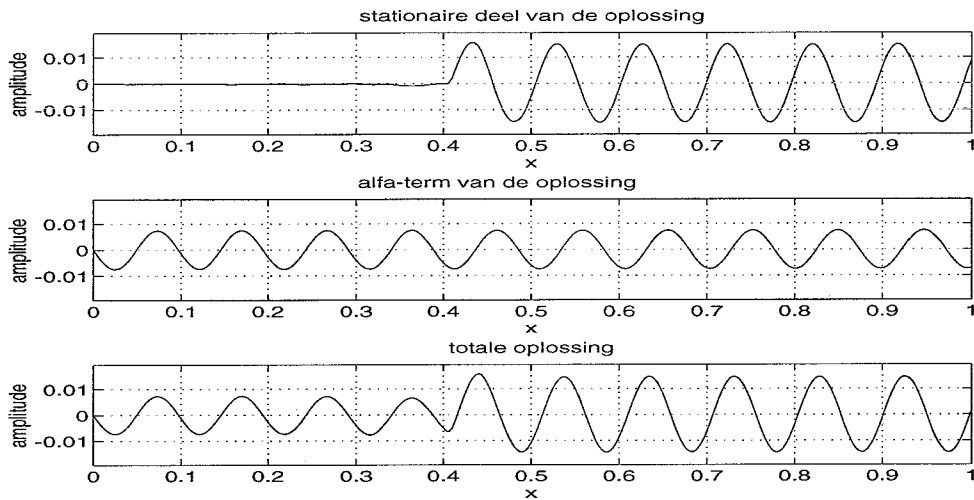
<sup>9</sup>'Finite element method', Eindige elementenmethode.



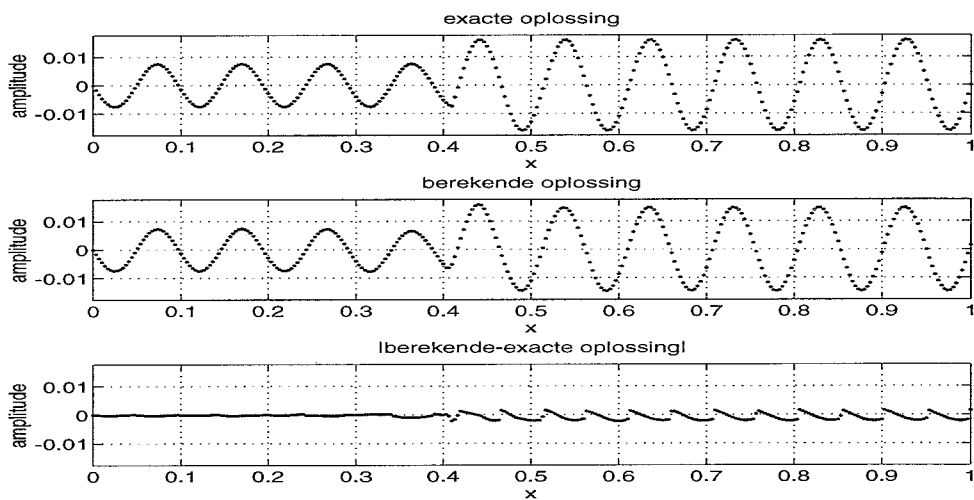
Figuur 2.10: Gedemoduleerde CE van de stationaire oplossing.

puntexcitatie te herleiden tot sinus en cosinus integralen (bijlage D) die nauwelijks numeriek te bepalen zijn (Abramowitz & Stegun, 1964).

Het derde nadeel is dat de impulsresponsie bekend moet zijn. Deze impulsresponsie is nodig om zowel het getal  $\alpha_0$  als de twee beginvoorwaarden te berekenen. Het bepalen van de impulsresponsie kan analytisch en numeriek. Voor de in dit rapport gebruikte modelproblemen is de impulsresponsie eenvoudig analytisch te bepalen. Voor meer complexere problemen is dit misschien niet altijd mogelijk.



Figuur 2.11: Stationaire oplossing, alfa-term bijdrage en totale oplossing  $u(x)$ .



Figuur 2.12: Analytische oplossing, oplossing van Overdijk en de absolute fout in oplossing van Overdijk. Opvallend is dat de fout voor  $x < l_e$  praktisch nul is. Dit is het gevolg van het opsplitsen van de totale oplossing in twee componenten. Voor  $x < l_e$  is de nauwkeurig berekende alfa-term bepalend voor de oplossing (figuur 2.11).

## 2.4 Methode Carcaterra

### 2.4.1 Theorie

Het behandelde probleem in (Carcattera & Sestieri, 1994) is dat van een ongedempte longitudinale trilling in een harmonisch geëxciteerde homogene balk met een uniforme dwarsdoorsnede. Dit systeem wordt beschreven door (2.11). Stellen we de lengte  $l_0 = 1$  dan is dit probleem gelijk aan (2.13) met de parameters van systeem 1. Bij de verdere behandeling zal daarom systeem 1 gehanteerd worden. Het RVW-probleem wordt dan

$$\begin{aligned} u''(x) + k_e^2 u(x) &= r(x) \\ u(0) &= 0 \\ u(l_0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Ter bepaling van de corresponderende differentiaalvergelijking voor  $\bar{u}(x)$  hanteert Carcaterra een aanpak in het plaatsdomein. Dit in tegenstelling tot Overdijk, die de differentiaalvergelijking eerst transformeert naar het golfgetaldomein. Hiertoe wordt aangetoond (Carcattera & Sestieri, 1994) dat elke één-dimensionale lineaire differentiaaloperator  $\mathcal{L}$  commutatief is met de Hilberttransformatie  $\mathcal{H}$ .

Indien men (2.27) nu Hilbert-transformeert<sup>10</sup>, dan volgt na toepassing van de commutatieve eigenschap een vergelijking in termen van de Hilbert-getransformeerde van  $u(x)$  en  $r(x)$ .

$$\tilde{u}''(x) + k_e^2 \tilde{u}(x) = \tilde{r}(x) \tag{2.28}$$

Door optelling van (2.27) en de met  $j$  vermenigvuldigde differentiaalvergelijking (2.28) is een differentiaalvergelijking af te leiden voor het analytisch signaal  $\hat{u}(x)$ .

$$\hat{u}''(x) + k_e^2 \hat{u}(x) = \hat{r}(x) \tag{2.29}$$

Substitutie van  $\hat{u}(x) = \bar{u}(x)e^{jk_0x}$  in de laatste vergelijking levert

$$\bar{u}''(x)e^{jk_0x} + 2jk_0\bar{u}'(x)e^{jk_0x} - k_0^2\bar{u}(x)e^{jk_0x} + k_e^2\bar{u}(x)e^{jk_0x} = \hat{r}(x) \tag{2.30}$$

Indien de modulatiefrequentie gelijk wordt gekozen aan het golfgetal, dus  $k_0 = k_e$ , dan vallen de laatste twee termen in het linkerlid tegen elkaar weg, zodat (2.30) na vermenigvuldiging met  $e^{-jk_0x}$  overgaat in

$$\bar{u}''(x) + 2jk_e\bar{u}'(x) = \bar{r}(x) \tag{2.31}$$

Opvallend is, dat de nulde-orde term in het linkerlid wegvalt. Van het wegvallen van deze nulde-orde term wordt in de methode van Carcaterra gebruik gemaakt door het integreren van de vergelijking. Dit vormt dan ook een beperking voor deze methode, omdat de nulde-orde term niet altijd wegvalt. Dit zal later worden aangetoond. Integreren van (2.31) van 0 tot  $x$  in de plaatsvariabele levert

$$\bar{u}'(x) + 2jk_e\bar{u}(x) = \int_0^x \bar{r}(\xi) d\xi + \bar{u}'(0) + 2jk_e\bar{u}(0) = \bar{\phi}(x) + \bar{u}'(0) + 2jk_e\bar{u}(0) \tag{2.32}$$

Vervolgens bepaalt Carcaterra een particuliere oplossing van (2.32) door middel van numerieke integratie met in het rechterlid alleen de term  $\bar{\phi}(x)$ . De numerieke integratie wordt gestart

<sup>10</sup>De transformatie naar het oneindige domein, die formeel noodzakelijk is, wordt hier achterwege gelaten.

met de complexe beginvoorwaarde gelijk aan nul. De verkregen numerieke oplossing  $\bar{\psi}(x)$  bevat, afgezien van een constante, de oplossing van het RVW-probleem. Door het toepassen van de twee reële RVW op de complex omhullende van de totale oplossing  $\bar{u} = \bar{\psi}(x) + c$  is de constante  $c$  te bepalen

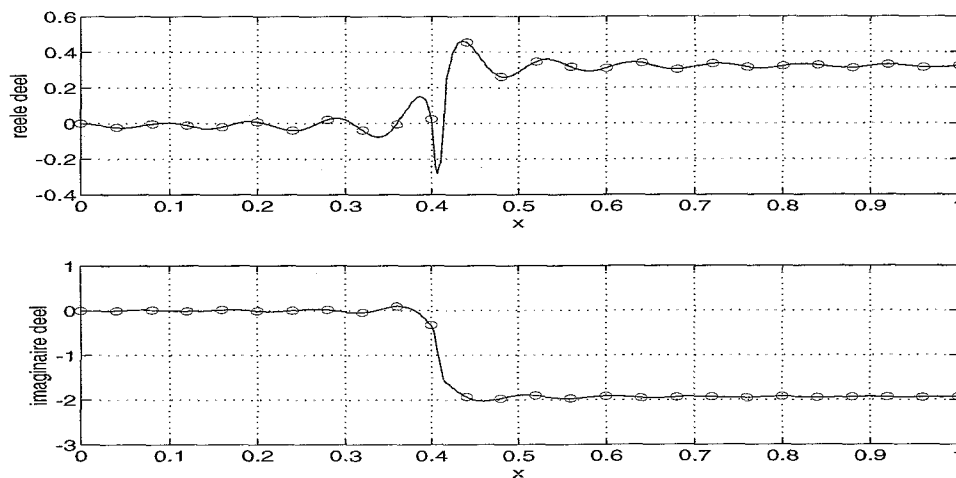
$$\begin{aligned} u(0) = 0 &\rightarrow \operatorname{Re}[\bar{u}(0)e^{jk_e 0}] = 0 \rightarrow \operatorname{Re}[\bar{\psi}(0) + c] = 0 \\ u(l_0) = 0 &\rightarrow \operatorname{Re}[\bar{u}(l_0)e^{jk_e l_0}] = 0 \rightarrow \operatorname{Re}[(\bar{\psi}(l_0) + c)e^{jk_e l_0}] = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Met behulp van inverse-transformatie (2.8) is vervolgens de oplossing  $u(x)$  te bepalen.

## 2.4.2 Uitvoering

Bovenstaande werkwijze is een Matlab-programma geïmplementeerd. De werkwijze is daarbij als volgt:

1. Numerieke berekening van de complex omhullende van de belasting bij fijne discretisatie, zie figuur 2.7 en 2.8.
2. Integratie van de complex omhullende  $\bar{r}$  van de belasting uit figuur 2.8 bij fijne discreti-

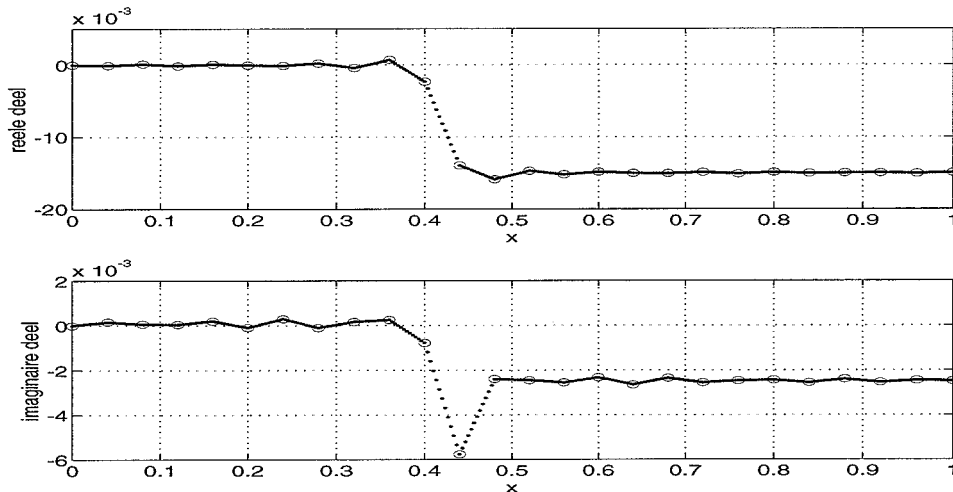


Figuur 2.13: Geïntegreerde CE-belasting  $\bar{\phi}(x)$  voor en na het ‘point skipping’ proces. De zwarte lijn is de oorspronkelijke fijn gediscetiseerde CE-belasting. De grote punten zijn het resultaat van het ‘point skipping’ proces. Opvallend is het gladde karakter van het rechterlid na de integratie, vergeleken met het rechterlid voor de integratie (figuur 2.8). Hierdoor kan Carcaterra gebruik maken van een constante grove integratiestap.

satie<sup>11</sup>. In figuur 2.13 is het resultaat van deze integratie te zien. Deze integratie levert de term  $\bar{\phi}(x)$  in het rechterlid van (2.32).

<sup>11</sup>Deze integratie wordt uitgevoerd omdat op deze wijze het rechterlid uit (2.31) een glad karakter krijgt. De integratie kan zonder problemen uitgevoerd worden omdat de nulde-orde term in het linkerlid van (2.31) is weggevallen.

- Decimeren<sup>12</sup> van het rechterlid  $\bar{\phi}(x)$ . In figuur 2.13 wordt dit proces aangegeven door de grote punten. Deze grote punten vormen dus de nieuwe grove discretisatie.
- Numerieke integratie van (2.32) met een beginvoorwaarde gelijk aan nul, met een constante grove discretisatie (hier komen we in paragraaf 2.5 nog op terug). In fi-

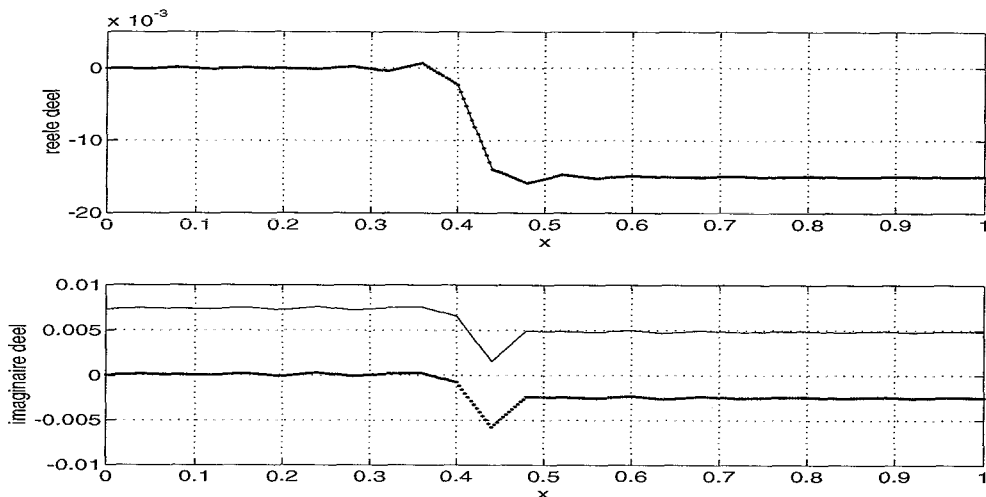


Figuur 2.14: CE-oplossing  $\bar{\psi}(x)$  voor en na de interpolatie. De numeriek gegenereerde oplossing is aangegeven door de grote punten. De tussenliggende zwarte stippen zijn geïnterpoleerde punten.

guur 2.14 staat het resultaat van de numerieke integratie van (2.32) met in het rechterlid  $\bar{\phi}(x)$  uit figuur 2.13. Het resultaat  $\bar{\psi}(x)$  van deze berekening is aangegeven door de grote punten. Opgemerkt wordt, dat er door de complexe coëfficiënt  $2jk_e$  in het homogene deel van (2.32) een koppeling tussen het reële en imaginaire deel plaatsvindt. Dit is de oorzaak van de ‘ongewone’ oplossingen in figuur 2.14. Men zou in figuur 2.14 immers een benadering van een stapresponsie (het rechterlid  $\bar{\phi}(x)$  uit figuur 2.13 lijkt op een stapfunctie) van een eerste-orde systeem verwachten.

- Interpolatie van de grof gediscetiseerde oplossing naar een fijner grid. Dit zijn de kleine punten in figuur 2.14.
- Toepassen van de twee reële RVW (2.33) op  $\bar{u}(x) = \bar{\psi}(x) + c$ . Dit resulteert in het toevoegen van een complexe constante (hier komen we in paragraaf 2.5 nog op terug). In figuur 2.15 is het resultaat voor en na de toepassing van de RVW te zien. De dikkere lijn is het resultaat van de numerieke integratie van de vorige stap en is gelijk aan de oplossing  $\bar{\psi}(x)$  in figuur 2.14. Het toepassen van de RVW levert het getal  $c$  in de relatie  $\bar{u}(x) = \bar{\psi}(x) + c$ . Het toepassen van de eerste RVW uit (2.33) resulteert in  $\text{Re}[c] = 0$  en heeft dus geen effect op  $\bar{u}(x)$ . Het toepassen van de tweede RVW uit (2.33) resulteert in een waarde ongelijk aan nul voor het imaginaire deel van  $c$ . Het gevolg is dat de uiteindelijke complex omhullende  $\bar{u}(x)$  van de oplossing gelijk is aan  $\bar{\psi}(x)$ , verhoogd met de imaginaire constante  $c$ . Deze verhoging is te zien in figuur 2.15. Ook is via de

<sup>12</sup>Deze overgang van een fijn naar een grof discretisatieschema wordt door Carcaterra ‘point skipping’ genoemd. Hierbij worden één of meerdere discretisatiepunten overgeslagen.



Figuur 2.15: CE van de oplossing voor en na toepassing van de RVW. De dikke lijn is de CE-oplossing voor toepassing van de RVW. De dunne lijn is het resultaat van het toepassen van de RVW. Het reële deel van  $\bar{\psi}(x)$  blijft in dit geval dus onveranderd.

inverse-transformatie (2.8) eenvoudig in te zien dat het reële deel van  $\bar{u}(0)$  gelijk moet zijn aan nul om ervoor te zorgen dat  $u(0) = 0$ . Hierdoor wordt het reële deel vastgelegd. Met het imaginaire deel van  $\bar{u}(x)$  kan vervolgens aan de tweede RVW worden voldaan.

7. Bepalen van de oplossing van het RVW-probleem. Deze oplossing kan worden verkregen door het toepassen van de inverse-transformatie (2.8). De oplossing is te zien in figuur 2.16.

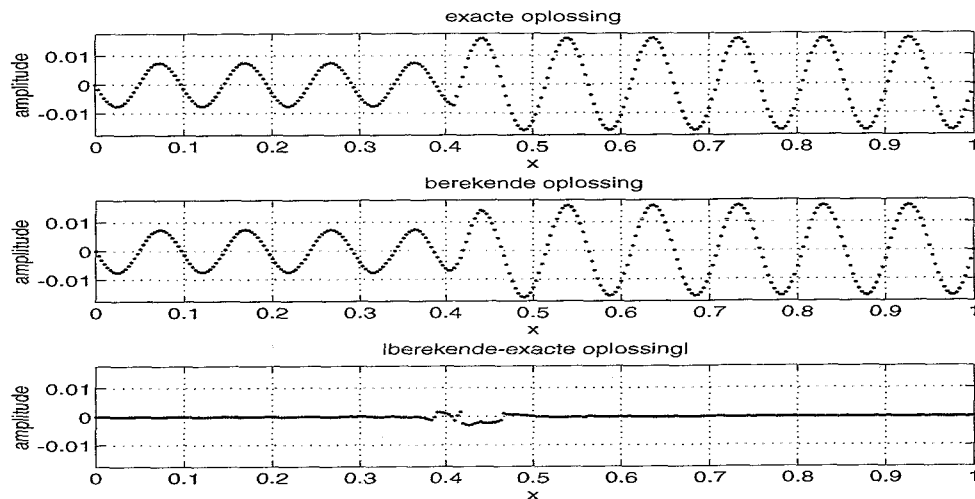
### 2.4.3 Evaluatie

De werkwijze van Carcaterra is succesvol toegepast op ongedempte longitudinale golfproblemen van de vorm (2.27). In bijlage E wordt een vergelijking met de andere twee CEDA methoden, met FEM en met een Fredholm integraal oplossing, gepresenteerd. De gegenereerde oplossingen zijn over het algemeen beter dan die van Overdijk, vergelijk hiertoe figuur 2.12 met figuur 2.16. Dit is het gevolg van de onnauwkeurige integratie van de beginvoorwaarden bij de methode van Overdijk. In de omgeving van de puntexcitatie vind men bij de methode van Carcaterra vaak grotere afwijkingen omdat Carcaterra geen gridverfijningen toepast, maar overal een grove discretisatie hanteert. In bijlage E staat een vergelijking met FEM en een Fredholm integraal oplossing.

De methode van Carcaterra heeft twee nadelen. Beide nadelen hebben te maken met de integratie van het rechterlid van (2.31). Het eerste nadeel is de rekestijd die nodig is voor de numerieke integratie van het rechterlid bij fijne discretisatie.

Het tweede nadeel is, dat de integratiestap alleen in dit specifieke geval uitgevoerd kan worden, omdat bij de differentiaaltransformatie de nulde-orde term wegvalt. Deze nulde-orde term valt in het algemene geval niet weg<sup>13</sup>. Bij het beschouwen van een gedempte

<sup>13</sup>Bij transformatie van de vierde orde differentiaalvergelijking die een ongedempte buiggolf in een balk beschrijft (Miklowitz, 1978; Graff, 1975) valt de nulde-orde term toevallig ook weg.



Figuur 2.16: Analytische oplossing, oplossing van Carcaterra, en de absolute fout in oplossing van Carcaterra.

longitudinale trilling valt de nulde-orde term niet weg. De methode van Carcaterra kan dit probleem daarom niet oplossen. De in dit rapport ontwikkelde gedempte complex omhullende analyse (DCEDA) heeft de integratiestap van Carcaterra niet meer nodig om een oplossing te bepalen.

## 2.5 Gedempte Complex Omhullende Analyse

Uit het voorgaande is gebleken dat zowel de methode van Overdijk als die van Carcaterra in principe voldoen. De methode van Overdijk is echter numeriek niet aantrekkelijk vanwege de noodzakelijke berekening van de beginvoorwaarden. De methode van Carcaterra blijkt niet meer te voldoen indien we demping introduceren (systeem 2, 3 of 4).

In de volgende paragrafen wordt aangetoond hoe dit probleem is opgelost. Er wordt een fictief systeem behandeld, waarmee de systemen 1, 2 en 4 beschreven kunnen worden. Een afleiding waarmee ook systeem 3 is te analyseren is eenvoudig uit te voeren. Dit is hier achterwege gelaten vanwege het feit dat we met name geïnteresseerd zijn in systeem 4, het gedempte longitudinale trillingsprobleem.

### 2.5.1 Theorie

#### Introductie van demping in de differentiaalvergelijkingen

Introductie van demping resulteert in een complexe differentiaalvergelijking (bijlage A). We gaan hier uit van de volgende complexe differentiaalvergelijking

$$u''(x) + 2\gamma u'(x) + k_c^2 u(x) = r(x) \quad \forall \quad 0 < x < 1 \quad (2.34)$$

Met deze vergelijking is het mogelijk om de systemen 1, 2 en 4 te beschrijven. De relatie tussen (2.34) en (2.13) is

$$a = 2\gamma \in \mathcal{R} \quad (2.35)$$



$$b = k_c^2$$

Omdat binnen het CEDA concept alleen reële signalen toelaatbaar zijn, dienen we (2.34) te ontkoppelen in de reële ( $u_r$ ) en imaginaire ( $u_i$ ) componenten van de complexe oplossing  $u$ . Dit resulteert in een stelsel van twee reële gekoppelde tweede-orde differentiaalvergelijkingen

$$\begin{bmatrix} u_r'' \\ u_i'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\gamma & 0 \\ 0 & 2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r' \\ u_i' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_r & -\kappa_i \\ \kappa_i & \kappa_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

met

$$\begin{aligned} \kappa_r &= \text{Re}[b] = \text{Re}[k_c^2] \\ \kappa_i &= \text{Im}[b] = \text{Im}[k_c^2] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Vanwege de commutatieve eigenschap van de Hilberttransformatie en de lineaire operator geldt dit stelsel ook voor de bijbehorende analytische vector  $\hat{u}$ . Substitueren we voor deze analytische vector de met  $e^{jk_0x}$  gemoduleerde CE-vector  $\bar{u}$  en vermenigvuldigen we vervolgens de uitkomst met  $e^{-jk_0x}$  dan levert dit<sup>14</sup>

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_r'' \\ \bar{u}_i'' \end{bmatrix} + 2(\gamma + jk_0) \begin{bmatrix} \bar{u}_r' \\ \bar{u}_i' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_r - k_0^2 + 2\gamma k_0j & -\kappa_i \\ \kappa_i & \kappa_r - k_0^2 + 2\gamma k_0j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Bij het ongedempte probleem van Carcaterra valt hier de nulde-orde term weg omdat daar geldt  $\kappa_i = \gamma = 0$  en  $\kappa_r = k_0^2$  waardoor (2.38) over in (2.31). In dit meer algemene geval valt de nulde-orde term echter niet weg, waardoor de integratie stap van Carcaterra, en daarmee de gehele methode van Carcaterra, niet meer toepasbaar is. Voor numerieke integratie is (2.38) getransformeerd naar het volgende eerste-orde stelsel

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_r' \\ \bar{u}_i' \\ \bar{u}_r'' \\ \bar{u}_i'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_0^2 - \kappa_r - 2\gamma k_0j & \kappa_i & -2(\gamma + jk_0) & 0 \\ -\kappa_i & k_0^2 - \kappa_r - 2\gamma k_0j & 0 & -2(\gamma + jk_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_r' \\ \bar{u}_i' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{r} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

### Algemene behandeling van de RVW en beginwaarden van de numerieke integratie voor het ongedempte systeem

Een belangrijk punt is de toepassing van de RVW. Deze kunnen bij de methode van Carcaterra direct toegepast worden. De methode van Carcaterra is echter alleen toepasbaar indien het mogelijk is om de tweede-orde differentiaalvergelijking te integreren zodat een eerste-orde differentiaalvergelijking ontstaat. Dit is echter alleen mogelijk indien de nulde-orde term wegvalt (paragraaf 2.4).

In dit rapport is daarom een algemene behandeling van de RVW afgeleid die in staat is om alle systemen, dus ook de gedempte waar de integratiestap van Carcaterra niet mogelijk

<sup>14</sup>Dit resultaat had men ook kunnen verkrijgen door te transformeren naar het golfgetaldomein zoals in bijlage B gebeurt.

is, op te lossen. Ook het bepalen van de beginvoorwaarden voor de integratie, zoals bij de methode van Overdijk, is niet meer nodig.

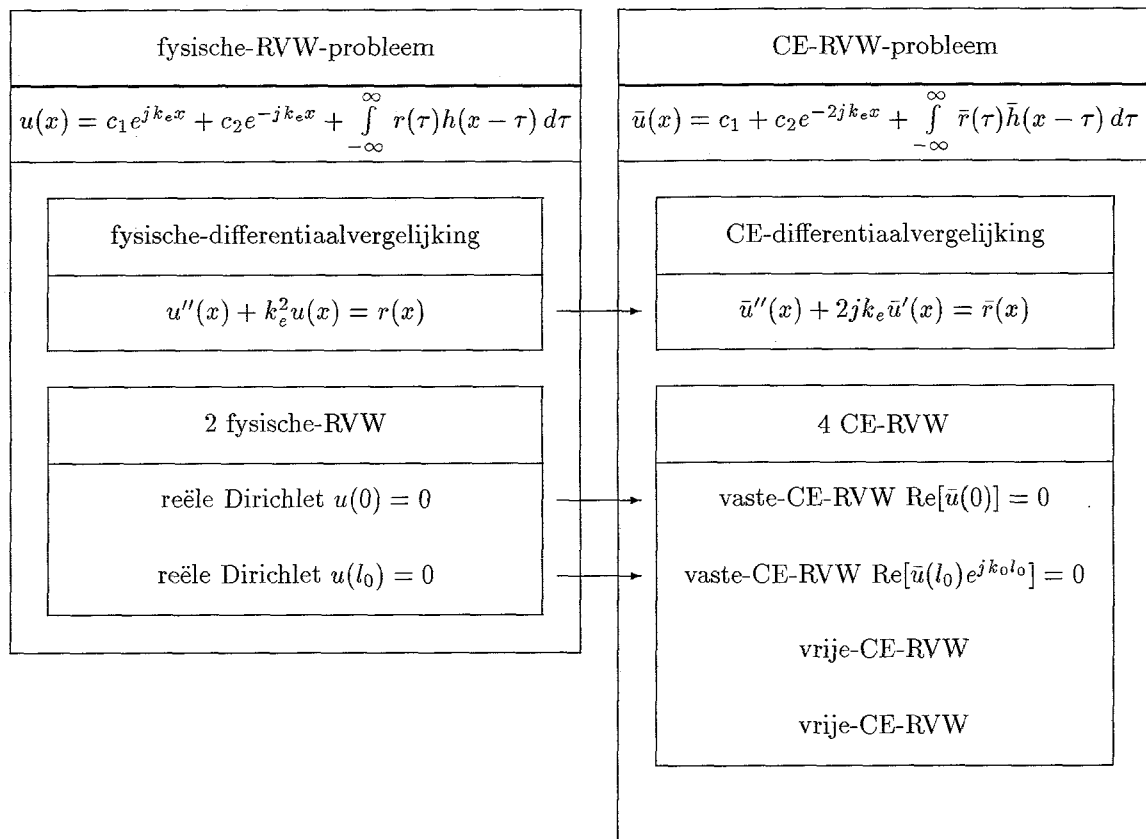
Dit bespreken we aan de hand van het ongedempte systeem 1. We vergelijken hiertoe het oorspronkelijke RVW-probleem (2.27)

$$\begin{aligned} u''(x) + k_e^2 u(x) &= r(x) \\ u(0) &= 0 \\ u(l_0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

met het CEDA equivalent (2.31)

$$\begin{aligned} \bar{u}''(x) + 2jk_e \bar{u}'(x) &= \bar{r}(x) \quad \forall \quad -\infty < x < \infty \\ \bar{u}(0) &= 0 \\ \bar{u}(l_0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Het is zinvol om vervolgens een duidelijke naamgeving voor deze vergelijkingen en hun RVW te kiezen. RVW-probleem (2.40) noemen we het fysische-RVW-probleem. Het getransformeerde RVW-probleem (2.41) noemen we het CE-RVW-probleem (figuur 2.17). Het fysische-



Figuur 2.17: Naamgeving in DCEDA.

RVW-probleem heeft twee reële RVW die de fysische-RVW worden genoemd. Met deze twee RVW is de oplossing van dit probleem eenduidig. Het is belangrijk om in te zien dan het

tweede probleem, beschreven met (2.41), géén eenduidige oplossing bezit<sup>15</sup>. Het bezit via de inverse-transformatie (2.8) immers maar twee reële RVW, die we de vaste-CE-RVW noemen (figuur 2.17), terwijl de complexe tweede-orde differentiaalvergelijking (2.41), de CE-differentiaalvergelijking, vier reële RVW nodig heeft. Het ontstaan van deze vrijheidsgraad is het directe gevolg van de Hilberttransformatie van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking (2.40) zonder dat RVW aan het probleem worden toegevoegd.

Overdijk lost dit op door de totale oplossing van (2.41) te splitsen in een alfa-term en een stationair deel. In de alfa-term zijn de twee fysische-RVW verwerkt op een conventionele wijze. Het stationaire deel is onafhankelijk van de randvoorwaarden en juist dit deel wordt vervolgens opgelost via een CEDA techniek. Hierbij wordt verondersteld dat het oorspronkelijke en het getransformeerde systeem zich causaal gedraagt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u_{stationair}(x) = 0 \quad (2.42)$$

en

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{u}_{stationair}(x) = 0 \quad (2.43)$$

Vervolgens gebruikt men CEDA om de stationaire oplossing te bepalen. Hierbij bepaalt men de twee beginvoorwaarden voor de integratie door het berekenen van de convolutie-integraal behorende bij de CE-differentiaalvergelijking op  $x = 0$  met een fijne discretisatie.

In het geval van Carcaterra wordt (2.41) eerst geïntegreerd tot een eerste-orde vergelijking (2.32), welke maar één complexe constante nodig heeft om de totale oplossing vast te leggen. De twee reële RVW worden gebruikt om deze complexe constante te bepalen.

Aan beide methoden zijn enkele nadelen verbonden. De methode van Carcaterra is niet algemeen toepasbaar, omdat in het algemene geval de integratiestap naar een eerste-orde vergelijking niet mogelijk is. Voor de methode van Overdijk is de integratiestap niet noodzakelijk. De gevolgde aanpak vereist echter een problematische numerieke berekening van de beginwaarden van de integratie. Bovendien is een uitdrukking voor de impulsresponsie noodzakelijk.

Daarom is in dit rapport een nieuwe, meer algemene interpretatie gegeven van de behandeling van de RVW. Deze interpretatie zal eerst worden gegeven aan de hand van het probleem uit (Carcattera & Sestieri, 1994), dus systeem 1.

De basis van deze methode is het feit dat de oplossing van (2.41) met de twee reële vaste-CE-RVW twee vrijheidsgraden bezit. Deze vrijheidsgraden, de vrije-CE-RVW, zijn in principe willekeurig te kiezen. Elke numerieke integratie van (2.41) met vier willekeurige reële beginvoorwaarden levert een particuliere oplossing  $\bar{u}_p(x)$  van het probleem. Door nu de twee complexe constanten in de homogene oplossing van (2.41) juist te kiezen, kan men een totale oplossing verkrijgen, die, na toepassing van de inverse-transformatie (2.8), voldoet aan de oorspronkelijke twee reële RVW. Omdat men vier reële constanten heeft en maar twee RVW, heeft men twee vrijheidsgraden over. Er zijn dus meerdere goede oplossingen  $\bar{u}(x)$  voor het RVW-probleem (2.40).

Door het gelijkstellen aan nul van de twee complexe beginvoorwaarden van de numerieke integratie van (2.41) mijdt men de over het algemeen hoogfrequente, homogene oplossingen in  $\bar{u}_p(x)$ . De met deze beginvoorwaarden verkregen particuliere oplossing noemen we  $\bar{\psi}(x)$ .

<sup>15</sup>Dit kan ook ingezien worden door bij  $u(x) = \cos(k_0x)$  de bijbehorende CE,  $\bar{u}(x)$ , te bepalen. Indien we hiertoe gebruik maken van (2.8) dan is eenvoudig in te zien dat zowel  $\bar{u}(x) = 1$ ,  $\bar{u}(x) = \cos(k_0x)e^{-jk_0x}$  en  $\bar{u}(x) = e^{-2jk_0x}$  voldoen.

Door een specifieke keuze van de twee vrij te kiezen vrijheidsgraden is de homogene bijdrage aan  $\bar{u}(x)$  een complexe constante. Deze constante wordt bepaald door middel van evaluatie van de twee reële vaste-CE-RVW.

Ter verduidelijking van deze behandeling van de RVW wordt hieronder een meer wiskundige beschrijving gegeven. Uitgaande van (2.41) zal aangetoond worden hoe men de twee vrijheidsgraden in de oplossing van (2.41) dusdanig kan kiezen, dat een numeriek efficiënte oplossing resulteert.

De algemene oplossing van (2.41) bestaat uit een homogeen deel en een particuliere oplossing.

$$\bar{u}_a(x) = \bar{u}_h(x) + \bar{u}_p(x) \quad (2.44)$$

Voor het homogene deel geldt hier

$$\bar{u}_h(x) = c_1 + c_2 e^{-2jk_e x} \quad (2.45)$$

Vervolgens definiëren we nu een specifieke particuliere oplossing

$$\bar{\psi}(x) = \int_0^{l_0} \bar{h}(x - \tau) \bar{r}(\tau) d\tau \quad \forall \quad 0 < x < l_0 \quad (2.46)$$

met impulsresponsie

$$\bar{h}(x) = -\frac{1}{2jk_e} (e^{-2jk_e x} - 1) \quad (2.47)$$

Omdat we het geldigheidsgebied van deze particuliere oplossing beperken tot  $0 < x < l_0$  is het niet noodzakelijk om de grenzen op oneindig te stellen. Omdat de impulsresponsie  $\bar{h}(x)$  en  $\bar{h}'(x)$  geen distributies bezitten is eenvoudig in te zien dat

$$\bar{\psi}(0) = \bar{\psi}'(0) = 0 \quad (2.48)$$

Indien we (2.41) direct gaan integreren, dan krijgt men altijd een particuliere oplossing. Of deze oplossing aan de RVW voldoet, is afhankelijk van de twee complexe beginvoorwaarden van de integratie. Beginnen we de numerieke integratie met de twee complexe beginvoorwaarden gelijk aan nul, dan verkrijgen we de specifieke particuliere oplossing die we  $\bar{\psi}(x)$  genoemd hebben. Deze oplossing voldoet over het algemeen niet aan het RVW-probleem.

Integreren we echter met de beginwaarden  $\bar{u}_0$  en  $\bar{u}'_0$  dan verkrijgen we de volgende numerieke oplossing

$$\bar{u}_p(x) = \bar{\psi}(x) + \frac{j}{2k_e} \bar{u}'_0 e^{-2jk_e x} + \bar{u}_0 - \frac{j}{2k} \bar{u}'_0 \quad (2.49)$$

De laatste drie termen uit deze oplossing zijn te interpreteren als een inschakelverschijnsel<sup>16</sup> vanuit het punt  $\bar{u}_0$ ,  $\bar{u}'_0$ . Deze oplossing is ook een particuliere oplossing en voldoet in het algemeen niet aan de RVW en is derhalve ook geen oplossing van het fysische-RVW-probleem. Uit (2.49) is direct te zien dat voor een efficiënte numerieke integratie de beginwaarde  $\bar{u}'_0$  op nul gesteld moet worden. Het op nul stellen is te interpreteren als het efficiënt kiezen van de

<sup>16</sup>Denk hierbij bijvoorbeeld aan een vrije trilling van een massa-veer-demper systeem dat is losgelaten in een bepaald punt met een bepaalde snelheid.

twee vrije-CE-RVW. Op deze wijze wordt een hoogfrequente term uit de oplossing gemedend. De numerieke oplossing wordt dan

$$\bar{u}_p(x) = \bar{\psi}(x) + \bar{u}_0 \quad (2.50)$$

Bepalen we nu door numerieke integratie met beginwaarden nul de particuliere oplossing  $\bar{\psi}(x)$ , dan kan door toepassing van de fysische-RVW de constante  $\bar{u}_0$  worden bepaald. Toepassen van de twee fysische-RVW  $u(0) = u(l_0) = 0$  op (2.50) met behulp van (2.8) levert

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Re}[\bar{\psi}(0)] + \operatorname{Re}[\bar{u}_0] \\ 0 &= (\operatorname{Re}[\bar{\psi}(l_0)] + \operatorname{Re}[\bar{u}_0]) \cos(k_e l_0) - (\operatorname{Im}[\bar{\psi}(l_0)] + \operatorname{Im}[\bar{u}_0]) \sin(k_e l_0) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Toepassen van (2.48) levert

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Re}[\bar{u}_0] \\ 0 &= \operatorname{Re}[\bar{\psi}(l_0)] \cos(k_e l_0) - (\operatorname{Im}[\bar{\psi}(l_0)] + \operatorname{Im}[\bar{u}_0]) \sin(k_e l_0) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Hieruit volgt direct de complexe constante  $\bar{u}_0$  die bij de numeriek verkregen oplossing  $\bar{\psi}(x)$  opgeteld moet worden teneinde een totale oplossing  $\bar{u}(x)$  te verkrijgen die voldoet aan de fysische-RVW.

Ter illustratie van de aanwezigheid van de vrijheidsgraden worden de fysische-RVW ook toegepast op (2.49). Uit (2.8) volgt voor (2.49)

$$\begin{aligned} u(x) &= \operatorname{Re}[\bar{u}(x)e^{jk_e x}] \\ &= \operatorname{Re}[\bar{\psi}(x)e^{jk_e x} + (\bar{u}_0 - \frac{j}{2k}\bar{u}'_0)e^{jk_e x} + \frac{j}{2k_e}\bar{u}'_0 e^{-jk_e x}] \\ &= \operatorname{Re}[\bar{\psi}(x)e^{jk_e x} + d_1 e^{jk_e x} + d_2 e^{-jk_e x}] \\ &= \operatorname{Re}[\bar{\psi}(x) + d_1 + d_2] \cos(k_e x) - \operatorname{Im}[\bar{\psi}(x) + d_1 - d_2] \sin(k_e x) \end{aligned} \quad (2.53)$$

waarin

$$\begin{aligned} d_1 &= \bar{u}_0 - \frac{j}{2k}\bar{u}'_0 \\ d_2 &= \frac{j}{2k_e}\bar{u}'_0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Uit (2.53) is direct te zien dat de reële en imaginaire delen van de complexe beginvoorwaarden, hier in de vorm van  $d_1$  en  $d_2$ , hetzelfde effect hebben op de uiteindelijke fysische oplossing.

Uit (2.53) kunnen we opmaken dat gelijkstellen aan nul van de reële componenten of de imaginaire componenten van zowel  $d_1$  als  $d_2$  wel tot problemen kan leiden<sup>17</sup>, omdat men daardoor een vrijheidsgraad in de uiteindelijke oplossing verliest.

### Behandeling van de RVW en beginwaarden van de numerieke integratie bij gedempte complex omhullende analyse

Nu wordt aangetoond dat men ook in het algemeen gebruik kan maken van de aanwezige vrijheidsgraden. We gaan hierbij uit van het stelsel eerste-orde CE-vergelijkingen (2.39). Dit stelsel is te schrijven als

$$\bar{y}' = \mathbf{C}\bar{y} + \bar{r} \quad (2.55)$$

<sup>17</sup>Indien men de beginwaarden voor de numerieke integratie op nul stelt, dan leidt het op nul stellen van de reële delen van  $d_1$  en  $d_2$  niet tot problemen. Het nul stellen van de imaginaire delen van  $d_1$  en  $d_2$  leidt wel tot problemen.

waarin

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_i \\ \bar{u}'_r \\ \bar{u}'_i \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

met in  $\bar{\mathbf{y}}$  de reële en imaginaire componenten van  $\bar{u}$  en hun afgeleiden. De vier eigenwaarden van  $\mathbf{C}$  zijn gelijk aan

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma - jk_0 + \sqrt{\gamma^2 - \kappa_r + j\kappa_i} \\ \lambda_2 &= -\gamma - jk_0 - \sqrt{\gamma^2 - \kappa_r + j\kappa_i} \\ \lambda_3 &= -\gamma - jk_0 + \sqrt{\gamma^2 - \kappa_r - j\kappa_i} \\ \lambda_4 &= -\gamma - jk_0 - \sqrt{\gamma^2 - \kappa_r - j\kappa_i} \end{aligned} \quad (2.57)$$

waarmee de homogene oplossing van (2.55) te schrijven is als

$$\bar{\mathbf{y}}_h = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 \mathbf{v}_3 e^{\lambda_3 x} + c_4 \mathbf{v}_4 e^{\lambda_4 x} \quad (2.58)$$

waarin  $\mathbf{v}_i$  de eigenvectoren van  $\mathbf{C}$  en  $c_i$  vier complexe constanten zijn. De algemene oplossing is nu te schrijven als

$$\bar{\mathbf{y}}_a(x) = \bar{\mathbf{y}}_h(x) + \bar{\mathbf{y}}_p(x) \quad (2.59)$$

waarin  $\bar{\mathbf{y}}_p(x)$  een particuliere oplossing van (2.55) is, verkregen door numerieke integratie met in principe willekeurige beginvoorwaarden. Deze beginvoorwaarden kunnen het beste op nul gesteld worden, zodat de hoogfrequente homogene componenten uit de oplossing worden gemeden. Deze specifieke particuliere oplossing duiden we aan met  $\psi(x)$ . De fysische-RVW (2.13) zijn nu te schrijven als

$$\begin{aligned} u_r(0) &= \text{Re}[\bar{u}_r(0)e^{jk_0 0}] = \text{Re}[\bar{y}_1(0)e^{jk_0 0}] = 0 \\ u_i(0) &= \text{Re}[\bar{u}_i(0)e^{jk_0 0}] = \text{Re}[\bar{y}_2(0)e^{jk_0 0}] = 0 \\ u_r(l_0) &= \text{Re}[\bar{u}_r(l_0)e^{jk_0 l_0}] = \text{Re}[\bar{y}_1(l_0)e^{jk_0 l_0}] = 0 \\ u_i(l_0) &= \text{Re}[\bar{u}_i(l_0)e^{jk_0 l_0}] = \text{Re}[\bar{y}_2(l_0)e^{jk_0 l_0}] = 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

waarin  $\bar{y}_i$  staat voor de  $i$ -de component van  $\bar{\mathbf{y}}$ . Deze fysische-RVW hebben dus betrekking op de eerste twee componenten van  $\bar{\mathbf{y}}$ . Definiëren we vervolgens

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{P} \mathbf{v}_i \quad (2.62)$$

dan kunnen de fysische-RVW (2.60) als volgt geschreven worden

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \text{Re} \left[ \sum_{i=1}^4 c_i \mathbf{w}_i \right] + \text{PRe}[\bar{\psi}(0)] \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \text{Re} \left[ \sum_{i=1}^4 c_i \mathbf{w}_i e^{\lambda_i l_0} \right] + \text{PRe}[\bar{\psi}(l_0) e^{jk_0 l_0}] \end{aligned} \quad (2.63)$$

met

$$\lambda'_i = \lambda_i + j k_0 l_0 \quad (2.64)$$

Vergelijking (2.63) is gedeeltelijk te vergelijken met (2.51). Het stelsel (2.51) is oplosbaar omdat de vrijheidsgraad daar al is verwerkt door de keuze  $\bar{u}'_0 = 0$ , zodat als homogeen deel alleen een constante  $\bar{u}_0$  overblijft. De vier constanten  $c_i$  in (2.63) zijn te vergelijken met de constanten  $\bar{u}_0$  en  $\bar{u}'_0 = 0$ . In (2.63) is nog het gehele homogene deel aanwezig, deze vergelijking heeft daarom nog een vrijheidsgraad en is daarom niet oplosbaar.

Om de vier complexe constanten vrij te maken, worden deze opgesplitst in hun reële en imaginaire componenten en samengevoegd in de vector  $\mathbf{c}$ <sup>18</sup>. Hierna is (2.63) te schrijven als

$$\mathbf{B}_c \mathbf{c} = \mathbf{p} \quad (2.65)$$

met

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_c &= [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3 \ \mathbf{B}_4] \\ \mathbf{B}_i &= \begin{bmatrix} \text{Re}[\mathbf{w}_i] & -\text{Im}[\mathbf{w}_i] \\ \text{Re}[\mathbf{w}_i e^{\lambda'_i}] & -\text{Im}[\mathbf{w}_i e^{\lambda'_i}] \end{bmatrix} \\ \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} -\text{PRe}[\bar{\psi}(0)] \\ -\text{PRe}[\bar{\psi}(l_0) e^{j k_0 l_0}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Toepassen van de twee reële fysische-RVW uit (2.13) resulteert uiteindelijk dus in een stelsel (2.65) van 4 reële vergelijkingen met 8 reële onbekenden. Stellen we vervolgens de complexe constanten  $c_3$  en  $c_4$  op nul dan zijn  $c_1$  en  $c_2$  te bepalen met

$$\mathbf{P}_b^T \mathbf{c} = (\mathbf{B}_c \mathbf{P}_b)^{-1} \mathbf{p} \quad (2.67)$$

met

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

waarmee de oplossing van het oorspronkelijke RVW-probleem is bepaald. Het gelijk aan nul stellen van de constanten  $c_3$  en  $c_4$  is weer te interpreteren als een keuze van de twee, in dit geval complexe, vrije-CE-RVW.

---

<sup>18</sup>

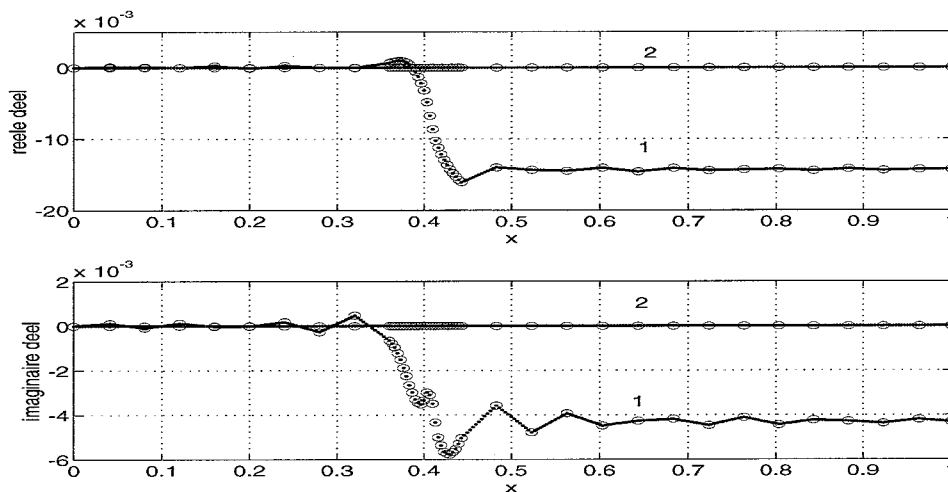
$$\mathbf{c}^T = [ \text{Re}[c_1] \ \text{Im}[c_1] \ \text{Re}[c_2] \ \text{Im}[c_2] \ \text{Re}[c_3] \ \text{Im}[c_3] \ \text{Re}[c_4] \ \text{Im}[c_4] ]$$

## 2.5.2 Uitvoering

De Matlab-implementatie van de aanpak is gelijk aan die van de methode van Overdijk, echter het evalueren van het getal  $\alpha_0$  en het bepalen van de beginvoorwaarden van de numerieke integratie is niet meer nodig. Na de numerieke integratie worden de RVW toegepast zoals beschreven in paragraaf 2.5.1.

Eerst zal het oplossen van het ongedempte systeem, zoals ook behandeld met de methode van Overdijk en Carcaterra, worden beschreven.

1. Numerieke berekening van de complex omhullende van de belasting bij fijne discretisatie, zie figuur 2.7 en 2.8.
2. Numerieke integratie van (2.39) met de vier beginvoorwaarden gelijk aan nul met een variabele integratie stap, die afhankelijk is van de gladheid van  $\bar{r}(x)$  (bijlage C). In

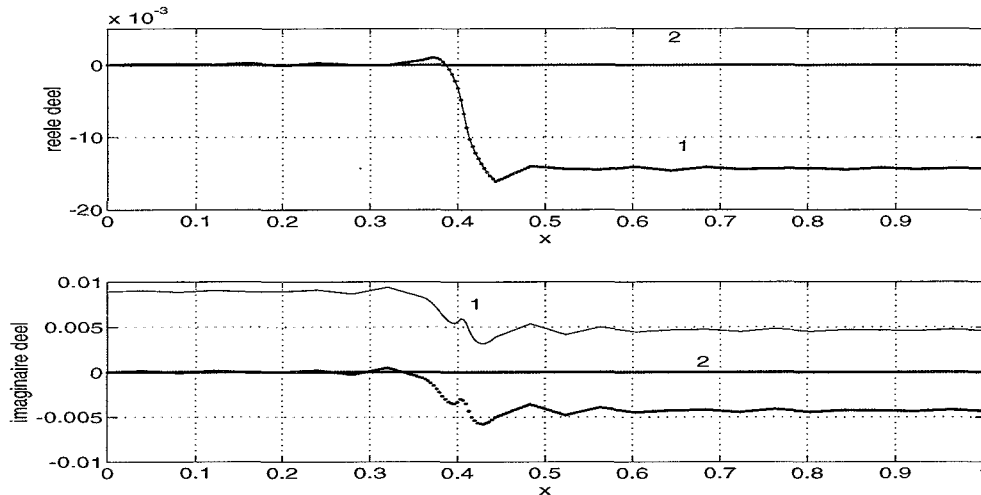


Figuur 2.18: CE-oplossing  $\bar{\psi}(x)$  voor en na de interpolatie. De numeriek gegenereerde oplossing is aangegeven door de grote punten. De tussenliggende zwarte stippen zijn geïnterpoleerde punten. Afgebeeld zijn de componenten  $\bar{\psi}_1(x)$  (1) en  $\bar{\psi}_2(x)$  (2). Omdat we hier een ongedempt systeem beschouwen, is de component  $\bar{\psi}_2(x)$  gelijk aan nul.

figuur 2.18 wordt deze integratie getoond door de grote punten. Omdat we hier een ongedempt systeem beschouwen, blijft  $\bar{\psi}_2(x)$ , behorende bij het imaginaire deel van de uiteindelijke oplossing  $u(x)$ , gelijk aan nul. De resultaten voor  $\bar{\psi}_1(x)$  zijn vergelijkbaar met de resultaten van Carcaterra uit figuur 2.14. Het effect van de variabele integratiestap is duidelijk te zien. Rond het punt  $l_e = 0.41$  wordt de integratiestap verkleind.

3. Lineaire interpolatie van de oplossingen  $\bar{\psi}_1(x)$  en  $\bar{\psi}_2(x)$ . In figuur 2.18 is dit te zien aan de kleine zwarte stippen tussen de grotere discretisatiepunten.
4. Toepassen van de 4 fysische-RVW zoals beschreven in paragraaf 2.5.1. Het gevolg is een optelling van een constante bij de eerste twee componenten van de numeriek verkregen oplossing  $\bar{\psi}(x)$  (figuur 2.19).



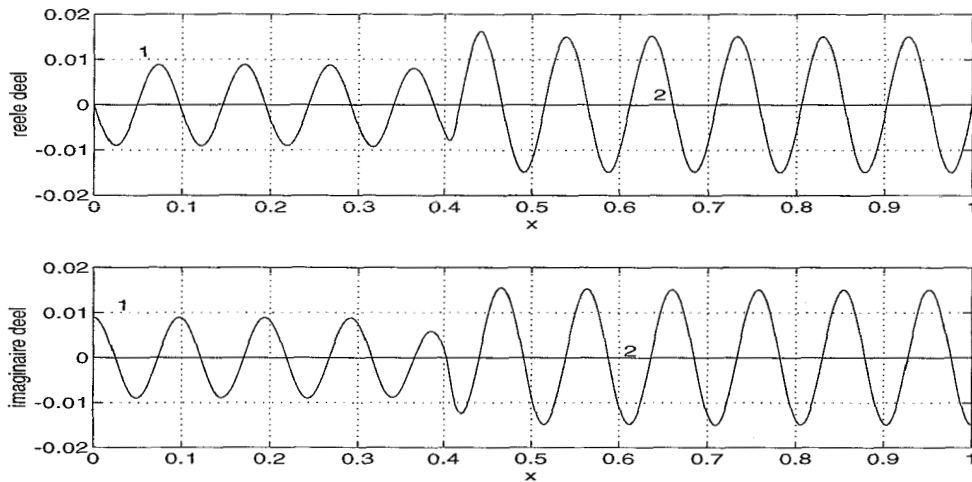


Figuur 2.19: Toepassen van de RVW. Afgebeeld zijn de componenten  $\bar{\psi}_1(x)$  en  $\bar{\psi}_2(x)$  van de numerieke integratie. Na de toepassing van de RVW resulteert dit in de complex omhullende van het reële deel van de oplossing,  $\bar{u}_r(x)$  (1) en in de complex omhullende van het imaginaire deel van de oplossing,  $\bar{u}_i(x)$  (2). Omdat we hier een ongedempt systeem beschouwen, blijft het imaginaire deel van de oplossing gelijk aan nul.

- Demodulatie van de verkregen complex omhullende van de oplossing met behulp van (2.8). In figuur 2.20 zijn de met  $e^{jk_0x}$  gedemoduleerde complex omhullenden  $\bar{u}_r(x)$  en  $\bar{u}_i(x)$  te zien. Het reële deel hiervan (bovenste grafiek) is de fysische oplossing  $u(x)$ . In figuur 2.21 wordt de fout in de uiteindelijke oplossing gepresenteerd.

Nu wordt ter demonstratie van DCEDA een gedempt probleem (systeem 4) uitgerekend. Deze berekening is uitgevoerd met  $k_c^2 = \omega_e^2 c_0^{-2} (1 - \eta j)$ , waarin  $\omega_e = 40$ ,  $c_0 = 1/\pi$  en  $\eta = 0.03$ . Als excitatie is een puntkracht in het punt  $l_e = 0.40$  aangebracht, dus  $r(x) = \delta(x - 0.40)$ . Op deze wijze beschouwen we in feite de dimensieloze vergelijking uit bijlage A.4. De excitatiefrequentie komt nu overeen met de  $40^\circ$  eigenfrequentie van het systeem. De waarde voor de demping  $\eta$  is ten behoeve van een goede weergave van het dempingseffect op 0.03 gesteld.

- Numerieke berekening van de complex omhullende van de belasting bij fijne discretisatie, zie figuur 2.7 en 2.8.
- Numerieke integratie van (2.39) met de vier beginvoorwaarden gelijk aan nul met een variabele integratie stap, die afhankelijk is van de gladheid van  $\bar{r}$  (bijlage C). In figuur 2.22 wordt deze integratie getoond door de grote punten. Omdat we hier een gedempt systeem beschouwen, wordt zowel  $\bar{\psi}_1(x)$  als  $\bar{\psi}_2(x)$ , behorende bij het reële respectievelijk imaginaire deel van de uiteindelijke oplossing  $u(x)$ , ongelijk aan nul.
- Lineaire interpolatie van de oplossingen  $\bar{\psi}_1(x)$  en  $\bar{\psi}_2(x)$ . In figuur 2.22 is dit te zien aan de kleine zwarte stippen tussen de grotere discretisatiepunten.
- Toepassen van de 4 fysische-RVW zoals beschreven in paragraaf 2.5.1. Het gevolg is een optelling van twee e-machten van de eerste twee eigenwaarden van (2.57) bij de eerste twee componenten van de numeriek verkregen oplossing  $\bar{\psi}(x)$  (figuur 2.23).



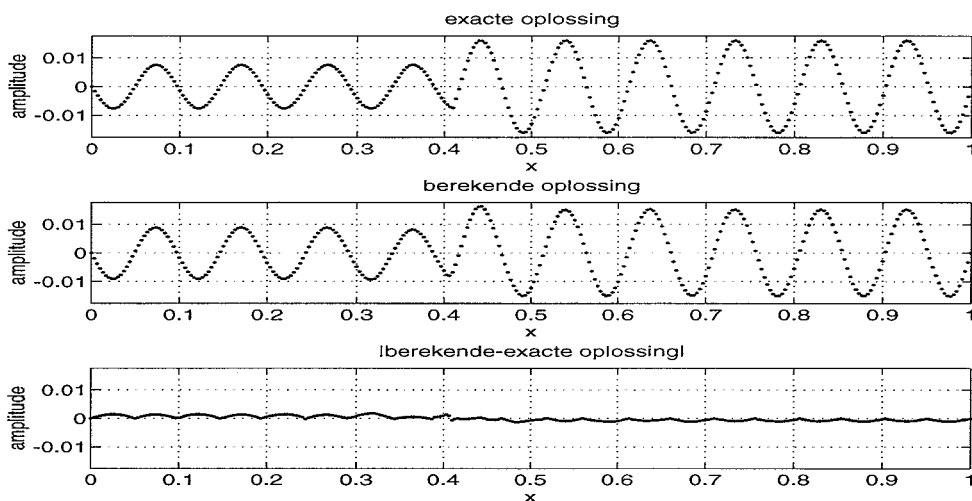
Figuur 2.20: Gedemoduleerde  $\bar{u}_r(x)$  (1) en  $\bar{u}_i(x)$  (2). Omdat we hier een ongedempt systeem beschouwen, is de component  $\bar{u}_i(x)$  gelijk aan nul.

5. Demodulatie van de verkregen complex omhullende van de oplossing met behulp van (2.8). In figuur 2.24 zijn de met  $e^{jk_0x}$  gedemoduleerde complex omhullenden  $\bar{u}_r(x)$  en  $\bar{u}_i(x)$  te zien. Het reële deel hiervan (bovenste grafiek) is de complexe fysische oplossing  $u(x)$ . In figuur 2.25 wordt de fout in de uiteindelijke oplossing gepresenteerd.

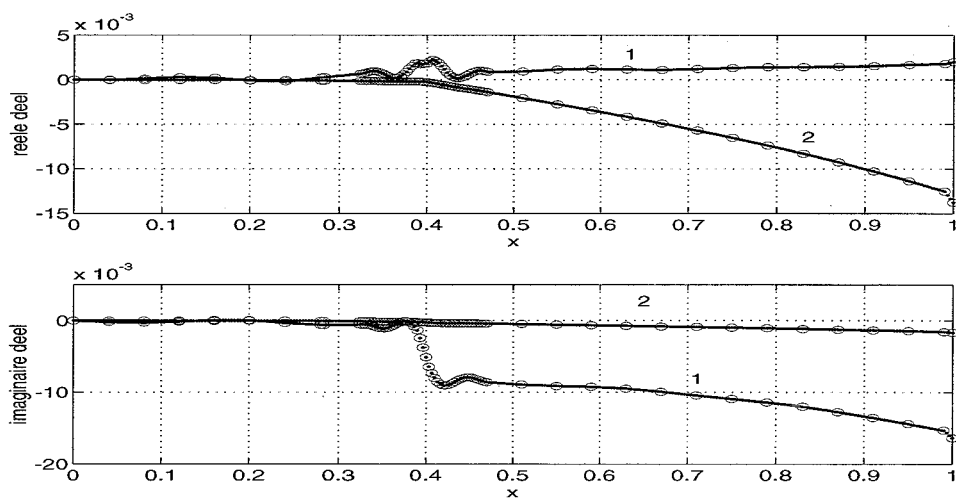
Opgemerkt wordt dat er in numerieke implementatie van DCEDA nog een fout aanwezig is. Dit is te zien in de figuur 2.22. Het grotere punt op  $x = 1$  zou verder naar rechts moeten liggen. Verwacht wordt dat deze fout een relatief grote invloed zal hebben op de uiteindelijk fout in figuur 2.25, omdat de eindwaarde van de integratie direct van invloed is op een constante voor een e-macht.

### 2.5.3 Evaluatie

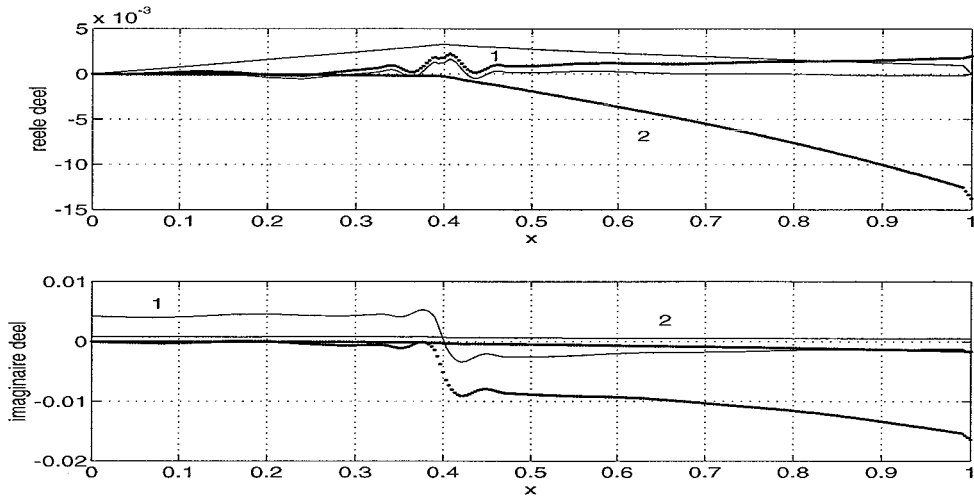
DCEDA is de meest algemene methode van de 3 beschreven methoden. Het is in dit stadium de enige methode die gedempte longitudinale trillingen behandelt, hoewel de methode van Overdijk dit na een uitbreiding in principe ook moet kunnen. Laatstgenoemde methode wordt dan echter numeriek onbruikbaar. Dit is het gevolg van het oneindig groot worden van de complexe impulsresponsie, waardoor het numeriek berekenen van de beginvoorwaarden (2.24) onmogelijk wordt. In bijlage E wordt een vergelijking met de andere twee CEDA methoden, met FEM en met een Fredholm integraal oplossing, gepresenteerd.



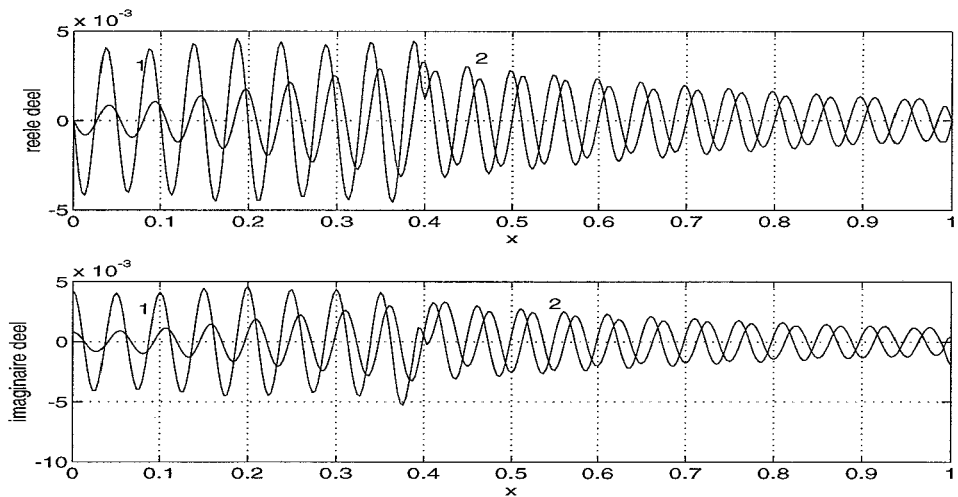
Figuur 2.21: Analytische oplossing voor een ongedempt systeem, de DCEDA oplossing en de absolute fout in de DCEDA oplossing.



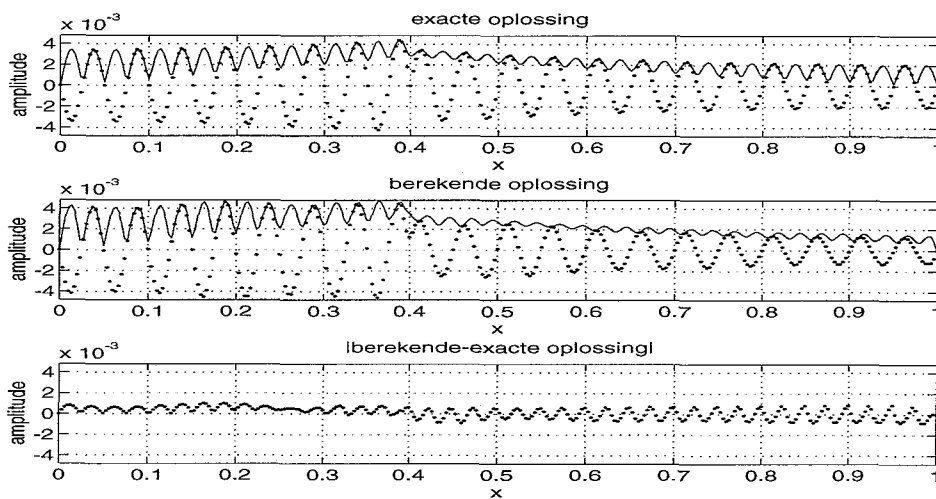
Figuur 2.22: CE-oplossing  $\bar{\psi}(x)$  voor een gedempt systeem voor en na de interpolatie. De numeriek gegenereerde oplossing is aangegeven door de grote punten. De tussenliggende zwarte stippen zijn geïnterpoleerde punten. Afgebeeld zijn de componenten  $\bar{\psi}_1(x)$  (1) en  $\bar{\psi}_2(x)$  (2). In deze figuur is te zien dat er in numerieke implementatie van DCEDA nog een fout aanwezig is. Het grotere punt op  $x = 1$  zou verder naar rechts moeten liggen. Verwacht wordt dat deze fout een relatief grote invloed zal hebben op de uiteindelijk fout in figuur 2.25, omdat de eindwaarde van de integratie direct van invloed is op een constante voor een e-macht.



Figuur 2.23: Toepassen van de RVW. Afgebeeld zijn de componenten  $\bar{\psi}_1(x)$  en  $\bar{\psi}_2(x)$  van de numerieke integratie. Na de toepassing van de RVW resulteert dit in de complex omhullende van het reële deel van de oplossing,  $\bar{u}_r(x)$  (1) en in de complex omhullende van het imaginaire deel van de oplossing,  $\bar{u}_i(x)$  (2).



Figuur 2.24: Gedemoduleerde  $\bar{u}_r(x)$  (1) en  $\bar{u}_i(x)$  (2). Beide functies zijn complex, omdat het hier om de gedemoduleerde *complex omhullende* van de reële en imaginaire component van de uiteindelijke complexe oplossing  $u(x) = u_r(x) + u_i(x)j$  gaat.



Figuur 2.25: Analytische oplossing voor een gedempt systeem, de DCEDA oplossing en de absolute fout in de DCEDA oplossing. De analytische oplossing is bepaald in bijlage A. Deze analytische oplossing  $u(x)$  is complex. In de bovenste grafiek is de oplossing op het tijdstip  $t = 0$ , dus  $w(x, 0) = \text{Re}[u(x)e^{j\omega_e 0}]$ , gepresenteerd door de zwarte stippen, zie ook (A.2). De doorgetrokken zwarte lijn is het maximale amplitude van de oplossing voor alle tijdstippen en komt overeen met de lengte van de complexe vector  $u(x)$ , dus  $|u(x)|$ . Voor dit gedempte systeem treedt geen staande golf op, de golven lopen in de tijd van de ene naar de andere kant, waarbij het amplitude op het punt  $x$  begrensd wordt door  $|u(x)|$ .

## Hoofdstuk 3

# Statistische Complex Omhullende Analyse

In het vorige hoofdstuk is DCEDA behandeld. Zoals eerder is opgemerkt (Raaymakers, 1995), is de oplossing van zowel het gedempte als ongedempte systeem sterk afhankelijk van systeem- en excitatieparameters (paragraaf 3.5.1). In dit hoofdstuk wordt een statistische methode aan DCEDA toegevoegd. Deze uitbreiding wordt vergeleken met conventionele statistische methoden. In de analyse worden de positie van het excitatiepunt en de excitatiefrequentie als stochasten<sup>1</sup> beschouwd. We nemen een Gaussische verdeling voor beide stochasten aan.

### 3.1 Gradaties van stochastisch gedrag

Naar aanleiding van een literatuurstudie, met als doel het vinden van een methode om stochastische systemen met DCEDA te analyseren, is een verdeling gemaakt in de gradaties waarin men stochastiek in een systeem kan implementeren. Een duidelijk onderscheid is te maken tussen de volgende gevallen:

- Stochastische parameters of stochastische processen.  
In het geval van een dynamisch systeem kan men dit interpreteren als één onafhankelijke stochastische parameter voor bijvoorbeeld de stijfheid over de gehele constructie, respectievelijk een stochastisch veld<sup>2</sup> voor een stochastische stijfheid als functie van de plaats.
- Stochastisch inhomogeen of homogeen deel van de differentiaalvergelijking.  
In het geval van een dynamisch systeem kan men dit interpreteren als een stochastische belasting respectievelijk stijfheid.

Ook kan stochastisch gedrag optreden in verschillende dimensies zoals plaats of tijd, of in de initiële condities. De eerder genoemde twee aspecten zijn echter van grotere invloed bij de keuze van een geschikte methode.

---

<sup>1</sup>'stochastikos' is een grieks woord dat betekent 'bedreven in het gissen'.

<sup>2</sup>Een stochastisch veld is te interpreteren als een stochastisch signaal waarin niet de tijd, maar de plaats de onafhankelijke variabele is.

### Stochastische parameters

Bij het stochastisch veronderstellen van een systeemp parameter wordt deze systeemp parameter beschreven door één onafhankelijke stochastische grootheid. Denk hierbij bijvoorbeeld aan één constante Gaussisch verdeelde elasticiteitsmodulus over een bepaalde homogene structuur, dus  $\underline{E}(x) = \underline{E}_0$ . Echter ook de verdeling  $\underline{E}(x) = \underline{E}_0 p(x)$ , waarin  $p(x)$  een deterministische functie, valt in deze klasse.

### Stochastische processen

Stochastische processen (Cijssouw, 1992) worden in de literatuur vaak stochastische velden genoemd. Bij stochastische processen is sprake van een stochast als functie van een andere grootheid, zoals tijd of plaats. Een voorbeeld is  $\underline{E}(x) = \underline{E}_0(x)$ .

### Stochastiek in het inhomogene deel van de differentiaalvergelijking

Voor systemen met een stochastisch inhomogeen deel, dus een stochastische belasting, zijn vele boeken (Nigam, 1983; Crandall & Mark, 1963) en artikelen aanwezig. Essentieel is het feit dat voor dergelijke systemen het gediscretiseerde homogene deel inverteerbaar is en men hiermee de oplossing kan formuleren in termen van het stochastische rechterlid. Met de verkregen uitdrukking kan men vervolgens uitdrukkingen krijgen voor de momenten van de oplossing als functie van de momenten van het rechterlid. Beschouw bijvoorbeeld een gediscretiseerd statisch probleem  $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ . Indien  $\mathbf{K}$  inverteerbaar is, is de oplossing  $\mathbf{U}$  te schrijven als  $\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$ . Hieruit zijn de momenten van  $\mathbf{U}$  direct te bepalen. Het eerste moment is bijvoorbeeld  $E[\mathbf{U}] = \mathbf{K}^{-1}E[\mathbf{F}]$ .

Voor de discretisatie van het systeem kunnen diverse conventionele technieken of combinaties daarvan worden gebruikt. Zo gebruikt Wong (Wong, 1986) FEM om een gediscretiseerd stelsel tweede-orde vergelijkingen in de tijd te verkrijgen. Vervolgens past hij een centraal differentieschema voor de tijd toe en drukt de variantie en verwachting van de oplossing op elk tijdstip uit in de momenten van de belasting en de initiële condities. Dezelfde werkwijze wordt gehanteerd door To (To & Liu, 1994), echter dan voor een niet-stationaire excitatie.

### Stochastiek in het homogene deel van de differentiaalvergelijking

Naar systemen met stochastiek in het homogene deel van de differentiaalvergelijking wordt op dit moment veel onderzoek gedaan. In maart 1986 is gestart met het tijdschrift 'Probabilistic Engineering Mechanics', waarin in toenemende mate artikelen over dit onderwerp worden gepubliceerd. Een goed boek bij bestudering van deze artikelen is (Soong, 1973). Hierin worden achtereenvolgens systemen behandeld met stochastische initiële condities, stochastische inhomogene termen en stochastische homogene termen.

## 3.2 Statistische methoden

Naar aanleiding van de gevonden artikelen tijdens het literatuuronderzoek kunnen we de methoden voor analyse van systemen met stochastische homogene delen verdelen in 6 methoden. Methoden die alleen systemen met stochastisch gedrag in het inhomogene deel (dus de belasting) behandelen zijn buiten beschouwing gelaten. Deze zijn immers onbruikbaar voor het te analyseren systeem.

1. Numerieke benadering van de exacte methode.

Deze oplossing wordt in het vervolg de exacte oplossing genoemd. De exacte oplossing van een stochastisch probleem kan in principe numeriek bepaald worden door een deterministische analyse van het systeem voor, bij benadering, alle mogelijke realiseringen van de stochastische parameters. Daarna dienen de met de kansdichtheidsfuncties gewogen gemiddelden van deze deterministische berekeningen bepaald te worden (paragraaf 3.5.2). Indien er sprake is van stochastische velden of stochastische processen, dan is deze methode nauwelijks meer toepasbaar en is men veelal aangewezen op de Monte-Carlo methode.

2. Methoden gebaseerd op perturbaties (Kleiber & Hien, 1994).

Hieronder vallen diverse methoden zoals de Taylor expansie methode (Wong, 1985), de Neumann-serie expansie methode (Chakraborty & Dey, 1995) en de gewone perturbatiemethode (Benaroya & Rehak, 1988). Bij de genoemde methoden wordt het gediscretiseerde homogene deel  $\underline{\mathbf{K}}$  geschreven als een deterministisch deel  $\mathbf{K}_0$  en een stochastisch deel  $\underline{\mathbf{k}}$ , met  $E[\underline{\mathbf{k}}] = 0$ . Vervolgens wordt  $\underline{\mathbf{K}}$  geëxpandeerd in de stochastische parameters rond de verwachte waarde  $\mathbf{K}_0$ . Ook de oplossing  $\underline{\mathbf{U}}$  wordt geëxpandeerd in de stochastische parameters. Vervolgens worden termen van gelijke orde gelijk gesteld en opgelost. Een toepassing van deze techniek op een eigenwaarde probleem is te vinden in (Hasselmann & Hart, 1972).

3. Monte-Carlo methoden.

Hierbij wordt meerdere malen een deterministische oplossing bepaald voor een bepaalde realisering van de stochastische  $\underline{\mathbf{K}}$ . De realisering wordt bepaald op basis van de verdeling van  $\underline{\mathbf{K}}$ . Met de verkregen deterministische oplossingen kunnen schatters<sup>3</sup> voor de momenten van  $\underline{\mathbf{U}}$  bepaald worden (Chatfield, 1983). Het essentiële verschil tussen de Monte-Carlo methode en de exacte methode is dat de deterministische analyses bij de Monte-Carlo methode uitgevoerd worden in punten die door een randomgenerator zijn bepaald. Dit in tegenstelling tot de exacte methode, die in benadering alle mogelijke realiseringen van de genoemde randomgenerator analyseert.

4. Stochastische FEM.

Door Sun is een eindige elementenformulering beschreven waarin het stochastisch gedrag van het inhomogene deel van een tweede-orde differentiaalvergelijking is ondergebracht in een element (Sun, 1979a). In een tweede artikel (Sun, 1979b) beschrijft Sun een uitbreiding hiervan waarbij ook stochastiek in het homogene deel van de differentiaalvergelijking mogelijk is door middel van één stochastische parameter. Een toepassing van de eerste formulering is te vinden in (Wong, 1984).

5. 'Point estimate for probability-moment method' (PEPM) (Wong, 1985).

Deze methode beschrijft de kansdichtheidsfunctie van een stochastische systeempareme-

---

<sup>3</sup>Het bepalen van schatters is een onderdeel van het vakgebied statistiek ('statistical theory'). Het bepalen van een kans dat een gebeurtenis optreedt op basis van bekende kansdichtheidsfuncties, behoort tot het vakgebied waarschijnlijkheidsleer ('probability theory'). In feite zijn deze vakgebieden elkaars inverse (Chatfield, 1983). In onze analyse maken we gebruik van beide. Het uitgangspunt is een model met één of twee stochasten ( $\underline{\omega}_e$  en  $\underline{L}_e$ ). Dit is een typisch statistisch probleem. Vervolgens wordt statistiek gebruikt om een schatter te bepalen voor de verwachting en de variantie van een bepaalde uitgangsgrootheid. Met behulp van het vakgebied waarschijnlijkheidsleer zijn op basis van deze verwachting en variantie uitspraken te doen over de kans dat deze uitgangsgrootheid een bepaalde waarde overschrijdt. Hiervoor kan men bijvoorbeeld de Chebyshev-ongelijkheid gebruiken, zie vergelijking (3.2).



ter door middel van een klein aantal dirac-pulsen. Nu zijn door een zeer beperkt aantal deterministische berekeningen alle momenten van de oplossing exact te bepalen. Het aantal deterministische berekeningen is direct afhankelijk van het aantal dirac-pulsen in de kansdichtheidsfuncties van de systeemp parameters. Voor het benaderen van stochasten met een continue verdeling, zoals Gaussische stochasten, is deze methode daarom onnauwkeurig.

6. Responsie-oppervlak methode (Wong, 1985).

Bij deze methode wordt een deterministische oplossing op bepaalde waarden van de stochastische parameter of parameters bepaald. Vervolgens wordt een polynoom door deze punten bepaald. Dit polynoom beschrijft nu een benadering van het responsie-oppervlak, dat een functie is van de stochastische parameters (paragraaf 3.5.2). Met behulp van dit polynoom kunnen nu de gewogen gemiddelden worden berekend op dezelfde wijze als bij de exacte oplossing.

Voor 'eenvoudige' vergelijkingen zijn ook vaak specifieke methoden voorhanden (Manohar & Iyengar, 1993).

### 3.3 Discussie

De exacte methode is in principe altijd toepasbaar. De methode vereist echter al snel veel numerieke inspanning, zelfs indien men alleen een model met weinig stochastische parameters beschouwt.

De perturbatiemethoden zijn vrij algemeen toepasbaar en kunnen gebruikt worden in combinatie met bestaande FEM methoden en een beperkt aantal stochastische parameters. De nauwkeurigheid is sterk afhankelijk van de orde van de perturbatie in relatie tot de gevoeligheid van het systeem voor veranderingen van een orde van grootte gelijk aan de standaardafwijking van een stochastische parameter.

Monte-Carlo methoden zijn altijd toepasbaar, ook in het geval van complexe stochastische velden. Nadelen zijn de meerdere evaluaties van de deterministische oplossing en de complexe generatie van de eventuele stochastische velden volgens een gekozen verdeling (Vanmarcke *et al.*, 1986).

Stochastische FEM is formeel gezien de meest algemene methode, omdat het stochastisch gedrag in een element is ondergebracht en men de analyse dus eenvoudig kan automatiseren. In feite zijn de artikelen van Sun de enige gevonden artikelen die een nieuwe, te automatiseren, eindige elementenformulering beschrijven. Een beperking is, dat het stochastisch gedrag in het homogene deel bestaat uit één Gaussische parameter en het stochastisch gedrag in het inhomogene deel witte ruis dient te zijn. Het modelleren met ongecorreleerde witte ruis kan echter resulteren in te lage varianties van bepaalde uitgangsgrootheden. Dit is duidelijk in te zien aan de hand van (Shinozuka, 1987). Hierin wordt een balk statisch belast op trek, waarbij de elasticiteitsmodulus als homogeen stochastisch veld<sup>4</sup> wordt beschouwd. Vervolgens wordt een analytische uitdrukking voor de variantie van de tipverplaatsing van de balk geformuleerd als functie van de autocorrelatie van het stochastische veld. Vergelijkt men nu een stochastisch

---

<sup>4</sup>Een homogeen stochastisch veld dient geïnterpreteerd te worden als een stationair stochastisch signaal. Een stochastisch veld wordt echter beschreven als functie van een plaatscoördinaat.

veld zonder correlatie<sup>5</sup> met een perfect gecorreleerd stochastisch veld<sup>6</sup> dan blijkt in het eerste geval de variantie van de oplossing nul. Hieruit kan opgemaakt worden dat bij modelleren van een stochastisch veld als witte ruis de nodige voorzichtigheid in acht dient te worden genomen. Vaak wordt immers verwacht dat witte ruis een maximale variantie tot gevolg zal hebben, terwijl het in dit specifieke geval een variantie van nul tot gevolg heeft.

Een inleiding in de theorie van stochastische velden en de effecten van het middelen van stochastisch velden, wat noodzakelijk is in een eindige elementenformulering, alsmede een methode voor de numerieke generatie van realiseringen van stochastische velden, is te vinden in (Vanmarcke *et al.*, 1986; Vanmarcke, 1994).

De PEPM levert een exacte oplossing voor alle momenten en heeft daarvoor maar weinig deterministische berekeningen nodig. Het nadeel is de zeer beperkte beschrijving van de kansdichtheidsfuncties en hiermee dus het gedrag van de stochastische parameters. Het toepassingsgebied lijkt hiermee beperkt tot systemen waarin de stochastische parameters een discrete, of in benadering discrete verdeling hebben.

De nauwkeurigheid en efficiëntie van de responsie-oppervlak methode (Wong, 1985) zal afhangen van de complexiteit van het ware responsie-oppervlak, het aantal deterministische berekeningen van de oplossing en de orde van de benadering van het responsie-oppervlak. Van deze methode zijn geen toepassingen gevonden in de literatuur.

### 3.4 Stochastische systemen en DCEDA

Zoals eerder vermeld, is gekozen om twee parameters in de gedempte longitudinaal trillende balk stochastisch te veronderstellen. Dit doen we door een parameter in het homogene deel (het golfgetal  $k_c$ ) en één in het inhomogene deel (het excitatiepunt  $l_e$ ) van de bijbehorende differentiaalvergelijking (2.13) als Gaussische stochasten te veronderstellen.

Het doel van de literatuurstudie was het zoeken naar een methode waarmee men stochastiek in DCEDA kon onderbrengen op het niveau waarop Sun dat doet in zijn stochastische elementenmethode. Een dergelijke methode is echter niet gevonden. Op de methode van Sun na, maken alle genoemde methoden gebruik van een conventionele deterministische oplosstechniek. Het verschil tussen de methoden is de wijze waarop uit de meerdere conventionele deterministische berekeningen uitspraken over het stochastisch systeemgedrag gedaan kunnen worden.

Van de genoemde methoden kan de de perturbatiemethode en de stochastische elementenmethode van Sun niet in combinatie met DCEDA gebruikt worden, omdat deze methoden een gediscretiseerde matrix formulering vereisen die voor DCEDA nog niet aanwezig is. PEPM kan in dit geval niet toegepast worden, omdat het niet in staat is om op een effectieve wijze met Gaussische kansdichtheidsfuncties te werken. De overgebleven methoden, de exacte methode, de Monte-Carlo methode en de responsie-oppervlak methode, kunnen gebruikt worden in combinatie met een willekeurige deterministische solver, dus ook met DCEDA.

Omdat over de responsie-oppervlakte methode in de literatuur nog geen toepassingen zijn gevonden en vanwege de algemene toepasbaarheid van de methode, is voor deze methode gekozen. De toepassing dient gezien te worden als een eerste test van het DCEDA concept.

Vanaf nu wordt de combinatie van de responsie-oppervlak methode en DCEDA aangeduid

---

<sup>5</sup>In dit geval is de stochastische autocorrelatie een dirac-puls in nul en heeft men witte ruis.

<sup>6</sup>In dit geval is de stochastische autocorrelatie constant en een maat voor de variantie van de elasticiteitsmodulus. Men heeft hier te maken met één stochastische parameter.

als Statistische Complex Omhullende Analyse (SCEDA). De methode wordt vergeleken met zowel een Monte-Carlo aanpak en een responsie-oppervlak methode in combinatie met de analytische oplossing (bijlage A) als solver, alsmede de numerieke exacte oplossing uit tabel 3.1. Als gevolg van de stochastische excitatie  $\delta(x - L_e)$  en het stochastische complexe golfgetal

solver → statistische methode	exacte analytische oplossing	conventionele FEM of FDM	DCEDA
Exact	ja	nee	nee
Monte-Carlo	ja	nee	nee
Responsie-oppervlak methode	ja	nee	ja

Tabel 3.1: Toegepaste combinaties van statistische methoden en solvers.

$k_c$  is de gehele responsie stochastisch. Men kan dus verwachtingen en varianties op elk punt  $x$  van de oplossing bepalen. Ook kan men covarianties tussen twee punten bepalen. Indien men bijvoorbeeld geïnteresseerd is in maximale spanningen, dan zal men de statistische eigenschappen van de maximaal optredende rek moeten bepalen, om zo met behulp van een constitutief-model de spanning te bepalen.

In dit stadium willen we alleen SCEDA testen en onderzoeken in welke mate de diverse statische methoden voldoen. Daarom is gekozen voor het *maximaal optredende amplitude in de gehele responsie als uitgangspaarparameter*. Deze uitgangsgrootheid zal worden aangeduid met

$$\underline{f} = \underline{f}(\underline{\omega}_e, L_e) \quad (3.1)$$

De uitgangsgrootheid  $\underline{f}$  is hier een stochast, omdat ook de ingang stochastisch is. Er wordt echter ook gebruik gemaakt van een functievoorschrift  $f = f(\omega_e, l_e)$ , dat uit de analytische oplossing van het deterministische systeem volgt. Dit functievoorschrift is te interpreteren als een conventionele deterministische analyse.

Met de methoden uit tabel 3.1 worden vervolgens verwachtingen en varianties van  $\underline{f}$  bepaald. Opgemerkt wordt, dat ondanks het Gaussisch modelleren van  $\underline{\omega}_e$  en  $L_e$  de responsie niet Gaussisch is en de kansdichtheidsfunctie van  $\underline{f}$  niet bepaald is door de verwachting en variantie van  $\underline{f}$ . Er kunnen dus niet direct 95%-waarschijnlijkheidsintervallen worden aangegeven. Indien het model maar één stochastische parameter heeft, kan men ruime, maar exacte, waarschijnlijkheidsintervallen geven door gebruik te maken van de Chebyshev-ongelijkheid

$$P(|\underline{f} - \mu_f| \geq n\sigma_f) \leq \frac{1}{n^2} \quad (3.2)$$

Opgemerkt wordt, dat voor stochastische processen een gegeneraliseerde vorm van de Chebyshev-ongelijkheid is af te leiden (Nigam, 1983).

### 3.5 Numerieke uitvoering

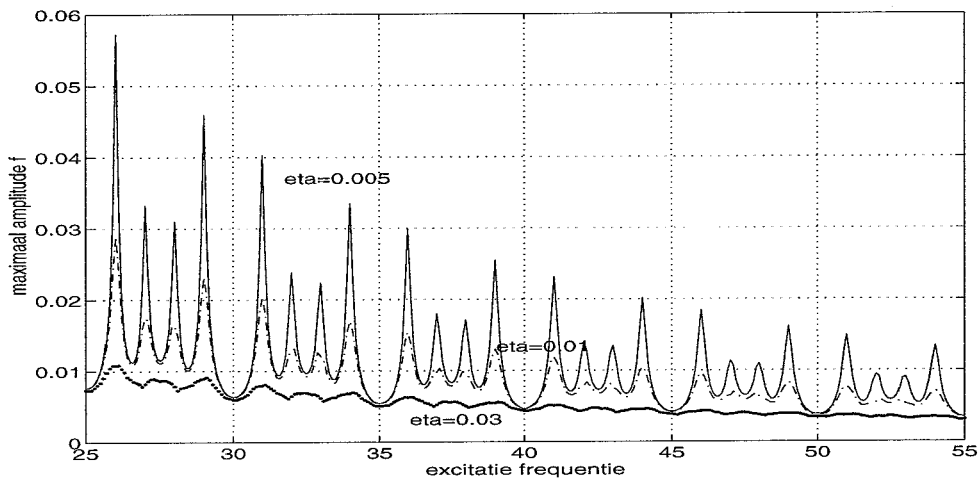
De gedempte balk wordt geanalyseerd aan de hand van de dimensieloze differentiaalvergelijking uit bijlage A.4 in een specifiek werkpunt. De keuze van dit werkpunt en de gebruikte standaardafwijkingen voor  $\underline{\omega}_e$  en  $L_e$  worden toegelicht in paragraaf 3.5.1. In paragraaf 3.5.2 worden achtereenvolgens de gebruikte statistische methoden behandeld.

### 3.5.1 Probleemformulering

We gaan uit van (2.13) waarbij we  $a = 0$ ,  $b = c_0^{-2}\omega_e^2$  met  $c_0^{-2} = \pi^2$  en  $r(x) = \delta(x - l_e)$  stellen. Dit komt overeen met het dimensieloze systeem uit bijlage A.4. Dit systeem wordt geanalyseerd in een specifiek werkpunt. We veronderstellen  $\omega_e$  en  $l_e$  als Gaussische stochasten. Uitgaande van de dimensieloze beschrijving uit bijlage A.4 en de bijbehorende exacte oplossing<sup>7</sup> is in elk werkpunt het maximale amplitude  $f$  van de oplossing als functie van de parameters  $\omega_e$  en  $l_e$  te bepalen. Voor het excitatiepunt is gekozen

$$E[l_e] = 0.4 \quad (3.3)$$

In figuur 3.1 is het maximale amplitude  $f$  voor verschillende waarden van de demping  $\eta$  uitgezet tegen de excitatiefrequentie  $\omega_e$ . In figuur 3.2 is het maximale amplitude  $f$  voor verschillende waarden van  $\eta$  uitgezet tegen het excitatiepunt  $l_e$ . Aan de hand van deze figuren



Figuur 3.1: Maximaal amplitude  $f$  van het gedempte systeem als functie van  $\omega_e$  en  $\eta$  met  $l_e = 0.4$ .

zijn aan de demping en de verwachte excitatiefrequentie de volgende waarden toegekend

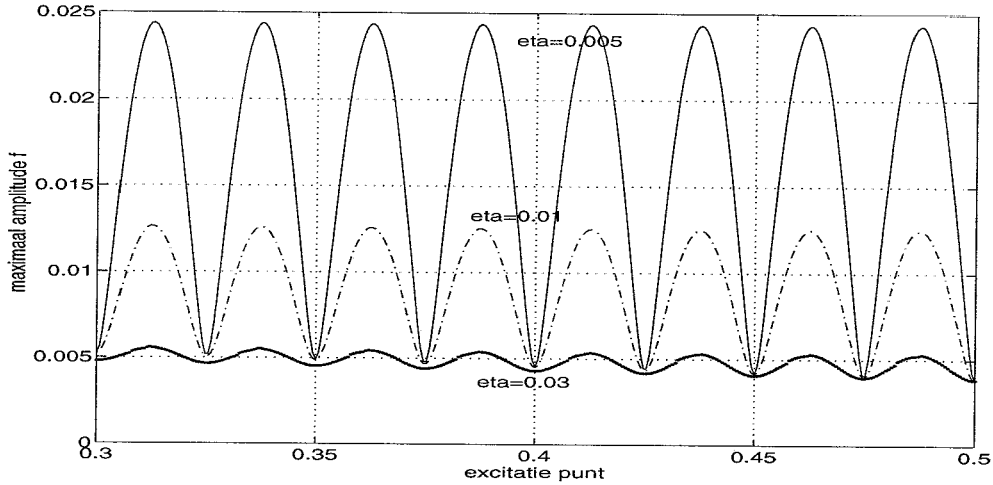
$$\begin{aligned} \eta &= 0.01 \\ E[\omega_e] &= 40 \end{aligned} \quad (3.4)$$

De waarde voor  $\eta$  is van een grootte die fysisch representatief is. De keuze voor  $E[\omega_e]$  is meer arbitrair en is gebaseerd op het feit dat men met deze keuze de 40<sup>e</sup> eigenmode exciteert en men zich daarmee dus in het midden- of hoogfrequente gebied bevindt. De verwachting voor de golflengte wordt hiermee

$$E[\lambda] = 2/E[\omega_e] = 0.05 \quad (3.5)$$

<sup>7</sup>De exacte oplossing is te bepalen uit (A.13) na substitutie van  $l_0 = 1$ ,  $\rho = \pi^2$  en  $E = 1$ , wat  $c_0^{-2} = \pi^2$  levert. De golflengte wordt hierdoor  $\lambda = 2\pi/k_e = 2/\omega_e$ .

Het ontbreken van de pieken bij de frequenties  $5m$ , waarin  $m$  een positief geheel getal, is het gevolg van het exciteren in het punt  $l_e = 0.4$ . De eigenmodes behorende bij de frequenties  $5m$  worden dan niet geëxciteerd. Het effect van variaties in het aangrijpingspunt  $l_e$  van de excitatie is te zien in figuur 3.2. Aan de hand van de figuren 3.1 en 3.2 worden de volgende



Figuur 3.2: Maximaal amplitude  $f$  van het gedempte systeem als functie van  $l_e$  en  $\eta$  met  $\omega_e = 40$ .

keuzen voor de standaardafwijkingen van  $\underline{\omega}_e$  en  $\underline{l}_e$  gemaakt

$$\begin{aligned}\sigma_{\omega_e} &= 0.1 / 0.5 / 2 \\ \sigma_{l_e} &= 0.05\lambda / 0.1\lambda / 0.2\lambda\end{aligned}\tag{3.6}$$

Vervolgens willen we uitdrukkingen vinden voor de eerste twee momenten<sup>8</sup> van het maximale amplitude  $\underline{f}$  voor de volgende combinaties van  $\sigma_{\omega_e}$  en  $\sigma_{l_e}$

- $\sigma_{l_e} = 0$  en  $\sigma_{\omega_e} = 0.1, 0.5$  en  $2$ , aangeduid door de punten w1, w2 en w3.
- $\sigma_{\omega_e} = 0$  en  $\sigma_{l_e} = 0.05\lambda, 0.1\lambda$  en  $0.2\lambda$ , aangeduid door de punten l1, l2 en l3.
- $\sigma_{\omega_e} = 0.5$  en  $\sigma_{l_e} = 0.1\lambda$ , aangeduid door het punt b1.
- $\sigma_{\omega_e} = 0.1$  en  $\sigma_{l_e} = 0.2\lambda$ , aangeduid door het punt b2.
- $\sigma_{\omega_e} = 2.0$  en  $\sigma_{l_e} = 0.05\lambda$ , aangeduid door het punt b3.

In de laatste 3 situaties is de correlatie  $\rho$  op nul gesteld omdat er fysisch ook geen correlatie tussen aangrijpingspunt en excitatiefrequentie is.

<sup>8</sup>Het eerste moment is de verwachting  $E[\underline{f}] = \mu_f$ . Het tweede moment is  $E[\underline{f}^2] = \mu_f^2 + E[(\underline{f} - \mu_f)^2] = \mu_f^2 + \sigma_f^2$ . De variantie  $E[(\underline{f} - \mu_f)^2] = \sigma_f^2$  wordt ook wel het tweede *centrale* moment genoemd.

### 3.5.2 Methoden

Voordat we de diverse methoden bespreken, wordt eerst de kansdichtheidsfunctie voor de stochasten  $\underline{\omega}_e$  en  $\underline{l}_e$  bepaald. Hiertoe definiëren we de covariantiematrix

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \text{var}(\underline{\omega}_e) & \text{cov}(\underline{\omega}_e, \underline{l}_e) \\ \text{cov}(\underline{\omega}_e, \underline{l}_e) & \text{var}(\underline{l}_e) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

met

$$\text{cov}(\underline{\omega}_e, \underline{l}_e) = \rho_{cor} \sigma_{\omega_e} \sigma_{l_e} \quad (3.8)$$

en  $\rho_{cor}$  de correlatiecoëfficiënt. Indien  $\mathbf{\Lambda}$  inverteerbaar is dan is de simultane kansdichtheidsfunctie als volgt te schrijven (Nigam, 1983; Soong, 1973)

$$p_{\omega_e, l_e} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \mathbf{\Lambda}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{s}-\mathbf{m})^T \mathbf{\Lambda}^{-1}(\mathbf{s}-\mathbf{m})} \quad (3.9)$$

met

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \omega_e \\ l_e \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{m} = \text{E}[\mathbf{s}] = \begin{bmatrix} \mu_{\omega_e} \\ \mu_{l_e} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{\text{var}(\underline{\omega}_e)\text{var}(\underline{l}_e) - \text{cov}(\underline{\omega}_e, \underline{l}_e)^2} \begin{bmatrix} \text{var}(\underline{l}_e) & -\text{cov}(\underline{\omega}_e, \underline{l}_e) \\ -\text{cov}(\underline{\omega}_e, \underline{l}_e) & \text{var}(\underline{\omega}_e) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Nu behandelen we achtereenvolgens de exacte methode, de Monte-Carlo methode en de responsie-oppervlak methode.

#### Numerieke benadering van de exacte methode

Er is een analytische uitdrukking voor  $f = f(\omega_e, l_e)$  uit (A.13) te bepalen. De verwachting en de variantie zijn gedefinieerd als

$$\text{E}[\underline{f}] = \int_{\Omega} f(\omega_e, l_e) p_{\omega_e, l_e} d\omega_e dl_e \quad (3.13)$$

$$\text{E}[(\underline{f} - \mu_f)^2] = \int_{\Omega} (f(\omega_e, l_e) - \mu_f)^2 p_{\omega_e, l_e} d\omega_e dl_e$$

Voor de numerieke evaluatie in Matlab vervangen we het oneindige domein  $\Omega$  van de integratie door het bijbehorende  $4\sigma - 4\sigma$  vlak, waarmee we minder dan 0.01 % van het oneindige integratieoppervlak  $\Omega$  verwaarlozen. Hiertoe definiëren we de  $(2m+1) \times (2n+1)$ -oppervlaktematrix  $\mathbf{F}$  als volgt

$$F_{i,j} = f(\mu_{\omega_e} + (i - m - 1)\Delta\omega_e, \mu_{l_e} + (j - n - 1)\Delta l_e) \quad (3.14)$$

met

$$1 \leq i \leq 2m + 1 \quad (3.15)$$

$$1 \leq j \leq 2n + 1 \quad (3.16)$$

$$\Delta\omega_e = \frac{4\sigma_{\omega_e}}{m} \quad (3.17)$$

$$\Delta l_e = \frac{4\sigma_{l_e}}{n} \quad (3.18)$$

Vervolgens wordt de  $(2m+1) \times (2n+1)$ -kansdichtheidsmatrix  $\mathbf{P}$  gedefinieerd

$$P_{i,j} = p_{\omega_e, l_e}(\mu_{\omega_e} + (i - m - 1)\Delta\omega_e, \mu_{l_e} + (j - n - 1)\Delta l_e) \quad (3.19)$$

Nu is (3.13) als volgt numeriek te evalueren

$$\begin{aligned} E[\underline{f}] &= \sum_{i=1, j=1}^{2m+1, 2n+1} F_{i,j} P_{i,j} \Delta\omega_e \Delta l_e \\ E[(\underline{f} - \mu_f)^2] &= \sum_{i=1, j=1}^{2m+1, 2n+1} (F_{i,j} - \mu_f)^2 P_{i,j} \Delta\omega_e \Delta l_e \end{aligned} \quad (3.20)$$

### Monte-Carlo methode

Bij de Monte-Carlo methode wordt  $N_{mc}$  maal een deterministische oplossing  $f_i$  bepaald. Deze oplossing wordt bepaald voor een specifieke realisering  $\omega_{e;i}$  en  $l_{e;i}$ . Deze realiseringen worden bepaald aan de hand van de Gaussische verdeling van  $\underline{\omega}_e$  en  $\underline{l}_e$ . Omdat aangenomen is dat er geen correlatie tussen deze parameters is, kan men in Matlab eenvoudig realiseringen genereren<sup>9</sup> door gebruik te maken van de Gaussische randomgenerator voor een normaal verdeelde grootheid  $n$  met  $E[n] = 0$  en  $\sigma_n = 1$

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_e &= \sigma_{\omega_e} n + \mu_{\omega_e} \\ \underline{l}_e &= \sigma_{l_e} n + \mu_{l_e} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Indien er wel correlatie is tussen twee of meerdere Gaussische parameters kan men de gecorreleerde realiseringen genereren door middel van de Cholesky decompositie van de covariantiematrix (Chakraborty & Dey, 1995). Voor stochastische velden is het genereren van een realisering ook mogelijk, maar dit is aanzienlijk complexer (Vanmarcke *et al.*, 1986).

Aan de hand van de  $N_{mc}$  verkregen realiseringen  $f_i$  zijn met behulp van de volgende schatters (Chatfield, 1983) benaderingen voor de verwachting en variantie van  $\underline{f}$  te bepalen

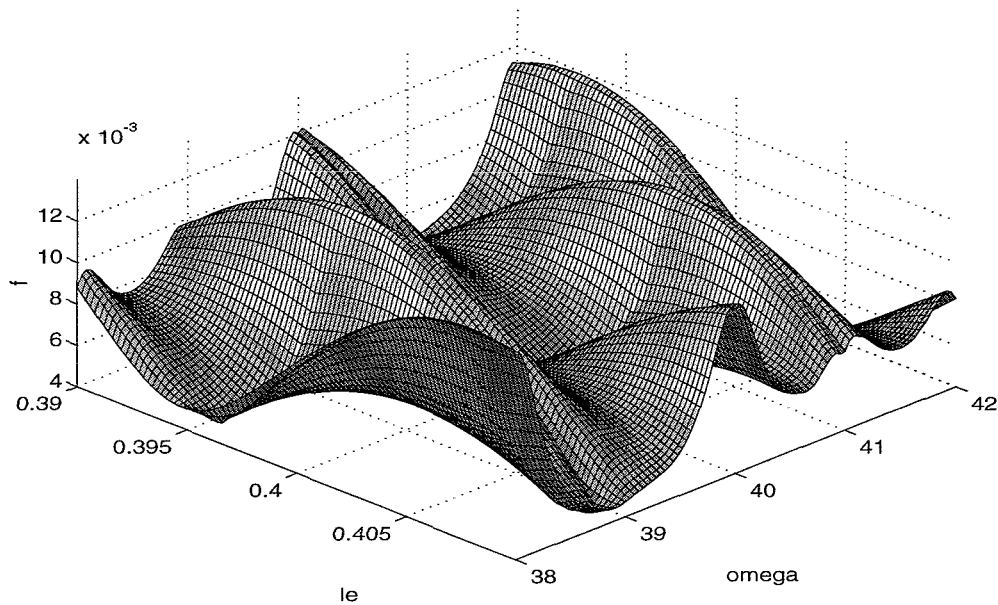
$$\mu_f \approx m_f = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} f_i \quad (3.22)$$

$$\text{var}(f) \approx v_f = \frac{1}{N_{mc} - 1} \sum_{i=1}^{N_{mc}} (f_i - m_f)^2 \quad (3.23)$$

### Responsie-oppervlak methode

De basisgedachte achter de responsie-oppervlak methode is het benaderen van het ware responsie-oppervlak  $f = f(\omega_e, l_e)$  door een benaderingspolynoom  $g = g(\omega_e, l_e)$ . Het responsie-oppervlak  $f$  is te zien in figuur 3.3. Ter bepaling van het benaderingspolynoom worden  $N_e$  deterministische berekeningen uitgevoerd. In ons geval wordt achtereenvolgens de analytische oplossing en DCEDA gebruikt als deterministische solver. Voor elke combinatie van  $\sigma_{\omega_e}$  en  $\sigma_{l_e}$  (paragraaf 3.5.1) worden berekeningen uitgevoerd met een verschillend aantal berekeningen

<sup>9</sup>Men dient hierbij wel rekening te houden met het feit dat deze Gaussische generator negatieve frequenties of excitatiepunten die buiten het domein  $0 < x < 1$  liggen kan genereren.



Figuur 3.3: Het responsie-oppervlak  $f = f(\omega_e, l_e)$  in het werkpunt  $\omega_e = 40$  en  $l_e = 0.40$ .

$N_e$ . Voor de gevallen waarbij maar één parameter stochastisch is, wordt het aantal berekeningen achtereenvolgens  $N_e = 3$ ,  $N_e = 5$ ,  $N_e = 9$  en  $N_e = 17$ . Bij twee stochastische parameters wordt het aantal berekeningen achtereenvolgens  $N_e = 9$ ,  $N_e = 25$ ,  $N_e = 81$  en  $N_e = 289$ . De berekeningen worden uitgevoerd op equidistante punten op het interval  $\mu \pm 4\sigma$ , respectievelijk het oppervlak  $(\mu_{\omega_e} \pm 4\sigma_{\omega_e}, \mu_{l_e} \pm 4\sigma_{l_e})$ . Met behulp van de kleinste kwadraten methode (Strang, 1986) is nu een benaderingspolynoom te bepalen. Alvorens dit toe te lichten, wordt eerst de volgende transformatie uitgevoerd

$$\begin{aligned} \omega_p &= \frac{\omega_e - \mu_{\omega_e}}{4\sigma_{\omega_e}} \\ l_p &= \frac{l_e - \mu_{l_e}}{4\sigma_{l_e}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Met behulp van deze transformatie worden de parameters  $\omega_e$  en  $l_e$  dimensieloos gemaakt en geschaald. Door deze definitie nemen de dimensieloze grootheden  $\omega_p$  en  $l_p$  tijdens de numerieke uitvoering altijd waarden van  $-1$  tot  $1$  aan. De transformatie is nodig, omdat men anders numerieke problemen krijgt bij het machtsverheffen van de evaluatiepunten.

Vervolgens duiden we de  $N_e$  resultaten van de deterministische berekeningen op het punt  $(\omega_p, l_p)$  aan met  $r_i$ . Het benaderingspolynoom schrijven we als

$$g_p(\omega_p, l_p) = c_0 + c_1\omega_p^1 l_p^0 + c_2\omega_p^0 l_p^1 + c_3\omega_p^2 l_p^0 + c_4\omega_p^1 l_p^1 + c_5\omega_p^0 l_p^2 + c_6\omega_p^3 l_p^0 + c_7\omega_p^2 l_p^1 \dots \quad (3.25)$$



Substitutie van de evaluaties  $r_i$  in (3.25) levert  $N_e$  algebraïsche vergelijkingen

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega_{p;1} & l_{p;1} & \omega_{p;1}^2 & \dots \\ 1 & \omega_{p;2} & l_{p;2} & \omega_{p;2}^2 & \dots \\ 1 & \omega_{p;3} & l_{p;3} & \omega_{p;3}^2 & \dots \\ 1 & \omega_{p;4} & l_{p;4} & \omega_{p;4}^2 & \dots \\ 1 & \omega_{p;5} & l_{p;5} & \omega_{p;5}^2 & \dots \\ 1 & \omega_{p;6} & l_{p;6} & \omega_{p;6}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Dit stelsel is te schrijven als

$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{r} \quad (3.27)$$

en is over het algemeen onoplosbaar. Toepassen van de kleinste kwadraten methode levert de kleinste kwadraten oplossing, welke de constanten  $c_i$  levert.

$$\mathbf{c} = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{r} \quad (3.28)$$

De constante  $\mathbf{c}$  wordt in Matlab bepaald door het numeriek inverteren van  $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ . Opgemerkt wordt, dat het in dit geval beter was om een andere numerieke techniek, gebaseerd op de pseudo-inverse, te hanteren. Uit het polynoom  $g_p(\omega_p, l_p)$  kan het polynoom  $g(\omega_e, l_e)$  bepaald worden. Nu worden de verwachting en variantie van  $\underline{f}$  bepaald door middel van een numerieke evaluatie van (3.13) waarbij  $f$  wordt benaderd door de eenvoudig te evalueren  $g(\omega_e, l_e)$ . De berekeningen worden doorgevoerd tot orden van maximaal 10. Bij dergelijke hoge orden kan de nauwkeurigheid van het numerieke algoritme verminderen. Daarom dient bij deze hoge orden de nodige voorzichtigheid in acht te worden genomen.

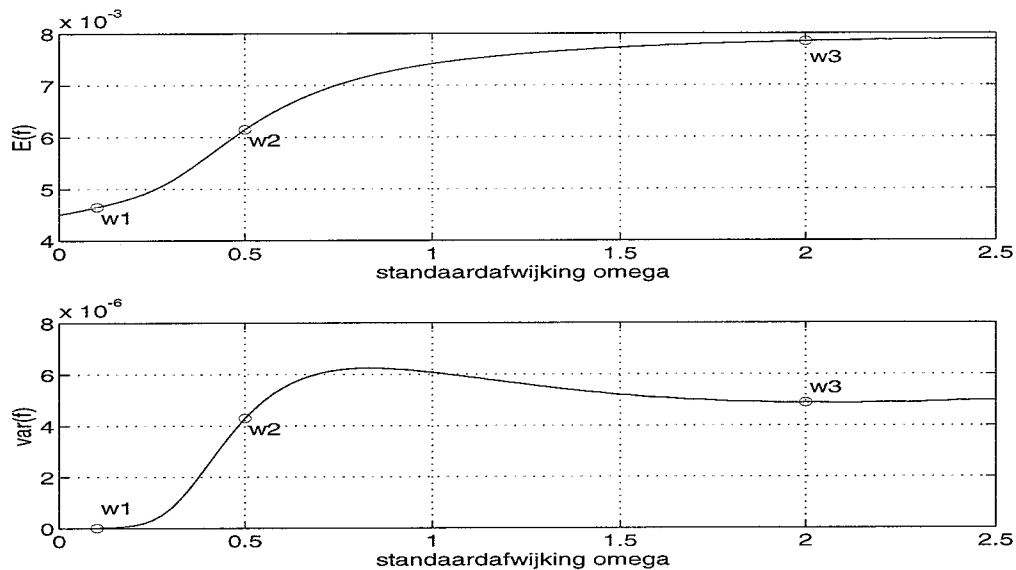
### 3.6 Resultaten

In deze paragraaf zullen enkele representatieve resultaten van de vier methoden worden gepresenteerd. Figuur 3.4 toont de numerieke exacte oplossing waarbij alleen de excitatie  $\underline{\omega}_e$  stochastisch is verondersteld. De verwachting en de variantie van  $\underline{f}$  zijn uitgezet tegen de standaardafwijking van  $\underline{\omega}_e$ . In deze figuur zijn de oplossingen van de punten w1, w2 en w3 aangeduid door de grotere punten. In figuur 3.5 is alleen het excitatiepunt  $\underline{l}_e$  stochastisch. De verwachting en variantie van  $\underline{f}$  zijn uitgezet tegen  $\sigma_{l_e}/E[\lambda]$ . In deze figuur zijn de oplossingen van de punten l1, l2 en l3 aangeduid door de grotere punten. In figuur 3.6 is zowel de

	w1	w2	w3	l1	l2	l3	b1	b2	b3
$E[f]10^3$	4.65	6.15	7.85	5.58	7.20	8.83	7.32	8.53	7.84
$\text{var}(f)10^6$	0.0147	4.29	4.89	1.51	5.65	7.76	3.62	6.63	4.72

Tabel 3.2: Numerieke resultaten bepaald met behulp van de exacte methode, zie ook de figuren 3.4 t/m 3.6.

excitatiefrequentie  $\underline{\omega}_e$  als het excitatiepunt  $\underline{l}_e$  stochastisch verondersteld. Voor 3 waarden van  $\sigma_{l_e}$ , elk overeenkomend met een curve, is voor 11 waarden van  $\sigma_{\omega_e}$  de verwachting en variantie van  $\underline{f}$  bepaald. Deze berekende waarden zijn aangeduid door de kleine zwarte punten. De oplossingen van de punten b1, b2 en b3 zijn aangeduid door de grotere punten.



Figuur 3.4: Exacte oplossing bij  $\sigma_{l_e} = 0$ . Opvallend is dat de variantie van  $\underline{f}$  eerst toeneemt en vervolgens weer afneemt bij toename van de variantie van  $\underline{\omega}_e$ .

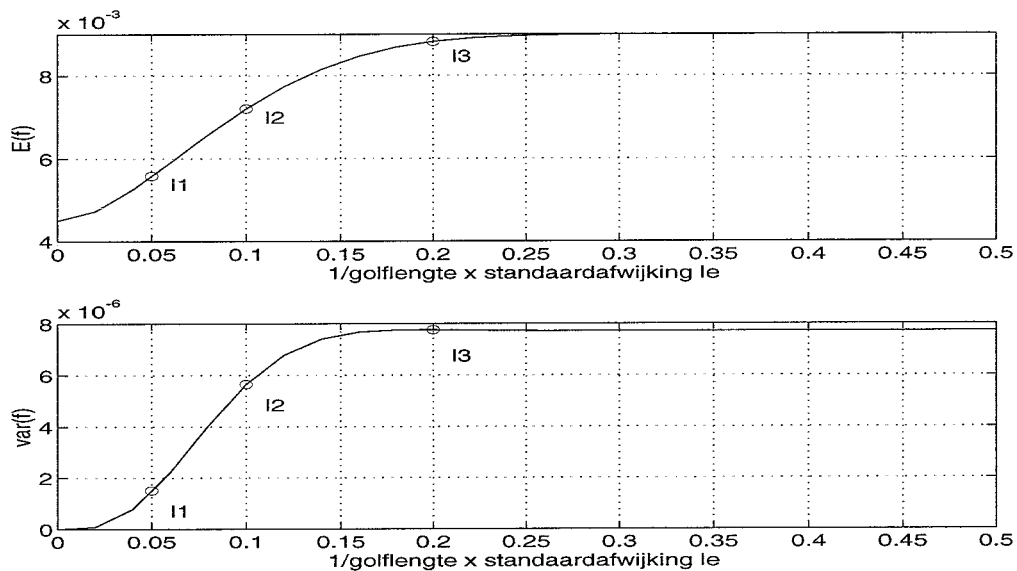
In figuur 3.7 zijn de schatters voor de verwachting en de variantie van  $\underline{f}$  uitgezet tegen het aantal deterministische oplossingen  $N_{mc}$  in een Monte-Carlo analyse. De schatters zijn bepaald op de punten  $N_{mc} = a10^b$  waarin  $a$  en  $b$  gehele getallen zijn. Deze punten zijn aangegeven door de zwarte stippen. De verschillende Monte-Carlo oplossingen zijn verbonden door een lijn. Ook is een rechte lijn van hetzelfde lijntype getekend. Deze lijn is de numeriek exacte oplossing uit tabel 3.2. In bijlage F zijn de overige Monte-Carlo resultaten gepresenteerd.

In figuur 3.8 zijn de responsie-oppervlak oplossingen voor het punt w2 gepresenteerd. De verwachting en variantie van  $\underline{f}$  is uitgezet tegen de orde van het benaderingspolynoom. Dit benaderingspolynoom is bepaald op basis van een aantal deterministische evaluaties van de oplossing. De 4 lijntypen corresponderen met het verschillende aantal evaluaties die gebruikt zijn ter constructie van het benaderingspolynoom. De curven met 3, 5 en 9 evaluaties kunnen een benaderingspolynoom met een maximale orde van respectievelijk 2, 4 en 8 genereren. Daarom lopen deze curven niet door tot de orde 10. In figuur 3.9 zijn dezelfde resultaten gepresenteerd als in figuur 3.8, alleen dan voor de responsie-oppervlak methode in combinatie met de DCEDA solver.

Om uitspraken te doen over de kans dat een bepaalde waarde wordt overschreden, kunnen we gebruik maken van de Chebyshev-ongelijkheid (3.2). Dit doen we voor punt w3, waarvoor volgens tabel 3.2 geldt  $\mu_f = 7.85 \cdot 10^{-3}$  en  $\sigma_f^2 = 4.89 \cdot 10^{-6}$ . Indien we nu bijvoorbeeld een waarde voor  $f$  willen bepalen die met 25 % zekerheid niet wordt overschreden, dan stellen we  $n^{-2} = 0.25$  in (3.2), waaruit volgt

$$P(|\underline{f} - 7.85 \cdot 10^{-3}| \geq 4.42 \cdot 10^{-3}) \leq \frac{1}{2^2} \quad (3.29)$$

De kans dat  $\underline{f}$  de waarde  $12.3 \cdot 10^{-3}$  overschrijdt, is kleiner dan of gelijk aan 25 %.



Figuur 3.5: Exacte oplossing bij  $\sigma_{\omega_e} = 0$ . Hier neemt de variantie van  $\underline{f}$  wel toe met toenemende variantie van  $\underline{l}_e$ .

### 3.7 Conclusies

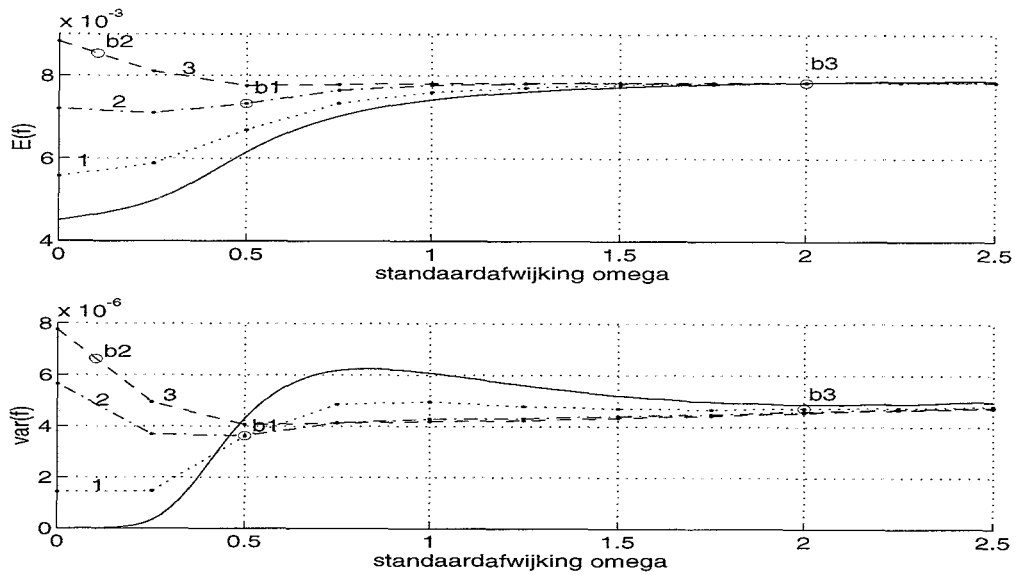
Uit figuur 3.6 blijkt dat het toevoegen van een extra stochastische systeemparameter niet altijd resulteert in een toename van de variantie van de uitgangsgrootte, in dit geval  $\underline{f}$ . Het vergroten van de variantie van een ingangsgrootte  $\underline{\omega}_e$  kan leiden tot een verlaging van de variantie van de uitgangsgrootte  $\underline{f}$  (figuur 3.4).

Het bepalen van de exacte oplossing van het statistische probleem vereist zeer veel numerieke inspanning. Deze inspanning neemt sterk toe indien meerdere parameters stochastisch worden verondersteld.

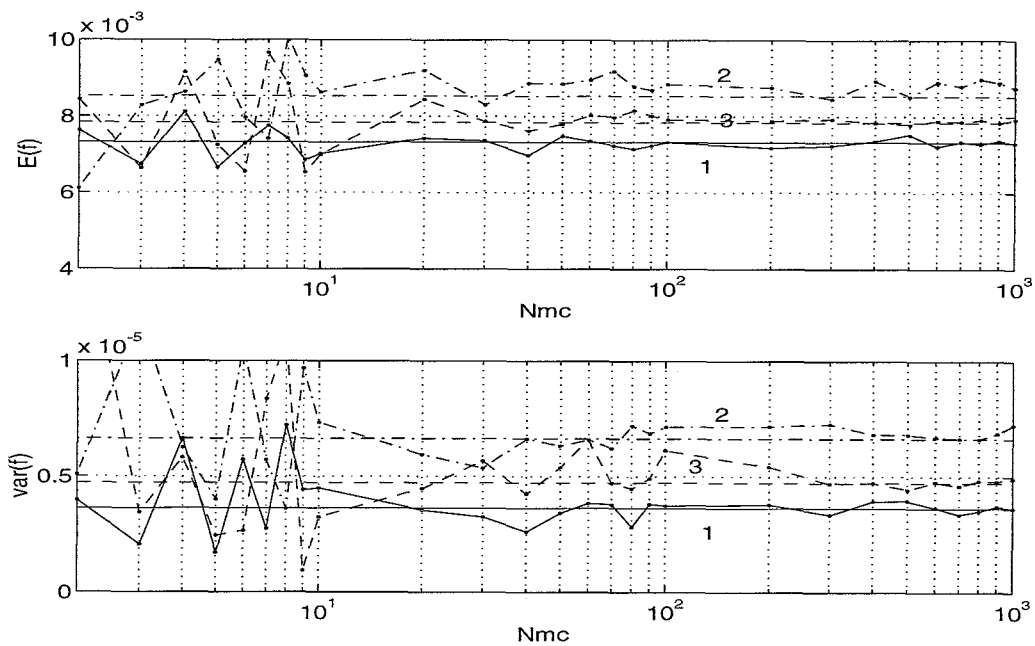
De Monte-Carlo methode geeft na 100 numerieke berekeningen goede resultaten. Opvallend is dat ook bij grotere standaarddeviaties en bij twee stochastische parameters de resultaten na 100 berekeningen goed blijken.

De bruikbaarheid van de responsie-oppervlak methode is beperkt tot systemen waarbij het responsie-oppervlak vrij glad is. Is dit niet het geval, dan voldoen zelfs de hogere orde benaderingen niet (bijlage F). Het verschil tussen de combinatie van de responsie-oppervlak methode met de analytische oplossing en SCEDA (responsie-oppervlak methode met DCEDA) is de oorzaak van de fouten in het maximale amplitude bepaald door de DCEDA solver. Deze kunnen oplopen tot 20 procent. Dit is ook de orde grootte van de fout die optreedt in de verwachtingswaarde tussen beide methoden.

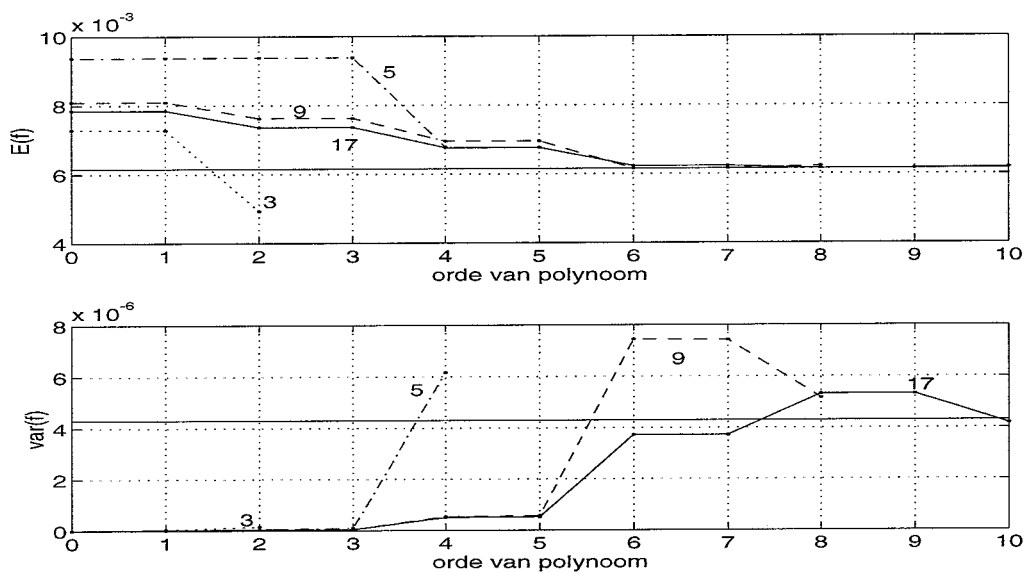
Als eindconclusie kan gesteld worden, dat de, hier niet gebruikte, combinatie van DCEDA met een Monte-Carlo aanpak het meest zinvol is. Deze combinatie is de meest algemene en biedt betrouwbare uitkomsten. Het nadeel van de vele berekeningen van de deterministische oplossing kan beperkt worden door een numeriek efficiëntere methode. Indien mogelijk kan in de toekomst DCEDA hiervoor gebruikt worden



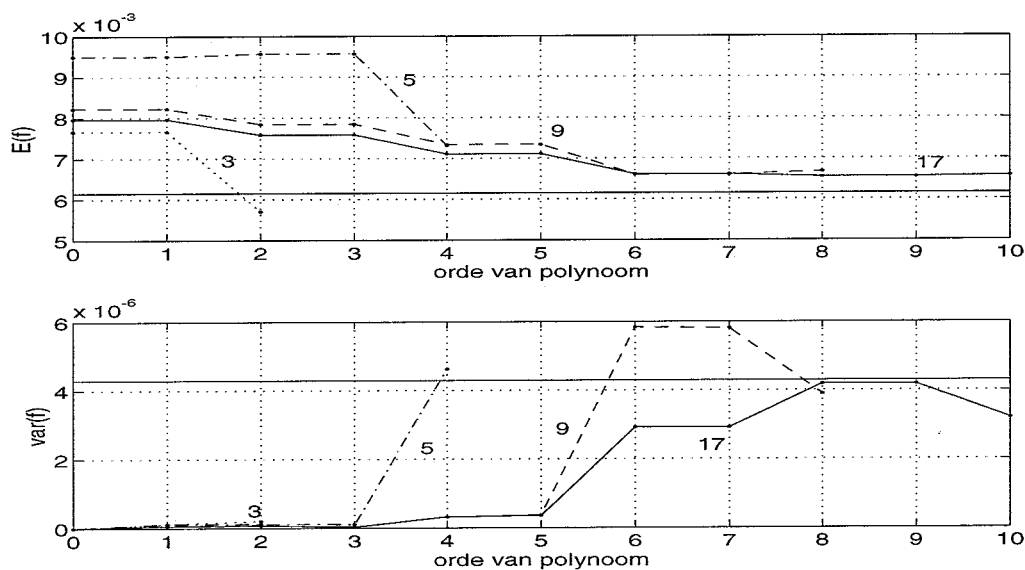
Figuur 3.6: Exacte oplossing bij  $\sigma_{l_e} = 0\lambda(-)$ ,  $\sigma_{l_e} = 0.05\lambda(1)$ ,  $\sigma_{l_e} = 0.1\lambda(2)$  en  $\sigma_{l_e} = 0.2\lambda(3)$ . Opvallend is de daling van de variantie van  $\underline{f}$  rond  $\sigma_{\omega_e} = 0.75$  indien de variantie van  $\underline{l_e}$  toeneemt.



Figuur 3.7: Monte-Carlo oplossing bij  $\sigma_{\omega_e} = 0.5 \sigma_{l_e} = 0.1\lambda$ (curve 1, punt b1),  $\sigma_{\omega_e} = 0.1 \sigma_{l_e} = 0.2\lambda$ (curve 2, punt b2) en  $\sigma_{\omega_e} = 2 \sigma_{l_e} = 0.05\lambda$ (curve 3, punt b3) als functie van het aantal ( $N_{mc}$ ) gebruikte analyses. De Monte-Carlo schatters zijn aangegeven door de zwarte punten. De rechte lijn van hetzelfde lijntype geeft de numeriek exacte oplossing uit tabel 3.2 aan. Na 100 tot 200 deterministische evaluaties blijken de resultaten goed te voldoen.



Figuur 3.8: Responsie-oppevlak met exacte solver oplossing voor punt w2, dus bij  $\sigma_{\omega_e} = 0.5$  voor 3, 5, 9 en 17 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. De doorgetrokken rechte lijn is de exacte oplossing. De verwachting blijkt redelijk nauwkeurig te kunnen worden bepaald voor orden groter dan of gelijk aan 4. Het bepalen van de variantie is slechts mogelijk bij hogere orden en veel evaluaties.



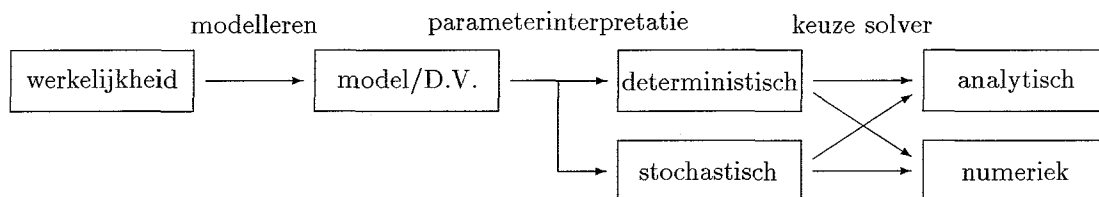
Figuur 3.9: Responsie-oppevlak met DCEDA solver oplossing voor punt w2, dus bij  $\sigma_{\omega_e} = 0.5$  voor 3, 5, 9 en 17 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Deze figuur komt sterk overeen met figuur 3.8. Het verschil in de verwachte waarde van  $\underline{f}$  is het gevolg van de afwijkingen die optreden in de DCEDA solver.

# Hoofdstuk 4

## Discussie

### 4.1 Aandachtspunten bij hoogfrequente analyses

Aan de hand van figuur 4.1 zullen enkele algemene bevindingen worden gepresenteerd. Deze bevindingen zijn gebaseerd op de tijdens het afstudeerwerk verkregen inzichten in de problemen die optreden bij het analyseren van systemen in het midden- en hoogfrequente gebied. In figuur 4.1 wordt schematisch aangegeven welke weg men over het algemeen volgt bij het



Figuur 4.1: Werkwijze bij dynamisch modelleren.

oplossen van een dynamisch probleem. De drie stappen tussen de vier fasen worden hieronder toegelicht

- Modelleren.

In deze stap wordt het werkelijke systeem beschreven door een model waar men numeriek of analytisch mee kan werken. In principe is dit te interpreteren als een reductie van het aantal vrijheidsgraden. Belangrijke aspecten bij de modellering van complexe problemen zijn de mate van nauwkeurigheid van de geometriebeschrijving en de toe te passen constitutieve vergelijking (Schreurs, 1991). Voor veel voorkomende elementen zoals balken en platen zijn vaak bewegingsvergelijkingen afgeleid op basis van verschillende speciale aannamen. Door het maken van deze aannamen kunnen enkele hogere orde effecten niet meer worden beschreven. Voorbeelden zijn:

- Het verwaarlozen van de rotatietraagheidskrachten en schuifspanningen bij buiggolven in balken levert de Bernoulli-Euler-balk beschrijving. Deze vergelijking voldoet voor lage frequenties goed, echter indien de frequentie naar oneindig gaat, dan gaat de fasesnelheid ook naar oneindig. Het Timoshenko balkmodel heeft dit probleem niet, de vergelijking is echter veel complexer (Graff, 1975).

- Meer nauwkeurige beschrijvingen introduceren soms een cut-off frequentie die de overgang tussen voortplantende golven en niet-voortplantende golven aangeeft. Dit is bijvoorbeeld het geval bij een balk met een elastische fundering. Waar de cut-off frequentie optreedt, is afhankelijk van de systeemparameters.

- Parameterinterpretatie.

Na het opzetten van een model moet overwogen worden welke parameters deterministisch en welke stochastisch verondersteld dienen te worden. Voor de stochastische parameters dient vervolgens een goede beschrijving van het stochastische gedrag te worden bepaald.

- Solver.

Voor eenvoudige problemen kan men het verkregen probleem analytisch oplossen. Voor complexere problemen dient men een numerieke oplosmethode te gebruiken.

Het aanbrengen van verbeteringen in deze drie verschillende stappen is alleen zinvol indien ze goed op elkaar zijn afgestemd. Zo heeft bijvoorbeeld de toepassing van een hogere orde FEM-element geen zin, indien bij de modellering aannamen zijn gemaakt die fouten van een orde hoger opleveren. Het toepassen van een stochastische systeemparameter in een Bernoulli-Euler-balk is alleen zinvol in het frequentiegebied waarin de Bernoulli-Euler-balk de werkelijkheid voldoende nauwkeurig beschrijft. Ook van groot belang is de betrouwbaarheid van de ingangsparementen van het model. Met name de betrouwbaarheid van de modellering van de stochastische parameters<sup>1</sup> is vaak moeilijk in te schatten.

De afstemming van de ordegrootte van fouten blijkt voor laagfrequente constructies goed mogelijk. Voor hoogfrequente problemen is het vaak zeer moeilijk om in te schatten waar de grootste fouten gemaakt worden.

Een belangrijk aspect bij hoogfrequente analyses is de toename van de gevoeligheid voor kleine veranderingen van de systeemparameters bij hoge frequenties. Een oplossing van een hoogfrequent probleem is daarom altijd sterk afhankelijk van de gekozen systeemparameters. Indien we bepaalde uitgangsgrootheden (bijvoorbeeld een verplaatsing) gaan middelen, dan blijkt de gevoeligheid vaak veel minder groot. Vaak treedt dan zelfs een ongevoeligheid op in de systeemparameters. Dit kan men inzien aan de hand van de volgende voorbeelden:

- De afstand tussen de eigenfrequenties van een vierde-orde Bernoulli-Euler-balk gaat bij toenemende frequentie voor verschillende RVW naar dezelfde grootte toe.
- Indien men de excitatiefrequentie naar oneindig laat gaan, dan zijn plaatsgemiddelde responsies van een plaat onafhankelijk van de de RVW (Dowell & Kubota, 1985).

Aan de hand van figuur 4.1 kunnen we ook een andere interpretatie geven aan de werkwijze van SEA. Men kan stellen dat SEA gebruik maakt van een zeer beperkte modellering, die in de praktijk niet altijd goed onderbouwd kan worden. De manier waarop SEA gebruik maakt van de stochastisch veronderstelde systeemparameters is echter bijzonder, omdat de wijze waarop dit gebeurt resulteert in zeer eenvoudige thermische relaties die onder enkele aannamen goed zijn onderbouwd. Het feitelijke probleem van SEA is dus, dat men niet goed kan inschatten wat de fout is ten gevolge van het niet exact voldoen aan de SEA aannamen, die gebruikt zijn bij de afleiding van de thermische relaties.

---

<sup>1</sup>Denk hierbij aan verwachtingen, varianties, hogere orde momenten en in het uiterste geval zelfs complete kansdichtheidsfuncties.

## 4.2 Gedempte complex omhullende analyse (DCEDA)

### Automatiseerbaarheid

DCEDA hanteert een eerste-orde numeriek integratieschema om een systeem op te lossen. De integratiestap is variabel en afhankelijk van de gladheid van het rechterlid van de differentiaalvergelijking. Om DCEDA succesvol te kunnen gebruiken, is het noodzakelijk om een eindige elementenformulering te gebruiken. Voordelen van een dergelijke formulering zijn

- de automatische generatie van een discretisatieveld met verfijningen op plaatsen waar dat nodig is;
- toepassing van standaard CAD/FEM-pakketen.

Deze formulering is nog niet aanwezig. Het grootste probleem bij deze formulering is de automatische keuze van de vier reële vrijheidsgraden in de huidige DCEDA formulering op een wijze dat een numeriek aantrekkelijke oplossing wordt gegenereerd.

### Complexere problemen

Op dit moment is DCEDA alleen uitgewerkt voor een gedempt longitudinaal trillingsprobleem. Om complexere problemen op te lossen, dient het mogelijk te zijn om de volgende stappen te kunnen uitvoeren

- transformatie van differentiaalvergelijking.
  - Carcaterra toont aan (Carcattera & Sestieri, 1994) dat elke reële één-dimensionale gewone differentiaalvergelijking is te transformeren naar een CE-vergelijking. Longitudinale trillingen en buigtrillingen in een balk zijn hier voorbeelden van.
  - Met behulp van de in dit rapport voorgestelde methode, waarbij een complexe oplossing wordt opgesplitst in een reële en een imaginaire component, is het ook mogelijk om *complexe* één-dimensionale gewone differentiaalvergelijkingen te transformeren. Gedempte longitudinale trillingen en gedempte buigtrillingen in balken zijn hier voorbeelden van.
  - Het is aan te tonen dat ook een twee-dimensionale differentiaalvergelijking met een van meerdere grootheden afhankelijke variabele is te transformeren naar een CE-vergelijking. Een trilling in een membraam is hier een voorbeeld van.
  - Of het ook mogelijk om gekoppelde vergelijkingen zoals de vergelijking van Navier (Achenbach, 1973)

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (4.1)$$

te transformeren, is niet direct duidelijk.

- efficiënt en automatisch toepassen van de RVW.

De wijze waarop de RVW in (Carcattera & Sestieri, 1994) worden behandeld is niet algemeen toepasbaar. In dit rapport is een algemene behandeling van de RVW gegeven die formeel is uit te breiden naar complexere systemen. Het probleem blijft de automatiseerbaarheid van de keuze van de vrijheidsgraden.



### **Numerieke efficiëntie**

DCEDA is in staat om numerieke problemen op te lossen waarbij reducties tot 80 procent in de meshgrootte behaald kunnen worden. Er is op dit moment nog niet genoeg inzicht in de effectieve reductie van de rekentijd. Deze effectieve reductie is lager dan 80 procent, omdat voor de numerieke analyse een Hilberttransformatie uitgevoerd dient te worden. Ook dient na de numerieke analyse een inverse-transformatie te worden uitgevoerd. Ook het numeriek algoritme ter bepaling van de grootte van de integratiestap heeft een lagere reductie tot gevolg.

## Hoofdstuk 5

# Conclusies en aanbevelingen

### 5.1 Conclusies

#### Het literatuuronderzoek naar de voorgestelde alternatieven van SEA

Na het onderzoeken van de voorgestelde alternatieven (Raaymakers, 1995) kan men concluderen dat in dit stadium geen van de alternatieven een bruikbaar alternatief voor SEA kan zijn. In het rapport (Raaymakers, 1995) wordt een nadere toelichting op deze conclusie gegeven.

#### Gedempte complex omhullende analyse (DCEDA)

DCEDA is in staat om numerieke problemen op te lossen waarbij reducties tot 80 procent in de meshgrootte behaald kunnen worden. Er is op dit moment nog niet genoeg inzicht in de effectieve reductie van de rekentijd.

Op dit moment is DCEDA alleen uitgewerkt voor een gedempt longitudinaal trillingsprobleem. Om complexere problemen op te lossen, dient het mogelijk te zijn om de volgende stappen te kunnen uitvoeren

- transformatie van differentiaalvergelijkingen.
- efficiënt en automatisch toepassen van de RVW.

De wijze waarop de RVW in (Carcatterra & Sestieri, 1994) worden behandeld, is niet algemeen toepasbaar. In dit rapport is een algemene behandeling van de RVW gegeven die is uit te breiden naar complexere systemen. Het transformeren van complexere vergelijkingen lijkt mogelijk.

Om DCEDA succesvol te gebruiken, is het noodzakelijk om een eindige elementenformulering te gebruiken. Voordelen van een dergelijke formulering zijn de automatische gridverfijningen op plaatsen waar dat nodig is en de toepasbaarheid van standaard CAD<sup>1</sup>/FEM-pakketten.

Het grootste probleem bij een algemene FEM-formulering zijn de vrijheidsgraden in DCEDA. Deze vrijheidsgraden dienen automatisch bepaald te worden, zodanig dat het FEM-pakket een numeriek aantrekkelijke oplossing genereert. Hoe dit dient te gebeuren, is nog niet onderzocht.

Verder wordt opgemerkt dat alleen differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten getransformeerd kunnen worden. Dit houdt in dat men alleen homogene materialen kan beschouwen. Dergelijke problemen zijn voor eenvoudige geometrieën vaak analytisch op te

---

<sup>1</sup>'Computer Aided Design'

lossen. Het voordeel van een mogelijke toekomstige CEDA aanpak dient dan ook gezocht te worden in de behandeling van complexe geometrieën. Opgemerkt wordt, dat het misschien mogelijk is om een inhomogene structuur op te delen in meerdere substructuren die automatisch gekoppeld worden. Mogelijk kan een substructuur in een FEM-element worden ondergebracht.

### **Methoden voor het analyseren van stochastische systemen**

Geconcludeerd kan worden dat systemen met stochastische parameters in het homogene deel van de differentiaalvergelijking over het algemeen veel moeilijker zijn op te lossen dan systemen met alleen stochastische parameters in het inhomogene deel.

Er is geen methode gevonden die direct in DCEDA gebruikt kan worden zoals de wijze waarop Sun (Sun, 1979a; Sun, 1979b) zijn stochastische eindige elementen formuleert. Wel kan DCEDA gebruikt worden als efficiënte solver in combinatie met verschillende statistische methoden.

Gezien de uitgevoerde numerieke analyses kan geconcludeerd worden, dat de Monte-Carlo methode op dit moment de meest betrouwbare (afgezien van de exacte methode) en meest algemene methode is om te gebruiken in combinatie met een willekeurige solver. In combinatie met DCEDA als mogelijke efficiënte solver zou het probleem van de meerdere deterministische berekeningen in de toekomst verminderd kunnen worden.

### **Eindconclusie**

Op dit moment is DCEDA niet in staat om te concurreren met andere methoden. Of de methode hiertoe ooit in staat zal zijn, hangt af van twee aspecten

- uitbreidbaarheid, dus de mogelijkheid om complexere differentiaalvergelijkingen op te lossen;
- automatiseerbaarheid, dus een eindige elementenformulering met automatische behandeling van de vrijheidsgraden.

Carcatterra heeft aangetoond hoe men de differentiaalvergelijking behorende bij ongedempte longitudinale en buigtrillings-problemen kan transformeren. In dit rapport is het mogelijk gemaakt om beide differentiaalvergelijkingen ook voor het gedempte geval te transformeren. Het transformeren van de differentiaalvergelijking behorende bij de trilling in een membraam is ook te transformeren. Of de differentiaalvergelijking behorende bij de trilling van een plaat is te transformeren is nog niet aangetoond, maar dit is zeer waarschijnlijk wel mogelijk, omdat deze trilling in feite een 2-dimensionale uitbreiding is van de buigtrilling in een balk. Over andere differentiaalvergelijkingen is niet direct te zeggen of deze te transformeren zijn. Het onderzoeken van de transformeerbaarheid van een differentiaalvergelijking is echter geen probleem.

Op dit moment lijkt het tweede punt het meest problematische. In dit rapport is aangetoond dat de CE-oplossing een vrijheidsgraad bezit. Standaard FEM-pakketten kunnen hiermee niet overweg. Daarom zal een randvoorwaarde gekozen moeten worden om het probleem eenduidig vast te leggen. Hoe deze randvoorwaarde automatisch bepaald moet worden zodat een gladde oplossing wordt verkregen, is nog niet onderzocht.

Voor het betrouwbaar analyseren van algemene, sterk stochastische systemen is men op dit moment aangewezen op Monte-Carlo technieken.

## 5.2 Aanbevelingen

### Onderzoek naar het toepassingsgebied van differentiaalvergelijkingen die gebruikt worden in combinatie met statistische methoden voor midden- en hoogfrequente toepassingen

De afleiding van differentiaalvergelijking (2.27), welke longitudinale golven in balken beschrijft, is gebaseerd op enkele aannamen die bij hoge frequenties niet meer gelden (Achenbach, 1973; Elmore & Heald, 1969). De afwijking tussen de exacte oplossing van de gebruikte differentiaalvergelijking en de exacte oplossing van een in het hoogfrequent gebied meer nauwkeurige vergelijking (Timoshenko) moet worden onderzocht, zodat een afschatting kan worden verkregen in de resulterende fouten. De doorwerking van deze fouten in een latere statistische formulering zijn van belang, omdat bij te grote fouten ten gevolge van een beperkte of onjuiste formulering de voordelen van een statistische benadering teniet worden gedaan.

### Gedempte complex omhullende analyse (DCEDA)

- DCEDA uitbreiden zodat andere RVW gebruikt kunnen worden.  
In eerste instantie dient men een homogene Neumann-RVW, overeenkomend met een vrij uiteinde, te implementeren. Daarna kunnen inhomogene Neumann-RVW geïmplementeerd worden.
- Koppeling tussen meerdere DCEDA substructuren.  
De beperking van constante parameters in de differentiaalvergelijking, dus constante materiaaleigenschappen, vereist een opdeling in meerdere substructuren indien men inhomogene materialen wil beschouwen. Mogelijk kunnen deze substructuren in een FEM-element worden ondergebracht. Wat het effect is op de uiteindelijke gladheid van de oplossing dient ook onderzocht te worden.
- Uitbreiding van de theorie naar de vierde-orde differentiaalvergelijking die buiggolven in een balk beschrijft.  
Dit is het onderwerp waarmee Carcaterra zich op dit moment bezighoudt. Zijn eerste artikelen en de gevoerde correspondentie wijzen er echter op, dat men gebruik gaat maken van een tweede-orde vergelijking, waardoor het nabijheidsveld verwaarloosd wordt. In dit rapport is een algemene aanpak van de RVW gepresenteerd en een toepassing op balken waarbij de vierde-orde differentiaalvergelijking wordt gebruikt, is dan ook geen probleem.
- Automatiseerbaarheid.  
Onderzoeken of het mogelijk is om het in dit rapport behandelde longitudinale probleem op te lossen door middel van een eindige elementenmethode-pakket. Vervolgens dient onderzocht te worden of het mogelijk is om automatisch de numeriek meest aantrekkelijke RVW te kiezen. De eerste aanzet hiervoor is gegeven in bijlage G. Van belang zijn ook de mogelijkheden met betrekking tot automatische gridverfijning. Dit is de moeilijkste maar meest essentiële uitbreiding.
- Numerieke efficiëntie.  
Uitvoeren van een kritische vergelijking tussen de klassieke eindige elementenmethode en de DCEDA variant. Voor een juiste vergelijking dient voor FEM ook gridverfijning mogelijk te zijn.

# Literatuurlijst

- Abramowitz, M., & Stegun, I.A. 1964. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Washington D.C.: US Government Printing Office.
- Achenbach, J.D. 1973. *Wave propagation in elastic solids*. North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. North Holland Publishing Company.
- Benaroya, D.H., & Rehak, M. 1988. Finite element methods in probabilistic structural analysis: a selective review. *Appl. Mech. Rev.*, 41(5), 201–213.
- Bracewell, R. 1965. *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill Electrical And Electronic Engineering Series. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Bruin, R., van der Laan, C.G., Luyten, J.R., & Vogt, H.F. 1980. *Publiceren met L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*. Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam.
- Carcattera, A., & Sestieri, A. 1994. Toward a complete definition of the envelope energy model for high frequency vibrations. *ISMA19 - Tools for Noise and Vibration Analysis*, 459–469.
- Chakraborty, S., & Dey, S.S. 1995. Stochastic finite element method for spatial distribution of material properties and external loading. *Computers & Structures*, 55(1), 41–45.
- Chatfield, C. 1983. *Statistics for technology*. Third edn. London: Chapman & Hall.
- Cijsouw, P.L. 1992. *Fouriertheorie, Stochastiek en Signaalverwerking*. collegedictaat T.U.E. 2360, Technische Universiteit Eindhoven.
- Crandall, S.H. 1979. Random Vibration of One- and Two-Dimensional structures. *Developments in Statistics*, 2, 1–82.
- Crandall, S.H., & Mark, William D. 1963. *Random Vibration in Mechanical Systems*. New York and London: Academic Press.
- Cremer, L., Heckl, M., & Ungar, E.E. 1988. *Structure-Borne Sound*. Germany: Springer-Verlag.
- de Kraker, A. 1992. *Numeriek-experimentele analyse van dynamische systemen*. collegedictaat T.U.E. 4668, Technische Universiteit Eindhoven.
- de Langhe, K., & Sas, P. 1994. An experimental - analytical SEA identification and applied validation criteria of a box type structure. *ISMA19 - Tools for Noise and Vibration Analysis*, 431–445.

- Dowell, E.H., & Kubota, Y. 1985. Asymptotic Modal Analysis and Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems. *Journal of Applied Mechanics*, **152**, 949–957.
- Elmore, W.C., & Heald, M.A. 1969. *Physics of Waves*. McGraw-Hill Book Company.
- Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., & Tricomi, F.G. 1954. *Tables of integral transforms*. Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Fahy, F.J. 1994. Statistical Energy Analysis: a critical overview. *Phil. Trans. Royal Society of London*, **346**, 431–447.
- Graff, K.F. 1975. *Wave motion in elastic solids*. Oxford: Clarendon Press.
- Hall, W.S. 1994. *The Boundary Element Method*. Solid mechanics and its applications, vol. 27. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hasselman, T.K., & Hart, G.C. 1972. Modal analysis of random structural systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, **98**, 561–579.
- Kleiber, M., & Hien, T.D. 1994. *The Stochastic Finite Element Method*. New York: John Wiley & Sons.
- Lamport, Leslie. 1994. *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X A Document Preparation System*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Lapidus, L., & Seinfeld, J.H. 1971. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Mathematics in science and engineering, vol. 74. New York: Academic Press.
- Lyon, R.H. 1975. *Statistical Energy Analysis of Dynamic Systems: Theory and Applications*. USA: MIT Press.
- Manohar, C.S., & Iyengar, R.N. 1993. Probability distribution of the eigenvalues of systems governed by the stochastic wave equation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **8**, 57–64.
- Miklowitz, Julius. 1978. *Elastic Waves and Waveguides*. North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. North Holland Publishing Company.
- Mulders, P.C. 1993. *Geavanceerde besturingstechnologie*. collegedictaat T.U.E. 4603, Technische Universiteit Eindhoven.
- Nigam, N.C. 1983. *Introduction to Random Vibrations*. Structural Mechanics. Massachusetts: The MIT Press.
- Raaymakers, J.A.L.J. 1995. *Alternatieve methoden voor SEA in de midden- en hoogfrequente dynamica*. WFW-report 95.161, Technische Universiteit Eindhoven.
- Rodrigo, G.A., Klein, M., & G., Borello. 1994. Columbus APM: In-orbit vibro-acoustic analysis using SEA. *ISMA19 - Tools for Noise and Vibration Analysis*, 447–459.
- Scharton, T.D., & Lyon, R.H. 1968. Power Flow and Energy Sharing in Random Vibration. *Journal of the Acoustical Society of America*, **43**(6), 1332–1343.
- Schreurs, P.J.G. 1991. *Continuümsmechanica*. collegedictaat T.U.E. 4612, Technische Universiteit Eindhoven.

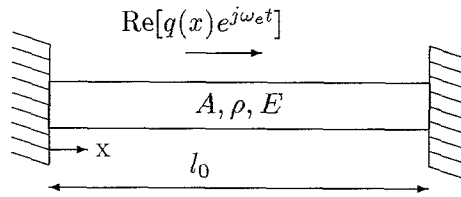
- Shinozuka, M. 1987. Structural Response Variability. *Journal of Engineering Mechanics*, **113**(6), 825–842.
- Soong, T.T. 1973. *Random differential equations in science and engineering*. Mathematics in science and engineering, vol. 103. New York: Academic Press.
- Strang, Gilbert. 1986. *Linear Algebra and its Applications*. Third edn. San Diego: Harcourt Brace Jovanovich, publishers.
- Sun, T.C. 1979a. A finite element method for random differential equations. *Pages 223–237 of: Bharucha-Reid, A.T. (ed), Approximate solution of random equations*. Probability and Applied Mathematics. New York: North Holland.
- Sun, T.C. 1979b. A finite element method for random differential equations with random coefficients. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **16**, 1019–1035.
- Titchmarsh, E.C. 1948. *Introduction of the theory of Fourier integrals*. Oxford University Press.
- To, C.W.S., & Liu, M.L. 1994. Random responses of discretized beams and plates by the stochastic central difference method with time co-ordinate transformation. *Computers & Structures*, **53**(3), 727–738.
- van Steenhoven, A.A. 1984. *De toepassing van de eindige elementenmethode bij stromingsproblemen*. collegedictaat T.U.E. 4538, Technische Universiteit Eindhoven.
- Vanmarcke, E., Shinozuka, M., Nakagiri, S., Schuëller, G.I., & Grigoriu, M. 1986. Random fields and stochastic finite elements. *Structural Safety*, **3**, 143–166.
- Vanmarcke, E.H. 1994. Stochastic finite elements and experimental measurements. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **9**, 103–114.
- Wong, F.S. 1984. Stochastic finite element analysis of a vibrating string. *Journal of Sound and Vibration*, **96**(4), 447–459.
- Wong, F.S. 1985. First-order, second moment methods. *Computers & Structures*, **20**(4), 779–791.
- Wong, F.S. 1986. Finite element/difference methods in random vibration. *Computers & Structures*, **23**(1), 77–85.

## Bijlage A

# Afleiding en analytische oplossing van een longitudinaal golfprobleem

### A.1 Afleiding differentiaalvergelijking

Stellen we de bewegingsvergelijking op van een axiaal geëxciteerde, homogene balk, met constante dwarsdoorsnede (Miklowitz, 1978; Graff, 1975) en voegen we een extra term toe voor



Figuur A.1: Longitudinaal geëxciteerde balk.

de demping, dan volgt voor de longitudinale verplaatsing  $w(x, t)$

$$\rho \ddot{w}(x, t) + c_d \dot{w}(x, t) - E w''(x, t) = p(x, t) \quad (\text{A.1})$$

met  $c_d$  een constante die de mate van demping beschrijft. De eenheid van  $c_d$  is  $Nsm^{-4} = kgm^{-3}s^{-1}$ . In het geval van een harmonische excitatie met frequentie  $\omega_e$  kunnen we de verplaatsing  $w(x, t)$  en de volume-belasting  $p(x, t)$  schrijven als

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \text{Re}[u(x)e^{j\omega_e t}] \\ p(x, t) &= \text{Re}[q(x)e^{j\omega_e t}] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Substitutie van (A.2) in bewegingsvergelijking (A.1) levert

$$u''(x) + \frac{\rho\omega_e^2}{E} \left(1 - \frac{c_d}{\rho\omega_e} j\right) u(x) = -\frac{q(x)}{E} = r(x) \quad (\text{A.3})$$

Vervolgens definiëren we, zie ook (Cremer *et al.*, 1988), hoofdstuk 3

$$\eta = \frac{c_d}{\rho\omega_e} \quad (\text{A.4})$$



$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{E}{1 - \eta j} = \frac{E}{1 + \eta^2} (1 + \eta j) \\
c_0^2 &= \frac{E}{\rho} \\
k_c^2 &= \frac{\rho \omega_e^2}{E} (1 - \eta j) = \frac{\rho \omega_e^2}{E \frac{(1 + \eta j)}{(1 + \eta^2)}} = \frac{\rho \omega_e^2}{E_c} = \frac{\omega_e^2}{c_0^2} (1 - \eta j) = k_e^2 (1 - \eta j)
\end{aligned}$$

## A.2 Exacte oplossing

De exacte oplossing van (2.13) met een puntexcitatie in het punt  $l_e$  is te bepalen met verschillende methoden zoals impulsresponsie-methode, Laplace transformatie en opsplitsing in twee homogene delen met verschillende RVW. Stellen we  $b = k_c^2 \in \mathcal{C}$  en  $a = 2\gamma \in \mathcal{R}$ , dan zijn de polen van het systeem

$$p_1 = -\gamma + jk_d \quad (\text{A.5})$$

$$p_2 = -\gamma - jk_d \quad (\text{A.6})$$

met

$$k_d = \sqrt{k_c^2 - \gamma^2} \quad (\text{A.7})$$

Indien we aannemen dat  $k_c^2 \neq \gamma^2$  dan wordt de homogene oplossing

$$u(x) = Ae^{p_1 x} + Be^{p_2 x} \quad (\text{A.8})$$

waaruit na integratie van  $0^-$  tot  $0^+$  van de differentiaalvergelijking voor de impulsresponsie volgt

$$h(\tau) = \frac{e^{p_1 \tau} - e^{p_2 \tau}}{p_1 - p_2} \varepsilon(\tau) = e^{-\gamma \tau} \frac{e^{+jk_d \tau} - e^{-jk_d \tau}}{2jk_d} \varepsilon(\tau) = \frac{1}{k_d} e^{-\gamma \tau} \sin(k_d \tau) \varepsilon(\tau) \quad (\text{A.9})$$

Indien we nu voor de volgende puntexcitatie kiezen

$$q(x) = -E\delta(x - l_e) \rightarrow r(x) = \delta(x - l_e) \quad (\text{A.10})$$

dan wordt de oplossing van het RVW-probleem na bepaling van een particuliere oplossing door middel van een convolutie-integraal en het toepassen van de twee RVW

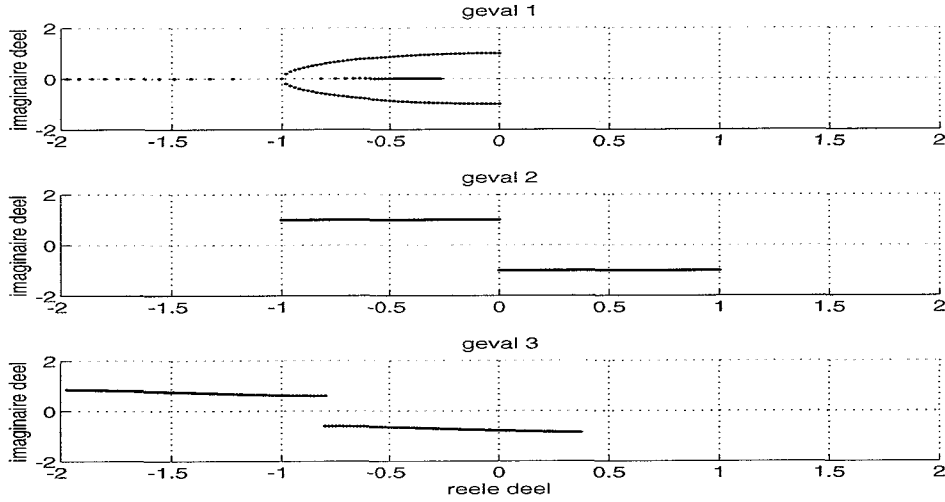
$$u_{exact} = \frac{1}{k_d} e^{-\gamma(x-l_e)} \left[ -\sin(k_d(l_0 - l_e)) \frac{\sin(k_d x)}{\sin(k_d l_0)} + \sin(k_d(x - l_e)) \varepsilon(x - l_e) \right] \quad (\text{A.11})$$

We beschouwen nu twee gevallen. In het eerste geval geldt  $\text{Im}[k_c] = 0$ ,  $0 \leq \gamma < k_c$  en in het tweede geval geldt  $\gamma = 0$ ,  $\text{Im}[k_c] \neq 0$ . Dit komt overeen met een massa-veer-demper systeem, respectievelijk een gedempte longitudinale golf in een balk. Voor het eerste geval geldt  $k_d \in \mathcal{R}$ , voor het tweede geldt  $k_d \in \mathcal{C}$ . De polen  $p_1$  en  $p_2$  zijn als functie van de parameter  $\gamma$  respectievelijk  $\text{Im}[k_c]$  te zien in figuur A.2. Voor de gedempte longitudinale trilling is de impulsresponsie te schrijven als

$$h(\tau) = \frac{1}{k_c} \sin(k_c \tau) \varepsilon(\tau) \quad (\text{A.12})$$

en de exacte oplossing

$$u_{exact} = \frac{1}{k_c} \left[ -\sin(k_c(l_0 - l_e)) \frac{\sin(k_c x)}{\sin(k_c l_0)} + \sin(k_c(x - l_e)) \varepsilon(x - l_e) \right] \quad (\text{A.13})$$



Figuur A.2: Polen  $p_1$  en  $p_2$  bij  $\text{Im}[k_c] = 0$  als functie van  $\gamma$  (grafiek 1), bij  $\gamma = 0$  als functie van  $\text{Im}[k_c]$  (grafiek 2) en bij  $\gamma = 0.8$  als functie van  $\text{Im}[k_c]$  (grafiek 3).

### A.3 Eigenfrequenties en eigenmodes

Omdat we de excitatiefrequentie dimensieloos willen maken met de eerste eigenfrequentie van het systeem, bepalen we de eigenfrequenties en eigenmodes. Indien we hiertoe

$$w_n(x, t) = \psi_n(x)a_n(t) \quad (\text{A.14})$$

substitueren in het homogene deel van (A.1) dan volgt hieruit

$$c_0^2 \frac{\psi_n''}{\psi_n} = \frac{\ddot{a}_n + \frac{c_d}{\rho} \dot{a}_n}{a_n} = -\omega_n^2 \quad (\text{A.15})$$

met  $c_0^2 = E/\rho$ , waaruit volgt

$$\begin{aligned} \psi_n'' + \frac{\omega_n^2}{c_0^2} \psi_n &= 0 \\ \ddot{a}_n + \frac{c_d}{\rho} \dot{a}_n + \omega_n^2 a &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Na toepassing van de homogene Dirichlet-RVW,  $w(0, t) = w(l_0, t) = 0$ , volgt voor de eigenmodes en eigenfrequenties van het gedempte systeem

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \frac{2}{l_0} \sin(n\pi \frac{x}{l_0}) \\ \omega_n &= \frac{n\pi c_0}{l_0} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Deze reële eigenfrequenties en reële eigenmodes zijn gelijk aan de ongedempte eigenfrequenties en eigenmodes.

## A.4 Dimensieloze beschrijving

Uitgaande van de vergelijking

$$u''(x) + \frac{\omega_e^2}{c_0^2}(1 - \eta j)u(x) = -\frac{q(x)}{E} \quad (\text{A.18})$$

en de definities van de dimensieloze grootheden<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{l_0} \\ \bar{u} &= \frac{u}{l_0} \\ \bar{\omega} &= \frac{\omega_e}{\omega_1} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

volgt hieruit

$$\bar{u}''(x) + \pi^2 \bar{\omega}^2 (1 - \eta j) \bar{u}(x) = -\frac{l_0 q(x)}{E} = \bar{q}(x) \quad (\text{A.20})$$

De dimensieloze eigenfrequenties en eigenmodes en de golflengte zijn nu

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_n &= \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{n\pi c_0}{\pi c_0} = n \\ \bar{\psi}_n &= \sin(n\pi \bar{x}) \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k_e} = \frac{2}{\omega} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Het in dit rapport geanalyseerde systeem gaat uit van bovenstaande dimensieloze beschrijving met  $l_0 = 1$  en  $\bar{q}(x) = \delta(x - l_e)$ . De exacte oplossing van dit systeem is te verkrijgen door substitutie van

$$\begin{aligned} l_0 &= 1 \\ c_0^2 &= \frac{E}{\rho} = \frac{1}{\pi^2} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

in de exacte oplossing (A.13) uit bijlage A.2.

---

<sup>1</sup>De dimensieloze grootheden worden hier op dezelfde wijze aangegeven als de complex omhullende. Deze notatie wordt dan ook alleen gehanteerd in deze paragraaf. De afgeleide dimensieloze vergelijking wordt in het rapport niet direct gebruikt. Door het invullen van specifieke parameters zoals de elasticiteitsmodulus  $E$ , de soortelijke massa  $\rho$  en de lengte  $l_0$ , zie (A.22), wordt een dimensieloos systeem geanalyseerd.

## Bijlage B

# Transformatie van de differentiaalvergelijking

Fouriertransformatie van (2.15) levert

$$(-k^2 + jak + b)U(k) = G(k) \quad (\text{B.1})$$

Met behulp van de relatie tussen het oorspronkelijke signaal en de CE hiervan in het golfgetaldomein

$$\bar{U}(k) = 2\varepsilon(k + k_0)U(k + k_0) \quad (\text{B.2})$$

is (B.1) te schrijven als

$$(-k^2 + jk(a + 2jk_0) + b - k_0^2 + jak_0)\bar{U}(k) = \bar{G}(k) \quad (\text{B.3})$$

Inverse Fouriertransformatie van (B.3) levert de volgende differentiaalvergelijking voor de complex omhullende  $\bar{u}(x)$  van de stationaire oplossing van (2.15)

$$\bar{u}''(x) + (a + 2jk_0)\bar{u}'(x) + (b - k_0^2 + jak_0)\bar{u}(x) = \bar{g}(x) \quad (\text{B.4})$$

## Bijlage C

# Numerieke integratie van de CEDA vergelijking

De werkwijze van de numerieke integratie van de CEDA vergelijkingen wordt toegelicht aan de hand van het stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen (2.39), dat te schrijven is als

$$\mathbf{y}' = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{r} \quad (\text{C.1})$$

Elke differentiaalvergelijking van willekeurige orde is te schrijven in een vorm als (C.1). Indien we nu  $\mathbf{y}$  Taylor expanderen rond  $\mathbf{y}_i$  dan volgt

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}(x_i + dx) = \mathbf{y}(x_i) + \mathbf{y}'_i dx + O(dx^2) \quad (\text{C.2})$$

waaruit volgt

$$\mathbf{y}_{i-1} = \mathbf{y}(x_i - dx) = \mathbf{y}(x_i) - \mathbf{y}'_i dx + O(dx^2) \quad (\text{C.3})$$

en

$$\mathbf{y}'_i = \frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i-1}}{dx} + O(dx) \quad (\text{C.4})$$

(C.1) en (C.4) zijn te schrijven als de volgende recursieve relatie

$$\mathbf{y}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{C}dx)^{-1}[\mathbf{r}_i dx + \mathbf{y}_{i-1} + O(dx^2)] \quad (\text{C.5})$$

Met deze relatie worden de numerieke integraties van Overdijk, Carcaterra en DCEDA uitgevoerd. Voor de methode van Carcaterra wordt één constant grof discretisatieschema gebruikt. Voor de methode van Overdijk en DCEDA wordt een variabele integratiestap gebruikt. De grootte van de integratiestap is niet helemaal variabel, maar is beperkt tot twee stappen, een kleine, namelijk  $dx_{fijn}$  en een grote,  $dx_{grof}$ . De kleine integratiestap  $dx_{fijn}$  komt overeen met de discretisatie van de belasting, de discretisatie waarbij de Hilberttransformatie van deze belasting is uitgevoerd, en de discretisatie van de complex omhullende van de belasting. De grote integratiestap  $dx_{grof}$  is een veelvoud van de kleine integratiestap

$$dx_{grof} = f_N dx_{fijn} \quad (\text{C.6})$$

Vervolgens wordt voor aanvang van de integratie voor beide integratiestappen de inverse-matrix  $\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}dx)^{-1}$  bepaald. Bij aanvang van de integratie wordt gestart met een grof discretisatieschema, dus

$$\mathbf{y}_1 \approx \mathbf{P}_{grof}[\mathbf{r}_1 + \mathbf{y}_0] \quad (\text{C.7})$$

Na elke stap wordt een uitdrukking voor de gladheid van het rechterlid  $\mathbf{r}$  berekend. Op basis van deze uitdrukking wordt bepaald, of de volgende stap bij fijne discretisatie zal plaatsvinden, of dat een grove discretisatie wordt toegepast. Het minder glad worden van het rechterlid  $\mathbf{r}$  zal dus resulteren in de overgang op de kleinere integratiestap  $dx_{fijn}$ .

De uitdrukking voor de gladheid van het rechterlid  $\mathbf{r}$  wordt bepaald op basis van het derde element  $r_3 = \bar{r}$  van  $\mathbf{r}$ . Dit is de complex omhullende van de oorspronkelijke belasting en is het enige element in  $\mathbf{r}$  dat ongelijk is aan nul, zie (2.39).

De complex omhullende van de belasting  $\bar{r}$  is fijn gediscetiseerd bekend, dus met tussenstappen van  $dx_{fijn}$ . Om de uitdrukking voor de gladheid van het rechterlid in punt  $x$  te bepalen, worden de eerstvolgende  $f_N$  punten van  $\bar{r}$  na het punt  $x$  benaderd door een rechte lijn. Deze rechte lijn loopt door het eerste en het laatste punt van deze  $f_N$  punten, die dus fijn gediscetiseerd zijn. Vervolgens wordt de som genomen van alle absolute afwijkingen van de  $f_N$  punten van  $\bar{r}$  ten opzichte van deze lijn. Indien deze waarde nu kleiner is dan een bepaalde waarde (4 à 6) dan wordt bij de volgende integratiestap de fijne stapgrootte gebruikt.

## Bijlage D

# Evaluatie van de beginvoorwaarden van de methode van Overdijk

Beschouwen we een ongedempt RVW-probleem van de vorm (2.13) met de parameters  $a = 0$  en  $b = k_e^2$  en met het rechterlid  $r(x) = \delta(x - l_e)$  dan wordt de impulsresponsie

$$h(x) = \frac{1}{k_e} \sin(k_e x) \varepsilon(x) \quad (\text{D.1})$$

Voor de eerste beginvoorwaarde van (2.24) geldt nu

$$\begin{aligned} \bar{u}(0) &= j \int_{-\infty}^{\infty} h(-\tau) \tilde{r}(\tau) d\tau \\ &= j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_e} \sin(-k_e \tau) \varepsilon(-\tau) \frac{1}{\pi(\tau - l_e)} d\tau \\ &= \frac{-j}{k_e} \int_{-\infty}^0 \sin(k_e \tau) \frac{1}{\pi(\tau - l_e)} d\tau \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Met  $\gamma = l_e - \tau$  wordt dit

$$\begin{aligned} \bar{u}(0) &= \frac{j}{\pi k_e} \int_{l_e}^{\infty} \frac{\sin(k_e(l_e - \gamma))}{\gamma} d\gamma \\ &= \frac{j}{\pi k_e} \int_{l_e}^{\infty} \frac{1}{\gamma} [\sin(k_e l_e) \cos(k_e \gamma) - \cos(k_e l_e) \sin(k_e \gamma)] d\gamma \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Met  $\tau = k_e \gamma$  wordt dit

$$\bar{u}(0) = \frac{j}{\pi k_e} [\sin(k_e l_e) \int_{k_e l_e}^{\infty} \frac{\cos(\tau)}{\tau} d\tau - \cos(k_e l_e) \int_{k_e l_e}^{\infty} \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau] \quad (\text{D.4})$$

$$= \frac{j}{\pi k_e} [-\sin(k_e l_e) C_i(k_e l_e) - \cos(k_e l_e) (\frac{\pi}{2} - S_i(k_e l_e))] \quad (\text{D.5})$$

Op gelijke wijze is de tweede beginvoorwaarde van (2.24) te schrijven als

$$\bar{u}'(0) = k_0 \int_{-\infty}^{\infty} h(-\tau) \tilde{r}(\tau) d\tau + j \int_{-\infty}^{\infty} h'(-\tau) \tilde{r}(\tau) d\tau \quad (\text{D.6})$$

$$= -jk_0 \bar{u}(0) - \frac{j}{\pi} [-\cos(k_e l_e) C_i(k_e l_e) + \sin(k_e l_e) (\frac{\pi}{2} - S_i(k_e l_e))] \quad (\text{D.7})$$

De functies  $S_i(x)$  en  $C_i(x)$  (Abramowitz & Stegun, 1964) fluctueren respectievelijk rond het punt  $\pi/2$  en 0, en wel met een dalende amplitude als functie van  $x$ . Dit verklaart waarom bij numerieke implementatie van de methode van Overdijk gunstige resultaten werden verkregen indien de beginvoorwaarden niet werden berekend, maar gewoon op nul werden gesteld <sup>1</sup>. Mocht de methode van Overdijk toch gebruikt gaan worden, dan kunnen in het geval van puntexcitatie de beginvoorwaarden berekend worden door middel van integraal representaties (Abramowitz & Stegun, 1964) van de  $S_i(x)$ <sup>2</sup>- en  $C_i(x)$ -functies. Voor meer algemene excitatievormen blijft de berekening van (2.24) een probleem.

---

<sup>1</sup>In het beschouwde probleem is de waarde van  $k_e l_e$  van de orde 10. Bij dergelijke waarden gaan de functies  $S_i(x)$  en  $C_i(x)$  met kleine amplituden rond de punten  $\pi/2$  en 0 fluctueren. Hierdoor zullen de beginvoorwaarden klein worden bij toenemende  $k_e l_e$ .

<sup>2</sup>Voor  $S_i(x)$  geldt bijvoorbeeld

$$S_i(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \cos \tau} \cos(x \sin(\tau)) d\tau \quad (\text{D.8})$$



## Bijlage E

# Samenvatting numerieke resultaten van de deterministische methoden

### E.1 Samenvatting numerieke resultaten van de complex omhullende methoden

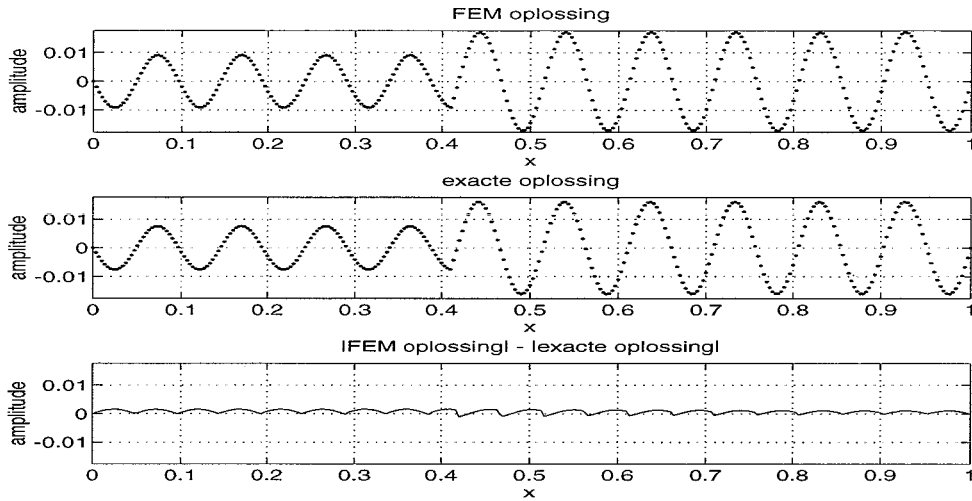
Tabel E.1 geeft een vergelijking van de resultaten verkregen met de methode van Overdijk, de methode van Carcaterra, DCEDA, de eindige elementenmethode<sup>1</sup> (FEM) en met behulp van een Fredholm integraal formulering (Hall, 1994) van het probleem. De berekening is uitgevoerd voor het ongedempte systeem 1 met  $k_e^2 = \omega_e^2/c_0^2$ , waarin  $1/c_0^2 = \pi^2$  en  $\omega_e = 20.6$ . Als excitatie is een puntkracht in het punt  $l_e = 0.41$  aangebracht, dus  $r(x) = \delta(x - 0.41)$ . Op deze wijze beschouwen we in feite de dimensieloze vergelijking uit bijlage A.4. De excitatiefrequentie ligt nu tussen de 20<sup>e</sup> en 21<sup>e</sup> eigenfrequentie van het systeem. De uitdrukkingen voor de fouten worden in bijlage E.2 gedefinieerd. In figuur E.1 is de FEM

<i>methode</i>	<i>discretisatie</i>	$e_{rms}$	$e_{rms,rel}$	$e_{max,rel}$	$e_{T,rel}$
FEM/EDM	N=300	$9.8 \cdot 10^{-4}$	9.8 %	6.6 %	18 %
Fredholm	N=300	$9.8 \cdot 10^{-4}$	9.8 %	6.6 %	18 %
Overdijk	N=300, reductie=84%	$11 \cdot 10^{-4}$	12 %	-1.2 %	-14 %
Carcaterra	N=300, reductie=91%	$5.9 \cdot 10^{-4}$	6.3 %	2.1 %	-4.7%
DCEDA	N=300, reductie=84%	$8.0 \cdot 10^{-4}$	8.6 %	1.6 %	-4.2%

Tabel E.1: Vergelijking methode van Overdijk, van Carcaterra, DCEDA, FEM en een Fredholm integraal oplossing voor het ongedempt systeem. Het reductiepercentage heeft betrekking op het oorspronkelijk aantal discretisatiepunten  $N$ .

oplossing van het probleem gepresenteerd.

<sup>1</sup>Hierbij is Galerkin formulering met lineaire elementen van constante grootte gebruikt. Het resulterende matrix stelsel is hetzelfde als het stelsel verkregen bij een eerste-orde eindig differentieschema (van Steenhoven, 1984).



Figuur E.1: FEM oplossing. Opvallend is de relatief grote fout bij een discretisatie met  $N = 300$  punten. Deze is waarschijnlijk het gevolg van het onnauwkeurig beschrijven van het rechterlid  $r(x) = \delta(x - l_e)$ .

## E.2 Afwijkingen ten opzichte van de exacte oplossing

In de vorige paragraaf zijn enkele uitdrukkingen voor de afwijkingen ten opzichte van de exacte oplossing gebruikt. Deze uitdrukking zijn gebaseerd op de volgende drie grootheden

$$u_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} |u_i|^2} \approx \sqrt{\frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} |u|^2 dx} \quad (\text{E.1})$$

$$u_{max} = \max |u_i| \approx \max |u(x)| \quad (\text{E.2})$$

$$u_T = \frac{1}{4} \rho A \frac{l_0}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} |u_i|^2 = \frac{1}{4} \rho A l_0 u_{rms}^2 \approx \frac{1}{4} \rho A \int_0^{l_0} |u|^2 dx \quad (\text{E.3})$$

Deze grootheden zijn te interpreteren als een gemiddelde amplitude-inhoud van de responsie, de maximale responsie en een maat voor de kinetische energie van de optredende longitudinale trilling.

Na het definiëren van de fout in een oplossing als  $e(x) = u(x) - u_{exact}(x)$  kunnen we de volgende uitdrukkingen bepalen

$$e_{rms,rel} = \frac{e_{rms}}{u_{exact,rms}} \quad (\text{E.4})$$

$$e_{max,rel} = \frac{u_{max} - u_{exact,max}}{u_{exact,max}} \quad (\text{E.5})$$

$$e_{T,rel} = \frac{u_T - u_{exact,T}}{u_{exact,T}} \quad (\text{E.6})$$

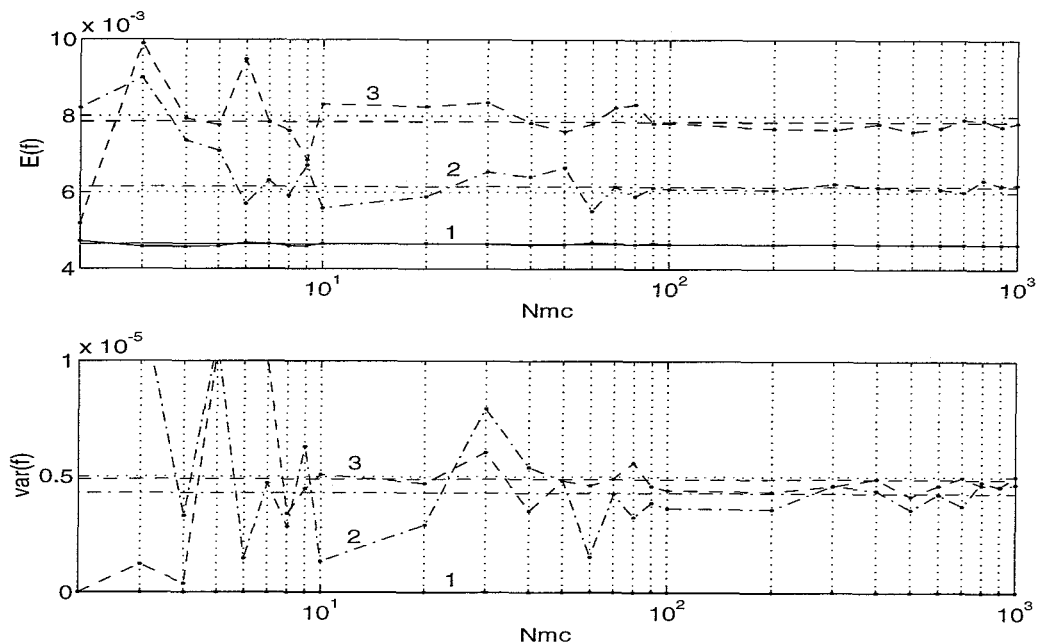
Met behulp van deze uitdrukkingen kan een indicatie worden gegeven van de fout van een numeriek bepaalde oplossing.

## Bijlage F

# Numerieke resultaten van de statistische methoden

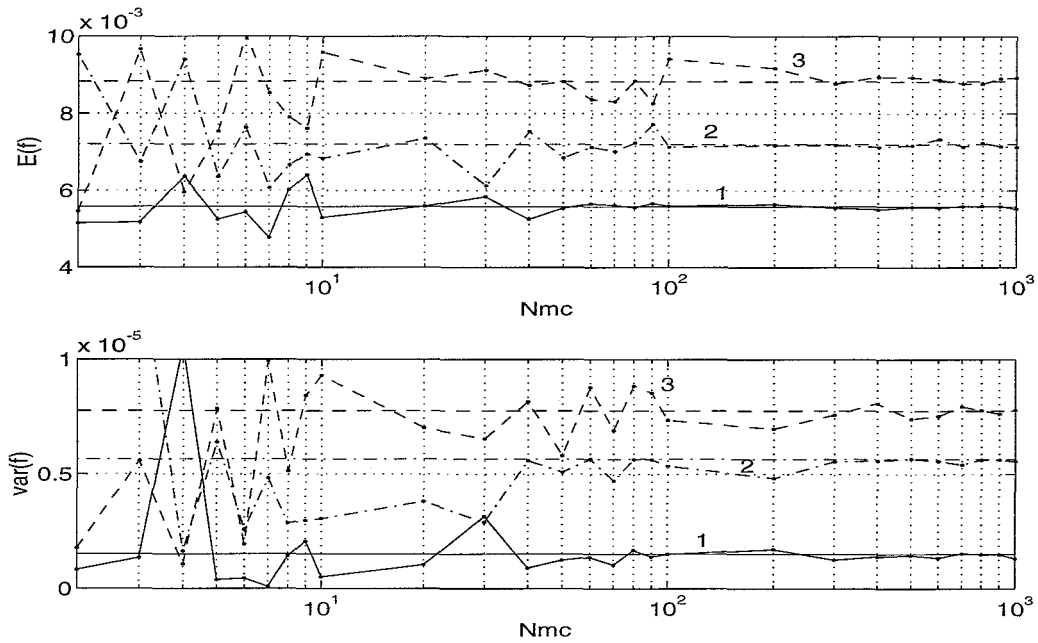
### F.1 Monte-Carlo oplossingen

In deze paragraaf worden de Monte-Carlo oplossingen behorende bij de punten w1, w2, w3, l1, l2 en l3 gepresenteerd. De oplossingen behorende bij de punten b1, b2 en b3 zijn in paragraaf 3.6 gepresenteerd. Het betreft hier dus de Monte-Carlo berekeningen waarbij maar één parameter stochastisch is verondersteld. De Monte-Carlo oplossingen zijn bepaald op de



Figuur F.1: Monte-Carlo oplossing bij  $\sigma_{\omega_e} = 0.1$  (curve 1, punt w1),  $\sigma_{\omega_e} = 0.5$  (curve 2, punt w2) en  $\sigma_{\omega_e} = 2$  (curve 3, punt w3) als functie van het aantal ( $N_{mc}$ ) gebruikte analyses. De Monte-Carlo schatters zijn aangegeven door de zwarte punten. De rechte lijn van hetzelfde lijntype geeft de numeriek exacte oplossing uit tabel 3.2 aan. Na 100 deterministische evaluaties blijken de resultaten goed te voldoen.

punten  $N_{mc} = a10^b$  waarin  $a$  en  $b$  gehele getallen zijn. Deze punten zijn aangeduid door de zwarte stippen. De verschillende Monte-Carlo oplossingen zijn verbonden door een lijn. Ook is een rechte lijn van hetzelfde lijntype getekend. Deze lijn is de numeriek exacte oplossing uit tabel 3.2. In figuur F.1 is  $\omega_e$  de enige stochastische parameter. Na 100 deterministische evaluaties blijken de resultaten goed te voldoen. De variantie van het punt w1 is zo laag, dat alle Monte-Carlo schatters afgebeeld zijn op de  $N_{mc}$ -as in deze figuur. In figuur F.2 is

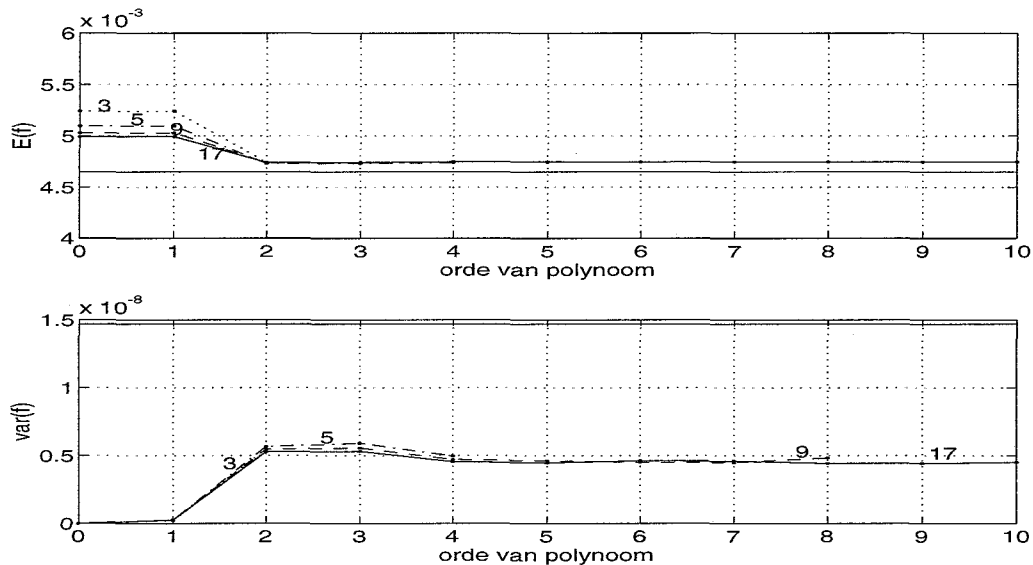


Figuur F.2: Monte-Carlo oplossing bij  $\sigma_{l_e} = 0.05\lambda$  (curve 1, punt 11),  $\sigma_{l_e} = 0.1\lambda$  (curve 2, punt 12) en  $\sigma_{l_e} = 0.2\lambda$  (curve 3, punt 13) als functie van het aantal ( $N_{mc}$ ) gebruikte analyses. De Monte-Carlo schatters zijn aangegeven door de zwarte punten. De rechte lijn van hetzelfde lijntype geeft de numeriek exacte oplossing uit tabel 3.2 aan. Na 100 deterministische evaluaties blijken de resultaten goed te voldoen.

$\underline{l}_e$  de enige stochastische parameter. Ook hier blijken de resultaten na 100 deterministische evaluaties goed te voldoen.

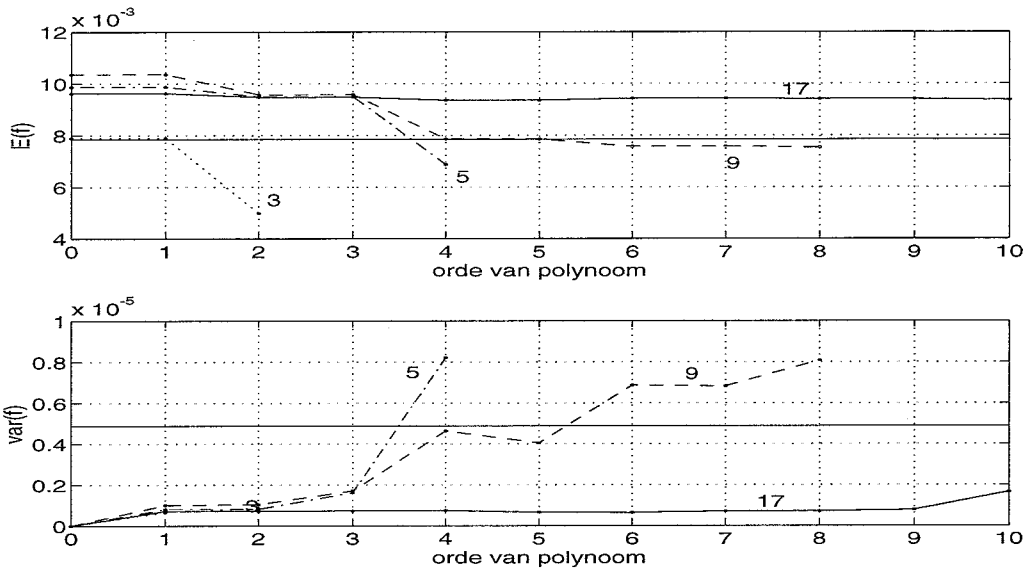
## F.2 Resultaten van de responsie-oppervlak methode in combinatie met een exacte solver

In deze paragraaf worden de responsie-oppervlak methode oplossingen van de punten w1, w3, l1, l2, l3, b1, b2 en b3 gepresenteerd. De oplossing behorende bij het punt w2 is in paragraaf 3.6 gepresenteerd. Deze responsie-oppervlak methode resultaten maken gebruik van een exacte solver, in dit geval dus de analytische oplossing uit bijlage A. Voor elk

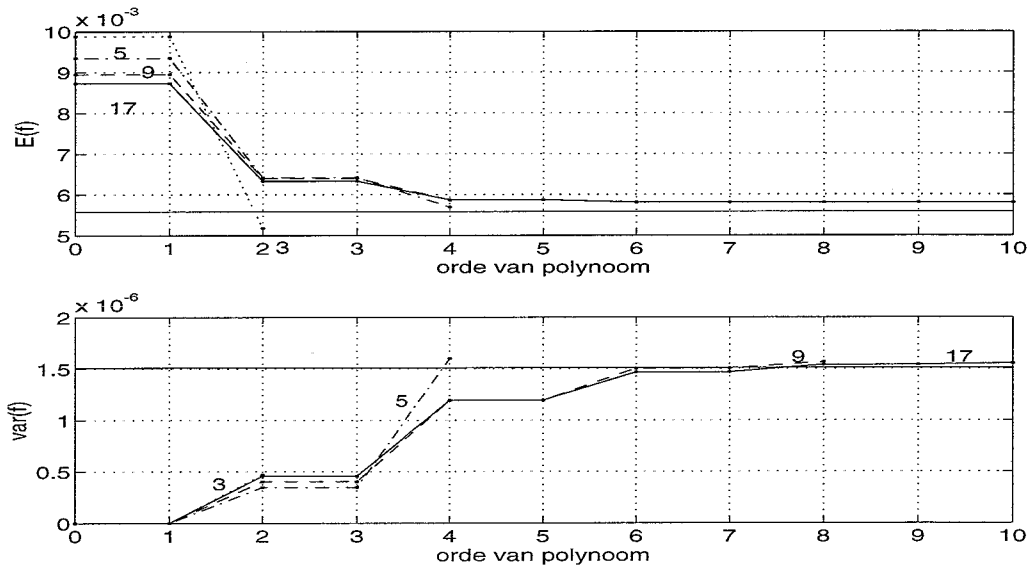


Figuur F.3: Responsie-oppervlak met exacte solver oplossing voor punt w1, dus bij  $\sigma_{\omega_e} = 0.1$  voor 3, 5, 9 en 17 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Opvallend is de relatief grote afwijking in de variantie van  $\underline{f}$ . Dit is waarschijnlijk het gevolg van het zeer klein zijn van deze variantie.

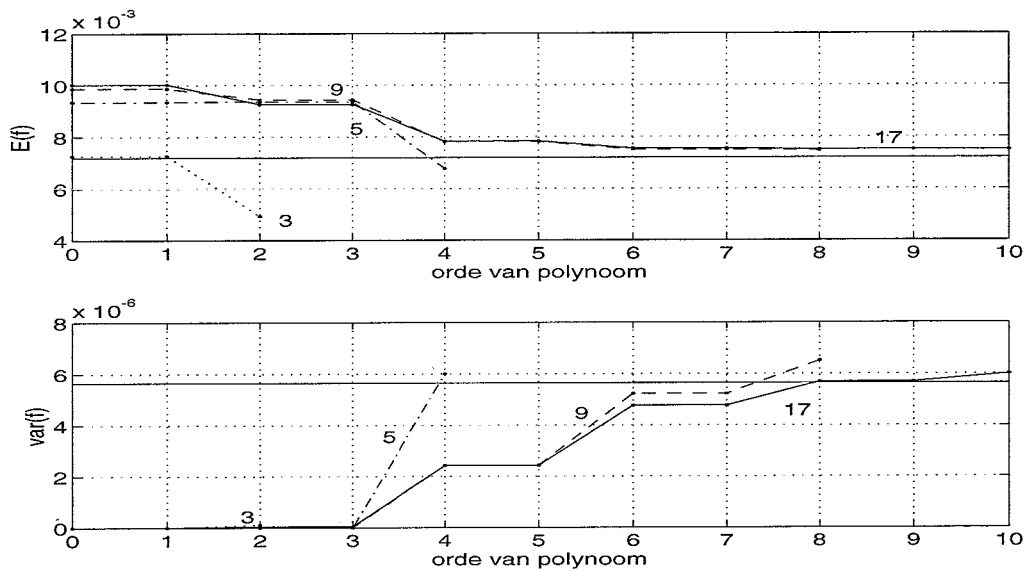
punt wordt een aparte grafiek gepresenteerd. In elke grafiek is de verwachting en variantie van  $\underline{f}$  is uitgezet tegen de orde van het benaderingspolynoom. Dit benaderingspolynoom is bepaald op basis van een aantal deterministische evaluaties van de oplossing. De 4 lijntypen corresponderen met het verschillend aantal evaluaties die gebruikt zijn ter constructie van het benaderingspolynoom. De curven met 3, 5 en 9 evaluaties kunnen een benaderingspolynoom met een maximale orde van respectievelijk 2, 4 en 8 genereren. Daarom lopen deze curven niet door tot de orde 10.



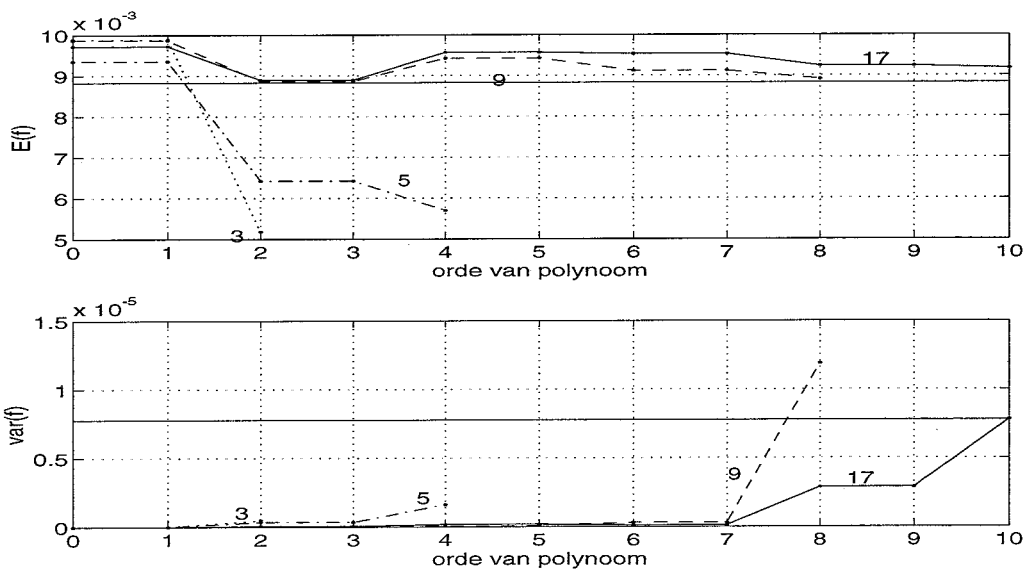
Figuur F.4: Responsie-oppervlak met exacte solver oplossing voor punt w3, dus bij  $\sigma_{\omega_e} = 2.0$  voor 3, 5, 9 en 17 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Opvallend is de vrijwel constante verwachting van  $\underline{f}$  indien 17 evaluaties zijn uitgevoerd.



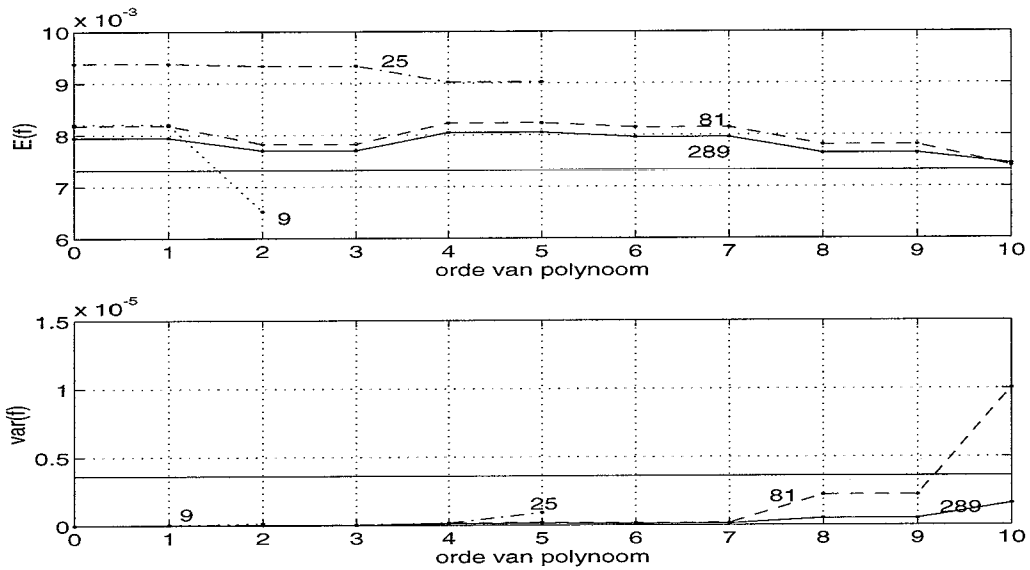
Figuur F.5: Responsie-oppervlak met exacte solver oplossing voor punt l1, dus bij  $\sigma_{l_e} = 0.05\lambda$  voor 3, 5, 9 en 17 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Deze grafiek toont een duidelijke toename van de nauwkeurigheid bij toenemend aantal evaluaties en toenemende orde.



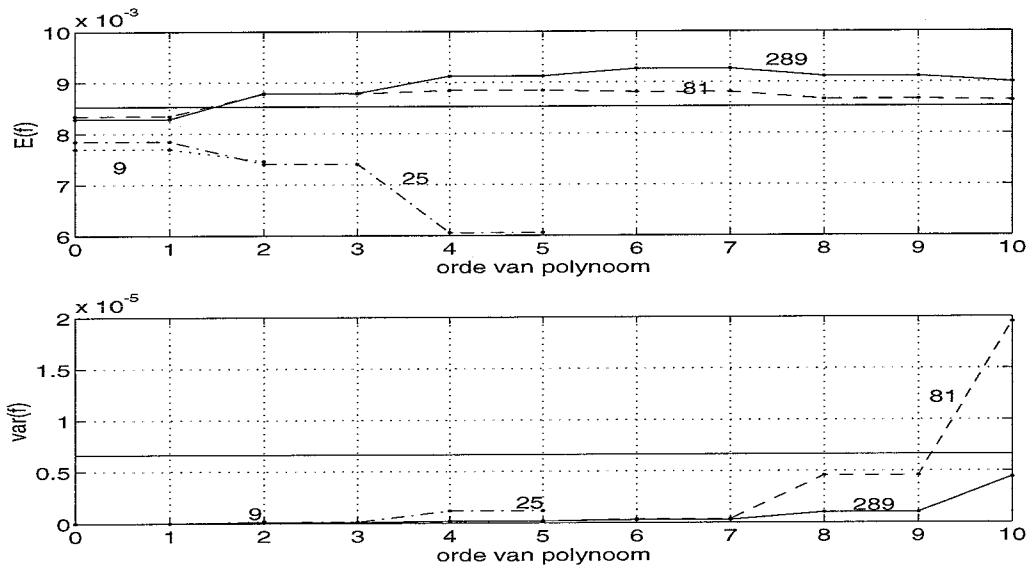
Figuur F.6: Responsie-oppervlak met exacte solver oplossing voor punt l2, dus bij  $\sigma_{l_e} = 0.1\lambda$  voor 3, 5, 9 en 17 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Deze grafiek toont ook een toename van de nauwkeurigheid bij toenemend aantal evaluaties en toenemende orde, behalve bij het de oplossing gebaseerd op 3 evaluaties. Het responsie-oppervlak kan niet goed gefit worden door maar 3 punten.



Figuur F.7: Responsie-oppervlak met exacte solver oplossing voor punt l3, dus bij  $\sigma_{l_e} = 0.2\lambda$  voor 3, 5, 9 en 17 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Uit deze figuur blijkt dat de methode in dit punt niet goed voldoet. Het responsie-oppervlak is niet goed te beschrijven door een polynoom.

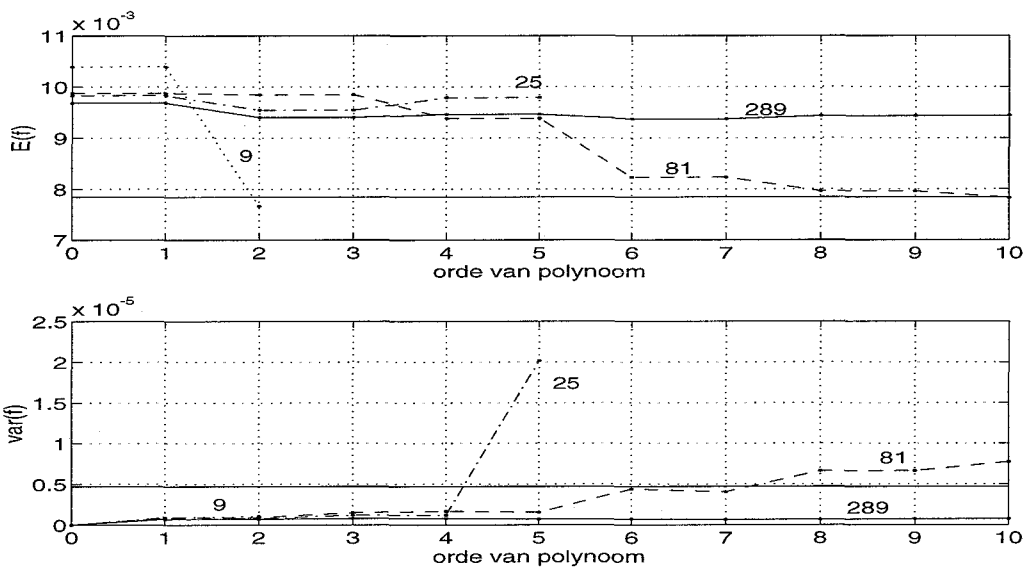


Figuur F.8: Responsie-oppevlak met exacte solver oplossing voor punt b1, dus bij  $\sigma_{\omega_e} = 0.5$  en  $\sigma_{t_e} = 0.1\lambda$  voor 9, 25, 81 en 289 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Uit deze figuur blijkt dat de methode in dit punt niet goed voldoet. Het responsie-oppevlak is niet goed te beschrijven door een polynoom.



Figuur F.9: Responsie-oppevlak met exacte solver oplossing voor punt b2, dus bij  $\sigma_{\omega_e} = 0.1$  en  $\sigma_{t_e} = 0.2\lambda$  voor 9, 25, 81 en 289 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Uit deze figuur blijkt dat de methode in dit punt niet goed voldoet. Het responsie-oppevlak is niet goed te beschrijven door een polynoom.

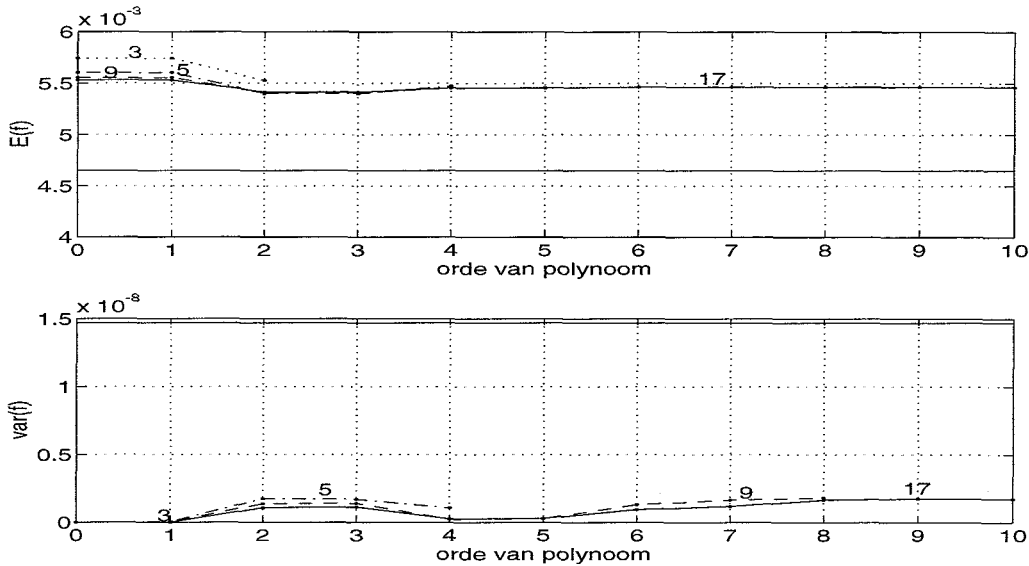




Figuur F.10: Responsie-oppervlak met exacte solver oplossing voor punt b3, dus bij  $\sigma_{\omega_e} = 2.0$  en  $\sigma_{l_e} = 0.05\lambda$  voor 9, 25, 81 en 289 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Uit deze figuur blijkt dat de methode in dit punt niet goed voldoet. Het responsie-oppervlak is niet goed te beschrijven door een polynoom.

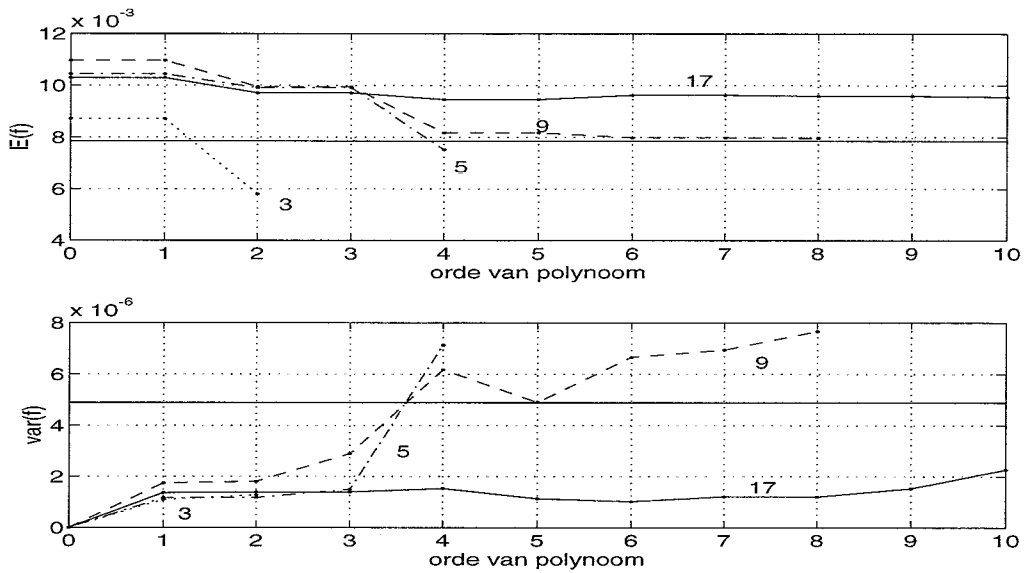
### F.3 Resultaten van de responsie-oppervlak methode in combinatie met de DCEDA solver

In deze paragraaf worden de responsie-oppervlak methode oplossingen van de punten w1, w3, l1, l2, l3, b1, b2 en b3 gepresenteerd. De oplossing behorende bij het punt w2 is in paragraaf 3.6 gepresenteerd. Deze responsie-oppervlak methode resultaten maken gebruik van de DCEDA solver. Voor elk punt wordt een aparte grafiek gepresenteerd. In elke grafiek

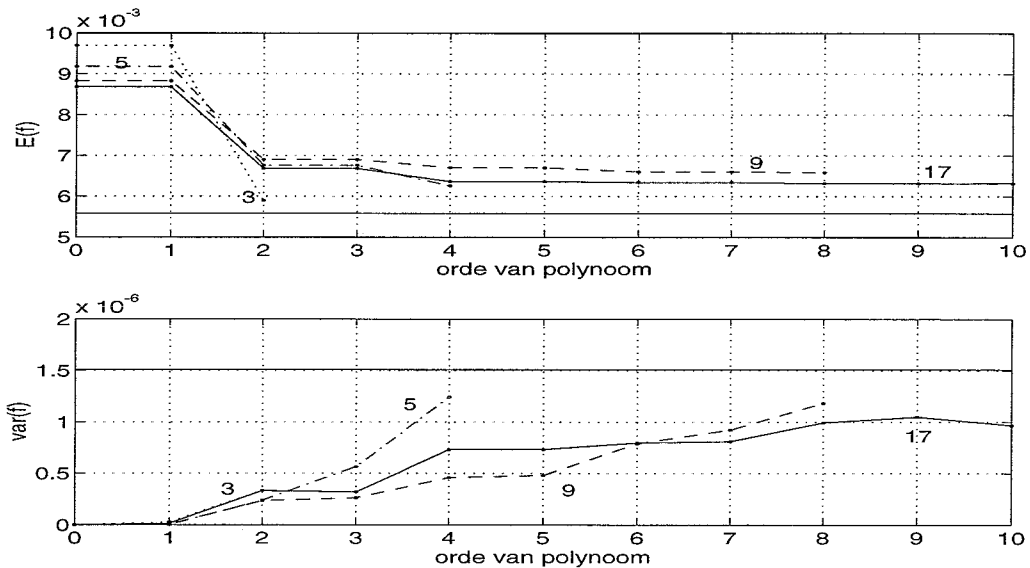


Figuur F.11: Responsie-oppervlak met DCEDA solver oplossing voor punt w1, dus bij  $\sigma_{w_e} = 0.1$  voor 3, 5, 9 en 17 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Opvallend is de relatief grote afwijking in de variantie van  $\underline{f}$ . Dit is waarschijnlijk het gevolg van het zeer klein zijn van deze variantie. De afwijking in de verwachting is het gevolg van fouten in de DCEDA solver.

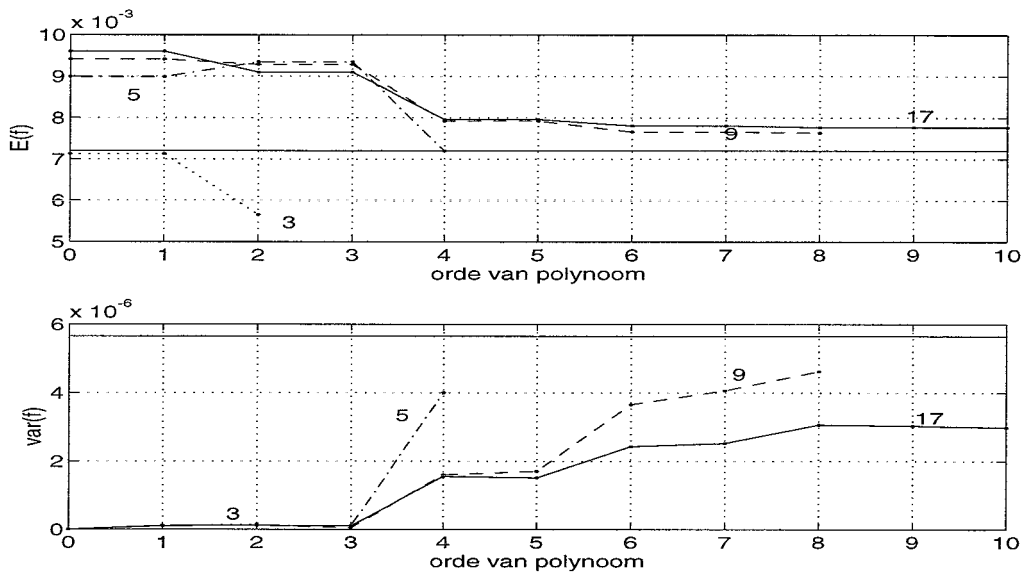
is de verwachting en variantie van  $\underline{f}$  is uitgezet tegen de orde van het benaderingspolynoom. Dit benaderingspolynoom is bepaald op basis van een aantal deterministische evaluaties van de oplossing. De 4 lijntypen corresponderen met het verschillend aantal evaluaties die gebruikt zijn ter constructie van het benaderingspolynoom. De curven met 3, 5 en 9 evaluaties kunnen een benaderingspolynoom met een maximale orde van respectievelijk 2, 4 en 8 genereren. Daarom lopen deze curven niet door tot de orde 10.



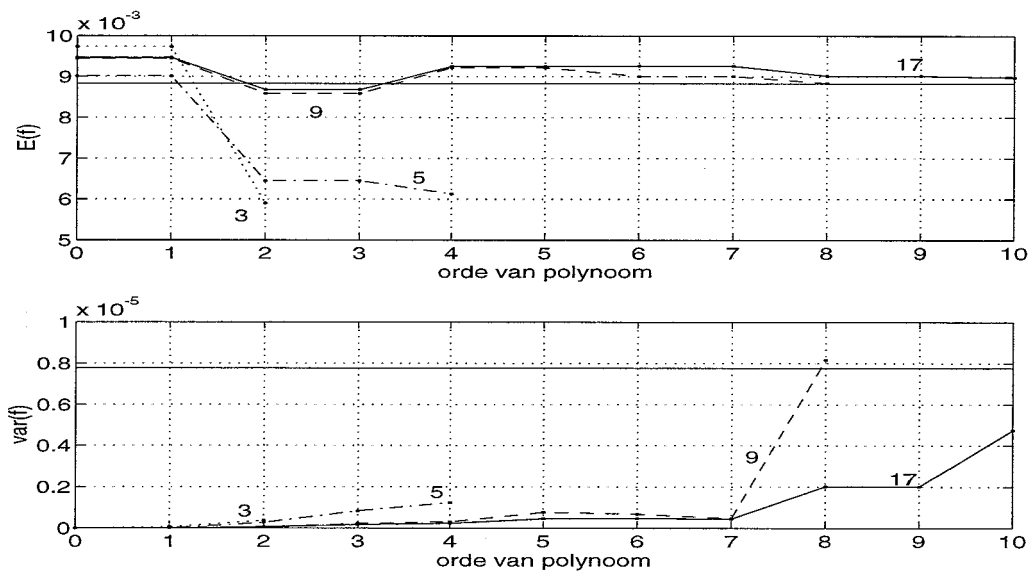
Figuur F.12: Responsie-oppervlak met DCEDA solver oplossing voor punt w3, dus bij  $\sigma_{w_e} = 2.0$  voor 3, 5, 9 en 17 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Ook hier is, net als de combinatie met de exacte solver, het resultaat bij de 17 evaluaties erg constant.



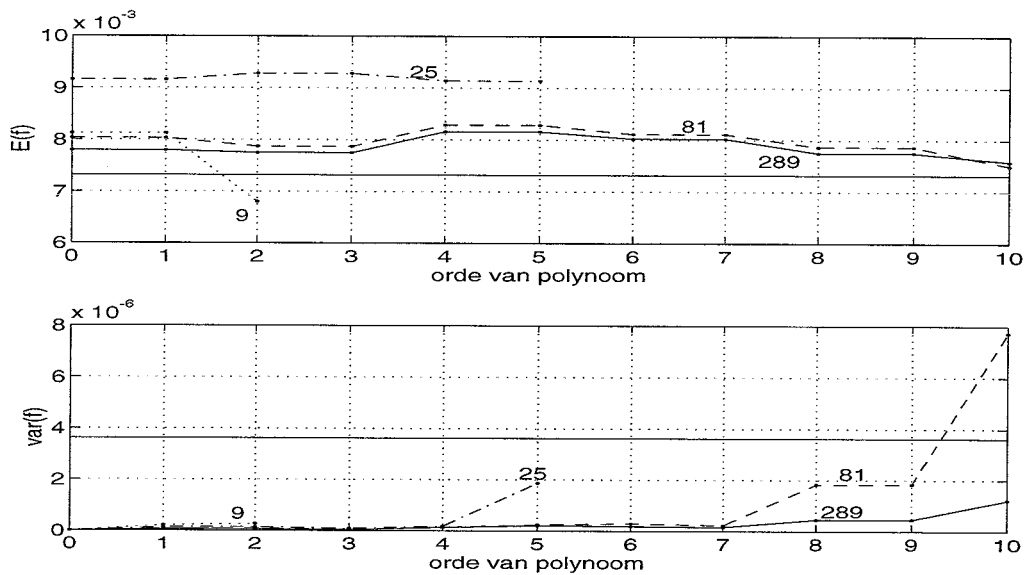
Figuur F.13: Responsie-oppervlak met DCEDA solver oplossing voor punt l1, dus bij  $\sigma_{l_e} = 0.05\lambda$  voor 3, 5, 9 en 17 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Deze grafiek toont een duidelijke toename van de nauwkeurigheid bij een toenemend aantal evaluaties en een toenemende orde.



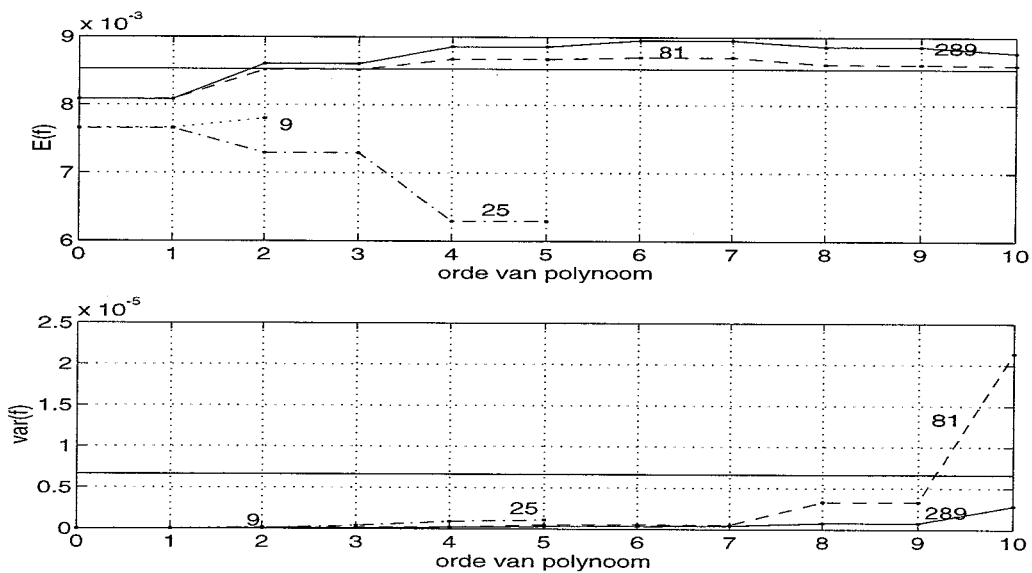
Figuur F.14: Responsie-oppervlak met DCEDA solver oplossing voor punt 12, dus bij  $\sigma_{l_e} = 0.1\lambda$  voor 3, 5, 9 en 17 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Deze grafiek toont ook een toename van de nauwkeurigheid bij toenemend aantal evaluaties en toenemende orde, behalve bij het de oplossing gebaseerd op 3 evaluaties. Het responsie-oppervlak kan niet goed gefit worden door maar 3 punten. De afwijkingen bij de hogere orden en een groot aantal evaluaties zijn het gevolg van de afwijkingen van de DCEDA solver.



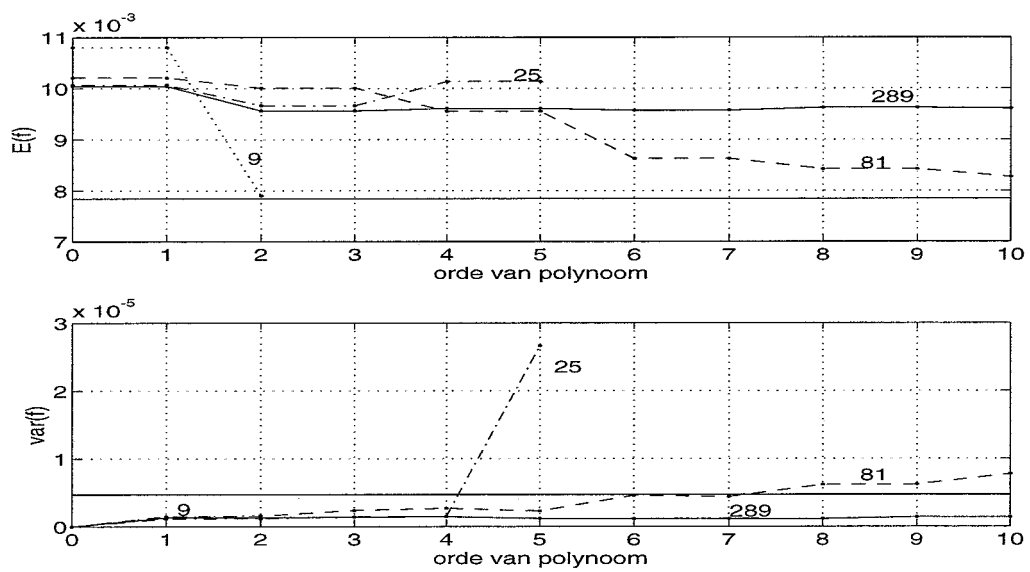
Figuur F.15: Responsie-oppervlak met DCEDA solver oplossing voor punt 13, dus bij  $\sigma_{l_e} = 0.2\lambda$  voor 3, 5, 9 en 17 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Uit deze figuur blijkt dat de methode in dit punt niet goed voldoet. Het responsie-oppervlak is niet goed te beschrijven door een polynoom.



Figuur F.16: Responsie-oppervlak met DCEDA solver oplossing voor punt b1, dus bij  $\sigma_{\omega_e} = 0.5$  en  $\sigma_{l_e} = 0.1\lambda$  voor 9, 25, 81 en 289 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Uit deze figuur blijkt dat de methode in dit punt niet goed voldoet. Het responsie-oppervlak is niet goed te beschrijven door een polynoom.



Figuur F.17: Responsie-oppervlak met DCEDA solver oplossing voor punt b2, dus bij  $\sigma_{\omega_e} = 0.1$  en  $\sigma_{l_e} = 0.2\lambda$  voor 9, 25, 81 en 289 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Uit deze figuur blijkt dat de methode in dit punt niet goed voldoet. Het responsie-oppervlak is niet goed te beschrijven door een polynoom.



Figuur F.18: Responsie-oppervlak met DCEDA solver oplossing voor punt b3, dus bij  $\sigma_{\omega_e} = 2.0$  en  $\sigma_{l_e} = 0.05\lambda$  voor 9, 25, 81 en 289 evaluaties als functie van de orde van het benaderingspolynoom. Uit deze figuur blijkt dat de methode in dit punt niet goed voldoet. Het responsie-oppervlak is niet goed te beschrijven door een polynoom.

## Bijlage G

# Mogelijke toepassing van een eindige elementenformulering

### G.1 Keuze van de RVW

De algemene oplossing van het getransformeerde RVW-probleem

$$\bar{u}''(x) + 2jk_0\bar{u}'(x) = \bar{q}(x) \quad (\text{G.1})$$

is formeel te schrijven als

$$\bar{u}(x) = \bar{\psi}_0(x) + c_1 e^{-2jk_0 x} + c_0 \quad (\text{G.2})$$

waarmee

$$\bar{u}'(x) = \bar{\psi}_1(x) - 2jk_0 c_1 e^{-2jk_0 x} \quad (\text{G.3})$$

met

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_0(x) &= \int_0^{l_0} \bar{q}(\tau) \bar{h}(x - \tau) d\tau \\ \bar{\psi}_1(x) &= \bar{\psi}_0'(x) \\ c_0 &= c_{0;r} + c_{0;i}i \\ c_1 &= c_{1;r} + c_{1;i}i \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

De oplossing van het RVW-probleem wordt bepaald door 4 reële RVW. Het fysische-RVW-probleem<sup>1</sup> levert de eerste twee reële RVW. Opleggen van deze RVW in (G.2) met behulp van de inverse-transformatie (2.8), levert

$$\begin{aligned} u(0) = 0 &\rightarrow c_{0;r} + c_{1;r} = 0 \\ u(l_0) = 0 &\rightarrow \cos(k_0 l_0) c_{0;r} - \sin(k_0 l_0) c_{0;i} + \cos(k_0 l_0) c_{1;r} + \sin(k_0 l_0) c_{1;i} \\ &= -\text{Re}[\bar{\psi}_0(l_0) e^{jk_0 l_0}] \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

---

<sup>1</sup>Zie voor de naamgeving paragraaf 2.5.1 en figuur 2.17.

Na definitie van

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{0;r} \\ c_{0;i} \\ c_{1;r} \\ c_{1;i} \end{bmatrix} \quad (\text{G.6})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(k_0 l_0) & -\sin(k_0 l_0) & \cos(k_0 l_0) & \sin(k_0 l_0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}$$

$$\zeta_1 = -\text{Re}[\bar{\psi}_0(l_0)e^{jk_0 l_0}]$$

is dit te schrijven als

$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{r} \quad (\text{G.7})$$

Deze vergelijking is onoplosbaar. Om de constant  $\mathbf{c}$  te bepalen en daarmee de oplossing vast te leggen, dienen twee reële RVW gekozen te worden. Dit zijn de zogenaamde vrije-CE-RVW. Elke vrije-CE-RVW levert een extra vergelijking in termen van  $\mathbf{c}$ . Toevoegen van deze vergelijkingen aan (G.7) levert een oplosbaar stelsel. In tabel G.1 staat voor enkele keuzen van de vrije-CE-RVW de oplossing van (G.7). Uit de tabel blijkt dat de eerste keuze een sterk

keuze RVW	$\text{Im}[\bar{u}(0)] = \text{Im}[\bar{u}(l_0)] = 0$	$\bar{u}'(0) = 0$
$\mathbf{B}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(k_0 l_0) & -\sin(k_0 l_0) & \cos(k_0 l_0) & \sin(k_0 l_0) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\sin(2k_0 l_0) & \cos(2k_0 l_0) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(k_0 l_0) & -\sin(k_0 l_0) & \cos(k_0 l_0) & \sin(k_0 l_0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{r}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_1 \\ 0 \\ -\text{Im}[\bar{\psi}_0(l_0)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_1 \\ 0 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
oplossing $\mathbf{c}$	$\begin{bmatrix} \zeta_1 (\cos(2k_0 l_0) - 1) - 2 \sin(k_0 l_0) \zeta_2 \\ \sin(2k_0 l_0) \zeta_1 \\ -\zeta_1 (\cos(2k_0 l_0) - 1) + 2 \sin(k_0 l_0) \zeta_2 \\ -\sin(2k_0 l_0) \zeta_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\zeta_1}{\sin(k_0 l_0)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Tabel G.1: Enkele keuzen voor de vrije-CE-RVW voor de CEDA vergelijking.

oscillerende oplossing tot gevolg heeft. De tweede keuze resulteert in  $c_1 = 0$ , waarmee een gladde oplossing wordt verkregen.

## G.2 Galerkin formulering

In vorige paragraaf is aangetoond dat de volgende RVW voor (G.1) in een numeriek aantrekkelijke oplossing  $\bar{u}(x)$  resulteren

$$\bar{u}'(0) = 0 \quad (\text{G.8})$$

$$\text{Re}[\bar{u}(0)] = 0 \quad (\text{G.9})$$

$$\text{Re}[\bar{u}(l_0)e^{jk_0 l_0}] = 0 \rightarrow \text{Im}[\bar{u}(l_0)] = \frac{\cos(k_0 l_0)}{\sin(k_0 l_0)} \text{Re}[\bar{u}(l_0)] \quad (\text{G.10})$$

Vermenigvuldigen van (G.1) met de weegfunctie  $w(x)$  levert na partieel integreren

$$w(x)\bar{u}'(x)|_0^{l_0} - \int_0^{l_0} w'(x)u'(x) dx + 2jk_0 \int_0^{l_0} w(x)\bar{u}'(x) dx \quad (\text{G.11})$$



$$= \int_0^{l_0} \bar{q}(x)w(x) dx \quad \forall \quad w(x)$$

Toepassen van de eerste RVW (G.8) levert

$$\begin{aligned} w(l_0)\bar{u}'(l_0) - \int_0^{l_0} w'(x)u'(x) dx + 2jk_0 \int_0^{l_0} w(x)\bar{u}'(x) dx \\ = \int_0^{l_0} \bar{q}(x)w(x) dx \quad \forall \quad w(x) \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

We benaderen de oplossing  $\bar{u}(x)$  nu als

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i(x) + j \sum_{k=0}^N b_k \varphi_k(x) \quad (\text{G.13})$$

Toepassen van de tweede RVW (G.9) levert

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x) + j \sum_{k=0}^N b_k \varphi_k(x) \quad (\text{G.14})$$

en de derde (G.10) levert

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x) + j \sum_{k=0}^{N-1} b_k \varphi_k(x) + j \frac{\cos(k_0 l_0)}{\sin(k_0 l_0)} a_N \varphi_N(x) \quad (\text{G.15})$$

wat is te schrijven als

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \varphi_i(x) + a_N (1 + j\gamma) \varphi_N(x) + j b_0 \varphi_0(x) \quad (\text{G.16})$$

met

$$u_i = a_i + b_i j \quad (\text{G.17})$$

$$\gamma = \frac{\cos(k_0 l_0)}{\sin(k_0 l_0)} \quad (\text{G.18})$$

Substitutie van de benaderingsoplossing (G.16) in (G.12) met de keuze van  $\varphi_m(x)$  voor de weegfuncties  $w(x)$  levert een stelsel lineaire vergelijkingen. De oplosbaarheid van dit stelsel vergelijkingen is nog niet onderzocht.