

**MASTER**

**Optimizing the economic operation of a power station**

Smedema, C.H.

*Award date:*  
1974

[Link to publication](#)

**Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

1006 bse

STUDIEBIBLIOTHEEK  
ELEKTROTECHNIEK  
E - HOOGBOU

ADVISEUR EN VERBODEN  
OF DIRECTIE

*Kaar*

NAT. LAB.  
TECHNICAL NOTE Nr. 244/68  
C.H. Smedema

OPTIMIZING THE ECONOMIC OPERATION OF A  
POWER STATION  
(in Dutch)

Verslag van het afstudeerwerk uitgevoerd in de groep van ir. A.F. Verkruijssen op het Natuurkundig Laboratorium van de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken te Waalre onder de supervisie van Prof.dr.ir. P. Eykhoff, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Eindhoven in de periode oktober 1967 - juni 1968.

OPTIMIZING THE ECONOMIC OPERATION OF A POWER STATION  
(in Dutch)

Investigation of the possibilities of minimizing the costs of fuel and start-up in the electric power production by means of the discrete maximum principle.

ABSTRACT

The problem can shortly be described as minimizing the costs of fuel and start-up of a number of units of various types in a power station over a certain period of time by distributing the estimated total load over the units in operation. It is possible that the optimal solution requires the start-up or shut-down of some units.

Because of the dynamic character of this problem an attempt was made at applying the discrete maximum principle.

The first chapters of this note deal with gaining an insight into the procedure of the continuous and the discrete maximum principle, especially by geometrical methods. Attention is given on which conditions the application of the maximum principle is allowed.

Two types of a model of the above defined problem are described. It is shown that a control variable which can only assume discrete values is not allowed in the case of a system with nonlinear difference equations. This is illustrated with some examples.

Finally a model with a continuous varying control variable is described. If this model can meet the various restrictions, the right solution of the problem can be obtained by application of the discrete maximum principle. This is also illustrated with an example.

## INHOUD

	Pagina
Verantwoording	1
Lijst van de belangrijkste symbolen	4
Verwijzingen	161
1. De probleemstelling	5
2. Het mathematisch model	8
2.1. Basisbegrippen	8
2.2. Het model met een beslissingsvariabele die slechts discrete waarden kan aannemen	9
2.3. Het model met een continu variërende beslissingsvariabele	13
3. Het continue maximum principe	15
3.1. Inleiding	15
3.2. Afleiding van een noodzakelijke voorwaarde voor een optimum aan de hand van een voorbeeld met een vast eindpunt	16
3.3. Afleiding van een noodzakelijke voorwaarde voor een optimum aan de hand van een voorbeeld met een vrij eindpunt	28
3.4. Algemene formulering van het continue maximum principe	32
3.5. Enkele opmerkingen over de toepasbaarheid van het continue maximum principe	39
4. Het discrete maximum principe	47
4.1. Overzicht van de literatuur	47
4.2. Het discrete maximum principe volgens Halkin en Holtzman	50
4.3. Geometrisch bewijs van het discrete maximum principe voor een lineair systeem	56
4.4. Algebraïsch bewijs van het maximum principe voor lineaire systemen	66
4.5. Bewijs van een lokaal discreet maximum principe voor niet-lineaire systemen	70
4.6. Een voorbeeld	80
4.7. Samenvatting	90
5. Het discrete model	93
5.1. Inleiding	93
5.2. Numerieke aspecten	95
5.3. Het discontinue discrete model met e-macht detectie van opstartkosten	100

	Pagina
5.4. Het discontinue discrete model met "geheugen" detectie van opstartkosten	118
5.5. Het discontinue discrete model met cumulatieve opstartkosten	127
5.6. Het continue discrete model met lineaire differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele	136
6. Het continue model	146
6.1. Inleiding	146
6.2. De brandstofkosten	147
6.3. De opstartkosten	148
6.4. De differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele	153
6.5. De differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele	154
6.6. De Hamiltoniaan	154
6.7. Voorbeeld	155
6.8. Conclusies	160

### VERANTWOORDING

Een afstudeerverslag behoort enerzijds een historisch overzicht te geven van wat er in de afstudeerperiode is gedaan, anderzijds is het noodzakelijk de historie geweld aan te doen omdat het op chronologische wijze rangschikken van de resultaten van het onderzoek de leesbaarheid van een verslag over het algemeen niet ten goede zal komen.

In deze verantwoording zal in het kort aandacht worden besteed aan de geschiedschrijving van de afstudeerperiode en aan de opbouw van dit verslag.

De economische optimalisatie van de productie van elektrische energie is een dynamisch probleem dat in principe opgelost kan worden met behulp van de moderne optimalisatie technieken als Dynamisch Programmeren (Bellman) en het Maximum Principe (Pontryagin).

Dynamisch Programmeren wordt reeds toegepast op ons probleem, en om redenen die in dit verslag nog ter sprake zullen komen lag het voor de hand om ook de toepasbaarheid van het Maximum Principe eens te onderzoeken, te meer omdat in de literatuur nogal wat aandacht wordt gevestigd op de vele overeenkomsten die er bestaan tussen het Dynamisch Programmeren en het Maximum Principe.

Het Maximum Principe wordt in vrij veel moderne boeken over de regeltechniek behandeld. \*) Het wordt hierin beschreven als een vrij eenvoudig toepasbaar principe, terwijl met enkele voorbeelden wordt aangetoond hoe goed het werkt. De enige moeilijkheid ligt volgens de meeste boeken in het oplossen van het, onvermijdelijke, twee-punts-randwaarde-probleem. Aangezien ik mij voorstelde in het begin systemen te be-

schouwen waarbij slechts een beperkt aantal beslissingen zouden kunnen worden genomen verwachtte ik hier nog geen moeilijkheden.

Na met name de discrete vorm van het Maximum Principe bestudeerd te hebben, heb ik geprobeerd een aantal mathematische modellen te ontwerpen die het probleem met zijn restricties zo goed mogelijk benaderden. Voor vele modellen is het mij niet gelukt met behulp van het Maximum Principe de optimale beslissingen te vinden. Ik weet dit aanvankelijk aan het feit dat het model geen goede beschrijving van de werkelijkheid was, zodat de modellen langzamerhand geperfectioneerd werden. Ondanks vele pogingen bleven goede resultaten uit.

Later zag ik in dat de werkelijke reden van het falen van het Maximum Principe lag in het feit dat het slechts een beperkt toepassingsgebied heeft. Helaas wordt hier in een groot deel van de literatuur niet over gesproken.

Het was daarom noodzakelijk de theoretische achtergronden van het Maximum Principe beter te bestuderen ten einde te vinden waarom voor vele door mij onderzochte modellen het Maximum Principe geen of geen juiste oplossing had gegeven. Dit onderzoek vond aan het einde van mijn afstudeerperiode plaats.

In het verslag is deze chronologische volgorde niet aangehouden.

Nadat het probleem gedefinieerd is, wordt het Maximum Principe in continue en discrete vorm besproken. Voor een aantal situaties zal het principe bewezen of plausibel gemaakt worden. Hierbij is getracht vooral de nadruk te leggen op die aspecten, die voor het inzicht in deze materie van belang zijn. Het speciale geval dat de beslissingen slechts discrete waarden kunnen aannemen (hetgeen juist bij dit probleem mogelijk is) zal worden beschouwd.



Vervolgens zullen een aantal wiskundige modellen voor ons probleem worden beschreven. Met behulp van het Discrete Maximum Principe zal geprobeerd worden een optimale strategie te vinden, terwijl de resultaten zullen worden besproken.

Onder de supervisie van Prof.dr.ir. P. Eykhoff is het onderzoek verricht in de groep van ir.A.F.Verkruijsen op het Natuurkundig Laboratorium van N.V. Philips te Waalre. Ik heb in deze groep met plezier gewerkt, terwijl de nodige steun steeds in ruime mate aanwezig was. Speciaal ir.C.H.Leos wil ik bedanken voor de vele verhelderende gesprekken die ik met hem heb gevoerd.

Waalre, juni 1968



- \* ) Zie bijv. :
- A.R.M. Noton : Introduction to Variational Methods in Control Engineering. Chapter 4 Pergamon Press. 1965
  - J.T. Tou : Modern Control Theory Chapter 6. Mc.Graw-Hill 1964
  - L. Fan, C.Wang, : The Discrete Maximum Principle. John Wiley 1964
  - V.W.Eveleigh : Adaptive Control and Optimization Techniques Chapter 15, Mc.Graw-Hill 1967.

LIJST VAN DE BELANGRIJKSTE SYMBOLEN

$\underline{u}$	beslissingsvariabele (vector)
$\underline{x}$	toestandsvariabele (vector)
$\underline{p}$	toegevoegde variabele (vector)
H	Hamiltoniaan
k	discrete tijdvariabele
N	eindtijdstip (discreet)
$\Delta t$	tijdsinterval tussen k en k+1
t	continue tijdvariabele
T	eindtijdstip (continu)
i (=1,2,...n)	component van een vector
$E_i$	Eucledische ruimte van de $i^e$ dimensie
$\Omega$	besturingsruimte
W	bereikbare verzameling
U	strategie
X	trajectorie
J	objectfunctie (continu)
$M_i$	$i^e$ machine (ketel + turbine + generator)
$F_{ST}$	opstartkosten
$F_{BR}$	brandstofkosten
$F_T$	totale kosten
$V_i$	vermogen geproduceerd door $M_i$
$V_T$	het totale gevraagde vermogen.

## 1. De probleemstelling

We gaan uit van een thermische elektrische centrale met een eigen verzorgingsgebied. Eventuele verwachte uitwisseling via het koppelnet met andere gebieden kan worden opgenomen in de totale gevraagde belasting, die gedurende een bepaalde periode bekend wordt verondersteld. Men is in staat een vrij nauwkeurige schatting van deze belasting te geven (bijvoorbeeld met een nauwkeurigheid van  $\pm 2\%$  voor een periode van 10 uur).

De centrale beschikt over een aantal eenheden of machines (ketel + turbine + generator) die gezamenlijk de gevraagde elektrische energie moeten leveren. Deze machines hebben over het algemeen verschillende eigenschappen.

Van elke eenheid wordt de rendementskromme (kosten per uur als functie van het opgewekte vermogen) bekend verondersteld. Dit is een grote vereenvoudiging van de werkelijkheid. Bij het installeren van een machine worden de z.g. garantieproeven gedaan, waarbij o.a. het rendement bij bepaalde gunstige klepstanden wordt bepaald. Men veronderstelt dat door interpolatie de tussenliggende waarden kunnen worden benaderd. Ten gevolge van klepverliezen zal echter het rendement in deze gebieden iets lager liggen, terwijl het ook gedurende het gebruik verandert. Bovendien zal in de beginperiode na het opstarten van een machine het rendement ongunstiger zijn dan later, als de machine gedurende een aantal uren continu in bedrijf is geweest (zie figuur 1.1).

Bij het starten van een eenheid moeten extra kosten worden gemaakt, de z.g. opstartkosten. Deze opstartkosten zijn afhankelijk van de tijdsduur die een machine buiten bedrijf is geweest. Het zal duidelijk zijn dat na enige uren de opstartkosten onafhankelijk worden van deze tijd (bijvoorbeeld na 36 uur). Omdat zowel de

levensduur als het tijdsinterval tussen twee revisies van een machine op de een of andere wijze afhankelijk zijn van het aantal malen dat een machine wordt opgestart, zullen deze zaken een bijdrage moeten leveren in de opstartkosten. Hoe groot deze bijdrage moet zijn is echter uitermate moeilijk te bepalen. De opstartkosten als functie van de periode die een machine buiten bedrijf is geweest worden als gegeven aangenomen, hetgeen in werkelijkheid nog niet het geval is. Er is nogal wat verschil van mening hoe hoog de opstartkosten zijn en waaruit ze bestaan. (zie figuur 1.2)

Elke eenheid heeft een technische maximum en minimum capaciteit wat betreft het te leveren vermogen. Deze extreme waarden zijn niet scherp gedefinieerd. Het is mogelijk de machine een vermogen te laten leveren dat beneden het technisch minimum ligt door de overtollige stroom te laten ontsnappen. Natuurlijk wordt het rendement hierdoor ongunstig beïnvloed.

De snelheid van op- en afregelen van vermogen is aan bepaalde restricties gebonden (bijvoorbeeld 3 à 5 MW/min). Dit betekent dat een snelle stijging van de belasting nooit door één machine kan worden opgevangen en dat een voorspelling van de te verwachten vraag naar vermogen nodig is.

Tenslotte moet de uitval van de grootste machine in Nederland zo snel mogelijk opgevangen kunnen worden door de andere draaiende machines. In de praktijk lost men dit op door het technisch maximum denkbeeldig te verlagen, zodat er naar boven steeds enige speelruimte, de z.g. draaiende reserve, blijft bestaan. Deze denkbeeldige verlaging van de maximale capaciteit is afhankelijk van het aantal machines dat in bedrijf is, omdat de uitval van een eenheid het snelst kan worden opgevangen als de draaiende reserve verdeeld is over alle in bedrijf zijnde machines. Het is niet juist de vereiste draaiende reserve op te tellen bij het gevraagde

vermogen omdat hiervoor andere economische maatstaven moeten worden gehanteerd.

De opdracht kan nu worden beschreven als: het gevraagde vermogen zo over de beschikbare eenheden te verdelen dat de totale productiekosten (= brandstof + opstartkosten) over een bepaalde periode minimaal worden, daarbij zoveel mogelijk rekening houdend met de hierboven beschreven restricties. We kunnen verwachten dat men hierbij eenheden moet in- en uitschakelen.

Uit het voorgaande blijkt dat er een aantal zaken bekend worden verondersteld, die dat op dit moment nog niet zijn. Naarmate er uit een oogpunt van economie en bedrijfsvoering betere criteria komen onder welke omstandigheden een machine in of uit bedrijf moet worden genomen, des te meer zullen de centrales zich gaan bezighouden met het nauwkeurig schatten van brandstoffen opstartkosten. Ook de fabrikanten van machines zullen met deze tendens rekening moeten houden.

Als het blijkt dat dit dynamisch optimaliseringsprobleem met behulp van de mathematische programmering tot een oplossing gebracht kan worden, dan is het mogelijk de relatieve invloed van de opstartkosten te bepalen. Dit is van belang om vast te stellen met welke nauwkeurigheid de moeilijk te berekenen opstartkosten bekend moeten zijn ten einde verantwoorde beslissingen te kunnen nemen. Tevens zal de oplossing mogelijkheden bieden voor het bepalen van de eigenschappen die nog te installeren eenheden moeten hebben om een zo goedkoop mogelijke productie van elektrische energie in de toekomst te verkrijgen.

## 2. Het mathematisch model

### 2.1. Basisbegrippen

In dit hoofdstuk zal worden onderzocht op welke wijze een grof model van ons probleem kan worden opgezet. Later zal meer op de details worden ingegaan.

We moeten ervoor zorgen dat de productie van elektrische energie over een bepaalde periode met minimale kosten gerealiseerd wordt. Daartoe nemen we aan dat er op een aantal discrete tijdstippen  $k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  beslissingen moeten genomen worden ten aanzien van de verdeling van het vermogen over de beschikbare eenheden. De lengte van het tijdsinterval tussen twee tijdstippen  $k$  en  $k+1$  is  $\Delta t$ . Een beslissing die op het tijdstip  $k$  genomen wordt heeft onmiddellijke gevolgen voor het tijdsinterval tussen  $(k+\delta)\Delta t$  en  $(k+1)\Delta t$  waarbij  $\delta$  een zeer klein positief getal is.

We gaan ervan uit dat er  $n$  machines  $M_1, M_2 \dots M_n$  in de centrale beschikbaar zijn.

De vector  $\underline{u}(k)$  is de beslissingsvariabele op het tijdstip  $k$ . Er zijn twee typen beslissingen, waartussen een zekere afhankelijkheid bestaat n.l. het in of uit bedrijf nemen van een machine en de verdeling van het gevraagde vermogen over de machines.

De vector  $\underline{x}(k)$  is de toestandsvariabele, die dus informatie geeft over de toestand waarin het systeem zich op het tijdstip  $k$  bevindt.

Het totale vermogen  $V_T(k)$  dat door de centrale op het tijdstip  $k$  geproduceerd moet worden is gegeven. Als  $V_i(k)$  het vermogen is dat machine  $M_i$  op het tijdstip  $k$  produceert, dan moet dus steeds voldaan worden aan de relatie :

$$V_T(k) = \sum_{i=1}^n V_i(k)$$

De brandstofkosten van  $M_i$  als functie van  $V_i$  worden voorgesteld door  $F_{BR_i}(V_i)$ . Als  $T_i$  de periode is die  $M_i$  buiten bedrijf is geweest, dan kunnen de opstartkosten worden geschreven als  $F_{ST_i}(T_i)$ .

Wat we uiteindelijk willen bereiken met een wiskundig model is een adequate uitdrukking voor de productiekosten als functie van de toestand en de beslissingen die we kunnen nemen. Zoals we hebben gezien kunnen deze beslissingen in twee categorieën worden ingedeeld. Hieruit volgt dat er ook twee verschillende manieren bestaan om ons systeem in een model te beschrijven, zoals in de volgende paragrafen zal worden uiteengezet.

2.2. Het model met een beslissingsvariabele die slechts discrete waarden kan aannemen

Als beslissingsvariabele wordt het in of uit bedrijf nemen van een machine gekozen. De toestandsvariabele geeft de tijd aan, die een machine buiten bedrijf is. De verdeling van het vermogen over de beschikbare eenheden wordt, nadat een keuze is gedaan welke machines gestart worden of in bedrijf blijven, berekend door een minimalisering van de brandstofkosten.

De beslissingsvariabele kan een tweetal discrete waarden aannemen :

- $u_i(k)=0$  :  $M_i$  wordt gestart of blijft in bedrijf
- $u_i(k)=1$  :  $M_i$  wordt gestopt of blijft uit bedrijf.

Het systeem met  $n$  machines kan nu worden beschreven met de volgende differentievergelijkingen voor de toestand :

$$x_i(k+1) = u_i(k)x_i(k) + u_i(k)\Delta t$$

$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$   
 $i = 1, 2, \dots, n$   
 $\Delta t$  is constant

(2.1)

ofwel , in vector-vorm :

$$\underline{x}(k+1) = U(k)\underline{x}(k) + \underline{u}(k)\Delta t$$

met :

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & u_n \end{pmatrix}$$

Voorbeeld :

Voor machine  $M_i$  worden een aantal opeenvolgende beslissingen  $u_i(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 5$  genomen. De bijbehorende trajectorie voor de toestandsvariabele  $x_i(k)$  wordt berekend met behulp van de differentievergelijking (2.1). De beginvoorwaarde is :  $x_i(0) = 0$ , terwijl  $\Delta t = 1$  uur. (zie figuur 2.1)

Zoals reeds opgemerkt heeft een beslissing die genomen wordt ten tijde  $k$  vrijwel onmiddellijk gevolgen voor het gehele tijdsinterval van  $k\Delta t$  tot  $(k+1)\Delta t$ .

Uit dit voorbeeld blijkt dat op de tijdstippen  $k$  de toestandsvariabele  $x_i(k)$  op juiste wijze de tijd die een machine buiten bedrijf is representeert.  $x_i(k)=0$  komt overeen met de situatie dat de machine in bedrijf is.

De totale kosten ten gevolge van de beslissingen die op het tijdstip  $k$  worden genomen kunnen als volgt worden geschreven:

$$F_T(V(k+1), \underline{u}(k)) = \sum_{i=1}^n [1 - u_i(k)] F_{0\pi_i}(V_i(k+1))\Delta t + \sum_{i=1}^n \varphi_i F_{st_i}(x_i(k))$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$



onder de restrictie dat  $V_T(k+1) = \sum_{i=1}^n V_i(k+1)$   
 $Q_i$  kan worden geschreven als  $Q_i(x_i(k), u_i(k))$   
 of als  $Q_i(u_i(k-1), u_i(k))$  en is als volgt gedefinieerd:  
 $Q_i = 0$  als  $M_i$  niet wordt gestart  
 $Q_i = 1$  als  $M_i$  wordt gestart.

$F_T(V(k+1), \underline{u}(k))$  is nog afhankelijk van de  
 verdeling van het gevraagde vermogen  $V_T(k+1)$  over de  
 in bedrijf zijnde machines. Door de brandstofkosten

$$\sum_{i=1}^n [1-u_i(k)] F_{BR_i}(V_i(k+1)) \Delta t$$

te minimaliseren vinden we deze verdeling van het vermogen.  
 Het is uiteraard mogelijk (momentaan gezien) meer gelijk-  
 waardige oplossingen te vinden als het absolute minimum  
 van de brandstofkosten voor meer dan één configuratie  
 wordt bereikt.

Het minimaliseren kan in het algemeen worden  
 uitgevoerd met een "trial and error" methode.

In het geval de functies  $F_{BR_i}(V_i)$  differentieer-  
 baar zijn naar  $V_i$  kan met behulp van de multiplicator-  
 enstelling van Lagrange eenvoudig bewezen worden dat  
 de brandstofkosten een extremum vertonen als de z.g.  
 incrementele brandstofkosten gelijk zijn <sup>1)</sup> :

$$\left. \frac{dF_{BR_i}(V_i)}{dV_i} \right|_{V_i=V_i(k+1)} = \left. \frac{dF_{BR_{i+1}}(V_{i+1})}{dV_{i+1}} \right|_{V_{i+1}=V_{i+1}(k+1)}$$

voor  $i = 1, 2, \dots, n$

Deze methode is echter niet algemeen toepasbaar  
 omdat geen rekening wordt gehouden met de restrictie  
 $V_i(k+1) \geq 0$ .

We kunnen nu voor de totale productiekosten als  
 functie van de beslissingen  $\underline{u}(k)$  de volgende uitdruk-  
 king opschrijven :

$$F_T(\underline{u}(k)) = \text{Min}_{V_1(k), \dots, V_n(k)} \sum_{i=1}^n [1-u_i(k)] F_{BR_i}(V_i(k+1)) \Delta t + \sum_{i=1}^n Q_i F_{ST_i}(x_i(k))$$

De totale productiekosten over het tijdvak  $k=0$  tot  $k=N$  worden nu :

$$F_T(U) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \text{Min}_{\substack{v_1(k) \dots v_n(k)}} \sum_{i=1}^n [1-u_i(k)] F_{\theta R_i}(V_i(k+1)) \Delta t + \sum_{i=1}^n Q_i F_{sT_i}(x_i(k)) \right]$$

Hierbij is  $U$  de trajectorie waarvoor de beslissingsvariabele gelijk is aan  $\underline{u}(0)$  ten tijde  $k=0$ ,  $\underline{u}(1)$  voor  $k=1$ ,  $\underline{u}(2)$  voor  $k=2$  enzovoort.

Met andere woorden :

$$U = \{ (\underline{u}(k), k) : k=0, 1, \dots, N-1 \}$$

In het vervolg zullen we  $U$  een strategie noemen.

Onze opdracht is nu een strategie  $U$  te vinden zodanig dat de totale productiekosten over de periode  $k=0$  tot  $k=N$ , dus  $F_T(U)$ , minimaal zijn.

Het hierboven beschreven model is gebruikt om met de methode van het Dynamisch Programmeren een optimale strategie te vinden <sup>2)</sup>.

Het Dynamisch Programmeren houdt in principe geen rekening met de eventuele a priori kennis die van het systeem bestaat, en gebruikt daarom veel rekentijd en geheugenruimte van de rekenmachine <sup>\*</sup>). Het ligt voor de hand naar een methode te zoeken die wel gebruik maakt van de kennis en ervaring op het gebied van de meest economische bedrijfsvoering die men in de elektrische centrales in de loop der jaren vergaard heeft. Het Maximum Principe van Pontryagin geeft deze mogelijkheid door via een initiële schatting van  $U$  de optimale strategie te verkrijgen. Overigens is op zichzelf een onderzoek naar de toepasbaarheid van het Maximum Principe op dit gebied interessant genoeg om het ter hand te nemen. Met het oog op het feit dat we verondersteld hebben dat beslissingen slechts op discrete tijdstippen plaatsvinden, zullen we het Maximum Principe ook in zijn discrete vorm moeten gebruiken.

<sup>\*</sup>)

De laatste jaren doet men al het mogelijke om rekentijd en geheugenruimte kleiner te maken door a priori kennis over het proces te gebruiken.

Zoals we later zullen zien zal de toepassing van het Maximum Principe bij het gebruiken van het besproken model moeilijkheden opleveren, omdat de beslissingsvariabele slechts de waarden 0 en 1 kan aannemen.

### 2.3. Het model met een continu variërende beslissingsvariabele

Met het oog op de moeilijkheid die aan het einde van de vorige paragraaf werd vermeld beschrijven we nu het model met een beslissingsvariabele die continu kan variëren.

We kiezen de verandering van het vermogen van machine  $M_i$  op het tijdstip  $k$  als beslissingsvariabele. De toestandsvariabele is het vermogen dat  $M_i$  op het tijdstip  $k$  levert.

De differentievergelijkingen voor dit systeem worden dus :

$$x_i(k+1) = x_i(k) + u_i(k)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

De beschrijving van de periode die een eenheid buiten bedrijf is, wordt nu moeilijker dan bij het vorige model. We veronderstellen dat de tijd die  $M_i$  buiten bedrijf is geweest tot op het tijdstip  $k$  benaderd kan worden door een functie die afhankelijk is van  $u_i(k-1)$ ,  $x_i(k-1)$  en  $\Delta t$  en we voeren deze functie als tweede toestandsvariabele in.

Het volgende stelsel differentievergelijkingen kan dan worden opgeschreven :

$$x_i(k+1) = x_i(k) + u_i(k)$$

$$x_{ni}(k+1) = f(x_i(k), u_i(k), \Delta t)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Aangezien de brandstofkosten voor een stilstaande machine nihil zijn, worden de productiekosten ten gevolge van de beslissingen op het tijdstip  $k$  gegeven door:

$$F_T(\underline{u}(k)) = \sum_{i=1}^n \left[ F_{0R_i}(x_i(k) + u_i(k)) + R_i F_{ST_i}(x_{n+i}(k)) \right]$$

$R_i$  is een functie van  $x_i(k)$  en  $u_i(k)$  en is als volgt gedefinieerd :

$R_i = 0$  als  $M_i$  niet wordt gestart

$R_i = 1$  als  $M_i$  wordt gestart.

De totale kosten over het gehele tijdvak  $k=0$  tot  $k=N$  zijn dus

$$F_T(U) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^n \left[ F_{0R_i}(x_i(k) + u_i(k)) + R_i F_{ST_i}(x_{n+i}(k)) \right]$$

en de opdracht is weer deze kosten te minimaliseren door een juiste keuze van  $U$ .

### 3. Het continue maximum principe

#### 3.1. Inleiding

Zoals in het vorige hoofdstuk reeds is gezegd zal een poging worden gedaan om ons dynamische optimaliseringsprobleem op te lossen met behulp van het discrete maximum (of minimum) principe, d.w.z. uitgaande van differentievergelijkingen.

We zullen echter beginnen met een korte beschrijving van het continue maximum principe dat gebaseerd is op differentiaalvergelijkingen. Hiervoor kunnen verschillende redenen worden aangevoerd. Het discrete principe werd aanvankelijk verkregen door discretisering van het oudere en meer bekende continue principe<sup>3)</sup>. Ook nu men heeft ontdekt dat er nogal wat fundamentele verschillen bestaan tussen beide principes is het toch zinvol onderlinge vergelijkingen te kunnen maken. Bovendien is het van belang enige opmerkingen te maken over de toepasbaarheid van het continue principe omdat, zoals reeds werd opgemerkt, vele boeken hier niet op in gaan en het dus rooskleuriger voorstellen dan het in de praktijk is.

Mijn ervaring is dat het gebruik van de methode van het maximum principe nauwelijks enig inzicht geeft in wat men nu werkelijk aan het doen is. Een bewijs van dit principe zou misschien dit inzicht wel geven, maar vanwege haar grote omvang zullen we toch een andere manier moeten vinden om ons dit inzicht te verschaffen. Een goede aanpak vond ik in een boek van Athans en Falb<sup>4)</sup>, die voor een eenvoudig voorbeeld een noodzakelijke voorwaarde voor een optimale oplossing afleiden. In de volgende paragraaf zal nader op deze afleiding worden ingegaan. Daarna zal een meer algemene en "operationele" vorm van het maximum principe gegeven worden en zal in het kort worden nagegaan welke verschillende soorten problemen met dit principe kunnen worden opgelost. Tenslotte zullen we even stilstaan bij de toepasbaarheid van het maximum principe.

3.2. Afleiding van een noodzakelijke voorwaarde voor een optimum aan de hand van een voorbeeld met een vast eindpunt

Bij het zoeken naar een extremum van  $f(x)$  bekijken we de functie in de omgeving van een verondersteld extremum en we leiden hieruit een noodzakelijke of een voldoende voorwaarde voor een extremum af. Als  $f(x)$  een extremum heeft in een punt  $x=a$  dan geldt, als  $f(x)$  differentieerbaar is naar  $x$ , dat  $\frac{df(x)}{dx} = 0$  in het punt  $x=a$ . Deze bewering mag niet omgekeerd worden.

Op analoge wijze gaan we hier ook te werk.

We gaan uit van een systeem dat beschreven wordt door de differentiaalvergelijking:

$$\dot{x}(t) = -\chi(t) + u(t) \quad (3.1)$$

met als beginvoorwaarde:

$$x(0) = 1 \quad (3.2)$$

We zullen dit systeem beschouwen voor het tijdsinterval  $t=0$  tot  $t=T$  en we eisen dat voor het eindpunt geldt:

$$x(T) = 0 \quad (3.3)$$

In verband met de oplosbaarheid van de differentiaalvergelijking moet  $u(t)$  een stuksgewijs continue functie van  $t$  zijn, dat wil zeggen er bestaan slechts een aftelbaar aantal punten waar  $u(t)$  niet continu is, en waar  $u(t)$  zowel een linker als een rechter limiet heeft.

Gevraagd wordt om  $u(t)$  op het interval  $t = [0, T]$  zo te kiezen dat

$$J(u) = \int_0^T L(x, u) dt = \int_0^T \left( \frac{1}{2} \chi^2(t) + \frac{1}{2} u^2(t) \right) dt \quad (3.4)$$

minimaal wordt, en voldaan is aan de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden van het hierboven beschreven systeem, (3.1), (3.2) en (3.3).

We gaan uit van de veronderstelling dat er een optimale oplossing voor dit probleem bestaat (zonder dit van te voren onderzocht te hebben) en we zullen een noodzakelijke voorwaarde voor dit optimum afleiden.

Stel dat  $u^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$  een optimale strategie is, met  $x^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$  als de bijbehorende trajectorie dan geldt:

$$1. \quad \dot{x}^*(t) = -x^*(t) + u^*(t) \quad (3.5)$$

$$2. \quad x^*(0) = 1 \quad x^*(T) = 0$$

3. als  $u(t)$  een toegestane (= stuksgewijs continue) strategie is, met  $x(t)$  als bijbehorende trajectorie, dus:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t) \\ x(0) &= 1 \quad x(T) = 0 \end{aligned}$$

dan moet voldaan zijn aan de ongelijkheid:

$$J(u^*) \leq J(u)$$

waarbij

$$\begin{aligned} J(u^*) &= \frac{1}{2} \int_0^T [x^{*2}(t) + u^{*2}(t)] dt \\ J(u) &= \frac{1}{2} \int_0^T [x^2(t) + u^2(t)] dt \end{aligned}$$

Zoals reeds werd opgemerkt variëren we nu de optimale strategie  $u^*(t)$  zodanig dat we een kleine verstoring krijgen van de optimale trajectorie  $x^*(t)$  waarna we het bijbehorende verschil van de object- of winstfunctie:  $J(u) - J(u^*)$  zullen berekenen.

Stel:

$$u(t) = u^*(t) + \delta u^*(t) = u^*(t) + \varepsilon \eta(t) \quad (3.6)$$

$\eta(t)$  is een stuksgewijs continue functie over het interval  $t \in [0, T]$ . Als gevolg van deze variatie van  $u^*(t)$  veronderstellen we dat we de bijbehorende trajectorie  $x(t)$  als volgt kunnen schrijven:

$$x(t) = x^*(t) + \delta x^*(t) = x^*(t) + \varepsilon \psi(t) \quad (3.7)$$

$\psi(t)$  is begrensd op het interval  $t = [0, T]$

Uit de differentievergelijking (3.1) en de vergelijkingen die de invloed van de verstoring beschrijven (3.6) en (3.7) volgt:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t) \\ &= -x^*(t) - \varepsilon \psi(t) + u^*(t) + \varepsilon \eta(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Uit vergelijking (3.7) kunnen we de volgende differentiaalvergelijking opschrijven:

$$\varepsilon \dot{\psi}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}^*(t)$$

die met behulp van (3.5) en (3.8) wordt:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\psi}(t) &= -x^*(t) - \varepsilon \psi(t) + u^*(t) + \varepsilon \eta(t) + x^*(t) - u^*(t) \\ &= -\varepsilon \psi(t) + \varepsilon \eta(t) \end{aligned}$$

ofwel

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t) + \eta(t) \quad (3.9)$$

De oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking:

$$\dot{\psi}(t) + \psi(t) = \eta(t)$$

is:

$$\psi(t) = e^{-t} \psi(0) + e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \eta(\tau) d\tau$$

Omdat de randvoorwaarden  $x(0)=1$  en  $x(T)=0$  vervuld moeten worden, moeten aan  $\psi(t)$  de volgende eisen worden gesteld:

$$\psi(0) = 0 \quad \psi(T) = 0$$



Deze laatste voorwaarde kunnen we nu als volgt schrijven:

$$\psi(T) = e^{-T} \int_0^T e^t \eta(t) dt = 0$$

zodat:

$$\int_0^T e^t \eta(t) dt = 0$$

Een voorbeeld van een verstoring is getekend in figuur 3.1. We merken op dat de variaties van  $u^*(t)$  zeer groot kunnen worden gedurende een zeer korte tijd, terwijl de variaties van  $x^*(t)$  beperkt blijven. Later zal blijken dat dit een van de belangrijkste verschillen is met het discrete maximum principe, waardoor in het discrete geval de noodzakelijke voorwaarde voor optimaliteit anders wordt.

We introduceren nu een z.g. toegevoegde variabele (de naam zal later duidelijk worden)  $p(t)$ , die voorlopig een willekeurige, stuksgewijs continue functie is.

Omdat volgens (3.1) en (3.5) geldt:

$$\dot{x}(t) + x(t) - u(t) = 0$$

en

$$\dot{x}^*(t) + x^*(t) - u^*(t) = 0$$

kunnen we de volgende relaties opschrijven:

$$\int_0^T p(t) [x(t) - u(t) + \dot{x}(t)] dt = \int_0^T [p(t)x(t) - p(t)u(t) + p(t)\dot{x}(t)] dt = 0$$

$$\int_0^T p(t) [x^*(t) - u^*(t) + \dot{x}^*(t)] dt = \int_0^T [p(t)x^*(t) - p(t)u^*(t) + p(t)\dot{x}^*(t)] dt = 0$$

We kunnen nu de objectfuncties  $J(u)$  en  $J(u^*)$  met deze integralen, die toch nul zijn, uitbreiden:

$$J(u) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} x^2(t) + \frac{1}{2} u^2(t) + p(t)x(t) - p(t)u(t) + p(t)\dot{x}(t) \right] dt \quad (3.10)$$

$$J(u^*) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} x^{*2}(t) + \frac{1}{2} u^{*2}(t) + p(t)x^*(t) - p(t)u^*(t) + p(t)\dot{x}^*(t) \right] dt \quad (3.11)$$

Met behulp van de z.g. Hamiltoniaan worden deze uitdrukkingen nog anders geschreven.

Als de differentiaalvergelijking (3.1) algemeen luidt:

$$\dot{x}(t) = f(x, u)$$

dan is de definitie van de Hamiltoniaan voor dit een-dimensionale geval:

$$H(x, p, u) = -L(x, u) + p f(x, u) \quad (3.12)$$

In ons geval geldt dus:

$$H(x(t), p(t), u(t)) = -\frac{1}{2}x^2(t) - \frac{1}{2}u^2(t) + p(t)[-x(t) + u(t)] \quad (3.13)$$

Dus (3.10) en (3.11) kunnen als volgt omgewerkt worden:

$$J(u) = \int_0^T [-H(x(t), p(t), u(t)) + p(t) \dot{x}(t)] dt$$

$$J(u^*) = \int_0^T [-H(x^*(t), p(t), u^*(t)) + p(t) \dot{x}^*(t)] dt$$

Het verschil van deze objectfuncties is:

$$J(u) - J(u^*) =$$

$$-\int_0^T [H(x(t), p(t), u(t)) - H(x^*(t), p(t), u^*(t))] dt - \int_0^T p(t) [\dot{x}^*(t) - \dot{x}(t)] dt \quad (3.14)$$

We kunnen (3.14) met behulp van de vergelijkingen voor de verschillende storingstermen en door gebruik te maken van een Taylor-reeks-ontwikkeling van H omwerken.

Voor kleine  $\epsilon$  geldt:

$$H(x(t), p(t), u(t)) =$$

$$H(x^*(t), p(t), u^*(t)) + \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p(t), u^*(t)) [x(t) - x^*(t)] \quad (3.15)$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p(t), u^*(t)) [u(t) - u^*(t)] + O(\epsilon)$$

waarbij  $O(\epsilon)$  zodanig is dat  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{O(\epsilon)}{\epsilon} = 0$

Vullen we (3.6) en (3.7) in in (3.15) dar ontstaat:

$$\begin{aligned}
 H(x(t), p(t), u(t)) = & \\
 H(x^*(t), p(t), u^*(t)) + \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p(t), u^*(t)) \varepsilon \psi(t) & \quad (3.16) \\
 + \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p(t), u^*(t)) \varepsilon \eta(t) + O(\varepsilon) &
 \end{aligned}$$

We kunnen nu dus het verschil tussen de objectfuncties (3.14) als volgt schrijven:

$$\begin{aligned}
 J(u) - J(u^*) = & \\
 -\varepsilon \int_0^T \left[ \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p(t), u^*(t)) \psi(t) + \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p(t), u^*(t)) \eta(t) \right] dt & \quad (3.17) \\
 + \varepsilon \int_0^T p(t) \dot{\psi}(t) dt - O(\varepsilon) &
 \end{aligned}$$

waarbij ook gebruik is gemaakt van de relatie (3.7):

$$\dot{x}^*(t) - \dot{x}(t) = -\varepsilon \dot{\psi}(t)$$

Met behulp van partiële integratie kunnen we de tweede integraal als volgt schrijven:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \int_0^T p(t) \dot{\psi}(t) dt &= \varepsilon p(T) \psi(T) - \varepsilon p(0) \psi(0) - \varepsilon \int_0^T \dot{p}(t) \psi(t) dt \\
 &= -\varepsilon \int_0^T \dot{p}(t) \psi(t) dt
 \end{aligned}$$

omdat  $\psi(T) = \psi(0) = 0$

Dus (3.17) luidt nu:

$$\begin{aligned}
 J(u) - J(u^*) = & \\
 -\varepsilon \left[ \int_0^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p(t), u^*(t)) + \dot{p}(t) \right\} \psi(t) dt + \right. & \\
 \left. + \int_0^T \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p(t), u^*(t)) \eta(t) dt \right] - O(\varepsilon) &
 \end{aligned}$$

Omdat  $u^*(t)$  een optimale strategie is moet gelden

$$J(u) - J(u^*) \geq 0$$

$\varepsilon$  is een klein getal dat zowel positief als negatief kan zijn. Als we  $O(\varepsilon)$  verwaarlozen dan is een noodzakelijke voorwaarde voor een optimum dat:

$$\int_0^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p(t), u^*(t)) + \dot{p}(t) \right\} \psi(t) dt + \int_0^T \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p(t), u^*(t)) \eta(t) dt = 0 \quad (3.18)$$

Als we nu eisen dat  $p(t)$  voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p(t), u^*(t)) \\ &= p(t) + x^*(t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

dan wordt de noodzakelijke voorwaarde voor een optimum (3.18):

$$\int_0^T \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p(t), u^*(t)) \eta(t) dt = 0 \quad (3.20)$$

De naam: "toegevoegde variabele" voor  $p(t)$  wordt nu duidelijk omdat, als we uitgaan van een homogeen systeem, beschreven door de differentiaalvergelijking:  $\dot{z}(t) = A(t)z(t)$ , het toegevoegde systeem gedefinieerd is als:  $\dot{z}(t) = -A^T(t)z(t)$ . Hierbij is  $A^T(t)$  de getransponeerde van de matrix  $A(t)$ . Zo is het homogene deel van (3.19) het toegevoegde systeem van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking (3.1)

Relatie (3.20) geldt voor elke stuksgewijs continue functie  $\eta(t)$  die, zoals we gezien hebben, voldoet aan:

$$\int_0^T e^t \eta(t) dt = 0 \quad (3.21)$$

Met behulp van deze beperking is het mogelijk (3.20) in een andere vorm te schrijven. Hiervoor hebben we een stelling nodig die als volgt luidt:

Als  $h(t)$  een stuksgewijs continue functie is voor  $t \in [0, T]$  en als

$$\int_0^T h(t) a(t) dt = 0 \quad (3.22)$$

voor alle stuksgewijs continue functies  $a(t)$  voor  $t \in [0, T]$  die voldoen aan:

$$\int_0^T a(t) dt = 0 \quad (3.23)$$

dan is  $h(t)$  constant voor  $t \in [0, T]$

Het bewijs hiervan gaat als volgt:

Omdat  $h(t)$  een stuksgewijs continue functie is kan er een reëel getal  $c$  gevonden worden zodanig dat

$$\int_0^T h(t) dt = cT$$

Dit kunnen we ook schrijven als:

$$\int_0^T [h(t) - c] dt = 0$$

Voor  $a(t) = h(t) - c$  voldoet deze relatie aan (3.23).

Veronderstel dat (3.22) geldt, d.w.z.

$$\int_0^T h(t) a(t) dt = \int_0^T h(t) [h(t) - c] dt = 0$$

en

$$\int_0^T [-c \{h(t) - c\}] dt = 0$$

Dus

$$\int_0^T h(t) [h(t) - c] dt + \int_0^T [-c \{h(t) - c\}] dt = 0$$

$$\text{en: } \int_0^T [h(t) - c]^2 dt = 0$$

Aangezien  $\int_0^T [h(t) - c]^2 dt \geq 0$  volgt hieruit dat  $h(t) = c$

Relatie (3.20) kunnen we schrijven als:

$$\int_0^T \frac{\partial H}{\partial u} (x^*(t), p(t), u^*(t)) e^{-t} \cdot e^t \cdot \eta(t) dt = 0$$

Aangezien volgens (3.21) geldt dat

$$\int_0^T e^t \eta(t) dt = 0$$

volgt uit de zojuist bewezen stelling dat:

$$\frac{\partial H}{\partial u} (x^*(t), p(t), u^*(t)) e^{-t} = c$$

ofwel

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\chi^*(t), p(t), u^*(t)) = c \cdot e^t \quad (3.24)$$

waarbij  $c$  een constante is.

Als  $\hat{p}(t)$  de oplossing is van

$$\dot{\hat{p}}(t) = p(t) + \chi^*(t)$$

met beginvoorwaarde  $\hat{p}(0) = C_1$ , dan is (zie 3.19)

$$\hat{p}(t) = C_1 e^t + e^t \int_0^t e^{-\tau} \chi^*(\tau) d\tau \quad (3.25)$$

Uit (3.24) volgt dat er een constante  $C_2$  bestaat, zodat

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\chi^*(t), \hat{p}(t), u^*(t)) = -u^*(t) + \hat{p}(t) = C_2 e^t$$

We vullen hierin (3.25) in:

$$-u^*(t) + C_1 e^t + e^t \int_0^t e^{-\tau} \chi^*(\tau) d\tau = C_2 e^t$$

Dus:

$$u^*(t) = C^* e^t + e^t \int_0^t e^{-\tau} \chi^*(\tau) d\tau \quad (3.26)$$

$$\text{met } C_1 - C_2 = C^*$$

We noemen  $p^*(t)$  de oplossing van

$$\dot{p}^*(t) = p(t) + \chi^*(t)$$

met beginsvoorwaarde  $p^*(0) = C^*$ .

Dus

$$p^*(t) = C^* e^t + e^t \int_0^t e^{-\tau} \chi^*(\tau) d\tau \quad (3.27)$$

We zullen nu bewijzen dat de Hamiltoniaan  $H(\chi^*(t), p^*(t), u)$  een absoluut maximum heeft als functie van  $u$  voor  $u = u^*(t)$  voor elke  $t$  in het interval  $[0, T]$ .

We hebben de Hamiltoniaan reeds gedefinieerd voor dit voorbeeld als (zie 3.13):

$$H(\chi^*(t), p^*(t), u) = -\frac{1}{2} \chi^*(t)^2 - \frac{1}{2} u^2 + p^*(t) [-\chi^*(t) + u] \quad (3.28)$$

Dit stelt als functie van  $u$  een parabool voor met een uniek globaal maximum. Dit maximum wordt bereikt voor  $u = u^*(t)$  want:

$$\left. \frac{\partial H(u)}{\partial u} \right|_{u=u^*(t)} = -u^*(t) + p^*(t) = 0 \quad (3.29)$$

volgens (3.26) en (3.27)

$$\left. \frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2} \right|_{u=u^*(t)} = -1$$

We merken nog op dat de differentiaalvergelijking voor  $\dot{x}^*(t)$  ook als volgt kan worden geschreven:

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) \quad (3.30)$$

zoals uit (3.28) blijkt.

Recapitulerend:

We beschouwen het systeem, beschreven door de differentiaalvergelijking

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \quad (3.31)$$

met randvoorwaarden:  $x(0) = 1$      $x(\tau) = 0$     (3.32)

waarbij  $u(t)$  een stuksgewijs continue functie is.

Als  $u^*(t)$  een (toegestane) optimale strategie is die de objectfunctie  $\frac{1}{2} \int_0^\tau [x^2(t) + u^2(t)] dt$  minimaliseert en  $x^*(t)$  de bijbehorende trajectorie volgens (3.31) en (3.32) dan bestaat er een functie  $p^*(t)$  zodanig dat:

1.  $x^*(t)$  en  $p^*(t)$  de oplossingen zijn van het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) \\ \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) \end{aligned} \quad (3.33)$$

2. de functie  $H(x^*(t), p^*(t), u)$  heeft een absoluut maximum als functie van  $u$  voor  $u = u^*(t)$ ,  $t = [0, T]$  dus:

$$H(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = \underset{u}{\text{Max}} H(x^*(t), p^*(t), u)$$

Voor dit probleem is dit het maximum principe van Pontryagin.

We merken op dat dit voorbeeld van het z.g. fixed-time, fixed-end type is. Immers de tijd waarover geoptimaliseerd moest worden ligt vast, evenals het eindpunt  $x(T)$ . Dit betekent dat we genoeg randvoorwaarden hebben ( $x(0)$  en  $x(T)$ ) om het stelsel (3.33) op te lossen. In de volgende paragraaf zal, uitgaande van hetzelfde voorbeeld, nader worden ingegaan op het free-end probleem, waarbij dus geen voorwaarden aan  $x(T)$  worden opgelegd. Dit betekent dat we in dat geval nog een tweede randvoorwaarde nodig zullen hebben,  $p(0)$  of  $p(T)$ .

Bij dit voorbeeld was  $u(t)$  niet aan bepaalde beperkingen gebonden, behalve dat het een stuksgewijs continue functie moest zijn. In het algemene geval kunnen er wel voorwaarden aan  $u(t)$  worden opgelegd.

Het voordeel van het maximum principe is dat we, in plaats van het minimaliseren van de functionaal  $J(u)$  het maximaliseren van de functie  $H(u)$  hebben gekregen. Bovendien kan  $u$  aan bepaalde voorwaarden gebonden zijn, zoals in de praktijk ook meestal het geval is.

Het maximum principe kan eenvoudig vervangen worden door het minimum principe. De Hamiltoniaan wordt dan enigszins anders gedefinieerd:

$$H(x, p, u) = L(x, u) + p \cdot f(x, u)$$

Vergelijk dit met (3.12). Voor de optimale strategie geldt nu dat de Hamiltoniaan absoluut minimaal moet zijn.

Tenslotte dient nog opgemerkt te worden dat



$H(x^*(t), p^*(t), u^*(t))$  bij dit voorbeeld constant is voor  $t \in [0, T]$ .

Immers:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) \dot{x}^*(t) + \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) \dot{p}^*(t) + \quad (3.24) \\ + \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) \dot{u}^*(t) \end{aligned}$$

Uit (3.29) volgt dat

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = 0$$

Invullen van (3.33) in (3.34) geeft:

$$\frac{dH}{dt}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = 0$$

3.3. Afleiding van een noodzakelijke voorwaarde voor een optimum aan de hand van een voorbeeld met een vrij eindpunt

voorbeeld

Voor hetzelfde/als in de vorige paragraaf zullen we nu de noodzakelijke condities voor een optimum behandelen als het eindpunt vrij is. De enige voorwaarde die nu aan  $\psi(t)$  gesteld wordt is, dat:  $\psi(0) = 0$

Omdat het verhaal voor het vrije eindpunt voor een groot deel analoog is aan dat met het vaste eindpunt zal veel verwezen worden naar de vorige paragraaf.

We schrijven nogmaals de uitdrukking (3.17), het verschil tussen de gestoorde en de optimale objectfunctie, op:

$$J(u) - J(u^*) = -\varepsilon \int_0^T \left[ \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p(t), u^*(t)) \psi(t) + \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p(t), u^*(t)) \eta(t) \right] dt + \varepsilon \int_0^T p(t) \dot{\psi}(t) dt - O(\varepsilon)$$

We passen weer partiële integratie toe op de laatste integraal:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^T p(t) \dot{\psi}(t) dt &= \varepsilon p(T) \psi(T) - \varepsilon p(0) \psi(0) - \varepsilon \int_0^T \dot{p}(t) \psi(t) dt \\ &= \varepsilon p(T) \psi(T) - \varepsilon \int_0^T \dot{p}(t) \psi(t) dt \end{aligned}$$

omdat  $\psi(0) = 0$

De noodzakelijke voorwaarde voor een optimum voor het systeem met het vrije eindpunt wordt:

$$\int_0^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p(t), u^*(t)) + \dot{p}(t) \right\} \psi(t) dt + \int_0^T \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p(t), u^*(t)) \eta(t) dt + p(T) \psi(T) = 0$$

Vergelijk deze uitdrukking met (3.18).

We eisen nu dat  $p(t)$  de oplossing is van de differentiaalvergelijking:

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p(t), u^*(t)) \quad (3.35)$$

met als eindvoorwaarde:

$$p(T) = 0 \quad (3.36)$$

De voorwaarde voor een optimum wordt dan:

$$\int_0^T \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) \eta(t) dt = 0 \quad (3.37)$$

De verschillen met de overeenkomstige uitdrukking (3.20) zijn:

1.  $\eta(t)$  is nu een willekeurige, stuksgewijs continue functie.
2. Hier staat  $p^*(t)$  in plaats van  $p(t)$ . Dit is het gevolg van het feit dat we een randvoorwaarde  $p(T)$  hebben vastgelegd, zodat er een unieke oplossing  $p^*(t)$  bestaat van (3.35).

We zullen nu gebruik maken van een stelling, die als volgt luidt:

Als  $h(t)$  een stuksgewijs continue functie is voor  $t \in [0, T]$  en als geldt:

$$\int_0^T h(t) \alpha(t) dt = 0$$

voor alle stuksgewijs continue functies  $\alpha(t)$  voor  $t \in [0, T]$  dan is

$$h(t) = 0 \quad t \in [0, T]$$

Het bewijs van deze stelling kan uit het ongerijmde gegeven worden.

Stel dat  $h(t) \neq 0$  voor  $t \in [0, T]$ . Dan geldt voor  $h(t) = c$  en  $\alpha(t) = c$  ( $c$  is een constante;  $> 0$ ):

$$\int_0^T c^2 dt > 0$$

Dit is in strijd met de veronderstelling dat  $\int_0^T h(t) \alpha(t) dt = 0$

Deze stelling toepassend op (3.37) levert:

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = 0$$

Dus de functie  $H(x^*(t), p^*(t), u)$  heeft als functie van  $u$  voor  $t \in [0, T]$  een extremum voor  $u = u^*(t)$

Om te onderzoeken of dit extremum een maximum is zullen we naar de tweede afgeleide moeten kijken. De Hamiltoniaan voor het vrije eindpunt is dezelfde als die voor het vaste eindpunt:

$$H(x^*(t), p^*(t), u) = -\frac{1}{2}x^{*2}(t) - \frac{1}{2}u^2 + p^*(t)[-x^*(t) + u] \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial H(u)}{\partial u} = -u^*(t) + p^*(t)$$

$$\frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2} = -1$$

dus het extremum is een maximum.

We hebben nu dus bewezen dat voor de differentiaalvergelijking

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \quad t \in [0, T]$$

met randvoorwaarde:  $x(0) = 1$

waarbij  $u(t)$  een stuksgewijs continue functie is geldt dat:

Als  $u^*(t)$  een toegestane optimale strategie is, die de objectfunctie

$$\frac{1}{2} \int_0^T [x^2(t) + u^2(t)] dt$$

minimaliseert en  $x^*(t)$  de bijbehorende trajectorie dan bestaat er een functie  $p^*(t)$  zodanig dat:

1.  $x^*(t)$  en  $p^*(t)$  de oplossingen zijn van het stelsel:

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) \quad (3.39)$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) \quad (3.40)$$

met randvoorwaarde  $p(T) = 0$

2. de functie  $H(x^*(t), p^*(t), u)$  een absoluut maximum heeft als functie van  $u$  voor  $u = u^*(t)$

dus

$$H(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = \underset{u}{\text{Max}} H(x^*(t), p^*(t), u)$$

Dit is dus voor het beschouwde systeem met vrij eindpunt het maximum principe.

We zullen nu een numerieke oplossing geven van het zojuist besproken probleem.

Het op te lossen stelsel differentiaalvergelijkingen is:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \quad x(0) = 1 \quad (3.41)$$

$$\dot{p}(t) = x(t) + p(t) \quad p(T) = 0 \quad (3.42)$$

waarbij  $u(t)$  zo gekozen moet worden dat de Hamiltoniaan:

$$H(u) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}u^2 + p(-x+u)$$

maximaal is. Dit is een parabool, die zijn globale maximum bereikt voor:

$$\frac{\partial H(u)}{\partial u} = -u + p = 0 \rightarrow p(t) = u(t)$$

Als we dit invullen in (3.41) en (3.42) dan wordt het stelsel:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + p(t) \quad x(0) = 1 \quad (3.43)$$

$$\dot{p}(t) = x(t) + p(t) \quad p(T) = 0 \quad (3.44)$$

Na eliminatie van  $x(t)$  en  $p(t)$ :

$$\ddot{x}(t) - 2x(t) = 0 \quad x(0) = 1$$

$$\ddot{p}(t) - 2p(t) = 0 \quad p(T) = 0$$

De oplossing van dit stelsel is:

$$x(t) = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}} \quad (3.45)$$

$$p(t) = u(t) = C_1 (1+\sqrt{2})e^{t\sqrt{2}} + C_2 (1-\sqrt{2})e^{-t\sqrt{2}} \quad (3.46)$$

met:

$$C_1 = \frac{(\sqrt{2}-1)e^{-T\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}+1)e^{T\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1)e^{-T\sqrt{2}}} \quad C_2 = \frac{(\sqrt{2}+1)e^{T\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}+1)e^{T\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1)e^{-T\sqrt{2}}}$$

Neem bijvoorbeeld  $T=1$ :

$$x(t) = 0,07004 e^{t\sqrt{2}} + 0,98996 e^{-t\sqrt{2}} \quad (3.47)$$

$$p(t) = u(t) = 0,02424 e^{t\sqrt{2}} - 0,41005 e^{-t\sqrt{2}} \quad (3.48)$$

Voor  $t=0,5$  wordt  $x(t)=0,5106$  (3.49)

Later zal dit resultaat vergeleken worden met het resultaat dat met behulp van het discrete maximum principe toegepast op hetzelfde systeem, dan echter benaderd door differentievergelijkingen, verkregen zal worden.

### 3.4. Algemene formulering van het continue maximum principe

In het algemeen wordt het maximum principe iets anders geformuleerd dan in de paragrafen 3.2 en 3.3 is gedaan.

Laten we hetzelfde voorbeeld nog eens bekijken.

De objectfunctie is:

$$J(u, x) = \frac{1}{2} \int_0^T [x^2(t) + u^2(t)] dt$$

Als functie van de tijd wordt deze uitdrukking:

$$J(u, x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t [x^2(\tau) + u^2(\tau)] d\tau$$

we voeren deze functionaal in als tweede toestandsvariabele van ons systeem:

$$x_2(t) = J(u, x, t)$$

zodat  $x_2(t)$  voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{2} x^2(t) + \frac{1}{2} u^2(t)$$

Het stelsel differentiaalvergelijkingen voor ons systeem wordt dan:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x, u) = -x_1(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x, u) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)$$

of in vectorvorm:  $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$  met

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

We moeten nu een  $u(t)$  zoeken zodanig dat

$$x_2(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} [x_1^2(t) + u^2(t)] dt$$

minimaal wordt.

De Hamiltoniaan definiëren we nu overeenkomstig de uitbreiding van het systeem met een tweede toestandsvariabele:

$$H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{p}) = p_1 \cdot f_1(\underline{x}, \underline{u}) + p_2 \cdot f_2(\underline{x}, \underline{u})$$

$$= \left\langle \underline{p} \mid \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \right\rangle \quad (3.50)$$

$$\text{met: } \underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$\langle \underline{a} \mid \underline{b} \rangle$  betekent het inwendige product van de vectoren  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$ . Hierbij wordt  $\underline{p}$  als volgt gedefiniëerd:

$$\dot{\underline{p}}(t) = - \frac{\partial H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{p})}{\partial \underline{x}} \quad (3.51)$$

met als randvoorwaarde:  $p_1(\tau) = 0$ , in het geval we een probleem hebben met een vrij eindpunt. We hebben nu nog een randvoorwaarde nodig.

Omdat  $x_2(t)$ , en dus  $f_2(x_1, u)$  niet van  $x_2$  afhangt vinden we eenvoudig:

$$\dot{p}_2(t) = - \frac{\partial H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{p})}{\partial x_2} = - \frac{\partial H(x_1, u, p_1, p_2)}{\partial x_2} = 0$$

dus  $p_2(t)$  is constant.

We eisen nu als randvoorwaarde voor  $p_2(T)$  dat  $p_2(T) = -1$  voor het geval van het maximum principe en  $p_2(T) = 1$  voor het geval van het minimum principe.

Voor het maximum principe volgt dus:

$$p_2(t) = -1 \quad t \in [0, T]$$

zodat de Hamiltoniaan wordt:

$$H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{p}) = p_1 f_1(\underline{x}, \underline{u}) - f_2(\underline{x}, \underline{u})$$

Deze uitdrukking is dezelfde als (3.12) omdat  $f_2(\underline{x}, \underline{u}) = L(\underline{x}, \underline{u})$  voor het minimum <sup>principe</sup> volgt een analoge redenering.

De differentiaalvergelijking voor  $p(t)$ , (3.51) kunnen we met behulp van de definitie van de Hamiltoniaan ook iets anders formuleren:

$$\dot{\underline{p}}(t) = - \frac{\partial H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{p})}{\partial \underline{x}} = - \left( \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right)^T \cdot \underline{p}(t) \quad (3.52)$$

We kunnen het maximum principe natuurlijk uitbreiden tot systemen met meer toestandsvergelijkingen.

Beschouw het proces, beschreven door de differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \\ \underline{x}(0) &= \underline{a} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$\underline{x} \in E_n$  : Euclidische ruimte van de  $n^e$  dimensie

$$\underline{u} \in \Omega \subset E_r$$

$\Omega$  is de zg. besturingsruimte, een compacte <sup>\*)</sup> verzameling in  $E_r$ .

---

\*) compact betekent: gesloten en begrensd.



We noemen  $\underline{u}^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$  een optimale strategie met  $\underline{x}^*(t)$  als bijbehorende optimale trajectorie, d.w.z.

$$\dot{\underline{x}}^*(t) = \underline{f}(\underline{x}^*(t), \underline{u}^*(t)), \quad \underline{x}^*(0) = \underline{a}$$

als

$$\langle \underline{b} | \underline{x}^*(T) \rangle \leq \langle \underline{b} | \underline{x}(T) \rangle \quad (3.54)$$

Een noodzakelijke voorwaarde voor dit optimum bij het vrije eindpunt probleem is dat er een toegevoegde variabele  $\underline{p}^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$  bestaat, zodanig dat  $\underline{p}^*(t)$  een niet triviale oplossing is van de differentiaalvergelijking:

$$\dot{\underline{p}}^*(t) = - \left( \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}^*(t))}{\partial \underline{x}} \Big|_{\underline{x} = \underline{x}^*(t)} \right)^T \cdot \underline{p}^*(t) \quad (3.55)$$

met de ranvoorwaarde:

$$\underline{p}(T) = -\underline{b} \quad (3.56)$$

en de Hamiltoniaan als functie van  $\underline{u}$  maximaal wordt voor  $\underline{u} = \underline{u}^*(t)$  :

$$H(\underline{x}^*(t), \underline{u}^*(t), \underline{p}^*(t)) \geq H(\underline{x}^*(t), \underline{u}, \underline{p}^*(t))$$

Voor de meeste problemen behoeven we slechts één component van de toestandsvariabele op het eindpunt te minimaliseren b.v. de  $n^e$  component. Dan gaat relatie (3.54) over in:

$$b_n \cdot x_n^*(T) \leq b_n \cdot x_n(T)$$

of, als  $b_n = 1$ :  $x_n^*(T) \leq x_n(T)$

Voor  $\underline{b}$  geldt nu

$$b_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$b_n = 1$$

Hieruit volgt dat nu de zg. transversaliteitsconditie (3.56) wordt:

$$p_i(T) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$p_n(T) = -1$$

Als we het maximum principe voor het vaste eindpunt bekijken dan blijken alleen de transversaliteitscondities wijzigingen te ondergaan. We kunnen verschillende soorten voorwaarden aan het eindpunt opleggen bijvoorbeeld:

- het eindpunt is een vast punt in  $E_n$
- het eindpunt moet op een bepaald hypervlak in  $E_n$  liggen
- het eindpunt moet liggen in een bepaalde deelverzameling  $B \subset E_n$ .

We kunnen analoge voorwaarden opleggen aan het beginpunt, door niet te eisen dat het beginpunt vast ligt, maar bijvoorbeeld op een bepaald hypervlak in  $E_n$ .

Voorbeeld:

Het beginpunt  $\underline{x}(0)$  ligt vast, het eindpunt  $\underline{x}(T)$  moet voldoen aan de voorwaarden:

$$g_k(\underline{x}(T)) = 0 \quad k=0, 1, \dots, l < n$$

dus  $\underline{x}(T)$  moet liggen in een  $(n-1)$ dimensionale deelverzameling van  $E_n$ .

De transversaliteitsconditie wordt voor dit geval

$$\begin{aligned} P_i(T) &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \langle \underline{b} | \underline{x} \rangle + \langle \underline{\mu} | \underline{g}(\underline{x}) \rangle \right]_{\underline{x} = \underline{x}(T)} \\ &= - \left[ b_i + \sum_{k=1}^l \mu_k \frac{\partial g_k(\underline{x})}{\partial x_i} \right]_{\underline{x} = \underline{x}(T)} \end{aligned}$$

Hierbij is  $\underline{\mu}$  een soort Lagrange multiplier vector.

Tot nu toe hebben we autonome systemen bekeken d.w.z. systemen die niet expliciet van de tijd afhangen.

Beschouw de differentiaalvergelijking:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad \underline{x} \in E_n \quad \underline{u} \in E_r \quad (3.57)$$

Voer een nieuwe toestandsvariabele in:

$$x_{n+1}(t) = t$$

dus:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = 1$$

We kunnen dit systeem dus ook beschrijven als:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u) \quad \tilde{x} \in E_{n+1}$$

Met andere woorden: de in het voorgaande afgeleide principes gelden ook voor systemen die expliciet van de tijd afhangen.

Bij de toepassing van het maximum principe hebben we het minimaliseren van een integraal vervangen door het minimaliseren van een component van de toestandsvariabele, waarvan de dimensie voor dat doel met één wordt uitgebreid. Deze methode kan algemeen worden toegepast bij optimaliseringsproblemen.

Beschouwen we eerst het tijd-optimale probleem. Voor het systeem beschreven door (3.57) vragen we  $u(t)$  zo te bepalen dat  $x(t)$  in minimale tijd van een bepaalde begintoestand  $x(0)$  naar een voorgeschreven eindtoestand wordt gebracht. Het eindtijdstip  $T$  is hier dus variabel.

Zoals reeds gezegd introduceren we een nieuwe toestandsvariabele:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1}(t) &= 1 \\ \text{en} \quad x_{n+1}(t) &= \int_0^t dt \quad x_{n+1}(0) = 0 \end{aligned}$$

We zullen nu eisen dat de nieuwe toestandsvariabele  $x_{n+1}$  geminimaliseerd wordt.

Bij het zogenaamde eindpunt-optimale probleem vragen we voor het systeem beschreven door (3.53) dat een functionaal van de toestandsvariabele op het eindpunt,  $g(x(\tau))$  geminimaliseerd wordt.

Introduceer ook nu weer een nieuwe toestandsvariabele:

$$x_{n+1}(t) = g(\underline{x}(t))$$

met beginvoorwaarde:

$$x_{n+1}(0) = g(\underline{x}(0))$$

De differentiaalvergelijking voor deze toestandsvariabele wordt:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \frac{\partial g(\underline{x})}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial g(\underline{x})}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial g(\underline{x})}{\partial x_n} \dot{x}_n$$

die met behulp van (3.53) geschreven kan worden als:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\underline{x})}{\partial x_i} f_i(\underline{x}, u)$$

Het eindpunt-optimale probleem is nu gereduceerd tot het minimaliseren van  $x_{n+1}(\tau)$ .

In deze paragraaf werd het continue maximum principe in een "engineering" vorm beschreven, d.w.z. meer gericht op het in de praktijk toepassen van het principe dan op de mathematisch exacte formuleringen, waarvoor verwezen wordt naar 4), 5) en 6).

In de volgende paragraaf zullen enkele opmerkingen worden gemaakt over de moeilijkheden die we in de praktijk tegenkomen als we het maximum principe willen gebruiken.

3.5. Enkele opmerkingen over de toepasbaarheid van het continue maximum principe

Bij de toepassing van het maximum principe ontmoeten we twee moeilijkheden, zoals ook uit de formulering van het principe blijkt:

1. Het maximum principe geeft alleen resultaten als zeker is dat er een optimale strategie met bijbehorende optimale trajectorie bestaat. Dit zal dus eerst onderzocht moeten worden. ("existence theorems")
2. Het maximum principe mag in het algemeen niet omgekeerd worden: als voor een bepaalde strategie de Hamiltoniaan maximaal wordt hoeft deze strategie niet de optimale te zijn. Het principe geeft in de meeste gevallen noodzakelijke, maar geen voldoende voorwaarden voor een optimum.

Ten aanzien van het eerste punt beschouwen we het systeem beschreven door de differentiaalvergelijkingen:

$$\dot{x}(t) = -y^2(t) + u^2(t) \quad (3.58)$$

$$\dot{y}(t) = u(t) \quad (3.59)$$

waarbij  $u(t)$  gebonden is aan de voorwaarde

$$|u(t)| \leq 1 \quad (3.60)$$

Gevraagd wordt  $u(t)$  zo te kiezen dat  $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  in minimale tijd van  $\underline{x}(0) = \underline{0}$  gestuurd wordt naar de ruimte  $X = \{x=1, |y| \leq 1\}$

Zoals in de vorige paragraaf uiteengezet is introduceren we voor dit minimale tijd probleem een nieuwe toestandsvariabele:  $t$

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int_0^t d\tau \\ \dot{Z}(t) &= 1 \end{aligned} \quad (3.61)$$

zodat het nieuwe stelsel differentiaalvergelijkingen in vectorvorm geschreven kan worden als:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (3.62)$$

$$\text{met } \underline{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Voor dit systeem is de Hamiltoniaan:

$$H(\underline{x}, \underline{\tilde{p}}, \underline{u}) = \langle \underline{\tilde{p}} | \underline{\tilde{f}}(\underline{x}, \underline{u}) \rangle = p_1 \{-y^2 + u^2\} + p_2 u + p_3 \quad (3.63)$$

Als functie van  $u$  heeft  $H(\underline{x}, \underline{\tilde{p}}, \underline{u})$  een extremum voor:

$$\frac{\partial H(\underline{x}, \underline{\tilde{p}}, \underline{u})}{\partial u} = \frac{\partial H(y, \underline{\tilde{p}}, u)}{\partial u} = 2p_1 u + p_2 = 0$$

dus voor  $p_2 = -2p_1 u$

zodat

$$H(y, \underline{\tilde{p}}, u) = -p_1 y^2 - p_1 u^2 + p_3$$

en, omdat we alleen maar geïnteresseerd zijn in de Hamiltoniaan als functie van  $u$ :

$$H(u) = -p_1 u^2$$

Hieruit kan worden geconcludeerd dat  $H(u)$  maximaal is voor

$$\begin{aligned} u(t) &= \pm 1 & \text{als } p_1 < 0 \\ u(t) &= 0 & \text{als } p_1 > 0 \end{aligned}$$

Volgens (3.52) geldt:

$$\dot{p}_1(t) = p_1(t) \frac{\partial f_1}{\partial x} + p_2(t) \frac{\partial f_2}{\partial x} + p_3(t) \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0$$

zodat  $p_1(t)$  constant is.

Dit betekent dat voor  $p_1(t) > 0$  gedurende het gehele proces  $u(t) = 0$  zal moeten zijn. Het is dan echter onmogelijk om aan de eindvoorwaarde voor  $x(t)$  te voldoen.

Immers uit (3.59) volgt dan:

$$\dot{y}(t) = u(t) = 0$$

Omdat  $y(0) = 0$  zal  $y(t) = 0$  zijn gedurende het gehele proces.

Dit impliceert dat volgens (3.58):

$$\dot{x}(t) = 0$$

en dus:

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau = 0$$

zodat de verzameling  $X = \{x=1, |y| \leq 1\}$  nooit bereikt kan worden.

Voor  $p_1(t) < 0$  wordt  $H(u)$  maximaal als  $u(t) = \pm 1$

Uit (3.58) zien we dat in dit geval:  $\dot{x}(t) \leq 1$

Omdat op het eindpunt moet gelden:

$$x(T) = \int_0^T \dot{x}(t) dt = 1$$

is er een benedengrens voor de minimale tijd:  $T^* \geq 1$

Laten we het tijdsinterval  $0 \leq t \leq t_1$ ,  $t_1 \geq 2$  verdelen in  $k$  perioden met lengte  $t_1/k$  en laat  $u_k(t)$  afwisselend  $+1$  en  $-1$  zijn in opeenvolgende intervallen. Uit (3.59) volgt dan:

$$y_k(t) = \int_0^{t_1/k} (+1) dt + \int_{t_1/k}^{2t_1/k} (-1) dt + \dots + \int_{jt_1/k}^t (\pm 1) dt$$

$j$  en  $k/\sqrt{\phantom{x}}$  zijn gehele getallen en  $(t - jt_1/k) \leq t_1/k$ , zodat:

$$|y_k(t)| \leq \frac{1}{k}$$

Uit (3.58) zien we dan dat:

$$\dot{x}_k(t) = -y_k^2(t) + u_k^2(t) \geq -\frac{1}{k^2} + 1 \quad (3.64)$$

Omdat op het eindtijdstip  $T$  moet gelden:

$$x(T) = \int_0^T \dot{x}(t) dt = 1$$

voldoet de minimale tijd  $T^*$  dus aan de voorwaarde:

$$T_k^* \leq \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

zodat de minimale tijd  $T^*$  nooit kan worden gehaald. We kunnen slechts zeggen dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^* = 1$$

zodat er dus oneindig maal geschakeld zou moeten worden van  $u=+1$  naar  $u=-1$ .

Aan de hand van figuur 3,2 is dit ook eenvoudig in te zien.

Uit (3.58) en (3.59) volgt:

$$\dot{y}(t) = u(t) = \pm \sqrt{\dot{x}(t) + y^2(t)}$$

In figuur 3.2 is  $u(t)$  getekend als functie van  $\dot{x}(t)$  met  $y^2(t)$  als parameter.

De beweging start in een punt op de kromme voor  $y^2(t)=0$ , bijvoorbeeld het punt  $A=(1,1)$ . Aanvankelijk is  $u(t)=1$  dat wil zeggen dat

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau > 0$$

Het fasepunt loopt dus over de lijn  $u(t)=1$  naar links. Dit houdt in dat  $\dot{x}(t)$  kleiner wordt, zodat, vanwege

$$x(\tau) = \int_0^\tau \dot{x}(t) dt = 1$$

het langer zal duren voordat  $x(t)$  in het voorgeschreven eindpunt komt.

Het kleiner worden van  $\dot{x}(t)$  kan worden opgeheven door na een periode  $\Delta t$  (het fasepunt bevindt zich dan in B) de stuurvariabele over te schakelen op  $u(t)=-1$ . Het fasepunt komt <sup>nu</sup> in C.

Omdat

$$y(t) = \int_0^{\Delta t} (+1) dt + \int_{\Delta t}^t (-1) dt$$

wordt  $y^2(t)$  weer kleiner voor  $t < 2\Delta t$ . Het fasepunt



beweegt zich dus nu weer naar rechts over de lijn  $u(t) = -1$  totdat  $t = 2\Delta t$ . Als  $u(t) = -1$  blijft voor  $t > 2\Delta t$  zal  $y^2(t)$  weer groter worden, het fasepunt zal weer naar links gaan en  $\dot{x}(t)$  wordt weer kleiner.

We moeten dus weer overschakelen naar  $u(t) = +1$ . Stel dat dit op het tijdstip  $t = 3\Delta t$ , als het fasepunt weer in C aangekomen is, gebeurt.

Het fasepunt springt dus weer terug naar B en zal weer naar rechts gaan bewegen omdat  $y^2(t)$  weer kleiner wordt. Er geldt immers dat

$$y(t) = \int_0^{\Delta t} (+1) dt + \int_{\Delta t}^{3\Delta t} (-1) dt + \int_{3\Delta t}^t (+1) dt$$

met  $t < 4\Delta t$

Voor  $t = 4\Delta t$  komt het fasepunt weer in A terug en de cyclus begint opnieuw. Hoe sneller er geschakeld wordt van  $u(t) = +1$  naar  $u(t) = -1$ , des te groter zal de gemiddelde waarde van  $\dot{x}(t)$  zijn, en des te korter zal de tijd zijn nodig om  $x(t) = 1$  te maken. De optimale tijd  $T^* = 1$  wordt echter voor geen enkele toegestane strategie bereikt.

Het in de vorige paragraaf geformuleerde maximum principe kan hier dus niet gebruikt worden.

Het is gebleken dat convexiteit een sleutelwoord is bij het onderzoek naar het bestaan van een optimale strategie.

Laten we in het zojuist besproken voorbeeld de verzameling:

$$V(x(t)) = \left\{ \tilde{f}(x(t), u(t)) : |u(t)| \leq 1 \right\}$$

eens nader onderzoeken op convexiteit.  $V(x(t))$  is convex als:

$$\alpha \tilde{f}(x_1(t), u_1(t)) + (1-\alpha) \tilde{f}(x_2(t), u_2(t)) \in \tilde{f}(x(t), u(t))$$

voor alle  $|u(t)| \leq 1$   
 en alle  $0 \leq \alpha \leq 1$

Dus:

$$\alpha \begin{pmatrix} -y_1^2(t) + u_1^2(t) \\ u_1(t) \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} -y_2^2(t) + u_2^2(t) \\ u_2(t) \\ 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} -y^2(t) + u^2(t) \\ u(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stel  $u_1(t) = 1$  voor  $0 \leq t \leq t_1$ ,

$u_2(t) = -1$  voor  $0 \leq t \leq t_1$ ,

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Dan volgt uit (3.59):  $y_1(t_1) = \int_0^{t_1} (+1) dt = t_1$ ,

$$y_2(t_1) = \int_0^{t_1} (-1) dt = -t_1$$

zodat op het tijdstip  $t_1$  geldt:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -t_1 + 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_1 + 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} -y^2(t_1) + u^2(t_1) \\ u(t_1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Echter voor  $u(t_1) = 0$  is het onmogelijk <sup>dat</sup>  $\sqrt{-y^2(t_1) + u^2(t_1)} = 1$  (zie figuur 3.2) zodat  $\forall (\underline{x}(t))$  niet convex is.

Lee en Markus <sup>6)</sup> hebben afgeleid onder welke voorwaarden een optimale trajectorie bestaat. Enigszins vereenvoudigd zullen deze voorwaarden weergegeven worden.

Het systeem wordt beschreven door de differentiaalvergelijking:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$$

$$\underline{x} \in E_n, \quad \underline{u} \in \Omega \subset E_r$$

Begin- en eindtoestand liggen in een voorgeschreven verzameling:

$$\underline{x}(t_0) \in X_0, \quad \underline{x}(t_1) \in X_1$$

waarbij  $X_0$  en  $X_1$  niet lege, compacte verzamelingen in  $E_n$  zijn.  $\underline{u}(t)$  is een stuksgewijs continue functie. De besturingsruimte  $\Omega$  is een niet lege compacte verzameling in  $E_r$ .

De kosten worden voorgesteld door:

$$J(\underline{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) dt$$

$f_0$  en  $f$  zijn differentieerbaar naar  $\underline{x}$  en  $\underline{u}$ .

Als voor het hierboven beschreven systeem bovendien nog geldt dat:

1. er een uniforme grens bestaat voor alle responsies  $\underline{x}(t)$  tengevolge van toegestane strategieën  $\underline{u}(t)$ :

$$|\underline{x}(t)| \leq b \text{ voor } t_0 \leq t \leq t_1,$$

2. de verzameling:

$$V(\underline{x}(t)) = \left\{ f_0(\underline{x}(t), \underline{u}(t)), f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) : \underline{u}(t) \in \Omega \right\}$$

convex is voor alle vaste  $\underline{x}(t)$

dan bestaat er een toegestane optimale strategie  $\underline{u}^*(t)$  die  $J(\underline{u})$  minimaliseert.

Voor systemen die lineair zijn in de toestandsvariabele:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A(t)\underline{x}(t) + B(t, \underline{u}(t))$$

en waarvoor de kosten kunnen worden uitgedrukt als:

$$J(\underline{u}) = \int_{t_0}^{t_1} [A_0(t)\underline{x}(t) + B_0(t, \underline{u}(t))] dt$$

zijn de voorwaarden 1 en 2 niet nodig voor het bestaan van een optimale strategie.

Bij het discrete maximum principe zullen we de eis van convexiteit weer tegenkomen, alleen in een ander verband.

Tot slot van deze paragraaf merken we op dat het maximum principe in het algemeen slechts een noodzakelijke voorwaarde voor een optimum geeft, en dus een lokaal karakter draagt. In deze zin is het analoog met de conditie dat de afgeleide nul wordt voor een lokaal extremum van een gewone functie. Om de optimale oplossing te vinden moeten de kosten berekend worden voor alle strategieën die de Hamiltoniaan maximaliseren. De optimale oplossing correspondeert dan uiteraard met het globale minimum van de kostenfunctie.

Voor bepaalde <sup>lineaire</sup> processen en bepaalde kostenfuncties geeft het maximum principe niet allen een noodzakelijke, maar ook een voldoende voorwaarde voor een optimum.

4. Het discrete maximum principe

4.1. Overzicht van de literatuur

Beschouw een systeem beschreven door de differentievergelijking

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) &= \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)) \\ \underline{x}(k_0) &= \underline{a} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\underline{x} \in E_n \quad \underline{u} \in \Omega \subset E_r$$

$k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$  is de tijdvariabele.

Tussen twee opeenvolgende tijdstippen  $k$  en  $k+1$  is er een constant tijdsinterval  $\Delta t$ . Hoewel (4.1) niet expliciet van de tijd afhangt is het ook hier mogelijk om, door het toevoegen van een nieuwe toestandsvariabele:

$$\underline{x}_{n+1}(k+1) - \underline{x}_{n+1}(k) = \Delta t$$

ook tijdsafhankelijke systemen te beschrijven (zie paragraaf 3.4).

Rozenoer<sup>3)</sup> heeft als eerste een maximum principe gegeven voor systemen die beschreven worden door differentievergelijkingen die lineair zijn in  $\underline{x}$ :

$$\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) = A(k)\underline{x}(k) + \underline{f}(\underline{u}(k)) \quad (4.2)$$

$A(k)$  is een  $n \times n$  matrix

Rozenoer stelde dat in het algemeen alleen voor dit soort lineaire systemen een maximum principe gegeven kan worden dat analoog is aan dat voor het continue geval.

Katz was van mening dat het discrete maximum principe dat hij afleidde, en dat van hetzelfde soort is als het continue maximum principe, ook van toepassing is op niet-lineaire systemen. Hij behandelt het vrije eindpunt probleem in <sup>7)</sup> en het vaste eindpunt  $(x_i(N) = b_i$  voor  $i = 1, \dots, m < n$ ) in <sup>8)</sup>.

Chang<sup>9)</sup><sup>10)</sup> ontwikkelde in dezelfde tijd een discreet maximum principe voor niet-lineaire systemen met een vrij eindpunt. Hij toonde aan dat er wel een belangrijk verschil bestaat tussen het discrete en het continue maximum principe. Het door hem geformuleerde principe zegt dat de Hamiltoniaan een lokaal maximum heeft voor de optimale strategie, in tegenstelling met het continue geval, waar de

Hamiltoniaan globaal maximaal wordt.

Ook Butkovskii<sup>11)</sup> heeft erop gewezen dat voor het discrete systeem met vrij eindpunt alleen een lokaal maximum principe kan worden afgeleid. Hij geeft een voorbeeld waarbij, voor de optimale strategie, de Hamiltoniaan een stationaire waarde heeft die lager is dan het globale maximum van de Hamiltoniaan.

Polak en Jordan<sup>12)</sup> beschrijven eveneens een lokaal discreet maximum principe voor niet-lineaire systemen waarbij het eindpunt aan verschillende voorwaarden kan voldoen:

- $\underline{x}(N)$  ligt in een gesloten, convexe verzameling  $S \subseteq E_n$
- $\underline{x}(N)$  ligt in een  $(n-m)$  dimensionale verzameling beschreven door  $m$  vergelijkingen:

$$S = \{ \underline{x} : g_i(\underline{x}) = 0, i=1, 2, \dots, m < n \} \quad (4.3)$$

Halkin leidt in<sup>13)</sup> voor lineaire, en in<sup>14)</sup> voor niet-lineaire differentievergelijkingen onder soortgelijke eindvoorwaarden als (4.3) een globaal maximum principe af. Er moet dan echter voldaan zijn aan een aantal vrij strenge voorwaarden, waaronder een convexiteits-conditie analoog aan (3.65).

Holtzman toont in<sup>15)</sup> aan dat voor lineaire differentievergelijkingen in  $\underline{x}$  de convexiteits-eis kan worden verzwakt tot z.g. richtings-convexiteit. Hij laat met behulp van een voorbeeld zien dat het maximum principe niet toegepast kan worden als niet aan de eis van richtings-convexiteit is voldaan, uitgezonderd in bepaalde gevallen, bijvoorbeeld als het eindpunt vrij is. In<sup>16)</sup> geeft hij een uitbreiding van zijn theorie voor niet-lineaire systemen.

Chang<sup>17)</sup> laat zien dat het door hem geformuleerde discrete maximum principe<sup>9)</sup> wel kan worden toegepast op hetzelfde voorbeeld dat Holtzman gebruikt in<sup>15)</sup> om aan te tonen dat het maximum principe faalt omdat het voorbeeld niet voldoet aan de richtings-convexiteit. Halkin en Holtzman geven hem in hetzelfde artikel "antwoord" door een voorbeeld te bedenken dat ook Chang niet op kan lossen. Ook

voor dit voorbeeld, hoewel niet richtings-convex, geldt het maximum principe wel als het eindpunt vrij is.

In <sup>18)</sup> gaan Holtzman en Halkin verder in op de mathematische achtergronden van het begrip richtings-convexiteit.

Narita <sup>19)</sup> breidt het maximum principe zoals het door Katz <sup>7)</sup> geformuleerd werd verder uit zodat het ook systemen omvat met restricties op de toestandsvariabelen. Er moet echter wel aan bepaalde voorwaarden voldaan worden. Hij concludeert dat de optimale lastverdeling in een elektrische centrale niet aan deze voorwaarden voldoet, maar dat is het gevolg van het model dat hij hanteert.

Er bestaat nogal een vrij grote afstand tussen de theorie en de praktische toepassing van het maximum principe. Fan en Wang hebben een boekje geschreven <sup>20)</sup> dat uit "engineering" oogpunt zeer interessant is. Zij hebben het maximum principe zoals dat door Katz <sup>7)8)</sup> is beschreven toegepast op o.a. een aantal chemische processen en transportproblemen. Hun resultaten van optimale regeling met behulp van het discrete maximum principe verschillen niet met de via het dynamisch programmeren bereikte uitkomsten. Het voordeel van de toepassing van het maximum principe ligt in de belangrijke reductie van de rekentijd en de geheugenruimte van de digitale rekenmachine, zoals op suggestieve wijze aangetoond wordt voor het probleem van het tijdstip van vervanging van een katalysator in een chemisch proces (zie figuur 4.1). Hierbij dient wel opgemerkt te worden dat er de laatste tijd veel pogingen gedaan worden om de rekentijd van het dynamisch programmeren te verkleinen door meer a priori kennis van het proces te gebruiken. Uit figuur 4.1 zien we dat voor dezelfde rekentijd het aantal stappen  $N$  groter kan worden bij het maximum principe. In het geval we met een continue verloopend proces te maken hebben kan dus de nauwkeurigheid aanzienlijk worden verhoogd als het discrete maximum principe toegepast wordt. Hoewel het maximum principe van Katz mathematisch niet geheel juist is geformuleerd, zijn Fan en Wang toch in staat

er een aantal praktische problemen mee op te lossen.

Het discrete maximum principe heeft alleen betrekking op het discretiseren in de tijd, niet op een discrete toestands- of beslissingsvariabele. Bij geen van de aangehaalde artikelen of boeken wordt ingegaan op het geval van een discrete beslissingsvariabele, zoals bij het systeem dat in paragraaf 2.2 werd beschreven. Dit is des te merkwaardiger omdat bij het continue maximum principe de stuksgewijs constante beslissingsvariabele wel is toegestaan (zie<sup>5)</sup> blz. 76). In de volgende paragrafen zullen we nader ingaan op de mogelijkheid bij het discrete maximum principe ook discrete beslissingsvariabelen toe te laten. Tegelijkertijd zal getracht worden het inzicht in deze materie te vergroten, o.a. met behulp van een geometrische interpretatie van het maximum principe.

4.2. Het discrete maximum principe volgens Halkin en Holtzman

Een globaal maximum principe is uit rekenkundig oogpunt veel aantrekkelijker dan een principe dat zegt dat de Hamiltoniaan slechts een lokaal maximum vertoont voor een optimale strategie. Daarom zullen hier eerst de bijdragen van Halkin<sup>14)</sup> en Holtzman<sup>16)</sup> behandeld worden. De voorwaarden waaronder het globale maximum principe geldt zijn belangrijk om te kunnen vaststellen of het principe gebruikt kan worden voor de twee mathematische modellen die in de paragrafen 2.2 en 2.3 beschreven werden.

We gaan uit van een systeem waarvoor de differentievergelijking luidt:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) &= \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)) \\ \underline{x}(0) &= \underline{a} \quad k=0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\underline{x} \in E_n \quad \underline{u} \in \Omega \subset E_r$$

Aangenomen wordt dat de vectorfunctie  $\underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$  voldoet aan de volgende voorwaarden:



- a.  $f(\underline{x}, \underline{u})$  is gedefiniëerd voor alle  $(\underline{x}, \underline{u}) \in E_n \times \mathcal{U}$  \*
- b. voor elke  $\underline{u} \in \mathcal{U}$  is  $f(\underline{x}, \underline{u})$  tweemaal continu differentiëerbaar naar  $\underline{x}$
- c. de functie  $f(\underline{x}, \underline{u})$  en al haar eerste en tweede partiële afgeleiden naar  $\underline{x}$  zijn uniform begrensd op  $A \times \mathcal{U}$  voor elke begrensde verzameling  $A \subset E_n$  \*\*)
- d. de matrix  $I + \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}}$  is regulier op  $E_n \times \mathcal{U}$
- e. de verzameling:  $V(\underline{x}) = \{f(\underline{x}, \underline{u}) : \underline{u} \in \mathcal{U}\}$  is convex voor elke  $\underline{x} \in E_n$

Conditie d en e zijn volgens Halkin altijd vervuld als de differentievergelijking een benadering is van een differentiaalvergelijking. Als het systeem fundamenteel discreet is, dan is niet automatisch voldaan aan deze voorwaarden. Waarschijnlijk bedoelt hij met de woorden "fundamenteel discreet" dat de differentievergelijking (4.4) exact klopt.

Hoewel Halkin uitgaat van een aanvangstoestand  $\underline{x}(0)$  die ligt in de verzameling:  $\{\underline{x} : h_i(\underline{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, 1 \leq n\}$  zullen wij stellen dat  $\underline{x}(0) = \underline{a}$ , overeenkomstig de eenduidige begintoestand van het in paragraaf (1.1) geformuleerde probleem. Het eindpunt  $\underline{x}(N)$  is bij ons probleem vrij. Toch zullen we, om later te noemen redenen, uitgaan van de door Halkin gekozen eindvoorwaarde:  $\underline{x}(N)$  moet liggen in de verzameling:

$$S = \{\underline{x} : g_i(\underline{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, m \leq n\}$$

---

\*) Het product van twee verzamelingen, dat we aanduiden door  $A \times B$ . is de verzameling van alle geordende paren  $(\underline{a}, \underline{b})$  als  $\underline{a} \in A$  en  $\underline{b} \in B$  dus:

$$A \times B = \{(\underline{a}, \underline{b}) : \underline{a} \in A, \underline{b} \in B\}$$

\*\*\*) Dit kan ook als volgt geformuleerd worden: voor elke eindige  $\underline{x}$  en voor elke  $\underline{u} \in \mathcal{U}$  moeten  $f(\underline{x}, \underline{u})$  en al haar eerste en tweede partiële afgeleiden naar  $\underline{x}$  uniform begrensd zijn.

Verder is gegeven een objectfunctie  $g_0(\underline{x})$ , die geminimaliseerd moet worden (Halkin zoekt naar het maximum van  $g_0(\underline{x})$ , maar ons probleem uit paragraaf (1.1) is er een van minimalisering). De functies  $g_0(\underline{x})$ ,  $g_1(\underline{x})$ ,  $\dots$ ,  $g_m(\underline{x})$  moeten tweemaal continu differentiëerbaar zijn naar  $\underline{x}$ , terwijl voor elke  $\underline{x} \in E_n$  moet gelden dat de vectoren

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} g_0(\underline{x}), \frac{\partial}{\partial \underline{x}} g_1(\underline{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial \underline{x}} g_m(\underline{x})$$

lineair onafhankelijk zijn.

De strategie  $U^* = \underline{u}^*(0), \underline{u}^*(1), \dots, \underline{u}^*(N-1)$  en de bijbehorende trajectorie  $X^* = \underline{x}^*(0), \underline{x}^*(1), \dots, \underline{x}^*(N)$  zijn optimaal als zij voldoen aan de volgende condities:

1.  $\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) = \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k))$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$   
 $\underline{x}(0) = \underline{a}$
2.  $\underline{u}(k) \in \Omega$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$
3.  $g_i(\underline{x}(N)) = 0$ ,  $i=0, 1, \dots, m$
4.  $g_0(\underline{x}^*(N)) \leq g_0(\underline{x}(N))$

Halkin formuleert nu het volgende maximum principe.

Als de trajectorie  $X^* = \underline{x}^*(0), \underline{x}^*(1), \dots, \underline{x}^*(N)$  ten gevolge van de strategie  $U^* = \underline{u}^*(0), \underline{u}^*(1), \dots, \underline{u}^*(N-1)$  optimaal is dan bestaan er vectoren  $\underline{p}^*(0), \underline{p}^*(1), \dots, \underline{p}^*(N)$ , niet nul, zodanig dat:

1. de Hamiltoniaan als functie van  $\underline{u}(k)$  maximaal is:

$$\left\langle \underline{f}(\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)) \mid \underline{p}^*(k+1) \right\rangle \geq \left\langle \underline{f}(\underline{x}^*(k), \underline{u}) \mid \underline{p}^*(k+1) \right\rangle \quad (4.5)$$

voor alle  $k=0, 1, \dots, N-1$  en alle  $\underline{u} \in \Omega$

2. de toegevoegde variabelen  $\underline{p}^*(0), \underline{p}^*(1), \dots, \underline{p}^*(N)$

de oplossing zijn van de differentievergelijking:

$$\underline{p}^*(k) - \underline{p}^*(k+1) = \left( \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}^*(k)) \Big|_{\underline{x}=\underline{x}^*(k)} \right)^T \underline{p}^*(k+1) \quad (4.6)$$

voor alle  $k=0, 1, \dots, N-1$

3. de transversaliteitscondities zijn:

er bestaan reële getallen  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  zodanig dat

$$P^*(N) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \left. \frac{\partial}{\partial \underline{x}} g_i(\underline{x}) \right|_{\underline{x} = \underline{x}^*(N)} \quad (4.7)$$

$$\alpha_0 \leq 0$$

Halkin gebruikt hier dus geen "imbedding" techniek, hij maakt van de objectfunctie niet een additionele toestandsvariabele. Als van de objectfunctie een toestandsvariabele wordt gemaakt, door bijvoorbeeld te stellen:  $x_n(k) = g_c(\underline{x}(k))$ , dan geldt de eis van convexiteit voor het met de objectfunctie uitgebreide stelsel van differentievergelijkingen. Vaak is de objectfunctie een verre van eenvoudige functie van de toestandsvariabelen, zodat de toch al moeilijk te onderzoeken convexiteit van  $V(\underline{x})$  nog moeilijker vast te stellen is.

Voordat dit globale discrete maximum principe toegepast kan worden moet nagegaan worden of het systeem wel aan alle hierboven gegeven voorwaarden voldoet. De vraag is echter of deze voorwaarden noodzakelijk of voldoende zijn. Voor ons is in eerste instantie het vrije eindpunt probleem van belang. Als we het hierboven beschreven maximum principe modificeren voor het vrije eindpunt door de transversaliteitscondities anders te schrijven dan is de convexiteit van  $V(\underline{x})$  in elk geval een voldoende, maar nog geen noodzakelijke voorwaarde. Immers bij het overzicht van de literatuur in paragraaf 4.2 merkten we op dat er een aantal voorbeelden zijn waarbij  $V(\underline{x})$  niet convex is, terwijl toch het maximum principe toegepast kon worden indien het eindpunt vrij was. Dat de convexiteit slechts een voldoende voorwaarde is volgt overigens ook uit het feit dat Holtzman een veel minder strenge eis stelde, n.l. richtings-convexiteit. Zelfs dit zou echter een voldoende voorwaarde zijn getuige de in paragraaf 4.2 aangehaalde voorbeelden.

We zullen het maximum principe volgens Halkin nu opschrijven voor het vrije eindpunt probleem, terwijl  $g_0(\underline{x}(k)) = x_n(k)$ . Slechts de transversaliteitscondities veranderen.

Omdat  $g_1(\underline{x}), g_2(\underline{x}) \dots g_n(\underline{x})$  dan verdwijnen wordt (4.7) nu:

$$\underline{p}^*(N) = \alpha_0 \left. \frac{\partial}{\partial \underline{x}} g_0(\underline{x}) \right|_{\underline{x} = \underline{x}^*(N)} = \alpha_0 \left. \frac{\partial}{\partial \underline{x}} x_n \right|_{x_n = x_n^*(N)}$$

Dus de transversaliteitscondities worden:

$$\begin{aligned} p_i^*(N) &= 0 & i &= 1, 2, \dots, n-1 \\ p_n^*(N) &= \alpha & \alpha &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Holtzman bekijkt een analoog systeem. De objectfunctie, die geminimaliseerd moet worden is  $x_n(N)$ . De vectorfunctie  $\underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$  moet voldoen aan de reeds opgesomde voorwaarden a, b, c en d. Verder wordt de voorwaarde gesteld dat  $\underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$  onafhankelijk is van  $x_n$ . Dit is een vaak voorkomende situatie omdat de objectfunctie meestal geschreven kan worden als:

$$x_n(k+1) - x_n(k) = f_n(x_1(k), \dots, x_{n-1}(k), u_1(k), \dots, u_{n-1}(k))$$

Tenslotte luidt de convexiteitsvoorwaarde (e) nu als volgt: de verzameling  $V(\underline{x}) = \{ \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) : \underline{u} \in \mathcal{U} \}$  is gesloten en convex in de richting van  $-\underline{e}_n$  voor elke  $\underline{x} \in E_n$ , waarbij  $\underline{e}_n$  de eenheidsvector  $(0, 0, \dots, 0, 1)^T$  is. We merken op dat de richting  $-\underline{e}_n$  dezelfde is als de richting van  $-\underline{x}_n$ , de te minimaliseren component van de toestandsvariabele.

De begrippen convexiteit en richtingsconvexiteit zijn in fig. 4.2 duidelijk gemaakt.

Holtzman gaat verder uit van de volgende eindvoorwaarden:

$$x_i(N) = S_i \quad i = 1, \dots, m < n$$

Dus een aantal componenten van de toestandsvariabele hebben een vast eindpunt.

Hij komt tenslotte tot een analoog maximum principe als dat van Halkin. Door zijn andere keuze van de eindvoorwaarden,

zijn de transversaliteitscondities echter:

$$P_i^*(N) = 0 \quad i = m+1, m+2, \dots, n-1$$

$$P_n^*(N) \leq c$$

Voor het geval van het vrije eindpunt krijgen we weer de transversaliteitscondities van (4.8) terug. We merken weer op dat de richtingsconvexiteit van  $V(\underline{x})$  voor het vrije eindpunt probleem een voldoende, maar geen noodzakelijke voorwaarde is om het maximum principe te kunnen toepassen.

De nadruk die hier wordt gelegd op de voorwaarden waaronder het maximum principe is toe te passen is noodzakelijk omdat we ons moeten afvragen of de twee modellen die in de paragrafen 2.2 en 2.3 beschreven werden, geschikt zijn. In paragraaf 2.2 werd een model beschreven waarbij de beslissingsvariabele  $\underline{u}$  slechts discrete waarden kon aannemen: 0 en 1. Het is duidelijk dat in dit geval  $V(\underline{x}) = \{f(\underline{x}, \underline{u}) : \underline{u} = 0, 1\}$  ook twee punten in  $E_n$  voorstelt, en dus nooit convex kan zijn. De kans dat  $V(\underline{x})$  convex is in de juiste richting is uiterst gering.

We hebben gezien dat (richtings)convexiteit geen noodzakelijke voorwaarde voor het toepassen van het maximum principe is. Wat zou nu in ons geval wel een noodzakelijke voorwaarde zijn?

Om dit te onderzoeken zullen we het bewijs van het discrete maximum principe na moeten gaan om te weten te komen wanneer en waar de (richtings)convexiteit belangrijk wordt. Omdat echter het bewijs voor een stelsel niet-lineaire differentievergelijkingen nogal moeilijk en uitgebreid is zullen we ons voorlopig beperken tot het lineaire systeem. We zullen achtereenvolgens behandelen een geometrisch bewijs, dat duidelijk inzicht geeft in wat het maximum principe eigenlijk voorstelt, en een algebraïsch bewijs, dat opvalt door zijn eenvoud.

4.3. Geometrisch bewijs van het discrete maximum principe voor een lineair systeem

We gaan uit van de lineaire differentievergelijking in  $\underline{x}(k)$ :

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) &= A(k)\underline{x}(k) + \underline{g}(\underline{u}(k)) \\ \underline{x}(0) &= \underline{a} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \underline{x} \in E_n \quad \underline{u} \in \mathcal{U} \subset E_r \quad \mathcal{U} \text{ is compact} \\ k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

$A(k)$  is een  $n \times n$  matrix.  $\{\underline{g}(\underline{u}) : \underline{u} \in \mathcal{U}\}$  is begrensd.

Zoals reeds bekend, is de toegestane strategie  $U$  gedefiniëerd als een rij van opeenvolgende beslissingen:  $\underline{u}(0), \underline{u}(1), \dots, \underline{u}(N-1)$  voor alle  $\underline{u}(k) \in \mathcal{U}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . De verzameling van alle toegestane strategieën zullen we  $F$  noemen.

$\underline{x}(k, U)$  is de toestandsvariabele  $\underline{x}$  op het tijdstip  $k$ , corresponderend met de oplossing van (4.9) voor de strategie  $U$ .

De verzameling van alle toestanden die behoren tot ten minste één trajectorie  $X$ , die begint op  $\underline{x}(0) = \underline{a}$  en die correspondeert met de differentievergelijking (4.9) voor een toegestane strategie  $U \in F$  noemen we de bereikbare verzameling of de verzameling van bereikbare toestanden. Deze verzameling speelt een belangrijke rol in de theorie van de "optimal control".

De bereikbare verzameling op het tijdstip  $k$ ,  $W(k)$ , kunnen we dus schrijven als:

$$W(k) = \{\underline{x}(k, U) : U \in F\} \quad (4.10)$$

Aan de hand van een eenvoudig voorbeeld zullen we dit nader toelichten.

Stel dat de differentievergelijkingen voor een tweedimensionale toestands- en beslissingsruimte zijn:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) - x_1(k) &= u_1(k) \\ x_2(k+1) - x_2(k) &= u_2(k) \\ x_1(0) = 0, x_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad \mathcal{U} = \{\underline{u} : 0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1\}$$

We zien meteen dat:  $W(0) = \emptyset$ .

Uit:  $x_1(1) = x_1(0) + u_1(0) = u_1(0)$

$x_2(1) = x_2(0) + u_2(0) = u_2(0)$

vinden we dat:

$$W(1) = \{ \underline{x}(1) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \}$$

Evenzo leiden we af voor  $k = 2$ :

$$W(2) = \{ \underline{x}(2) : 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2 \}$$

In fig. 4.3 zijn voor dit voorbeeld  $W(0)$ ,  $W(1)$  en  $W(2)$  getekend. Voor  $N = 2$  geldt dus dat  $W(0) \cup W(1) \cup W(2)$  de bereikbare verzameling is.

Gevraagd wordt, uitgaande van (4.9) door keuze van  $U$  te minimaliseren:

$$\langle -\underline{c} \mid \underline{x}(N) \rangle \tag{4.11}$$

ofwel te maximaliseren:

$$\langle \underline{c} \mid \underline{x}(N) \rangle \tag{4.12}$$

waarbij  $\underline{c} \in E_n$ ,  $\underline{c} \neq \underline{0}$

Als we aannemen dat  $\underline{c} = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$  dan volgt uit (4.11) en (4.12) dat  $x_n(N)$  maximaal ofwel  $-x_n(N)$  minimaal gemaakt moet worden, hetgeen overeenkomt met de in de vorige paragraaf behandelde probleemstelling.

We merken nog op dat, aangezien er geen voorwaarden voor de eindtoestand zijn gesteld, we hier met een vrij eindpunt probleem te maken hebben.

Laten we aan de hand van fig. 4.4 eens nagaan wat optimaliteit betekent.

Alle punten  $\underline{x}(N)$  tengevolge van een toegestane strategie  $U$  liggen in de bereikbare verzameling  $W(N)$ :

$$W(N) = \{ \underline{x}(N, U) : U \in F \}$$

De optimale strategie  $U^*$  stuurt  $\underline{x}$  zodanig dat

$$\langle \underline{c} \mid \underline{x}(N, U^*) \rangle$$

maximaal is, ofwel zodanig dat:

$$\langle \underline{c} | \underline{x}(N, u^*) \rangle \geq \langle \underline{c} | \underline{x}(N, u) \rangle \quad (4.13)$$

voor alle  $\underline{x}(N, u) \in W(N)$

$\underline{x}(N, U^*)$  ligt dus zo ver mogelijk in de richting van  $\underline{c}$ , en aangezien  $\{g(\underline{u}) : \underline{u} \in \Omega\}$  begrensd, en de verzameling  $\Omega$  compact is, is dus de verzameling  $W(N)$  gesloten, zodat  $\underline{x}(N, U^*)$  op de rand  $\delta W(N)$  van de bereikbare verzameling  $W(N)$  ligt. We nemen aan dat er een hypervlak bestaat dat in het punt  $\underline{x}(N, U^*)$  raakt aan  $\delta W(N)$  en we noemen de naar buiten gerichte normaal op dit hypervlak in dit punt:  $\underline{p}(N, U^*)$ . We zien dan dat  $\underline{p}(N, U^*)$  en  $\underline{c}$  dezelfde richting hebben.

Uit (4.13) volgt dat:

$$\langle \underline{c} | \underline{x}(N, u) - \underline{x}(N, u^*) \rangle \leq 0$$

en dus geldt ook dat:

$$\langle \underline{p}(N, u^*) | \underline{x}(N, u) - \underline{x}(N, u^*) \rangle \leq 0 \quad (4.14)$$

ofwel de hoek tussen de vectoren  $\underline{p}(N, U^*)$  en  $\underline{x}(N, u) - \underline{x}(N, U^*)$  is stomp. We gaan nu door volledige inductie bewijzen dat, voor een bepaalde keuze van  $\underline{p}(k, U^*)$  de relatie (4.14) ook geldt op het tijdstip  $k$ :

$$\langle \underline{p}(k, u^*) | \underline{x}(k, u) - \underline{x}(k, u^*) \rangle \leq 0 \quad (4.15)$$

voor alle  $\underline{x}(k, u) \in W(k)$

Hiertoe nemen we aan dat relatie (4.15) geldt op het tijdstip  $k + 1$ . In fig. 4.5 is de situatie voor de overgang van  $k$  naar  $k + 1$  getekend. We veronderstellen dat  $\underline{x}(k + 1, U^*)$  een randpunt is van de bereikbare verzameling  $W(k + 1)$ . Dat ook  $\underline{x}(k, U^*)$  op de rand ligt van  $W(k)$  zullen we later zien. De beslissingsvariabele die  $\underline{x}(k, U^*)$  stuurt naar  $\underline{x}(k + 1, U^*)$  is  $\underline{u}^*(k)$ . Een willekeurig punt  $\underline{x}(k, u) \in W(k)$  wordt eveneens met  $\underline{u}^*(k)$  gestuurd naar  $\underline{x}(k + 1, u) \in W(k + 1)$ .

Uit de differentievergelijking (4.9) volgt nu dat:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1, u^*) - \underline{x}(k, u^*) &= A(k) \underline{x}(k, u^*) + \underline{g}(\underline{u}^*(k)) \\ \underline{x}(k+1, u) - \underline{x}(k, u) &= A(k) \underline{x}(k, u) + \underline{g}(\underline{u}^*(k)) \end{aligned}$$



ofwel:

$$\underline{x}(k+1, u^*) = \{A(k) + I\} \underline{x}(k, u^*) + \underline{g}(u^*(k)) \quad (4.16)$$

$$\underline{x}(k+1, u) = \{A(k) + I\} \underline{x}(k, u) + \underline{g}(u^*(k)) \quad (4.17)$$

met I: de identiteitsmatrix.

Zoals reeds gezegd veronderstellen we dat (4.15) geldt op het tijdstip  $k+1$ :

$$\left\langle \underline{p}(k+1, u^*) \mid \underline{x}(k+1, u) - \underline{x}(k+1, u^*) \right\rangle \leq 0 \quad (4.18)$$

voor alle  $\underline{x}(k+1, u) \in W(k+1)$

Met behulp van (4.16) en (4.17) kunnen we dit ook als volgt schrijven:

$$\left\langle \underline{p}(k+1, u^*) \mid \{A(k) + I\} \{ \underline{x}(k, u) - \underline{x}(k, u^*) \} \right\rangle \leq 0$$

ofwel:

$$\left\langle \{A(k) + I\}^T \underline{p}(k+1, u^*) \mid \underline{x}(k, u) - \underline{x}(k, u^*) \right\rangle \leq 0 \quad (4.19)$$

Als we nu stellen dat:

$$\underline{p}(k, u^*) = \{A(k) + I\}^T \underline{p}(k+1, u^*) \quad (4.20)$$

dan wordt relatie (4.19):

$$\left\langle \underline{p}(k, u^*) \mid \underline{x}(k, u) - \underline{x}(k, u^*) \right\rangle \leq 0 \quad (4.21)$$

voor alle  $\underline{x}(k, u) \in W(k)$

We hebben nu dus bewezen dat, uitgaande van (4.18), ook (4.21) geldt. Aangezien (4.18) juist is voor  $k+1 = N$  geldt relatie (4.21) dus voor  $k = 0, 1, \dots, N$ , mits voldaan is aan een bepaalde afhankelijkheid tussen  $\underline{p}(k, u^*)$  en  $\underline{p}(k+1, u^*)$  volgens (4.20), die ook als volgt als differentievergelijking kan worden geschreven:

$$\underline{p}(k, u^*) - \underline{p}(k+1, u^*) = A^T(k) \underline{p}(k+1, u^*) \quad (4.22)$$

Er is bij de afleiding van (4.21) en de geldigheid daarvan voor  $k=0,1,\dots,N$  geen gebruik gemaakt van het feit dat  $\underline{p}(k, U^*)$  op de rand ligt van  $W(k)$ . Dat dit wel het geval is blijkt uit een nadere beschouwing van relatie (4.21). Wil deze relatie kloppen voor vaste  $\underline{x}(k, U^*) \in W(k)$  en vaste  $\underline{p}(k, U^*)$  maar voor alle  $\underline{x}(k, U) \in W(k)$  dan is de enige mogelijke configuratie die van figuur 4.5. Indien we dus weer veronderstellen dat er een hypervlak bestaat dat in het punt  $\underline{x}(k, U^*)$  raakt aan  $\delta W(k)$  dan is  $\underline{p}(k, U^*)$  weer de naar buiten gerichte normaal op dat vlak in het punt  $\underline{x}(k, U^*)$ .

We zullen nu bewijzen dat de Hamiltoniaan langs de optimale trajectorie op elk tijdstip  $k$  als functie van de beslissingsvariabele  $\underline{u}(k)$  maximaal is.

De Hamiltoniaan is gedefiniëerd als:

$$H(k) = \left\langle \underline{p}(k+1, U) \mid \underline{x}(k+1, U) - \underline{x}(k, U) \right\rangle \quad (4.23)$$

Beschouw weer de overgang van  $W(k)$  naar  $W(k+1)$ , zoals in figuur 4.6 is getekend. De punten  $\underline{x}(k, U^*)$  en  $\underline{x}(k+1, U^*)$  liggen weer op de optimale trajectorie, met als stuurvariabele  $\underline{u}^*(k)$ . Het punt  $\underline{x}(k+1, U) \in W(k+1)$  is verkregen uit  $\underline{x}(k, U^*)$  door te sturen met  $\underline{u}(k)$ . Tot en met het tijdstip  $k-1$  is de strategie  $U$  gelijk aan de strategie  $U^*$ .

Voor deze situatie kunnen we de volgende differentievergelijkingen opschrijven:

$$\underline{x}(k+1, U^*) - \underline{x}(k, U^*) = A(k) \underline{x}(k, U^*) + \underline{g}(\underline{u}^*(k)) \quad (4.24)$$

$$\underline{x}(k+1, U) - \underline{x}(k, U) = A(k) \underline{x}(k, U^*) + \underline{g}(\underline{u}(k)) \quad (4.25)$$

Stel dat de Hamiltoniaan op het tijdstip  $k$  niet maximaal wordt voor de optimale strategie, d.w.z. stel dat:

$$\left\langle \underline{p}(k+1, U^*) \mid \underline{x}(k+1, U^*) - \underline{x}(k, U^*) \right\rangle \leq \left\langle \underline{p}(k+1, U^*) \mid \underline{x}(k+1, U) - \underline{x}(k, U^*) \right\rangle$$

ofwel dat:

$$\left\langle \underline{p}(k+1, U^*) \mid \underline{x}(k+1, U^*) \right\rangle \leq \left\langle \underline{p}(k+1, U^*) \mid \underline{x}(k+1, U) \right\rangle$$

en dus:

$$\left\langle \underline{p}(k+1, U^*) \mid \underline{x}(k+1, U) - \underline{x}(k+1, U^*) \right\rangle \geq 0 \quad (4.26)$$

Dit is echter in strijd met wat we hiervoor bewezen hebben, n.l. dat de hoek tussen  $\underline{p}(k+1, U^*)$  en  $\underline{x}(k+1, U) - \underline{x}(k+1, U^*)$  stomp (in het uiterste geval recht) is, zie relatie (4.21) die geldig is voor  $k = 0, 1, \dots, N$ . Dus is de Hamiltoniaan wel maximaal.

We hebben nog niet gesproken over eventuele randvoorwaarden voor de differentievergelijking voor  $\underline{p}(k, U^*)$  volgens relatie (4.22).

Uit figuur 4.4 zien we dat op het eindtijdstip  $N$  geldt dat  $\underline{p}(N, U^*) = \alpha \underline{c}$   $\alpha > 0$ .

Dat de vectoren  $\underline{p}(k, U^*)$  niet nul mogen worden zal uit het voorgaande duidelijk zijn.

Wat we hier bewezen hebben kan nu dus als volgt samengevat worden.

Uitgaande van de lineaire differentievergelijking in  $\underline{x}(k)$ :

$$\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) = A(k) \underline{x}(k) + \underline{g}(u(k)) = \underline{f}(\underline{x}(k), u(k))$$

$$\underline{x}(0) = \underline{a} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\underline{x} \in E_n \quad u \in \Omega \subset E_r$$

$$\Omega \text{ is compact} \quad A(k) \text{ is een } n \times n \text{ matrix}$$

willen we maximaliseren:

$$\left\langle \underline{c} \mid \underline{x}(N) \right\rangle$$

Als de trajectorie  $\underline{x}^*(0), \underline{x}^*(1), \dots, \underline{x}^*(N)$  tengevolge van de strategie  $\underline{u}^*(0), \underline{u}^*(1), \dots, \underline{u}^*(N-1)$  optimaal is, d.w.z.

$\left\langle \underline{c} \mid \underline{x}(N) \right\rangle$  maximaliseert, dan bestaan er vectoren  $\underline{p}^*(0), \underline{p}^*(1), \dots, \underline{p}^*(N)$  zodanig dat

$$1. \quad \underline{p}^*(k) - \underline{p}^*(k+1) = A^T(k) \underline{p}^*(k+1)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

2. de Hamiltoniaan maximaal wordt:

$$\left\langle \underline{p}^*(k+1) \mid \underline{f}(\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)) \right\rangle \geq \left\langle \underline{p}^*(k+1) \mid \underline{f}(\underline{x}^*(k), \underline{u}) \right\rangle$$

voor alle  $k=0, 1, \dots, N-1$  en voor alle  $\underline{u} \in \Omega$

3. de transversaliteitscondities zijn:

$$\underline{p}^*(N) = \alpha \underline{c} \quad \alpha > 0$$

We kunnen de bereikbare verzamelingen  $W(k)$  en  $W(k+1)$  zien als zich uitbreidende golven op opeenvolgende tijdstippen. De golffronten zijn dan  $\delta W(k)$  en  $\delta W(k+1)$  en de vectoren  $\underline{p}(k)$  en  $\underline{p}(k+1)$  zijn normalen op het golffront, die de bewegingsrichting aangeven. De vector  $\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k)$  is een soort snelheidsvector voor het discrete systeem; in het continue geval had hier  $\dot{\underline{x}}$  gestaan. Intuïtief kunnen we aanvoelen dat langs een optimale trajectorie de projectie van de snelheidsvector  $\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k)$  op de normaal op het golffront,  $\underline{p}(k+1)$  maximaal moet zijn. Zoals uit het voorgaande blijkt is dit precies de eis dat de Hamiltoniaan voor een optimale trajectorie maximaal is.

Bij het bewijs van dit maximum principe zijn we ervan uitgegaan dat er raakvlakken bestaan aan de bereikbare verzameling  $W(k)$ . Halkin<sup>13)</sup> leidt hetzelfde maximum principe af voor het geval dat deze raakvlakken niet bestaan. In plaats hiervan gaat hij uit van z.g. dragende hypervlakken (supporting hyperplanes). Een hypervlak  $L$  verdeelt de ruimte waarin het zich bevindt in drie delen: het hypervlak  $L$  zelf en twee open halve ruimten die door het hypervlak gescheiden worden:  $L^+$  en  $L^-$  (zie figuur 4.7). We zeggen nu dat  $L$  een dragend hypervlak is van de gesloten verzameling  $A$  als  $A$  bevat is in  $L^+ \cup L$  of in  $L^- \cup L$ . Uiteraard is een raakvlak een bijzonder geval van een dragend hypervlak. Als we de bereikbare verzameling  $W(N)$  weer bekijken voor het geval dat in het optimale punt  $\underline{x}(N, \underline{u}^*)$  geen raakvlak, maar wel een dragend hypervlak bestaat dan geldt relatie 4.14 voor elk dragend hypervlak van  $W(N)$  door het punt  $\underline{x}(N, \underline{u}^*)$ :

$$\left\langle \underline{p}(N, \underline{u}^*) \mid \underline{x}(N, \underline{u}) - \underline{x}(N, \underline{u}^*) \right\rangle \leq 0 \quad (4.31)$$

voor alle  $\underline{x}(N, \underline{u}) \in W(N)$

Figuur 4.8 brengt deze situatie in beeld.

Bij de afleiding van het discrete maximum principe voor lineaire differentievergelijkingen in  $\underline{x}$  hebben we geen convexiteitseisen behoeven te stellen. Dit is het gevolg van het vrije eindpunt, waarvan we zijn uitgegaan. Halkin bekijkt in<sup>13)</sup>, ook voor lineaire differentievergelijkingen in  $\underline{x}$ , het probleem met een gebonden eindpunt. Het is eenvoudig in te zien dat in dat geval de convexiteit van de bereikbare verzamelingen wel belangrijk wordt.

Laten we eens een vast eindpunt probleem bekijken met  $\underline{c} = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$ , waarbij dus  $x_n$  de te maximaliseren toestandsvariabele is. Het eindpunt  $\underline{x}(N, U^*)$  moet dan zover mogelijk in de positieve richting van  $x_n$  komen te liggen op een lijn E evenwijdig aan de  $x_n$ -as. Immers, vanwege het vaste eindpunt, zijn  $x_1(N), x_2(N), \dots, x_{n-1}(N)$  van te voren gespecificeerd. In figuur 4.9 is een situatie getekend voor  $n=3$ , waarbij de bereikbare verzameling  $W(N)$  niet convex is. Terwille van de duidelijkheid van de tekening is er een vlak V aangebracht, waarin E en  $\underline{p}(N, U^*)$  liggen. De doorsnede van  $W(N)$  met het vlak V laat zien dat  $W(N)$  niet convex is. Het blijkt nu dat de hoek tussen  $\underline{p}(N, U^*)$  en  $\underline{x}(N, U) - \underline{x}(N, U^*)$  voor alle  $\underline{x}(N, U) \in W(N)$  scherp kan zijn, m.a.w. het is mogelijk dat:

$$\left\langle \underline{p}(N, U^*) \mid \underline{x}(N, U) - \underline{x}(N, U^*) \right\rangle > 0 \quad (4.32)$$

voor bepaalde  $\underline{x}(N, U) \in W(N)$

Het is duidelijk dat nu het discrete maximum principe niet meer afgeleid kan worden. Immers relatie (4.32) is strijdig met relatie (4.14). Halkin toont in<sup>13)</sup> aan dat, indien er geëist wordt dat de verzameling  $\{\underline{g}(\underline{u}) : \underline{u} \in \Omega\}$  (zie relatie (4.27)) convex is, ook de bereikbare verzamelingen  $W(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  convex zijn.

Echter, met behulp van de geometrie kunnen we inzien dat convexiteit wel een voldoende, maar nog geen nodige voorwaarde is voor de afleiding van het maximum principe.

Als in figuur 4.9 het "niet convexe gedeelte" in een andere richting dan de  $x_3$ -as zou liggen ontstaan er geen moeilijkheden. Zo wordt als vanzelf het begrip "richtingsconvex" als noodzakelijke voorwaarde voor de afleiding van het maximum principe geïntroduceerd. Figuur 4.10 brengt een en ander in beeld.

We leggen er nogmaals de nadruk op dat bij lineaire systemen alleen bij het vaste eindpunt de convexiteit belangrijk wordt.

Evenals bij de beschouwing van een continu systeem kan ook hier de vraag gesteld worden naar het bestaan van een optimale strategie. Voor het besproken lineaire geval is dit vrij eenvoudig te onderzoeken. Omdat  $\Omega$  compact is en  $\{g(\underline{u}) : \underline{u} \in \Omega\}$  begrensd, is de verzameling  $W(N) \cap E$  compact. Als we veronderstellen dat er één strategie  $U \in F$  bestaat zodanig dat  $\underline{x}(N, U) \in E$ , dan is er dus ook een strategie  $U^* \in F$  zodat  $\underline{x}(N, U^*)$  het punt van  $W(N) \cap E$  is dat het verst in de te maximaliseren richting ligt. Dus bestaat er dan een optimale strategie.

Het doel van deze paragraaf was of aan de hand van een onderzoek naar het maximum principe bij lineaire discrete systemen iets afgeleid zou kunnen worden over de toepasbaarheid van het maximum principe bij een discrete beslissingsvariabele volgens het model van paragraaf 2.2. Als voor het lineaire geval een discrete beslissingsvariabele ontoelaatbaar zou zijn, dan zeker voor het niet-lineaire systeem van paragraaf 2.2.

Een beslissingsvariabele die slechts discrete waarden kan aannemen veroorzaakt een verzameling van bereikbare toestanden op een tijdstip  $k$  met ook slechts discrete punten (zie figuur 4.11). We definiëren  $Z(N)$  als kleinste continue verzameling waarvoor geldt dat  $W(N) \subset Z(N)$ . Analoog definiëren we de verzamelingen  $Z(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ . Met behulp van dragende hypervlakken vinden we dat op het tijdstip  $N$  voor de optimale trajectorie geldt:

$$\left\langle p(N, u^*) \mid \underline{x}(N, u) - \underline{x}(N, u^*) \right\rangle \leq 0$$

$$\text{voor alle } \underline{x} \in Z(N)$$

$$\text{dus ook voor alle } \underline{x}(N, u) \in W(N)$$

indien we tenminste met een vrij eindpunt te maken hebben. Er is dus geen essentiële verschil tussen het lineaire systeem met een continue variërende en met een discrete beslissingsvariabele. Om de toelaatbaarheid van de discrete beslissingsvariabele te onderzoeken zullen we dus toch het bewijs van het maximum principe voor een niet-lineair systeem moeten nagaan. Dit zal in paragraaf 4.5 gebeuren.

Hoewel het doel van deze paragraaf dus niet bereikt is, geeft deze geometrische behandeling van het maximum principe toch een goed inzicht in wat het maximum principe nu eigenlijk is.

4.4. Algebraïsch bewijs van het discrete maximum principe voor een lineair systeem

We gaan uit van dezelfde lineaire differentievergelijking in  $\underline{x}(k)$  als in paragraaf 4.3.:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) &= A(k)\underline{x}(k) + \underline{g}(\underline{u}(k)) \\ \underline{x}(0) &= \underline{a} \\ k &= 0, 1, \dots, N-1 \quad \underline{x} \in E_n \quad \underline{u} \in \Omega \subset E_r \end{aligned} \quad (4.33)$$

Deze vergelijking kan ook als volgt geschreven worden:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \underline{B}(k)\underline{x}(k) + \underline{v}(k) \\ \text{met} \quad \underline{B}(k) &= A(k) + I \\ \underline{v}(k) &= \underline{g}(\underline{u}(k)) \quad \underline{v} \in V \end{aligned} \quad (4.34)$$

Voorlopig veronderstellen we dat de  $n \times n$  matrices  $\underline{B}(k)$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$  regulier, en dus inverteerbaar zijn. Gevraagd wordt  $\underline{v}(k)$  zo te kiezen dat

$$\begin{aligned} \text{met} \quad \langle \underline{c} | \underline{x}(N) \rangle & \text{ maximaal is} \\ \underline{c} \in E_n \quad \underline{c} \neq \underline{0} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Definieer de matrices  $\underline{P}(k)$  als volgt:

$$\begin{aligned} \underline{P}(0) &= I \\ \underline{P}(k+1) &= \underline{B}(k)' \underline{P}(k) \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

zodat voor  $k > 0$  geldt:

$$\underline{P}(k) = \underline{B}(k-1)\underline{B}(k-2)\dots\underline{B}(0)$$

We zoeken nu een oplossing van de differentievergelijking (4.34) van de vorm:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k) &= \underline{P}(k)\underline{y}(k) \\ \underline{x}(0) &= \underline{y}(0) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Als we dit invullen in (4.34) dan krijgen we

$$\underline{P}(k+1)\underline{y}(k) = \underline{B}(k)\underline{P}(k)\underline{y}(k) + \underline{v}(k) = \underline{P}(k+1)\underline{y}(k) + \underline{v}(k) \quad (4.37)$$

ofwel

$$\underline{y}(k+1) - \underline{y}(k) = \underline{P}^{-1}(k+1)\underline{v}(k) \quad (4.38)$$



$P(k)$  is inverteerbaar omdat  $B(k)$  inverteerbaar is.

Uit (4.38) volgt dat

$$\begin{aligned} \underline{y}(N) &= \underline{y}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \{ \underline{y}(k+1) - \underline{y}(k) \} \\ &= \underline{y}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} P^{-1}(k+1) \underline{v}(k) \end{aligned} \quad (4.39)$$

en dit ingevuld in (4.36) levert:

$$\underline{x}(N) = P(N) \underline{y}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} P(N) P^{-1}(k+1) \underline{v}(k) \quad (4.40)$$

zodat

$$\langle \underline{c} | \underline{x}(N) \rangle = \langle \underline{c} | P(N) \underline{y}(0) \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \langle \underline{c} | P(N) P^{-1}(k+1) \underline{v}(k) \rangle \quad (4.41)$$

Omdat  $\langle \underline{c} | P(N) \underline{y}(0) \rangle$  niet van  $\underline{v}(k)$  afhangt wordt  $\langle \underline{c} | \underline{x}(N) \rangle$  maximaal als alle termen van de som maximaal zijn, dus

$$\langle \underline{c} | P(N) P^{-1}(k+1) \underline{v}(k) \rangle \quad \text{moet maximaal zijn voor } k=0, 1, \dots, N-1$$

Met andere woorden:

$$\langle \underline{c} | P(N) P^{-1}(k+1) \underline{v}(k) \rangle \geq \langle \underline{c} | P(N) P^{-1}(k+1) \underline{w} \rangle$$

voor alle  $\underline{w} \in V$

ofwel

$$\langle [P^{-1}(k+1)]^T P^T(N) \underline{c} | \underline{v}(k) \rangle \geq \langle [P^{-1}(k+1)]^T P^T(N) \underline{c} | \underline{w} \rangle \quad (4.42)$$

Dit is precies de maximalisatie van de Hamiltoniaan.

Als we n.l. stellen:

$$\underline{p}(k+1) = [P^{-1}(k+1)]^T P^T(N) \underline{c} \quad (4.43)$$

dan vinden we:

$$\begin{aligned} \underline{p}(N) &= [P^{-1}(N)]^T P^T(N) \underline{c} \\ &= [P^T(N)]^{-1} P^T(N) \underline{c} \\ &= \underline{c} \end{aligned}$$

terwijl we de volgende differentievergelijking kunnen afleiden uit (4.43):

$$\begin{aligned}\underline{p}(k+1) &= [\{B(k)P(k)\}^{-1}]^T P^T(N) \underline{c} \\ &= [P^{-1}(k)B^{-1}(k)]^T P^T(N) \underline{c} \\ &= [B^{-1}(k)]^T [P^{-1}(k)]^T P^T(N) \underline{c} \\ &= [B^{-1}(k)]^T \underline{p}(k)\end{aligned}$$

zodat

$$\underline{p}(k) = B^T(k) \underline{p}(k+1) \quad (4.44)$$

Als we weer terug gaan naar de oorspronkelijke differentievergelijking (4.33) dan kunnen we (4.44) schrijven als:

$$\underline{p}(k) = \{A(k) + I\}^T \underline{p}(k+1)$$

ofwel

$$\underline{p}(k) - \underline{p}(k+1) = A^T(k) \underline{p}(k+1) \quad (4.45)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

hetgeen we ook via het geometrische bewijs in de vorige paragraaf hebben gevonden (zie(4.28)).

(4.42) kan dus nu geschreven worden als:

$$\left\langle \underline{p}(k+1) \mid \underline{v}(k) \right\rangle \geq \left\langle \underline{p}(k+1) \mid \underline{w} \right\rangle \quad \text{voor alle } \underline{w} \in V \quad (4.46)$$

Dit is dezelfde uitdrukking als (4.29) omdat de Hamiltoniaan voor de optimale trajectorie maximaal is als functie van  $\underline{u}$  respectievelijk  $\underline{v}$  en  $A(k)\underline{x}(k)$  is daar onafhankelijk van.

Bij het voorgaande bewijs hebben we aangenomen dat de matrices  $B(k) = A(k) + I$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$  regulier zijn, iets wat bij het geometrische bewijs niet is geëist. Het bewijs kan echter ook geleverd worden zonder regulariteit te eisen. We zullen hierbij gebruik maken van de matrix  $P(N, k)$ , die als volgt is gedefinieerd:

$$P(N, k) = B(N-1)B(N-2) \cdots B(k+1) \quad (4.47)$$

Relatie (4.37) schrijven nu nogmaals in een andere vorm op:

$$P(k+1)[\underline{y}(k+1) - \underline{y}(k)] = \underline{v}(k)$$

en dus

$$P(N)P(k+1)[\underline{y}(k+1) - \underline{y}(k)] = P(N)\underline{v}(k)$$

We kunnen dit als volgt uitwerken:

$$P(N)B(k)B(k-1)\dots B(1)B(0)[\underline{y}(k+1) - \underline{y}(k)] = B(N-1)B(N-2)\dots B(k)B(k-1)\dots B(0)\underline{v}(k)$$

ofwel

$$\begin{aligned} P(N)[\underline{y}(k+1) - \underline{y}(k)] &= B(N-1)B(N-2)\dots B(k+1)\underline{v}(k) & (4.48) \\ &= P(N,k)\underline{v}(k) \end{aligned}$$

Uit (4.38) en (4.40) volgt dat

$$\underline{z}(N) = P(N)\underline{y}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} P(N)[\underline{y}(k+1) - \underline{y}(k)]$$

zodat, met gebruikmaking van (4.48):

$$\underline{z}(N) = P(N)\underline{y}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} P(N,k)\underline{v}(k)$$

Het maximaliseren van de Hamiltoniaan wordt nu (zie (4.42))

$$\left\langle P^T(N,k)\underline{c} \mid \underline{v}(k) \right\rangle \geq \left\langle P^T(N,k)\underline{c} \mid \underline{w} \right\rangle \quad (4.49)$$

voor alle  $\underline{w} \in V$

We stellen weer:

$$\underline{p}(k+1) = P^T(N,k)\underline{c}$$

De differentievergelijking voor  $\underline{p}(k)$  is nu als volgt te berekenen:

$$\begin{aligned} B^T(k)\underline{p}(k+1) &= B^T(k)P^T(N,k)\underline{c} \\ &= B^T(k)[B(N-1)B(N-2)\dots B(k+1)]^T\underline{c} \\ &= B^T(k)B^T(k+1)\dots B^T(N-1)\underline{c} \\ &= [B(N-1)B(N-2)\dots B(k)]^T\underline{c} \\ &= P^T(N,k-1)\underline{c} \\ &= \underline{p}(k) \end{aligned}$$

Dus  $\underline{p}(k) = B^T(k)\underline{p}(k+1)$ , dit is dezelfde differentievergelijking als (4.44).

Zo is het dus mogelijk zonder matrices te invertieren het discrete maximum principe voor lineaire systemen af te leiden.

#### 4.5. Bewijs van een lokaal discreet maximum principe voor niet-lineaire systemen

In paragraaf 4.3. zijn we tot de conclusie gekomen dat lineaire systemen ons geen informatie verschaffen over de mogelijkheid van het gebruik van een discrete beslissingsvariabele bij niet-lineaire systemen. We zullen daarom nu het niet-lineaire systeem gaan onderzoeken. Dit wordt gedaan aan de hand van een artikel van Jordan en Polak <sup>12)</sup> over het lokale discrete maximum principe. Hun bewijs is gemakkelijker en geeft meer inzicht in deze materie dan de topologische behandeling van Halkin in <sup>14)</sup>.

Bij Jordan en Polak kunnen verschillende voorwaarden aan het eindpunt worden opgelegd, zoals reeds in paragraaf 4.1 is opgemerkt. Uiteraard zijn wij alleen maar geïnteresseerd in het vrije eindpunt probleem.

We beschouwen de niet-lineaire differentievergelijking:

$$\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) = \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)) \quad (4.50)$$

$$\underline{x}(0) = \underline{a}$$

$$k = 0, \dots, N-1 \quad \underline{x} \in E_n \quad \underline{u} \in \mathcal{U} \subset E_r$$

$\mathcal{U}$  is een compacte verzameling en heeft verder de eigenschap dat voor elke  $\underline{u} \in \mathcal{U}$  er tenminste één  $\delta \underline{u} \in E_r$ ,  $\delta \underline{u} \neq 0$  bestaat zodat  $(\underline{u} + \varepsilon \delta \underline{u}) \in \mathcal{U}$  voor alle  $\varepsilon$  met  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r(\underline{u}, \delta \underline{u})$  waarbij  $\varepsilon_r(\underline{u}, \delta \underline{u}) > 0$  een constante is.

De component-functies  $f_l(\underline{x}(k), \underline{u}(k))$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$  zijn continu en hebben continue partiële afgeleiden van de eerste orde naar  $\underline{x}$  en  $\underline{u}$ .

De te minimaliseren (of maximaliseren) toestandsvariabele is  $x_n$ , dus  $\underline{c}=(0,0\dots 0,-1)$  voor het geval dat  $x_n$  geminimaliseerd moet worden.

Weer wordt gevraagd naar die strategie  $U=\underline{u}(0),\dots,\underline{u}(N-1)$  met de bijbehorende trajectorie  $X=\underline{x}(0),\underline{x}(1),\dots,\underline{x}(N)$  zodanig dat  $x_n(N)$  minimaal is.

De procedure die nu gevolgd zal worden is analoog aan die van paragraaf 3.2 voor het continue geval. De optimale trajectorie wordt verstoord door variaties aan te brengen in de optimale strategie.

De noodzakelijke voorwaarde voor een optimum wordt nu verkregen door de eis dat elke toegestane variatie van de strategie die aan de randvoorwaarden van (4.50) voldoet en een kleine (met de nadruk op kleine) verstoring veroorzaakt van de optimale trajectorie geen hogere kosten met zich mee mag brengen.

$U^*$  is de optimale strategie,  $X^*$  de optimale trajectorie. De toegestane gevarieerde optimale strategie is:

$$U = \underline{u}^*(0) + \varepsilon \delta \underline{u}(0), \underline{u}^*(1) + \varepsilon \delta \underline{u}(1), \dots, \underline{u}^*(N-1) + \varepsilon \delta \underline{u}(N-1) \quad (4.51)$$

$\varepsilon > 0$  is klein, onafhankelijk van  $k$ .

De bijbehorende verstoorde optimale trajectorie is:

$$X = \underline{x}^*(0), \underline{x}^*(1) + \delta \underline{x}(1), \dots, \underline{x}^*(N) + \delta \underline{x}(N) \quad (4.52)$$

omdat vanwege de randvoorwaarden  $\delta \underline{x}(0) = 0$ .

We zullen nu eerst  $\delta \underline{x}(N)$  trachten uit te drukken in  $\delta \underline{u}(k)$ ,  $k=0,1,\dots,N-1$

Op het tijdstip  $k$  geldt:

$$\underline{u}(k) = \underline{u}^*(k) + \varepsilon \delta \underline{u}(k) \quad (4.53)$$

$$\underline{x}(k) = \underline{x}^*(k) + \delta \underline{x}(k) \quad (4.54)$$

De differentievergelijking van de gestoorde trajectorie is:

$$\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) = \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)) \quad (4.55)$$

Met behulp van (4.53) en (4.54) kan deze uitdrukking ook als volgt geschreven worden:

$$\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) = \underline{f}(\underline{x}^*(k) + \delta \underline{x}(k), \underline{u}^*(k) + \varepsilon \delta \underline{u}(k)) \quad (4.56)$$

De differentievergelijking van de optimale trajectorie is:

$$\underline{x}^*(k+1) - \underline{x}^*(k) = \underline{f}(\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)) \quad (4.57)$$

Aftrekken van (4.55) en (4.57) levert, met gebruikmaking van (4.53) op:

$$\begin{aligned} \delta \underline{x}(k+1) = \delta \underline{x}(k) + \underline{f}(\underline{x}^*(k) + \delta \underline{x}(k), \underline{u}^*(k) + \varepsilon \delta \underline{u}(k)) + \\ - \underline{f}(\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Deze uitdrukking zullen we in het volgende verder uitwerken. We passen de Taylorreeksontwikkeling toe op de laatste twee termen van (4.58):

$$\begin{aligned} \underline{f}(\underline{x}^*(k) + \delta \underline{x}(k), \underline{u}^*(k) + \varepsilon \delta \underline{u}(k)) = \\ \underline{f}(\underline{x}^*(k), \underline{u}^*(k)) + \delta \underline{x}(k) \left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}^*(k))}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\underline{x}^*(k)} + \varepsilon \delta \underline{u}(k) \left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}^*(k), \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{u}=\underline{u}^*(k)} + o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.59)$$

waarbij  $\underline{o}(\varepsilon) = (o_1(\varepsilon), o_2(\varepsilon), \dots, o_n(\varepsilon))^T$  de afbreekfout is,

met  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o_i(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$  voor  $i=1, 2, \dots, n$

Ter vereenvoudiging noemen we

$$\left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}^*(k))}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\underline{x}^*(k)} = F(k) \quad (4.60)$$

en

$$\left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}^*(k), \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{u}=\underline{u}^*(k)} = G(k) \quad (4.61)$$

Relatie (4.58) kan nu als volgt geschreven worden:

$$\begin{aligned} \delta \underline{x}(k+1) &= \delta \underline{x}(k) + F(k) \delta \underline{x}(k) + \varepsilon G(k) \delta \underline{u}(k) + \underline{o}(\varepsilon) \\ &= [I + F(k)] \delta \underline{x}(k) + \varepsilon G(k) \delta \underline{u}(k) + \underline{o}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Door herhaald toepassen van deze differentievergelijking krijgen we de volgende uitdrukking voor  $\delta \underline{x}(k+1)$ :

$$\begin{aligned} \delta \underline{x}(k+1) &= [I + F(k)][I + F(k-1)] \dots [I + F(0)] \delta \underline{x}(0) + \\ &+ \varepsilon [I + F(k)][I + F(k-1)] \dots [I + F(1)] G(0) \delta \underline{u}(0) + \\ &+ \varepsilon [I + F(k)][I + F(k-1)] \dots [I + F(2)] G(1) \delta \underline{u}(1) + \\ &+ \dots \dots \dots + \\ &+ \varepsilon [I + F(k)] G(k-1) \delta \underline{u}(k-1) + \varepsilon G(k) \delta \underline{u}(k) + \underline{o}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.63)$$

We noemen nu:

$$\begin{aligned} [I + F(k)][I + F(k-1)] \dots [I + F(j+1)] G(j) &= H(j) \\ G(k) &= H(k) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Omdat  $\delta \underline{x}(0) = 0$  kunnen we (4.63) nu als volgt schrijven:

$$\delta \underline{x}(k+1) = \varepsilon H(0) \delta \underline{u}(0) + \varepsilon H(1) \delta \underline{u}(1) + \dots + \varepsilon H(k-1) \delta \underline{u}(k-1) + \varepsilon H(k) \delta \underline{u}(k) + \underline{o}(\varepsilon)$$

dus

$$\delta \underline{x}(k+1) = \varepsilon \sum_{j=0}^k H(j) \delta \underline{u}(j) + \underline{o}(\varepsilon) \quad (4.65)$$

Voor het eindstip N geldt dus:

$$\delta \underline{x}(N) = \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \delta \underline{u}(k) + \underline{o}(\varepsilon) \quad (4.66)$$

Als we  $\underline{o}(\varepsilon)$  verwaarlozen, dan stelt dit een conus voor met vertex of top  $\underline{x}^*(N)$ . We noemen een bepaalde verzameling K een conus met vertex P als voor elk punt  $\underline{x} \in K$  alle punten op het bewijsstuk dat P en  $\underline{x}$  verbindt, ook tot K behoren.

De conus heeft  $\underline{x}^*(N)$  als top (vertex) omdat voor

$\delta \underline{u}(k) = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  geldt dat  $\delta \underline{x}(N) = 0$ , zodat  $\underline{x}(N) = \underline{x}^*(N)$ . Voor  $\delta \underline{u}(k) \neq 0$  kan  $\underline{x}(N)$  niet verder in de richting van de negatieve  $x_n$ -as liggen dan het

punt  $\underline{x}^*(N)$  omdat we verondersteld hebben dat  $\underline{x}^*(N)$  het eindpunt van de optimale trajectorie is. Dat (4.66) werkelijk een conus definieert kunnen we zien door de punten op het lijnstuk tussen  $\underline{x}^*(N)$  en een punt

$$\delta \underline{x}^*(N) = \varepsilon, (\underline{u}, \delta \underline{u}) \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \delta \underline{u}(k)$$

te bekijken. Voor de betekenis van  $\varepsilon, (\underline{u}, \delta \underline{u})$  verwijzen we naar de voorwaarde die aan de besturingsruimte  $\mathcal{U}$  zijn opgelegd in het begin van deze paragraaf. Dus de punten

$$\delta \underline{x}^\alpha(N) = \alpha \varepsilon, (\underline{u}, \delta \underline{u}) \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \delta \underline{u}(k) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

moeten binnen de door (4.66) gedefinieerde ruimte liggen. Aangezien we hebben aangenomen dat  $\underline{u} + \varepsilon \delta \underline{u} \in \mathcal{U}$  voor  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon, (\underline{u}, \delta \underline{u})$  is dat het geval.

We denken nu het kleine getal  $\varepsilon$  te zijn opgenomen in  $\delta \underline{u}(k)$  en we noemen

$$\underline{y}(N) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \delta \underline{u}(k) \tag{4.67}$$

De verzameling

$$K_N: \left\{ \underline{y}(N): \underline{y}(N) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \delta \underline{u}(k); \quad \underline{u}(k) + \delta \underline{u}(k) \in \mathcal{U} \right. \\ \left. k = 0, 1, \dots, N-1 \right\} \tag{4.68}$$

is dan de "bereikbare conus", Pontryagin definieert voor het continue systeem een soortgelijke conus (zie <sup>5)</sup> hoofdstuk 2 paragraaf 14 ).

In figuur 4.12 is de bereikbare conus voor het drie-dimensionale geval getekend. We zien direct in dat een noodzakelijke voorwaarde voor optimaliteit is dat voor  $\underline{c} = (0, 0, \dots, -1)$  moet gelden dat

$$\langle \underline{c} | \underline{y}(N) \rangle \leq 0 \tag{4.69}$$

voor alle  $\underline{y}(N) \in K_N$

We gaan nu dezelfde procedure gebruiken als bij het geometrische bewijs voor het lineaire systeem: alleen op het tijdstip  $j$ ,  $0 \leq j \leq N-1$  brengen we een variatie aan in de optimale strategie, dus:

$$\underline{u}(k) = \underline{u}^*(k) \quad \text{voor } k = 0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N-1$$

$$\underline{u}(j) = \underline{u}^*(j) + \varepsilon \delta \underline{u}(j) \tag{4.70}$$



Hieruit volgt dat

$$\delta \underline{x}(k) = 0 \quad \text{voor } k \leq j$$

We voeren de vectoren  $\underline{p}(k)$ ,  $k=0,1,\dots,N$  weer in, gedefinieerd door de volgende differentievergelijking:

$$\underline{p}(k) - \underline{p}(k+1) = F^T(k) \underline{p}(k+1) \quad (4.71)$$

Later zullen we de randvoorwaarde specificeren.

We zullen nu eens nader het product  $\langle \underline{p}(k) | \underline{y}(k) \rangle$  gaan onderzoeken voor  $k \geq j+1$

Uit (4.62):

$$\delta \underline{x}(k+1) = [I + F(k)] \delta \underline{x}(k) + \varepsilon G(k) \delta \underline{u}(k) + o(\varepsilon)$$

volgt dat we in het licht van de overgang van  $\delta \underline{x}(k)$  naar  $\underline{y}(k)$  kunnen schrijven

$$\underline{y}(k+1) = [I + F(k)] \underline{y}(k) + G(k) \delta \underline{u}(k) \quad (4.72)$$

Aangezien  $\delta \underline{u}(k) = 0$  voor  $k = j+1, j+2, \dots, N-1$  geldt dus

$$\underline{y}(k+1) = [I + F(k)] \underline{y}(k) \quad (4.73)$$

voor  $k \geq j+1$

Met gebruikmaking van de relaties (4.71) en (4.73) zien we nu dat:

$$\begin{aligned} \langle \underline{p}(k+1) | \underline{y}(k+1) \rangle &= \langle \underline{p}(k+1) | \underline{y}(k) + F(k) \underline{y}(k) \rangle \\ &= \langle \underline{p}(k+1) | \underline{y}(k) \rangle + \langle F^T(k) \underline{p}(k+1) | \underline{y}(k) \rangle \\ &= \langle \underline{p}(k+1) | \underline{y}(k) \rangle + \langle \underline{p}(k) - \underline{p}(k+1) | \underline{y}(k) \rangle \\ &= \langle \underline{p}(k) | \underline{y}(k) \rangle \quad \text{voor } k = j+1, j+2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.74)$$

Dus geldt ook:

$$\langle \underline{p}(N) | \underline{y}(N) \rangle = \langle \underline{p}(j+1) | \underline{y}(j+1) \rangle \quad (4.75)$$

Als we nu als randvoorwaarde voor de differentievergelijking (4.71) kiezen:

$$\underline{p}^*(N) = \underline{c} \quad (4.76)$$

en de vectoren  $\underline{p}(k)$  met (4.76) als randvoorwaarde aangeven met  $\underline{p}^*(k)$  dan kan de optimaliteitsvoorwaarde (4.69) geschreven worden als:

$$\langle \underline{p}^*(N) | \underline{y}(N) \rangle \leq 0$$

ofwel, met behulp van (4.75):

$$\langle \underline{p}^*(j+1) | \underline{y}(j+1) \rangle \leq 0 \quad (4.77)$$

Als we nu (4.72) opschrijven voor  $k=j$ , daarbij bedenkend dat  $\delta \underline{x}(j) = 0$  dan vinden we:

$$\underline{y}(j+1) = G(j) \delta \underline{u}(j) \quad (4.78)$$

ofwel, met gebruikmaking van (4.61):

$$\underline{y}(j+1) = \left. \frac{\partial f(\underline{x}^*(j), \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{u} = \underline{u}^*(j)} \cdot \delta \underline{u}(j)$$

zodat tenslotte de noodzakelijke voorwaarde voor een optimum (4.77) wordt:

$$\left\langle \underline{p}^*(j+1) \left| \frac{\partial f(\underline{x}^*(j), \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{u} = \underline{u}^*(j)} \cdot \delta \underline{u}(j) \right\rangle \leq 0 \quad (4.79)$$

Als we de Hamiltoniaan definiëren als:

$$H(j) = \left\langle \underline{p}^*(j+1) \left| f(\underline{x}^*(j), \underline{u}^*(j)) \right\rangle \quad (4.80)$$

dan houdt (4.79) in dat de Hamiltoniaan  $H(j)$  lokaal maximaal of stationair is als functie van  $\underline{u}^*(j)$ . Omdat de keuze van  $j$  willekeurig is, volgt hieruit dat, als  $\underline{U}^* = \underline{u}^*(0), \underline{u}^*(1), \dots, \underline{u}^*(N-1)$  een optimale strategie is, dan is de Hamiltoniaan  $H(k)$ ,  $0 \leq k \leq N-1$  lokaal maximaal of stationair met betrekking tot  $\underline{u}(j)$ . Hierbij is  $\underline{p}^*(k)$  gedefinieerd volgens:

$$\begin{aligned} \underline{p}^*(k) - \underline{p}^*(k+1) &= F^T(k) \underline{p}^*(k+1) \\ \underline{p}^*(N) &= \underline{c} \end{aligned} \quad (4.81)$$

We hebben ons nu bezig gehouden met het vrije eindpunt. Enkele opmerkingen over de oplossing van het probleem voor het gebonden eindpunt zijn zinvol omdat dezelfde aanpak ook bij het bewijs van het continue maximum principe terugkomt.

Beschouw het geval dat  $\underline{x}(N)$  moet liggen op een  $(n-m)$  dimensionaal oppervlak  $S$ , beschreven door:

$$S = \{ \underline{x} : g_j(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0 ; j = 1, 2, \dots, m \leq n-1 \}$$

De cylinder  $S^1$  definiëren we als volgt:

$$S^1 = \{ \underline{x} : (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in S \}$$

dus de cylindermantel van  $S^1$  is evenwijdig met de  $x_n^1$ -as, zodat  $\underline{x}(N)$  op deze cylindermantel moet liggen. We veronderstellen dat er een  $(n-m+1)$ dimensionaal hypervlak  $T^1$  bestaat dat de cylinder  $S^1$  raakt in het punt  $\underline{x}^*(N)$ . Het  $(n-m)$  dimensionale vlak dat  $S$  raakt in het punt  $(x_1^*(N), x_2^*(N), \dots, x_{n-1}^*(N), 0)$  noemen we  $T$ . Tenslotte construeren we nog een hypervlak  $C$  dat door  $\underline{x}^*(N)$  gaat en loodrecht staat op de  $x_n^1$ -as. In figuur 4.13 is dit alles getekend voor  $n=3$ .

Het hypervlak  $C$  deelt  $T^1$  in twee halfvlakken:

$$T^{1+} = \{ \underline{x} : \underline{x} \in T^1, x_n \geq x_n^*(N) \}$$

$$T^{1-} = \{ \underline{x} : \underline{x} \in T^1, x_n \leq x_n^*(N) \}$$

met gemeenschappelijke grens:

$$T^{10} = C \cap T^1$$

Evenzo deelt  $C$  de cylinder  $S^1$  in twee "halve" cylinders:

$$S^{1+} = \{ \underline{x} : \underline{x} \in S^1, x_n \geq x_n^*(N) \}$$

$$S^{1-} = \{ \underline{x} : \underline{x} \in S^1, x_n \leq x_n^*(N) \}$$

met gemeenschappelijke grens:

$$S^{10} = C \cap S^1$$

De afleiding van een noodzakelijke voorwaarde voor een optimum wordt nu bereikt via een door Pontryagin bewezen stelling (Lemma 10, hoofdstuk 2 in <sup>5)</sup>). Hierbij wordt gebruik gemaakt van z.g. scheidende hypervlakken. Laat  $K_1$  en  $K_2$  twee conussen zijn met gemeenschappelijke top. We zeggen nu dat een hypervlak  $C$  de conussen  $K_1$  en  $K_2$  scheidt als  $K_1$  bevat is in één van de gesloten halve ruimten die door  $C$  worden bepaald, terwijl  $K_2$  is bevat in de andere halve ruimte. Met andere woorden:  $C$  is een dragend hypervlak van zowel  $K_1$  als  $K_2$ , maar  $K_1$  en  $K_2$  liggen aan verschillende zijden van het hypervlak (zie figuur 4.7).

trajectorie

We keren nu terug tot figuur 4.13.  $K_N$  en  $T^{1-}$  zijn conussen met gemeenschappelijke top  $\underline{x}^*(N)$ . De door Pontryagin bewezen stelling zegt nu dat, als  $K_N$  en  $T^{1-}$  niet door een hypervlak gescheiden kunnen worden dan bestaat er een strategie  $U$  met een corresponderende trajectorie  $X$  zodanig dat  $\underline{x}(N)$ , het eindpunt van  $X$ , ligt in  $S^{1-}$  maar niet op de rand  $S^{10}$ , zodat  $\underline{x}(N)$  lagere kosten met zich meebrengt dan  $\underline{x}^*(N)$ . Dus als  $U^*$  een optimale strategie is met corresponderende  $X^*$  dan moet er een hypervlak  $C$  bestaan dat  $K_N$  en  $T^{1-}$  scheidt. Als de vector  $\underline{c}$  loodrecht op het scheidend hypervlak staat, in de "richting" van de conus  $T^{1-}$ , dan kunnen we als elementaire voorwaarde voor een optimum weer opschrijven:

$$\langle \underline{c} / \underline{y}(N) \rangle \leq 0 \quad \text{voor alle } \underline{y}(N) \in K_N$$

Dit kunnen we weer verder uitwerken tot het lokaal maximaliseren van de Hamiltoniaan. Uiteraard zijn de transversaliteitscondities (ofwel de randvoorwaarde  $p(N)$ ) in dit geval anders dan bij het vrije eindpunt.

Voor het hier besproken probleem met het gebonden eindpunt hebben we, evenals bij het lineaire systeem, weer een convexiteits-eis. Als we de conus  $K_N$  bekijken dan is het duidelijk dat, als  $K_N$  niet convex is in de richting van de negatieve  $x_n$ -as, het scheidend hypervlak niet kan bestaan. Figuur 4.14 laat dit zien voor het drie-dimensionale geval.

Dit heeft consequenties voor de  $\delta u$  die toegestaan mogen worden.

Beschouwen we  $\underline{y}^1(N)$  en  $\underline{y}^2(N)$  veroorzaakt door  $\delta u^1(k)$  en  $\delta u^2(k)$  voor  $k=0, \dots, N-1$  dan geldt volgens (4.67):

$$\underline{y}^1(N) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \delta u^1(k) \in K_N$$

$$\underline{y}^2(N) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \delta u^2(k) \in K_N$$

De bereikbare conus is convex als:

$$\alpha \underline{y}^1(N) + (1-\alpha) \underline{y}^2(N) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) [\alpha \delta u^1(k) + (1-\alpha) \delta u^2(k)] \in K_N$$

voor alle  $\alpha: 0 \leq \alpha \leq 1$

Dit betekent dat  $\delta \underline{u}(k)$  in een convexe verzameling moet liggen. We ontmoeten dus ook hier weer de situatie dat convexiteit pas geëist wordt voor een vast eindpunt probleem.

We merken op dat de bereikbare conus  $K_N$  voor het niet-lineaire systeem niet een analogon is van de bereikbare verzameling  $W(N)$  voor het lineaire systeem.  $W(N)$  bestaat uit alle eindpunten van trajectorieën ten gevolge van toegestane strategie, terwijl  $K_N$  alleen maar eindpunten van trajectorieën bevat in de directe omgeving van de veronderstelde optimale trajectorie. We lineariseren deze omgeving door een Taylorreeksontwikkeling na de termen van de eerste orde af te breken.

Het doel van de in deze paragraaf gegeven beschouwing over het maximum principe voor niet-lineaire discrete systemen was om te onderzoeken of er voorwaarden bestaan waaraan de beslissingsvariabele  $\underline{u}$  moet voldoen. Bij het lineaire systeem vonden we dat het mogelijk is dat  $\underline{u}$  slechts de waarden 0 en 1 heeft. (zie paragraaf 2.2 voor het discrete model). Als we met een niet-lineair systeem te maken hebben moet de trajectorie  $X$  gevarieerd worden in de omgeving van  $X^*$ , zodat de strategie  $U$  gevarieerd moet worden om  $U^*$ . Dit betekent dat er kleine variaties  $\underline{u}^* + \varepsilon \delta \underline{u}$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_7(\delta \underline{u}, \underline{u})$  mogelijk moeten zijn, zoals ook in het begin van deze paragraaf is gezegd. Voor een beslissingsvariabele die slechts de waarden 0 en 1 kan aannemen is dit onmogelijk. We moeten dus concluderen dat voor het discrete model het hier gegeven discrete maximum principe niet gebruikt mag worden.

Toch behoeft het niet helemaal zinloos te zijn om het maximum principe toe te passen bij het discrete model. Als een discrete beslissingsvariabele voor een lineair systeem wel mogelijk maar voor het niet-lineaire systeem onmogelijk is, dan kunnen we ons voorstellen dat er een bepaald overgangsgebied bestaat, zodat een "kleine" niet-lineariteit in de differentievergelijkingen

toch een discrete beslissingsvariabele toelaat. Daarom zullen in hoofdstuk 6 toch nog enkele modellen met een discrete beslissingsvariabele worden onderzocht.

Als we de resultaten van deze paragraaf vergelijkingen met die van het hoofdstuk over het continue maximum principe dan blijkt er een fundamenteel verschil te bestaan. Bij het continue maximum principe wordt de Hamiltoniaan voor het optimum globaal maximaal, terwijl bij het discrete maximum principe slechts een lokaal maximum wordt bereikt. Dat kan als volgt verklaard worden. In het continue geval kan een kleine verstoring van de trajectorie in de omgeving van het veronderstelde optimum veroorzaakt worden door een zeer grote variatie van de strategie, mits de tijd gedurende welke deze variatie plaats vindt zeer kort is. De gehele besturingsruimte kan dus op elk moment onderzocht worden, zodat enerzijds de Hamiltoniaan globaal maximaal wordt, terwijl anderzijds ook stuksgewijs constante strategieën toegestaan zijn. In het discrete geval echter blijft een variatie van de strategie gedurende een bepaalde periode voortduren, zodat hier de strategie slechts weinig gevarieerd kan worden ten einde de verstoring van de optimale trajectorie gering te laten zijn. Dus geldt voor het discrete systeem in het algemeen een lokaal maximum principe, terwijl een stuksgewijs constante strategie niet is toegestaan.

#### 4.6. Een voorbeeld

In paragraaf 3.3 werd aan de hand van een voorbeeld het continue maximum principe afgeleid. Hierbij gingen we uit van een systeem met een vrij eindpunt, waarvan de differentiaalvergelijking als volgt luidde:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t) \\ x(0) &= 1 \end{aligned} \tag{4.82}$$

terwijl

$$\frac{1}{2} \int_0^T (x^2(t) + u^2(t)) dt \tag{4.83}$$

geminimaliseerd moest worden door een juiste keuze van de strategie U. De optimale trajectorie werd numeriek berekend voor het geval  $T=1$ .

In deze paragraaf zullen we een discretisering van dit systeem beschouwen. Voor een eenvoudig geval zal de bereikbare verzameling  $W(N)$  bepaald worden en hieruit volgt dan de optimale oplossing. Tevens zal voor dit zelfde geval met behulp van het discrete maximum principe (het in paragraaf 4.2 beschreven principe van Halkin voor het vrije eindpunt, waarbij de kostenfunctie als een toestandsvariabele wordt opgevat) de optimale trajectorie worden bepaald. Tenslotte zal nog een numerieke oplossing worden gegeven voor een analoog geval als aan het slot van paragraaf 3.3 werd behandeld, terwijl de resultaten zullen worden vergeleken.

Een differentievergelijking, gebaseerd op de differentiaalvergelijking (4.82) is:

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t} = -x(k) + u(k) \quad (4.84)$$

$$x(0) = 1 \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

In plaats van de te minimaliseren integraal (4.83) volgt nu de som:

$$S(N) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^2(k) + u^2(k)] \Delta t \quad (4.85)$$

We voeren een nieuwe toestandsvariabele in,  $y(k)$ , zodanig dat  $y(N) = S(N)$ . De differentievergelijking voor  $y(k)$  moet dan als volgt zijn:

$$\begin{aligned} y(k+1) - y(k) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k [x^2(j) + u^2(j)] \Delta t - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} [x^2(j) + u^2(j)] \Delta t \\ &= \frac{1}{2} [x^2(k) + u^2(k)] \Delta t \end{aligned}$$

met als beginvoorwaarde:

$$y(0) = 0$$

We hebben nu dus het volgende stelsel differentievergelijkingen:

$$x(k+1) - x(k) = -\Delta t x(k) + \Delta t u(k) \quad (4.86)$$

$$y(k+1) - y(k) = \frac{1}{2} \Delta t x^2(k) + \frac{1}{2} \Delta t u^2(k) \quad (4.87)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

met als beginvoorwaarden:

$$x(0) = 1 \quad (4.88)$$

$$y(0) = 0 \quad (4.89)$$

Door keuze van  $u(k)$ ,  $k=0,1,\dots,N-1$  moet  $y(N)$  ge-minimaliseerd worden.

We zullen eerst voor het geval dat  $\Delta t = \frac{1}{2}$  en  $N=2$  de bereikbare verzamelingen  $W(0)$ ,  $W(1)$  en  $W(2)$  bepalen. De differentievergelijkingen (4.86) en (4.87) kunnen nu als volgt geschreven worden:

$$x(k+1) = 0,5 x(k) + 0,5 u(k) \quad (4.90)$$

$$y(k+1) = y(k) + 0,25 x^2(k) + 0,25 u^2(k) \quad (4.91)$$

De verzameling  $W(0)$  is:

$$W(0) = \{ \underline{x} : x=1, y=0 \} \quad \text{waarbij } \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Voor  $x(1)$  vinden we, met behulp van (4.90) en (4.88):

$$x(1) = 0,5 + 0,5 u(0) \quad (4.92)$$

en voor  $y(1)$  vinden we met behulp van (4.91) en (4.89):

$$y(1) = 0,25 + 0,25 u^2(0) \quad (4.93)$$

Aangezien de besturingsruimte  $\Omega$  de gehele ruimte  $E_2$  is vinden we dus voor  $W(1)$ :

$$W(1) = \{ \underline{x} : -\infty < x < \infty, y \geq 0,25 \}$$

Om tenslotte  $W(2)$  te bepalen hebben we  $x(2)$  en  $y(2)$  nodig:

$$x(2) = 0,5 x(1) + 0,5 u(1) \quad (4.94)$$

$$y(2) = y(1) + 0,25 x^2(1) + 0,25 u^2(1) \quad (4.95)$$

We zullen nu  $y(2)$  schrijven als een functie van  $x(2)$  en  $u(1)$ .

Met behulp van (4.93) wordt (4.95):

$$y(2) = 0,25 + 0,25 u^2(0) + 0,25 x^2(1) + 0,25 u^2(1) \quad (4.96)$$

Uit (4.92) volgt:

$$u(0) = 2x(1) - 1 \quad (4.97)$$

en uit (4.94) volgt:

$$x(1) = 2x(2) - u(1) \quad (4.98)$$

zodat (4.97) als volgt geschreven kan worden:

$$u(0) = 4x(2) - 2u(1) - 1 \quad (4.99)$$



Door invullen van (4.98) en (4.99) <sup>in 4.96</sup> vinden we  $y(2)$  als functie van  $x(2)$  en  $u(1)$ :

$$y(2) = 5x^2(2) - \lambda(2)[5u(1) + 2] + 7,5u^2(1) + u(1) + 0,5 \quad (4.100)$$

Dit is een stelsel parabolen met  $u(1)$  als parameter.

Voor enkele waarden van  $u(1)$  zal  $y(2)$  als functie van  $x(2)$  worden berekend (zie tabel 4.1 en figuur 4.15).

Figuur 4.15 suggereert dat de laagste kosten (minimale  $y(2)$ ) corresponderen met het punt  $x(2)=0,2$ ,  $y(2)=0,3$ . Dit minimum kan ook algebraïsch gevonden worden.

Differentiëren we (4.100) naar  $x(2)$  en stellen we dit nul dan volgt:

Tabel 4.1			
y(2) als functie van x(2) met u(1) als parameter			
u(1)	f(x(2))	minimum van y(2)	
		x(2)	y(2)
-2	$y(2) = 5x^2(2) + 8x(2) + 4,5$	-0,8	1,3
-1	$y(2) = 5x^2(2) + 3x(2) + 1$	-0,3	0,55
0	$y(2) = 5x^2(2) - 2x(2) + 0,5$	0,2	0,3
1	$y(2) = 5x^2(2) - 7x(2) + 3$	0,7	0,55
2	$y(2) = 5x^2(2) - 12x(2) + 8,5$	1,2	1,3

$$\frac{\partial y(2)}{\partial x(2)} = -10x(2) - 5u(1) - 2 = 0$$

Zodat:

$$u(1) = 2x(2) - 0,4 \quad (4.101)$$

Als we dit invullen in (4.100) dan vinden we de vergelijking voor de kromme die de minima van de parabolen verbindt:

$$\begin{aligned} y(2) &= 5x^2(2) - \lambda(2)[5\{2x(2) - 0,4\} + 2] + 7,5[2x(2) - 0,4]^2 \\ &\quad + [2x(2) - 0,4] + 0,5 \quad (4.102) \\ &= x^2(2) - 0,4x(2) + 0,34 \end{aligned}$$

Het eindpunt van de optimale trajectorie  $x^*(2)$  is uiteraard het minimum van deze kromme. Differentiëren van (4.102)

naar  $x(2)$  en dit nul stellen levert:

$$x^*(2) = 0,2 \quad (4.103)$$

en  $y^*(2) = 0,3 \quad (4.104)$

De optimale trajectorie en strategie is nu gemakkelijk te bepalen. Uit (4.101) volgt nu:

$$u^*(1) = 0 \quad (4.105)$$

Uit (4.99) leiden we af dat

$$u^*(0) = -0,2 \quad (4.106)$$

en uit (4.98) dat

$$x^*(1) = 0,4 \quad (4.107)$$

Tenslotte volgt uit (4.93) dat

$$y^*(1) = 0,26 \quad (4.108)$$

In tabel 4.2 zijn de resultaten samengevat.

Tabel 4.2			
optimale strategie en trajectorie			
k	$u^k$	$x^k$	$y^k$
0	-0,2	1	0
1	0	0,4	0,26
2		0,2	0,30

We zullen nu met behulp van het discrete maximum principe trachten de optimale oplossing te vinden.

De bereikbare verzameling  $W(2)$  is, zoals we in figuur 4.15 zien, tenminste convex in de negatieve  $y(2)$ -richting. Verder voldoen de differentievergelijkingen (4.86) en (4.87) aan alle in paragraaf 4.2 genoemde voorwaarden zodat het maximum principe gebruikt mag worden.

De toegevoegde variabelen moeten voldoen aan de differentievergelijking (4.6). Toepassing hiervan op (4.86) en (4.87) levert:

$$\begin{aligned}
 p_1(k) - p_1(k+1) &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1(k)} \cdot p_2(k+1) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2(k)} \cdot p_2(k+1) \\
 &= -\Delta t p_1(k+1) + \Delta t x(k) p_2(k+1)
 \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$p_2(k) - p_2(k+1) = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2(k)} \cdot p_1(k+1) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2(k)} p_2(k+1)$$

$$= 0 \quad (4.110)$$

De randvoorwaarden zijn:

$$p_1(N) = 0 \quad (4.111)$$

$$p_2(N) = \alpha < 0 \quad (4.112)$$

We kiezen  $\alpha = -1$  zodat

$$p_2(N) = -1 \quad (4.113)$$

Uit (4.110) volgt dan dat

$$p_2(k) = -1, \quad k=0, 1, \dots, N \quad (4.114)$$

De Hamiltoniaan, gedefinieerd volgens (4.5), is in dit geval:

$$H(k) = p_1(k+1) \cdot f_1 + p_2(k+1) \cdot f_2$$

$$= \Delta t p_1(k+1) [-x(k) + u(k)] + \Delta t p_2(k+1) \left[ \frac{1}{2} x^2(k) + \frac{1}{2} u^2(k) \right]$$

In verband met (4.114) wordt dit:

$$H(k) = \Delta t p_1(k+1) [-x(k) + u(k)] - \Delta t \left[ \frac{1}{2} x^2(k) + \frac{1}{2} u^2(k) \right] \quad (4.115)$$

Als functie van  $u(k)$  is dit een parabool met een maximum, dat gevonden wordt door de afgeleide van  $H(k)$  naar  $u$  nul te stellen:

$$\left. \frac{\partial H(k)}{\partial u} \right|_{u=u(k)} = \Delta t p_1(k+1) - \Delta t u(k) = 0$$

Aangezien voor de optimale oplossing de Hamiltoniaan maximaal moet zijn geldt dus:

$$u(k) = p_1(k+1) \quad (4.116)$$

De differentievergelijking (4.86) gaat met behulp van (4.116) over in

$$x(k+1) - x(k) = -\Delta t x(k) + p_1(k+1) \Delta t \quad (4.117)$$

terwijl (4.109) met behulp van (4.113) overgaat in:

$$p_1(k) - p_1(k+1) = -\Delta t p_1(k+1) - \Delta t x(k) \quad (4.118)$$

Stellen we

$$p_1(k) = p(k)$$

en vullen we dit in in (4.117) en (4.118) dan krijgen we het volgende stelsel vergelijkingen:

$$x(k+1) = (1-\Delta t)x(k) + \Delta t p(k+1) \quad (4.119)$$

$$p(k+1) = \frac{1}{1-\Delta t} p(k) + \frac{\Delta t}{1-\Delta t} x(k) \quad (4.120)$$

Oplossing van dit stelsel zal de optimale strategie en trajectorie moeten geven.

We zullen nu eerst uit (4.119) en (4.120) twee afzonderlijke differentievergelijkingen voor  $x(k)$  en  $p(k)$  opstellen.

Uit (4.119) volgt:

$$x(k+2) = (1-\Delta t)x(k+1) + \Delta t p(k+2) \quad (4.121)$$

en:

$$p(k+1) = \frac{1}{\Delta t} x(k+1) - \frac{1-\Delta t}{\Delta t} x(k) \quad (4.122)$$

Uit (4.120) volgt:

$$p(k+2) = \frac{1}{1-\Delta t} p(k+1) + \frac{\Delta t}{1-\Delta t} x(k+1) \quad (4.123)$$

Met behulp van (4.122) gaat (4.123) over in:

$$p(k+2) = \left\{ \frac{1+\Delta t^2}{\Delta t(1-\Delta t)} \right\} x(k+1) - \frac{1}{\Delta t} x(k) \quad (4.124)$$

(4.121) kan nu als volgt geschreven worden:

$$x(k+2) = \left\{ \frac{2\Delta t^2 - 2\Delta t + 2}{1-\Delta t} \right\} x(k+1) - x(k) \quad (4.125)$$

Verder volgt uit (4.120):

$$x(k) = \frac{1-\Delta t}{\Delta t} p(k+1) - \frac{1}{\Delta t} p(k) \quad (4.126)$$

en dus ook:

$$x(k+1) = \frac{1-\Delta t}{\Delta t} p(k+2) - \frac{1}{\Delta t} p(k+1) \quad (4.127)$$

Invullen van (4.126) en (4.127) <sup>in (4.119)</sup> levert de differentievergelijking voor  $p(k)$ :

$$p(k+2) = \left\{ \frac{2\Delta t^2 - 2\Delta t + 2}{1-\Delta t} \right\} p(k+1) - p(k) \quad (4.128)$$

(4.125) en (4.128) vormen een stelsel 2<sup>o</sup> orde differentievergelijkingen met als randvoorwaarden:

$$P(N) = 0 \quad (4.129)$$

$$x(0) = 1 \quad (4.130)$$

We zullen nu de expliciete oplossing van dit stelsel bepalen.

Stel:

$$x^*(k) = A \cdot C^k \quad (4.131)$$

Substitueren we (4.131) in (4.125) dan krijgen we:

$$A \cdot C^{k+2} = \frac{2\Delta t^2 - 2\Delta t + 2}{1 - \Delta t} A \cdot C^{k+1} - A \cdot C^k$$

ofwel, na deling door  $A \cdot C^k$ :

$$C^2 - \frac{2\Delta t^2 - 2\Delta t + 2}{1 - \Delta t} C + 1 = 0$$

Oplossen van deze vierkantsvergelijking in C geeft:

$$C_1 = \frac{\Delta t^2 - \Delta t + 1}{1 - \Delta t} + \frac{\Delta t}{1 - \Delta t} \sqrt{\Delta t^2 - 2\Delta t + 2} \quad (4.132)$$

$$C_2 = \frac{\Delta t^2 - \Delta t + 1}{1 - \Delta t} - \frac{\Delta t}{1 - \Delta t} \sqrt{\Delta t^2 - 2\Delta t + 2} \quad (4.133)$$

$x^*(k)$  kan dus als volgt geschreven worden:

$$x^*(k) = A_1 \cdot C_1^k + A_2 \cdot C_2^k \quad (4.134)$$

waarbij  $A_1$  en  $A_2$  nog bepaald moeten worden met behulp van de randvoorwaarden (4.129) en (4.130).

Volgens (4.122) geldt:

$$P^*(N) = \frac{1}{\Delta t} x^*(N) - \frac{1 - \Delta t}{\Delta t} x^*(N-1)$$

Omdat  $P^*(N) = 0$  gaat dit over in:

$$x^*(N) - (1 - \Delta t)x^*(N-1) = 0$$

Substitutie van (4.134) hierin levert:

$$A_1 C_1^N + A_2 C_2^N - (1 - \Delta t)A_1 C_1^{N-1} - (1 - \Delta t)A_2 C_2^{N-1} = 0 \quad (4.135)$$

Aangezien  $x(0) = 1$  volgt uit (4.134):

$$A_2 = 1 - A_1 \quad (4.136)$$

zodat (4.135) wordt:

$$A_1 [C_1^N - C_2^N - (1 - \Delta t)C_1^{N-1} + (1 - \Delta t)C_2^{N-1}] = (1 - \Delta t)C_2^{N-1} - C_2^N$$

Hieruit volgt dat:

$$A_1 = \frac{-C_2^{N-1}(C_2 - 1 + \Delta t)}{C_1^{N-1}(C_1 - 1 + \Delta t) - C_2^{N-1}(C_2 - 1 + \Delta t)} \quad (4.137)$$

en met behulp van (4.136):

$$A_2 = \frac{C_1^{N-1}(C_1 - \tau + \Delta t)}{C_1^{N-1}(C_1 - \tau + \Delta t) - C_2^{N-1}(C_2 - \tau + \Delta t)} \quad (4.138)$$

De oplossing van de differentievergelijking voor  $p^*(k)$ , (4.128), kan als volgt geschreven worden:

$$p^*(k) = B_1 C_1^k + B_2 C_2^k \quad (4.139)$$

waarbij  $C_1$  en  $C_2$  gegeven worden door (4.132) en (4.133) terwijl  $B_1$  en  $B_2$  weer door de randvoorwaarden worden bepaald.

Uit (4.120) volgt, voor  $k=0$ :

$$\begin{aligned} p^*(\tau) &= \frac{1}{1-\Delta t} p^*(0) + \frac{\Delta t}{1-\Delta t} x^*(0) \\ &= \frac{1}{1-\Delta t} p^*(0) + \frac{\Delta t}{1-\Delta t} \end{aligned}$$

Door substitutie van (4.139) hierin krijgen we:

$$B_1 C_1 + B_2 C_2 = \frac{1}{1-\Delta t} (B_1 + B_2) + \frac{\Delta t}{1-\Delta t} \quad (4.140)$$

Aangezien  $p^*(N)=0$  volgt uit (4.139):

$$B_2 = - \frac{B_1 C_1^N}{C_2^N} \quad (4.141)$$

Dus uit (4.140) is nu  $B_1$  op te lossen:

$$B_1 = \frac{\Delta t C_2^N}{C_1^N(1+C_2\Delta t - C_2) - C_2^N(1+C_1\Delta t - C_1)} \quad (4.142)$$

en, via (4.141):

$$B_2 = \frac{-\Delta t C_1^N}{C_1^N(1+C_2\Delta t - C_2) - C_2^N(1+C_1\Delta t - C_1)}$$

Voor gegeven  $N$  en  $\Delta t$  is nu dus de oplossing van het oorspronkelijke stelsel differentievergelijkingen (4.119) en (4.120) bekend, en daarmee de optimale trajectorie. Voor  $N=2$  en  $\Delta t = \frac{1}{2}$  moet deze gelijk zijn aan de trajectorie die met behulp van de bereikbare verzameling  $W(2)$  is bepaald.

We vinden in dit geval voor de verschillende constanten: uit (4.132) en (4.133):

$$C_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$C_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

uit (4.137) en (4.138):

$$A_1 = \frac{-C_2(C_2 - \frac{1}{2})}{C_1(C_1 - \frac{1}{2}) - C_2(C_2 - \frac{1}{2})}$$

$$A_2 = \frac{C_1(C_1 - \frac{1}{2})}{C_1(C_1 - \frac{1}{2}) - C_2(C_2 - \frac{1}{2})}$$

Uit (4.142) en (4.143):

$$B_1 = \frac{\frac{1}{2}C_2^2}{C_1^2(1 - \frac{1}{2}C_2) - C_2^2(1 - \frac{1}{2}C_1)}$$

$$B_2 = \frac{-\frac{1}{2}C_1^2}{C_1^2(1 - \frac{1}{2}C_2) - C_2^2(1 - \frac{1}{2}C_1)}$$

De optimale trajectorie volgt uit (4.134):

$$\begin{aligned} x^*(1) &= A_1 C_1 + A_2 C_2 \\ &= \frac{-C_2(C_2 - \frac{1}{2})C_1 + C_1(C_1 - \frac{1}{2})C_2}{C_1(C_1 - \frac{1}{2}) - C_2(C_2 - \frac{1}{2})} = 0,4 \end{aligned}$$

en

$$x^*(2) = A_1 C_1^2 + A_2 C_2^2 = 0,2$$

De optimale strategie volgt uit (4.139) en uit (4.116):

$$\begin{aligned} u^*(0) = p^*(1) &= B_1 C_1 + B_2 C_2 \\ &= \frac{\frac{1}{2}C_2^2 C_1 - \frac{1}{2}C_1^2 C_2}{C_1^2(1 - \frac{1}{2}C_2) - C_2^2(1 - \frac{1}{2}C_1)} = -0,2 \end{aligned}$$

en:

$$u^*(1) = p^*(2) = B_1 C_1^2 + B_2 C_2^2 = 0$$

We zien dat deze resultaten volledig overeenkomen met die van tabel 4.2.

Tot slot zullen we voor  $N, \Delta t=1$  de resultaten van het discrete maximum principe en die van het continue maximum principe aan het einde van paragraaf 3.3 met elkaar vergelijken.

Stel  $N=10$ ,  $\Delta t = \frac{1}{10}$

Dan wordt:  $C_1 = 1,1606$   
 $C_2 = 0,8616$

Evenals bij het continue geval berekenen we  $x$  halverwege het beschouwde interval, dus voor  $k=5$ .

Volgens (4.134), (4.137) en (4.138) geldt dan:

$$\begin{aligned} x^*(5) &= A_1 C_1^5 + A_2 C_2^5 \\ &= \frac{-C_2^4(C_2 - 0,9) + C_1^4(C_1 - 0,9)}{C_1^9(C_1 - 0,9) - C_2^9(C_2 - 0,9)} = 0,4912 \end{aligned}$$

waarbij gebruik is gemaakt van het feit dat  $C_1 C_2 = 1$ , hetgeen eenvoudig te verifiëren is.

Volgens (3.49) is de overeenkomstige waarde bij het continue systeem:  $x^*(0,5) = 0,5106$ .

Voor  $N=20$ ,  $\Delta t = \frac{1}{20}$  zal het verschil tussen beide uitkomsten nog kleiner moeten worden.

In het laatste geval is:  $C_1 = 1,0752$   
 $C_2 = 0,9300$

en:

$$\begin{aligned} x^*(10) &= A_1 C_1^{10} + A_2 C_2^{10} \\ &= \frac{-C_2^9(C_2 - 0,95) + C_1^9(C_1 - 0,95)}{C_1^{19}(C_1 - 0,95) - C_2^{19}(C_2 - 0,95)} = 0,5000 \end{aligned}$$

We zien dus, zoals te verwachten was, dat, naarmate  $\Delta t$  kleiner wordt, het discrete maximum principe resultaten geeft die hoe langer hoe meer overeenkomen met die van het continue maximum principe.

#### 4.7. Samenvatting

In deze paragraaf zal een korte samenvatting worden gegeven van die zaken die van belang zijn bij de toepassing van het discrete maximum principe en die in het voorgaande uitgebreider aan de orde kwamen.

Het bestaan van een optimale trajectorie is geen vanzelfsprekende zaak. Onder bepaalde voorwaarden (convexiteit, lineair systeem) hebben we in het continue geval zekerheid over het bestaan van een optimum. Voor



het discrete geval hebben we gevonden dat een lineair systeem een optimale oplossing heeft. Voor niet-lineaire systemen zijn we hier niet verder op ingegaan.

Duidelijk is wel dat we zeer kritisch moeten staan tegenover het bestaan van een optimale trajectorie van een door ons ontworpen model van de werkelijkheid.

Ten aanzien van de mogelijkheid een discrete beslissingsvariabele toe te staan is het duidelijk geworden dat dit voor niet-lineaire discrete systemen in het algemeen niet mogelijk is. Misschien dat er nog een klasse van differentievergelijkingen bestaat met slechts een geringe niet-lineariteit zodat een discrete beslissingsvariabele toch mogelijk is. Daarom is het toepassen van het discrete maximum principe op het discrete model van paragraaf 2.2. toch het proberen waard. Voor het continue model van paragraaf 2.3. zijn wat dit betreft geen moeilijkheden te duchten.

Differentiëerbaarheid naar  $\underline{x}$  (bij Polak en Jordan ook naar  $\underline{u}$ ) van het rechterlid van de differentievergelijking is een vereiste. Bepaalde discontinuïteiten die inherent zijn aan het in hoofdstuk 1 geformuleerde probleem zullen dus door differentieerbare functies benaderd moeten worden.

In het algemeen geldt voor een niet-lineair discrete systeem een lokaal maximum principe. In paragraaf 4.2 zijn een aantal voorwaarden genoemd waaronder een globaal maximum principe geldt. Convexiteit is een van de belangrijkste condities. Helaas is het in de praktijk moeilijk vast te stellen of een systeem convex is. Voor een continue variërende beslissingsvariabele zullen we een stelsel differentievergelijkingen afleiden die benaderingen zijn van differentiaalvergelijkingen. In dit geval kan volgens paragraaf 4.2. een globaal maximum principe toegepast worden. Voor het model met een discrete beslissingsvariabele zullen we er rekening mee moeten houden dat de Hamiltoniaan slechts lokaal maximaal wordt voor een optimum.

We leggen er nogmaals de nadruk op dat het maximum principe slechts noodzakelijke voorwaarden geeft voor een optimum. Als de Hamiltoniaan maximaal is voor een bepaalde strategie  $U$  mogen we dus niet concluderen dat  $U$  ook de optimale strategie is.

In het voorgaande hebben we geen restricties opgelegd aan de toestandsvariabele. Bij het continue model krijgen we hier wel mee te maken. Dit zullen we dus moeten oplossen met "penalty" functies.

In de volgende hoofdstukken zullen we verder ingaan op het discrete en het continue model. We zullen het maximum principe volgens de formulering van Halkin (paragraaf 4.2) voor het vrije eindpunt toepassen. Ook zullen we de rekenkundige aspecten nader bezien.

## 5. Het discrete model

### 5.1. Inleiding

In het voorgaande werd aangetoond dat de toepasbaarheid van het discrete maximum principe bij systemen met een stuurvariabele die slechts discrete waarden kan aannemen o.a. afhangt van de lineariteit van het systeem. Dat we in dit hoofdstuk toch het maximum principe zullen gebruiken bij de optimale lastverdeling in een elektrische centrale volgens het discrete model van paragraaf 2.2 heeft een aantal oorzaken. Ten eerste is het mogelijk dat bij een kleine niet-lineariteit het maximum principe toch bruikbare oplossingen geeft, evenals bij lineaire systemen het geval is. Ten tweede waren er, voordat uit de theorie een duidelijk inzicht kon worden verkregen in het toepassingsgebied van het maximum principe, reeds een aantal discrete modellen onderzocht. Weliswaar bleek dat het maximum principe geen goede resultaten opleverde, toch heeft dit onderzoek veel bijgedragen tot de perfectionering van de analytische beschrijving van het probleem, hetgeen later bij het opstellen van het continue model van veel nut is geweest.

De toepasbaarheid van het maximum principe bij een discreet model zal aan de hand van eenvoudige voorbeelden met twee machines worden nagegaan. Dit betekent dat we minstens met een drie-dimensionale toestandsvariabele te maken hebben (n.l. inclusief de kostenfunctie). De periode waarover geoptimaliseerd moet worden zal in het algemeen  $4\Delta t$  bedragen zodat er dus vier beslissingen ten aanzien van de bedrijfsvoering moeten worden genomen. We hebben geen mogelijkheid om bij de verschillende modellen die in dit hoofdstuk besproken zullen worden van te voren uitsluitel te geven of het maximum principe al dan niet gebruikt kan worden. Voor deze eenvoudige voorbeelden kan echter ook op andere wijze de optimale oplossing bepaald worden,

zodat experimenteel onderzocht kan worden of het discrete maximum principe geldt, door te onderzoeken of de Hamiltoniaan als functie van de stuurvariabele maximaal wordt. Stel dat de Hamiltoniaan maximaal wordt voor de van te voren berekende trajectorie dan zullen we eerst moeten nagaan of dit bij een andere keuze van de parameters (brandstof- en opstartkosten, het totaal te leveren vermogen) ook het geval is. Zo ja, dan mag de procedure uiteraard nog niet omgekeerd worden. Immers, de Hamiltoniaan kan meerdere maxima bezitten. Dit kunnen we nagaan door het probleem met behulp van het maximum principe numeriek of algebraïsch op te lossen.

Bij het voorbeeld van paragraaf 4.6 was het mogelijk om langs algebraïsche weg een expliciete uitdrukking te vinden voor de optimale trajectorie. In het algemeen lukt dit echter niet en zullen we onze toevlucht moeten nemen tot iteratieve methoden die hopelijk naar de optimale oplossing convergeren. Hoewel het niet de bedoeling is uitgebreid in te gaan op de numerieke procedures is het toch noodzakelijk hier enkele opmerkingen over te maken.

Paragraaf 5.2 is hieraan gewijd.

In de daaropvolgende paragrafen zullen een aantal discrete modellen besproken worden.

Het zal zinvol zijn de belangrijkste gegevens van het op te lossen probleem nogmaals te herhalen (zie hoofdstuk 1):

1. De brandstofkosten zijn bekend en zijn een functie van het opgewekte vermogen.
2. De opstartkosten zijn bekend en zijn afhankelijk van de tijd die een machine buiten bedrijf is geweest.
3. Elke machine heeft een gegeven technische minimale en maximale capaciteit wat het op te wekken vermogen betreft.
4. De snelheid van op- en afregelen van vermogen is aan restricties gebonden. Deze restricties zijn eveneens bekend.

Elk model vraagt een eigen behandeling van de detectie van brandstof- en opstartkosten alsmede van de verschillende restricties waaraan de oplossing moet voldoen. Deze zaken zullen dan ook bij de bespreking van elk model weer aan de orde komen.

Op de z.g. draaiende reserve zullen we (voorlopig) niet ingaan.

## 5.2. Numerieke aspecten

We gaan uit van de differentievergelijking

$$\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) = \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)) \quad (5.1)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1 \quad \underline{x} \in E_n \quad \underline{u} \in \mathcal{U} \subset E_r$$

met als beginvoorwaarde

$$\underline{x}(0) = \underline{a} \quad (5.2)$$

Toepassing van het discrete maximum principe (zie paragraaf 4.2) levert de differentievergelijking voor de toegevoegde variabele:

$$\underline{p}(k) - \underline{p}(k+1) = \left( \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}(k)) \Big|_{\underline{x} = \underline{x}(k)} \right)^T \underline{p}(k+1) \quad (5.3)$$

Als we aannemen dat  $x_n$  de te minimaliseren component van de toestandsvariabele is, dan worden de randvoorwaarden van (5.3):

$$\begin{aligned} p_i(N) &= 0 & i &= 1, 2, \dots, n-1 \\ p_n(N) &= -1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Omdat  $\underline{u}^*(k)$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$  bepaald kan worden door het (eventueel lokaal) maximaliseren van de Hamiltoniaan worden we geconfronteerd met een tweepuntsrandwaarde-probleem, veroorzaakt door het stelsel differentievergelijkingen (5.1) en (5.3) met (5.2) als begin- en (5.4) als eindvoorwaarden. De oplossing

van dit probleem kan de optimale trajectorie  $X^*$  geven.

Deze oplossing kan op verschillende manieren bepaald worden. Het principe is echter steeds hetzelfde: via een geschatte grootheid moet iteratief de optimale trajectorie gevonden worden. Dit is het gevolg van het feit dat de randvoorwaarden van  $\underline{x}$  aan het begin, en die van  $\underline{p}$  aan het eind van het beschouwde interval gegeven zijn.

Het is mogelijk te beginnen met het schatten van de onbekende beginvoorwaarden  $\underline{p}(0)$  of van de eveneens onbekende eindvoorwaarden  $\underline{x}(N)$ . Ook kan eerst een schatting gemaakt worden van de strategie  $\underline{u}(k)$ ,  $k=0,1,\dots,N-1$

We willen hier nogmaals opmerken dat de numerieke methoden die in dit hoofdstuk beschreven zijn enkel tot doel hebben op snelle en overzichtelijke wijze te onderzoeken of bij eenvoudige voorbeelden de Hamiltoniaan maximaal is voor de optimale trajectorie. We zien dus af van alle verfijningen die kunnen worden aangebracht om bij grote problemen rekentijd en geheugenruimte van de computer te reduceren.

Aanvankelijk zag de methode die uitgaat van de schatting van  $\underline{x}(N)$  er het meest prettig uit. Het schatten van de toestand van het systeem op het eindtijdstip zal, vanwege de a priori informatie die we over het proces hebben, gemakkelijker zijn dan het schatten van de meer ongrijpbare toegevoegde variabele op het begintijdstip terwijl het schatten van een gehele strategie een wat al te grote sprong in het duister leek.

De algemene procedure is als volgt:

1. Schat een waarde voor  $\underline{x}(N)$ :  $\hat{\underline{x}}(N)$
2. Schat een waarde voor  $\underline{u}(N-1)$ :  $\underline{u}'(N-1) \in \Omega$
3. Bereken met behulp van (5.1):

$$\underline{x}'(N-1) = \underline{g}(\hat{\underline{x}}(N), \underline{u}'(N-1))$$

4. Bereken de Hamiltoniaan:

$$H'(N-1) = \left\langle \underline{f}(\underline{x}'(N-1), \underline{u}'(N-1)) \mid \underline{p}(N) \right\rangle$$

5. Neem een andere waarde voor  $\underline{u}(N-1)$ :  $\underline{u}''(N-1) \in \Omega$

en herhaal de stappen 3 en 4. Bepaal langs deze weg, eventueel met behulp van een heuvelklimmethode, het maximum van de Hamiltoniaan als functie van  $\underline{u}(N-1)$ . De bij dit maximum behorende stuur- en toestandsvariabelen zijn  $\hat{\underline{u}}(N-1)$  en  $\hat{\underline{x}}(N-1)$ .

6. Bereken  $\hat{\underline{p}}(N-1)$  met behulp van (5.3):

$$\hat{\underline{p}}(N-1) = \underline{h}(\underline{p}(N), \hat{\underline{x}}(N-1), \hat{\underline{u}}(N-1))$$

7. Herhaal de stappen 2, 3, 4 en 5 voor het tijdstip  $N-2$  dus bepaal het maximum van de Hamiltoniaan:

$$H(N-2) = \left\langle \underline{f}(\hat{\underline{x}}(N-2), \underline{u}(N-2)) \middle| \hat{\underline{p}}(N-1) \right\rangle$$

als functie van  $\underline{u}(N-2) \in \Omega$ . De bij dit maximum behorende stuur- en toestandsvariabelen zijn  $\hat{\underline{u}}(N-2)$  en  $\hat{\underline{x}}(N-2)$

8. Zet dit proces voort totdat  $\hat{\underline{u}}(0)$  en  $\hat{\underline{x}}(0)$  zijn gevonden.
9. Als  $\hat{\underline{x}}(0) \neq \underline{a}$  verander dan de initiële schatting van  $\underline{x}(N)$  en herhaal de stappen 2 t/m 8. Een nieuwe schatting kan verkregen worden met behulp van de methoden van heuvelklimmen.
10. Als  $\hat{\underline{x}}(0) = \underline{a}$  dan hebben we de oplossing van het twee-punts-randwaarde-probleem gevonden. Uiteraard is het mogelijk om meer gelijkwaardige oplossingen te vinden.
11. Afhankelijk van het beschouwde probleem moet het maximaliseren van de Hamiltoniaan vervangen worden door het lokaal maximaliseren ervan.

Onder de oplossingen die aldus verkregen worden bevindt zich ook de optimale oplossing, mits er voor het beschouwde probleem een bestaat en aan de voorwaarden voor het toepassen van het maximum principe is voldaan.

De hierboven vermelde procedure bleek niet toepasbaar op het discrete model zoals dat in paragraaf 2.2. beschreven werd.

Voor dit model is de differentievergelijking volgens (2.1) voor de  $i^e$  component van de toestandsvariabele:

$$x_i(k+1) = u_i(k)x_i(k) + u_i(k)\Delta t \quad (5.5)$$

In stap 3 is nodig dat  $\underline{x}(k)$  als een functie van  $\underline{x}(k+1)$  en  $\underline{u}(k)$  geschreven wordt. Uit (5.5) volgt dan dat:

$$x_i(k) = \frac{x_i(k+1)}{u_i(k)} - \Delta t \quad \text{voor } u_i(k) \neq 0$$

Aangezien  $u_i(k)=0$  betekent dat de  $i^e$  machine gestart of in bedrijf gelaten moet worden kan deze numerieke procedure voor dit model niet gebruikt worden.

Het voorbeeld dat in paragraaf 2.2 beschreven wordt toont in figuur 2.1 duidelijk aan dat het onmogelijk is om, gegeven de beslissing op het tijdstip  $k=4$  en de hieruit ondubbelzinnig voortvloeiende toestand voor  $k=5$ , te berekenen wat de toestand op het tijdstip  $k=3$  geweest was.

Door, in plaats van met het schatten van  $\underline{x}(N)$ , te beginnen met het schatten van  $\underline{p}(0)$  omzeilen we deze moeilijkheid bij de toestandsvariabele, maar introduceren we hem bij de toegevoegde variabele, die nu in voorwaartse richting berekend moet worden.

Als we afzien van een kostenfunctie, die het probleem niet wezenlijk anders maakt, kan met behulp van (5.3) de differentievergelijking van de toegevoegde variabele van het systeem, dat beschreven wordt door (5.5) bepaald worden:

$$p_i(k) - p_i(k+1) = [u_i(k) - 1] p_i(k+1) \quad (5.6)$$

Beginnen we met een schatting voor  $\underline{p}(0)$  dan moet  $p_i(k+1)$  berekend worden uit  $p_i(k)$ . Uit (5.6) volgt dan:

$$p_i(k+1) = \frac{p_i(k)}{u_i(k)} \quad \text{voor } u_i(k) \neq 0$$



zodat deze procedure ook geen oplossing is voor de moeilijkheid.

Later zullen ook andere discrete modellen worden beschreven waarbij het niet-continue karakter van de toestandsvariabele als functie van de tijd, zoals figuur 2.1 dat te zien geeft, niet meer voorkomt. Met behulp van e-machten zullen dan de discontinuïteiten benaderd worden. De hier vermelde moeilijkheden treden dan niet op. Het blijkt echter dat nu een zeer kleine variatie in de initiële schatting van  $\underline{x}(N)$  of  $\underline{p}(0)$  een zeer grote verandering in de oplossing veroorzaakt. De conclusie zal dus zijn dat deze numerieke methode niet geschikt blijkt voor het doel, namelijk het snel en eenvoudig onderzoeken van de resultaten van de toepassing van het maximum principe.

Een andere, reeds terloops ter sprake gebrachte methode om het twee-punts-randwaarde-probleem op te lossen, begint met een schatting van de gehele strategie. Gezien de vele ervaring waarover men beschikt op het punt van het zo voordelig mogelijk produceren van elektrische energie zal in de praktijk een redelijke schatting van de gehele strategie zeer goed mogelijk zijn.

Deze numerieke procedure kan stapsgewijs als volgt worden beschreven:

1. Schat een strategie  $\underline{u}'(0), \underline{u}'(1), \dots, \underline{u}'(N-1)$
2. Bereken de trajectorie  $\underline{x}'(1), \underline{x}'(2), \dots, \underline{x}'(N)$  met behulp van de differentievergelijking (5.1) en de beginvoorwaarde (5.2).
3. Bereken de toegevoegde variabelen  $\underline{p}'(N-1), \underline{p}'(N-2), \dots, \underline{p}'(1)$  met behulp van de differentievergelijking (5.3) en de eindvoorwaarde (5.4)
4. Maximaliseer de Hamiltoniaan

$$H'(k) = \left\langle f(\underline{x}'(k), \underline{u}(k)) \mid \underline{p}'(k+1) \right\rangle$$

voor alle  $k=0, 1, \dots, N-1$  als functie van  $\underline{u}(k) \in \mathcal{U}$

De strategie waarvoor  $H'(k)$  maximaal wordt is de nieuwe schatting:  $\underline{u}''(0), \underline{u}''(1) \dots \underline{u}''(N-1)$ .

- 5. Herhaal de stappen 2, 3 en 4 totdat twee opeenvolgende schattingen gelijk zijn. We hebben dan de oplossing van het probleem gevonden.
- 6. Ook hier geldt dat, afhankelijk van het beschouwde probleem, de Hamiltoniaan eventueel lokaal maximaal moet zijn.

Deze numerieke methode zal in het volgende gebruikt worden om het, uit het toepassen van het maximum principe ontstane, twee-punts-randwaarde-probleem op te lossen.

5.3. Het discontinue discrete model met e-macht detectie van opstartkosten

5.3.1. Inleiding

Onder het discontinue discrete model zullen we verstaan het model zoals dat in paragraaf 2.2 beschreven is. De toestandsvariabele is een discontinue functie van de tijd. Het model wordt reeds gebruikt om met behulp van dynamisch programmeren de optimale lastverdeling te bepalen. 2)

Voor een configuratie met n machines ( $M_1, \dots, M_n$ ) kan het systeem beschreven worden door de volgende differentievergelijking :

$$x_i(k+1) - x_i(k) = [-1 + u_i(k)] x_i(k) + u_i(k) \Delta t \quad (5.7)$$

$$x_i(0) = a_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Hierbij is:  $x_i(k)$ : de tijd die  $M_i$  buiten bedrijf is geweest

$u_i(k) := 0$  als  $M_i$  gestart wordt of in bedrijf blijft

$:= 1$  als  $M_i$  gestopt wordt of buiten bedrijf blijft.

5.3.2. De brandstofkosten

De brandstofkosten  $F_{BR_i}$  van  $M_i$  zijn een functie van het vermogen  $V_i(k)$  dat  $M_i$  op het tijdstip k produ-

ceert. Om de totale brandstofkosten ten gevolge van een beslissing  $\underline{u}(k)$  te vinden moeten we sommeren over alle in bedrijf zijnde machines:

$$F_{BR}(\underline{v}(k+1), \underline{u}(k)) = \sum_{i=1}^n [1 - u_i(k)] F_{BR_i}(v_i(k+1)) \Delta t \quad (5.8)$$

Uiteraard zijn deze brandstofkosten nog afhankelijk van de verdeling van het totale te leveren vermogen  $V_T(k+1)$  over de in bedrijf zijnde machines. Welke machines dit zijn wordt door het maximaliseren van de Hamiltoniaan en het oplossen van het uiteindelijke twee-punts-randwaarde-probleem verkregen. Hoe  $V_T(k+1)$  verdeeld is over de draaiende machines kan door een minimaliseringsprocedure worden bepaald (zie paragraaf 2.2):

$$F_{BR}(\underline{u}(k)) = \text{Min}_{v_1, \dots, v_n} \sum_{i=1}^n [1 - u_i(k)] F_{BR_i}(v_i(k+1)) \Delta t \quad (5.9)$$

met de restrictie:

$$\sum_{i=1}^n v_i(k+1) = V_T(k+1) \quad (5.10)$$

Deze minimalisering is aan een tweetal voorwaarden gebonden:

1. De minimale en maximale capaciteit,  $V_i^{\min}$  en  $V_i^{\max}$ , moeten in acht genomen worden.
2. Het op- en afregelen van vermogen per tijdseenheid moet liggen tussen bepaalde grenzen:

$$v_i(k+1) - v_i(k) \leq V_i' \quad \text{als} \quad v_i(k+1) > v_i(k)$$

$$v_i(k+1) - v_i(k) \geq V_i'' \quad \text{als} \quad v_i(k+1) < v_i(k)$$

De minimalisering moet dus rekening houden met het verleden.

Dit aan restricties gebonden proces van verdeling van  $V_T(k+1)$  over de draaiende machines kan met een "trial and error" methode op de computer uitgevoerd worden.

### 5.3.3. De opstartkosten

De opstartkosten van  $M_i$  op het tijdstip  $k$  zijn

afhankelijk van de tijd die  $M_i$  buiten bedrijf is geweest:  $x_i(k)$ . In paragraaf 2.2 werden de totale opstartkosten tengevolge van een beslissing  $\underline{u}(k)$  als volgt geschreven:

$$F_{ST}(\underline{u}(k), \underline{x}(k)) = \sum_{i=1}^n Q_i F_{ST_i}(x_i(k)) \quad (5.11)$$

$Q_i$  is een functie van  $u_i(k)$  en  $x_i(k)$  (of van  $u_i(k)$  en  $u_i(k-1)$ ) en is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} Q_i &= 0, \text{ als } M_i \text{ niet wordt gestart} \\ &= 1 \text{ als } M_i \text{ wordt gestart.} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Een aldus gedefinieerde functie  $Q_i$  kan hier niet gebruikt worden omdat de opstartkosten, die straks deel zullen uitmaken van een nieuwe toestandsvariabele, differentieerbaar moeten zijn naar  $\underline{x}$  om de toegevoegde variabelen te kunnen bepalen. Op een of andere analytische wijze zal de discontinuïteit van  $Q_i$  benaderd moeten worden. Dit kan op verschillende manieren gebeuren. Bij dit model zullen we gebruik maken van het feit dat slechts bij een bepaalde combinatie van  $x_i(k)$  en  $u_i(k)$  de machine gestart wordt (zie tabel 5.1). Met behulp van een e-macht kunnen we  $Q_i$  dan als volgt benaderen:

$$Q_i(u_i(k), x_i(k)) \approx 1 - e^{-a[1-u_i(k)]x_i(k)} \quad (5.13)$$

$a > 0$

Naarmate  $a$  groter is zal  $Q_i$  beter benaderd worden. Dit brengt echter met zich mee dat ook de eerste afgeleide naar  $\underline{x}$  groot wordt. De toegevoegde variabelen kunnen dan zeer grote waarden aannemen. Hoe (5.13) zich gedraagt voor  $a=5$  en voor verschillende waarden van  $x_i(k)$  en  $u_i(k)$  toont tabel 5.2. We zien hieruit dat de benadering voor relatief kleine waarden van  $a$  reeds goed is.

tabel 5.1		
mogelijke combinaties van $x_i(k)$ en $u_i(k)$		
$x_i(k)$	$u_i(k)$	operatie op $M_i$ op tijdstip $k$
$> 0$	1	blijft buiten bedrijf
$> 0$	0	start
0	1	stopt
0	0	blijft in bedrijf

tabel 5.2			
$1 - e^{-5[1-u_1(k)]} x_i(k)$ voor enkele waarden van $u_1(k)$ en $x_i(k)$			
$x_i(k)$	$u_1(k)$	operatie op $M_1$ op tijdstip $k$	$1 - e^{-5[1-u_1(k)]} x_i(k)$
0	0	blijft in bedrijf	0
1	0	start	0,99326
2	0	start	0,99995
0	1	stopt	0
1	1	blijft buiten bedrijf	0
2	1	blijft buiten bedrijf	0

We kunnen de opstartkosten op het tijdstip  $k$  met behulp van (5.11) en (5.13) nu dus als volgt schrijven:

$$F_{ST}(\underline{u}(k), \underline{x}(k)) = \sum_{i=1}^n [1 - e^{-a[1-u_i(k)]} x_i(k)] F_{ST_i}(x_i(k)) \quad (5.14)$$

#### 5.3.4. De differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele

Voor de toepassing van het maximum principe is het noodzakelijk om de kosten in de  $(n+1)^e$  component van de toestandsvariabele onder te brengen, zodat de kosten in een differentievergelijking moeten worden uitgedrukt.

De kosten tengevolge van een beslissing  $\underline{u}(k)$  zijn volgens (5.8) en (5.14):

$$F_T(\underline{u}(k), \underline{x}(k)) = F_{ST}(\underline{u}(k), \underline{x}(k)) + F_{\theta R}(\underline{u}(k)) \quad (5.15)$$

De totale kosten tengevolge van de beslissingen  $\underline{u}(0), \underline{u}(1), \dots, \underline{u}(k-1)$  zullen  $F_T(U, X, k)$  genoemd worden, en deze zijn dus:

$$F_T(U, X, k) = \sum_{j=0}^{k-1} F_T(\underline{u}(j), \underline{x}(j)) \quad (5.16)$$

zodat:

$$F_T(U, X, k+1) - F_T(U, X, k) = F_T(\underline{u}(k), \underline{x}(k)) \quad (5.17)$$

Stel nu dat:

$$x_{n+1}(k) = F_T(U, X, k) \quad (5.18)$$

dan wordt de differentievergelijking voor de kosten:

$$x_{n+1}(k+1) - x_{n+1}(k) = F_T(\underline{u}(k), \underline{x}(k)) \quad (5.19)$$

Met behulp van (5.15), (5.14) en (5.9) krijgt deze uitdrukking zijn uiteindelijke vorm:

We kunnen nu dus het stelsel differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele in zijn geheel als volgt op schrijven:

$$x_i(k+1) - x_i(k) = [-1 + u_i(k)] x_i(k) + u_i(k) \Delta t \quad (5.20)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

$$x_{n+1}(k+1) - x_{n+1}(k) = \text{Min}_{v_1, \dots, v_n} \sum_{i=1}^n \left[ \{1 - u_i(k)\} F_{Bx_i}(v_i(k+1)) \Delta t \right] + \sum_{i=1}^n \left[ 1 - e^{-a[1 - u_i(k)] x_i(k)} \right] F_{ST_i}(x_i(k))$$

met als beginvoorwaarden:

$$\begin{aligned} x_i(0) &= a_i & i &= 1, 2, \dots, n \\ x_{n+1}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Het probleem is nu dus gereduceerd tot het zoeken van een strategie  $U$  zodanig dat  $x_{n+1}(N)$  minimaal wordt.

5.3.5. De differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele

Met behulp van (5.3) en (5.20) kunnen we de differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele bepalen, omdat immers geldt:

$$f_i(z(k), u(k)) = \lambda_i(k+1) - \lambda_i(k)$$

Deze vergelijkingen worden nu:

$$p_i(k) - p_i(k+1) = [u_i(k) - 1] p_i(k+1) + p_{n+1}(k+1) \cdot a \cdot [1 - u_i(k)] F_{ST_i}(\lambda_i(k)) e^{-a[1-u_i(k)]\lambda_i(k)} + p_{n+1}(k+1) \left[ 1 - e^{-a[1-u_i(k)]\lambda_i(k)} \right] \frac{dF_{ST_i}(\lambda_i)}{d\lambda_i} \Big|_{\lambda_i = \lambda_i(k)} \quad (5.22)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$p_{n+1}(k) - p_{n+1}(k+1) = 0 \quad (5.23)$$

met als eindvoorwaarden:

$$p_i(N) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.24)$$

$$p_{n+1}(N) = -1 \quad (5.25)$$

Uit (5.23) en (5.25) volgt dat:

$$p_{n+1}(k) = -1 \quad \text{voor } k = 0, 1, \dots, N \quad (5.26)$$

zodat (5.22) geschreven kan worden als:

$$p_i(k) - p_i(k+1) = [u_i(k) - 1] p_i(k+1) - a[1 - u_i(k)] F_{ST_i}(\lambda_i(k)) e^{-a[1-u_i(k)]\lambda_i(k)} - \left[ 1 - e^{-a[1-u_i(k)]\lambda_i(k)} \right] \frac{dF_{ST_i}(\lambda_i)}{d\lambda_i} \Big|_{\lambda_i = \lambda_i(k)} \quad (5.27)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

met (5.24) als randvoorwaarde.

### 5.3.6. De Hamiltoniaan

De Hamiltoniaan is als volgt gedefinieerd:

$$H(k) = \left\langle \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)) \mid \underline{p}(k+1) \right\rangle \quad (5.28)$$

Met behulp van (5.20) en (5.26) kunnen we H(k) bepalen:

$$\begin{aligned} H(k) = & \sum_{i=1}^n p_i(k+1) [\{u_i(k)-1\} x_i(k) + u_i(k) \Delta t] + \\ & - \text{Min}_{v_1 \dots v_n} \sum_{i=1}^n [\{1-u_i(k)\} F_{BR_i}(v_i(k+1)) \Delta t] + \\ & - \sum_{i=1}^n [1 - e^{-a[1-u_i(k)] x_i(k)}] F_{ST_i}(x_i(k)) \end{aligned} \quad (5.29)$$

### 5.3.7. Voorbeeld

In deze sectie zal een voorbeeld worden besproken waarvan de optimale strategie op eenvoudige wijze te bepalen is. Daarna zal getracht worden het discrete maximum principe te verifiëren.

We nemen aan dat we de beschikking hebben over 2 eenheden,  $M_1$  en  $M_2$ . Het te leveren vermogen  $V_T$  is in figuur 5.1 als functie van de tijd getekend. We beschouwen een tijdvak van 4 uur,  $\Delta t=1$  uur. Er moeten dus 4 beslissingen ten aanzien van de bedrijfsvoering worden genomen.

We stellen:  $a=5$ .

De overige gegevens zijn:

brandstofkosten:

$$F_{BR_1}(v_1) = 2v_1 + 40 \quad (5.30)$$

$$F_{BR_2}(v_2) = 0,05v_2^2 + 0,5v_2 + 40 \quad (5.31)$$

$V_1$  en  $V_2$  in M.W.;  $F_{BR_1}$  en  $F_{BR_2}$  in kosten/uur.

Zie figuur 5.2

opstartkosten:

$$F_{ST_1}(x_1) = 30 [1 - e^{-0,5x_1}] \quad (5.32)$$

$$F_{ST_2}(x_2) = 40 [1 - e^{-0,5x_2}] \quad (5.33)$$

Zie figuur 5.3 en tabel 5.3.



technische maximale en minimale capaciteit:

$$V_1^{min} = V_2^{min} = 10 \text{ M.W.} \quad (5.34)$$

$$V_1^{max} = V_2^{max} = 50 \text{ M.W.} \quad (5.35)$$

beginvoorwaarden:

$$x_1(0) = 2 \quad (5.36)$$

$$x_2(0) = 0 \quad (5.37)$$

Er worden geen restricties opgelegd aan het op- of afregelen van vermogen per tijdseenheid.

De optimale strategie voor dit voorbeeld is betrekkelijk eenvoudig te berekenen.

tabel 5.3			
opstartkosten			
x	$1 - e^{-0,5x}$	$F_{st1}(x_1)$	$F_{st2}(x_2)$
1	0,39347	11,80	15,74
2	0,63212	18,96	25,28
3	0,77687	23,31	31,07
4	0,86466	25,94	34,59

We bepalen eerst de minimale brandstofkosten als beide machines in bedrijf zijn:

$$\text{Min}_{V_1, V_2} [F_{BR_1}(V_1) + F_{BR_2}(V_2)]$$

Onder de voorwaarde dat  $V_1 + V_2 = V_T$  voor de gevraagde vermogens  $V_T = 20, 40$  en  $80$  MW. Zoals reeds in paragraaf 2.2 werd opgemerkt kunnen we de minimale brandstofkosten in bepaalde gevallen vinden als de incrementele kosten gelijk zijn:

$$\frac{dF_{BR_1}(V_1)}{dV_1} = \frac{dF_{BR_2}(V_2)}{dV_2}$$

Uit (5.30) en (5.31) vinden we dan dat:

$$V_2 = 15 \text{ M.W.}$$

Met behulp van (5.34) en (5.35) kunnen we nu de toegestane lastverdeling vinden die -zo mogelijk- correspondeert met minimale kosten, ofwel met  $V_2 = 15 \text{ MW}$  (zie tabel 5.4).

Vervolgens bepalen we voor alle toegestane combinaties van  $M_1$  en  $M_2$  de (minimale) brandstofkosten. Uit (5.35) volgt dat  $V_7 = 80 \text{ MW}$  slechts geleverd kan worden als beide machines in bedrijf zijn (zie tabel 5.5).

tabel 5.4			
Minimale brandstofkosten $M_1$ én $M_2$ in bedrijf			
$V_7$	$V_7$	$V_2$	$F_{BR_1}(V_7) + F_{BR_2}(V_2)$
20 MW	10 MW	10 MW	110
40 MW	25 MW	15 MW	148,75
80 MW	50 MW	30 MW	240

tabel 5.5			
Minimale brandstofkosten alle toegestane combinaties van $M_1$ en $M_2$			
	$M_1$ in bedrijf	$M_2$ in bedr.	$M_1$ én $M_2$ in bedr.
$V_7$	$F_{BR_1}(V_7)$	$F_{BR_2}(V_2)$	$F_{BR_1}(V_7) + F_{BR_2}(V_2)$
20 MW	80	70	110
40 MW	120	140	148,75
80 MW	-	-	240

Door alle toegestane strategieën te onderzoeken en de totale brandstof- en opstartkosten te berekenen zullen we nu de optimale strategie bepalen. Aangezien in de periode van  $k=2$  tot  $k=3$  beide machines in bedrijf moeten zijn ligt  $\underline{u}(2)$  vast:  $u_1(2) = u_2(2) = 0$ . Hieruit

volgt dat voor  $\underline{u}(3)$  alleen de brandstofkosten nog van belang zijn. Met behulp van tabel 5.5 kunnen we dan concluderen dat gedurende de laatste periode, waarin 40 MW geleverd moet worden, alleen  $M_1$  in bedrijf moet zijn.  $\underline{u}(0)$  en  $\underline{u}(1)$  kunnen nu nog vrij gekozen worden. Dit geeft 9 mogelijkheden die in tabel 5.6 worden nagegaan. De brandstofkosten ten gevolge van de beslissing  $\underline{u}(2)$  en de brandstof- en opstartkosten tengevolge van  $\underline{u}(3)$  behoeven niet in de beschouwing te worden opgenomen omdat deze voor alle negen strategieën gelijk zijn. Tabel 5.6 toont dat er één optimale strategie bestaat, waarvoor de kosten 229,05 bedragen.

tabel 5.6

Overzicht van toegestane strategieën met bijbehorende kosten

$$F_{BR}(\underline{u}(k)) = F_{BR}(k+1)$$

$$F_{ST}(\underline{u}(k), \underline{z}(k)) = F_{ST}(k+1)$$

$u_2(0)$	$u_1(0)$	$u_2(0)$	$F_{BR}(1)$	$F_{ST}(1)$	$x_1(1)$	$x_2(1)$	$u_1(1)$	$u_2(1)$	$F_{BR}(2)$	$F_{ST}(2)$	$x_1(2)$	$x_2(2)$	$F_{ST}(3)$	totaal $F_{BR} + F_{ST}$
0	0	0	110	18,96	0	0	0	0	148,75	-	0	0	-	277,71
0	0	0	110	18,96	0	0	0	1	120	-	0	1	15,74	264,70
0	0	0	110	18,96	0	0	1	0	140	-	1	0	11,80	280,76
0	1	0	70	-	3	0	0	0	148,75	23,31	0	0	-	242,06
0	1	0	70	-	3	0	0	1	120	23,31	0	1	15,74	229,05
0	1	0	70	-	3	0	1	0	140	-	4	0	25,94	235,94
0	0	1	80	18,96	0	1	0	0	148,75	15,74	0	0	-	263,45
0	0	1	80	18,96	0	1	0	1	120	-	0	2	25,28	244,24
0	0	1	80	18,96	0	1	1	0	140	15,74	1	0	11,80	266,50

In tabel 5.7 is deze optimale strategie en trajectorie nogmaals weergegeven.

table 5.7				
De optimale oplossing				
k	$x_1^*(k)$	$u_1^*(k)$	$x_2^*(k)$	$u_2^*(k)$
0	2	1	0	0
1	3	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1

Tenslotte zal onderzocht worden of de Hamiltoniaan maximaal is voor de gevonden optimale oplossing.

De differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele, (5.20), worden voor dit voorbeeld:

$$x_1(k+1) = u_1(k)x_1(k) + u_1(k) \quad (5.38)$$

$$x_2(k+1) = u_2(k)x_2(k) + u_2(k) \quad (5.39)$$

met als beginvoorwaarden:

$$x_1(0) = 2 \quad x_2(0) = 0$$

De differentievergelijkingen (5.27) voor de toegevoegde variabele worden:

$$p_1(k) = u_1(k)p_1(k+1) - 150[1-u_1(k)][1-e^{-0,5x_1(k)}]e^{-5[1-u_1(k)]x_1(k)} + \\ - 15[1-e^{-5[1-u_1(k)]x_1(k)}]e^{-0,5x_1(k)} \quad (5.40)$$

$$p_2(k) = u_2(k)p_2(k+1) - 200[1-u_2(k)][1-e^{-0,5x_2(k)}]e^{-5[1-u_2(k)]x_2(k)} + \\ - 20[1-e^{-5[1-u_2(k)]x_2(k)}]e^{-0,5x_2(k)} \quad (5.41)$$

met als eindvoorwaarden:

$$p_1(4) = p_2(4) = 0 \quad (5.42)$$

De Hamiltoniaan (5.29) krijgt de volgende vorm:

$$H(k) = p_1(k+1)[\{u_1(k)-1\}x_1(k) + u_1(k)] + p_2(k+1)[\{u_2(k)-1\}x_2(k) + u_2(k)] + \\ - 30[1-e^{-5[1-u_1(k)]x_1(k)}][1-e^{-0,5x_1(k)}] + \quad (5.43) \\ - 40[1-e^{-5[1-u_2(k)]x_2(k)}][1-e^{-0,5x_2(k)}] + \\ - \underset{u_1, u_2}{Min} [\{1-u_1(k)\}FBK_1(v_1) + \{1-u_2(k)\}FBK_2(v_2)]$$

Aangezien  $H(k)$  voor de optimale trajectorie een maximum moet bereiken als functie  $\underline{u}(k)$ , kunnen de termen van (5.43) die onafhankelijk zijn van  $\underline{u}(k)$  weggelaten worden. (5.43) gaat dan over in:

$$\begin{aligned}
 H^1(k) = & p_1(k+1)u_1(k)[x_1(k)+1] + p_2(k+1)u_2(k)[x_2(k+1)] + \\
 & + 30 e^{-5[1-u_1(k)]x_1(k)} [1 - e^{-0,5x_1(k)}] + \\
 & + 40 e^{-5[1-u_2(k)]x_2(k)} [1 - e^{-0,5x_2(k)}] + \\
 & - \text{Min}_{v_1, v_2} [\{1-u_1(k)\}FBR_1(v_1) + \{1-u_2(k)\}FBR_2(v_2)]
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Uit de differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele (5.40) en (5.41) kunnen we, met behulp van de gevonden optimale strategie en trajectorie uit tabel 5.7 en de eindvoorwaarden (5.42),  $\underline{p}^*(1)$ ,  $\underline{p}^*(2)$ , en  $\underline{p}^*(3)$  berekenen. De gevonden waarden zijn in tabel 5.8 opgenomen.

tabel 5.8		
de toegevoegde variabelen		
k	$p_1^*(k)$	$p_2^*(k)$
4	0	0
3	0	0
2	0	-12,58
1	-3,35	-12,58

$H^1(0)$  kan nu, met behulp van (5.44) en de tabellen 5.7 en 5.8 als volgt geschreven worden:

$$\begin{aligned}
 H^1(0) = & -10,05 u_1(0) - 12,58 u_2(0) + 10,96 e^{-10[1-u_1(0)]} + \\
 & - \text{Min}_{v_1, v_2} [\{1-u_1(0)\}FBR_1(v_1) + \{1-u_2(0)\}FBR_2(v_2)]
 \end{aligned}$$

Deze Hamiltoniaan moet voor alle toegestane  $\underline{u}(0)$  onderzocht worden. Dit is in tabel 5.9 gedaan. De minimale brandstofkosten zoeken we op in tabel 5.5 voor  $V_T = 20$  MW. We zien uit deze tabel dat de Hamiltoniaan maximaal is voor  $u_1(0)=1$ ,  $u_2(0)=0$ . Dit komt overeen met de eerder gevonden optimale strategie, zodat het maximum principe

voor  $k=0$  dus opgaat.

Vervolgens bepalen we  $H^1(1)$  als functie van  $\underline{u}(1)$  op dezelfde wijze:

$$H^1(\tau) = -12,58 u_2(\tau) + 23,31 e^{-15 [1-u_1(\tau)]} +$$

$$- \underset{u_1, u_2}{Min} \left[ \int_{V_1}^{1-u_1(\tau)} F_{BR_1}(V_1) + \int_{V_2}^{1-u_2(\tau)} F_{BR_2}(V_2) \right]$$

Weer rekenen we  $H^1(1)$  uit voor alle toegestane  $\underline{u}(1)$ .

Gedurende deze periode is  $V_T = 40$  MW. Uit tabel 5.9 zien we dat  $H^1(1)$  maximaal wordt voor  $u_1(1)=1$  en  $u_2(1)=0$ .

Dit is niet in overeenstemming met de optimale strategie van tabel 5.7. zodat het maximum principe niet klopt voor  $k=1$ . Dit is echter niet te verwonderen. In het vorige hoofdstuk hadden we deze verwachting immers al uitgesproken op grond van het feit dat de beslissingsvariabele slechts discrete waarden kan aannemen.

tabel 5.9					
$H^1(0)$ en $H^1(1)$ als functie van respectievelijk $\underline{u}(0)$ en $\underline{u}(1)$					
$u_1(0)$	$u_2(0)$	$H^1(0)$	$u_1(1)$	$u_2(1)$	$H^1(1)$
0	0	-110	0	0	-148,75
0	1	-92,58	0	1	-132,58
1	0	-61,09	1	0	-116,29

Bij het hier behandelde voorbeeld is de verzameling  $\mathcal{Q}$  afhankelijk van  $k$ , ofwel de toegestane  $\underline{u}(k)$  zijn een functie van  $k$ . Immers voor  $k=0,1,3$  zijn er drie mogelijke beslissingen, terwijl voor  $k=2$  slechts  $\underline{u}(2)=\underline{0}$  toegestaan is. Dit kan echter geen invloed hebben op het al dan niet maximaal worden van de Hamiltoniaan voor de optimale oplossing. We kunnen namelijk een zogenaamde penalty-functie invoeren zodanig dat een andere beslissing dan  $\underline{u}(2)=\underline{0}$  met zeer hoge brandstofkosten gepaard gaat. De optimale oplossing zal zich dan uitsluitend bedienen van de beslissing  $\underline{u}(2)=\underline{0}$ .

Met behulp van de in paragraaf 5.2 behandelde procedure kunnen we de trajectorie berekenen die de Hamiltoniaan op elk tijdstip maximaliseert. Dit blijkt de in tabel 5.10 gegeven oplossing te geven. Een nadere beschouwing van het verloop van deze trajectorie in tabel 5.6 roept de gedachte op dat het toepassen van het maximum principe bij dit voorbeeld resulteert in het nemen van die beslissingen die de momentane kosten minimaliseren voor  $k=1$  en  $k=2$ . Dit zou inhouden dat de toekomst, die via de toegevoegde variabele in de Hamiltoniaan komt, niet voldoende gerepresenteerd wordt. We zien ook uit tabel 5.8 dat de bijdrage van  $\underline{p}^*(k)$  in de Hamiltoniaan (5.44) relatief klein is.

tabel 5.10				
De oplossing die de Hamiltoniaan maximaliseert				
k	$x_1(k)$	$u_1(k)$	$x_2(k)$	$u_2(k)$
0	2	1	0	0
1	3	1	0	0
2	4	0	0	0
3	0	0	0	1
4	0		1	

Met name het feit dat  $\underline{p}_1^*(2)=0$  zou er de oorzaak van kunnen zijn dat de toekomst in  $H^1(1)$  te weinig aan bod komt. Het vele nul worden van  $\underline{p}^*(k)$  kan worden opgeheven door de opstartkosten voor  $k=0$  een bepaalde aanvangswaarde te geven. Vanwege de term die voor de opstartkosten staat:

$$\frac{-a[1-u_i(k)]x_i(k)}{1-e}$$

is hier uiteraard in de praktijk geen bezwaar tegen. Voor de toepassing van het maximum principe maakt dit wel verschil omdat in de differentievergelijking voor de toegevoegde variabele (5.27) ook de afgeleide van deze term gebruikt moet worden.

Stel dat de opstartkosten zijn:

$$F_{sT_1}(\alpha_1) = 30 [1 - e^{-0,5\alpha_1}] + 1 \quad (5.45)$$

$$F_{sT_2}(\alpha_2) = 40 [1 - e^{-0,5\alpha_2}] + 1 \quad (5.46)$$

Als we verder uitgaan van dezelfde gegevens dan verandert de in tabel 5.7 gegeven optimale oplossing niet voor dit enigszins gewijzigde probleem.

De differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabelen veranderen wel:

$$p_1(k) = u_1(k)p_1(k+1) - 5 [1 - u_1(k)] [30 \{1 - e^{-0,5\alpha_1(k)}\} + 1] e^{-5[1 - u_1(k)]\alpha_1(k)} + \\ - 15 [1 - e^{-5[1 - u_1(k)]\alpha_1(k)}] e^{-0,5\alpha_1(k)} \quad (5.47)$$

$$p_2(k) = u_2(k)p_2(k+1) - 5 [1 - u_2(k)] [40 \{1 - e^{-0,5\alpha_2(k)}\} + 1] e^{-5[1 - u_2(k)]\alpha_2(k)} + \\ - 20 [1 - e^{-5[1 - u_2(k)]\alpha_2(k)}] e^{-0,5\alpha_2(k)} \quad (5.48)$$

In tabel 5.11 staan de nieuwe waarden voor  $p^*(k)$  die met behulp van tabel 5.7 en de eindvoorwaarden (5.42) gevonden worden.

Uiteraard ondergaat de Hamiltoniaan ook enige wijzigingen:

$$H^1(k) = p_1(k+1)u_1(k)[\alpha_1(k)+1] + p_2(k+1)u_2(k)[\alpha_2(k)+1] + \\ + e^{-5[1 - u_1(k)]\alpha_1(k)} [30 \{1 - e^{-0,5\alpha_1(k)}\} + 1] + \\ + e^{-5[1 - u_2(k)]\alpha_2(k)} [40 \{1 - e^{-0,5\alpha_2(k)}\} + 1] + \\ - \underset{v_1, v_2}{\text{Min}} [\{1 - u_1(k)\} F_{BR_1}(v_1) + \{1 - u_2(k)\} F_{BR_2}(v_2)] \quad (5.49)$$



tabel 5.11		
toegevoegde variabelen voor het gewijzigde voorbeeld		
k	$p_1^*(k)$	$p_2^*(k)$
4	0	0
3	-5	0
2	-5	-12,61
1	-3,35	-12,61

tabel 5.12					
H <sup>1</sup> (0) en H <sup>1</sup> (1) als functie van $\underline{u}(0)$ en $\underline{u}(1)$ voor het gewijzigde voorbeeld					
$u_1(0)$	$u_2(0)$	$H^1(0)$	$u_1(1)$	$u_2(1)$	$H^1(1)$
0	0	-110	0	0	-148,75
0	1	-92,61	0	1	-132,61
1	0	-60,09	1	0	-135,69

We berekenen nu weer, met behulp van de tabellen 5.7 en 5.11, H<sup>1</sup>(0) en H<sup>1</sup>(1) als functie van  $\underline{u}(0)$  en  $\underline{u}(1)$ :

$$H^1(0) = -10,05 u_1(0) - 12,67 u_2(0) + 19,96 e^{-10[1-u_1(0)]} +$$

$$- \text{Min}_{v_1, v_2} [ \{1-u_1(0)\} FBR_1(v_1) + \{1-u_2(0)\} FBR_2(v_2) ]$$

$$H^1(1) = -20 u_1(1) - 12,67 u_2(1) + 24,37 e^{-15[1-u_1(1)]} +$$

$$- \text{Min}_{v_1, v_2} [ \{1-u_1(1)\} FBR_1(v_1) + \{1-u_2(1)\} FBR_2(v_2) ]$$

In tabel 5.12 staan de waarden voor  $H^1(0)$  en  $H^1(1)$  voor alle toegestane  $\underline{u}(0)$  en  $\underline{u}(1)$ . Uit deze tabel blijkt dat de Hamiltoniaan maximaal wordt voor dezelfde beslissingen als in tabel 5.7, waarin de gevonden optimale strategie staat. Voor dit gewijzigde voorbeeld gaat het maximum principe dus wel op. De toekomst heeft nu voldoende invloed in de Hamiltoniaan gekregen via de toegevoegde variabelen.

Het blijkt dat ook in andere gevallen dezelfde situatie als hierboven beschreven, optreedt.

Voor een probleem waarbij de brandstofkosten gegeven worden door:

$$FBR_1(V_1) = 2V_1 + 40 \qquad FBR_2(V_2) = 3V_2 + 10$$

en de opstartkosten door:

$$FST_1(x_1) = 30 [1 - e^{-0,5x_1}] \qquad FST_2(x_2) = 40 [1 - e^{-0,5x_2}]$$

dus dezelfde opstartkosten als (5.32) en (5.33), zonder aanvangswaarde voor  $\underline{x}=0$ , blijkt de Hamiltoniaan voor  $k=0$  en  $k=1$  wel maximaal te worden voor de optimale strategie. Een nadere beschouwing leert echter dat de optimale trajectorie in dit geval juist overeenkomt met momentane minimale kosten op de tijdstippen  $k=0$  en  $k=1$ , zodat de toekomstige kosten niet meer belangrijk zijn.

Met het volgende voorbeeld is dit niet het geval. Stel de brandstofkosten zijn dezelfde als (5.30) en (5.31):

$$FBR_1(V_1) = 2V_1 + 40 \qquad FBR_2(V_2) = 0,05V_2^2 + 0,5V_2 + 40$$

terwijl de opstartkosten zijn:

$$FST_1(x_1) = 8x_1 \qquad FST_2(x_2) = 10x_2$$

Hier geldt dus weer dat  $FST_1(0) = FST_2(0) = 0$ . Het maximum principe blijkt hier niet op te gaan. Nemen we nu de opstartkosten als volgt:

$$FST_1(x_1) = 8x_1 + 1 \qquad FST_2(x_2) = 10x_2 + 1$$

dan is de Hamiltoniaan wel maximaal voor de optimale strategie. De reden is weer dat de gewijzigde variabelen voor meer invloed zorgen in de Hamiltoniaan.

We hebben gezien dat in het algemeen het maximum principe bij dit model geen goede resultaten <sup>geeft.</sup> In de enkele onderzochte voorbeelden hebben we enige systematiek ondekt in het al dan niet opgaan van het maximum principe. De verklaring hiervoor zullen we helaas schuldig blijven.

5.4. Het discontinue discrete model met "geheugen"-detectie van opstartkosten

5.4.1. Inleiding

Bij dit model gaan we voorlopig uit van dezelfde toestands- en beslissingsvariabelen als in sectie 5.3.1. De differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele zijn dus:

$$x_i(k+1) - x_i(k) = [u_i(k) - 1]x_i(k) + u_i(k)\Delta t \quad (5.50)$$

$$x_i(0) = a_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

In de vorige paragraaf werd de discontinue detectiefunctie  $Q_i$  voor de opstartkosten continu gemaakt met behulp van een e-macht. Hier zal het discontinue karakter van  $Q_i$  gehandhaafd blijven door gebruik te maken van beslissingen op twee opeenvolgende tijdstippen. De differentievergelijkingen, die hierdoor van de 2<sup>e</sup> orde worden, kunnen met behulp van een methode die door Katz<sup>8)</sup> aangegeven werd, teruggebracht worden tot vergelijkingen van de 1<sup>e</sup> orde.

5.4.2. De opstartkosten

Zoals in sectie 5.3.3. reeds werd besproken kunnen de opstartkosten tengevolge van een beslissing  $u(k)$  als volgt geschreven worden:

$$F_{ST}(u(k), x(k)) = F_{ST}(u(k), u(k-1)) = \sum_{i=1}^n Q_i F_{ST_i}(x_i(k))$$

waarbij  $Q_i$  een functie is van  $u_i(k)$  en  $x_i(k)$  of van  $u_i(k)$  en  $u_i(k-1)$  en gedefinieerd is als:

$$Q_i = 0 \text{ als } M_i \text{ niet gestart wordt}$$

$$Q_i = 1 \text{ als } M_i \text{ gestart wordt.}$$

De uitdrukking

$$u_i(k-1)[1 - u_i(k)] \quad (5.51)$$

representeert op juiste wijze de functie  $Q_1$ . Het is duidelijk dat de differentievergelijking voor de kosten bij gebruik van (5.51) een 2<sup>e</sup> orde karakter krijgt. Dit kunnen we vermijden door n nieuwe variabelen in te voeren,  $y_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , die als volgt gedefinieerd zijn:

$$y_i(k) = u_i(k-1) \quad (5.52)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

terwijl er tevens n nieuwe beslissingsvariabelen,  $\theta_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  ingevoerd worden:

$$\theta_i(k) = u_i(k) - u_i(k-1) \quad (5.53)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

Uit (5.52) en (5.53) volgt dat:

$$u_i(k) = \theta_i(k) + y_i(k) \quad (5.54)$$

zodat de opstartkosten tengevolge van een beslissing  $\underline{u}(k)$  worden:

$$F_{ST}(\underline{x}(k), \underline{\theta}(k), \underline{y}(k)) = \sum_{i=1}^n y_i(k) [1 - \theta_i(k) - y_i(k)] F_{ST_i}(x_i(k)) \quad (5.55)$$

### 5.4.3. De brandstofkosten

In sectie 5.3.2. werden de brandstofkosten door (5.9) en (5.10) als volgt voorgesteld:

$$F_{BR}(\underline{u}(k)) = \text{Min}_{v_1, \dots, v_n} \sum_{i=1}^n [1 - u_i(k)] F_{BR_i}(v_i(k+1)) \Delta t \quad (5.56)$$

met de restrictie:

$$\sum_{i=1}^n v_i(k+1) = V_T(k+1) \quad (5.57)$$

Nu we overgegaan zijn op nieuwe beslissingsvariabelen en het aantal toestandsvariabelen hebben uitgebreid zal de uitdrukking voor de brandstofkosten ook veranderd moeten worden. Invullen van (5.54) in (5.56) levert:

$$F_{BR}(\underline{\theta}(k), \underline{y}(k)) = \text{Min}_{v_1, \dots, v_n} \sum_{i=1}^n [1 - \theta_i(k) - y_i(k)] F_{BR_i}(v_i(k+1)) \Delta t \quad (5.58)$$

5.4.4. De differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele

Met behulp van de betrekkingen (5.52) en (5.53) is het mogelijk de differentievergelijkingen voor de y-variabelen als volgt te schrijven:

$$y_i(k+1) - y_i(k) = u_i(k) - u_i(k-1) = \theta_i(k) \quad (5.59)$$

$$y_i(0) = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ook de totale kosten moeten weer in een differentievergelijking worden uitgedrukt. De afleiding hiervan gaat analoog aan die in sectie 5.3.4. Als  $y_{n+1}(N)$  de totale kosten zijn van  $k=0$  tot  $k=N$  dan wordt de differentievergelijking:

$$y_{n+1}(k+1) - y_{n+1}(k) = F_T(\underline{x}(k), \underline{\theta}(k), \underline{y}(k)) \quad (5.60)$$

met

$$F_T(\underline{x}(k), \underline{\theta}(k), \underline{y}(k)) = F_{ST}(\underline{x}(k), \underline{\theta}(k), \underline{y}(k)) + F_{BR}(\underline{\theta}(k), \underline{y}(k)) \quad (5.61)$$

Vergelijking (5.60) kan nader worden uitgewerkt met behulp van (5.61), (5.58) en (5.55).

Ook de oorspronkelijke differentievergelijkingen (5.50) ondergaan natuurlijk een wijziging door het substitueren van (5.54) in (5.50).

Als we nu stellen dat

$$y_i = x_{2n+i} \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

dan wordt tenslotte het volledige stelsel van differentievergelijkingen voor de  $2n+1$  componenten van de toestandsvaariabele:

$$x_i(k+1) - x_i(k) = [\theta_i(k) + x_{n+i}(k) - 1]x_i(k) + [\theta_i(k) + x_{n+i}(k)]\Delta t \quad (5.62)$$

$$x_{n+i}(k+1) - x_{n+i}(k) = \theta_i(k)$$

$$x_{2n+1}(k+1) - x_{2n+1}(k) = \underset{v_1 \dots v_n}{\text{Min}} \sum_{i=1}^n [1 - \theta_i(k) - x_{n+i}(k)] F_{\theta \kappa_i}(v_i(k+1))\Delta t + \sum_{i=1}^n x_{n+i}(k) [1 - \theta_i(k) - x_{n+i}(k)] F_{ST_i}(x_i(k)) \quad (5.63)$$

met als beginvoorwaarden

$$x_i(0) = a_i$$

$$x_{n+i}(0) = b_i$$

$$x_{2n+1}(0) = 0$$

voor  $i = 1, 2, \dots, n$

Er bestaat een zekere relatie tussen  $a_i$  en  $b_i$ :  
als  $a_i = 0$  dan  $b_i = 0$   
als  $a_i > 0$  dan  $b_i = 1$ .

#### 5.4.5. De Hamiltoniaan

Op dezelfde wijze als in paragraaf 5.3.5. vinden we ook hier dat  $p_{2n+1}(k) = -1$  voor  $k = 0, 1, \dots, N$ . De Hamiltoniaan, gedefinieerd volgens (5.28), kunnen we dan schrijven als:

$$H(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k+1) [\{\theta_i(k) + x_{n+i}(k) - 1\}x_i(k) + \{\theta_i(k) + x_{n+i}(k)\}\Delta t] + \sum_{i=1}^n p_{n+i}(k+1)\theta_i(k) - \underset{v_1 \dots v_n}{\text{Min}} \sum_{i=1}^n [1 - \theta_i(k) - x_{n+i}(k)] F_{\theta \kappa_i}(v_i(k+1))\Delta t + \sum_{i=1}^n x_{n+i}(k) [1 - \theta_i(k) - x_{n+i}(k)] F_{ST_i}(x_i(k)) \quad (5.64)$$

5.4.6. De differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele

Met behulp van (5.3) bepalen we de differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele:

$$p_i(k) - p_i(k+1) = p_i(k+1) [\theta_i(k) + x_{n+i}(k) - 1] + x_{n+i}(k) [1 - \theta_i(k) - x_{n+i}(k)] \left. \frac{dF_{ST_i}(x_i)}{dx_i} \right|_{x_i=x_i(k)} \quad (5.65)$$

$$P_{n+i}(k) - P_{n+i}(k+1) = p_i(k+1) [x_i(k) + \Delta t] + - \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \left[ \text{Min}_{v_1, \dots, v_n} \sum_{j=1}^n \{1 - \theta_j(k) - x_{n+j}\} F_{BR_j}(v_j(k+1)) \Delta t \right]_{x_{n+i}=x_{n+i}(k)} + (5.66) - [1 - \theta_i(k) - 2x_{n+i}(k)] F_{ST_i}(x_i(k))$$

We hebben in het voorgaande bij het differentiëren steeds het voorwaartse differentiequotient genomen, zoals eenvoudig te verifiëren is. Dit doen we ook om de term

$$\frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \left[ \text{Min}_{v_1, \dots, v_n} \sum_{j=1}^n \{1 - \theta_j(k) - x_{n+j}\} F_{BR_j}(v_j(k+1)) \Delta t \right]_{x_{n+i}=x_{n+i}(k)} \quad (5.67)$$

te bepalen. We nemen als voorbeeld twee machines,  $M_1$  en  $M_2$ , en we zullen het voorwaartse differentiequotient naar  $x_3$  berekenen voor  $\Delta t=1$ . Substitueren we voor  $x_3$  achtereenvolgens 1 en 0 (de enige waarden die  $x_3$  kan aannemen) in (5.67) en trekken we dit van elkaar af, dan vinden we:

$$\text{Min}_{v_1, v_2} [-\theta_1(k) F_{BR_1}(v_1(k+1)) + \{1 - \theta_2(k) - x_4(k)\} F_{BR_2}(v_2(k+1))] + - \text{Min}_{v_1, v_2} [\{1 - \theta_1(k)\} F_{BR_1}(v_1(k+1)) + \{1 - \theta_2(k) - x_4(k)\} F_{BR_2}(v_2(k+1))] \quad (5.68)$$

$\theta_i(k)$  kan in principe de waarden -1, 0 en + 1 aannemen. Vanwege de keuze voor  $x_j(k)$  is de enige zinvolle waarde voor  $\theta_i(k)$  :  $\theta_i(k)=0$ , zodat (5.68) overgaat in:



$$\begin{aligned} & \underset{V_1, V_2}{\text{Min}} \left[ \{1 - \theta_2(k) - x_y(k)\} F_{BR_2}(V_2(k+1)) \right] + \\ & - \underset{V_1, V_2}{\text{Min}} \left[ F_{BR_1}(V_1(k+1)) + \{1 - \theta_2(k) - x_y(k)\} F_{BR_2}(V_2(k+1)) \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

Hoewel in de eerste term de minimalisering natuurlijk geen zin meer heeft veranderen we de schrijfwijze toch niet. Bij uitbreiding van het aantal machines moet er wel geminimaliseerd worden. Tevens worden we er aan herinnerd wat de eigenlijke betekenis is van deze term, namelijk de brandstofkosten van  $M_2$  als het gehele gevraagde vermogen  $V_T(k+1)$  door  $M_2$  wordt geleverd (indien tenminste  $\theta_2(k) + x_y(k) = 0$ ).

Zo betekent de tweede term van (5.69) de minimalisering van de brandstofkosten als  $M_1$  en eventueel  $M_2$  in bedrijf zijn. (5.69) kan natuurlijk worden uitgebreid voor  $n$  machines, zodat in het algemeen geldt dat:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_{ni}} \left[ \underset{V_1 \dots V_n}{\text{Min}} \sum_{j=1}^n \{1 - \theta_j(k) - x_{nj}\} F_{BR_j}(V_j(k+1)) \Delta t \right] x_{ni} = x_{ni}(k) = \\ & \underset{V_1 \dots V_{i-1}, V_{i+1} \dots V_n}{\text{Min}} \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{1 - \theta_j(k) - x_{nj}(k)\} F_{BR_j}(V_j(k+1)) \right] + \\ & - \underset{V_1 \dots V_n}{\text{Min}} \left[ F_{BR_i}(V_i(k+1)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{1 - \theta_j(k) - x_{nj}(k)\} F_{BR_j}(V_j(k+1)) \right] \end{aligned} \quad (5.70)$$

De eindvoorwaarden voor de toegevoegde variabelen zijn natuurlijk:

$$p_i(N) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

#### 5.4.7. Voorbeeld

We zullen nu aan de hand van het voorbeeld van paragraaf 5.3 gaan onderzoeken of het maximum principe klopt. Tabel 5.7 toont de optimale oplossing voor dit voorbeeld. Met behulp van (5.52) en (5.53), waarbij  $y_i(k) = x_{ni}(k)$  kunnen we deze optimale oplossing herleiden tot de in dit model gebruikte beslissings- en toestandsvariabelen. Zoals in sectie 5.4.4. al opgemerkt is volgt uit de beginvoorwaarden  $x_{1/0} = 2$ ,  $x_{2/0} = 0$  dat

$x_3(0) = 1$  en  $x_4(0) = 0$ , ofwel dat  $u_1(-1) = 1$  en  $u_2(-1) = 0$   
 In tabel 5.12 is de optimale oplossing gegeven.

tabel 5.12								
De optimale oplossing								
k	$u_1^*(k)$	$u_2^*(k)$	$\theta_1^*(k)$	$\theta_2^*(k)$	$x_1^*(k)$	$x_2^*(k)$	$x_3^*(k)$	$x_4^*(k)$
-1	1	0						
0	1	0	0	0	2	0	1	0
1	0	1	-1	1	3	0	1	0
2	0	0	0	-1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0	0	0	0
4					0	1	0	1

De differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele, (5.65) en (5.66), kunnen we voor dit voorbeeld als volgt schrijven:

$$p_1(k) = p_1(k+1) [\theta_1(k) + x_3(k)] - 15 x_3(k) [1 - \theta_1(k) - x_3(k)] e^{-0.5 x_1(k)}$$

$$p_2(k) = p_2(k+1) [\theta_2(k) + x_4(k)] - 20 x_4(k) [1 - \theta_2(k) - x_4(k)] e^{-0.5 x_2(k)}$$

$$p_3(k) = p_3(k+1) + p_3(k+1) [x_1(k) + 1] - \text{Min}_{v_1, v_2} [\{1 - \theta_1(k) - x_4(k)\} \text{Foe}_{v_2}(v_2)] +$$

$$+ \text{Min}_{v_1, v_2} [\text{Foe}_{v_1}(v_1) + \{1 - \theta_2(k) - x_4(k)\} \text{Foe}_{v_2}(v_2)] + \quad (5.71)$$

$$- 30 [1 - \theta_1(k) - 2x_3(k)] [1 - e^{-0.5 x_1(k)}]$$

$$p_4(k) = p_4(k+1) + p_4(k+1) [x_2(k) + 1] - \text{Min}_{v_1, v_2} [\{1 - \theta_1(k) - x_3(k)\} \text{Foe}_{v_1}(v_1)] +$$

$$+ \text{Min}_{v_1, v_2} [\{1 - \theta_2(k) - x_3(k)\} \text{Foe}_{v_1}(v_1) + \text{Foe}_{v_2}(v_2)] +$$

$$- 40 [1 - \theta_2(k) - 2x_4(k)] [1 - e^{-0.5 x_2(k)}]$$

In deze vergelijkingen komen termen voor van de vorm:

$$\underset{V_1, V_2}{\text{Min}} \left[ \{1 - \theta_i(k) - x_{2+i}(k)\} FBR_i(V_i) \right] \quad i=1,2$$

Over de betekenis hiervan is reeds gesproken. Aangezien echter  $V_1^{max} = V_2^{max} = 50 \text{ MW}$  is het niet mogelijk dat één machine 80 MW kan leveren. Dit probleem zullen we omzeilen door de brandstofkosten in dit geval zeer hoog te maken, bijvoorbeeld:  $FBR_1(80) = FBR_2(80) = 300$   
 We kunnen nu met behulp van de tabellen 5.12 en 5.5 de toegevoegde variabelen berekenen (zie tabel 5.13).

tabel 5.13				
de toegevoegde variabelen				
k	$p_1^*(k)$	$p_2^*(k)$	$p_3^*(k)$	$p_4^*(k)$
4	0	0	0	0
3	0	0	120,00	28,75
2	0	-12,13	60,00	-31,25
1	-3,35	-12,13	180,00	-14,63

De Hamiltoniaan, (5.64), kan voor dit voorbeeld als volgt geschreven worden:

$$\begin{aligned} H(k) = & p_1(k+1) [\{ \theta_1(k) + x_3(k) - 1 \} x_1(k) + \{ \theta_1(k) + x_3(k) \}] + \\ & + p_2(k+1) [\{ \theta_2(k) + x_4(k) - 1 \} x_2(k) + \{ \theta_2(k) + x_4(k) \}] + \\ & + p_3(k+1) \theta_1(k) + p_4(k+1) \theta_2(k) + \\ & - \underset{V_1, V_2}{\text{Min}} [ \{ 1 - \theta_1(k) - x_3(k) \} FBR_1(V_1) + \{ 1 - \theta_2(k) - x_4(k) \} FBR_2(V_2) ] + \\ & - x_3(k) [ 1 - \theta_1(k) - x_3(k) ] FST_1(x_1(k)) - x_4(k) [ 1 - \theta_2(k) - x_4(k) ] FST_2(x_2(k)) \end{aligned}$$

Voor het maximaliseren van de Hamiltoniaan zijn alleen die termen van belang die afhankelijk zijn van  $\underline{\theta}(k)$ . Noemen we deze termen  $H^*(k)$  dan geldt, indien we tevens de opstartkosten (5.32) en (5.33) invullen:

$$\begin{aligned}
 H^*(k) = & p_1(k+1)\theta_1(k)[x_1(k)+1] + p_2(k+1)\theta_2(k)[x_2(k)+1] + p_3(k+1)\theta_1(k) + \\
 & + p_4(k+1)\theta_2(k) + 30x_3(k)\theta_1(k)[1-e^{-0.95x_1(k)}] + \\
 & + 40x_4(k)\theta_2(k)[1-e^{-0.95x_2(k)}] + \\
 & - \underset{v_1, v_2}{\text{Min}} \left[ \{1-\theta_1(k)-x_3(k)\} F_{BR_1}(v_1) + \{1-\theta_2(k)-x_4(k)\} F_{BR_2}(v_2) \right] \quad (5.72)
 \end{aligned}$$

$H^*(0)$  kan nu als functie van  $\underline{\theta}(0)$  met behulp van de tabellen 5.12 en 5.13 bepaald worden:

$$H^*(0) = 188,91\theta_1(0) - 26,76\theta_2(0) - \underset{v_1, v_2}{\text{Min}} \left[ -\theta_1(0) F_{BR_1}(v_1) + \{1-\theta_2(0)\} F_{BR_2}(v_2) \right]$$

In tabel 5.14 is de waarde van  $H^*(0)$  onderzocht voor alle toegestane  $\underline{\theta}(0)$ . Hier kunnen slechts die  $\underline{\theta}(0)$  toegestaan worden die  $x_1$  en  $x_2$  niet negatief maken. De minimale brandstofkosten worden uiteraard weer gevonden in tabel 5.5 voor  $V_T(1) = 20$  MW.

Voor  $H^*(1)$  als functie van  $\underline{\theta}(1)$  vinden we op dezelfde wijze:

$$H^*(1) = 83,31\theta_1(1) - 43,38\theta_2(1) - \underset{v_1, v_2}{\text{Min}} \left[ -\theta_1(1) F_{BR_1}(v_1) + \{1-\theta_2(1)\} F_{BR_2}(v_2) \right]$$

Voor alle toegestane  $\underline{\theta}(1)$  is  $H^*(1)$  weer onderzocht in tabel 5.14. Het maximum van  $H^*(0)$  blijkt overeen te komen met  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$  hetgeen klopt met de optimale oplossing van tabel 5.12. Het maximum van  $H^*(1)$  treedt eveneens op voor  $\theta_1(1) = \theta_2(1) = 0$ , en dit is in tegenstelling met de

tabel 5.14					
$H^*(0)$ en $H^*(1)$ als functie van respectievelijk $\underline{\theta}(0)$ en $\underline{\theta}(1)$					
$\theta_1(0)$	$\theta_2(0)$	$H^*(0)$	$\theta_1(1)$	$\theta_2(1)$	$H^*(1)$
-1	1	-295,67	-1	1	-246,69
-1	0	-298,91	-1	0	-232,06
0	0	<u>-70,00</u>	0	0	<u>-140,00</u>

optimale strategie:  $\theta_1^*(1) = -1$ ,  $\theta_2^*(1) = 1$ . Het maximum principe blijkt dus niet op te gaan.

Met dit model zijn een aantal moeilijkheden geïntroduceerd die zonder twijfel mede oorzaak zijn geweest van het falen van het maximum principe.

De belangrijkste moeilijkheid is wel dat de toegestane  $\theta_i(k)$  niet alleen afhankelijk kunnen zijn van de tijd (zoals in de vorige paragraaf met  $u_1(k)$  het geval was) maar ook van  $x_{n+i}(k)$ . Er geldt immers dat

$$x_{n+i}(k) = u_i(k-1)$$

zodat  $x_{n+i}(k)$  alleen de waarden 0 en 1 kan aannemen. Hierdoor wordt de toegestane  $\theta_i(k)$  eveneens vastgelegd:

$$\theta_i(k) = x_{n+i}(k+1) - x_{n+i}(k)$$

Indien bijvoorbeeld  $x_{n+i}(k) = 0$  dan moet  $\theta_i(k) \neq -1$ . Hieruit volgt dat, afgezien van de discrete beslissingsvariabele, het maximum principe niet toegepast kan worden omdat er bij de theorie steeds van uitgegaan werd dat de toestandsvariabelen niet aan restricties gebonden mogen zijn.

Een andere moeilijkheid, de berekening van (5.67), zou eventueel omzeild kunnen worden door de kostenfunctie zodanig te maken dat  $F_{\theta_i}(0) = 0$ , zodat de detectie term voor de brandstofkosten kan verdwijnen.

## 5.5. Het discontinue discrete model met cumulatieve opstartkosten

### 5.5.1. Inleiding

We gaan weer uit van dezelfde toestands- en beslissingsvariabelen als in sectie 5.3.1., zodat de differentievergelijking voor de toestandsvariabele luidt:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) - x_i(k) &= [u_i(k) - 1] x_i(k) + u_i(k) \Delta t \\ x_i(0) &= a_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5.73)$$

Bij de in de vorige paragrafen beschreven methoden voor detectie van opstartkosten werden deze kosten pas in rekening gebracht als de machine werkelijk startte. Hier zullen deze opstartkosten cumulatief berekend worden. Elke keer als  $u_i(k)=1$  worden de opstartkosten verhoogd met een bedrag dat van  $x_i(k)$  afhangt.

Het verschil met voorgaande methoden blijkt duidelijk als we naar het laatste tijdstip,  $k=N$ , kijken. Mochten er op dit tijdstip machines buiten bedrijf zijn dan worden bij dit model opstartkosten in rekening gebracht die aangeven wat het eventuele starten op het tijdstip  $N$  zou kosten. Bij de vorige modellen zouden de eventueel nog te maken opstartkosten niet meegerekend worden omdat het niet bekend is of er werkelijk opgestart wordt. Aangezien een elektrische centrale continu werkt, en we dus slechts over een beperkte tijd kunnen optimaliseren, komt dit model meer overeen met de werkelijkheid dan het voorgaande.

### 5.5.2. De opstartkosten

De opstartkosten van  $M_i$  op het tijdstip  $k$ :

$$F_{ST_i}(k) = F_{ST_i}(x_i(k), u_i(k)) \quad (5.74)$$

schrijven we op als differentievergelijking:

$$F_{ST_i}(k+1) - F_{ST_i}(k) = f_i(x_i(k), u_i(k)) \quad (5.75)$$

We kunnen voor  $f_i(x_i(k), u_i(k))$  bijvoorbeeld nemen:

$$f_i(x_i(k), u_i(k)) = q u_i(k) e^{-r x_i(k)} \quad (5.76)$$

waarbij  $q$  en  $r$  nog te kiezen constanten zijn

De differentievergelijking voor de totale opstartkosten van  $n$  machines luidt:

$$F_{ST}(k+1) - F_{ST}(k) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i(k), u_i(k)) \quad (5.77)$$

### 5.5.3. De brandstofkosten

Voor de brandstofkosten gebruiken we weer de uitdrukking (5.9):

$$F_{BR}(\underline{u}(k)) = \underset{v_1 \dots v_n}{\text{Min}} \sum_{i=1}^n [1-u_i(k)] F_{BR_i}(v_i(k+1)) \Delta t \quad (5.78)$$

met de restrictie:

$$\sum_{i=1}^n v_i(k+1) = v_T(k+1) \quad (5.79)$$

Noemen we de totale brandstofkosten tengevolge van de beslissingen  $\underline{u}(0)$ ,  $\underline{u}(1)$ , ...,  $\underline{u}(k-1)$ :  $F_{BR}(\underline{u}, k)$  dan geldt dus dat:

$$F_{BR}(\underline{u}, k) = \sum_{j=0}^{k-1} F_{BR}(\underline{u}(j)) \quad (5.80)$$

we kunnen nu de volgende differentievergelijking voor de kosten opschrijven:

$$F_{BR}(\underline{u}, k+1) - F_{BR}(\underline{u}, k) = F_{BR}(\underline{u}(k)) \quad (5.81)$$

Stellen we:

$$F_{BR}(\underline{u}, k) = F_{BR}(k) \quad (5.82)$$

dan gaat (5.81) met behulp van (5.78) over in:

$$F_{BR}(k+1) - F_{BR}(k) = \underset{v_1 \dots v_n}{\text{Min}} \sum_{i=1}^n [1-u_i(k)] F_{BR_i}(v_i(k+1)) \Delta t \quad (5.83)$$

### 5.5.4. De differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele

Uit (5.77) en (5.83) volgt dat de differentievergelijking voor de totale kosten wordt:

$$F_T(k+1) - F_T(k) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i(k), u_i(k)) + \underset{v_1 \dots v_n}{\text{Min}} \sum_{i=1}^n [1-u_i(k)] F_{BR_i}(v_i(k+1)) \Delta t \quad (5.84)$$

Noemen we

$$F_T(k) = x_{n+1}(k) \quad (5.85)$$

dan volgt uit (5.73), (5.84) en (5.85) het stelsel differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) - x_i(k) &= [u_i(k) - 1] x_i(k) + u_i(k) \Delta t \\ x_{n+i}(k+1) - x_{n+i}(k) &= \sum_{i=1}^n f_i(x_i(k), u_i(k)) + \\ &+ \text{Min}_{V_1, \dots, V_n} \sum_{i=1}^n [1 - u_i(k)] F_{\text{opt}_i}(V_i(k+1)) \Delta t \end{aligned} \quad (5.68)$$

$i = 1, 2, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots, N-1$

met als beginvoorwaarden:

$$x_i(0) = a_i \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (5.87)$$

Hierbij geldt dat

$$a_{n+1} = F_{ST}(0)$$

en vanwege de cumulatieve beschrijving van de opstartkosten zal in het geval dat één of meer  $a_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  gelden dat  $a_{n+1} > 0$ .

### 5.5.5. De differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele

Passen we (5.3) toe op (5.86) dan kunnen de differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele worden bepaald. Het is eenvoudig te verifiëren dat ook hier weer geldt dat:

$$p_{n+1}(k) = -1 \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (5.88)$$

zodat de vergelijkingen worden:

$$p_i(k) - p_i(k+1) = p_i(k+1) [u_i(k) - 1] - \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(x_i, u_i(k))]_{x_i = x_i(k)} \quad (5.89)$$

$i = 1, 2, \dots, n$



**5.5.6. De Hamiltoniaan**

De Hamiltoniaan, gedefinieerd volgens (5.28), wordt met behulp van (5.86) en (5.88):

$$H(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k+1) [\{u_i(k)-1\}x_i(k) + u_i(k)\Delta t] + \quad (5.90)$$

$$- \sum_{i=1}^n f_i(x_i(k), u_i(k)) - \text{Min}_{V_1, \dots, V_n} \sum_{i=1}^n [1-u_i(k)] FBR_i(V_i(k+1))\Delta t$$

**5.5.7. Voorbeeld**

Het voorbeeld dat nu behandeld zal worden wijkt wat de brandstof- en opstartkosten betreft af van het in de secties 5.3.7 en 5.4.7. behandelde voorbeeld.

Voor de brandstofkosten per uur nemen we:

$$FBR_1(V_1) = 2V_1 + 40 \quad (5.91)$$

$$FBR_2(V_2) = 0,05V_2^2 + 0,5V_2 + 55 \quad (5.92)$$

terwijl de opstartkosten worden de beschreven door de functies:

$$f_1(x_1(k), u_1(k)) = 23u_1(k)e^{-0,5x_1(k)} \quad (5.93)$$

$$f_2(x_2(k), u_2(k)) = 25u_2(k)e^{-0,5x_2(k)} \quad (5.94)$$

De differentievergelijkingen voor de opstartkosten luiden dan:

$$F_{ST_1}(k+1) = F_{ST_1}(k) + 23u_1(k)e^{-0,5x_1(k)} \quad (5.95)$$

$$F_{ST_2}(k+1) = F_{ST_2}(k) + 25u_2(k)e^{-0,5x_2(k)} \quad (5.96)$$

Figuur 5.4 toont het verloop van de brandstofkosten. Figuur 5.5 en tabel 5.15 laten de opstartkosten zien indien de machines op een bepaald moment buiten bedrijf gesteld worden.

tabel 5.15						
De opstartkosten bij het stoppen van een machine volgens (5.95) en (5.96) $F_{sT_1}(0) = F_{sT_2}(0) = 0$						
$k$	$x(k)$	$u(k)$	$f_1(x(k), u(k))$	$F_{sT_1}(k)$	$f_2(x(k), u(k))$	$F_{sT_2}(k)$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	23	0	25	0
2	1	1	13,95	23	15,16	25,00
3	2	1	8,46	36,95	9,20	40,16
4	3	1	5,13	45,41	5,58	49,36
5	4	1	3,11	50,54	3,38	54,94

Vanwege de wijzigingen die aangebracht werden in de opstart- en brandstofkosten moet voor dit voorbeeld opnieuw een optimale oplossing bepaald worden. We doen dit op dezelfde wijze als in paragraaf 4.3.7. Tabel 5.16 geeft de, zo mogelijk, minimale brandstofkosten met de bijbehorende vermogens voor alle mogelijke combinaties van  $M_1$  en  $M_2$ . Via het gelijk stellen van de incrementele brandstofkosten vinden we ook hier dat voor

$V_T = 40$  MW de minimale brandstofkosten verkregen worden als  $V_1 = 25$  MW en  $V_2 = 15$  MW. Indien  $V_T = 20$  MW moet, vanwege het feit dat  $V_1^{min} = V_2^{min} = 10$  MW, gelden dat, indien beide machines in bedrijf zijn,  $V_1 = V_2 = 10$  MW.

$V_T = 80$  MW kan slechts geleverd worden als beide machines in bedrijf zijn, en omdat  $V_1^{max} = 50$  MW worden minimale brandstofkosten bereikt als  $V_1 = 50$  MW en  $V_2 = 30$  MW. Zonodig kunnen we stellen dat het in bedrijf zijn van slechts één machine bij  $V_T = 80$  MW gepaard gaat met zeer hoge kosten.

tabel 5.16					
Minimale brandstofkosten voor alle toegestane combinaties van $M_1$ en $M_2$					
	$M_1$ in bedrijf	$M_2$ in bedrijf	$M_1$ én $M_2$ in bedrijf		
$V_T$	$F_{BR_1}(V_1)$	$F_{BR_2}(V_2)$	$V_1$	$V_2$	$F_{BR_1}(V_1) + F_{BR_2}(V_2)$
20 MW	80	85	10MW	10MW	125,00
40 MW	120	155	25MW	15MW	163,75
80 MW	-	-	50MW	30MW	255,00

We zullen nu alle mogelijke strategieën onderzoeken en de kosten, die een rol spelen bij het bepalen van de optimale strategie berekenen.

Uit  $x_1(0)=2$  volgt dat  $F_{ST_1}(0) = 23$  (zie tabel 5.15). Aangezien echter  $F_{ST_1}(0)$  voor alle mogelijke strategieën hetzelfde is oefent  $F_{ST_1}(0)$  dus geen invloed uit bij de keuze van de optimale oplossing.

We zagen reeds dat, vanwege de restricties voor het te produceren vermogen per machine, voor dit voorbeeld geldt dat  $u_1(2) = u_2(2) = 0$ . Hieruit volgt ten eerste dat voor het bepalen van de optimale oplossing het tijdvak van  $k=0$  tot  $k=4$  in twee delen kan worden gesplitst:  $\underline{u}(3)$  aan de ene kant en  $\underline{u}(0)$  en  $\underline{u}(1)$  aan de andere kant hebben bij het optimaliseren niets met elkaar te maken. Ten tweede volgt hieruit dat  $f_1(x_1(2), u_1(2)) = f_2(x_2(2), u_2(2)) = 0$  terwijl  $F_{BR}(3) = 255$  voor alle mogelijke strategieën zodat deze grootheden voor het berekenen van de optimale oplossing niet meegenomen behoeven te worden. In tabel 5.17 zijn de drie mogelijkheden voor  $\underline{u}(3)$  onderzocht en in tabel 5.18 de negen mogelijkheden voor  $\underline{u}(0)$  en  $\underline{u}(1)$ . Hieruit volgt rechtstreeks de met minimale kosten gepaard gaande strategie, zoals tabel 5.19 deze laat zien.

tabel 5.17							
Overzicht van de toegestane beslissingen $\underline{u}(3)$ met bijbehorende kosten $f_i(x_i(k), u_i(k)) = f_i(k)$							
$x_1(3)$	$x_2(3)$	$u_1(3)$	$u_2(3)$	$f_1(3)$	$f_2(3)$	$F_{BR}(3)$	$f_1(3) + f_2(3) + F_{BR}(3)$
0	0	0	0	0	0	163,75	163,75
0	0	0	1	0	25	120,00	<u>145,00</u>
0	0	1	0	23	0	155,00	178,00

tabel 5.18

Overzicht van de toegestane beslissingen  $\underline{u}(0)$  en  $\underline{u}(1)$  met bijbehorende kosten  $f_i(x_i(k), u_i(k)) = f_i(k)$

$x_1(0)$	$x_2(0)$	$u_1(0)$	$u_2(0)$	$f_1(0)$	$f_2(0)$	$F_{BR}(1)$	$x_1(1)$	$x_2(1)$	$u_1(1)$	$u_2(1)$	$f_1(1)$	$f_2(1)$	$F_{BR}(2)$	$\sum_{k=0}^2 [F_{BR}(k) + f_i(k)]$
2	0	0	0	0	0	125	0	0	0	0	0	0	163,75	288,75
2	0	0	0	0	0	125	0	0	0	1	0	25,00	120,00	270,00
2	0	0	0	0	0	125	0	0	1	0	23,00	0	155,00	303,00
2	0	1	0	8,46	0	85	3	0	0	0	0	0	163,75	257,21
2	0	1	0	8,46	0	85	3	0	0	1	0	25,00	120,00	<u>238,46</u>
2	0	1	0	8,46	0	85	3	0	1	0	5,13	0	155,00	253,59
2	0	0	1	0	25	80	0	1	0	0	0	0	163,75	268,75
2	0	0	1	0	25	80	0	1	0	1	0	15,16	120,00	240,16
2	0	0	1	0	25	80	0	1	1	0	23,00	0	155,00	283,00

tabel 5.19

De optimale oplossing				
$k$	$x_1^*(k)$	$u_1^*(k)$	$x_2^*(k)$	$u_2^*(k)$
0	2	1	0	0
1	3	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1
4	0		1	

tabel 5.20

de toegevoegde variabelen		
$k$	$p_1^*(k)$	$p_2^*(k)$
4	0	0
3	0	12,5
2	0	0
1	0	12,5

We zullen nu weer onderzoeken of de Hamiltoniaan maximaal wordt voor de optimale oplossing.

De differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabelen kunnen met behulp van (5.93) en (5.94) als volgt geschreven worden:

$$p_1(k) = p_1(k+1)u_1(k) + 11,5 u_1(k) e^{-0,5 x_1(k)} \quad (5.97)$$

$$p_2(k) = p_2(k+1)u_2(k) + 12,5 u_2(k) e^{-0,5 x_2(k)} \quad (5.98)$$

Omdat de optimale oplossing bekend is (tabel 5.19) kunnen we nu de toegevoegde variabelen berekenen (zie tabel 5.20).

De Hamiltoniaan (5.90) wordt voor dit voorbeeld:

$$H(k) = p_1(k+1) [\{u_1(k)-1\} x_1(k) + u_1(k)] + p_2(k+1) [\{u_2(k)-1\} x_2(k) + u_2(k)] - 23 u_1(k) e^{-0,5 x_1(k)} - 25 u_2(k) e^{-0,5 x_2(k)} + \text{Min}_{v_1, v_2} [\{1-u_1(k)\} F_{BR_1}(v_1) + \{1-u_2(k)\} F_{BR_2}(v_2)]$$

Als  $H'(k)$  alleen die termen bevat van  $H(k)$  die afhankelijk zijn van  $\underline{u}(k)$  dan is dus:

$$H'(k) = p_1(k+1) u_1(k) [x_1(k)+1] + p_2(k+1) u_2(k) [x_2(k)+1] - 23 u_1(k) e^{-0,5 x_1(k)} - 25 u_2(k) e^{-0,5 x_2(k)} - \text{Min}_{v_1, v_2} [\{1-u_1(k)\} F_{BR_1}(v_1) + \{1-u_2(k)\} F_{BR_2}(v_2)]$$

Met behulp van de tabellen 5.19 en 5.20 kunnen we nu  $H'(0)$  als functie van  $\underline{u}(0)$  bepalen.

$$H'(0) = -0,46 u_1(0) - 12,5 u_2(0) - \text{Min}_{v_1, v_2} [\{1-u_1(0)\} F_{BR_1}(v_1) + \{1-u_2(0)\} F_{BR_2}(v_2)]$$

In tabel 5.21 is  $H'(0)$  berekend voor alle mogelijke  $\underline{u}(0)$ .

TABEL 5.21		
$H'(0)$ als functie van $\underline{u}(0)$		
$u_1(0)$	$u_2(0)$	$H'(0)$
0	0	-125,0
0	1	- 92,5
1	0	- 93,46

Uit tabel 5.21 volgt dat  $H'(0)$  maximaal wordt voor  $u_1(0)=0$  en  $u_2(0)=1$ . Dit is echter in tegenstelling met de eerder gevonden optimale strategie uit tabel 5.19, zodat het maximum principe ook in dit geval niet blijkt op te gaan.

## 5.6. Het continue discrete model met lineaire differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele

### 5.6.1. Inleiding

De modellen die in de vorige paragrafen aan de orde kwamen bleken geen van alle aan het maximum principe te voldoen. Er werden hiervoor een aantal redenen genoemd waarvan de belangrijkste nog steeds is dat de beslissingsvariabele slechts discrete waarden kan aannemen terwijl het stelsel differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele niet lineair is in de toestand (d.w.z. van de vorm zoals (4.33) is). In deze paragraaf zullen deze differentievergelijkingen met uitzondering van die van de kosten, een lineair karakter krijgen. Dat zal tevens met zich meebrengen dat de toestandsvariabele als functie van de tijd continu wordt, zodat de eerste numerieke oplossingsmethode van het twee-punts-randwaarde-probleem die in paragraaf 5.2 werd besproken, in tegenstelling tot bij het discontinue discrete model, bij het continue discrete model in principe wel toegepast kan worden. De procedure om de differentievergelijkingen lineair, c.q. de toestandsvariabele als functie van de tijd continu te maken zal ook bij het continue model in hoofdstuk 6 worden toegepast.

De "geheugendetectie" van de opstartkosten van paragraaf 5.4 had, zoals we gezien hebben, belangrijke bezwaren. De detectie met behulp van cumulatieve opstartkosten bleek beter én eenvoudiger dan de detectie met behulp van een e-macht, die in paragraaf 5.3 werd besproken. Daarom zullen bij dit model de opstartkosten cumulatief worden gebruikt, zoals dat in paragraaf 5.5 is beschreven.

5.6.2. Het lineariseren van de differentievergelijkingen van de toestandsvariabele

We gaan uit van een in de tijd continu systeem met een beslissingsvariabele zoals die o.a. in sectie 5.3.1. gedefinieerd is, maar met dit verschil dat  $u_i$  nu een functie is van een continue tijdsvariabele  $t$ .

De toestandsvariabele zullen we als volgt definiëren:

$$x_i(t) = \int_{-\infty}^t u_i(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \quad (5.99)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

Aan de hand van een eenvoudig voorbeeld kunnen we de betekenis nagaan van deze toestandsvariabele.

Stel dat:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= 0 & -\infty < t < 0 & & 4 \leq t < \gamma \\ u_i(t) &= 1 & 0 \leq t < 4 & & t \geq \gamma \\ \beta &= 1 \end{aligned}$$

We kunnen nu (5.99) schrijven als:

$$x_i(t) = \int_0^t u_i(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \quad (5.100)$$

In tabel 5.22 is  $x_1(t)$  berekend voor verschillende waarden van  $t$  terwijl in figuur 5.6 een ander in beeld is gebracht.

tabel 5.22		
De toestandsvariabele $x_1(t)$ volgens (5.100) voor de aangenomen strategie		
$t$	$x_1(t) = \int_0^t u_1(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau$	
0	0	= 0
1	$1 - e^{-1}$	= 0,6321
2	$1 - e^{-2}$	= 0,8647
3	$1 - e^{-3}$	= 0,9502
4	$1 - e^{-4}$	= 0,9817
5	$e^{-1}(1 - e^{-4})$	= 0,3611
6	$e^{-2}(1 - e^{-4})$	= 0,1329
7	$e^{-3}(1 - e^{-4})$	= 0,0489
8	$e^{-4}(1 - e^{-4}) + 1 - e^{-1}$	= 0,6501
9	$e^{-5}(1 - e^{-4}) + 1 - e^{-2}$	= 0,8713
10	$e^{-6}(1 - e^{-4}) + 1 - e^{-3}$	= 0,9526

We zien dat door toepassing van de integraal (5.100) de discontinuïteiten in de toestandsvariabele op het moment dat een machine gestart wordt door afnemende e-machten vervangen zijn.

Alvorens te beoordelen of deze beschrijving van de toestand van het systeem een redelijke benadering van de werkelijkheid is zullen we weer terugkeren naar het discrete geval en de differentievergelijking voor de toestand bepalen.

Uit (5.99) volgt dat:

$$\begin{aligned}
 x_i(t+\Delta t) &= e^{-\beta(t+\Delta t)} \int_{-\infty}^{t+\Delta t} u_i(\tau) e^{\beta\tau} d\tau \\
 &= e^{-\beta(t+\Delta t)} \left[ \int_{-\infty}^t u_i(\tau) e^{\beta\tau} d\tau + \int_t^{t+\Delta t} u_i(\tau) e^{\beta\tau} d\tau \right] \\
 &= e^{-\beta\Delta t} \int_{-\infty}^t u_i(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau + e^{-\beta(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} u_i(\tau) e^{\beta\tau} d\tau \\
 &= e^{-\beta\Delta t} x_i(t) + e^{-\beta(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} u_i(\tau) e^{\beta\tau} d\tau \quad (5.101)
 \end{aligned}$$

We nemen nu aan dat gedurende het korte tijdsinterval van  $t$  tot  $t+\Delta t$ ,  $u_i(\tau)$  constant verondersteld kan worden, en gelijk is aan  $u_i(t)$ .

We kunnen (5.101) dan als volgt schrijven:

$$\begin{aligned}
 x_i(t+\Delta t) &= e^{-\beta\Delta t} x_i(t) + u_i(t) e^{-\beta(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{\beta\tau} d\tau \\
 &= e^{-\beta\Delta t} x_i(t) + \frac{1}{\beta} u_i(t) [1 - e^{-\beta\Delta t}] \quad (5.102)
 \end{aligned}$$

Stellen we nu:

$$t = k\Delta t, \quad x_i(k\Delta t) = x_i(k), \quad u_i(k\Delta t) = u_i(k)$$

dan wordt (5.102):

$$x_i(k+1) = e^{-\beta\Delta t} x_i(k) + \frac{1}{\beta} u_i(k) [1 - e^{-\beta\Delta t}] \quad (5.103)$$



Hiermee is de differentievergelijking voor de toestandsvariabele, die lineair is in de toestand, verkregen. Het is duidelijk dat  $x_i(k)$  voor  $k=0,1,2,\dots$  volgens (5.103) exact overeenkomt met  $x_i(t)$  voor  $t=0, \Delta t, 2 \Delta t, \dots$  volgens (5.99) mits de beslissingsvariabele slechts op de tijdstippen  $k \Delta t$  kan veranderen.

Uit tabel 5.22 en figuur 5.6 kunnen we concluderen dat, naarmate  $\beta$  kleiner wordt, de toestandsvariabele een betere maat zal worden voor de tijd die de machine buiten bedrijf is, gedurende die tijd dat de machine ook werkelijk buiten bedrijf is (in figuur 5.6 voor  $0 \leq t < 4$  en  $t \geq 7$ ). Een kleinere  $\beta$  impliceert echter ook dat de toestandsvariabele gedurende de periode dat de machine in bedrijf is (in figuur 5.6 voor  $4 \leq t < 7$ ) slechts langzaam zal afvallen. Omdat de toestand op een bepaald moment via de weegfunctie  $e^{-\beta(t-\tau)}$  afhangt van alle vorige toestanden zal de invloed van het verleden toenemen naarmate  $\beta$  kleiner wordt, zodat de mate van reproduceerbaarheid voor vergelijkbare toestanden geringer wordt. Figuur 5.6 laat zien dat  $x_1(1)=0,6321$  en  $x_1(8)=0,6501$  terwijl in beide gevallen de machine één uur buiten bedrijf is. Ten einde dit verschil op te heffen zou  $\beta$  weer groter moeten worden, hetgeen echter weer in strijd is met belangen die hierboven werden genoemd.

Het is mogelijk deze vicieuze cirkel te doorbreken door een differentievergelijking te nemen die er als volgt uitziet:

$$x_i(k+1) = e^{-\beta \Delta t} \cdot e^{-\gamma(1-u_i(k))} x_i(k) + \frac{1}{\beta} u_i(k) [1 - e^{-\beta \Delta t}] \quad (5.104)$$

zodat  $x_i(k)$  voor  $u_i(k)=0$  zeer snel naar nul gaat. Dit gaat echter weer ten koste van de lineariteit van de differentievergelijking.

Daarom zullen we toch van vergelijking (5.103) uitgaan.

5.6.3. De opstartkosten

Wat de opstartkosten betreft, deze zullen in de praktijk niet lineair zijn in  $x_i(k)$ .

Als differentievergelijking voor de opstartkosten nemen we:

$$F_{sr_i}(k+1) = F_{sr_i}(k) + u_i(k) g_i(x_i(k)) \quad (5.105)$$

Als de machine in bedrijf is oefent de toestandsvariabele dus geen invloed meer uit op de grootte van de opstartkosten. Uiteraard blijft het bezwaar van de geringe reproduceerbaarheid bij kleine  $\beta$  bestaan omdat de toestand op een bepaald moment via de weegfunctie  $e^{-\beta(t-\tau)}$  afhankelijk blijft van alle voorgaande toestanden.

Voor het voorbeeld van tabel 5.22 en voor  $g_1(x_1(k)) = 50 e^{-2x_1(k)}$  zijn de opstartkosten volgen (5.105) in figuur 5.7 getekend.

Uit (5.105) volgt dat we voor de totale opstartkosten voor n machines kunnen schrijven:

$$F_{sr}(k+1) - F_{sr}(k) = \sum_{i=1}^n u_i(k) g_i(x_i(k)) \quad (5.106)$$

5.6.4. De differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele

Voor de brandstofkosten gebruiken we de differentievergelijking (5.83). Aangezien we weer stellen dat:

$$x_{n+1}(k) = F_{BR}(k) + F_{sr}(k)$$

kunnen we met behulp van (5.83), (5.106) en (5.103) het totale stelsel van differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele opschrijven:

$$x_i(k+1) - x_i(k) = (e^{-\beta \Delta t} - 1) x_i(k) + \frac{1}{\beta} u_i(k) [1 - e^{-\beta \Delta t}]$$

$$x_{n+1}(k+1) - x_{n+1}(k) = \text{Min}_{v_1, \dots, v_n} \sum_{i=1}^n [1 - u_i(k)] F_{BR_i}(v_i(k+1)) \Delta t + \sum_{i=1}^n u_i(k) g_i(x_i(k)) \quad (5.107)$$

$i = 1, 2, \dots, n$      $k = 0, 1, \dots, N-1$   
met als beginvoorwaarden:

$$x_i(0) = a_i \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

5.6.5. De differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele

Toepassing van (5.3) op (5.107) geeft weer de vergelijkingen voor de toegevoegde variabele:

$$p_i(k) - p_i(k+1) = [e^{-\beta \Delta t} - 1] p_i(k+1) - u_i(k) \left. \frac{dg_i(x_i)}{dx_i} \right|_{x_i = x_i(k)} \quad (5.108)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

omdat ook hier weer geldt dat

$$p_{n+1}(k) = -1, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (5.109)$$

De eindvoorwaarden voor (5.108) zijn, zoals gewoonlijk, weer:

$$p_i(N) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.110)$$

5.6.6. De Hamiltoniaan

De Hamiltoniaan, gedefinieerd volgens (5.28), wordt met behulp van (5.107) en (5.109):

$$H(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k+1) \left[ (e^{-\beta \Delta t} - 1) x_i(k) + \frac{1}{\beta} u_i(k) (1 - e^{-\beta \Delta t}) \right] +$$

$$- \text{Min}_{v_1, \dots, v_n} \sum_{i=1}^n [1 - u_i(k)] F_{\beta} x_i(v_i(k+1)) \Delta t - \sum_{i=1}^n u_i(k) g_i(x_i(k))$$

Als  $H^1(k)$  alleen die termen van  $H(k)$  bevat die afhankelijk zijn van  $u_1(k)$  dan geldt dus:

$$H^1(k) = \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \Delta t}) \sum_{i=1}^n p_i(k+1) u_i(k) - \text{Min}_{v_1, \dots, v_n} \sum_{i=1}^n [1 - u_i(k)] F_{\beta} x_i(v_i(k+1)) \Delta t +$$

$$- \sum_{i=1}^n u_i(k) g_i(x_i(k))$$

5.6.7. Voorbeeld

Wat de brandstofkosten en het te leveren vermogen als functie van de tijd betreft zullen we de gegevens van sectie 5.5.7. gebruiken, evenals voor de minimale en maximale capaciteit van een machine.

Voor de opstartkosten nemen we de volgende differentievergelijkingen:

$$F_{ST_1}(k+1) = F_{ST_1}(k) + 15u_1(k)e^{-x_1(k)} \quad (5.111)$$

$$F_{ST_2}(k+1) = F_{ST_2}(k) + 30u_2(k)e^{-x_2(k)} \quad (5.112)$$

zodat dus:  $g_1(x_1(k)) = 15e^{-x_1(k)}$  en  $g_2(x_2(k)) = 30e^{-x_2(k)}$

Verder stellen we:

$$\Delta t = 1 \text{ uur}$$

$$\beta = 1$$

$$x_1(0) = 1 - e^{-2} = 0,8647 \quad (M_1 \text{ is dus 2 uur buiten bedrijf})$$

$$x_2(0) = 0$$

Ook nu zullen we eerst de optimale oplossing bepalen door alle mogelijke strategieën met de bijbehorende kosten te onderzoeken. Uiteraard zijn alleen die kosten van belang die verschillend zijn voor verschillende strategieën (zie de discussie hierover in sectie 5.5.7.).

Vanwege het karakter van de toestandsvariabele impliceert  $\underline{x}(2) = \underline{0}$  nu niet meer dat  $\underline{x}(3) = \underline{0}$  omdat elke toestand een ander verleden heeft gehad. In tabel 5.23, waar de relevante trajectorieën zijn samengebracht, zien we dan ook dat  $\underline{x}(3)$  steeds een andere waarde heeft. Hieruit volgt dat er voor  $\underline{x}(4)$  27 verschillende mogelijkheden onderzocht zouden moeten worden. Beperken we ons voor het onderzoek naar de optimale beslissing  $\underline{u}(3)$  voorlopig tot de brandstofkosten dan blijkt uit tabel 5.16 dat alleen  $M_1$  in bedrijf moet zijn, aangezien  $V_T = 40$  MW. De verhoging van de opstartkosten tengevolge van deze beslissing zal dan, zoals uit (5.112) blijkt, maximaal 30 zijn, zodat de totale kosten maximaal  $120 + 30 = 150$  zijn. Bij de beide andere beslissingen komen alleen de brandstofkosten al hoger uit (155 en 163,75), zodat  $u_1(3) = 0$ ,  $u_2(3) = 1$  de optimale beslissing is voor  $k=3$ .

Met behulp van tabel 5.23 vinden we nu de optimale oplossing, die in tabel 5.24 nog eens opgeschreven is.

tabel 5.23

Overzicht van de mogelijke beslissingen  $\underline{u}(0)$  en  $\underline{u}(1)$  met bijbehorende kosten

$$f_1(k) = u_1(k) g_1(x_1(k))$$

$$f_2(k) = u_2(k) g_2(x_2(k))$$

$x_1(0)$	$x_2(0)$	$u_1(0)$	$u_2(0)$	$f_1(0)$	$f_2(0)$	$F_{0R}(1)$	$x_1(1)$	$x_2(1)$	$u_1(1)$	$u_2(1)$	$f_1(1)$	$f_2(1)$	$F_{1R}(2)$
0,8647	0	0	0	0	0	125,00	0,3181	0	0	0	0	0	163,75
0,8647	0	0	0	0	0	125,00	0,3181	0	0	1	0	30,00	120,00
0,8647	0	0	0	0	0	125,00	0,3181	0	1	0	10,91	0	155,00
0,8647	0	1	0	6,32	0	85,00	0,9502	0	0	0	0	0	163,75
0,8647	0	1	0	6,32	0	85,00	0,9502	0	0	1	0	30,00	120,00
0,8647	0	1	0	6,32	0	85,00	0,9502	0	1	0	5,80	0	155,00
0,8647	0	0	1	0	30,00	80,00	0,3181	0,6321	0	0	0	0	163,75
0,8647	0	0	1	0	30,00	80,00	0,3181	0,6321	0	1	0	15,94	120,00
0,8647	0	0	1	0	30,00	80,00	0,3181	0,6321	1	0	10,91	0	155,00

$x_1(2)$	$x_2(2)$	$u_1(2)$	$u_2(2)$	$x_1(3)$	$x_2(3)$	$u_1(3)$	$u_2(3)$	$f_1(3)$	$x_1(4)$	$x_2(4)$	Totale kosten
0,1170	0	0	0	0,0431	0	0	1	30,00	0,0159	0,6321	318,75
0,1170	0,6321	0	0	0,0431	0,2325	0	1	23,77	0,0159	0,7176	298,77
0,7491	0	0	0	0,2756	0	0	1	30,00	0,1014	0,6321	320,91
0,3496	0	0	0	0,1286	0	0	1	30,00	0,0473	0,6321	285,07
0,3496	0,6321	0	0	0,1286	0,2325	0	1	23,77	0,0473	0,7176	265,09
0,9817	0	0	0	0,3612	0	0	1	30,00	0,1328	0,6321	282,12
0,1170	0,2325	0	0	0,0431	0,0855	0	1	27,53	0,0159	0,6636	301,28
0,1170	0,8647	0	0	0,0431	0,3181	0	1	21,83	0,0159	0,7491	267,77
0,7491	0,2325	0	0	0,2756	0,0855	0	1	27,53	0,1014	0,6636	303,44

tabel 5.24				
De optimale oplossing				
k	$x_1^*(k)$	$u_1^*(k)$	$x_2^*(k)$	$u_2^*(k)$
0	0,8647	1	0	0
1	0,9502	0	0	1
2	0,3496	0	0,6321	0
3	0,1286	0	0,2325	1
4	0,0473		0,7176	

tabel 5.25		
de toegevoegde variabelen		
k	$p_1^*(k)$	$p_2^*(k)$
4	0	0
3	0	23,77
2	0	8,74
1	0	33,22

De differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele, (5.108) zijn voor dit voorbeeld als volgt:

$$p_1(k) = e^{-1} p_1(k+1) + 15 u_1(k) e^{-x_1(k)} \quad (5.113)$$

$$p_2(k) = e^{-1} p_2(k+1) + 30 u_2(k) e^{-x_2(k)} \quad (5.114)$$

In tabel 5.25 staan de waarden die de toegevoegde variabelen in het optimale geval aannemen, en die met behulp van (5.113), (5.114) en tabel 5.24 berekend kunnen worden.

De termen van de Hamiltoniaan die afhankelijk zijn van  $u_1(k)$  zijn voor dit voorbeeld:

$$H^1(k) = (1 - e^{-1}) p_1(k+1) u_1(k) + (1 - e^{-1}) p_2(k+1) u_2(k) - 15 u_1(k) e^{-x_1(k)} - 30 u_2(k) e^{-x_2(k)} - \text{Min}_{v_1, v_2} [\{1 - u_1(k)\} F_{OR_1}(v_1) + \{1 - u_2(k)\} F_{OR_2}(v_2)]$$

Met behulp van de tabellen 5.24 en 5.25 kunnen we hieruit  $H^1(0)$  berekenen:

$$H^1(0) = -6,32 u_1(0) - 9,00 u_2(0) - \text{Min}_{v_1, v_2} [\{1 - u_1(0)\} F_{OR_1}(v_1) + \{1 - u_2(0)\} F_{OR_2}(v_2)]$$

Uit tabel 5,26 waar  $H'(0)$  is berekend voor de 3 mogelijke beslissingen  $\underline{u}(0)$ , blijkt dat de Hamiltoniaan maximaal wordt voor  $u_1(0)=0$  en  $u_2(0)=1$ . Dit is echter in tegenspraak met de optimale beslissing  $\underline{u}(0)$  uit tabel 5.24. zodat ook hier het maximumprincipe geen goede resultaten geeft.

tabel 5.26		
$H'(0)$ als functie van $\underline{u}(0)$		
$u_1(0)$	$u_2(0)$	$H'(0)$
0	0	-125,00
0	1	- 89,00
1	0	- 91,32

## 6. Het continue model

### 6.1. Inleiding

In hoofdstuk 5 bleek dat, welke beschrijving we ook gebruikten, het discrete model niet voldeed aan het maximum principe. De redenen hiervan zijn al vele malen aan de orde gekomen.

Omdat het niet gelukt is de differentievergelijkingen voor de toestand lineair in de toestand te maken (om het maximum principe toch te kunnen gebruiken) moeten we onze toevlucht nemen tot een beslissingsvariabele die continu over een bepaald gebied kan variëren. Het ligt dan min of meer voor de hand om het vermogen dat een machine op een bepaald tijdstip levert als toestandsvariabele te nemen, en de verandering van dat vermogen als beslissingsvariabele. De differentievergelijking voor een machine  $M_1$  wordt dan (zie ook paragraaf 2.3):

$$x_i(k+1) - x_i(k) = u_i(k) \quad (6.1)$$
$$i = 1, 2, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

De registratie van de tijd die een machine buiten bedrijf is geweest zal in paragraaf 6.3 behandeld worden. Dit zal gebeuren door de introductie van een tweede toestandsvariabele per machine, die via een soortgelijke weging over de tijd als in sectie 5.6.2. verkregen zal worden.

De detectie van de opstartkosten zal weer gebeuren met behulp van de methode van de cumulatieve opstartkosten.

De brandstofkosten zullen in paragraaf 6.2 op een andere wijze dan in hoofdstuk 5 beschreven worden. De afzonderlijke minimalisering is niet meer nodig aangezien de beslissingsvariabele zowel het starten of stoppen van een machine als de verdeling van het vermogen over de in bedrijf zijnde machines regelt.



Dit brengt enerzijds een vereenvoudiging van de beschrijving van de brandstofkosten met zich mee. Anderzijds zullen we zien dat er moeilijkheden ontstaan bij het voldoen aan de restricties die aan het vermogen per machine zijn gesteld.

Aangezien de verandering van het vermogen per tijdseenheid een bepaald bedrag niet te boven mag gaan moet het gebied  $\Omega$ , waarin  $\underline{u}$  ligt, aangepast worden aan deze eis.

Bij het continue model, zoals dat in dit hoofdstuk beschreven zal worden, zullen de differentievergelijkingen voor de toestand benaderingen zijn van differentiaalvergelijkingen. Als verder voldaan wordt aan de eisen a, b en c van paragraaf 4.2, dan zal het maximum principe, als er tenminste een optimale oplossing bestaat, goede resultaten moeten geven.

De paragrafen 6.4, 6.5 en 6.6 zullen het model beschrijven op een, voor de toepassing van het maximum principe, noodzakelijke wijze. In paragraaf 6.7 zal een en ander weer met behulp van een voorbeeld geïllustreerd worden. Via de numerieke procedure van paragraaf 5.2 zal onderzocht worden of de geschatte oplossing via een iteratief proces de oplossing zal geven die de Hamiltoniaan maximalisert.

## 6.2. De brandstofkosten

De brandstofkosten voor een stilstaande machine  $M_1$  zijn uiteraard nul. Daarom kunnen de totale brandstofkosten op het tijdstip  $k$  voor  $n$  machines ten gevolge van een strategie  $\underline{u}(0), \underline{u}(1), \dots, \underline{u}(k-1)$  als volgt worden geschreven:

$$F_{BR}(k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k h_i(x_i(j))$$

Hieruit kunnen we de differentievergelijking voor de brandstofkosten opschrijven:

$$F_{BR}(k+1) - F_{BR}(k) = \sum_{i=1}^n h_i(x_i(k+1)) \quad (6.2)$$

Zoals we reeds eerder opgemerkt hebben kunnen we geen restricties opleggen aan de toestandsvariabele. We moeten dus op een of andere wijze ervoor zorgen dat:

$$x_i^{\min} < x_i < x_i^{\max}$$

In figuur 6.1 is een gestyleerde brandstofkostenkromme getekend. Voor  $x_i > x_i^{\max}$  kunnen we zonder bezwaar een z.g. penalty-functie invoeren. Voor  $x_i < x_i^{\min}$  is dit echter niet mogelijk omdat  $h_i(0) = 0$  terwijl  $h_i(x)$  tweemaal continu differentieerbaar moet zijn naar  $x$  volgens eis b van paragraaf 4.2. Het invoeren van een penalty-functie volgens de gestippelde lijn van figuur 6.1 zou dan als gevolg hebben dat de machine nooit gestopt wordt maar steeds op een zeer laag vermogen kan blijven staan tegen geringe kosten.

Deze moeilijkheid zal in de volgende paragraaf min of meer worden opgelost door de opstartkosten niet pas in rekening te brengen als de machine buiten bedrijf gesteld wordt, maar reeds als  $x_i < x_i^{\min}$ . Hierbij moet er uiteraard wel voor gezorgd worden dat de brandstofkosten voor  $x_i < 0$  minstens even groot zijn als voor  $x_i > 0$  aangezien het te leveren vermogen niet negatief mag worden.

### 6.3. De opstartkosten

In sectie 5.6.2. werd de tijd die machine  $M_i$  buiten bedrijf is benaderd door de uitdrukking:

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^t u_i(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \quad (6.3)$$

We zijn echter inmiddels overgegaan op een ander beslissingsvariabele. De discrete  $u_i(t)$  uit sectie 5.6.2. kan hier evenwel vervangen worden door  $e^{-a x_i(t)}$ , waarbij  $x_i(t)$  gedefinieerd is in paragraaf 6.1. Dit geldt echter niet meer voor  $x_i < 0$ . Een betere benadering van  $u_i(t)$  in (6.3) is met behulp van een arctan-functie:

$$Z_i(x_i) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-a x_i(t)\} \quad (6.4)$$

Uit tabel 6.1 en figuur 6.2 zien we dat het "omklappunt" van (6.4) ligt bij  $x_i=0$  zodat (6.4) bij het continue model dus een vervanging is van  $u_i(t)$  bij het discrete model.

In de vorige paragraaf hebben we erop gewezen dat, in verband met de vermogensrestricties, er opstartkosten berekend moeten worden zodra  $x_i < x_i^{min}$ . We moeten dus zoeken naar een maat voor de tijd gedurende welke de machine een vermogen produceert dat kleiner is dan  $x_i^{min}$ . Dit betekent dat het "omklappunt" dus bij  $x_i = x_i^{min}$  moet liggen, hetgeen gerealiseerd kan worden met de volgende functie:

$$z_2(x_i) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-ax_i(t) + b\} \quad (6.5)$$

waarbij a en b zo gekozen moeten worden dat:

$$x_i^{min} \approx \frac{b}{a} \quad (6.6)$$

Figuur 6.2 en tabel 6.1 geven een voorbeeld van de werkingwijze van (6.5) voor  $x_i^{min} = 10$  MW,  $a=10$ ,  $b=99$ .

Een maat voor de tijd dat  $M_i$  een vermogen levert kleiner dan  $x_i^{min}$  is dus blijkens het voorgaande:

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^t \left[ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-ax_i(\tau) + b\} \right] e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \quad (6.7)$$

De differentiaalvergelijking van  $y_i(t)$  kan uit (6.7) worden afgeleid en luidt:

$$\dot{y}_i(t) + \beta y_i(t) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-ax_i(t) + b\} \quad (6.8)$$

Uit (6.7) kunnen we op dezelfde wijze als in sectie 5.6.2 een differentievergelijking voor y afleiden :

$$\begin{aligned} y_i(t+\Delta t) &= e^{-\beta(t+\Delta t)} \int_{-\infty}^{t+\Delta t} \left[ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-ax_i(\tau) + b\} \right] e^{\beta\tau} d\tau \\ &= e^{-\beta(t+\Delta t)} \left[ \int_{-\infty}^t \left[ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-ax_i(\tau) + b\} \right] e^{\beta\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{t+\Delta t} \left[ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-ax_i(\tau) + b\} \right] e^{\beta\tau} d\tau \right] \\ &= e^{-\beta\Delta t} \int_{-\infty}^t \left[ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-ax_i(\tau) + b\} \right] e^{-\beta(t-\tau)} d\tau + \\ &\quad + e^{-\beta(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} \left[ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-ax_i(\tau) + b\} \right] e^{\beta\tau} d\tau \\ &= e^{-\beta\Delta t} y_i(t) + e^{-\beta(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} \left[ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-ax_i(\tau) + b\} \right] e^{\beta\tau} d\tau \quad (6.9) \end{aligned}$$

tabel 6.1			
z <sub>1</sub> (x) en z <sub>2</sub> (x) volgens (6.4) en (6.5) als functie van x voor a=10, b=99			
x	$0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan(-10x)$	x	$0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan(-10x+99)$
-4	0,992	-4	0,998
-2	0,984	0	0,997
-1	0,968	1	0,996
0	0,500	4	0,995
1	0,032	6	0,992
2	0,016	8	0,983
4	0,008	9	0,965
10	0,003	10	0,250
20	0,002	12	0,015

We nemen weer aan dat gedurende het tijdsinterval van t tot t + Δ t, x<sub>i</sub>(t) constant blijft en gelijk is aan x<sub>i</sub>(t + Δ t). (6.9) wordt nu:

$$\begin{aligned}
 y_i(t + \Delta t) &= e^{-\beta \Delta t} y_i(t) + e^{-\beta(t + \Delta t)} \int_t^{t + \Delta t} [0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan f - a x_i(t + \Delta t) + b] e^{\beta \tau} d\tau \\
 &= e^{-\beta \Delta t} y_i(t) + \frac{1}{\beta} [0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan f - a x_i(t + \Delta t) + b] [1 - e^{-\beta \Delta t}]
 \end{aligned}
 \tag{6.10}$$

Met t = kΔt, x<sub>i</sub>(kΔt + Δt) = x<sub>i</sub>(k+1), y<sub>i</sub>(kΔt) = y<sub>i</sub>(k), gaat (6.10) over in:

$$y_i(k+1) = e^{-\beta \Delta t} y_i(k) + \frac{1}{\beta} [0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan f - a x_i(k+1) + b] [1 - e^{-\beta \Delta t}]
 \tag{6.11}$$

Voeren we nu y<sub>i</sub>(k) in als 2<sup>e</sup> toestandsvariabele voor machine M<sub>i</sub> en stellen we

$$y_i(k) = x_{n+i}(k)$$

dan kan (6.11) geschreven worden als differentievergelijking voor de toestandsvariabele x<sub>n+i</sub>(k) :

$$x_{n+i}(k+1) - x_{n+i}(k) = [e^{-\beta \Delta t} - 1] x_{n+i}(k) + \frac{1}{\beta} [0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan f - a x_i(k) - a y_i(k) + b] [1 - e^{-\beta \Delta t}]
 \tag{6.12}$$

waarbij gebruik gemaakt is van de differentievergelijking voor de toestandsvariabele  $x_i(k)$  volgens (6.1).

Als differentievergelijking voor de opstartkosten nemen we nu:

$$F_{ST_i}(k+1) - F_{ST_i}(k) = f_i(x_i(k+1), x_{n+i}(k)) \quad (6.13)$$

Aan de hand van een eenvoudig voorbeeld zullen we nagaan of deze beschrijving van de opstartkosten het gewenste resultaat geeft. We stellen  $\beta = +1$ ,  $a=10$ ,  $b=99$ ,  $x_i^{min} = 10$  MW,  $\Delta t = 1$  en

$$f_i(x_i(k+1), x_{n+i}(k)) = 10 e^{-x_{n+i}(k)} \left[ 9,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-10 x_i(k+1) + 99\} \right]$$

Als beginvoorwaarden nemen we:

$$x_{n+i}(0) = 0, \quad x_i(0) = 60 \text{ MW} \quad F_{ST_i}(0) = 0$$

De beslissingen die gedurende een bepaalde tijd genomen worden staan in tabel 6.2. De resultaten, d.w.z.  $x_i(k)$ ,  $x_{n+i}(k)$ ,  $f_i(x_i(k+1), x_{n+i}(k))$  en  $F_{ST_i}(k)$  staan eveneens in tabel 6.2 en zijn getekend in figuur 6.3.

tabel 6.2					
Voorbeeld van de berekening van de opstartkosten volgens (6.13)					
k	$u_i(k)$	$x_i(k)$	$x_{n+i}(k)$	$f_i(x_i(k+1), x_{n+i}(k))$	$F_{ST_i}(k)$
0	60	60	0	9,968	0
1	0	0	0,630	5,309	9,968
2	0	0	0,862	4,210	15,277
3	0	0	0,947	3,867	19,487
4	20	0	0,350	0,014	23,354
5	30	20	0,129	0,004	23,368
6	0	50	0,048	0,005	23,372
7		50			23,377

We zien hieruit dat voor één machine een redelijke beschrijving van de opstartkosten mogelijk is.

Er ontstaan als het ware 2 stabiele toestanden:

$x_i = 0$  en  $x_i = x_i^{min}$ , terwijl het gebied  $0 < x_i < x_i^{min}$

instabiel is. Als  $x_i = x_i^{min}$  hebben we nog geen opstartkosten. Zodra  $x_i < x_i^{min}$  wordt er een vast bedrag aan opstartkosten in rekening gebracht, terwijl de brandstofkosten lager worden of gelijk blijven. Voor de stabiele toestand  $x_i = 0$  zijn er helemaal geen brandstofkosten meer; de opstartkosten hebben nog steeds dezelfde grootte.

Bij gezamenlijk bedrijf van meer machines ligt de zaak echter anders. Als twee machines gezamenlijk een bepaald vermogen moeten leveren dan is het mogelijk dat de minimale kosten bereikt worden in het gebied waar  $0 < x_1 < x_1^{min}$ . Zouden we in een dergelijke situatie  $M_1$  uitschakelen dan zou  $M_2$  meer vermogen moeten leveren. De lagere brandstofkosten van  $M_1$  (die nu nul geworden zijn) wegen echter niet op tegen de hogere brandstofkosten van  $M_2$ , zodat de totale kosten toch hoger zijn. Evenzo wegen, als we  $x_1 = x_1^{min}$  maken, de lager brandstofkosten van  $M_2$  en het niet meer meetellen van de opstartkosten niet op tegen de hogere brandstofkosten van  $M_1$ .

De praktijk zal moeten leren of deze situatie vaak zal voorkomen en of we de beslissing kunnen nemen om, hetzij  $x_i = 0$ , hetzij  $x_i = x_i^{min}$  te nemen zonder veel van de optimale oplossing af te wijken. Indien het toch noodzakelijk zou zijn maatregelen tegen een dergelijke situatie te treffen dan zullen we óf de brandstofkosten, óf de opstartkosten kunstmatig moeten verhogen voor  $0 < x_i < x_i^{min}$ . De kosten voor  $x_i \leq 0$  en  $x_i \geq x_i^{min}$  mogen uiteraard niet veranderen, terwijl ook de differentieerbaarheid niet uit het oog mag worden verloren.

De opstartkosten kunnen we bijvoorbeeld in het gebied  $0 < x_i < x_i^{min}$  verhogen door de volgende functie te nemen (n.l. de  $f_i$  uit (6.13)):

$$f_i(x_i, x_{n+i}) = \left[ p \left\{ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan(-a x_i + b) \right\} + \right. \\ \left. - q \left\{ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan(-c x_i + d) \right\} \right] g_i(x_{n+i}) \quad (6.14)$$

met :  $p - q = 1$        $\frac{b}{a} \approx x_i^{min}$        $\frac{d}{c} \approx 1$

In figuur 6.4 is de functie

$$e_i(x_i) = 4\left\{0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan(-10x_i + 99)\right\} - 3\left\{0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan(-10x_i + 9)\right\} \quad (6.15)$$

getekend als functie van  $x_i$ .

6.4. De differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele

De differentievergelijkingen voor  $x_i(k)$  en  $x_{n+1}(k)$  kennen we reeds uit (6.1) en (6.12). De differentievergelijking voor de kosten volgt uit (6.2) en (6.13). De totale opstartkosten voor  $n$  machines worden:

$$F_{ST}(k+1) = \bar{s}_T(k) + \sum_{i=1}^n f_i(x_i(k+1), x_{n+i}(k))$$

Indien we nu stellen:

$$x_{n+1}(k) = \bar{F}_R(k) + F_{ST}(k)$$

dan wordt de differentievergelijking voor de kosten:

$$x_{2n+1}(k+1) - x_{2n+1}(k) = \sum_{i=1}^n h_i(x_i(k+1)) + \sum_{i=1}^n f_i(x_i(k+1), x_{n+i}(k))$$

Het totale stelsel differentievergelijkingen voor de toestandsvariabele luidt nu dus als volgt:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) - x_i(k) &= u_i(k) \\ x_{n+i}(k+1) - x_{n+i}(k) &= [e^{-\beta \Delta t} - 1] x_{n+i}(k) + \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \left[ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan\{-ax_i(k+1) + b\} \right] [1 - e^{-\beta \Delta t}] \\ x_{2n+1}(k+1) - x_{2n+1}(k) &= \sum_{i=1}^n h_i(x_i(k+1)) + \sum_{i=1}^n f_i(x_i(k+1), x_{n+i}(k)) \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \qquad k = 0, 1, \dots, N-1$$

met als beginvoorwaarden:

$$x_i(0) = a_i \qquad i = 1, 2, \dots, 2n+1$$

6.5. De differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele

Toepassing van (5.3) op (6.16) levert weer de differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele. Ook hier geldt dat:

$$P_{2n+1}(k) = -1 \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (6.17)$$

zodat de vergelijkingen worden:

$$p_i(k) - p_i(k+1) = -\frac{a}{\pi\beta} [1 - e^{-\beta\Delta t}] \frac{P_{n+i}(k+1)}{\{-a x_i(k+1) + b\}^2 + 1} - \frac{d}{dx_i} h_i(x_i) \Big|_{x_i = x_i(k)} +$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x_i, x_{n+i}(k)) \Big|_{x_i = x_i(k+1)} \quad (6.18)$$

$$P_{n+i}(k) - P_{n+i}(k+1) = P_{n+i}(k+1) [e^{-\beta\Delta t} - 1] - \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} f_i(x_i(k+1), x_{n+i}) \Big|_{x_{n+i} = x_{n+i}(k)}$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

met als beginvoorwaarden:

$$p_i(N) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

6.6. De Hamiltoniaan

De Hamiltoniaan, gedefinieerd volgens (5.28) kunnen we bepalen met behulp van (6.16) en (6.17):

$$H(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k+1) u_i(k) + \sum_{i=1}^n P_{n+i}(k+1) x_{n+i}(k) [e^{-\beta\Delta t} - 1] +$$

$$+ \frac{1}{\beta} [1 - e^{-\beta\Delta t}] \sum_{i=1}^n P_{n+i}(k+1) \left[ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan\{-a x_i(k+1) + b\} \right] + \quad (6.19)$$

$$- \sum_{i=1}^n h_i(x_i(k+1)) + \sum_{i=1}^n f_i(x_i(k+1), x_{n+i}(k))$$

Beperken we ons weer tot de termen die afhankelijk zijn van  $u_i(k)$  dan vinden we:

$$H^1(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k+1) u_i(k) + \frac{1}{\pi\beta} [1 - e^{-\beta\Delta t}] \sum_{i=1}^n P_{n+i}(k+1) \arctan\{-a x_i(k+1) + b\} +$$

$$- \sum_{i=1}^n h_i(x_i(k+1)) - \sum_{i=1}^n f_i(x_i(k+1), x_{n+i}(k)) \quad (6.20)$$



### 6.7. Voorbeeld

We gaan weer uit van 2 machines,  $M_1$  en  $M_2$ , die gezamenlijk het in figuur 6.5 geschetste vermogen gedurende 4 uur moeten leveren.

De karakteristieken van de machines zijn :

brandstofkosten (zie figuur 6.6) :

$$FBR_1(k+1) = FBR_1(k) + \frac{1}{6} x_1^2(k+1) \quad (6.21)$$

$$FBR_2(k+1) = FBR_2(k) + \frac{1}{5} x_2^2(k+1) \quad (6.22)$$

opstartkosten :

$$F_{ST_1}(k+1) = F_{ST_1}(k) + 30 e^{-2x_1(k)} \left[ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-10x_1(k+1) + 99\} \right] \quad (6.23)$$

$$F_{ST_2}(k+1) = F_{ST_2}(k) + 40 e^{-2x_2(k)} \left[ 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan \{-10x_2(k+1) + 99\} \right] \quad (6.24)$$

minimale vermogen :

$$x_1^{min} = x_2^{min} = 10 \text{ MW}$$

beginvoorwaarden :

$$x_1(0) = 0, \quad x_3(0) = 0,862 \quad (M_1 \text{ staat dus ongeveer 2 uur buiten bedrijf)}$$

$$x_2(0) = 30, \quad x_4(0) = 0$$

De overige gegevens zijn :

$$\Delta t = 1 \text{ uur} \quad \beta = 7$$

De in (6.21) en (6.22) gegeven kwadratische brandstofkosten geven uiteraard een veel te eenvoudig beeld van de werkelijkheid. Evenals de reeds behandelde voorbeelden is ook dit voorbeeld slechts bedoeld om te onderzoeken of de toepassing van het maximum principe de optimale oplossing geeft.

De brandstofkosten voldoen redelijk aan de verschillende restricties:

- $h_i(0) = 0$  (zie (6.2))
- $h_i(x_i)$  is groot voor grote  $x_i$ , dus een soort penalty functie voor  $x_i > x_i^{max}$
- $h_i(-x_i) = h_i(x_i)$  zodat hoogstwaarschijnlijk de optimale oplossing geen negatieve vermogens zal vragen.

De differentievergelijkingen voor de toestand worden voor dit voorbeeld (zie 6.16) :

$$x_1(k+1) - x_1(k) = u_1(k)$$

$$x_2(k+1) - x_2(k) = u_2(k)$$

$$x_3(k+1) - x_3(k) = (e^{-1} - 1)x_3(k) + [0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan\{-10x_1(k) - 10u_1(k) + 99\}][1 - e^{-1}]$$

$$x_4(k+1) - x_4(k) = (e^{-1} - 1)x_4(k) + [0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan\{-10x_2(k) - 10u_2(k) + 99\}][1 - e^{-1}]$$

$$\begin{aligned} x_5(k+1) - x_5(k) = & \frac{1}{6}\{x_1(k) + u_1(k)\}^2 + \frac{1}{5}\{x_2(k) + u_2(k)\}^2 + \\ & + 30 e^{-2x_3(k)} [0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan\{-10x_1(k) - 10u_1(k) + 99\}] + \\ & + 40 e^{-2x_4(k)} [0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan\{-10x_2(k) - 10u_2(k) + 99\}] \end{aligned} \quad (6.25)$$

De differentievergelijkingen voor de toegevoegde variabele (6.18) zijn nu :

$$\begin{aligned} p_1(k) - p_1(k+1) = & -\frac{10(1-e^{-1})}{\pi} \cdot \frac{p_3(k+1)}{\{-10x_1(k) - 10u_1(k) + 99\}^2 + 1} - \frac{1}{3}\{x_1(k) + u_1(k)\} + \\ & + \frac{300 e^{-2x_3(k)}}{\pi} \cdot \frac{1}{\{-10x_1(k) - 10u_1(k) + 99\}^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(k) - p_2(k+1) = & -\frac{10(1-e^{-1})}{\pi} \cdot \frac{p_4(k+1)}{\{-10x_2(k) - 10u_2(k) + 99\}^2 + 1} - \frac{2}{5}\{x_2(k) + u_2(k)\} + \\ & + \frac{400 e^{-2x_4(k)}}{\pi} \cdot \frac{1}{\{-10x_2(k) - 10u_2(k) + 99\}^2 + 1} \end{aligned}$$

$$p_3(k) - p_3(k+1) = (e^{-1} - 1)p_3(k+1) + 60 e^{-2x_3(k)} [0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan\{-10x_1(k) - 10u_1(k) + 99\}]$$

$$p_4(k) - p_4(k+1) = (e^{-1} - 1)p_4(k+1) + 80 e^{-2x_4(k)} [0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan\{-10x_2(k) - 10u_2(k) + 99\}] \quad (6.26)$$

omdat ook hier weer geldt dat :

$$p_5(k) = -1 \quad k = 0, 1, \dots, N$$

Als met  $H^1(k)$  weer worden aangeduid die termen van de Hamiltoniaan die afhankelijk zijn van  $u_1(k)$  en  $u_2(k)$  dan volgt uit (6.25) :

$$\begin{aligned} H^1(k) = & p_1(k+1)u_1(k) + p_2(k+1)u_2(k) + \frac{1-e^{-1}}{\pi} p_3(k+1) \arctan\{-10x_1(k) - 10u_1(k) + 99\} + \\ & + \frac{1-e^{-1}}{\pi} p_4(k+1) \arctan\{-10x_2(k) - 10u_2(k) + 99\} - \frac{1}{6}u_1^2(k) - \frac{1}{3}x_1(k)u_1(k) + \\ & - \frac{1}{5}u_2^2(k) - \frac{2}{5}u_2(k)x_2(k) - \frac{30}{\pi} e^{-2x_3(k)} \arctan\{-10x_1(k) - 10u_1(k) + 99\} + \\ & - \frac{40}{\pi} e^{-2x_4(k)} \arctan\{-10x_2(k) - 10u_2(k) + 99\} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Aangezien :

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + u_1(k) \\ &= x_1(k) + x_2(k) + u_1(k) + u_2(k) \end{aligned}$$

kunnen we  $u_2(k)$  schrijven als :

$$u_2(k) = x_7(k+1) - x_7(k) - x_2(k) - u_7(k) \quad (6.28)$$

Noemen we nu  $H^2(k)$  de termen van  $H(k)$  die afhankelijk zijn van  $u_1(k)$  dan volgt uit (6.27) en (6.28) :

$$\begin{aligned} H^2(k) = & u_7(k) [ p_1(k+1) - p_2(k+1) - \frac{4}{15} x_7(k) + \frac{2}{5} x_7(k+1) - \frac{4}{30} u_7(k) ] + \\ & + [ \frac{1-e^{-1}}{\pi} p_3(k+1) - \frac{30}{\pi} e^{-2x_3(k)} ] \arctan [ -10x_7(k) - 10u_7(k) + 99 ] + \\ & + [ \frac{1-e^{-1}}{\pi} p_4(k+1) - \frac{40}{\pi} e^{-2x_4(k)} ] \arctan [ -10x_7(k+1) + 10x_7(k) + 10u_7(k) + 99 ] \end{aligned} \quad (6.29)$$

Stellen we nu :

$$a(k) = p_1(k+1) - p_2(k+1) - 0,7333 x_7(k) + 0,4000 x_7(k+1) \quad (6.30)$$

$$b_1(k) = 0,2012 p_3(k+1) - 9,5493 e^{-2x_3(k)} \quad (6.31)$$

$$b_2(k) = 0,2012 p_4(k+1) - 12,7324 e^{-2x_4(k)} \quad (6.32)$$

$$c_1(k) = -10x_7(k) + 99 \quad (6.33)$$

$$c_2(k) = -10x_7(k+1) + 10x_7(k) + 99 \quad (6.34)$$

dan wordt de Hamiltoniaan :

$$\begin{aligned} H^2(k) = & u_7(k) [ a(k) - 0,3667 u_7(k) ] + b_1(k) \arctan [ c_1(k) - 10u_7(k) ] \\ & + b_2(k) \arctan [ c_2(k) + 10u_7(k) ] \end{aligned} \quad (6.35)$$

Maximaliseren van  $H^2(k)$  als functie van  $u_1(k)$  voor  $k = 0, 1, 2, 3$  zou de optimale strategie moeten geven.

Het langs algebraïsche weg bepalen van het maximum van  $H^2(k)$  zal het oplossen van een 6e-graads vergelijking betekenen. Daarom is er een eenvoudig programma voor de Philips rekenmachine P9202 geschreven dat via een zoekprocedure de Hamiltoniaan kan maximaliseren. Tevens geeft dit programma voor bekende  $\underline{u}(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  de toestandsvariabelen en de toegevoegde variabelen.

Omdat de convergentie van het rekenproces volgens de 2e methode van paragraaf 5.2 zeer te wensen overliet werd een iets andere methode gebruikt.

Uitgaande van de randvoorwaarden  $\underline{x}(0)$  en  $\underline{p}(4)$  en van een beginschatting voor de gehele strategie  $\underline{u}(0)$ ,  $\underline{u}(1)$ ,  $\underline{u}(2)$  en  $\underline{u}(3)$  worden  $\underline{x}(1)$ ,  $\underline{x}(2)$ ,  $\underline{x}(3)$ ,  $\underline{x}(4)$  en  $\underline{p}(3)$ ,  $\underline{p}(2)$ ,  $\underline{p}(1)$  berekend volgens (6.25) en (6.26). De betrekkingen (6.30) tot (6.34) geven ons nu

$a(3)$ ,  $b_1(3)$ ,  $b_2(3)$ ,  $c_1(3)$  en  $c_2(3)$ , zodat de Hamiltoniaan  $H^2(3)$  bekend is. Via een zoekprocedure wordt het globale maximum van  $H^2(3)$  bepaald als functie van  $u_1(3)$ , zodat we een nieuwe schatting voor  $u_1(3)$  krijgen. De aanvankelijk geschatte strategie wordt nu aangepast met behulp van de verkregen  $u_1(3)$  en de cyclus begint weer opnieuw. Nu wordt echter het maximum van  $H^2(2)$  bepaald en hieruit resulteert een nieuwe schatting voor  $u_1(2)$ .

Bij dit voorbeeld bleek dat, welke beginschatting ook werd genomen, na eenmaal op de bovenbeschreven wijze  $u_1(3)$ ,  $u_1(2)$ ,  $u_1(1)$  en  $u_1(0)$  bepaald te hebben, de strategie ongewijzigd bleef bij een tweede "run". In tabel 6.3 is deze oplossing vermeld.

Uit deze tabel zien we dat op elk tijdstip beide machines in bedrijf moeten zijn, hetgeen betekent dat de opstartkosten

tabel 6.3				
De optimale oplossing				
k	$x_1^*(k)$	$x_1^*(k)$	$x_2^*(k)$	$x_2^*(k)$
0	0	16	30	-16
1	16	6	14	4
2	22	22	18	18
3	44	-22	36	-18
4	22		18	

geen rol van betekenis spelen. Hieruit volgt dat het probleem ook statisch op te lossen moet zijn met de incrementele kosten methode. Inderdaad geeft dit dezelfde strategie zodat, indien de opstartkosten werkelijk onbelangrijk zijn in dit voorbeeld, het maximum principe de goede oplossing geeft.

Nadere beschouwing van de gegeven brandstof- en opstartkosten leert dat de opstartkosten niet opwegen tegen de verminderde brandstofkosten ten gevolge van het uit bedrijf nemen van een machine. Wat de Hamiltoniaan betreft betekent dit dat de kwadratische term

$$u_1(k) [a(k) - 0,3667u_1(k)]$$

veel belangrijker is dan de beide arctan-termen.

In dit voorbeeld komt helaas het dynamische aspect van het optimaliseren nauwelijks aan de orde. Ondanks alle wijzigingen die in de loop van dit hoofdstuk het oorspronkelijke model moest ondergaan ten einde te voldoen aan de verschillende restricties blijkt het maximum principe bij dit voorbeeld toch de juiste oplossing te geven.

Helaas ontbrak de tijd om de brandstof- en opstartkosten in dit voorbeeld <sup>zodanig</sup> te wijzigen dat het dynamische aspect van het probleem duidelijk naar voren zou komen.

## 6.8. Conclusies

Het discrete model (zie paragraaf 2.2 en hoofdstuk 5) blijkt niet geschikt te zijn voor toepassing van het discrete maximum principe ter bepaling van de optimale lastverdeling. Dit is te wijten aan het feit dat de beslissingsvariabele bij dit model slechts twee discrete waarden kan aannemen (zie ook het slot van paragraaf 4.5).

De verwachting is dat het continue model wel geschikt is voor toepassing van het maximum principe. Differentieerbaarheid is hierbij een belangrijke eis en de verschillende restricties waaraan het model moet voldoen kunnen slechts met veel moeite beschreven worden door differentieerbare functies. De mogelijkheid bestaat dat hierdoor een te grote discrepantie ontstaat tussen het model en de werkelijkheid.

In dit verband verdient het aanbeveling methoden te onderzoeken waarbij wel restricties aan de toestandsvariabele kunnen worden opgelegd, zoals bijvoorbeeld in <sup>19)</sup>.

Bij verdubbeling van het aantal machines neemt de benodigde geheugenruimte voor toestands- en toegevoegde variabelen slechts met een factor 4 toe. Dit is belangrijk minder dan bij dynamisch programmeren. Voor deze methode van optimale lastverdeling wordt verwezen naar <sup>2)</sup>.

Wat de rekentijd betreft, dit hangt in hoge mate af van de convergentie van het rekenproces en daar is helaas nog weinig over bekend.

Verwijzingen

1. L.K. Kirchmayer  
Economic operation of power systems par. 2.3  
Wiley, New York 1958
2. G. Honderd en B. Krijgsman  
Economic optimization of electric power production.  
Proceedings of the international seminar on : Automatic control  
in production and distribution of electric power. pag.485/492  
Brussel, 18-22 april 1966
3. L.L. Rozenoer  
The Maximum Principle of L.S. Pontryagin in optimal system theory,  
part III, Automation and Remote Control, Volume 20, number 12  
December 1959 pag. 1523
4. M. Athans en P.L. Falb  
Optimal Control, An introduction to the theory and its applica-  
tions.  
McGraw-Hill 1966
5. L.S. Pontryagin et al.  
The mathematical theory of optimal processes  
John Wiley, New York, 1962
6. E.B. Lee and L. Markus  
Foundations of optimal control theory  
John Wiley, New York, 1967
7. S. Katz  
A discrete version of Pontryagin's Maximum Principle  
Journal of Electronics and Control, Volume 13, number 2  
Augustus 1962
8. S. Katz  
Best operating points for staged systems  
Industrial and Engineering Chemistry, Fundamentals  
Volume 1, number 4, November 1962
9. S.S.L. Chang  
Synthesis of optimum control systems  
Chapter 12 : Computer optimization of nonlinear systems  
McGraw-Hill, 1961
10. S.S.L. Chang  
Computer optimization of nonlinear control systems by means of  
digitized maximum principle  
I.R.E. International Convention Record, Volume 9, Part 4, 1961

11. A.G. Butkovskii  
The necessary and sufficient conditions for optimality of discrete control systems  
Automation and Remote Control, Volume 24, number 8, Augustus 1963
12. B.W. Jordan en E. Polak  
Theory of a class of discrete optimal control systems  
Journal of Electronics and Control, Volume 17, number 6  
December 1964
13. H. Halkin  
Optimal control for systems described by difference equations  
in : Advances in Control Systems, C.T. Leondes ed.  
Volume 1, 1964. Academic Press
14. H. Halkin  
A maximum principle of the Pontryagin type for systems described by nonlinear difference equations  
S.I.A.M. Journal on Control, Volume 4, number 1, 1966
15. J.M. Holtzman  
Convexity and the maximum principle for discrete systems  
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control  
Volume, 11, number 1, Januari 1966
16. J.M. Holtzman  
On the maximum principle for nonlinear discrete-time systems  
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control  
Volume 11, number 2, April 1966
17. S.S.L. Chang, H. Halkin en J.M. Holtzman  
On "Convexity and the maximum principle for discrete systems"  
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control  
Volume 12, number 1, Februari 1967
18. J.M. Holtzman en H. Halkin  
Directional convexity and the maximum principle for discrete systems  
S.I.A.M. Journal on Control, Volume 4, number 2, 1966
19. S. Narita  
Discrete maximum principle for multistage decision processes with restricted state variables.  
Electrical Engineering in Japan. Volume 87, number 2, Feb. 1967
20. L. Fan en C. Wang  
The discrete maximum principle  
Wiley, 1964



Auteur(s) : Ir. C.H. Smedema  
 Titel : Optimizing the economic operation of a power station

Kopie aan :

Auteur(s)	
Administratie (Rood)	
Dr.E.Kauer	Zentrallab.Aachen
Mr.C.F.Brockelsby	Mullard Ltd. London
Mr.P.E.Trier	M.R.L.Salfords
Mr.P.Ridgewell	M.R.L.Salfords
Dr.K.J.Schmidt-Tiedemann	Zentrallab.Hamburg
M.M. Ducot	L.E.P.Limeil-Brevannes
M.M.Fleury	L.E.P.Limeil-Brevannes
W.Meerlo	Octrooi Afd. OA7
Directeur	Dr.Ir.K.Teer WB5
Adj.Dir.	
Groepsleider	Ir.A.F.Verkruissen
Dr.D.D. King	Briarcliff Manor
Hr.F.Douma	Nat.Lab. WY3
Ir.G.J.Esser	P.B.N. VB3
Prof.Dr.Ir.P.Eykhoff	T.H.E.
Ir.A.C.M.Gieles	Nat.Lab. WY3
Ir.J.de Haas	Elec.bedr. Zuid-Holland
Ir.J.van Harten	Kon/Shell Lab. Amsterdam
Ir.M.L.J.Hautus	T.H.E.
Ir.H.J.M.Hoek	Nat.Lab. WY3
Ir.G.Honderd	T.H.D.
Ir.Th.J.van Kessel	Nat.Lab. WY3
Ir.J.F.Klinkhamer	Nat.Lab. WB3
Ir.H.van der Kooi	P.I.T. TQ V-3
Ir.K.E.Kuyk	Nat.Lab. WY4
Ir.C.H.Loos	Nat.Lab. WY3
Ir.R.J.van der Plassche	Nat.Lab. WY3
Ir.P.J.Poolman	Nat.Lab. WY3
Ir.A.van Rede	T.H.E.
Hr.J.L.M.Reynders	Nat.Lab. WY3
Ir.L.C.H.van der Sanden	P.B.N. VB3
Ir.A.W.Sins	Nat.Lab. WY3
Ir.M.van Tol	P.I.T. TQ III-1
Ir.W.Troost	P.I.T. TQ V-3

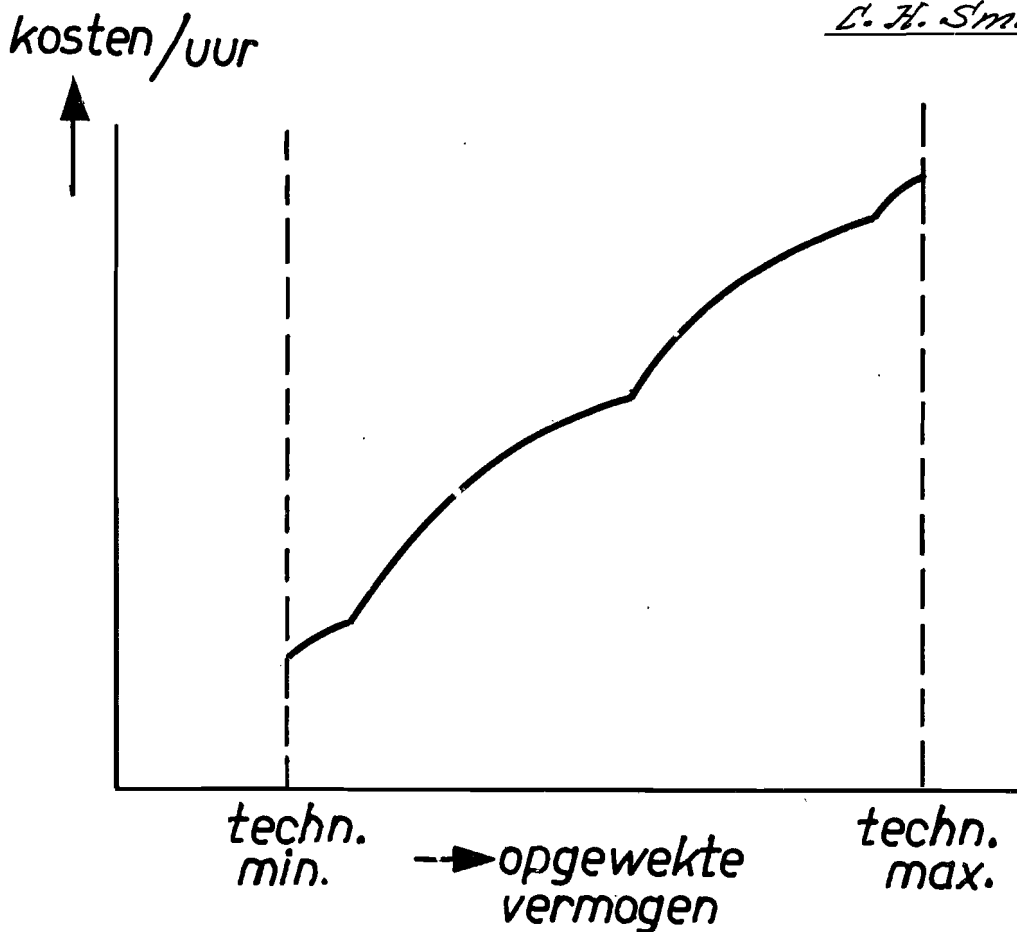


Fig. 1:1 Schematische voorstelling van een  
rendementscurve

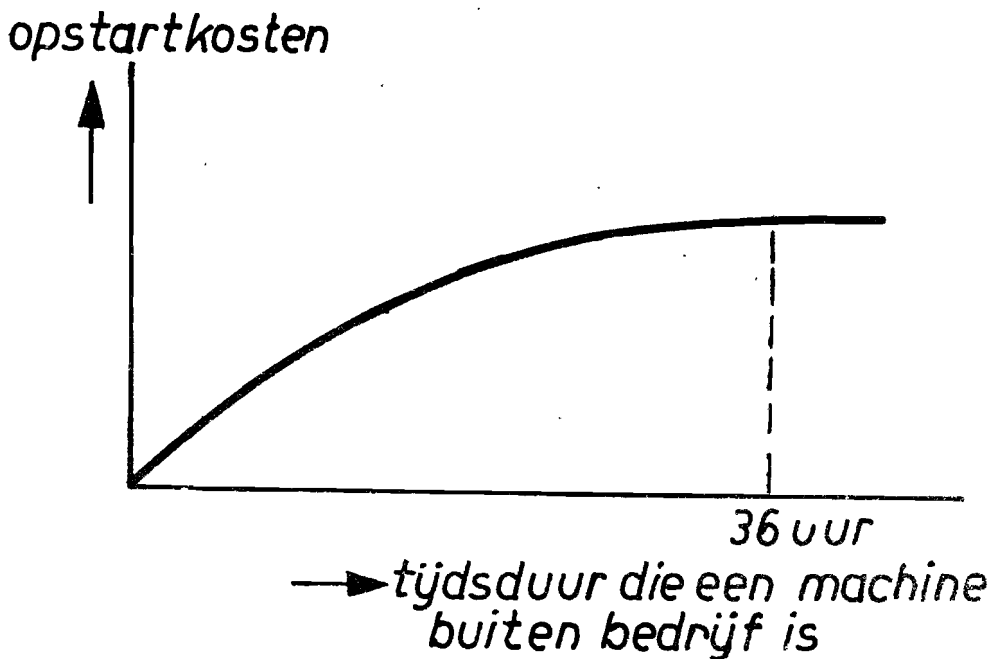


Fig. 1:2 Schematische voorstelling van de  
opstartkosten

$k$	$u_i(k)$	$x_i(k)$
0	0	0
1	1	0
2	1	1
3	1	2
4	0	3
5	0	0
6		0

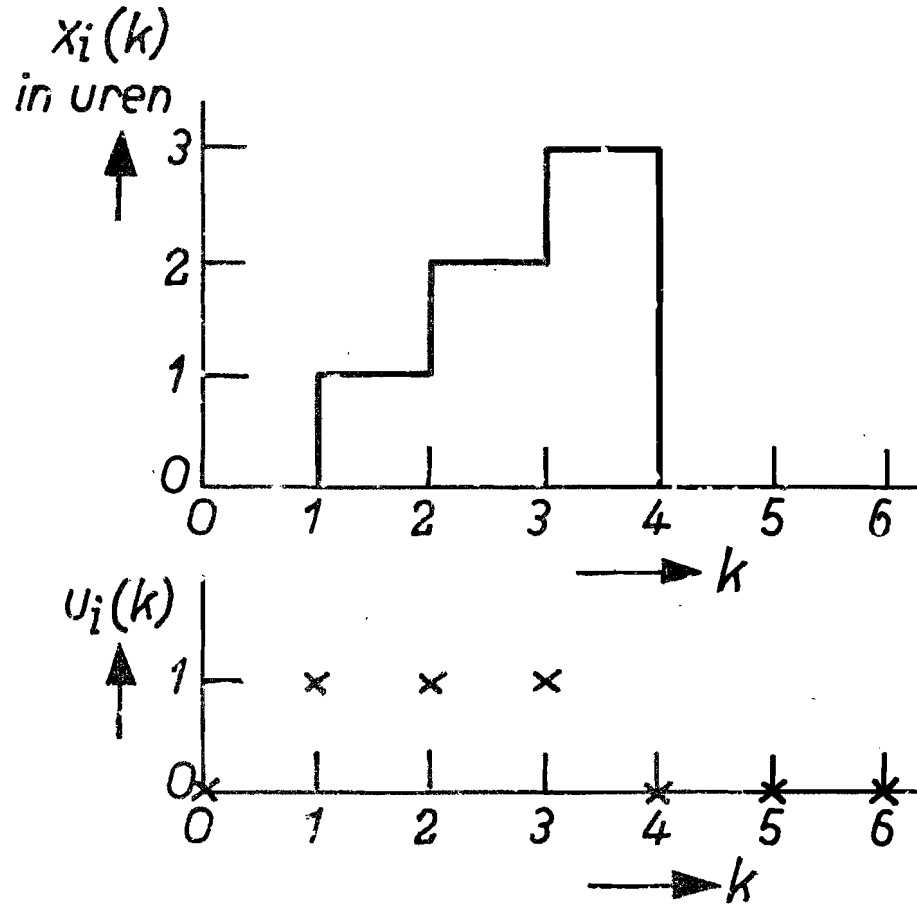


Fig. 2:1 Voorbeeld van toepassing van de differentievergelijking:  

$$x_i(k+1) = u_i(k) x_i(k) + u_i(k)$$

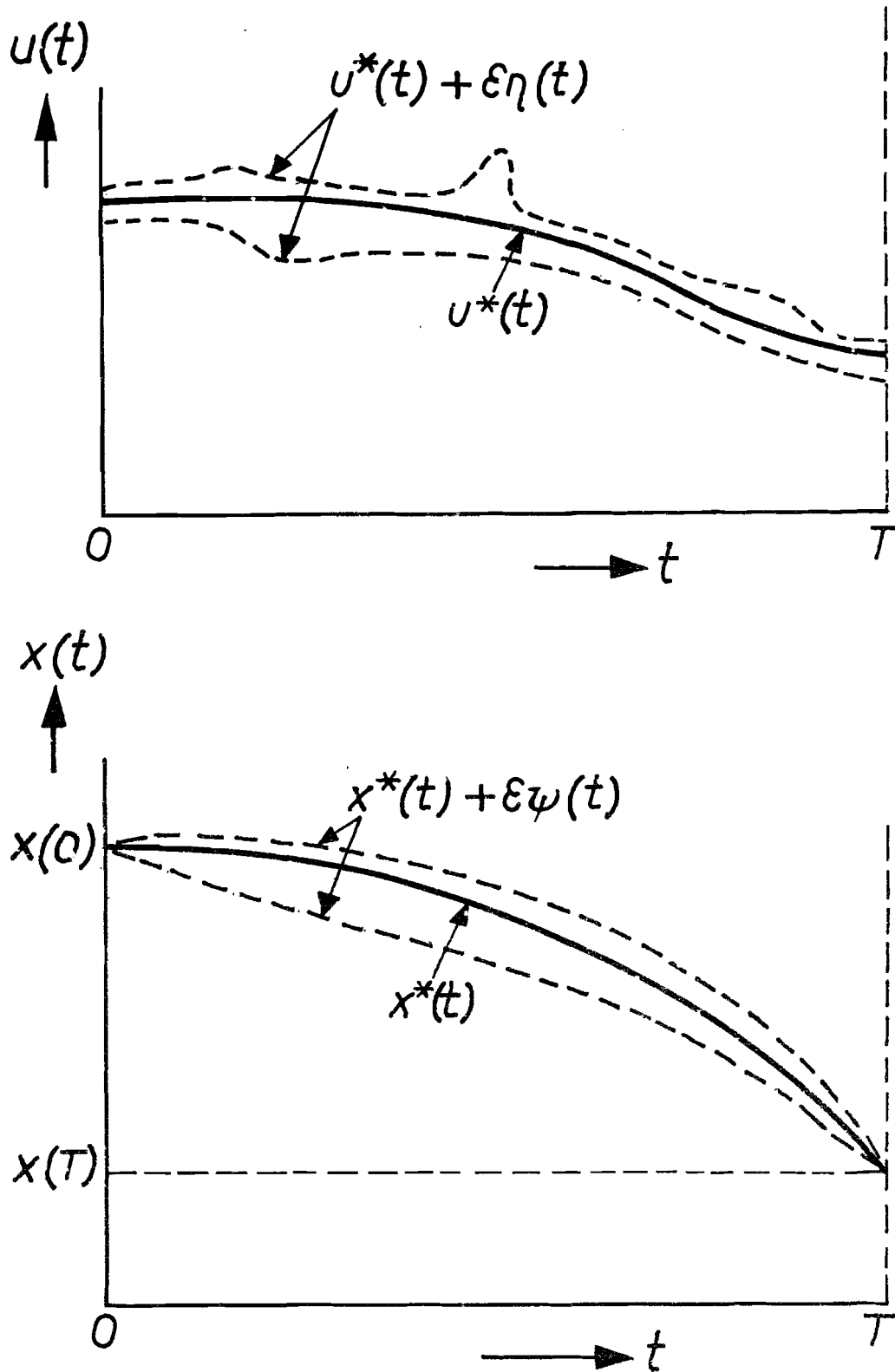


Fig. 3:1 Variaties van de optimale strategie en de  
corresponderende variaties van de optimale  
trajectorie

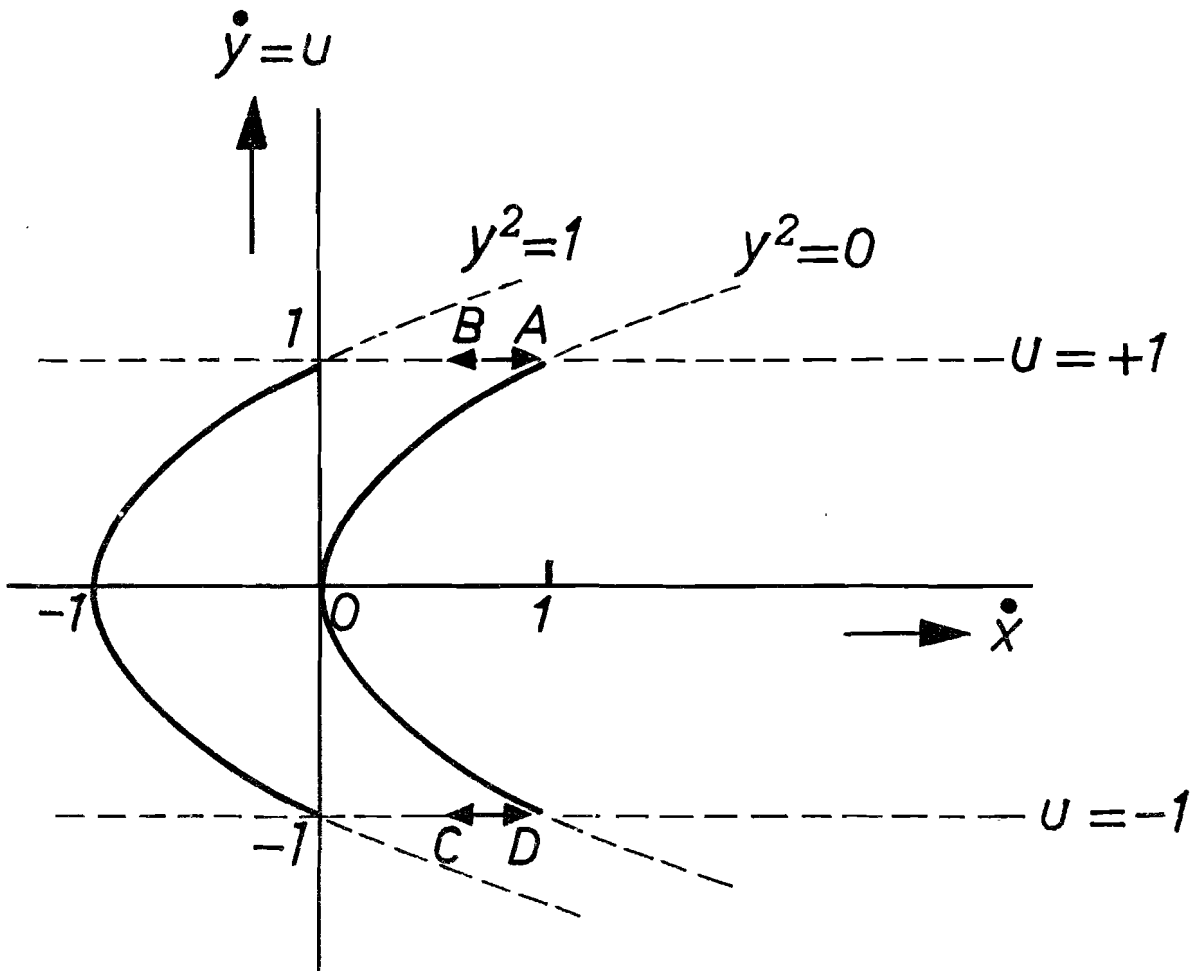


Fig. 3:2 u als functie van  $\dot{x}$  met  $y^2$  als parameter  
volgens  $u = \pm \sqrt{\dot{x} + y^2}$

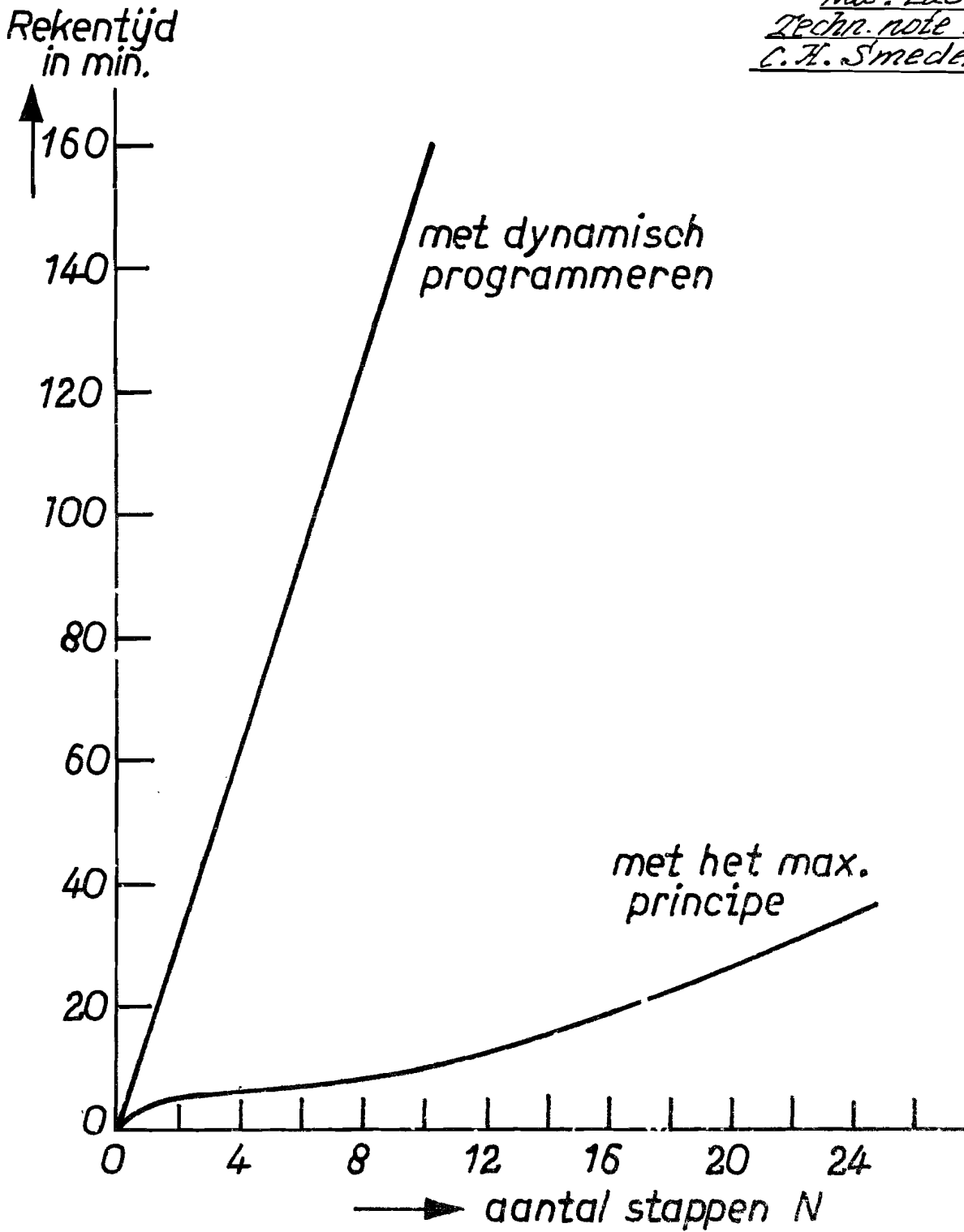
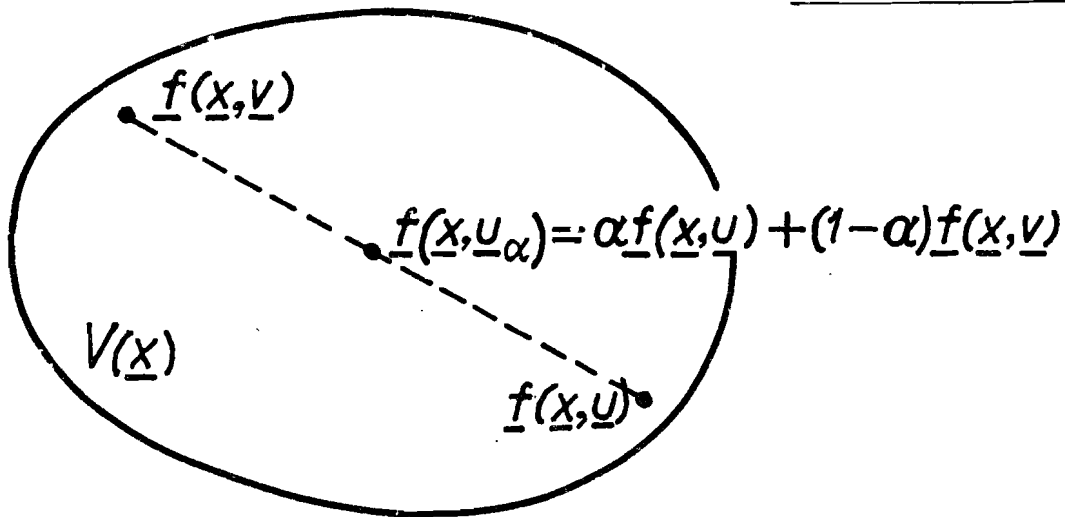
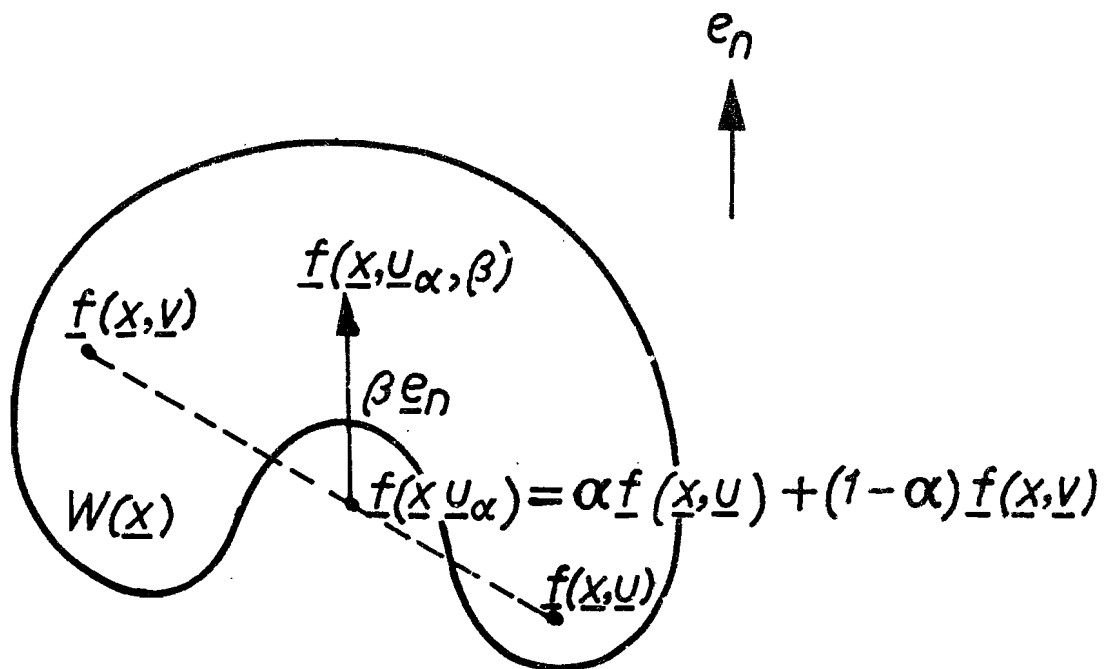


Fig. 4:1 Vergelijking van de rekestijd nodig bij  
toepassing van het dynamisch programmeren  
en het max. principe voor het katalysator-  
vervangingsprobleem



$V(\underline{x}) = \{ \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) : \underline{u} \in \Omega \}$  is convex als  $\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}_\alpha) \in V(\underline{x})$  voor  $\alpha \in [0, 1]$



$W(\underline{x}) = \{ \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) : \underline{u} \in \Omega \}$  is convex in de richting van  $\underline{e}_n$  als voor elke  $\alpha \in [0, 1]$  geldt dat  $\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}_\alpha, \beta) \in W(\underline{x})$  waarbij  $\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}_\alpha, \beta) = \alpha \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) + (1 - \alpha) \underline{f}(\underline{x}, \underline{v}) + \beta \underline{e}_n$   
 $\beta \geq 0$

Fig. 4:2 Convexiteit en richtings-convexiteit

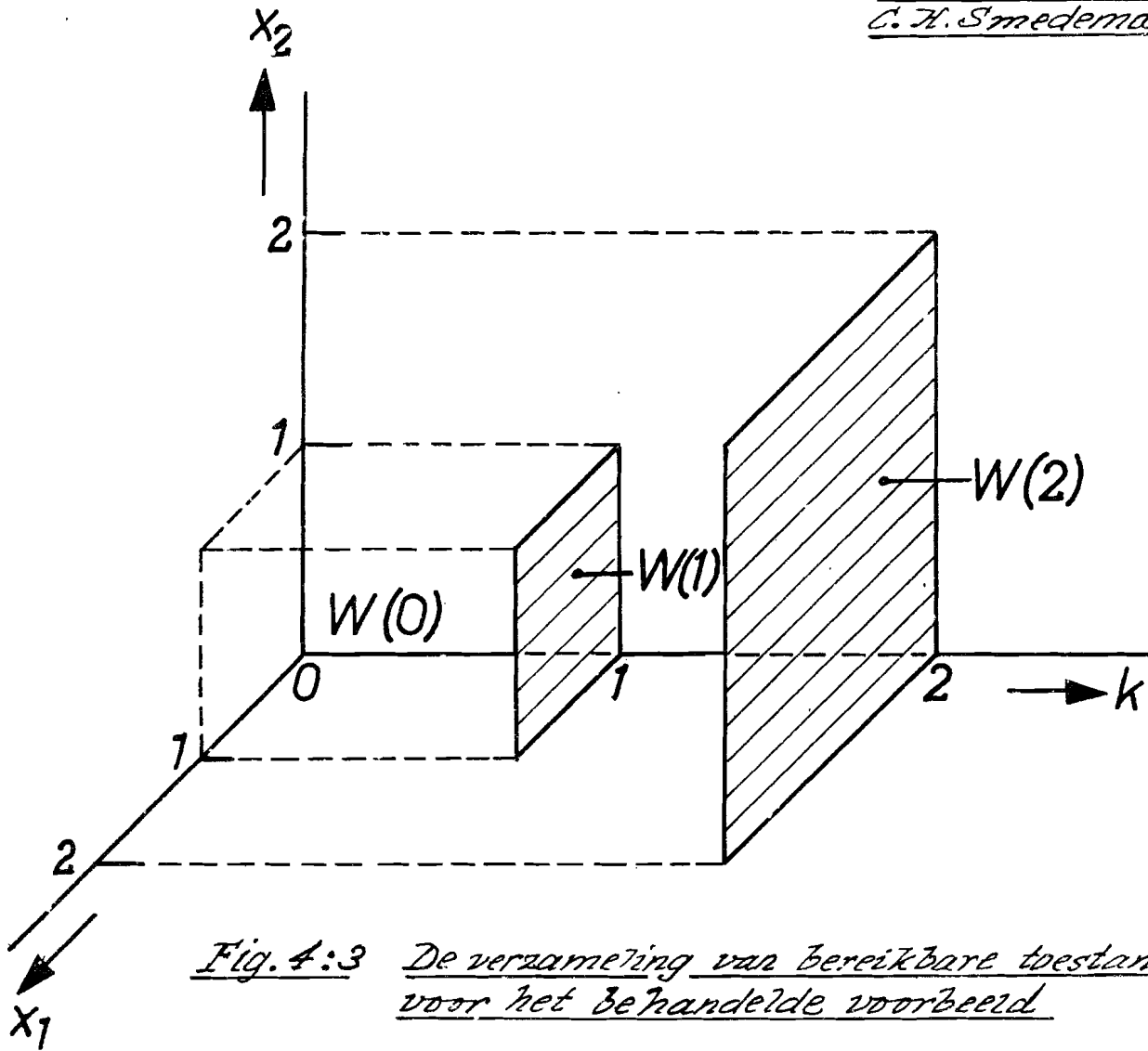


Fig. 4:3 De verzameling van bereikbare toestanden voor het behandelde voorbeeld

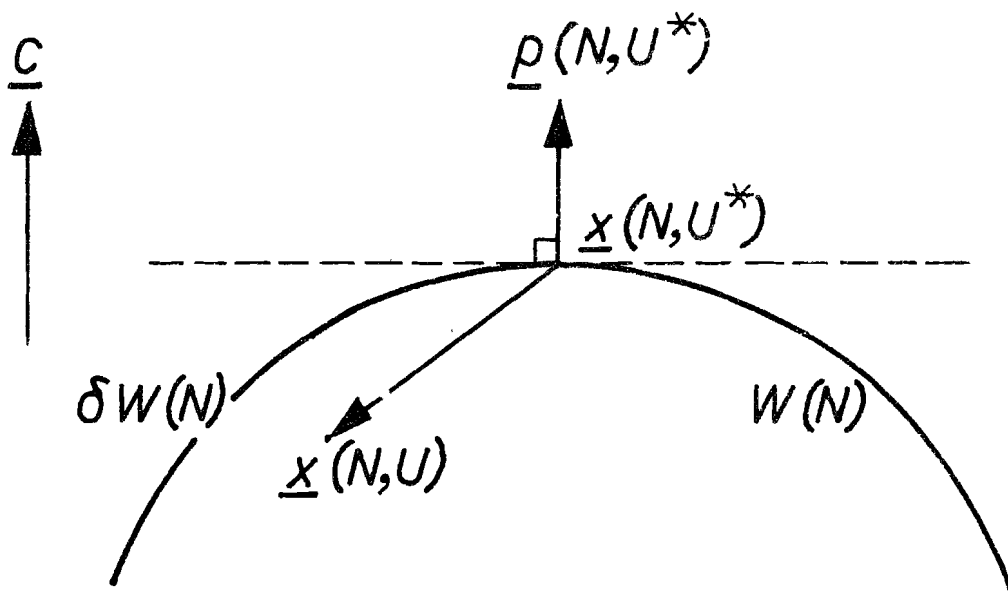


Fig. 4:4 De situatie op het eindtijdstip N



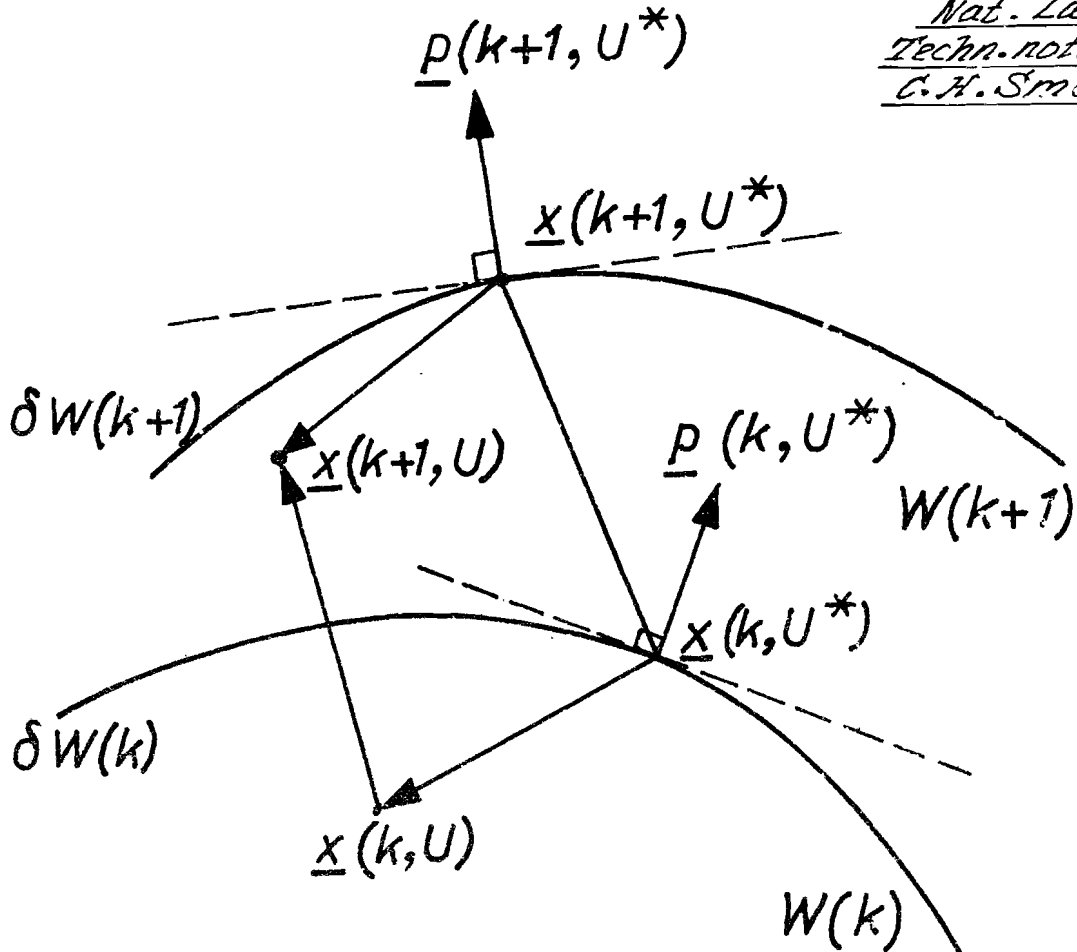


Fig. 4:5 De situatie voor de overgang van  $W(k)$  naar  $W(k+1)$

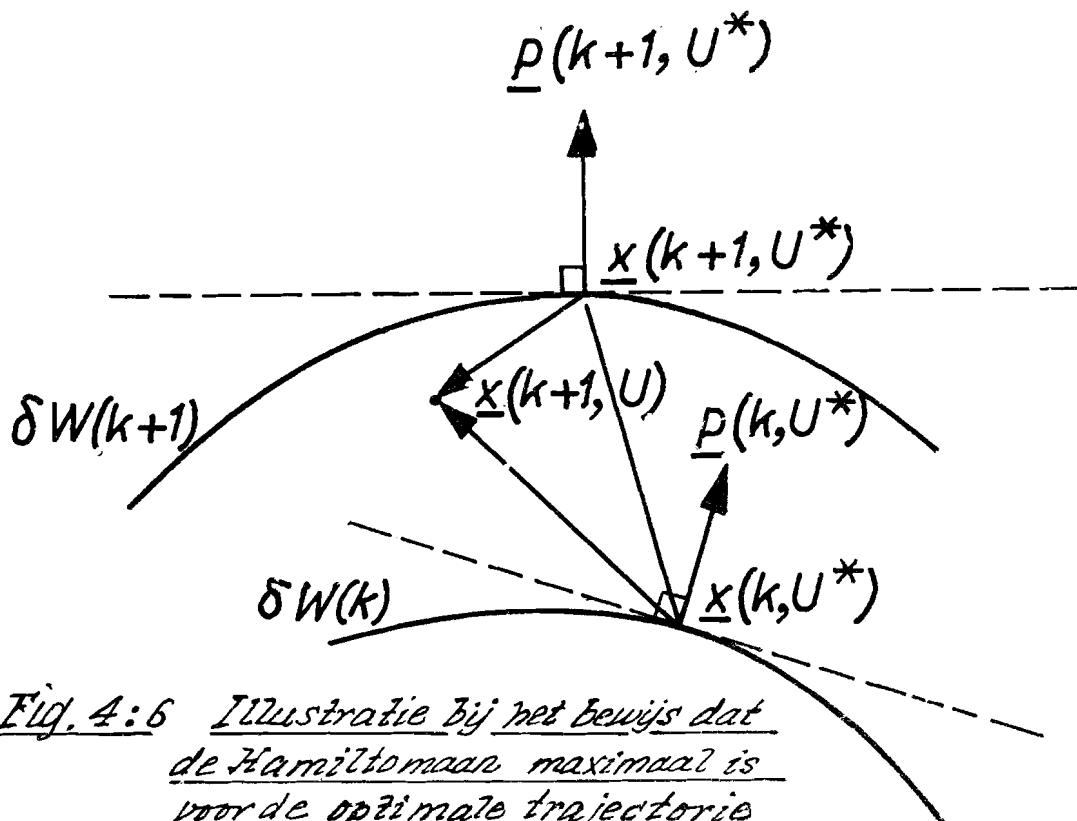


Fig. 4:6 Illustratie bij het bewijs dat de Hamiltoniaan maximaal is voor de optimale trajectorie

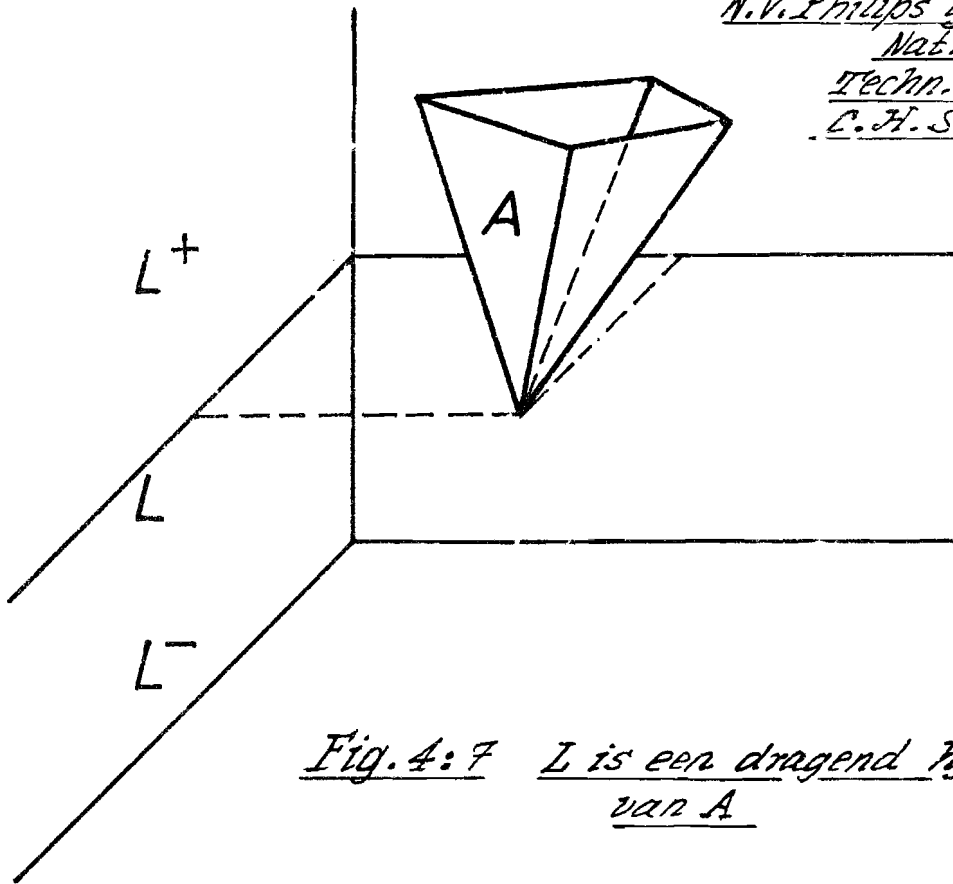


Fig. 4:7  $L$  is een dragend hypervlak  
van  $A$

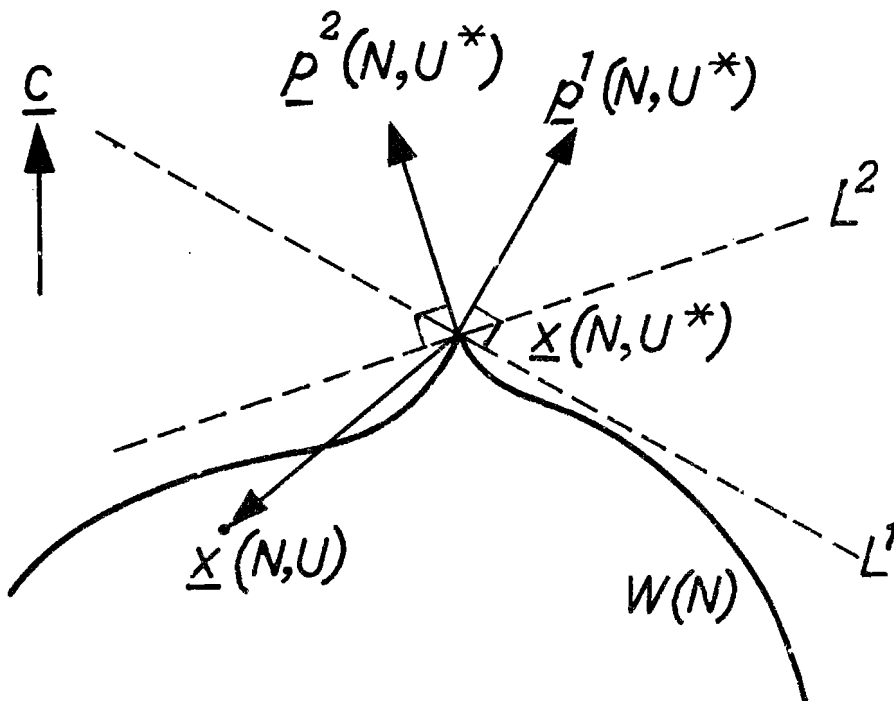


Fig. 4:8 Relatie (4.31) geldt zowel voor  $\underline{p}^1(N, U^*)$   
als voor  $\underline{p}^2(N, U^*)$

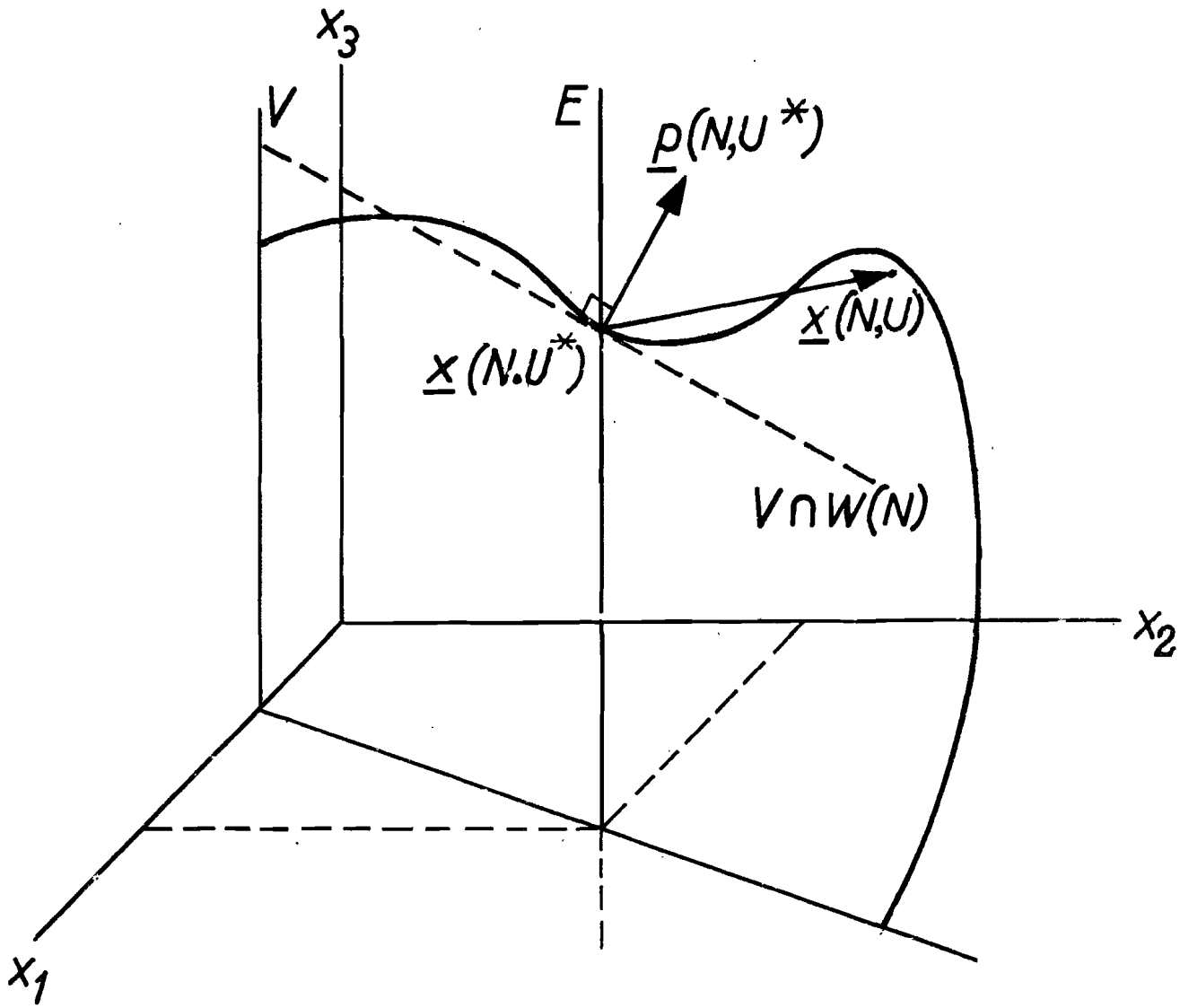


Fig. 4:9 De situatie als  $W(N)$  niet convex is  
voor het vaste eindpunt probleem

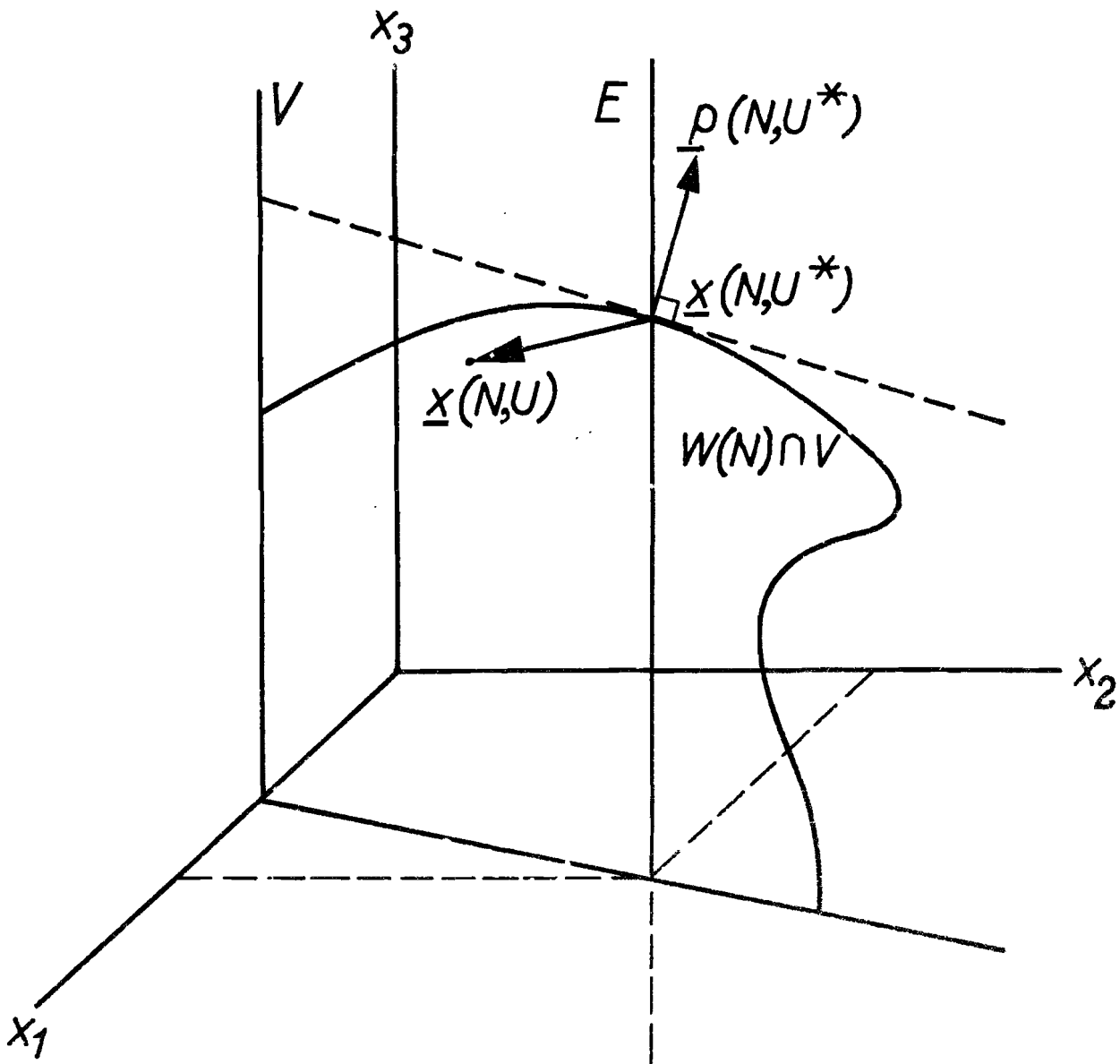


Fig. 4: 10  $W(N)$  is convex in de richting van  $x_3$ . Er geldt:  
 $\langle \underline{p}(N, U^*) | \underline{x}(N, U) - \underline{x}(N, U^*) \rangle \leq 0$  voor alle  $\underline{x}(N, U) \in W(N)$ ,

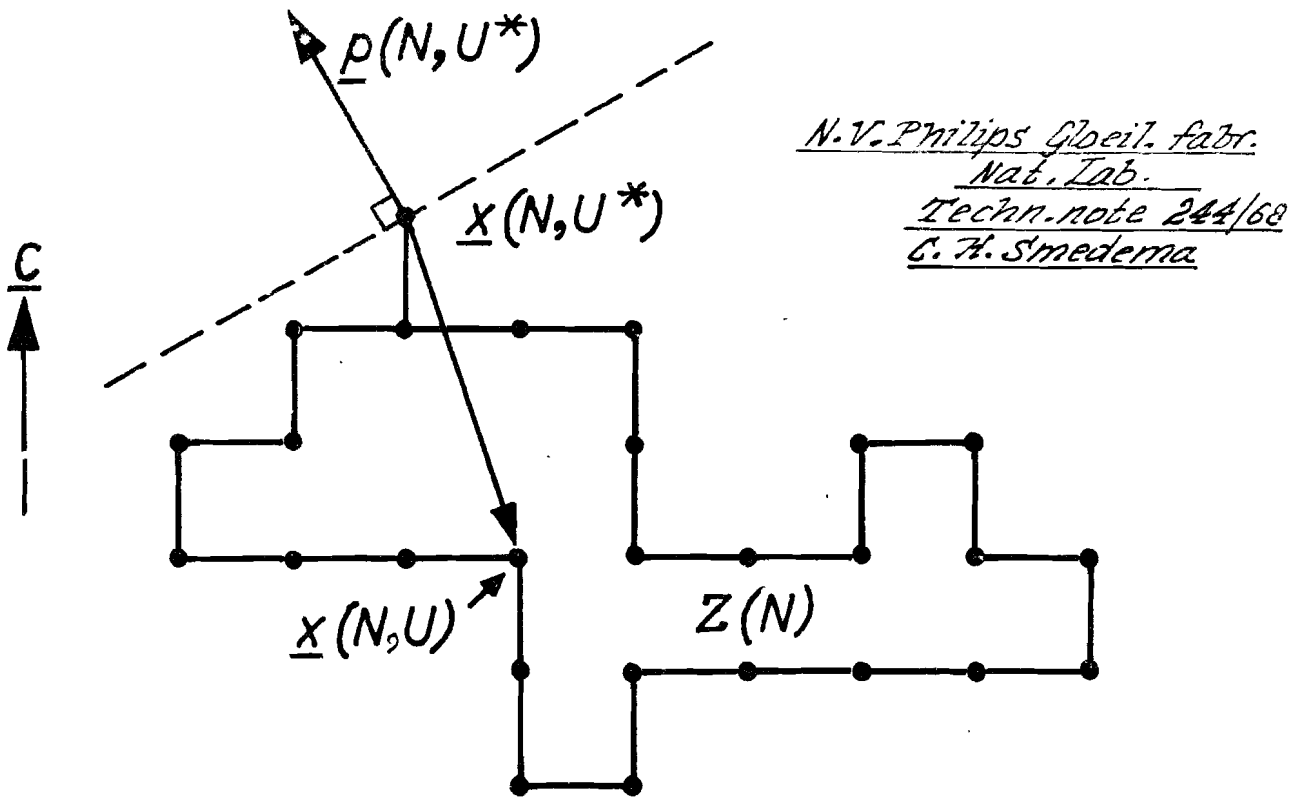


Fig 4:11 Dat voor discrete verzameling  $W(N)$  geldt voor de optimale trajectorie:

$$\langle \underline{p}(N, U^*) | \underline{x}(N, U) - \underline{x}(N, U^*) \rangle \leq 0 \text{ voor alle } \underline{x}(N, U) \in W(N)$$

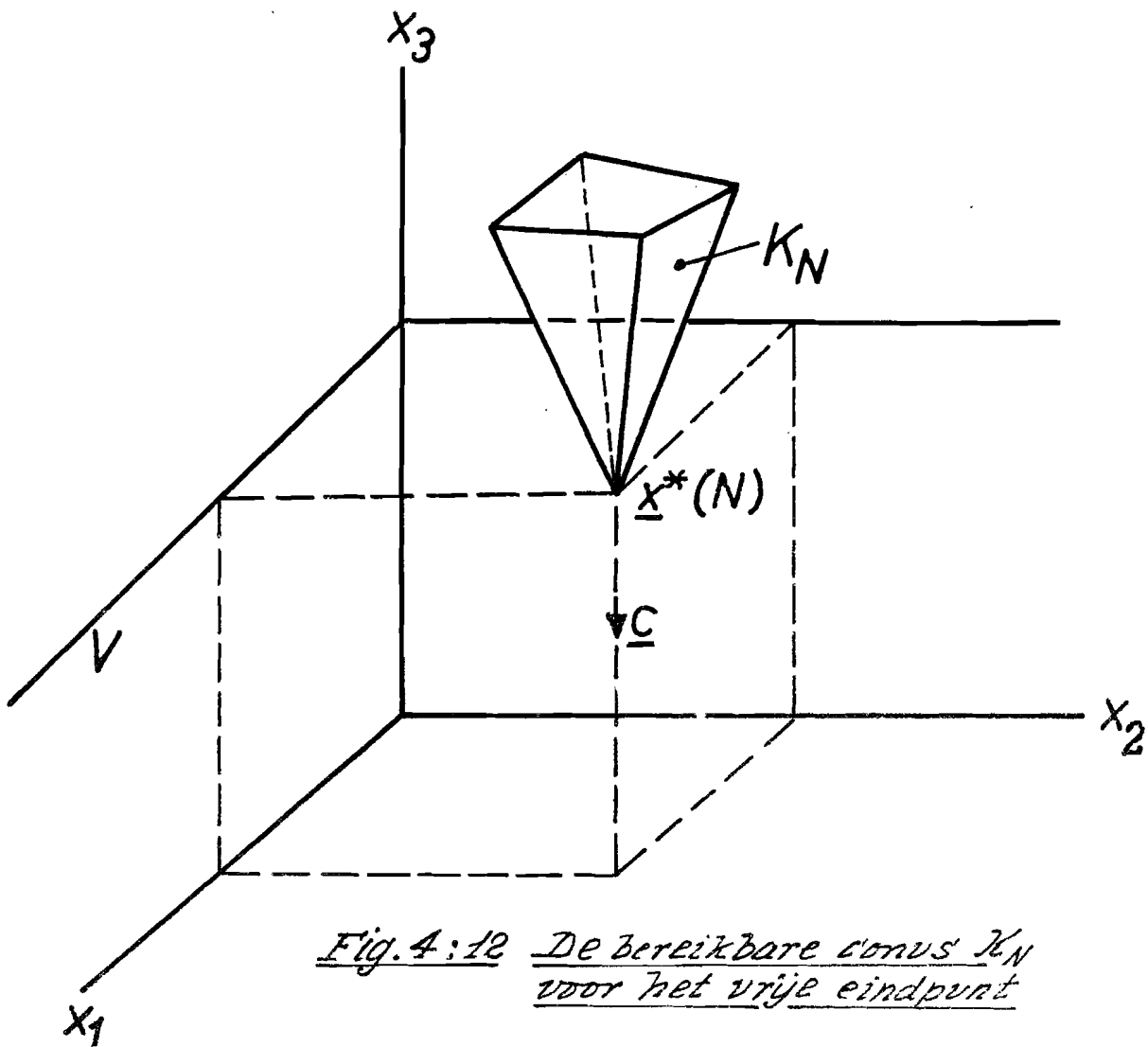


Fig. 4:12 De bereikbare conus  $K_N$  voor het vrije eindpunt

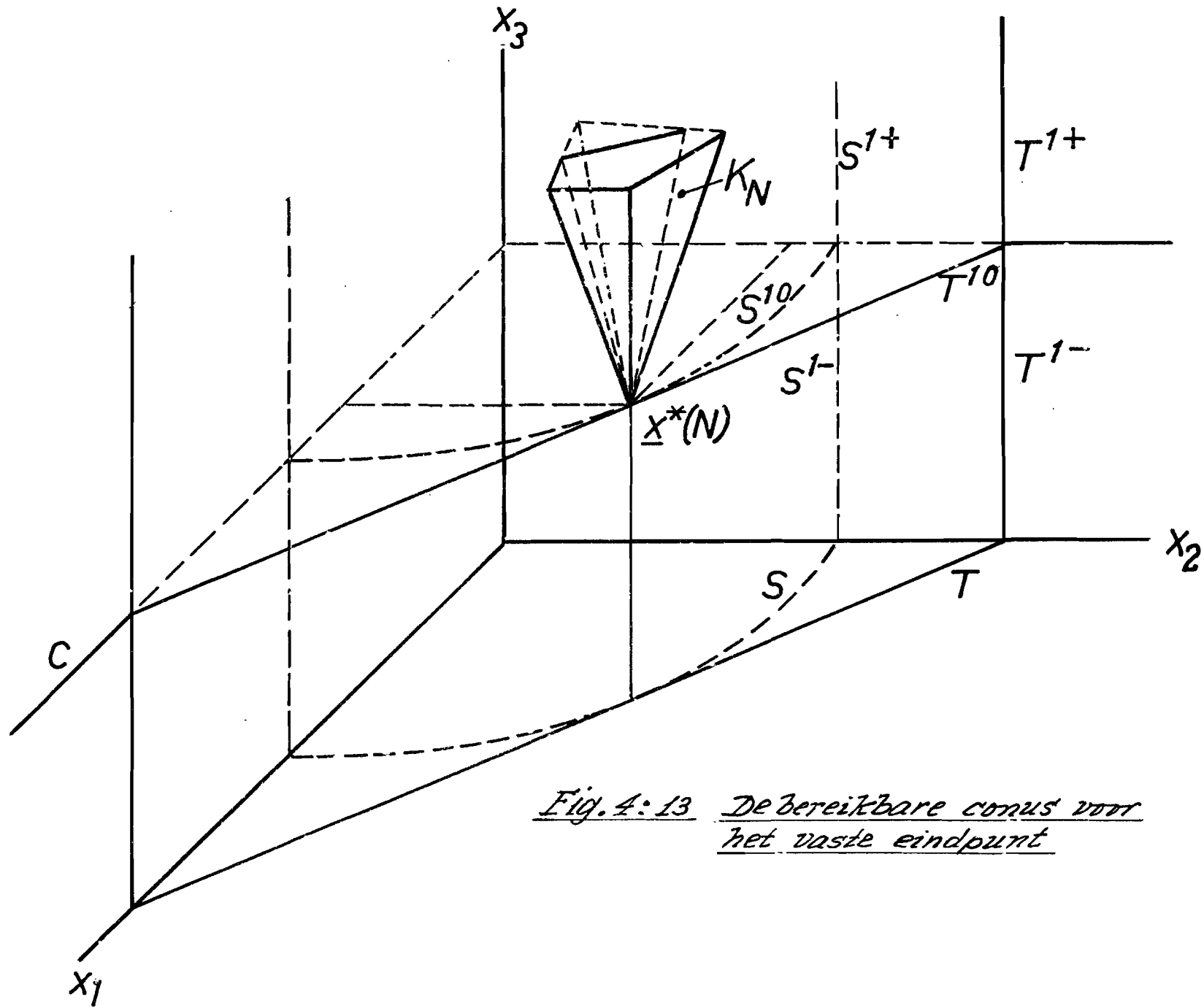


Fig. 4:13 De bereikbare conus voor  
het vaste eindpunt

N.V. Philips Geoelect. Fabr.  
Nat. Lab.  
Techn. note 244/58  
C. H. Smeekma

N.V. Philips Gloeil. Fabr.  
Nat. Lab.  
Techn. note 244/68  
C. H. Smedema

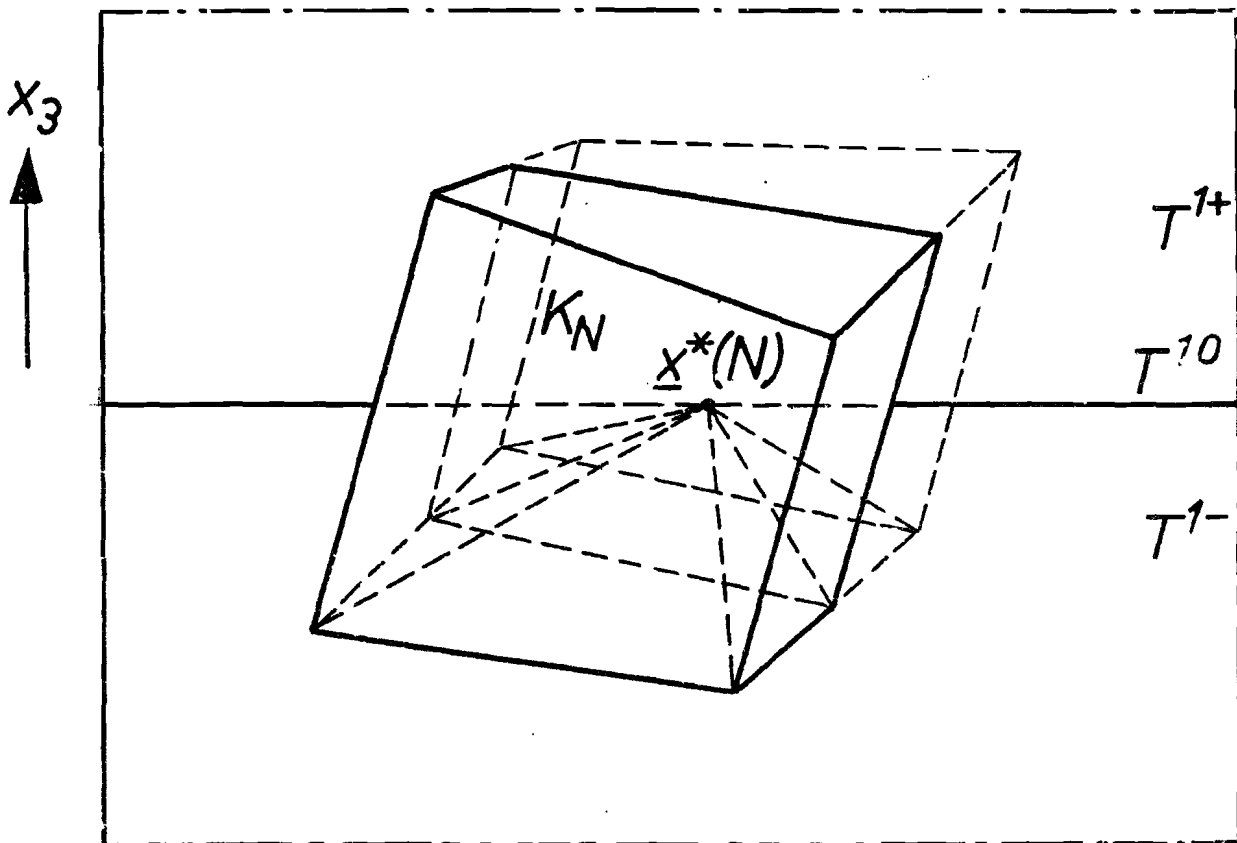


Fig. 4: 14 De bereikbare conus  $K_N$  is niet convex  
in de richting van  $-x_3$

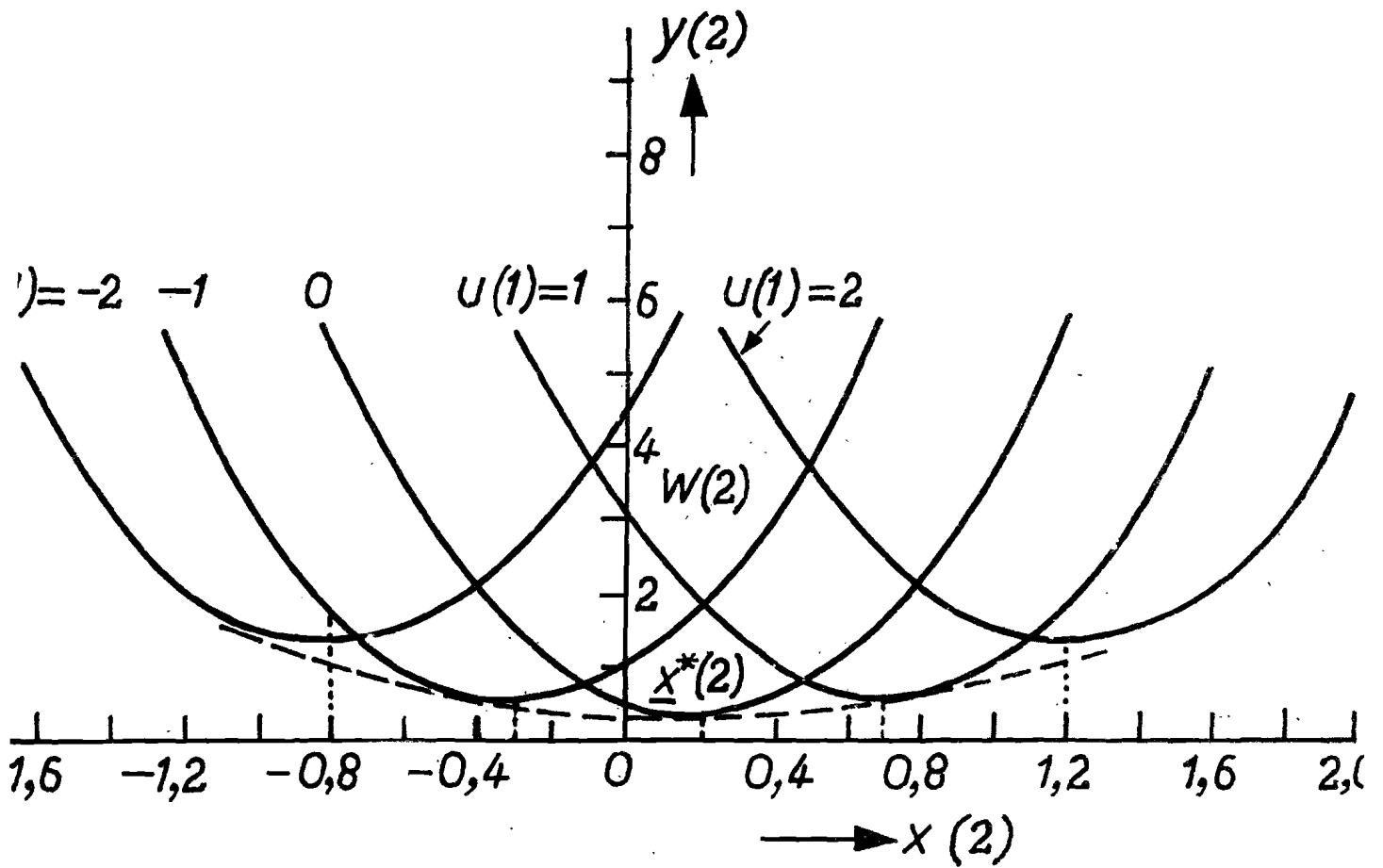
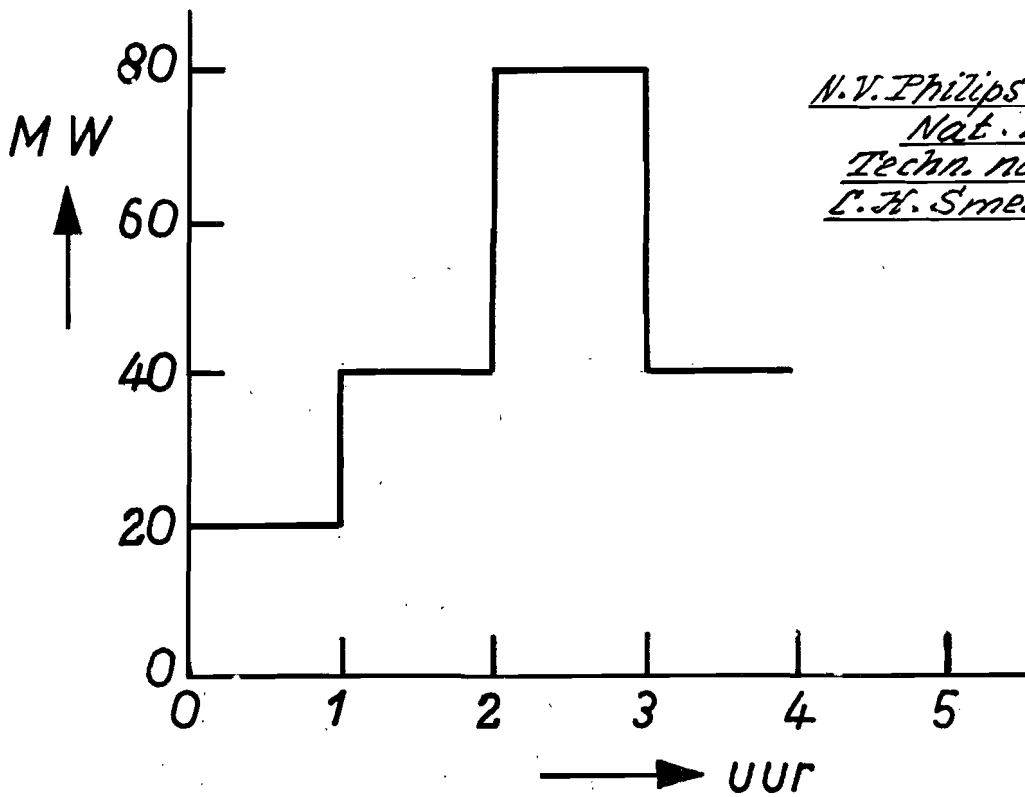


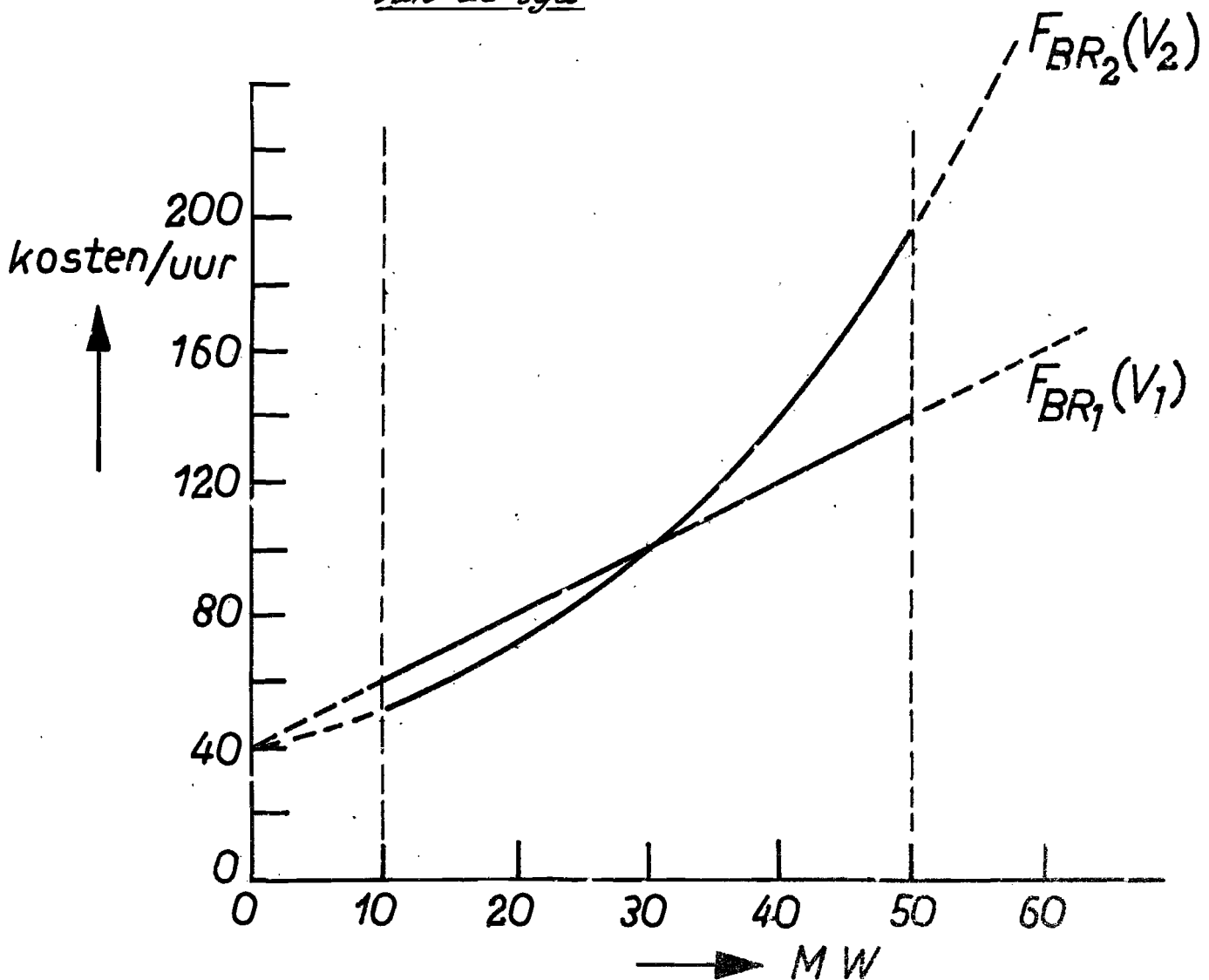
Fig. 4:15 De constructie van  $W(2)$





*N.V. Philips Gloeil. fabr.  
Nat. Lab.  
Techn. note 244/68  
C.H. Smedema*

*Fig. 5:1 Het te leveren vermogen  $V_T$  als functie van de tijd*



*Fig. 5:2 De brandstofkosten per uur als functie van het geleverde vermogen van  $M_1$  en  $M_2$*

N.V. Philips Gloeil. fabr.  
Nat. Lab.  
Techn. note 244/68  
G. H. Smedema

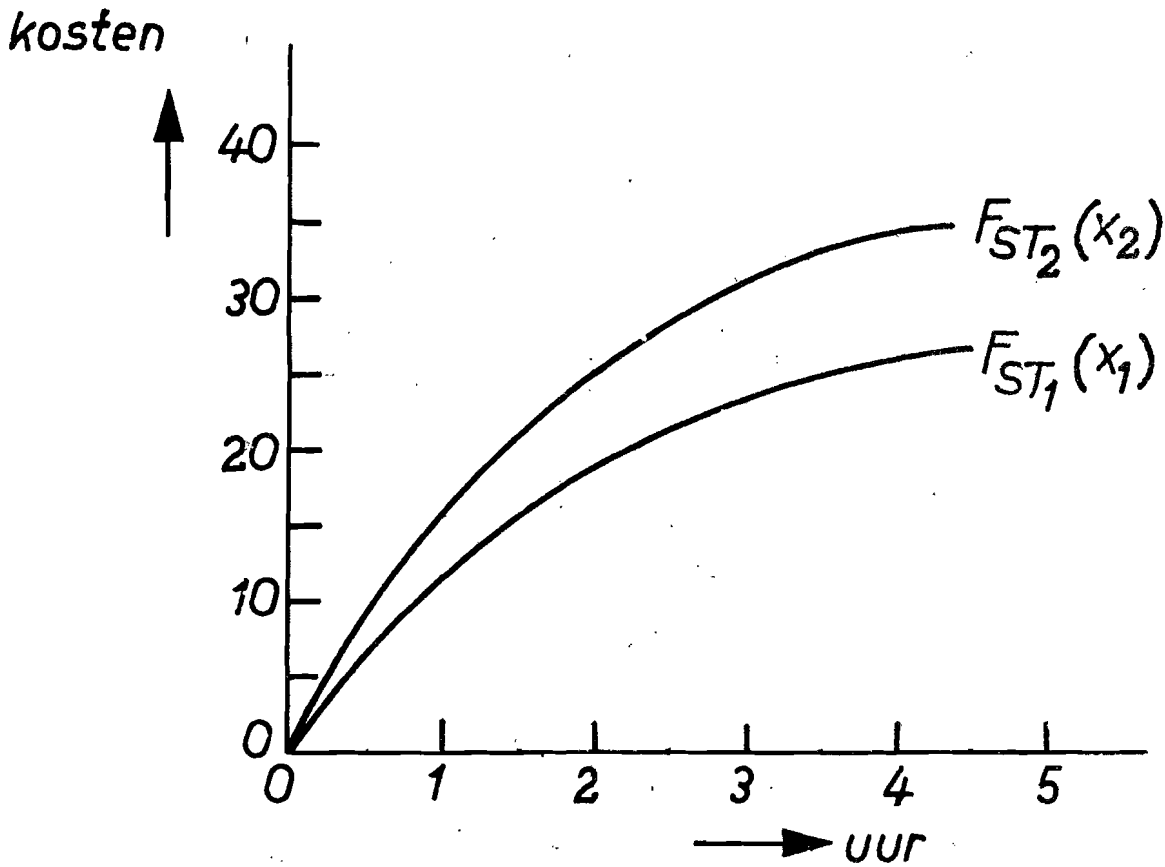


Fig. 5:3 De opstartkosten als functie van de tijd  
die  $M_1$  en  $M_2$  uit bedrijf geweest zijn.

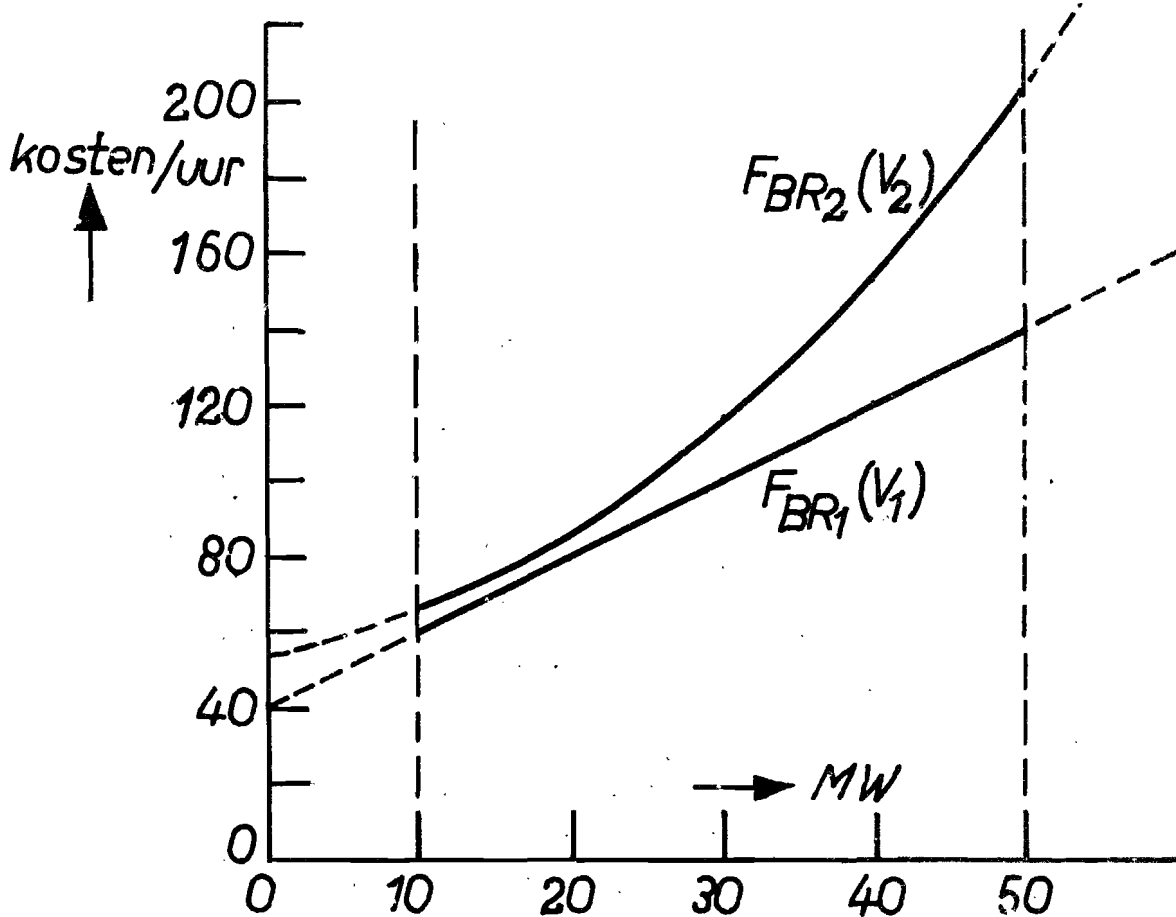
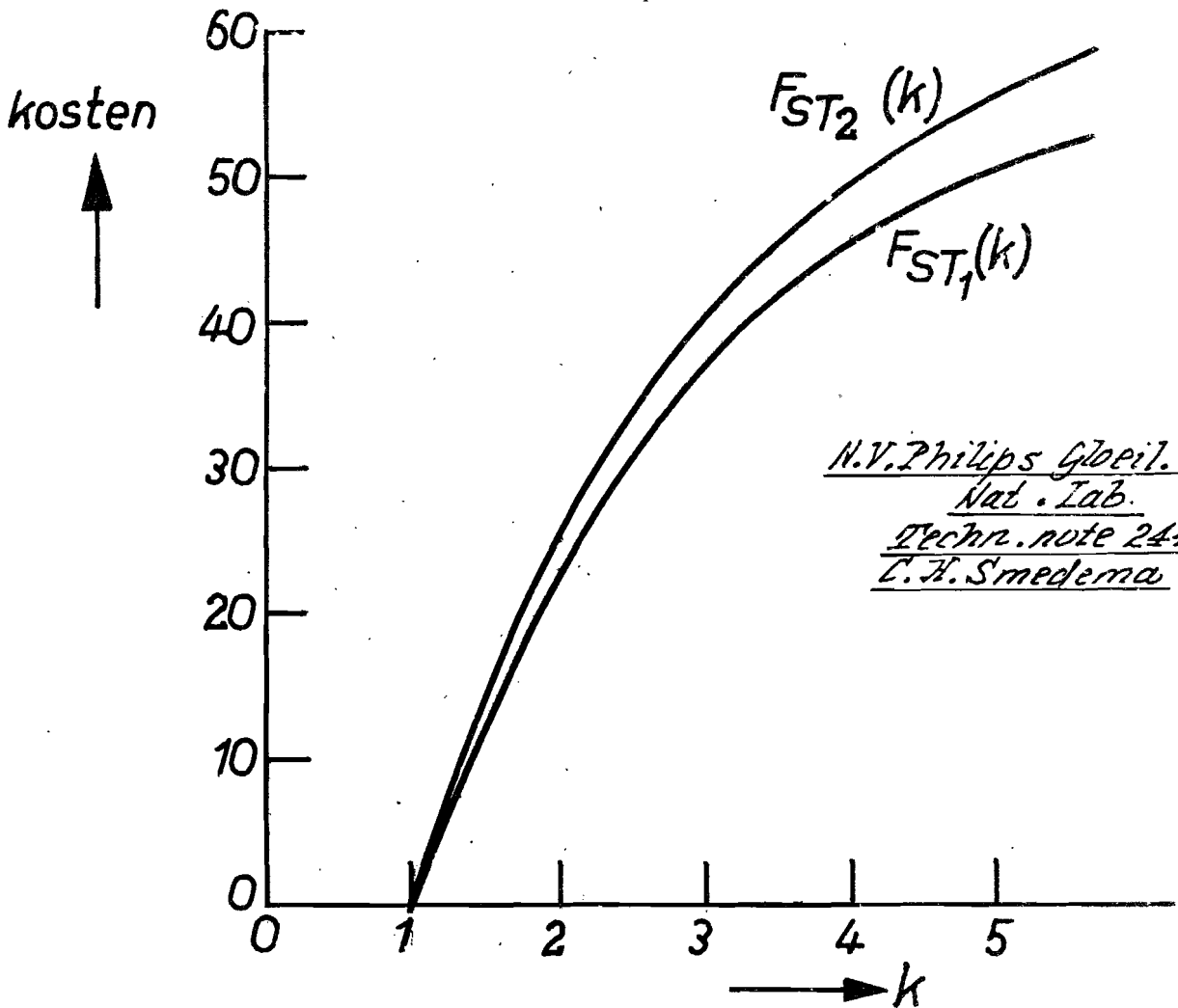


Fig. 5:4 De brandstofkosten per uur als functie van het geleverde vermogen van  $M_1$  en  $M_2$  volgens (5.91) en (5.92)



N.V. Philips Gloeil. fabr.  
Nat. Lab.  
Techn. note 244/68  
L. H. Smedema

Fig. 5:5 De opstartkosten volgens tabel 5.15

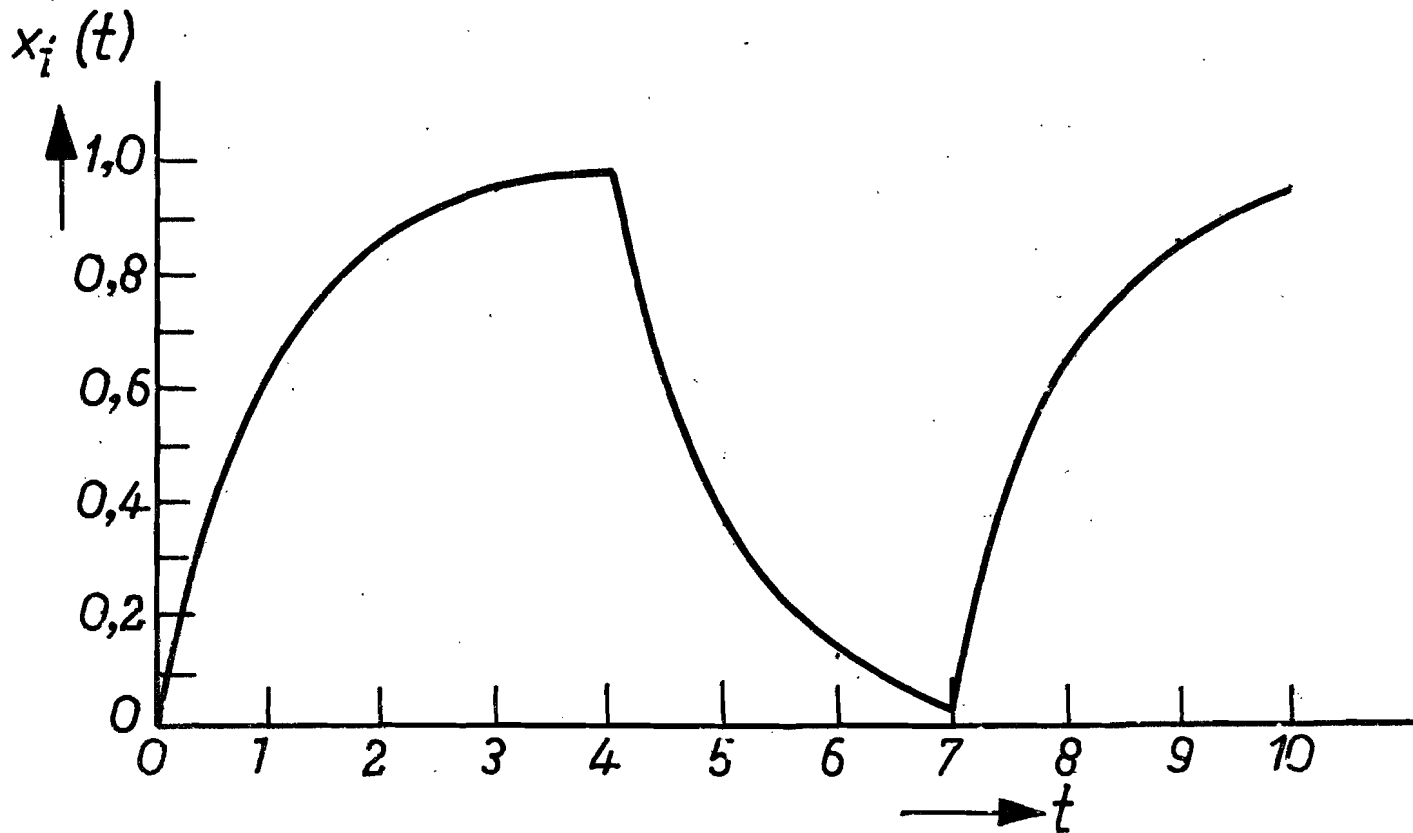


Fig. 5:6 De toestandsvariabele  $x_i(t)$  als functie van de tijd volgens tabel 5.22

*N.V. Philips Gipeil. fabri.*  
*Nat. Lab.*  
*Tech. note 244/68*  
*C. H. Smeetsma*

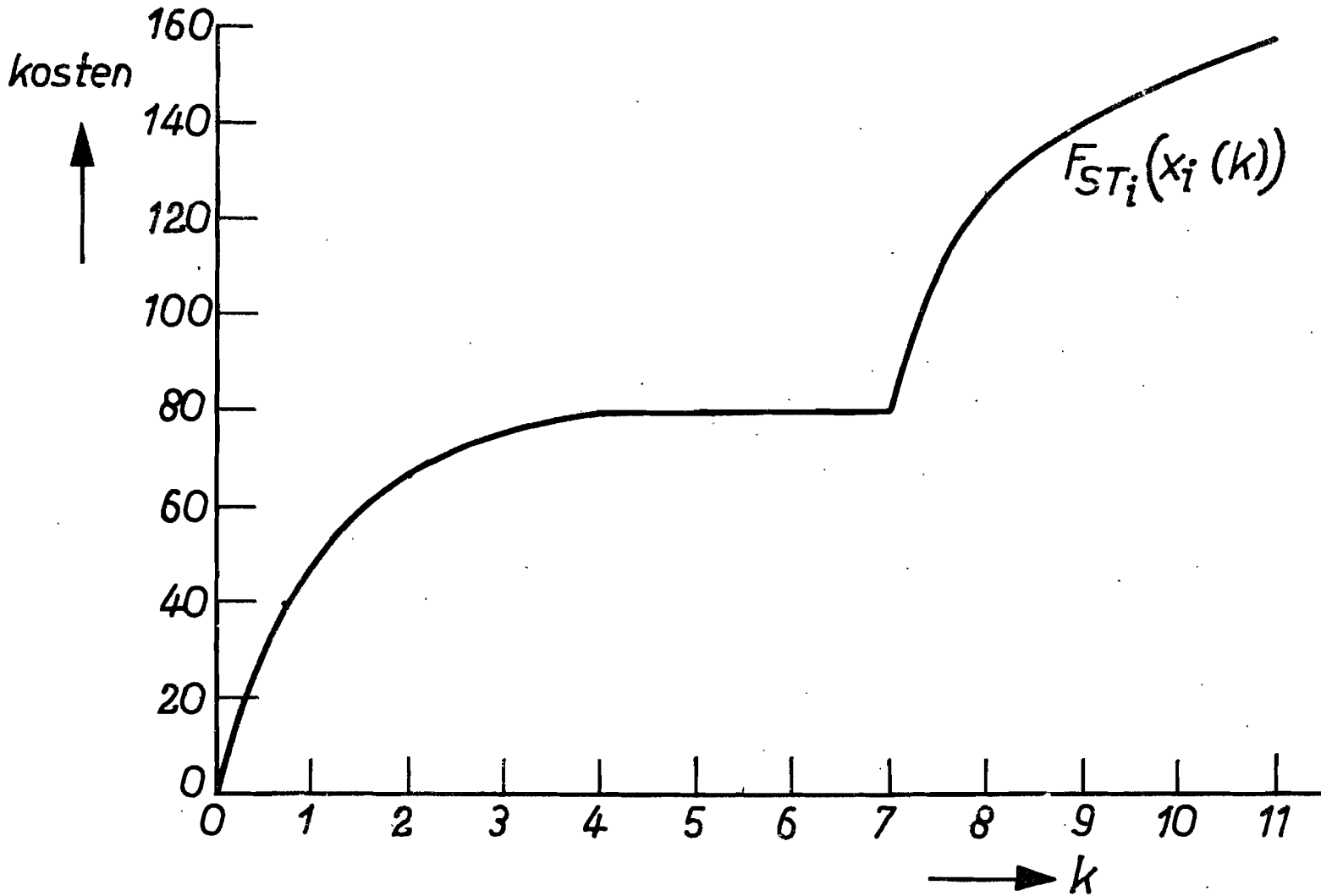


Fig. 5:7 De opstartkosten volgens (5.105) voor  $g_i(x_i(k)) = 50e^{-2x_i(k)}$  en voor het voorbeeld van tabel 5.22

N.V. Philips Afdel. Adv.  
 Nat. Lab.  
 Techn. note 244/68  
 C.H. Smaderna

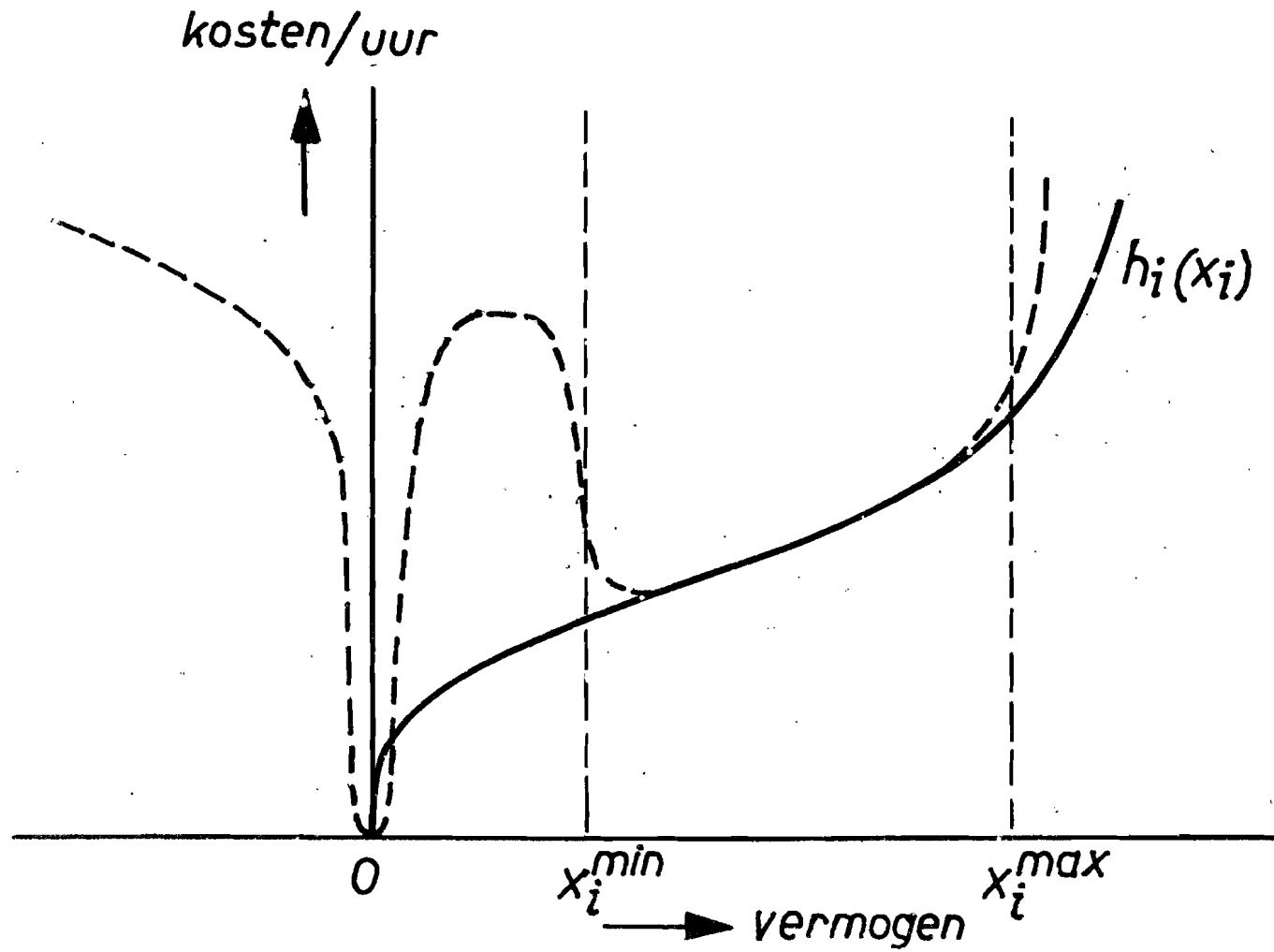


Fig. 6:1 Gestyleerde curve voor de brandstofkosten per uur met  
mogelijke (gestippelde) penaltyfuncties

N.V. Philips Geveel Fabr.  
Nat. Lab.  
Zeehu. route 244/68  
C.H. Smedema

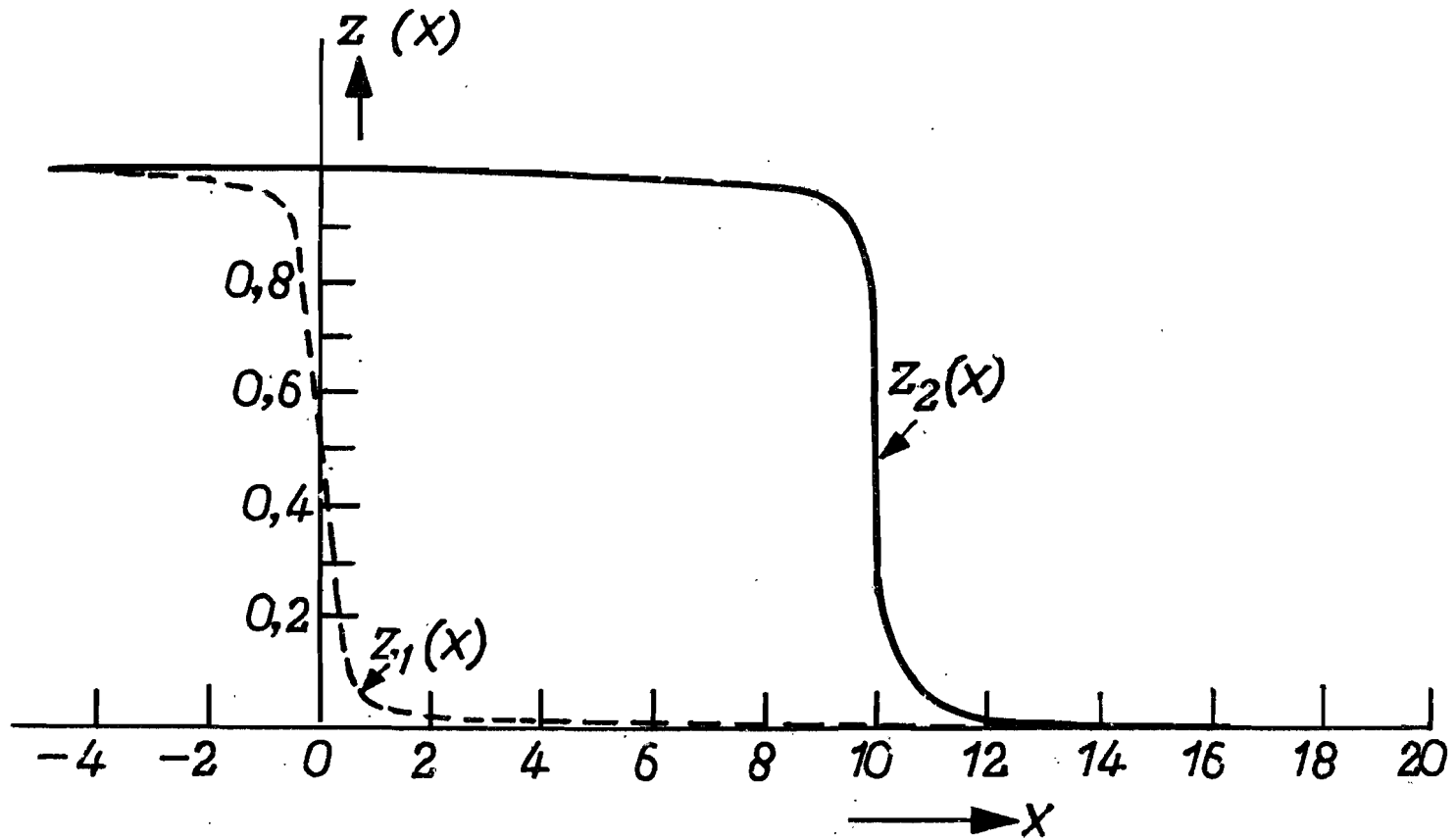


Fig. 6:2  $z_1(x)$  en  $z_2(x)$  volgens (6.4) en (6.5) als functie van  $x$  voor  $a=10$ ,  $b=99$

N.V. Philips Geveel. Fabr.  
 Nat. Lab.  
 Techn. note 244/68  
 C. H. Smedema

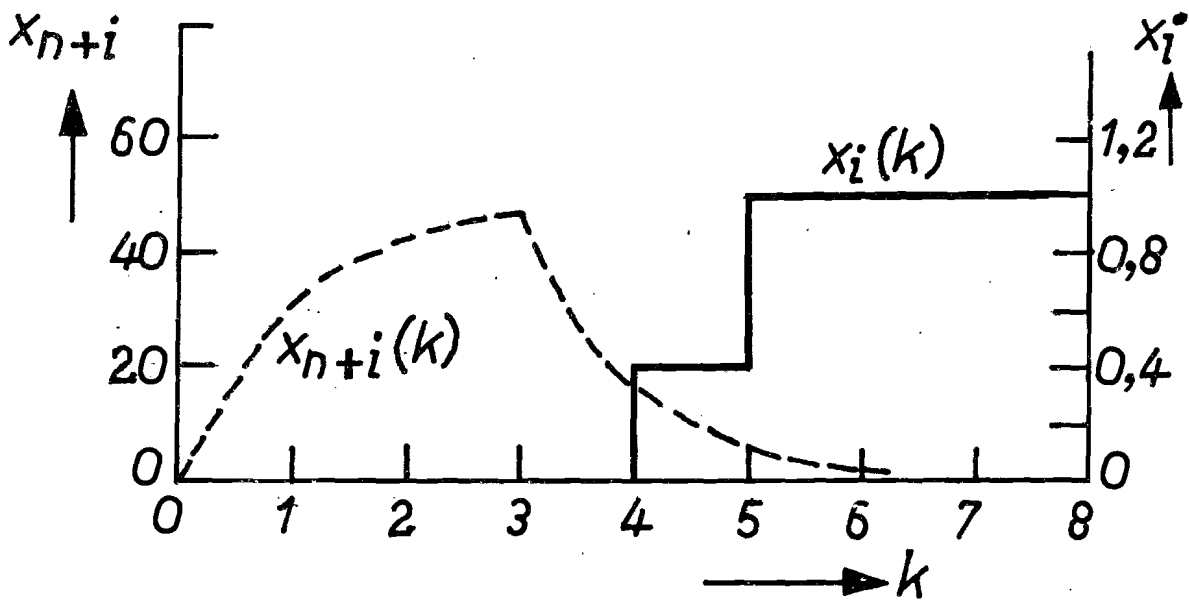
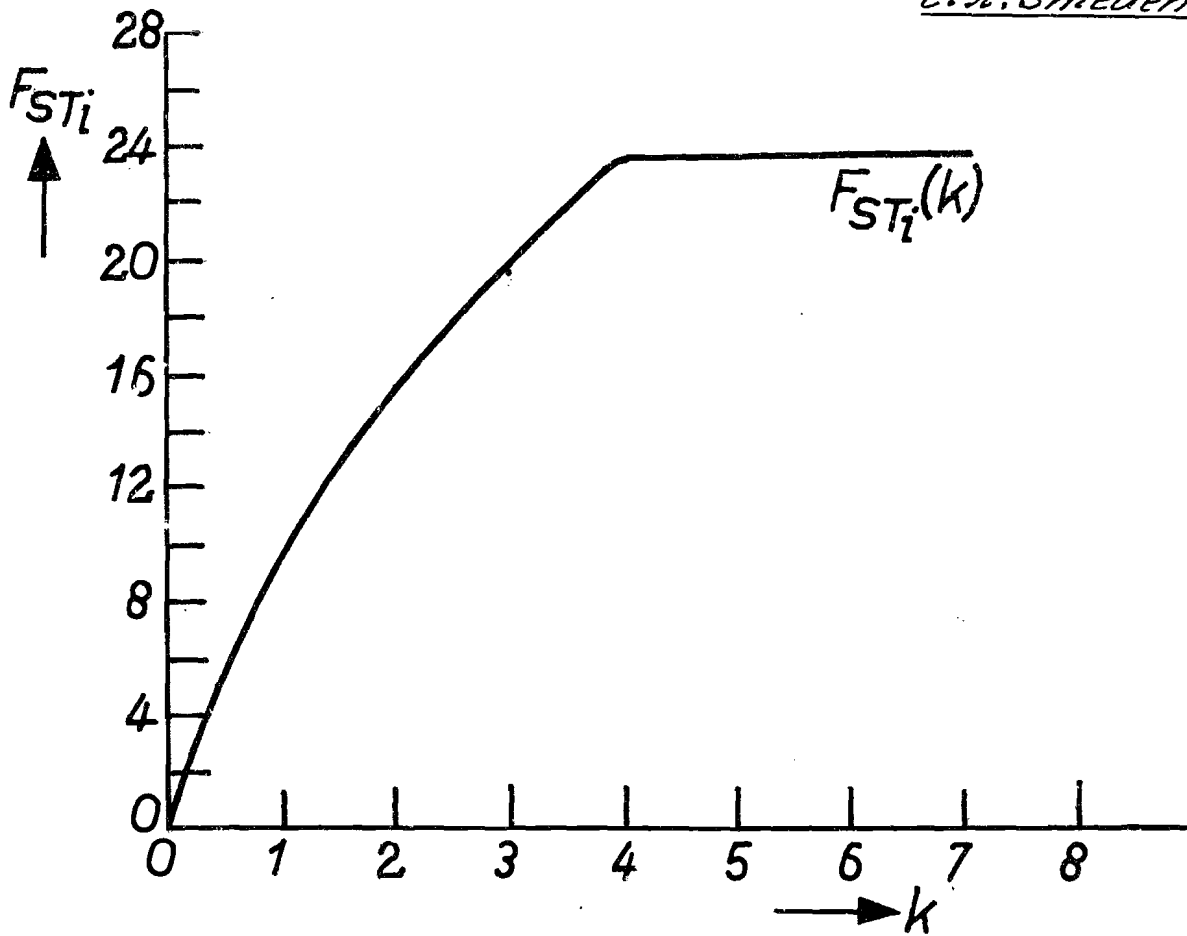


Fig. 6:3  $F_{STi}$ ,  $x_{n+i}$  en  $x_i$  als functie van  $k$  voor het voorbeeld van tabel 6.2



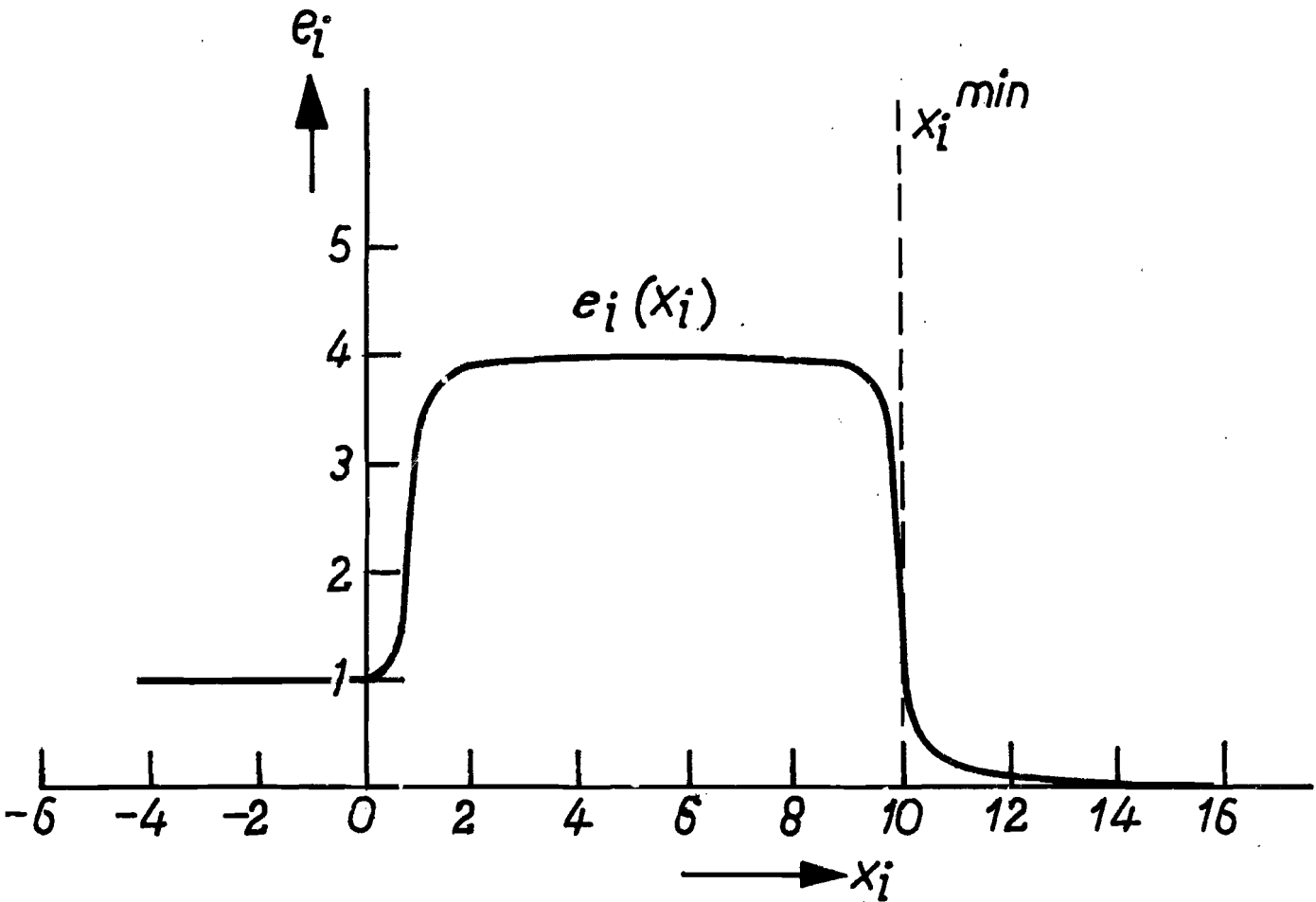
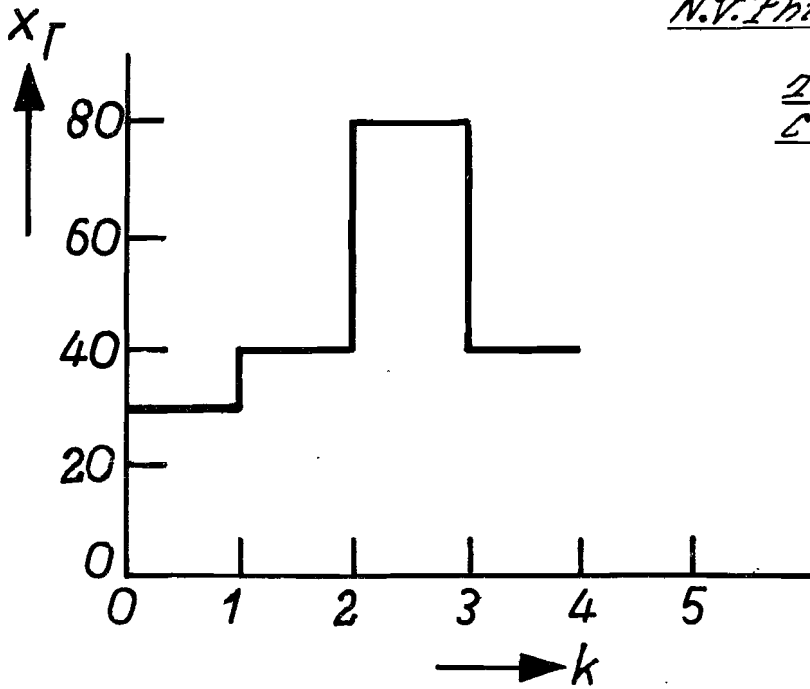
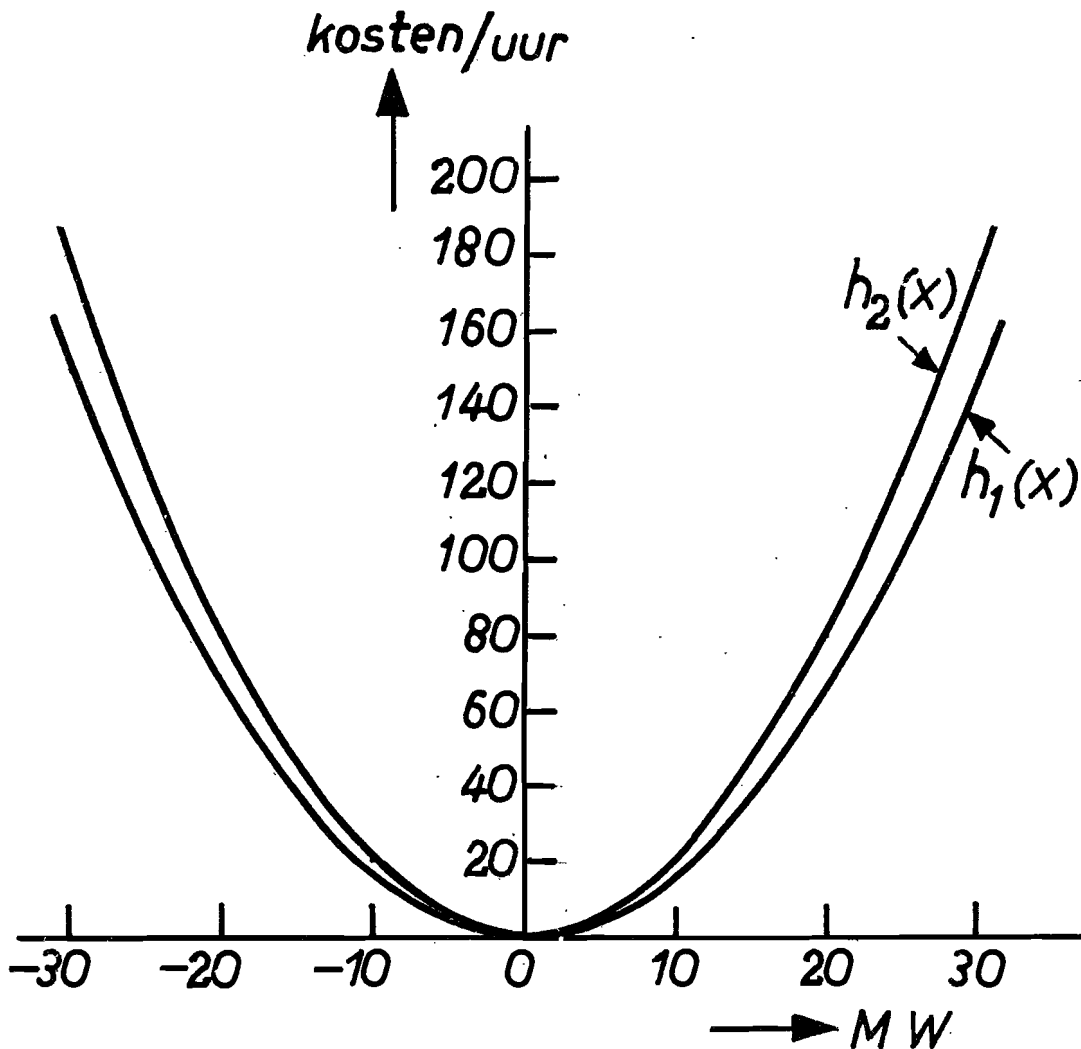


Fig. 6:4  $e_i$  als functie van  $x_i$  volgens (6.15)



*Fig. 6:5 Het gevraagde vermogen  $X_T$  als functie van  $k$*



*Fig. 6:6 De brandstofkosten  $h_1$  en  $h_2$  als functie van het vermogen  $x$  volgens (6.21) en (6.22)*