

MASTER

Kleinste kwadraten-schattingen volgens expliciete methode

Gaalman, G.J.C.

Award date:
1968

[Link to publication](#)

Disclaimer

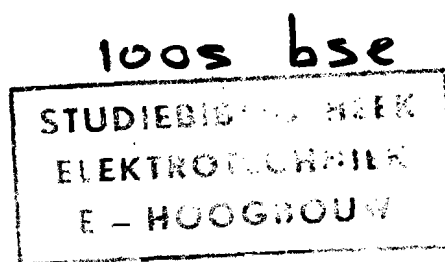
This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Technische Hogeschool
Afdeling der Elektrotechniek
Eindhoven



GROEP METEN EN REGELEN

Kleinste kwadraten-schattingen volgens
expliciete methode.

G.J.C. Gaalman

ERB

VOORWOORD

Dit verslag tracht een inzicht te geven in het afstudeeronderzoek, dat verricht is in de groep Meten en Regelen van de Afdeling Elektrotechniek van de Technische Hogeschool Eindhoven in de periode oktober 1967 t/m juni 1968.

Mijn dank gaat uit naar mijn afstudeerhoogleraar Prof. Dr. Ir. P. Eyckhoff en mijn begeleider Ir. A.J.W. van den Boom voor hun waardevolle adviezen en kritieken tijdens het onderzoek.

INHOUD

1.	<u>Inleiding</u>	1
2.	<u>Theorie</u>	2
2.1	De L.S. schatting	8
2.2	De M.V. schatting	9
2.3	De expliciete en impliciete methoden	12
3.	<u>Grenzen voor de covariantie matrix van de W.L.S.schatting</u>	14
4.	<u>Vergelijking van $COV/\tilde{\Sigma}$ L.S. met $COV/\tilde{\Sigma}$ M.V. aan de hand van een praktische situatie</u>	24
4.1	Het ingangssignaal	24
4.2	De impulsresponsie van het proces	24
4.3	De additieve ruis	26
4.4	De flowdiagrammen	34
4.5	Vergelijking van de L.S.schatting met M.V.schatting wat betreft het aantal bewerkingen	37
4.6	Resultaten van de simulatie en commentaar	40
5.	<u>Bepaling van de variantie van de additieve ruis</u>	57
6.	<u>L.S. schattingen bij teruggekoppelde systemen</u>	64
	<u>Appendices</u>	72
	<u>Literatuurlijst</u>	85

I. I N L E I D I N G

Indien men kennis omtrent bepaalde eigenschappen van een dynamisch systeem wil verkrijgen uit observaties van ingangs- en uitgangssignaal, dan komen vele technieken in aanmerking.

Vaak echter wordt naast de a priori onzekerheid wat betreft de te bepalen eigenschappen onzekerheid geïntroduceerd door de ruis (storingen, die in het proces ontstaan of die er van buitenaf op inwerken) en door de "voorgeschiedenis" van het proces.

Tengevolge van deze onzekerheid is men genoodzaakt gebruik te maken van statistische technieken.

Enkele van deze technieken zijn:

"weighted least square estimate", "maximum likelihood estimate", "minimum risk estimate", "continue model adjustment", "intermitterend model adjustment", techniek gebruik makend van de "sensitivity" vergelijking. Het gebruik van een van deze technieken zal o.a. afhangen van welke eigenschappen er bepaald moeten worden en de reeds aanwezige kennis omtrent het proces. B.v. de "least square estimate" veronderstelt in het algemene geval, dat er geen a priori kennis van het proces aanwezig is. De "minimum risk estimate" daarentegen veronderstelt kennis omtrent zowel de kansdichtheidsfunctie van de ruis als van de te schatten parameters.

In dit afstudeeronderzoek is slechts de "weighted least square estimate" beschouwd en wel in het bijzonder de minimum variantie schatting ofwel de Markov schatting.

2. T H E O R I E

De W.L.S. (weighted least square) schatting, die hieronder beschouwd wordt, schat punten van de impulsresponsie. Deze punten zijn voor te stellen in vector notatie:

$$\underline{h}^T = (h(T), h(2T), \dots, h(kT)),$$

\underline{h}^T is de getransponeerde van de vector \underline{h} , $h(T), \dots, h(kT)$ elementen van de vector, waarbij T op de tijdvertraging slaat.

De W.L.S. schatting regelt een model van het proces met parameters zodanig af, dat een criterium R geminimaliseerd wordt.

Het criterium R is het kwadraat van het gewogen verschil tussen procesuitgang en modeluitgang.

$$R = \underline{e}^T W \underline{e}$$

W is een symmetrische, niet negatief definitieve weegmatrix. \underline{e} is het verschil tussen beide uitgangen.

De beschrijvingswijze wordt in zijn geheel discreet gehouden, aangezien er gebruik gemaakt gaat worden van de digitale rekenmachine.

Fig.1 symboliseert de werking van de W.L.S. schatting.

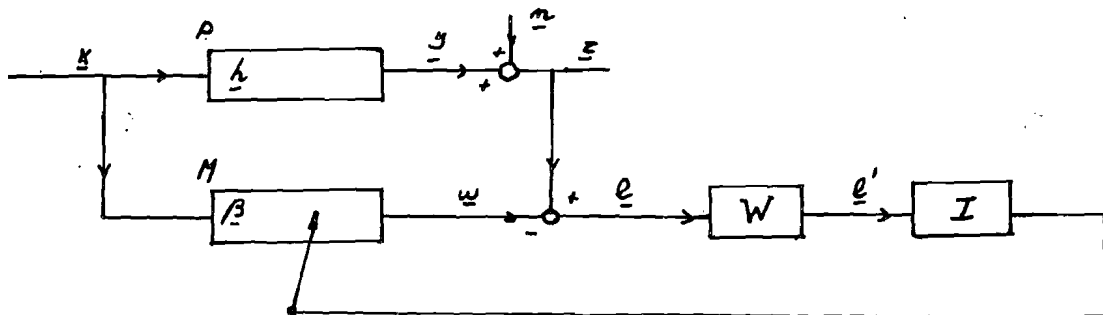


Fig.1.

* Een positief definitieve matrix A is een matrix met $\det. (A_r) > 0$ voor $r = 1, 2, \dots, n$

$$A_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

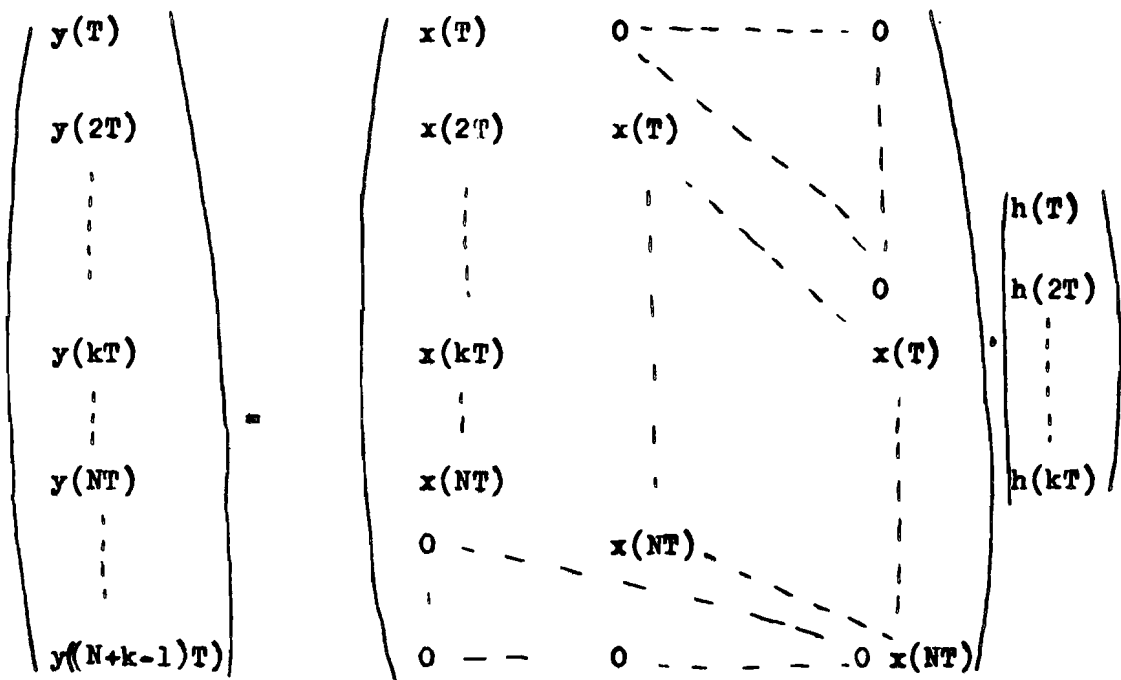
Zie: P. Bowman: "Introduction to determinants and matrices".

\underline{x} , \underline{y} , \underline{n} , \underline{w} en \underline{e} zijn vectoren. B.v. $\underline{x}^T = (x(T), x(2T), \dots, x(NT))$

De procesuitgang \underline{y} wordt nu geschreven in de vorm van een convolutiesom. Daarbij wordt verondersteld dat het systeem in rust verkeerde.

$$y(mT) = \sum_{n=1}^m x(nT) \cdot h((m+1-n)T)$$

De convolutiesom is eveneens in matrixvorm noteerbaar: $\underline{y} = Xh$



Er is aangenomen, dat het proces een eindige impulsresponsie heeft.

Dus $h(iT) = 0$, voor $i > k$

Tevens is verondersteld dat: $x(iT) = 0$, voor $i \leq 0$

en $x(iT) = 0$, voor $i > N$

De laatste veronderstelling geeft aan dat de "meetduur" eindig is.

Voor het model geldt: $\underline{w} = X \underline{\beta}$

Het model kan gerealiseerd worden door een vertraginglijn, een sommater en een aantal potentiometers waarvan de waarden bepaald worden door

Zie fig. 2.

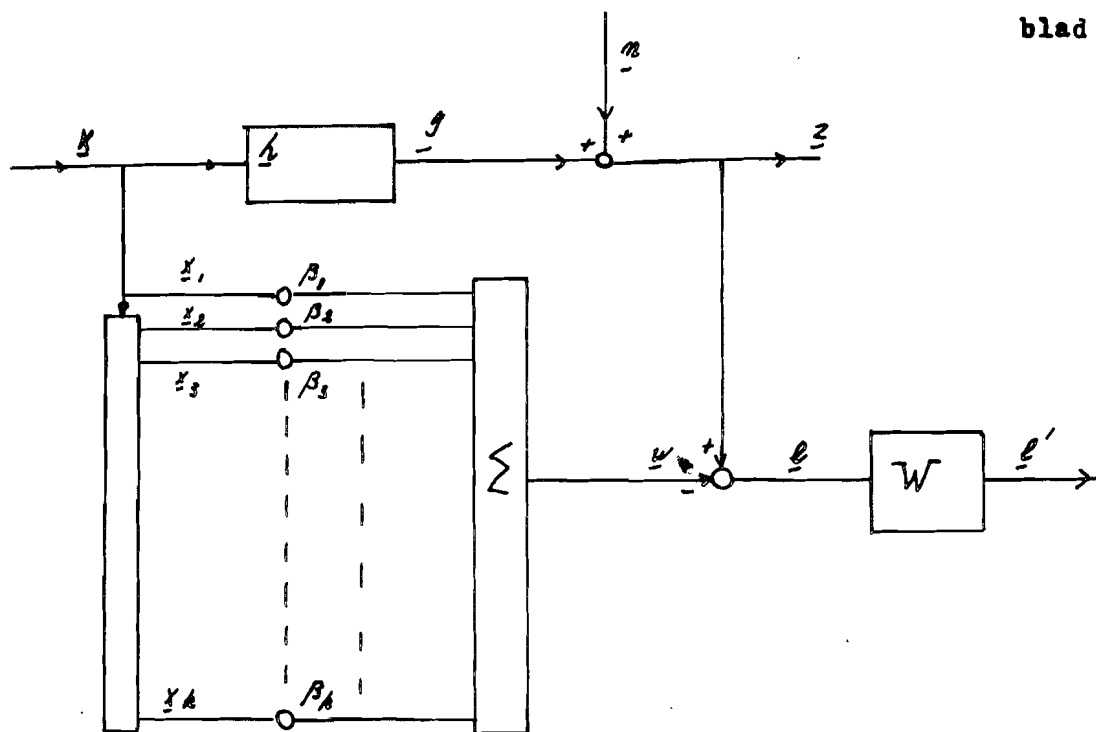


Fig.2.

\underline{x}_1 is de eerste kolom van X

\underline{x}_2 is de tweede kolom van X enz.

De kwadratische foutfunctie R dient nu geminimaliseerd te worden

$$\underline{e} = \underline{z} - \underline{w} = \underline{z} - X\beta$$

$$R = (\underline{z} - X\beta)^T W (\underline{z} - X\beta)$$

$$R = \underline{z}^T W \underline{z} - \underline{z}^T W X\beta - \beta^T X^T W \underline{z} + \beta^T X^T W X \beta$$

Differentieer naar

$$- 2 X^T W \underline{z} + 2 X^T W X \hat{\beta} = 0$$

$$\hat{\beta} = (X^T W X)^{-1} (W X)^T \underline{z}, \quad (X^T W X) \text{ niet singulier}$$

R bereikt voor deze waarde van $\hat{\beta}$ een absoluut minimum.

Splits W als volgt: $W = F^T F$ *

$$R = \|F(\underline{z} - X\underline{\beta})\|^2 \geq \|F\underline{z}\|^2 - \|F(X\underline{\beta})\|^2$$

$R = \|F\underline{z}\|^2 - \|F(X\underline{\beta})\|^2$ slechts alleen voor $\underline{\beta} = \hat{\underline{\beta}}$ immers er moet dan gelden:

$$R = \underline{z}^T W \underline{z} - \underline{z}^T W X \underline{\beta} - \underline{\beta}^T X^T W \underline{z} + \underline{\beta}^T X^T W X \underline{\beta} = \underline{z}^T W \underline{z} - \underline{\beta}^T X^T W X \underline{\beta}$$

$$\rightarrow 2 \underline{\beta}^T X^T W \underline{z} - 2 \underline{\beta}^T X^T W X \underline{\beta}$$

$$2 \underline{\beta}^T (X^T W \underline{z} - X^T W X \underline{\beta}) = 0 \text{ voor } \underline{\beta} = \hat{\underline{\beta}} = (X^T W X)^{-1} X^T W \underline{z}$$

* Een symmetrische niet negatief definitieve matrix is altijd te splitsen in deze vorm:

Zie: Forsythe G.E., Moler C.B. "Computer solutions of linear algebraic systems".

Dus R bereikt alleen een minimum indien $\underline{\beta} = \tilde{\underline{\beta}}$

De W.L.S. schatting heeft de volgende eigenschappen:

1. lineair, d.w.z. de schatting is een lineaire functie voor het outputsignaal \underline{z}

$$\tilde{\underline{\beta}} = \underline{Q} \underline{z} \quad \text{met} \quad \underline{Q} = (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} (\underline{W} \underline{X})^T$$

2. zuiver (unbiased), d.w.z. $E(\tilde{\underline{\beta}}) = \underline{h}$

$$E(\tilde{\underline{\beta}}) = (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} (\underline{W} \underline{X})^T \underline{z}$$

$$\underline{z} = \underline{n} + \underline{X} \underline{h}$$

$$E(\tilde{\underline{\beta}}) = (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} (\underline{W} \underline{X})^T E(\underline{n} + \underline{X} \underline{h})$$

Indien $E(\underline{n}) = \underline{0}$, en \underline{n} is onafhankelijk van \underline{x} dan geldt:

$$E(\tilde{\underline{\beta}}) = (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} (\underline{W} \underline{X})^T \underline{X} \underline{h} = \underline{h}$$

Bepaling van de covariantie matrix van de W.L.S. schatting:

$$\text{COV} \tilde{\underline{\beta}} = E \{ (\tilde{\underline{\beta}} - E \tilde{\underline{\beta}}) (\tilde{\underline{\beta}} - E \tilde{\underline{\beta}})^T \}$$

$$\ast E(\underline{\beta}^T) = (E(\beta_1), E(\beta_2), \dots, E(\beta_k))$$

$$\begin{aligned}
\text{cov}_{\underline{\beta}} &= E \{ (\underline{\hat{\beta}} - \underline{h})(\underline{\hat{\beta}} - \underline{h})^T \} = E \{ (\underline{y} - \underline{h})(\underline{y} - \underline{h})^T \} \\
&= E \{ (\underline{y}(\underline{X} \underline{h} + \underline{n}) - \underline{h})(\underline{y}(\underline{X} \underline{h} + \underline{n}) - \underline{h})^T \} = E \{ (\underline{y} \underline{n})(\underline{y} \underline{n})^T \} = \\
&= \underline{y} E \{ \underline{n} \underline{n}^T \} \underline{y}^T = (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} (\underline{W} \underline{X})^T E(\underline{n} \underline{n}^T) (\underline{W} \underline{X})(\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1}
\end{aligned}$$

De covariantiematrix wordt bepaald door de covariantie van de ruis en het ingangssignaal.

Twee bijzondere W.L.S. schattingen zijn de L.S. (least square) schatting en de M.V. (minimum variantie ofwel de Matkov) schatting.

2.1. De L.S. schatting

De least square schatting ontstaat wanneer $W = I$

$$R = \underline{e}^T \underline{e} = \sum_{i=0}^{\infty} e_i^2$$

$$\tilde{\underline{\beta}} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{z} \quad (X^T X) \text{ niet singulier}$$

$$\text{COV } \tilde{\underline{\beta}} = (X^T X)^{-1} X^T E(\underline{n} \underline{n}^T) X (X^T X)^{-1}$$

Noem $N = E\{\underline{n} \underline{n}^T\}$

Indien de additieve ruis wit is dan geldt:

$$N = \sigma_n^2 I \quad \text{immers:}$$

$$E(\underline{n} \underline{n}^T) = \begin{pmatrix} E(n_1^2) & \dots & \dots & \dots & E(n_n n_1) \\ E(n_1 n_2) & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ E(n_1 n_n) & \dots & \dots & \dots & E(n_n^2) \end{pmatrix}$$

bij witte ruis is $E(n_i n_j) = 0$ voor $i \neq j$

$$\text{en } E(n_i n_j) = \sigma_n^2 \text{ voor } i = j$$

De covariantie wordt dan:

$$\text{COV } \tilde{\underline{\beta}} = \sigma_n^2 (X^T X)^{-1} X^T I X (X^T X)^{-1} = \sigma_n^2 (X^T X)^{-1}$$

2.2. De M.V. schatting

De minimum variantie schatting ontstaat indien $W = N^{-1}$ dus

$$R = \underline{e}^T N^{-1} \underline{e}$$

$$\tilde{\underline{\beta}} = (X^T N^{-1} X)^{-1} (N^{-1} X)^T \underline{z}$$

en

$$\text{COV } \tilde{\underline{\beta}} = (X^T N^{-1} X)^{-1}$$

De minimum variantie schattingen hebben de eigenschap, dat de covariantie matrix "kleiner" is dan alle andere covariantie matrices, behorende tot de categorie van de W.L.S. schatting.

D.w.z. $\text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{\text{W.L.S.}} - \text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{\text{M.V.}}$ is niet negatief definitief.

Bewijs: Kies de matrices S en T *

$$S = (m+1) \times (n+1), \quad T = (m+1) \times (n+1)$$

Veronderstel dat $S S^T$ niet singulier is, dan is

$$T^T T - T^T S^T (S S^T)^{-1} S T \text{ niet negatief definitief.}$$

Immers laat \underline{s} en \underline{t} vectoren zijn met $(m+1)$ componenten. Dan geldt:

$$(\underline{s}^T S + \underline{t}^T T^T) (\underline{s}^T S + \underline{t}^T T^T)^T \geq 0$$

aangezien dit de lengte in het kwadraat is van de vector $x = T \underline{t} + S^T \underline{s}$

$$\underline{s}^T S S^T \underline{s} + \underline{s}^T S T \underline{t} + \underline{t}^T T^T S^T \underline{s} + \underline{t}^T T^T T \underline{t} \geq 0$$

$$\text{Noem } A = S S^T, \quad B = S T, \quad C = T^T T$$

$$\underline{s}^T A \underline{s} + \underline{s}^T B \underline{t} + \underline{t}^T B^T \underline{s} + \underline{t}^T C \underline{t} \geq 0$$

$$A = A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$$

* Zie: Grenander, U. and M. Rosenblatt "Statistical analysis of stationary time series".

$$(\underline{s}^T \underline{A}^{-\frac{1}{2}} + \underline{t}^T \underline{B} \underline{A}^{-\frac{1}{2}})(\underline{s}^T \underline{A}^{-\frac{1}{2}} + \underline{t}^T \underline{B}^T \underline{A}^{-\frac{1}{2}})^T + \underline{t}^T (\underline{C} - \underline{B}^T \underline{A}^{-1} \underline{B}) \underline{t} \geq 0$$

kies $\underline{s} = -\underline{t}^T \underline{B}^T \underline{A}^{-1}$

$$\underline{t}^T (\underline{C} - \underline{B}^T \underline{A}^{-1} \underline{B}) \underline{t} \geq 0$$

$\underline{C} - \underline{B}^T \underline{A}^{-1} \underline{B}$ is niet negatief definitief

dus: $\underline{T}^T \underline{T} - (\underline{S} \underline{T})^T (\underline{S} \underline{S}^T)^{-1} \underline{S} \underline{T} = \underline{T}^T \underline{T} - \underline{T}^T \underline{S}^T (\underline{S} \underline{S}^T)^{-1} \underline{S} \underline{T}$

is niet negatief definitief

kies $\underline{S} = \underline{X}^T \underline{N}^{-\frac{1}{2}}$, $\underline{T} = \underline{N}^{\frac{1}{2}} \underline{Q}^T$ met $\underline{Q} = (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} (\underline{W} \underline{X})^T$ en $\underline{Q} \underline{X} = \underline{I}$

En vul in:

$$\underline{Q} \underline{N} \underline{Q}^T - \underline{I} (\underline{X}^T \underline{N}^{-1} \underline{X})^{-1} \underline{I} \text{ is niet negatief definitief}$$

→ $\text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{\text{W.L.S.}} - \text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{\text{M.V.}}$ is niet negatief definitief

Indien de additieve ruis \underline{n} wit is, zijn de minimum variantie schatting en "least square" schatting indentiek. Immers:

$$E(\underline{n} \underline{n}^T) = \underline{N} = \sigma_n^2 \underline{I}$$

$$\text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{\text{M.V.}} = (\underline{X}^T \underline{N}^{-1} \underline{X})^{-1} = \sigma_n^2 (\underline{X}^T \underline{X})^{-1}$$

$$\text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{\text{L.S.}} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{N} \underline{X} (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} = \sigma_n^2 (\underline{X}^T \underline{X})^{-1}$$

en $\tilde{\underline{\beta}}_{\text{M.V.}} = (\underline{X}^T \underline{N}^{-1} \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{N}^{-1} \underline{z} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{z}$

$$\tilde{\underline{\beta}}_{\text{L.S.}} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{z}$$

Indien de additieve ruis een normale verdeling heeft met $E(\underline{n}_1) = 0$ en $\text{var.}(\underline{n}_1) = \sigma$ is de minimum variantie schatting equivalent met de maximum likelihood schatting.

Immers er geldt:

$$z_1 = y_1 + n_1$$

$$E(z_i) = E(y_i + n_i) = y_i$$

$$\text{var.}(z_i) = E(z_i - y_i)^2 = E(n_i^2) = \sigma_n^2$$

$$E(z_i - y_i)(z_j - y_j) = E(n_i n_j) = 0 \quad \text{voor alle } i, j$$

Conclusie: iedere z_i heeft een normale verdeling

$$P(z_i) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp. \frac{-1}{2\sigma_n^2} (z_i - y_i)^2$$

n waarnemingen hebben de volgende kansverdeling:

$$P(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |N|^{1/2}} \exp. -\frac{1}{2} (\underline{z} - \underline{y})^T N^{-1} (\underline{z} - \underline{y})$$

De maximum likelihood functie van \underline{z} is gedefinieerd als de logaritme van zijn kansdichtheidsfunctie:

$$L = \ln P(z_1, z_2, \dots, z_n) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |N| - \frac{1}{2} (\underline{z} - \underline{y})^T N^{-1} (\underline{z} - \underline{y})$$

De maximum likelihood schatting van een parameter vector \underline{h} is nu die schatting die L maximaliseert met betrekking tot \underline{h} . Dit is echter equivalent met de procedure:

$$(\underline{z} - \underline{y})^T N^{-1} (\underline{z} - \underline{y}) = (\underline{z} - X\underline{h})^T N^{-1} (\underline{z} - X\underline{h})$$

te minimaliseren met betrekking tot $\underline{\beta}$. Doch dit is identiek met de minimum variantie schatting.

2.3 De expliciete en impliciete methoden.

De tot hiertoe beschreven theorie (W.L.S. schatting) valt onder de zgn. expliciete methode .

Immers er wordt gedurende een zekere tijd aan de ingang en de uitgang van het proces gemeten en vervolgens ineens de parameters van het proces geschat.

$$\hat{\underline{\beta}} = (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} (\underline{W} \underline{X})^T \underline{z}$$

Het is echter ook mogelijk $\hat{\underline{\beta}}$ te berekenen na een iteratieve procedure. Fysisch houdt dit in, dat het model in stappen bijgeregeld wordt, totdat na een aantal stappen een voldoende nauwkeurigheid is bereikt, Deze impliciete methode wordt ook wel genoemd: "intermittent model adjusting technique".

Het algoritme dat vaak wordt gebruikt is:

$$\hat{\underline{\beta}}_{i+1} = \hat{\underline{\beta}}_i - \frac{P_i}{2} (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} \nabla_{\underline{\beta}} E$$

$$\text{met } E = \underline{e}^T \underline{W} \underline{e} = (\underline{z} - \underline{X} \underline{\beta})^T \underline{W} (\underline{z} - \underline{X} \underline{\beta})$$

$(\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1}$ fungeert als orthogonaiserende faktor.

P_i moet aan bepaalde voorwaarden voldoen wil het proces convergeren.

(zie: blad 96 van R. Deutsch: Estimation Theory.)

\underline{X} wordt gevormd uit het aantal "samples" na de i^{de} iteratie tot aan de $(i+1)^{\text{ste}}$ iteratie.

$$\nabla E = -2 \underline{X}^T \underline{W}^T \underline{z} + 2 \underline{X}^T \underline{W} \underline{X} \underline{\beta}_i = -2 \underline{X}^T \underline{W}^T \underline{z} + 2 \underline{X}^T \underline{W} \underline{w} - 2 \underline{X}^T \underline{W} \underline{e}$$

$$\rightarrow \underline{\beta}_{i+1} = \underline{\beta}_i + P_i (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{W} \underline{e} = \underline{\beta}_i (1 - P_i) + P_i \underline{h} + P_i (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{W} (\underline{n})$$

$$\begin{aligned} E\{\underline{\beta}_{i+1}\} &= E\{\underline{\beta}_i\} + E\{P_i (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{W} (\underline{X}(\underline{h} - \underline{\beta}_i) + \underline{n})\} = \\ &= P_i \underline{h} + (1 - P_i) \cdot E\{\underline{\beta}_i\} \end{aligned}$$

Indien \underline{x} en \underline{n} onafhankelijk en

$$E(\underline{n}) = 0$$

Opmerking: De gemiddelde waarde van $\hat{\underline{\beta}}_{i+1}$ is onafhankelijk van de weegmatrix \underline{W} .

De covariantie van $\underline{\beta}_{i+1}$ is:

$$\text{COV } \underline{\beta}_{i+1} = E \left\{ (\underline{\beta}_{i+1} - E(\underline{\beta}_{i+1})) (\underline{\beta}_{i+1} - E(\underline{\beta}_{i+1}))^T \right\}$$

$$= E \left\{ \left[\underline{\beta}_i (1 - P_i) - (1 - P_i) E(\underline{\beta}_i) + P_i (X^T W X)^{-1} X^T W (\underline{n}) \right] \right\} .$$

$$\left[\underline{\beta}_i (1 - P_i) - (1 - P_i) E(\underline{\beta}_i) + P_i (X^T W X)^{-1} X^T W (\underline{n}) \right]^T \left\{$$

$$\longrightarrow \text{COV } \underline{\beta}_{i+1} = (1 - P_i)^2 \text{COV } \underline{\beta}_i + P_i^2 (X^T W X)^{-1} X^T W N W^T X (X^T W X)^{-1}$$

Opmerking: Bij deze berekening wordt X bekend verondersteld, dwz. meetbaar zonder (meet)ruis. De covariantie berekening is in grote lijnen analoog aan die afgeleid door Ir. A.J.N. v.d. Boom.

Er zijn twee bijzondere gevallen van de impliciete schatting aan te geven, n.l. $W = I$ dwz. het foutkriterium wordt niet gewogen, en $W = N^{-1}$ dwz. W = de inverse van de covariantie matrix van de ruis.

$$W = I : \underline{\beta}_{i+1} = \underline{\beta}_i + P_i (X^T X)^{-1} X^T \underline{e}$$

$$\text{COV } \underline{\beta}_{i+1} = (1 - P_i)^2 \text{COV } \underline{\beta}_i + P_i^2 (X^T X)^{-1} X^T N X (X^T X)^{-1}$$

$$W = N^{-1} : \underline{\beta}_{i+1} = \underline{\beta}_i + P_i (X^T N^{-1} X)^{-1} X^T N^{-1} \underline{e}$$

$$\text{COV } \underline{\beta}_{i+1} = (1 - P_i)^2 \text{COV } \underline{\beta}_i + P_i^2 (X^T N^{-1} X)^{-1}$$

In paragraaf 2.2. is aangetoond, dat

$$(X^T N^{-1} X)^{-1} \ll (X^T X)^{-1} X^T N X (X^T X)^{-1}$$

Indien $N = I$ geldt het gelijk teken.

Nu is onmiddellijk te zien dat:

$$\text{COV } \underline{\beta}_{i+1} \ll \text{COV } \underline{\beta}_{i+1}$$

$$W = N^{-1} \qquad W = I$$

Het afstudeeronderzoek richt zich in de volgende hoofdstukken op de parameterschatting volgens de expliciete methode.

3. GRENZEN VOOR DE COVARIANTIE MATRIX VAN DE W.L.S. SCHATTING

De theorie die hier beschreven wordt is in grote lijnen analoog met het artikel van T.A. Magnes and J.B. Mc. Guire, "Comparison of least square and minimum variance estimates of regression parameters". *Annals of Math.Stat.* 33(1962), blz. 462.

In het artikel worden de L.S. schatting en de M.V. schatting met elkaar vergeleken en grenzen van de bijbehorende covariantie's gegeven. De theorie die hieronder volgt vergelijkt de W.L.S. schatting met de M.V. schatting. Het is niet noodzakelijk de additieve ruis stationair te beschouwen.

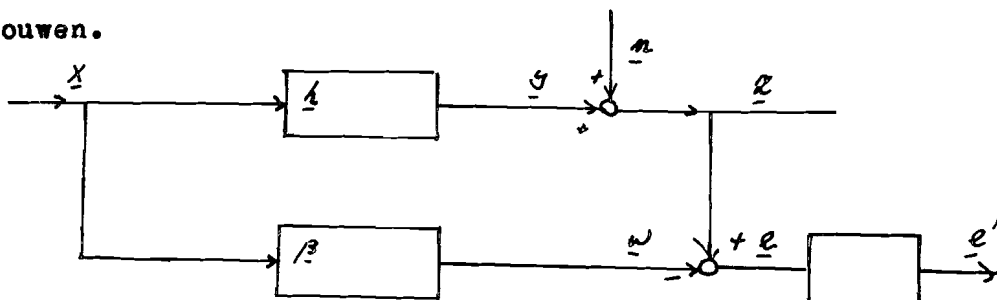


Fig. 3.

$$\underline{z} = X \underline{h} + \underline{n} \quad (1) \quad X \text{ is een } (n + k - 1 \times k) \text{ matrix}$$

$$\overset{\text{W.L.S.}}{\underline{\beta}} = (X^T W X)^{-1} X^T W \underline{z} \quad (2) \quad \underline{\beta} \text{ is een vector met de } k \text{ componenten}$$

$$\overset{\text{M.V.}}{\underline{\beta}} = (X^T N^{-1} X)^{-1} X^T N^{-1} \underline{z} \quad (3)$$

De bij deze schattingen behorende covariantie's zijn:

$$\text{COV } \tilde{\beta}_{\text{W.L.S.}} = (X^T W X)^{-1} X^T W N W X (X^T W X)^{-1} \quad (4)$$

$$\text{COV } \tilde{\beta}_{\text{M.V.}} = (X^T N^{-1} X)^{-1} \quad (5)$$

N is covariantie van de additieve ruis.

N is een $(n+k-1 \times n+k-1)$ matrix

$\text{COV } \tilde{\beta}$ is een $(k \times k)$ matrix

Om nu de W.L.S. schatting te vergelijken met de M.V. schatting zal vergelijking (1) "gegenormaliseerd" worden

Stel $W = F^T F$ F is een $(n+k-1 \times n+k-1)$ matrix

Vermenigvuldig vgl. (1) met F

$$F \underline{z} = F X \underline{h} + F \underline{n}$$

$$\text{Noem } F \underline{n} = \underline{m}, \quad F \underline{z} = \underline{v}, \quad F X = S$$

$$\text{COV } \underline{m} = F \text{COV } \underline{n} F^T = F N F^T = M$$

$$\text{Dus: } \underline{v} = S \underline{h} + \underline{m} \quad (1')$$

$$S^T S = X^T F^T F X = X^T W X$$

$S^T S$ is een symmetrische matrix $(k \times k)$

Er kan nu altijd een matrix $B (k \times k)$ gevonden worden, zodanig dat

$$B^T S^T S B = I$$

Immers bij een symmetrische matrix $A, (\hat{1} \times \hat{1})$, bestaat er altijd een orthogonale matrix $H (\det. H = 1)$ zodanig dat:

$$H^T A H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_l \end{pmatrix}$$

$$\text{Kies } L = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & 1/\sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sqrt{\lambda_l} \end{pmatrix}, \quad L = L^T$$

$$\text{Nu geldt: } L^T H^T A H L = I$$

dus HL is een matrix zodanig dat $(HL)^T A (HL) = I$

$$\text{Stel } \underline{g} = B^{-1} \underline{h}$$

Vgl. (1') wordt nu:

$$\underline{v} = S B B^{-1} \underline{h} + \underline{m} = S B \underline{g} + \underline{m} = R \underline{g} + \underline{m} \quad (1'')$$

R is een $(n + k - 1 \times k)$ matrix

$\tilde{J}_{L.S.}$ is de "least square" schatting van \underline{g}

$\tilde{J}_{M.V.}$ is de "minimum variance" schatting van \underline{g}

$$\tilde{J}_{L.S.} = (R^T R)^{-1} R^T \underline{v} = R^T \underline{v} \quad (2')$$

$$\tilde{J}_{M.V.} = (R^T M^{-1} R)^{-1} R^T M^{-1} \underline{v} \quad (3')$$

$$\text{COV } \tilde{J}_{L.S.} = (R^T R)^{-1} R^T M R (R^T R)^{-1} = R^T M R \quad (4')$$

$$\text{COV } \tilde{J}_{M.V.} = (R^T M^{-1} R)^{-1} \quad (5')$$

$$\text{Nu geldt: } \text{COV } \tilde{\beta}_{W.L.S.} = B \text{COV } \tilde{J}_{L.S.} B^T \text{ en}$$

$$\text{COV } \tilde{\beta}_{M.V.} = B \text{COV } \tilde{J}_{M.V.} B^T$$

$$\text{Inmers: } \text{COV}_{\text{L.S.}}^{\tilde{Y}} = \begin{matrix} B^T S^T F N F^T S B - \\ B^T X^T W N W X B \end{matrix}$$

$$\text{COV}_{\text{M.V.}}^{\tilde{Y}} = \begin{matrix} (B^T S^T (F^T)^{-1} N^{-1} F^{-1} S B)^{-1} - \\ (B^T X^T N^{-1} X B)^{-1} - B^{-1} (X^T N^{-1} X)^{-1} (B^T)^{-1} \end{matrix}$$

$$B^T S^T S B = I \quad B B^T = (S^T S)^{-1} = (X^T W X)^{-1}$$

$$\text{Dus: } B \text{ COV}_{\text{L.S.}}^{\tilde{Y}} B^T = (X^T W X)^{-1} X^T W N W X (X^T W X)^{-1}$$

$$\text{En } B \text{ COV}_{\text{M.V.}}^{\tilde{Y}} B^T = (X^T N^{-1} X)^{-1}$$

I. De covariantie's, gegeven in de formules (4') en (5') zijn identiek, indien en slechts indien de deelruimte opgespannen door k vectoren van R samenvallen met de ruimte opgespannen door k eigenvectoren van M . Hierdoor worden tevens de covariantie's van formule (4) en (5) identiek.

De k eigenvectoren van M zijn: $\underline{d}_{i1}, \underline{d}_{i2}, \dots, \underline{d}_{ik}$

De matrix D is een $(n + k - 1 \times k)$ matrix, waarvan de kolommen gevormd worden door de eigenvectoren $\underline{d}_{i1}, \dots, \underline{d}_{ik}$

De deelruimte opgespannen door k vectoren van R valt nu samen met de ruimte opgespannen door k eigenvectoren van M . D.w.z. er bestaat een matrix C ($k \times k$) zodanig dat $D = R C$ (R is een lineaire combinatie van D).

C is een orthogonale matrix want:

$$D^T D = C^T R^T R C = C^T I C$$

$$D^T D = C^T C$$

$D^T D = I$ omdat de eigenvectoren van een symmetrische matrix orthogonaal zijn.

Stel nu: $\underline{g} = C \underline{g}^*$

\underline{g}^* is de schatting van \underline{g}^*

Vgl. (1'') wordt hiermede:

$$\underline{y} = R C \underline{g}^* + \underline{u} \quad (1''')$$

$$\begin{aligned} \text{COV } \tilde{\underline{g}}_{L.S.}^* &= ((R C)^T R C)^{-1} (R C)^T M R C ((R C)^T (R C))^{-1} = C^T R^T M R C \\ &= D^T M D = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{kk} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{COV } \tilde{\underline{g}}_{M.V.}^* = (C^T R^T M^{-1} R C)^{-1} = (D^T M^{-1} D)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\lambda_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\lambda_{kk} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{kk} \end{pmatrix}$$

$$\text{COV } \tilde{\underline{g}}_{L.S.}^* = \text{COV } \tilde{\underline{g}}_{M.V.}^*$$

$$\text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{L.S.} = C \text{COV } \tilde{\underline{g}}_{L.S.}^* C^T$$

$$\text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{M.V.} = C \text{COV } \tilde{\underline{g}}_{M.V.}^* C^T$$

$$\text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{L.S.} = \text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{M.V.}$$

$$\text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{W.L.S.} = B \text{COV } \tilde{\underline{g}}_{L.S.}^* B^T$$

$$\text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{M.V.} = B \text{COV } \tilde{\underline{g}}_{M.V.}^* B^T$$

$$\text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{W.L.S.} = \text{COV } \tilde{\underline{\beta}}_{M.V.}$$

Hiermede is de helft van bewering I aangetoond. Voor het resterende bewijs wordt verwezen naar Appendix A.3.1.

II. Voor de covarianties $\text{COV} \tilde{y}_{L.S.}$ en $\text{COV} \tilde{y}_{M.V.}$ is een boven- en een ondergrens aan te geven.

$$\lambda_{\text{MIN}} I \leq \text{COV} \tilde{y}_{M.V.} \leq \text{COV} \tilde{y}_{L.S.} \leq \lambda_{\text{MAX}} I$$

λ_{MAX} en λ_{MIN} zijn resp. de maximale en minimale eigenwaarden van de covariantie matrix M van de additieve ruis (na transformatie)

Stel wederom $g = C g^*$ dan geldt:

$$\text{COV} \tilde{y}_{L.S.}^* = C^T R^T M R C \text{ en } \text{COV} \tilde{y}_{M.V.}^* = (C^T R^T M^{-1} R C)^{-1}$$

C is zo gekozen dat $\text{COV} \tilde{y}_{L.S.}^*$ diagonaal is.

E is een $(n + k - 1 \times n + k - 1)$ matrix, waarvan de kolommen $(n + k - 1)$ eigenvectoren van M bevatten. (E is een orthogonale matrix aangezien M symmetrisch is) $E^T E = I$

Stel $G = E^T M E$ G is een $(k \times k)$ matrix

$P = C^T R^T E$ P is een $(k \times n+k-1)$ matrix

$$P P^T = C^T R^T E E^T R C = I, \text{ d.w.z. } \sum_{j=1}^{n+k-1} p_{ij}^2 = 1 \text{ voor } i=1, \dots, k$$

$$\text{COV} \tilde{y}_{L.S.}^* = C^T R^T E E^T M E E^T R C = P G P^T \text{ is diagonaal}$$

$$G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_{n+k-1} \end{pmatrix}$$

$$(\text{COV} \tilde{y}_{L.S.}^*)_i = \sum_{j=1}^{n+k-1} p_{ij}^2 \lambda_j \quad i = 1, \dots, k$$

M is een symmetrische, positief definitie matrix. Van een symmetrische matrix zijn de eigenwaarden reëel, van een positief definitie matrix zijn de eigenwaarden > 0 .

$$\lambda_{\text{MIN}} \geq \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+k-1} p_{ij}^2 / \lambda_j} = (\text{COV} \tilde{\beta}^*_{\text{M.V.}})_i \quad i = 1, \dots, k$$

$$\lambda_{\text{MIN}} I \geq \text{COV} \tilde{\beta}^*_{\text{M.V.}}$$



$$\lambda_{\text{MIN}} I \leq \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}} \leq \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{L.S.}} \leq \lambda_{\text{MAX}} I$$

$$\lambda_{\text{MIN}} B B^T \leq \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}} \leq \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{W.L.S.}} \leq \lambda_{\text{MAX}} B B^T$$

$$B B^T = (S^T S)^{-1} = (X^T W X)^{-1}$$

$$\rightarrow \lambda_{\text{MIN}} (X^T W X)^{-1} \leq \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}} \leq \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{W.L.S.}} \leq \lambda_{\text{MAX}} (X^T W X)^{-1}$$

Indien $W = I$ d.w.z. $\text{COV} \tilde{\beta}_{\text{W.L.S.}} = \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{L.S.}}$ dan geldt:

$$\lambda_{\text{MIN}} \underset{\substack{\text{witte} \\ \text{ruis}}}{\text{COV} \tilde{\beta}_{\text{L.S.}}} \leq \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}} \leq \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{L.S.}} \leq \lambda_{\text{MAX}} \underset{\substack{\text{witte} \\ \text{ruis}}}{\text{COV} \tilde{\beta}_{\text{L.S.}}}$$

en $\lambda_{\text{MIN}}, \lambda_{\text{MAX}}$ zijn resp. de minimum en maximum eigenwaarden van $M = F N F^T = I N I = N$ de covariantiematrix van de additieve ruis.

III. Voor de $\text{COV} \tilde{\beta}_{\text{L.S.}}$ is naast de ondergrens $\text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}}$ ook nog een andere bovengrens aan te geven dan vermeld onder II. :

$$\text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}} \leq \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{L.S.}} \leq \frac{1}{4} (\lambda_{\text{MAX}} + \lambda_{\text{MIN}}) \left(\frac{1}{\lambda_{\text{MAX}}} + \frac{1}{\lambda_{\text{MIN}}} \right) \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}}$$

Beschouw vergelijking (1'') : $\underline{v} = R \underline{g} + \underline{m}$

kies $R \underline{\xi} = \underline{\eta}$ $\underline{\xi}$ is een $n+k-1$ vector met de eenheidslengte

$\underline{\eta}^T \underline{\eta} = \underline{\xi}^T R^T R \underline{\xi} = 1 \rightarrow \underline{\eta}$ is eveneens een vector met de eenheidslengte

$$\underline{v}^x = \underline{\eta} \xi + \underline{m}^x$$

ξ is een scalair, \underline{m}^x heeft dezelfde covariantie matrix als \underline{m}

De covariantie van de L.S. en M.V. schatting van deze scalair zijn:

$$\sigma^2_{L.S.} = (\underline{\eta}^T \underline{\eta})^{-1} \underline{\eta}^T M \underline{\eta} (\underline{\eta}^T \underline{\eta})^{-1} = \underline{\eta}^T M \underline{\eta} =$$

$$\underline{\xi}^T (R^T M R) \underline{\xi} = \underline{\xi}^T \text{COV} \{ \underline{L.S.} \}$$

$$\sigma^2_{M.V.} = (\underline{\eta}^T M^{-1} \underline{\eta})^{-1} = (\underline{\xi}^T R^T M^{-1} R \underline{\xi})^{-1} = (\underline{\xi}^T \text{COV} \{ \underline{M.V.} \})^{-1}$$

Er kan nu aangetoond worden dat:

$$\sigma^2_{L.S.} \leq \frac{1}{4} (\lambda_{MAX} + \lambda_{MIN}) (\lambda_{MAX}^{-1} + \lambda_{MIN}^{-1}) \sigma^2_{M.V.}$$

waarbij λ_{MAX} en λ_{MIN} resp. de maximale en minimale eigenwaarden zijn van de covariantie matrix M .

Zie: 1. Katorovich L.V. (1948) "Functional analyses and applied mathematics (Russisch)

Uspehi Math. Nauk 3. 89-185

2. Vergelijking 3.5 van G.S. Watson "Serial Correlation in Regression Analysis I.

Biometrika 42 (1955) 327

Dus:

$$\underline{\beta}^T \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{L.S.}} \leq \frac{1}{4} (\lambda_{\text{MAX}} + \lambda_{\text{MIN}}) \left(\frac{1}{\lambda_{\text{MAX}}} + \frac{1}{\lambda_{\text{MIN}}} \right) \left(\underline{\beta}^T \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}}^{-1} \right)^{-1}$$

En aangezien $\left(\underline{\beta}^T \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}}^{-1} \right)^{-1} \leq \underline{\beta}^T \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}}$

(zie bewijs Appendix A.3.2) geldt:

$$\underline{\beta}^T \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{L.S.}} \leq \frac{1}{4} (\lambda_{\text{MAX}} + \lambda_{\text{MIN}}) \left(\frac{1}{\lambda_{\text{MAX}}} + \frac{1}{\lambda_{\text{MIN}}} \right) \underline{\beta}^T \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}}$$

Deze ongelijkheid geldt voor alle $\underline{\beta} \rightarrow$

$$\text{COV} \tilde{\beta}_{\text{L.S.}} \leq \frac{1}{4} (\lambda_{\text{MAX}} + \lambda_{\text{MIN}}) \left(\frac{1}{\lambda_{\text{MAX}}} + \frac{1}{\lambda_{\text{MIN}}} \right) \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}}$$

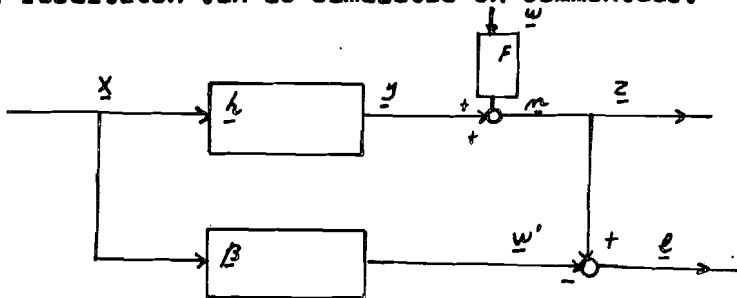
Vermenigvuldig links en rechts met resp. B en B^T

$$\text{COV} \tilde{\beta}_{\text{W.L.S.}} \leq \frac{1}{4} (\lambda_{\text{MAX}} + \lambda_{\text{MIN}}) \left(\frac{1}{\lambda_{\text{MAX}}} + \frac{1}{\lambda_{\text{MIN}}} \right) \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}}$$

4. VERGELIJKING VAN $\text{COV}_{\hat{\beta}_{L.S.}}$ MET $\text{COV}_{\hat{\beta}_{M.V.}}$ AAN DE HAND VAN EEN PRAKTISCHE SITUATIE.

Om experimenteel na te gaan, in hoeverre de covariantie van de L.S. schatting "groter" is dan die van de M.V. schatting, worden beide in een praktische situatie berekend. Hiertoe wordt zowel het model als het proces op de computer gesimuleerd. Achtereenvolgens zullen diverse onderdelen van deze simulatie nader besproken worden:

1. het ingangssignaal;
2. de impulsresponsie van het proces;
3. de additieve ruis;
4. de flowdiagrammen;
5. vergelijking van de L.S. schatting met M.V. schatting wat betreft het aantal bewerkingen;
6. resultaten van de simulatie en commentaar.



4.1. Het ingangssignaal.

Als ingangssign. wordt witte ruis gekozen.

De reden van deze keuze is dat in een industriële situatie de fluctuaties aan de ingang van het te schatten systeem als witte ruis opgevat kunnen worden.

4.2. De impulsresponsie van het proces.

Het proces is van de eerste orde. De impulsresponsie is:

$$h(t) = \exp. \left(-\frac{1}{T} t \right)$$

Er worden vijf punten van deze impulsresponsie geschat:

$$h(0) = 1$$

$$h(\tau) = e^{-1}$$

$$h(2\tau) = e^{-2}$$

$$h(3\tau) = e^{-3}$$

$$h(4\tau) = e^{-4}$$

$$\underline{h} = \begin{pmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_4 \end{pmatrix}$$

De overwegingen die tot deze 5 punten geleid hebben zijn de volgende:

- a. De impulsresponsie $h(t) = e^{-\frac{1}{\tau} t}$ wordt na $t = 4\tau$ voldoende klein geacht en afgebroken.

$$\int_{4\tau}^{\infty} e^{-\frac{1}{\tau} t} dt = \tau \int_{4\tau}^{\infty} e^{-\frac{1}{\tau} t} dt = \tau e^{-4}$$

Het resterende gedeelte is:

$$\int_0^{4\tau} e^{-\frac{1}{\tau} t} dt = \tau (1 - e^{-4})$$

De relatieve fout door dit afbreken wordt: $\frac{e^{-4}}{(1-e^{-4})} = \frac{1}{e^4 - 1} = 0,02$

- b. Het probleem is nu door hoeveel "samples"

het resterende gedeelte van de impulsresponsie (tussen 0 en 4τ) ge-representeerd moet worden.

Een maat voor het aantal "samples" kan in dit geval gevonden worden door de fout te beschouwen, die ontstaat tussen het oorspronkelijke gedeelte van de impulsresponsie (0 en 4τ) en het oppervlakte dat ontstaat door een "hold" actie van de "samples".

Indien de bemonsteringstijd τ wordt gekozen, dan vallen er vijf "samples" in het interval (0 - 4τ).

Het oppervlakte, dat ontstaat na een lineaire interpolatie (2de orde "hold" actie) van de "samples" is:

$$\tau \left(\frac{1}{2} + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \frac{1}{2} e^{-4} \right)$$

De relatieve fout bedraagt:

$$\frac{z(\frac{1}{z} + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \frac{1}{z}e^{-4}) - (1 - e^{-4})}{(1 - e^{-4})z} \approx 0,13$$

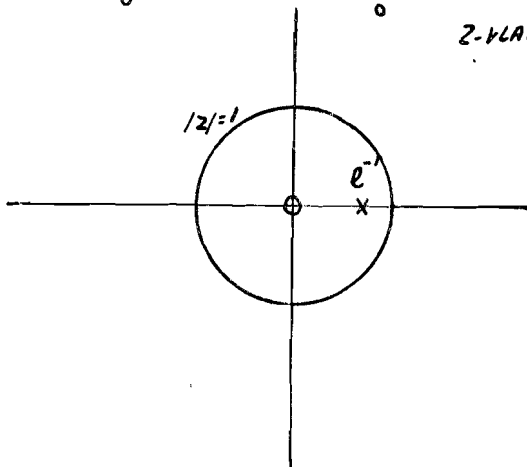
Dit wordt als voldoende klein beschouwd.

Indien in het interval 4 "samples" gekozen worden, dan bedraagt de relatieve fout 0,87.

De pool die behoort bij dit systeem (continu) is $s = -\frac{1}{T}$
 Het discrete systeem heeft een pool bij $z = e^{-1}$ en een nulpunt voor $z = 0$ want:

$$H(z) = \sum_0^{\infty} h(nT)z^{-nT} = \sum_0^{\infty} e^{-n} z^{-nT} = \frac{z}{z - e^{-1}}$$

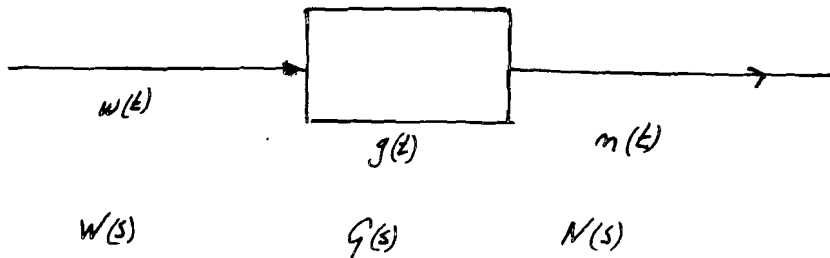
z-vlak



4.3. De additieve ruis.

Het mag bekend verondersteld worden, dat indien witte ruis (stationair en ergodisch) met een autocorrelatiefunctie $\psi_{ww}(\theta) = \sigma_w^2 \delta(\theta)$ aan de ingang van een eerste orde systeem toegevoerd wordt, de autocorrelatiefunctie van het signaal aan de uitgang de volgende is:

$$\Psi_{nn}(\theta) = \frac{1}{2\tau_0} \sqrt{w}^2 e^{-\frac{1}{\tau_0}|\theta|} \quad \text{want:}$$



$$g(t) = \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{1}{\tau_0} t}, \quad G(s) = \frac{1}{\tau_0 (s + \frac{1}{\tau_0})}$$

$$N(s) = G(s) W(s)$$

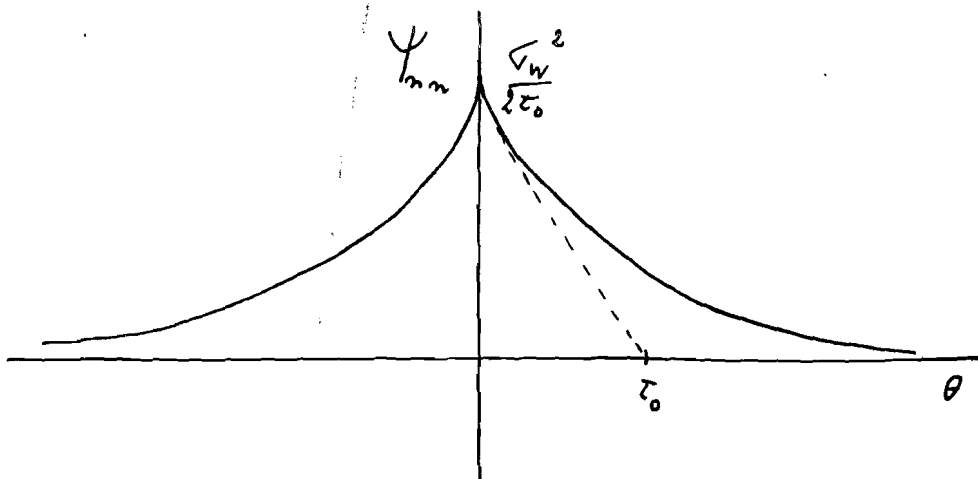
$$\phi_{nn}(s) = G(-s) G(s) \phi_{ww}(s)$$

$$\phi_{ww}(s) = \sqrt{w}^2$$

$$\phi_{nn}(s) = \frac{1}{\tau_0^2} \left(\frac{1}{-s + \frac{1}{\tau_0}} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_0}} \right) \sqrt{w}^2 = \frac{\sqrt{w}^2}{2\tau_0} \left(\frac{1}{s + \frac{1}{\tau_0}} + \frac{1}{-s + \frac{1}{\tau_0}} \right)$$

Terugtransformatie levert:

$$\Psi_{nn}(\theta) = \frac{1}{2\tau_0} e^{-\frac{1}{\tau_0}|\theta|} \sqrt{w}^2$$



Het ligt in de bedoeling de additieve ruis van het systeem de bovenstaande correlatiefunctie te geven. Doch aangezien het systeem op een digitale computer gesimuleerd wordt, moet een discrete beschrijvingswijze gegeven worden. De computer is (via een subroutine programma) in staat "samples" (getallen) te genereren met een normaal verdeelde kansdichtheidsfunctie. Deze ruis ("samples") is als wit te beschouwen omdat:

$$\Psi_{i,w}(kT) = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{w,i}^2 \quad \text{voor } k=0 \\ 0 \quad \text{voor } k \neq 0 \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

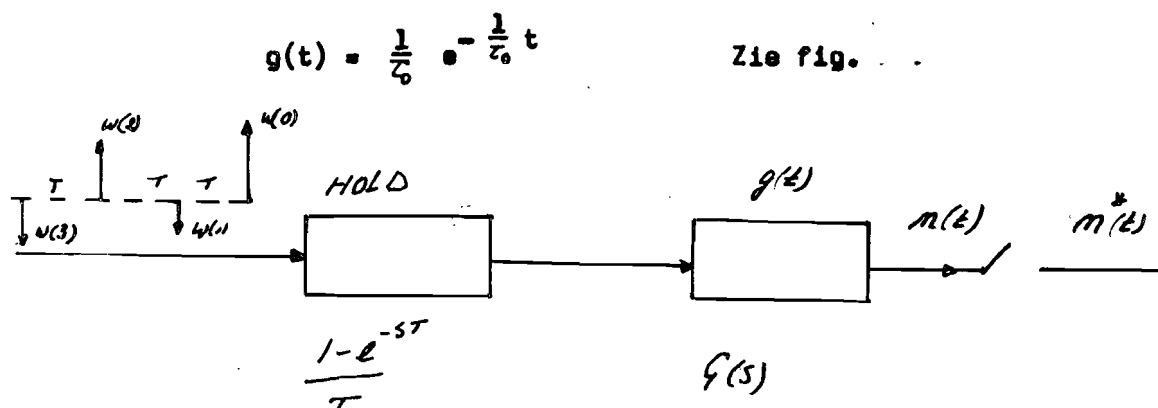
$$\Psi_{i,w}(kT) = 0 \quad \text{voor } k \neq 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

met $\Psi_{i,w}(kT)$ de autocorrelatiefunctie van de i^{de} "sample"

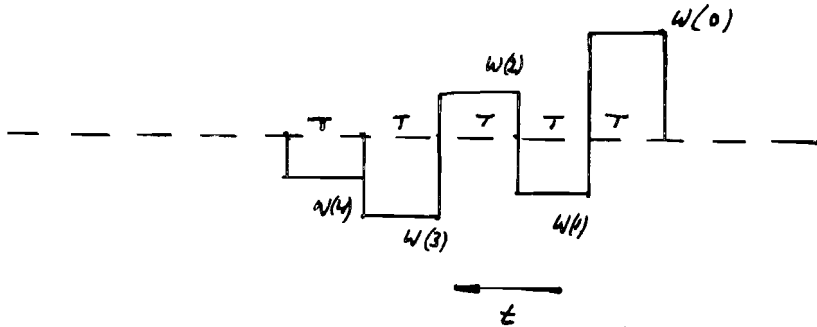
De ruis is stationair, omdat $\Psi_{i,w}(kT) = \Psi_{j,w}(kT) = \sigma_w^2$ (voor alle i, j)

Tevens mag de ruis ergodisch beschouwd worden.

Deze "samples" worden toegevoerd aan een "hold circuit" met daarachter geschakeld het eerste ordeproces met impulsresponsie.



Het "hold circuit" houdt de waarde van een "sample" T sec. lang vast. Het signaal na het "hold circuit" doch voor het eerste ordeproces heeft de volgende gedaante:



In het interval $0 \leq t < T$ is de uitgang $n(t)$ van het eerste ordeproces als volgt te beschrijven:

$$G(s) = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_0}}$$

$$T_0 \dot{n}(t) + n(t) = w(t) = w(0) \cdot U(t)$$

$$N(s) \left(s + \frac{1}{T_0} \right) - n(0) = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{s} \cdot w(0)$$

$$N(s) = \frac{\frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{s} w(0) + n(0)}{s + \frac{1}{T_0}}$$

$$n(t) = n(0) e^{-\frac{1}{T_0} t} + w(0) (1 - e^{-\frac{1}{T_0} t}) \quad \text{voor } 0 \leq t < T$$

$$e^{-\frac{1}{T_0} t} = b_1$$

$$n(t) = b_1 n(0) + (1 - b_1) w(0) \quad 0 \leq t < T$$

$$n(1 \times T) = b n(0) + (1 - b) w(0) \quad \text{waarbij } b = e^{-\frac{T}{T_0}}$$

geworden is. $0 < b < 1$

Met behulp van volledige inductie is aan te tonen dat:

$$n(mT) = b n((m-1)T) + (1-b) u((m-1)T)$$

$$\text{ofwel: } n_{m+1} = b n_m + (1-b) u_m$$

De computer genereert ruisgetallen met $E\{u_m\} = 0$, $E\{u_m^2\} = \sigma_u^2$

Met $E\{x\} = a$ wordt hier een ensemble gemiddelde bedoeld.

$$E\{n_{m+1}\} = b E\{n_m\} + (1-b)E\{u_m\}$$

$$E\{n_{m+1}\} = b E\{n_m\}$$

$$n_0 = 0 \quad \text{dus} \quad E\{n_0\} = 0$$

$$E\{n_{m+1}\} = 0$$

De variantie van n wordt vervolgens berekend:

$$E\{n_{m+1}^2\} = E\{b n_m + (1-b) u_m\}^2 =$$

$$b^2 E\{n_m^2\} + 2b(1-b) E\{n_m u_m\} + (1-b)^2 E\{u_m^2\}$$

$$\sigma_{m+1,n}^2 = b^2 \sigma_{m,n}^2 + 0 + (1-b)^2 \sigma_u^2$$

$$\checkmark_{1,n}^2 = b^2 \checkmark_{0,n}^2 + (1-b)^2 \checkmark_w^2 = (1-b)^2 \checkmark_w^2$$

$$\checkmark_{2,n}^2 = b^2 \checkmark_{1,n}^2 + (1-b)^2 \checkmark_w^2 = (1-b)^2 (1+b^2) \checkmark_w^2$$

$$\checkmark_{m+1,n}^2$$

$$= (1-b)^2 \checkmark_w^2 \sum_{j=0}^m b^{2j}$$

$$\checkmark_w^2 (1-b)^2 \frac{1-b^{2(m+1)}}{1-b^2} = \checkmark_w^2 \frac{1-b}{1+b} (1-b^{2(m+1)})$$

$$n_m n_{m+1} = (b n_m + (1-b)w_m)(b n_{m-1} + (1-b)w_{m-1})$$

$$= b^2 n_m n_{m-1} + (1-b)^2 w_m w_{m-1} + (1-b)b n_m w_{m-1} + b(1-b) w_m n_{m-1}$$

$$E \{ w_m n_{m-1} \} = E \{ w_m w_{m-1} \} = 0$$

$$E \{ n_m n_{m+1} \} = b^2 E \{ n_m n_{m-1} \} + b(1-b) E \{ n_m w_{m-1} \}$$

$$w_{m-1} n_m = b n_{m-1} w_{m-1} + (1-b) w_{m-1}^2$$

$$E \{ w_{m-1} n_m \} = (1-b) \checkmark_w^2$$

$$\text{dus: } E \{ n_m n_{m+1} \} = b^2 E \{ n_m n_{m-1} \} + b(1-b)^2 \checkmark_w^2$$

$$E \{ n_1 n_2 \} = b(1-b)^2 \checkmark_w^2$$

$$E \{ n_2 n_3 \} = b^3 (1-b)^2 \checkmark_w^2 + b(1-b)^2 \checkmark_w^2 = b(1-b)^2 (1+b^2) \checkmark_w^2$$

$$E \{ n_3 n_4 \} = b(1-b)^2 (1+b^2 + b^4) \sigma_w^2$$

$$\vdots$$

$$E \{ n_m n_{m+1} \} = \sigma_w^2 (1-b)^2 b \sum_{j=0}^{m-1} b^{2j} = \frac{2}{\sigma_w^2} (1-b)^2 b \frac{1-b^{2m}}{1-b^2}$$

Op gelijke wijze kan gevonden worden dat:

$$E \{ n_m n_{m+2} \} = \frac{2}{\sigma_w^2} b^2 (1-b)^2 \frac{1-b^{2m}}{1-b^2}$$

$$E \{ n_m n_{m+k} \} = \frac{2}{\sigma_w^2} b^k (1-b)^2 \frac{1-b^{2m}}{1-b^2}$$

Uit de hier berekende ensemble gemiddelden blijkt dat het signaal n aan de uitgang niet stationair is. Het inschakelverschijnsel is hier debet aan. Immers voor m groot genoeg (afhankelijk van de grootte van b) mag $b^{2m} = 0$ verondersteld worden.

De covariantie matrix van \underline{n} wordt nu:

$$\text{COV } \underline{n} = E(\underline{n}, \underline{n}^T)$$

$$\text{met } \underline{n}^T = (n_1, n_{1+1}, \dots, n_{1+N})$$

\underline{n}^T is de getransponeerde vector van \underline{n}

$$\text{COV } \underline{n} = \begin{pmatrix} E\{n_1^2\} & E\{n_1 n_{1+1}\} & \dots & E\{n_1 n_{1+N}\} \\ E\{n_{1+1} n_1\} & E\{n_{1+1}^2\} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ E\{n_{1+N} n_{1+N}\} & & & E\{n_{1+N} n_{1+N}\} \end{pmatrix}$$

Indien ℓ voldoende groot is dan geldt:

$$b^{\ell} \rightarrow 0 \text{ en dus}$$

$$N = \text{COV } \underline{n} = \sqrt{\frac{1-b}{1+b}} \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^N \\ b & 1 & b & & \\ b^2 & b & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b^N & b^{N-1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

De sample tijd T moet gelijk zijn aan de sample tijd T vermeld onder 4.2.

Hiermee wordt

$$b = e^{-\tau/T_0}$$

Door T_0 te variëren verandert de bandbreedte van het ruisfilter. Hiermee is mogelijkheid geïntroduceerd om de mate van "gekleurdheid" van de additieve ruis \underline{n} te variëren.

De geïnverteerde covariantie matrix N^{-1} die nodig is bij de berekening van de covariantie van de M.V. schatting behoeft niet m.b.v. een subroutine matrix inversie op de computer berekend te worden. Het is mogelijk deze matrix analytisch te berekenen.

$$N^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+b}{1-b}}} \cdot \frac{1}{1-b^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 & \dots & 0 \\ -b & b^2+1 & -b & & \\ 0 & -b & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & b^2+1 & -b \\ & & & & -b & 1 \end{pmatrix}$$

Het optreden van de nullen is te wijten aan afhankelijke rijen waardoor de onderdeterminanten nul worden.

4.4. De flowdiagrammen

Er zijn twee computerprogramma's geschreven.

Het eerste programma onderzoekt in hoeverre de covariantie van de L.S. schatting "groter" is dan die van de M.V. schatting als functie van de "gekleurdheid" van de additieve ruis \underline{n} en bij eenzelfde ingangsgrootheid \underline{x} met lengte N . Door τ_0 te variëren verandert de bandbreedte van het ruisfilter en daarmee de mate van gekleurdheid van de additieve ruis.

τ/τ_0 neemt resp. de waarden 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0,15 en 0,1 aan.

$\tau/\tau_0 = 4$ d.w.z. de bandbreedte van het ruisfilter is 4x zo groot als de bandbreedte van het te schatten systeem \rightarrow De additieve ruis is bij benadering "wit".

$\tau/\tau_0 = \frac{1}{10}$ d.w.z. de bandbreedte van het ruisfilter is 0,1 maal die van het te schatten systeem \rightarrow De ruis is sterk gekleurd.

Om de invloed van de meetduur op de schatting na te gaan wordt de lengte van de ingangsgrootheid van $N = 6$ tot $N = 46$ in stappen van 10 gevarieerd.

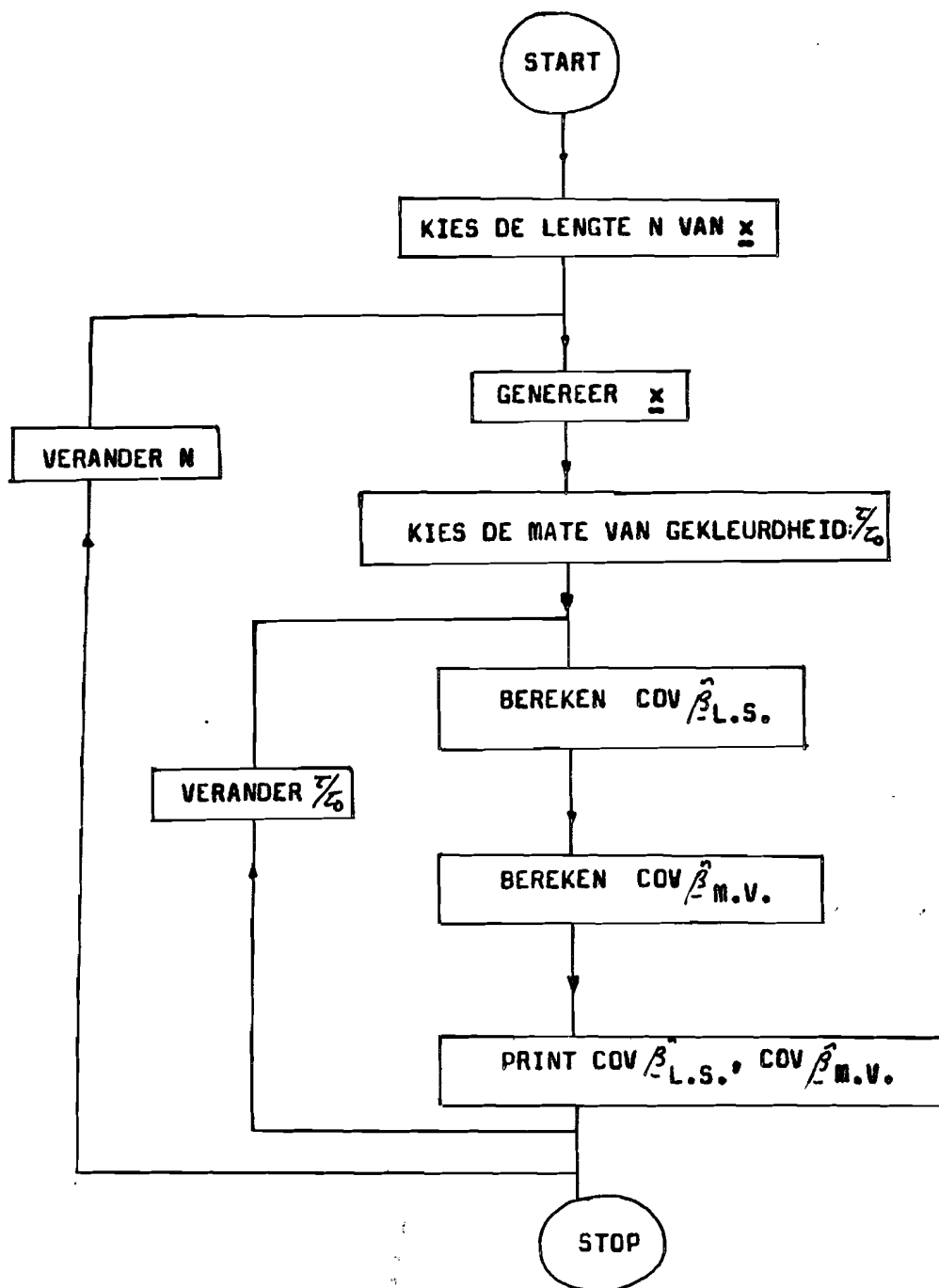
Het flowdiagram van dit programma is op blz. 35 geschetst.

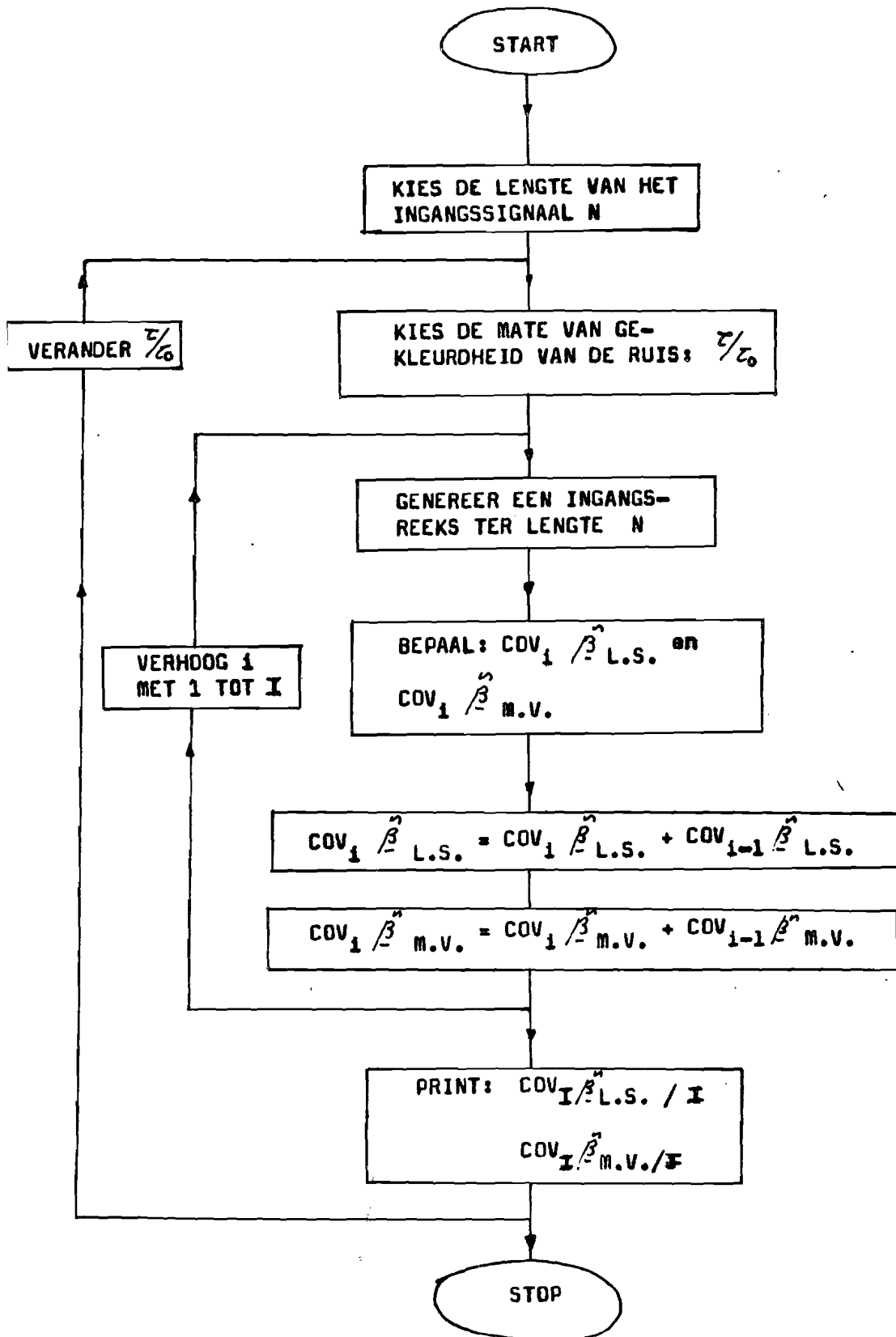
Het computerprogramma van dit flowdiagram is opgenomen in Appendix A.4.4.

In het bovenstaande geval is het niet mogelijk die covarianties met elkaar te vergelijken die ontstaan zijn bij verschillende N aangezien de \underline{x} dan niet de zelfde is. Om dit toch mogelijk te maken wordt gemiddeld naar alle mogelijk voorkomende \underline{x} . Dus er wordt $E_{\underline{x}} \left\{ \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{L.S.}} \right\}$ en $E_{\underline{x}} \left\{ \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}} \right\}$ bepaald

bij een bepaalde waarde N en deze vergeleken met $E_{\underline{x}} \left\{ \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{L.S.}} \right\}$ en $E_{\underline{x}} \left\{ \text{COV} \tilde{\beta}_{\text{M.V.}} \right\}$

bij een andere waarde van N . Het flowdiagram wordt gegeven op blz. 36.





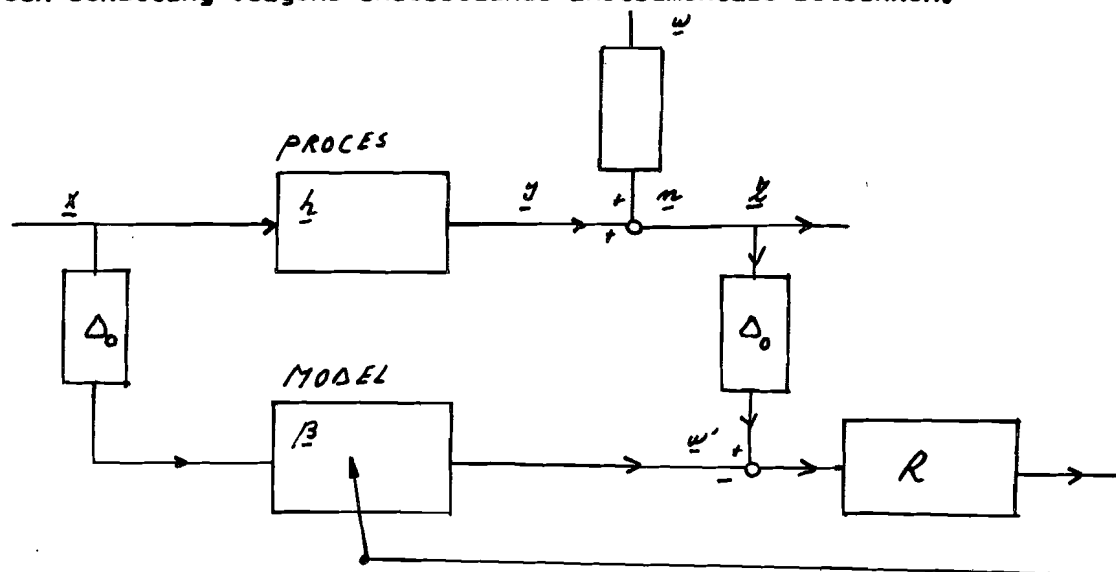
Voor het programma van dit flowdiagram wordt verwezen naar Appendix A.4.4.

In enkele gevallen is de λ_{MAX} , λ_{MIN} van de covariantie matrix N berekend.
Zie voor het programma Appendix A.4.4.

Met behulp van de eigenwaarden zijn de grenzen van de covarianties berekend.

4.5. Vergelijking van de L.S. schatting met de M.V. schatting wat betreft het aantal computer bewerkingen.

De programma's die geschreven zijn (zie A.4.4.) bieden de mogelijkheid de minimumvariantie schatting en de kleinste kwadratenschatting te vergelijken wat betreft het aantal computerbewerkingen. Bij deze vergelijking wordt ook een schatting volgens onderstaande instrumentatie betrokken.



waarbij $D_0^T \cdot D_0 = N^{-1}$, $R = e^T e$, D_0 is een "lower triangular"matrix.

De L.S. schatting volgens deze instrumentatie komt overeen met de M.V.schatting.

Vergelijking van het aantal computerbewerkingen indien alleen $\underline{\beta}$ berekend wordt.

$$\underline{\beta}^{\sim} \text{L.S.} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{z}$$

$$\underline{\beta}^{\sim} \text{M.V.} = (X^T N^{-1} X)^{-1} X^T N^{-1} \underline{z}$$

$$\underline{\beta}^{\sim 1} \text{M.V.} = (D_0 X)^T D_0 X)^{-1} (D_0 X)^T D_0 \underline{z}$$

Om \underline{z} te berekenen is in alle gevallen evenveel "werk" vereist.

$\underline{\beta}^{\sim}$ L.S.	$\underline{\beta}^{\sim}$ M.V.	$\underline{\beta}^{\sim 1}$ M.V.
BEPAAI A=X UIT \underline{x}	BEPAAI A=X UIT \underline{x}	BEPAAI A=X UIT \underline{x}
" $B=A^T A$	" $C=A^T N^{-1}$	" $A^1 = D_0 A$
" $B=B^{-1}$	" $B=C A$	" $B=(A^1)^T A^1$
" $C=B A^T$	" $B=B^{-1}$	" $B=B^{-1}$
	" $D = B C$	" $C = B(A^1)^T$
$\underline{\beta}^{\sim}$ L.S. = $C \underline{z}$	$\underline{\beta}^{\sim}$ M.V. = $D \underline{z}$	" $\underline{z} = D_0 \underline{z}$
		$\underline{\beta}^{\sim 1}$ M.V. = $C \underline{z}$

De minimum variantie schatting vereist t.o.v. de "least" square" schatting:

- één groep van bewerkingen meer, n.l. een matrix vermenigvuldiging
- kennis omtrent N^{-1} (hetgeen hier niet "vertaald" wordt in een aantal bewerkingen)
- meer geheugenruimte n.l. de matrices N^{-1} en D

De laatstgenoemde methode vereist t.o.v. de L.S. schatting:

- twee "bewerkingen" meer n.l. een "triangular" matrix-matrix-vermenigvuldiging en een "triangular" matrix-vector vermenigvuldiging.
- kennis omtrent D_0 (hetgeen verkregen kan worden uit kennis van N^{-1} , en hier niet "vertaald" wordt in een aantal bewerkingen).
- meer geheugenruimte dan de L.S. schatting (n.l. matrix A^1 en D_0) en evenveel als de M.V. schatting want:
 - A^1 benodigt evenveel als D en D_0 benodigt evenveel als N^{-1} (waarbij N^{-1} symmetrisch verondersteld is, zodat slechts de helft van N^{-1} opgeslagen behoeft te worden).

Indien tevens de covarianties uitgerekend dienen te worden dan geldt:

$\text{COV } \tilde{\beta}_{\text{L.S.}}$	$\text{COV } \tilde{\beta}_{\text{M.V.}}$	$\text{COV } \tilde{\beta}^1_{\text{M.V.}}$
$D = C N$ $F = D C^T$ $\text{COV } \tilde{\beta}_{\text{L.S.}} = F^{-1}$	$\text{COV } \tilde{\beta}_{\text{M.V.}} = B$	$\text{COV } \tilde{\beta}^1_{\text{M.V.}} = B$

De covarianties van de M.V. schatting zijn reeds uitgerekend. Om $\text{COV } \tilde{\beta}_{\text{L.S.}}$ uit te rekenen zijn nog:

- een tweetal "bewerkingen" nodig (hierbij is verondersteld dat de additieve ruis niet wit is) n.l. twee matrix-matrix vermenigvuldigingen.
- kennis omtrent N noodzakelijk is.
- geheugenruimte nodig n.l. matrix D en F .

Conclusie: 1. Indien de additieve ruis niet wit is en alleen de parameters van het systeem geschat worden (dus niet de covarianties) dan is de L.S. schatting wat betreft het aantal computerbewerkingen en geheugenruimte verreweg nog het geschiktste om toe te passen.

Tevens vereist de L.S. schatting geen kennis omtrent $\text{COV } \underline{\beta}$. De "gewone" M.V. schatting zal de voorkeur genieten boven de "andere" M.V. schatting, afgezien van de eventuele noodzaak om een aantal "bewerkingen" om D_0 uit N^{-1} te verkrijgen. Immers de "gewone" M.V. schatting vereist t.o.v. de L.S. schatting een matrix-matrix vermenigvuldiging extra, hetgeen neerkomt op $\frac{k}{2} (N+k-1)(N+k)$ vermenigvuldigingen. $\text{COV } \underline{\beta}$ is symmetrisch verondersteld (stationariteit). k is hierbij het aantal te schatten parameters en N de ingangreekslengte. De M.V. schatting volgens de gewijzigde opzet vereist een triangular matrix-matrix vermenigvuldiging en een triangular matrix-vector vermenigvuldiging extra t.o.v. de L.S. schatting, hetgeen neerkomt op $\frac{k+1}{2} (N+k-1)(N+k)$ vermenigvuldigingen.

Zoals reeds vaker opgemerkt, heeft de M.V. schatting een "kleinere" covariantie matrix. In hoeverre dit voordeel opweegt tegen meer geheugenruimte, een groter aantal computerbewerkingen, kennis van N , zal moeten blijken uit de resultaten van de simulatie.

Indien tevens bij een schatting van de parameters de covariantie berekend moet worden dan verdient de M.V. schatting de voorkeur wat betreft het aantal bewerkingen en de benodigde geheugenruimte. In dit geval is voor de covariantie van de L.S. schatting ook kennis van N vereist.

2. Indien de additieve ruis wit is vallen alle schattingen samen.

$$\text{Dus } \text{COV } \underline{\beta}_{L.S.}^2 = \text{COV } \underline{\beta}_{M.V.}^2 = \text{COV } \underline{\beta}_{M.V.}^1$$

4.6 Resultaten van de simulatie en commentaar.

Op blz. 43 t/m blz. 49 zijn de grafieken geschetst die inzicht geven in de resultaten van het eerste computerprogramma. De $\text{COV } \underline{\beta}_{L.S.}^2$ wordt vergeleken met de $\text{COV } \underline{\beta}_{M.V.}^2$ voor verschillende waarden van de gekleurtheid van de ruis bij eenzelfde ingangreeks (lengte N). Er worden slechts varianties beschouwd (dit zijn de diagonaal elementen van de covariantie matrix). Aangezien het verloop van de diagonaal elementen $\sqrt{22}^2$, $\sqrt{33}^2$ vrijwel hetzelfde is (zie blz. 43, 44 en blz. 45) wordt volstaan met het schetsen van $\sqrt{11}^2$. De diagonaal elementen

$\sqrt{44}^2, \sqrt{55}^2$ worden niet in beschouwing genomen vanwege het feit dat deze in het geval van een L.S. schatting hetzelfde zijn als resp. $\sqrt{22}^2, \sqrt{33}^2$. Dit houdt in, dat $\text{COV} \tilde{\beta}_{L.S.}$ zowel links-als rechts-symmetrisch is.

$\text{COV} \tilde{\beta}_{m.v.}$ is niet links- en rechts-symmetrisch maar $E_{\underline{x}} \left\{ \text{COV} \tilde{\beta}_{m.v.} \right\}$ echter wel.

De grafieken kunnen onderling niet met elkaar vergeleken worden omdat de ingangreeks lengte steeds anders is.

Indien uit deze grafieken reeds voorzichtig een conclusie getrokken wordt, dan is het wel deze: in het gebied $\tau/\tau_0 > 2$ vallen de $\text{COV} \tilde{\beta}_{L.S.}$ en de $\text{COV} \tilde{\beta}_{m.v.}$ nagenoeg samen. De $\text{COV} \tilde{\beta}_{\text{wit}} = \sigma_n^2 (X^T X)^{-1}$ is een goede benadering voor deze covarianties. Of, met andere woorden, voor $\tau/\tau_0 > 2$ mag de additieve ruis nagenoeg "wit" beschouwd worden; $\text{COV} \underline{n} \approx \sigma_w^2 \cdot I \approx \sigma_n^2 I$.

In het gebied $0 < \tau/\tau_0 < 2$ begint $\text{COV} \tilde{\beta}_{m.v.}$ langzaam "kleiner" te worden dan de $\text{COV} \tilde{\beta}_{L.S.}$. De verhouding tussen σ_{II}^2 L.S. en σ_{II}^2 m.v. wordt hier niet uitgerekend aangezien deze incidentele waarde niet zo interessant is.

Verscheidene grafieken zijn ook voorzien van een bovengrens $\lambda_{\text{MAX}} \sigma_{II}^2$ wit en een ondergrens $\lambda_{\text{MIN}} \sigma_{II}^2$ wit. Zoals te zien is zijn de beide grenzen nogal ruim, hetgeen niet te verwonderen is, aangezien deze grenzen gelden voor alle mogelijke ingangreeksen dus b.v. ook orthogonale regressie polynomen.

Op blz. 50 t/m blz. 56 zijn de grafieken getekend volgens het tweede computerprogramma. $E_{\underline{x}} \left\{ \text{COV} \tilde{\beta}_{L.S.} \right\}$ en $E_{\underline{x}} \left\{ \text{COV} \tilde{\beta}_{m.v.} \right\}$ worden met elkaar vergeleken. Tevens is in enkele gevallen de bovengrens $\frac{1}{2} (\lambda_{\text{MAX}} + \lambda_{\text{MIN}}) \times (1/\lambda_{\text{MAX}} + 1/\lambda_{\text{MIN}}) \times \text{COV} \tilde{\beta}_{m.v.}$ geschatet.

Wat reeds naar aanleiding van de eerste serie grafieken vermoed wordt, wordt hier bewaarheid: voor $\tau/\tau_0 > 2$ vallen $E_{\underline{x}} \left\{ \text{COV} \tilde{\beta}_{m.v.} \right\}$ en $E_{\underline{x}} \left\{ \text{COV} \tilde{\beta}_{L.S.} \right\}$ nagenoeg samen.

Voor $\tau/\tau_0 < 2$ wordt $E_{\underline{x}} \left\{ \text{COV} \tilde{\beta}_{m.v.} \right\}$ geleidelijk "kleiner" dan $E_{\underline{x}} \left\{ \text{COV} \tilde{\beta}_{L.S.} \right\}$.

Indien: $\frac{\tau}{\tau_0} = 0,5$ dan is $\frac{\sqrt{11}^2 \text{ L.S.}}{2} \approx 1,6$
 $\sqrt{11} \text{ M.V.}$

$\frac{\tau}{\tau_0} = 0,25$ dan is $\frac{\sqrt{11}^2 \text{ L.S.}}{2} \approx 2,8$
 $\sqrt{11} \text{ M.V.}$

$\frac{\tau}{\tau_0} = 0,15$ dan is $\frac{\sqrt{11}^2 \text{ L.S.}}{2} \approx 3,7$
 $\sqrt{11} \text{ M.V.}$

$\frac{\tau}{\tau_0} = 0,1$ dan is $\frac{\sqrt{11}^2 \text{ L.S.}}{2} \approx 5,5$
 $\sqrt{11} \text{ M.V.}$

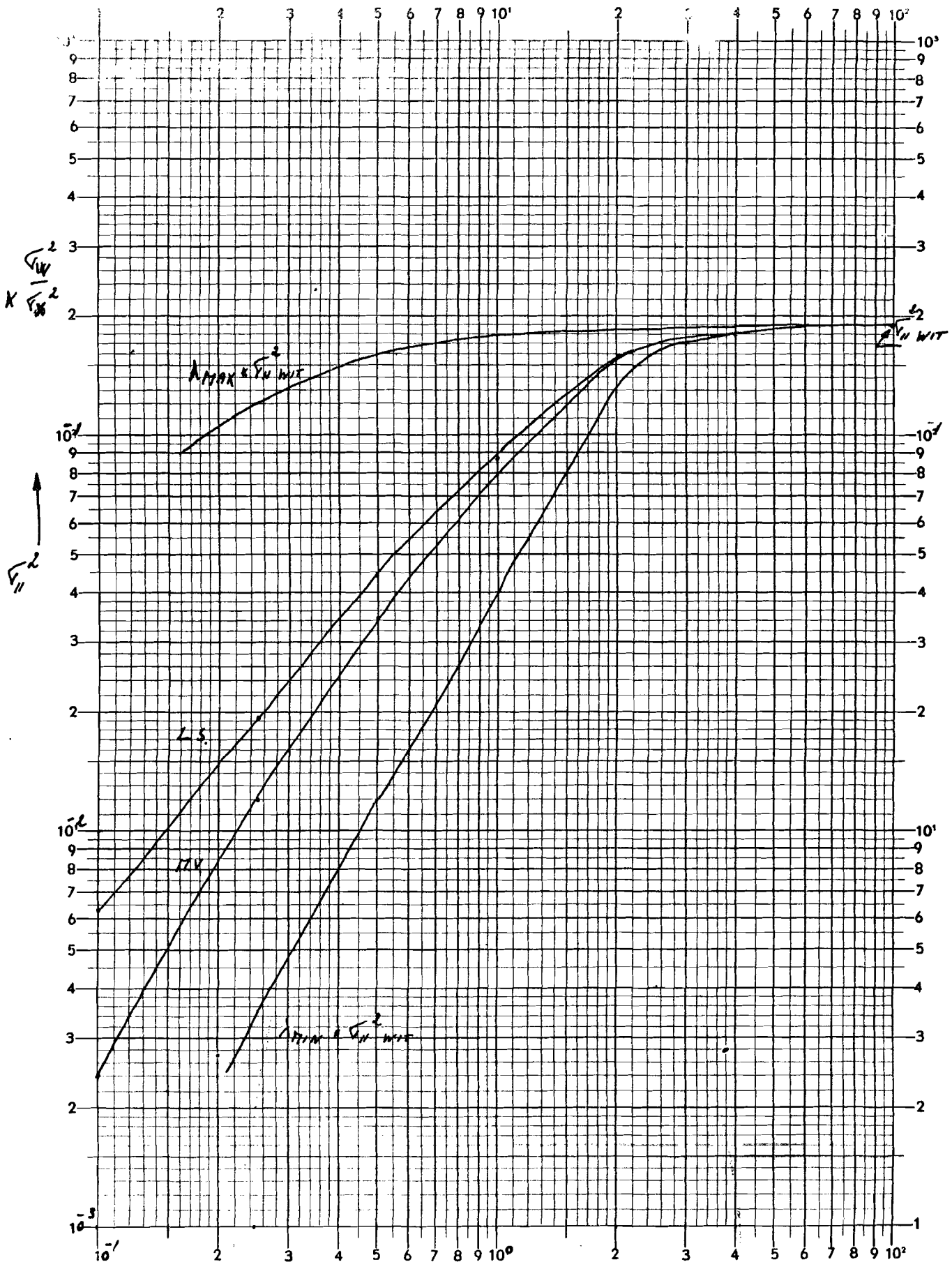
Bovendien valt op te merken dat deze verhouding voor kleinere ingangssreeks kleiner is dan voor grotere ingangssreeks bij eenzelfde $\frac{\tau}{\tau_0}$.

Naar aanleiding van de conclusies in 4.5. kan nu gezegd worden dat voor $\frac{\tau}{\tau_0} > 2$ de additieve ruis al "wit" beschouwd mag worden en derhalve het aanbeveling verdient least square te schatten.

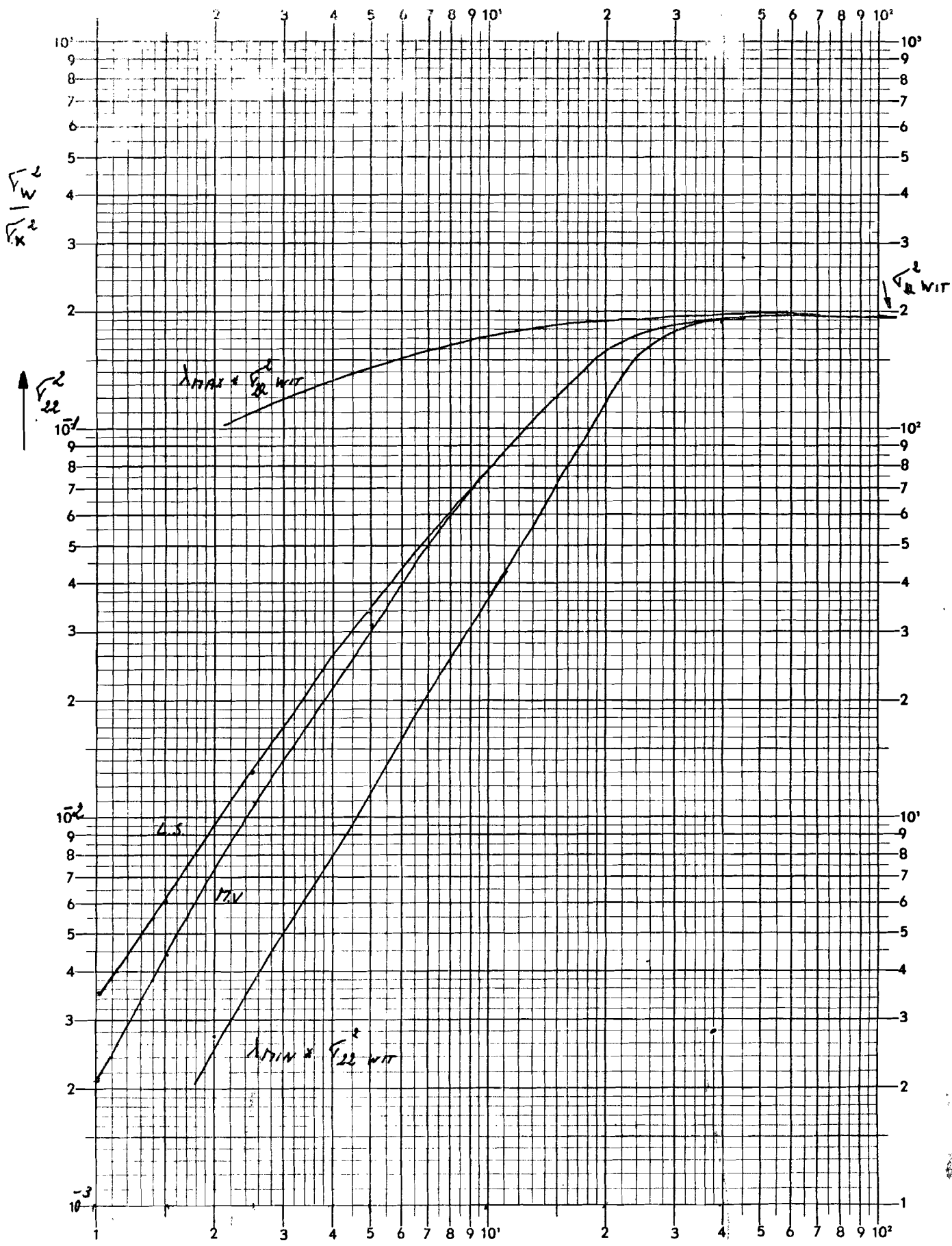
In het gebied $0 < \frac{\tau}{\tau_0} < 2$ zal het o.a. van de volgende factoren afhangen welke schattingswijze de voorkeur gaat genieten:

1. de overwegingen, geschetst onder de conclusies van 4.5. (aantal "bewerkingen", hoeveelheid geheugenruimte, a priori kennis)
2. de smalbandigheid van de additieve ruis
3. de beschikbare meetduur
4. welke "waarde" wordt er gehecht aan een "iets betere" schatting?

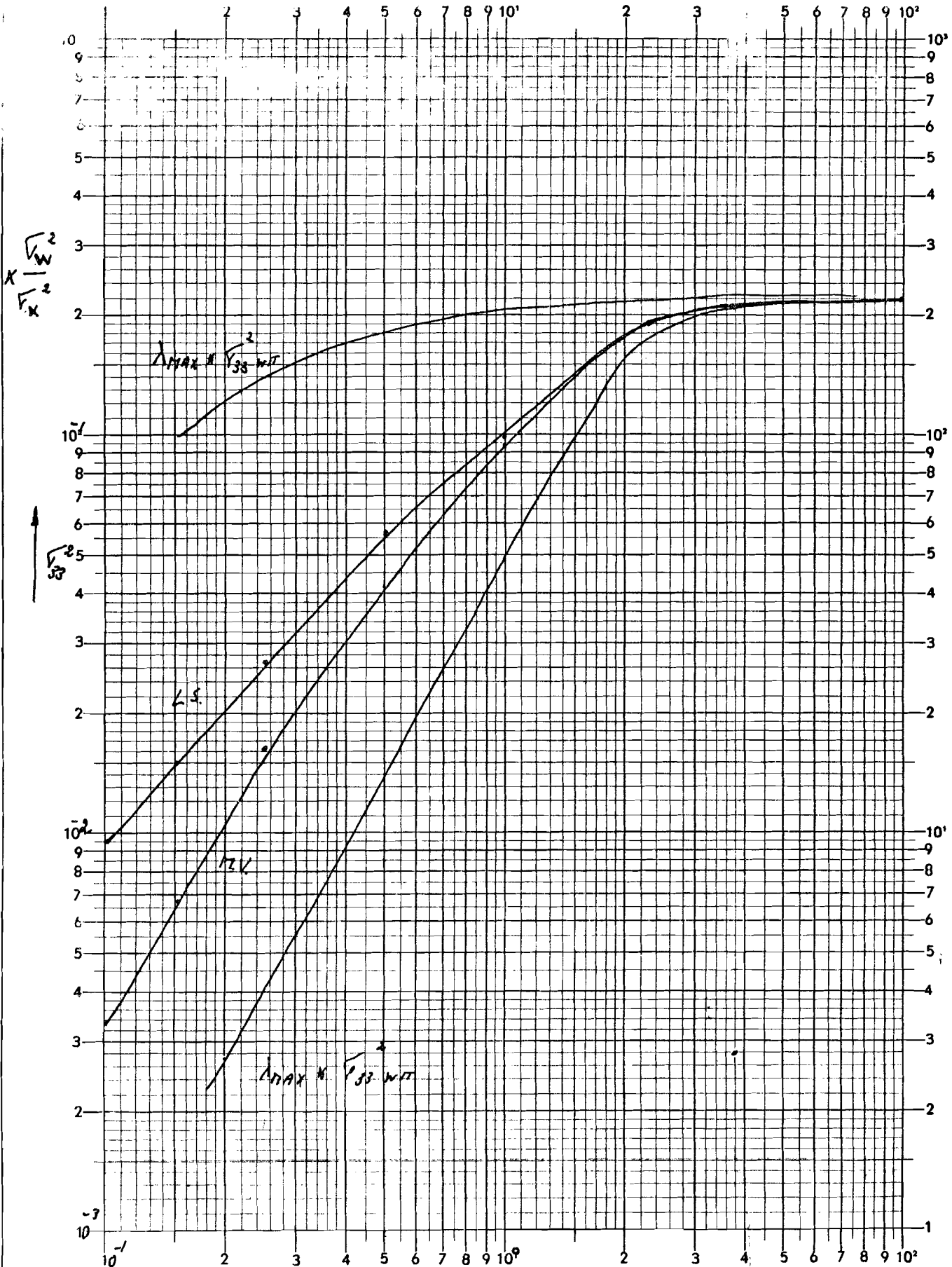
N=6 (STEEAS GELYKE K)



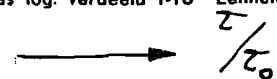
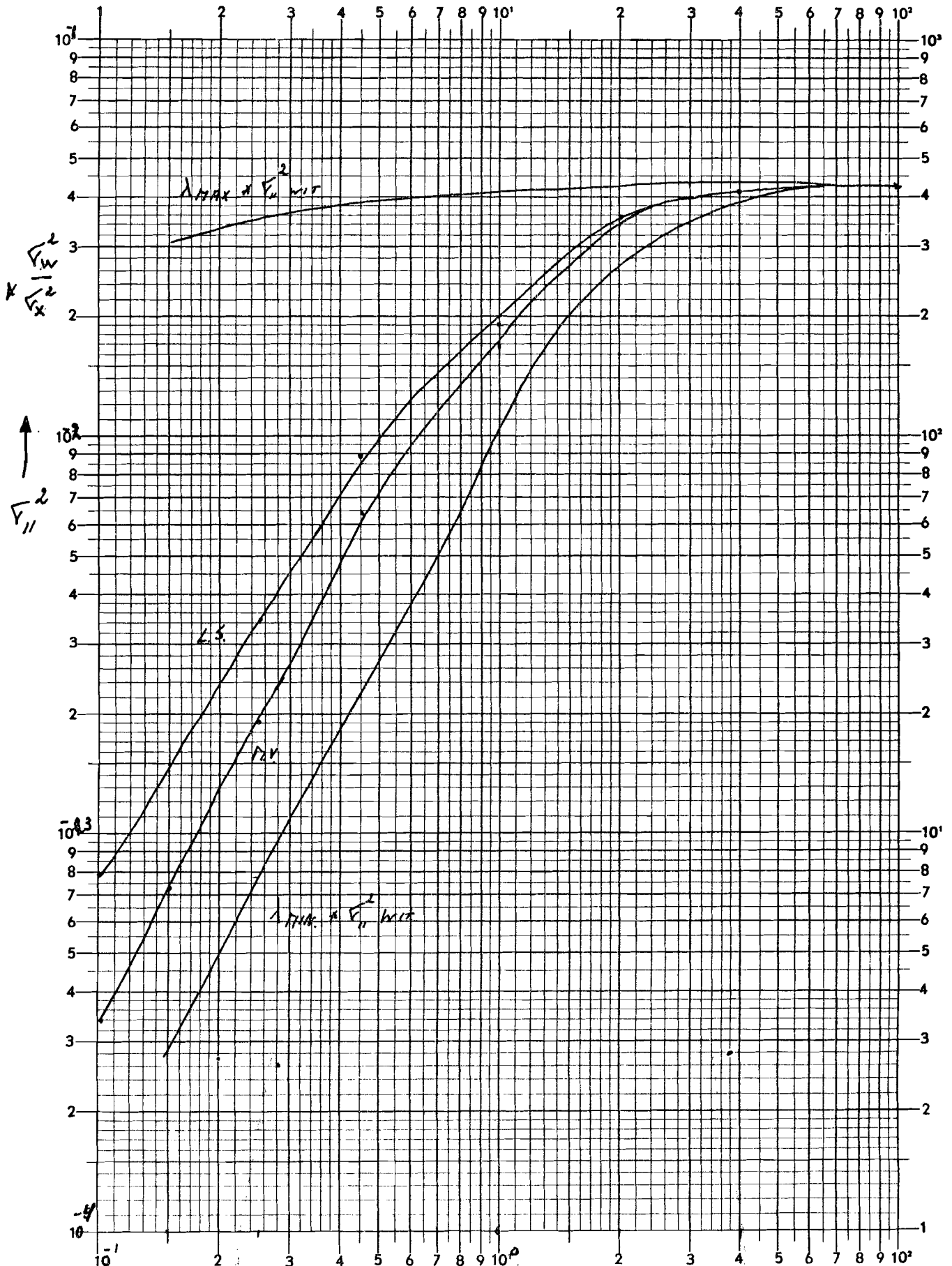
Handwritten note: *... 3)*



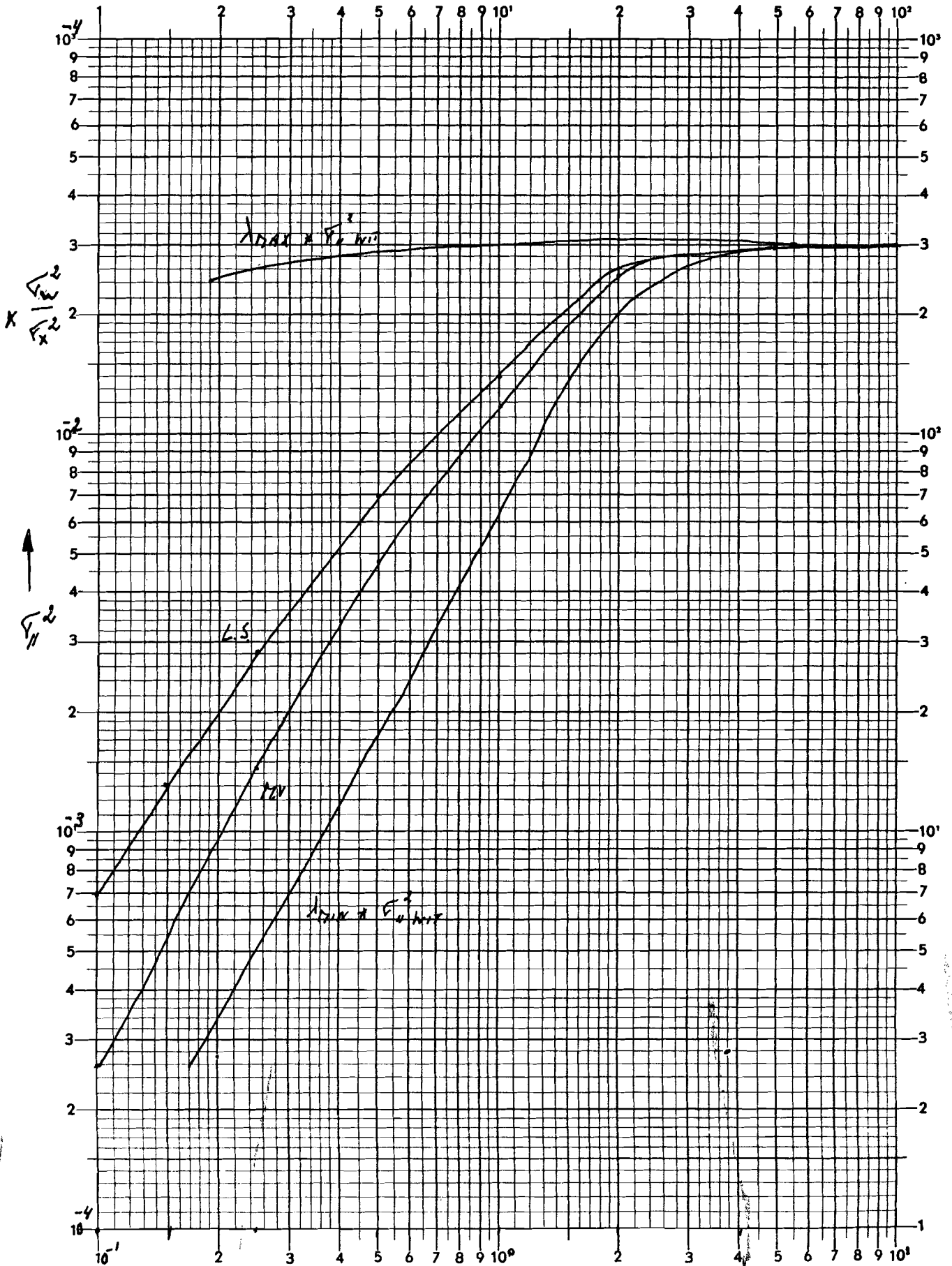
Wiss (grijze S)



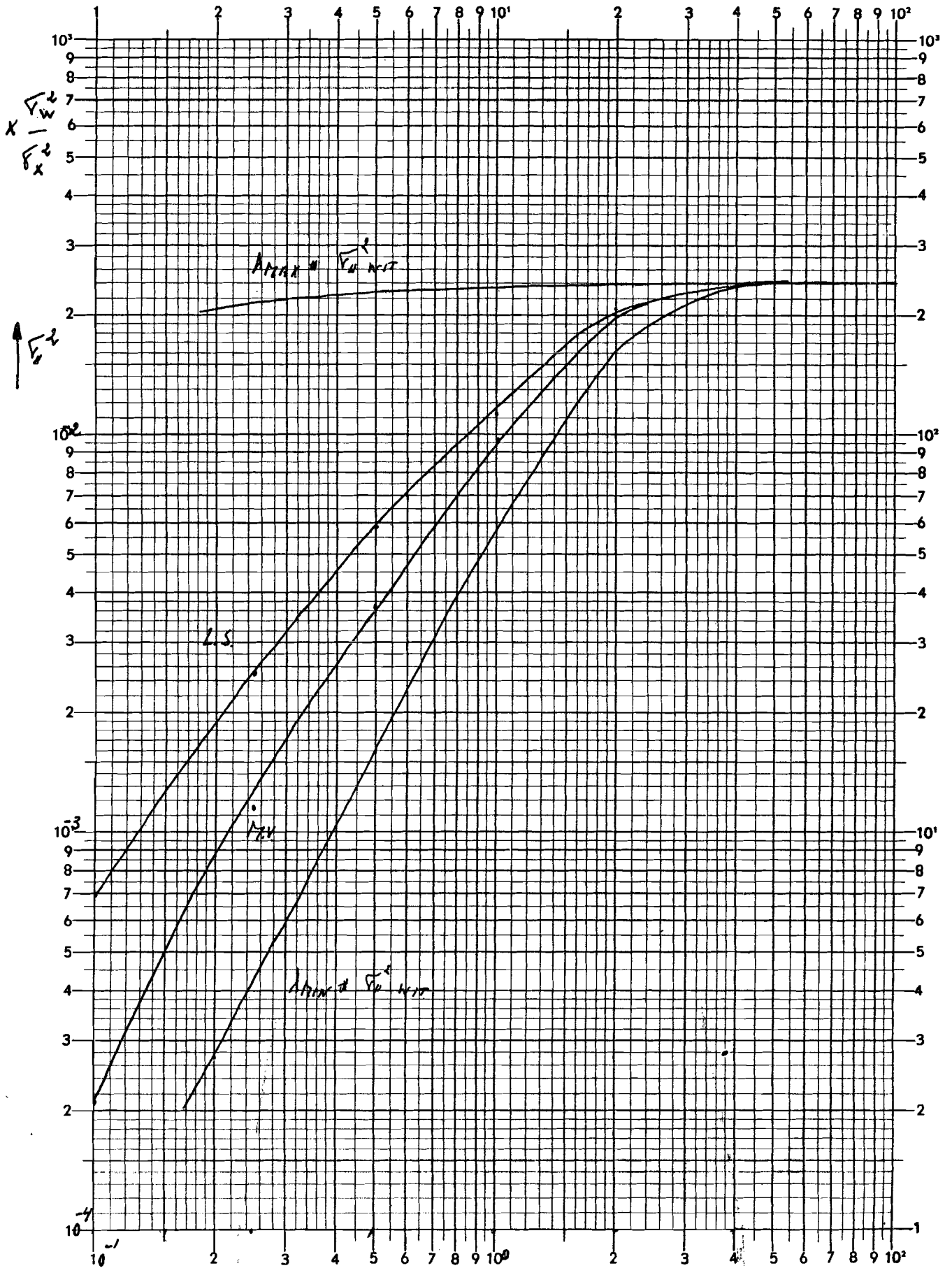
$N=16$ (gelijke K)



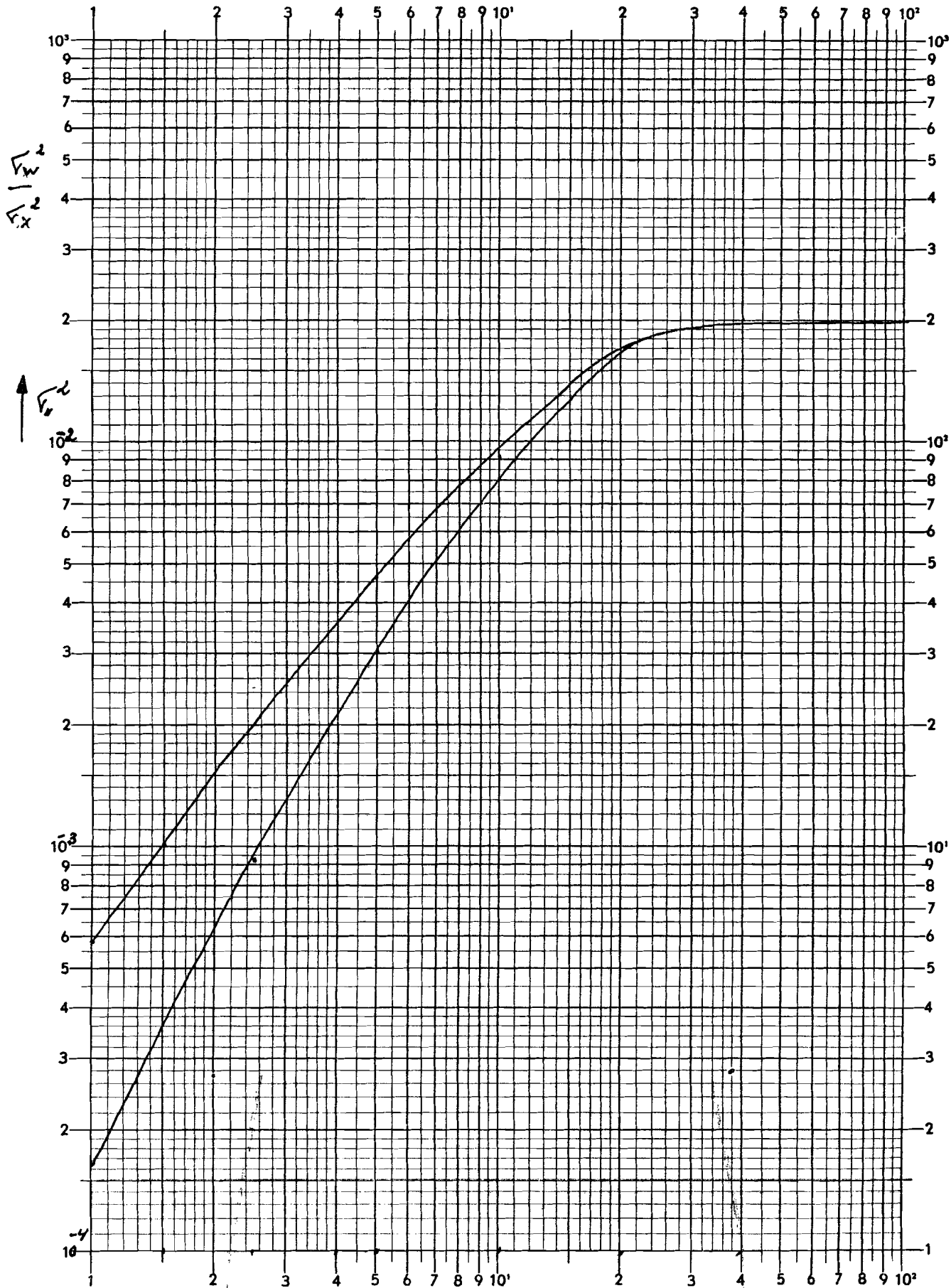
$N=26$ (gelijke K)



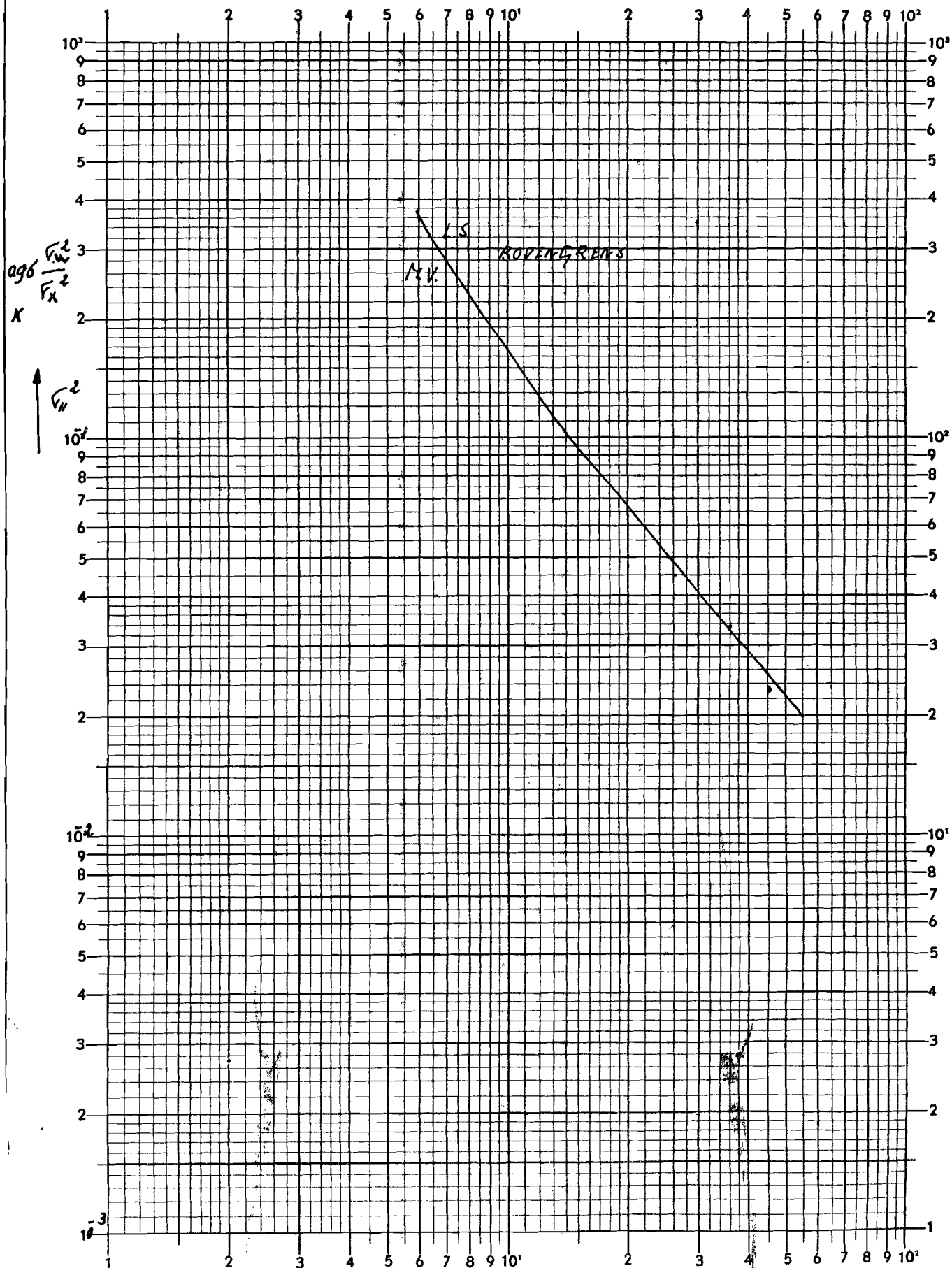
$N=36$ (gelijke x)



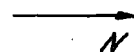
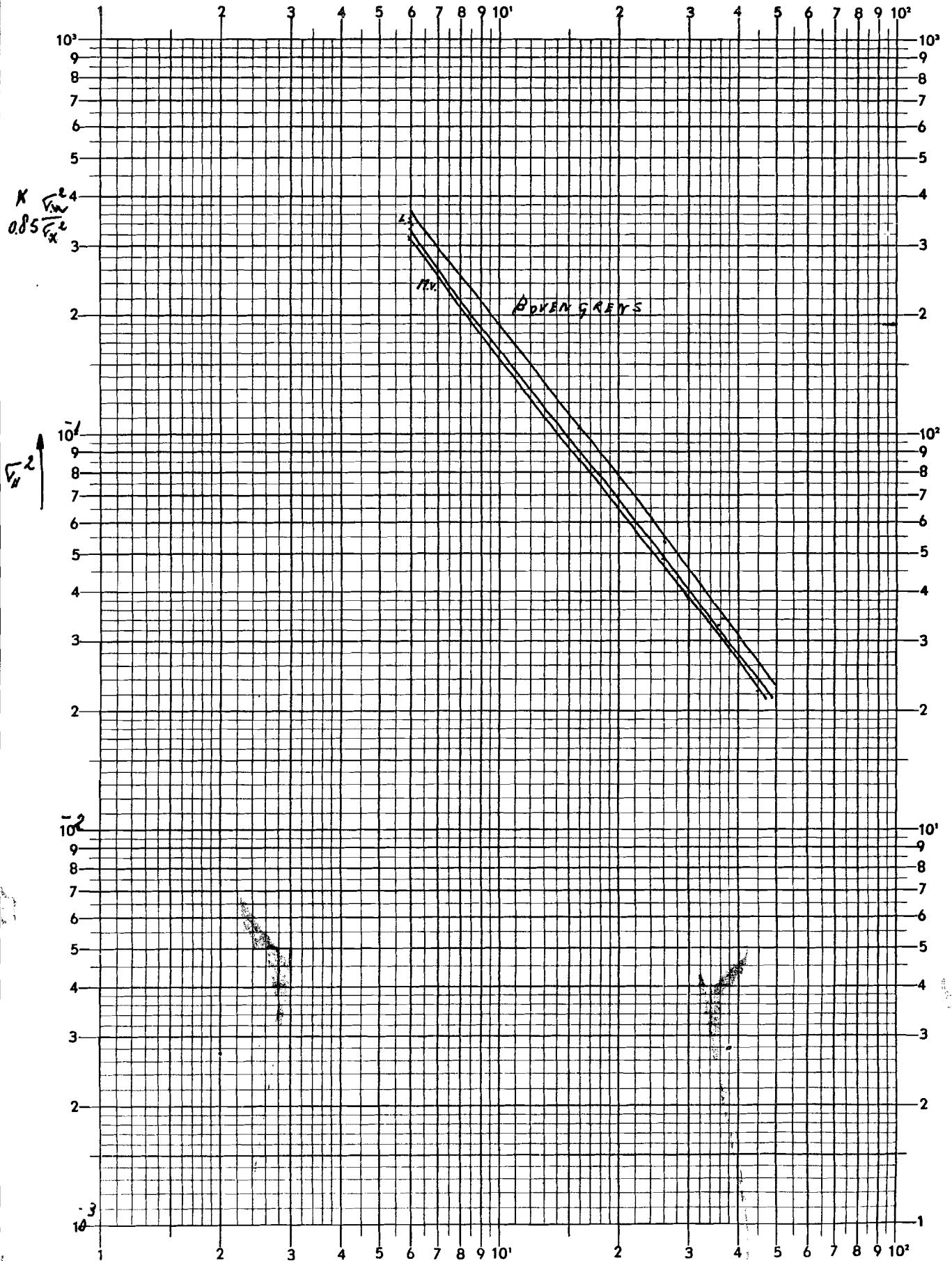
$N=48$ (gelijke x)



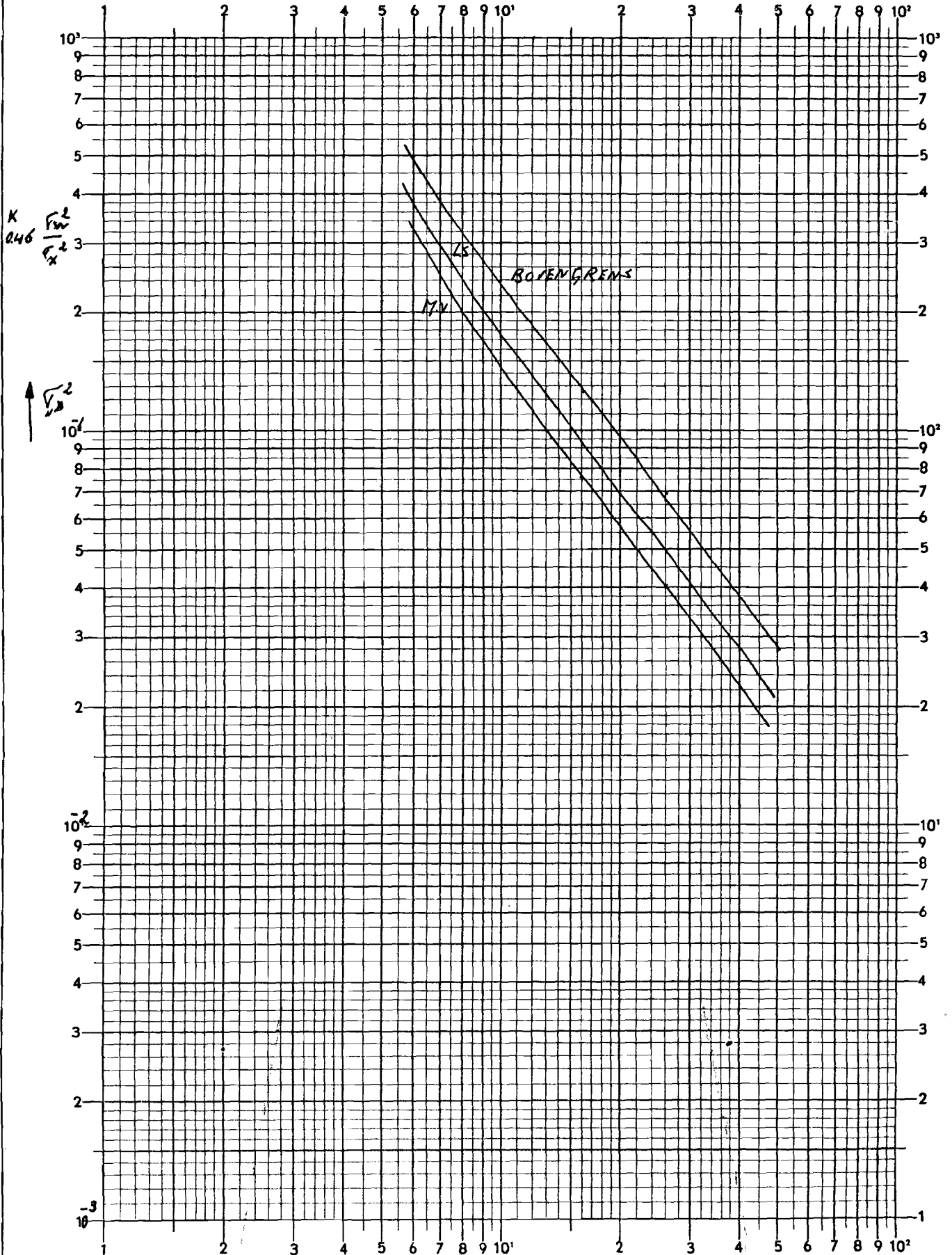
$Z = 4\pi_0$



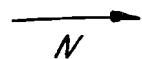
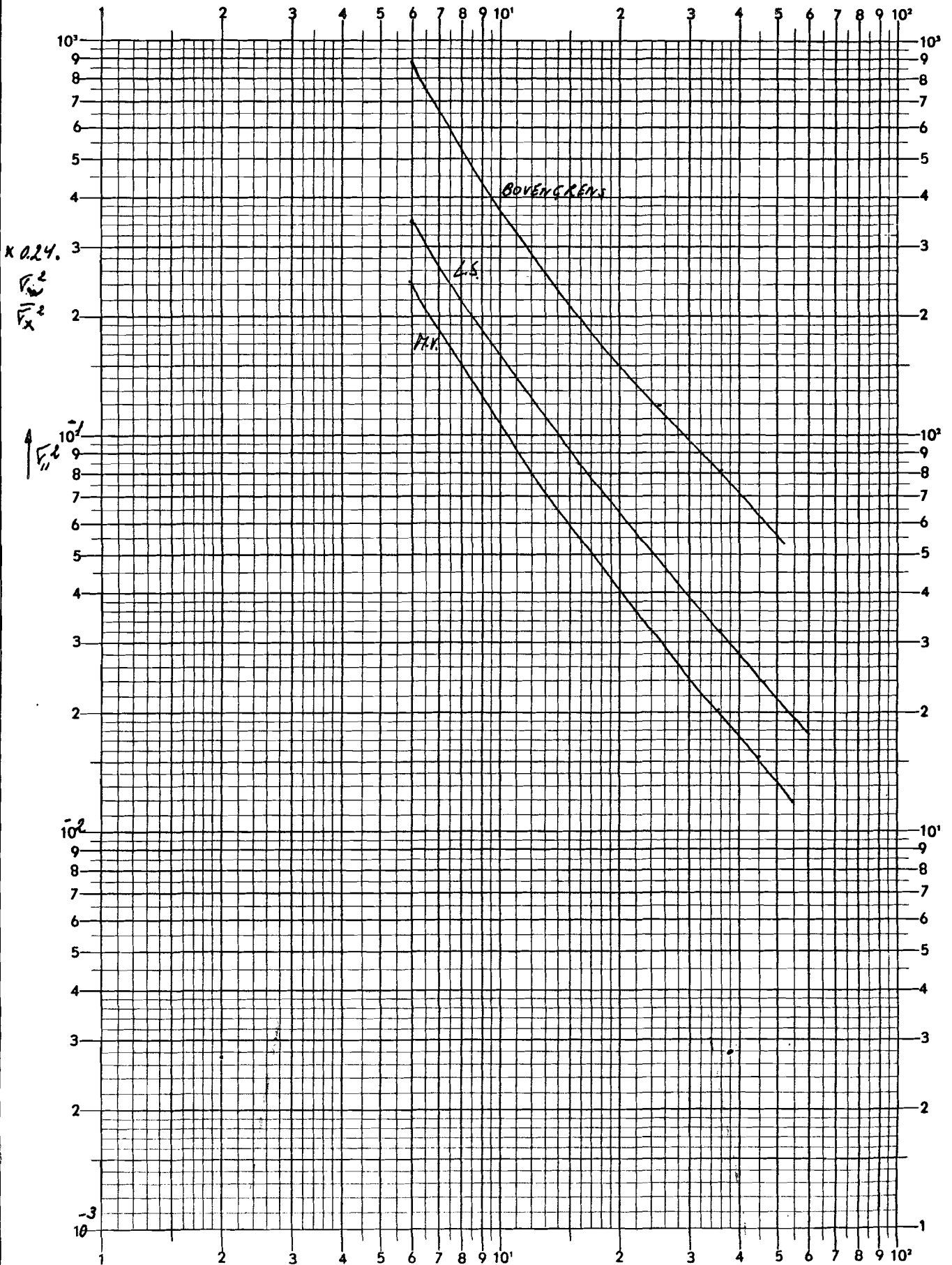
$$z = 2z_0$$

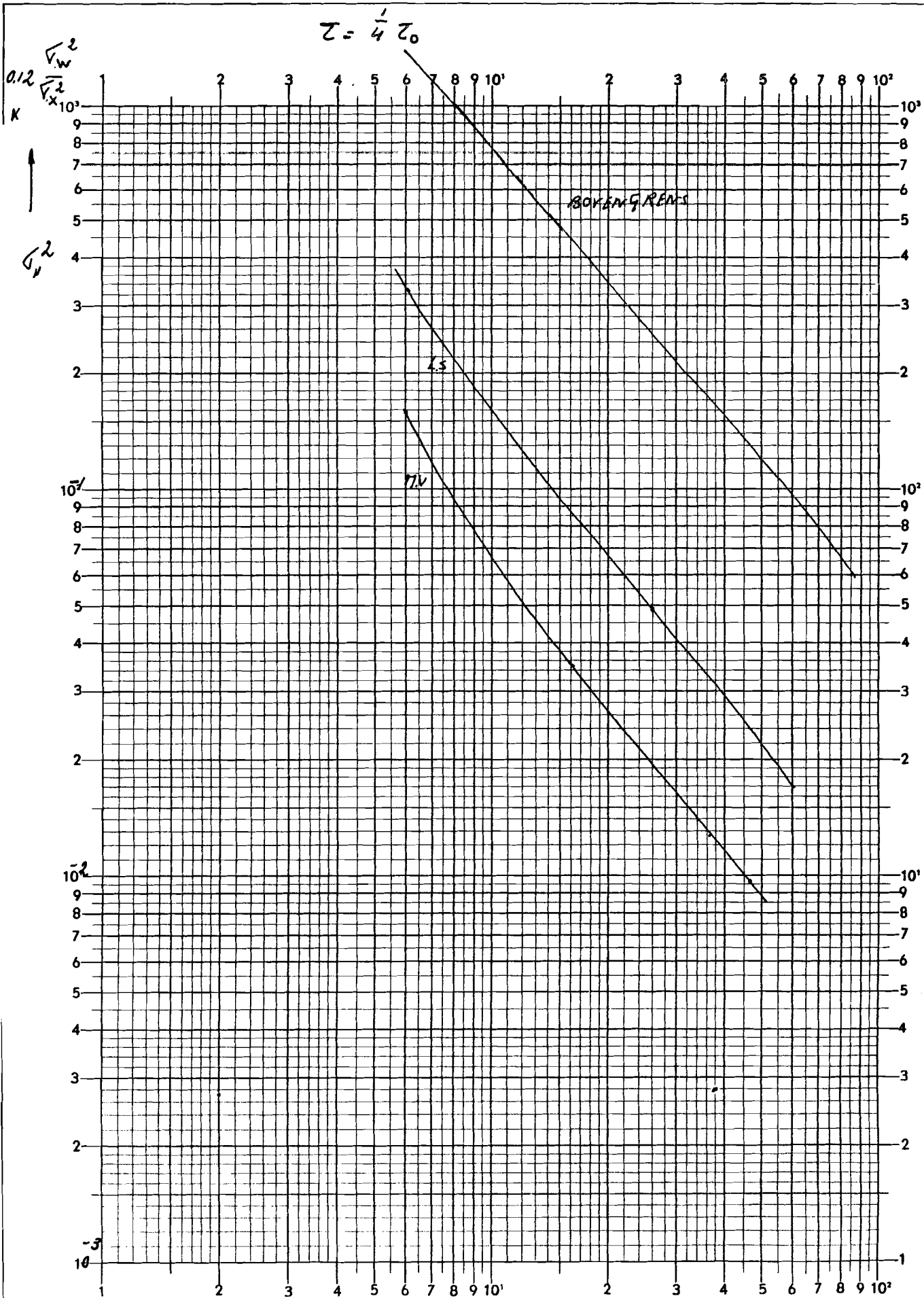


$$Z = Z_0$$

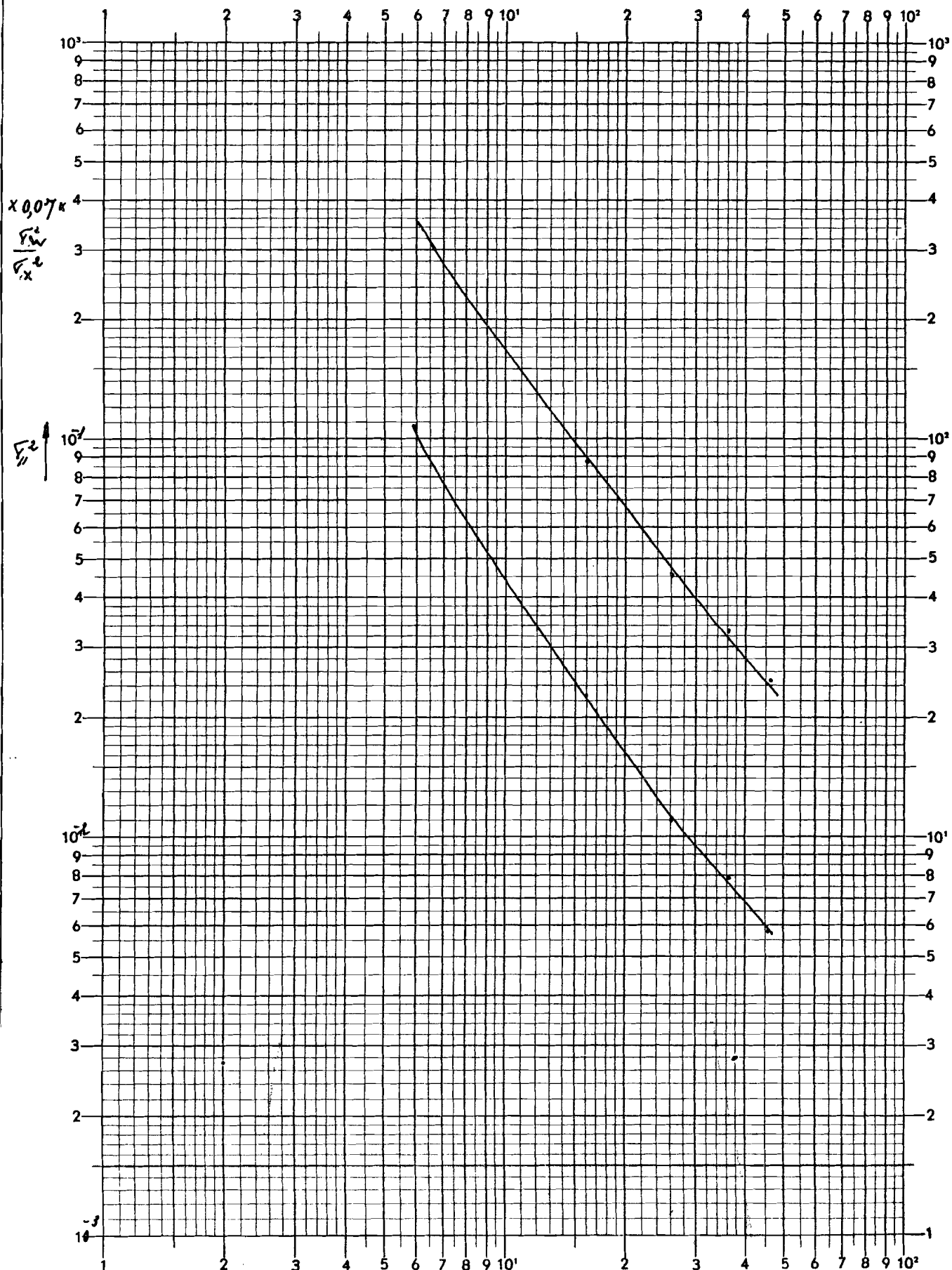


$$\tau = \frac{1}{2} \tau_0$$

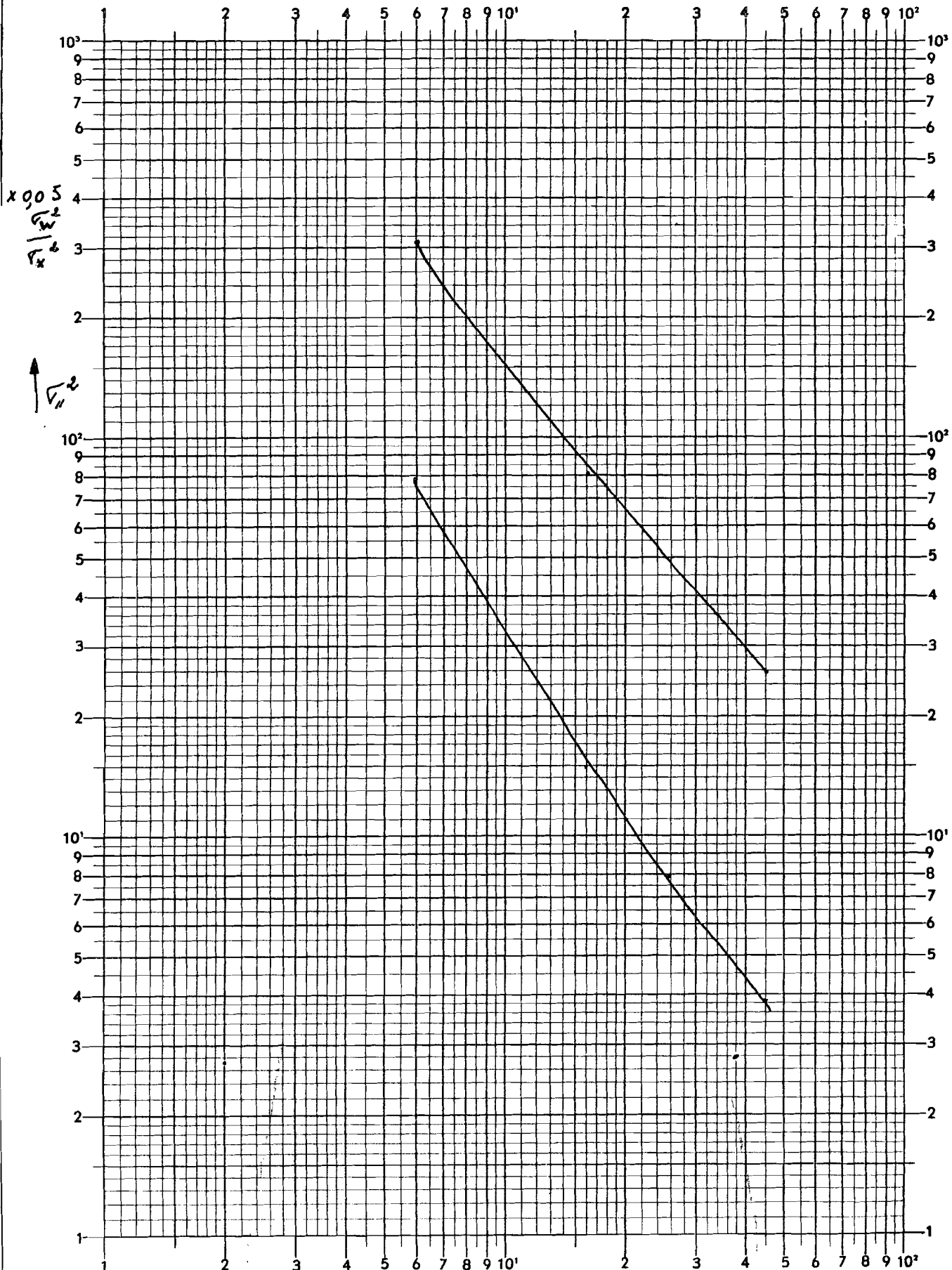




$$z = 0.15 z_0$$



$\tau = 0,1 \tau_0$



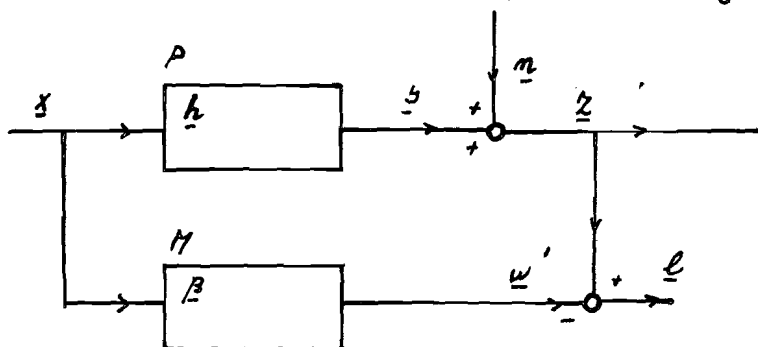
→
N

5. BEPALING VAN DE VARIANTIE VAN DE ADDITIEVE RUIS

Het is mogelijk om naast de lineaire "unbiased" schatting van de parameters van het proces te gelijktijd een "unbiased" schatting te doen van de variantie van de additieve ruis. Hierbij moet de additieve ruis aan de volgende voorwaarden voldoen:

$$E(\underline{n}_1) = 0 \text{ en } \text{COV } \underline{n} = \sigma_m^2 I$$

(de ruis moet wit zijn doch zoals onder 4. gebleken is mag dit reeds verondersteld worden in het daarbesproken geval voor $\tau/\tau_0 > 2$)



Stel het aantal te schatten parameters k :

Het meten gedurende een zekere tijd aan de ingang en uitgang van dit proces geeft kennis van \underline{x} (dim N) en \underline{z} (dim. $N + k - 1$)

De schatting van de parameters is nu:

$$\hat{\underline{\beta}} = (\underline{x}^T \underline{x})^{-1} \underline{x}^T \underline{z}$$

Hiermede kan de modeluitgang berekend worden:

$$\underline{w}^1 = \underline{x} \hat{\underline{\beta}} = \underline{x} \left\{ (\underline{x}^T \underline{x})^{-1} \underline{x}^T (\underline{x} \underline{h} + \underline{n}) \right\} = \underline{x} \underline{h} + \underline{x} (\underline{x}^T \underline{x})^{-1} \underline{x}^T \underline{n}$$

Het foutsignaal \underline{e} is nu:

$$\underline{e} = \underline{z} - \underline{w}^1 = \underline{x} \underline{h} + \underline{n} - \underline{x} \underline{h} - \underline{x} \underline{h} - \underline{x} (\underline{x}^T \underline{x})^{-1} \underline{x}^T \underline{n} = \underline{n} - \underline{x} (\underline{x}^T \underline{x})^{-1} \underline{x}^T \underline{n}$$

$\frac{1}{N-1} \underline{e}^T \underline{e}$ is nu een "unbiased" schatting van σ_n^2

$$\begin{aligned} \frac{1}{N-1} \{ \underline{e}^T \underline{e} \} &= \frac{1}{N-1} \{ (\underline{n} - X(X^T X)^{-1} X^T \underline{n})^T (\underline{n} - X(X^T X)^{-1} X^T \underline{n}) \} \\ &= \frac{1}{N-1} \{ \underline{n}^T \underline{n} - \underline{n}^T X(X^T X)^{-1} X^T \underline{n} \} \end{aligned}$$

Deze schatting is zuiver want:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N-1} E\{ \underline{e}^T \underline{e} \} &= \frac{1}{N-1} \{ E(\underline{n}^T \underline{n}) - E(\underline{n}^T X(X^T X)^{-1} X^T \underline{n}) \} \\ &= \frac{1}{N-1} \{ (N+k-1) \sigma_n^2 - E(X^T X)^{-1} X^T \underline{n} \} \end{aligned}$$

Beschouw: $E(\underline{n}^T X(X^T X)^{-1} X^T \underline{n})$

Noem: $X(X^T X)^{-1} X^T = A, \quad A = A^T$

$$\underline{n}^T A \underline{n} = (n_1, \dots, n_{N+k-1}) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1, N+k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N+k-1, 1} & \dots & a_{N+k-1, N+k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{N+k-1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{n}^T A \underline{n} = \sum_1^{n+k-1} \sum_1^{n+k-1} a_{ij} \cdot n_i \cdot n_j$$

$$E(\underline{n}^T A \underline{n}) = \sum_1^{N+k-1} \sum_1^{N+k-1} a_{ij} E(n_i \cdot n_j)$$

$$E(n_i n_j) = 0 \quad \text{voor } i \neq j \quad E(n_i n_j) = \frac{2}{N} \quad \text{voor } i = j$$

$$E(\underline{n}^T A \underline{n}) = \frac{2}{N} \sum_1^{N+k-1} a_{ii} = \frac{2}{N} \times \text{som van de diagonaalelementen van } \{A\}$$

Som van de diagonaalelementen van $\{A\} = \text{som van de diagonaalelementen van}$
 $X(X^T X)^{-1} X^T$

Noem $B = X(X^T X)^{-1}$ en $C = X^T$

Nu geldt: Som van de diagonaalelementen van $\{B \cdot C\}$ = som van de diagonaal
 elementen van $\{C \cdot B\}$

$$C \cdot B = X^T X (X^T X)^{-1} = I \quad \text{dimensie: } (k \times k)$$

Som van de diagonaalelementen van $\{C \cdot B\} = k$

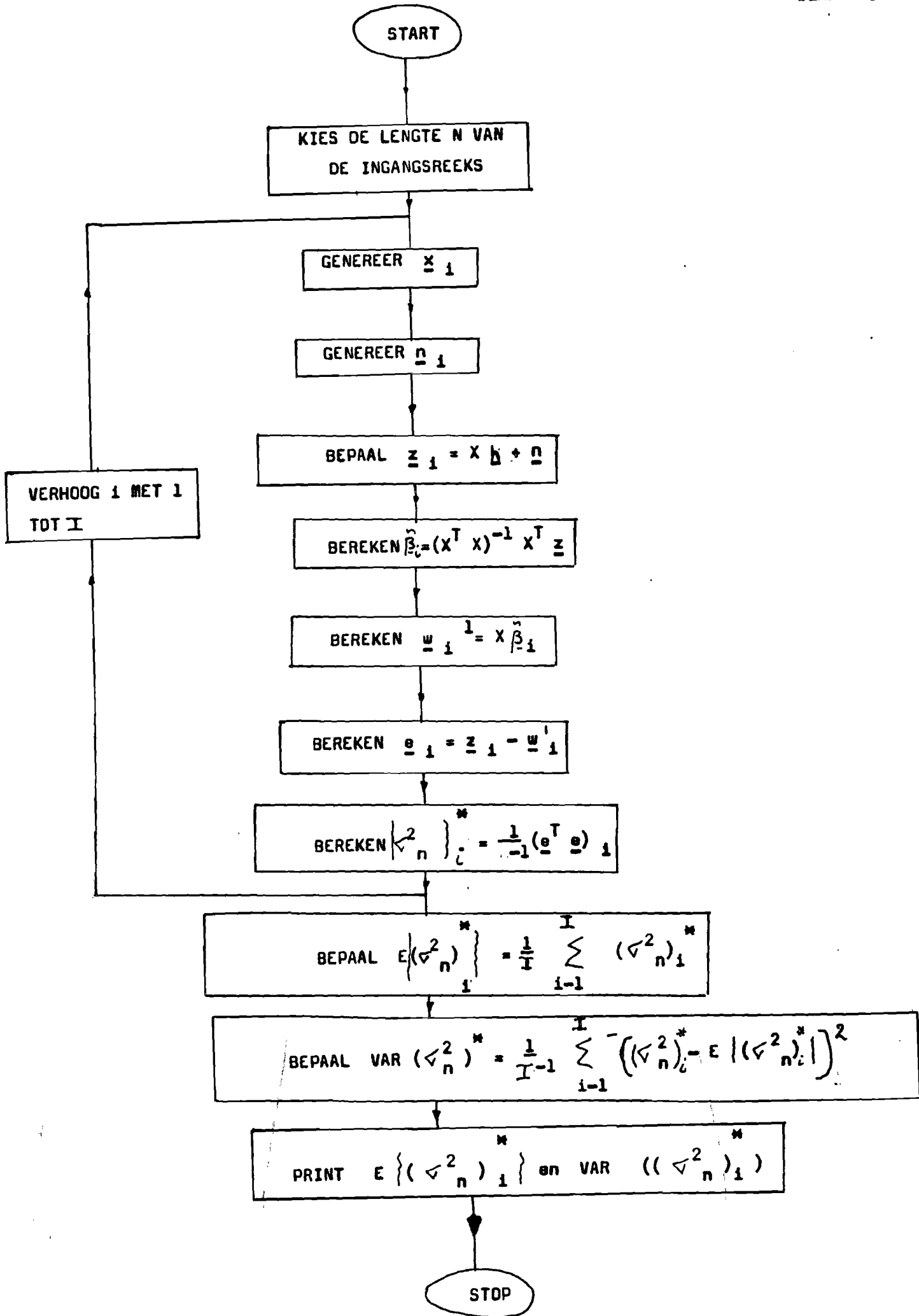
$$\text{Dus: } \frac{N-1}{N-1} E\left\{ \frac{1}{N-1} \left(\underline{e}^T \underline{e} \right) \right\} = \frac{1}{N-1} \left\{ N+k-1-k \right\} \frac{2}{N} = \frac{2}{N}$$

Zie: PLACKETT Regression Analysis

Door middel van een simulatie op de digitale rekenmachine is $\frac{1}{N-1} (\underline{e}^T \underline{e})$

en $\text{var} \left\{ \frac{1}{N-1} \left(\underline{e}^T \underline{e} \right) \right\}$ berekend van het onder hoofdstuk 4. genoemde
 systeem.

Het flowdiagram van dit computerprogramma is:



Deze simulatie is herhaald voor verschillende waarden van N . Zie voor het computerprogramma Appendix A.5.

De grafiek op blad 62, laat zien dat de schatting inderdaad zuiver is. Immers:

$$\hat{\sigma}_n^2 \text{ is } 0,36 \text{ gekozen en } E \left\{ \left(\hat{\sigma}_n^2 \right)_1^k \right\} \approx 0,36$$

Tevens is in deze grafiek de spreiding geschat. De spreiding neemt af bij het groter worden van N .

Indien de additieve ruis niet helemaal "wit" is kan als eerste vorm van benadering de covariantie matrix van de additieve ruis als volgt gedacht worden:

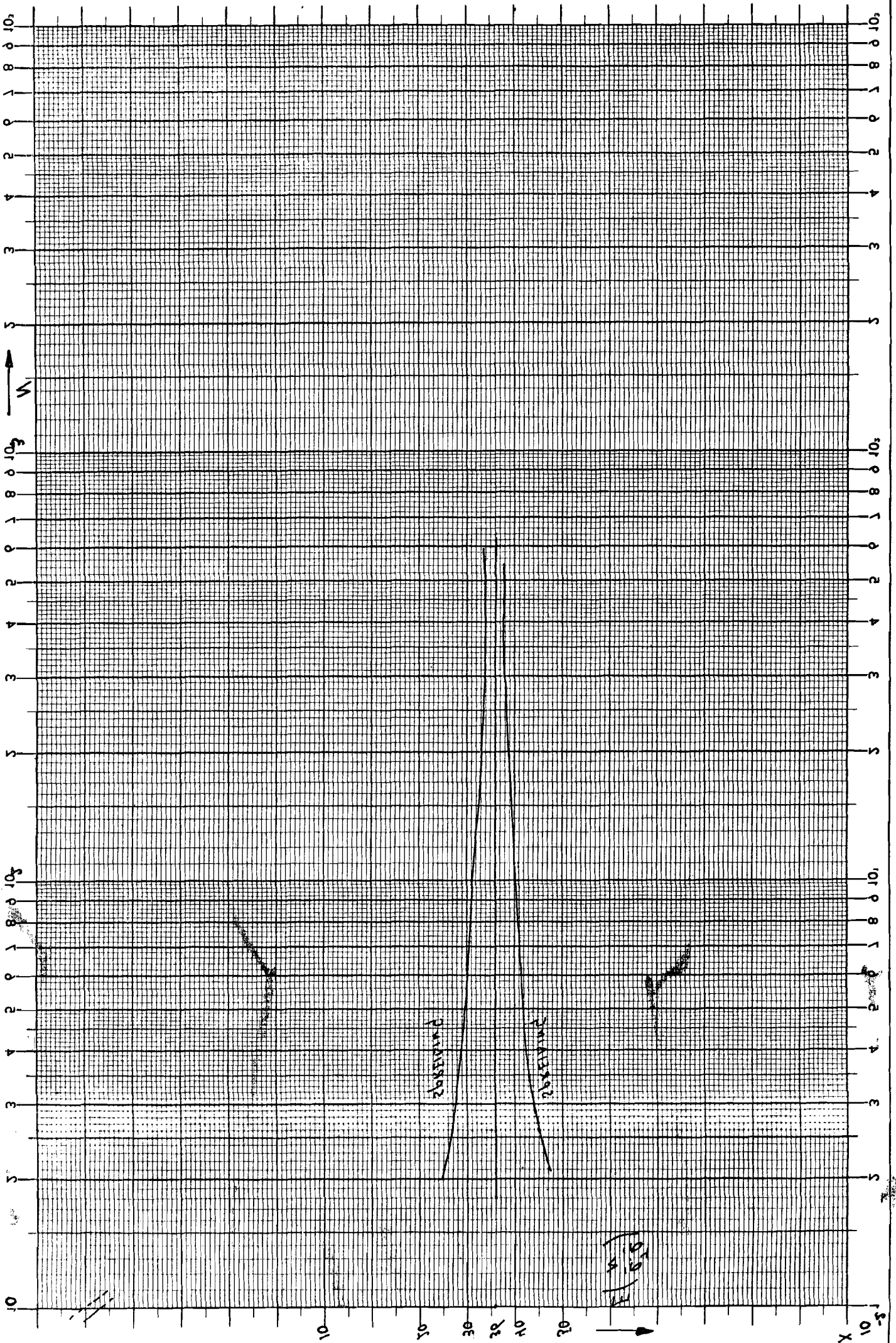
$$\text{COV } \underline{n} = \hat{\sigma}_n^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & d & 0 & \dots & 0 \\ d & 1 & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 & d \\ 0 & & & & d & 1 \end{pmatrix} \quad \text{met } -1 \leq d \leq +1$$

De schatting van de variantie is nu niet zuiver want:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N-1} E(\underline{e}^T \underline{e}) &= \frac{1}{N-1} \left\{ E(\underline{n}^T \underline{n}) - E(\underline{n}^T X (X^T X)^{-1} X^T \underline{n}) \right\} \\ &= \frac{1}{N-1} \left\{ (N+k-1) \hat{\sigma}_n^2 - E(\underline{n}^T X (X^T X)^{-1} X^T \underline{n}) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Noem } A = X(X^T X)^{-1} X^T$$

$$A = A^T$$



113392

$$\underline{n}^T X (X^T X)^{-1} X^T \underline{n} = \underline{n}^T A \underline{n} = \sum_1^{N+k-1} a_{ii} n_i^2 + 2 \sum_1^{N+k-1} \sum_j^{N+k-1} a_{ij} n_i n_j$$

$$E(\underline{n}^T A \underline{n}) = \sqrt{2}^2 \sum_1^{N+k-1} a_{ii} + 2 d \sqrt{2}^2 \sum_1^{N+k-1} a_{i, i+1}$$

$$\sum_1^{N+k-1} a_{ii} = k \text{ is reeds aangetoond.}$$

$$E \left\{ \frac{\underline{e}^T \underline{e}}{N-1} \right\} = \sqrt{2}^2 \frac{2d\sqrt{2}^2}{N-1} \sum_1^{N+k-1} a_{i, i+1}$$

Deze schatting heeft dus een "bias".

Voor grote N kan een indruk gegeven worden van deze "bias":

$$A = X(X^T X)^{-1} X^T \approx \frac{X X^T}{N \sqrt{X_i}^2} \quad \text{voor grote N en witte ingangsruis}$$

$$\sum_1^{N+k-1} a_{i, i+1} = \frac{k \sum_1^N x_i x_{i+1}}{N \sqrt{X_i}^2} = \Delta \quad \text{voor N groot}$$

$$E \left\{ \frac{\underline{e}^T \underline{e}}{N-1} \right\} = \sqrt{2}^2 - 2 d \sqrt{2}^2 \frac{\Delta}{N-1} \approx \sqrt{2}^2$$

D.w.z. voor grote N mag de schatting als zuiver beschouwd worden. Ook indien het ingangssignaal geen witte ruis is, wordt de schatting voor grote N zuiver, doch dit is niet zo eenvoudig als boven aan te tonen.

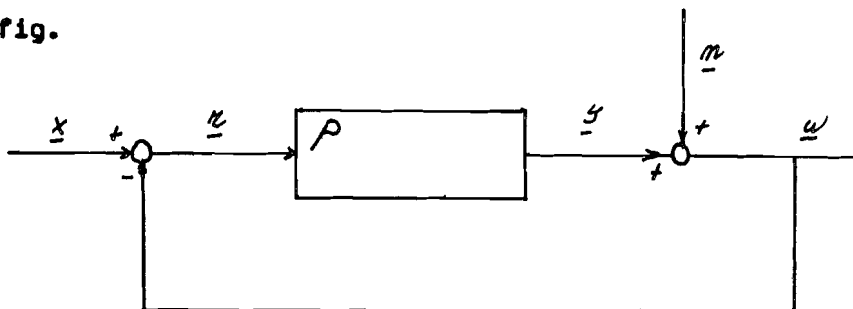
6. L.S. schattingen bij teruggekoppelde systemen.

In het tot nu toe beschouwde geval is steeds verondersteld, dat de additieve ruis onafhankelijk is van het ingangssignaal van het proces.

Daardoor kunnen de "weighted least square" schattingen bastempeld worden als "unbiased" schattingen.

Anders wordt het in het geval van een teruggekoppeld systeem

Zie fig.



Opm. Het systeem wordt volledig discreet beschouwd.

Er wordt verondersteld dat de ruis w is en additief werkt op de uitgang van het proces. Samen met de procesuitgang y wordt deze ruis volledig teruggekoppeld naar de ingang van het proces.

De L.S. en M.V. schatting van dit systeem verkregen door zowel x als w te meten schat niet punten van de impulsresponsie van het open loop systeem, maar punten van de impulsresponsie van het teruggekoppelde systeem.

Het systeem geschetst in de bovenstaande figuur is als volgt te herleiden:

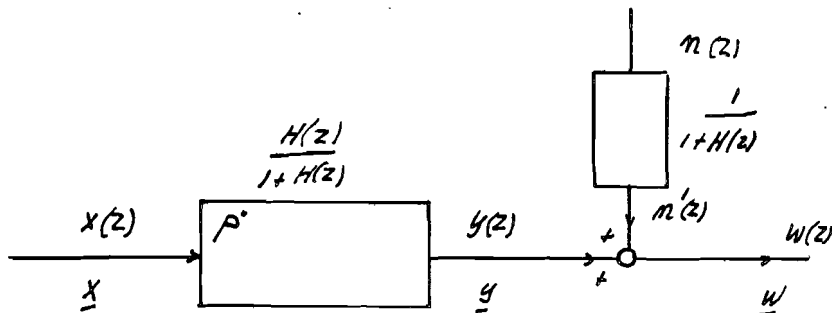
$$\underline{r} = \underline{x} - \underline{w} \quad \underline{r} \text{ is } (N+k-1) \text{ vector ; } N \text{ is het aantal "samples" aan de ingang ; } k \text{ het aantal te schatten parameters}$$

De z - getransformeerde van \underline{r} is : $r(z) = x(z) - w(z)$

$$y(z) = H(z)(x(z) - w(z))$$

$$w(z) - n(z) = H(z)(x(z) - w(z))$$

Hieruit volgt: $w(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)} x(z) + \frac{1}{1+H(z)} n(z)$



Noem $G(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)}$ en $F(z) = \frac{1}{1+H(z)}$

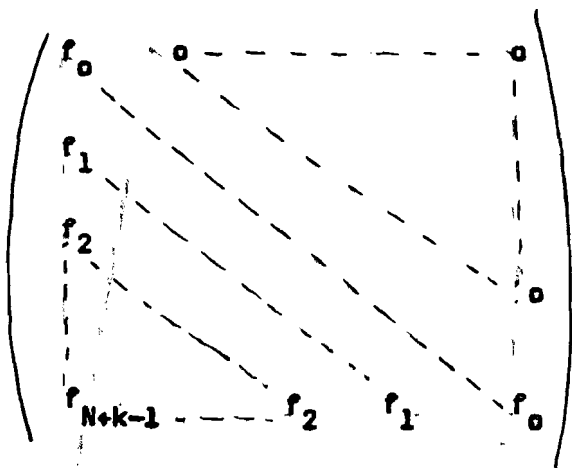
$$w(z) = G(z) x(z) + F(z) n(z) = G(z) x(z) + n^1(z)$$

g = impulsresponsievector

De witte additieve ruis wordt gefilterd.

$$n^1(z) = F(z) n(z) \text{ of } \underline{n}^1 = \underline{F}^1 \underline{n}$$

waarbij F^1 een "lower triangular" matrix is:



$$f_0, f_1, \dots, f_n$$

zijn punten van de impulsresponsie van dit filter

De "least square" schatting van dit teruggekoppelde systeem is:

$$\hat{\underline{z}} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{y}$$

Deze schatting is zuiver want:

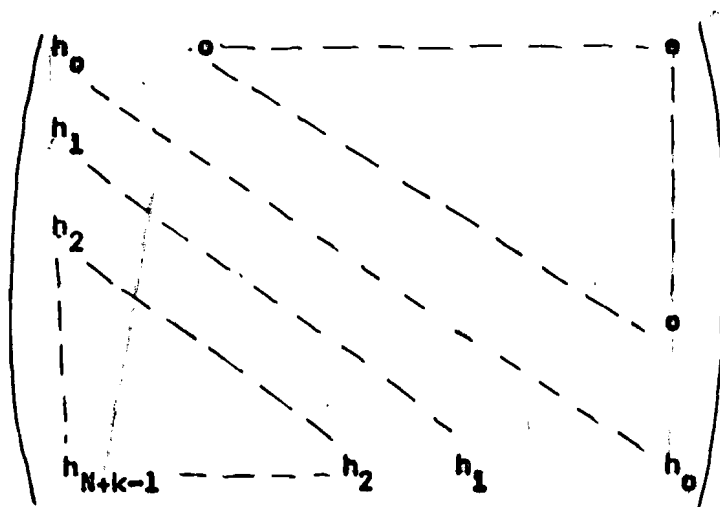
$$E_{\underline{n}}(\hat{\underline{z}}) = E \left\{ (X^T X)^{-1} X^T \underline{y} \right\} = \underline{g} + (X^T X)^{-1} X^T E \left\{ \underline{n} \right\} = \underline{g}$$

$$E(\underline{n}^1) = E(F^1 \underline{n}) = F^1 E(\underline{n}) = \underline{0}$$

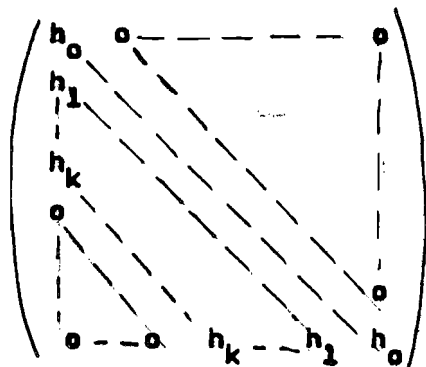
en met $\underline{g}^T = (g_0, g_1, \dots, g_k)$ punten van de impulsresponsie van het teruggekoppelde systeem

Ondanks het feit dat de additieve ruis \underline{n} wit is valt de L.S. schatting niet samen met de M.V. schatting van dit teruggekoppelde systeem. Immers de additieve ruis \underline{n} wordt nog gefilterd (vanwege de terugkoppeling) door F^1 . De M.V. schatting is niet uit te voeren, aangezien deze schatting kennis vereist van F^1 . Doch om F^1 te kennen is informatie van de impulsresponsie van het "open loop" systeem noodzakelijk.

$F^1 = (I + H)^{-1}$ waarbij H een "lower triangular" matrix is bevattende punten van de impulsresponsie van het "open loop" systeem;



Meestal worden $h_{k+1}, h_{k+2}, \dots, h_{N+k-1}$ voldoende klein beschouwd dus:



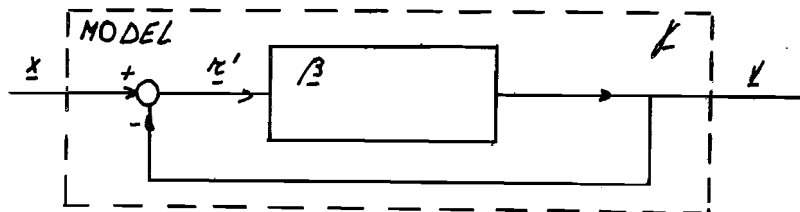
Dat $F^{-1} = (I + H)^{-1}$ kan als volgt worden aangetoond:

$$\left. \begin{aligned} \underline{w} &= R \underline{h} + \underline{n} = H \underline{x} + \underline{n} \\ \underline{x} &= \underline{x} - \underline{w} \end{aligned} \right\} \underline{w} = H(\underline{x} - \underline{w}) + \underline{n}$$

$$\longrightarrow \underline{w} = (I + H)^{-1} H \underline{x} + (I + H)^{-1} \underline{n} = \underline{y} + F^{-1} \underline{n}$$

$$\longrightarrow F^{-1} = (I + H)^{-1}$$

Nu \underline{g} door geschat is kan hieruit afgeleid worden: is een schatting van \underline{h}



$$\underline{y} = X \underline{f} = \underline{\Gamma} \underline{x} \quad \text{tevens geldt:} \quad \underline{y} = R^{-1} \underline{\beta} = B \underline{x}^{-1}$$

$$\underline{x}^{-1} = \underline{x} - \underline{y} \longrightarrow \underline{y} = (I + B)^{-1} B \underline{x} \quad \text{Dus:} \quad \underline{\Gamma} = (I + B)^{-1} B$$

Hieruit kan afgeleid worden: $(B =) \underline{\Gamma} (I - \underline{\Gamma})^{-1}$

$\underline{\Gamma}$ en B zijn "lower triangular" matrices

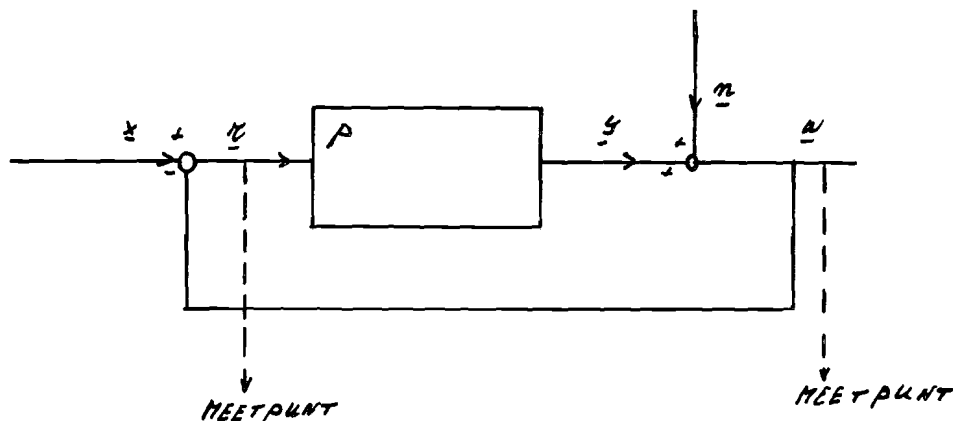
Indien dus \underline{f} bekend is is $\underline{\Gamma}$ bekend en derhalve B $\longrightarrow \underline{\beta}$

Het criterium: $\min \underline{e}^T \underline{e}$ is geminimaliseerd voor $\underline{f} = \underline{f}$. Dit komt niet overeen met het minimum van het criterium voor $\underline{\beta} = \underline{\beta}$. De schatting van \underline{h} is niet zuiver omdat in dit geval de ruis niet onafhankelijk van de ingang van het proces is. Wel kan opgemerkt worden dat de schatting van \underline{h} asymptotisch zuiver zal zijn vanwege het feit dat de schatting van \underline{f} in dit geval gelijk is aan \underline{g} .

De bovengenoemde methode kan als bewerkelijk beschouwd worden. Een methode om direct de impulsresponsie van het "open loop" systeem te bepalen is de volgende:

Indien \underline{x} en \underline{w} gedurende een zekere tijd gemeten worden dan is ook \underline{z} bekend n.l.

$$\underline{z} = \underline{x} - \underline{w}$$



Door nu \underline{z} en \underline{w} te "correleren" is de impulsresponsie van het "open loop" systeem direct te schatten.

De L.S. schatting is: $\hat{\beta} = (R^T R)^{-1} R^T \underline{w}$

R is een matrix opgebouwd uit \underline{z}

De schatting is niet zuiver:

$$E_n(\hat{\beta}) = E_n \left\{ (R^T R)^{-1} R^T \underline{w} \right\} = \underline{h} + E \left\{ (R^T R)^{-1} R^T \underline{n} \right\}$$

Met behulp van de CAYLEY - HAMILTON theorie is $(R^T R)^{-1} R^T \underline{n}$ te schrijven als:

$$(R^T R)^{-1} R^T \underline{n} = - \frac{1}{a_k} \left[(R^T R)^{k-1} + a_1 (R^T R)^{k-2} + \dots + a_{k-2} (R^T R) + a_{k-1} I \right] R^T \underline{n}$$

k is het aantal te schatten parameters;

a_k, a_{k-1}, \dots, a_1 zijn de coëfficiënten van de karakteristieke polynoom van $(R^T R)$

Aangezien o.a. $E_n \left(R^T \underline{n} \right) \neq 0$ mag aangenomen worden dat

$$E \left((R^T R)^{-1} R^T \underline{n} \right) \neq 0$$

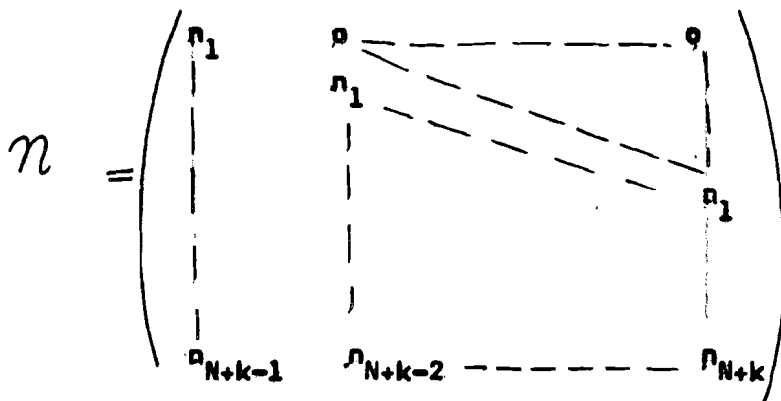
Dat $E_{\underline{n}} (R^T \underline{n}) \neq 0$ kan als volgt duidelijk gemaakt worden:

$$\underline{w} = \underline{y} + \underline{n} = R \underline{h} + \underline{n} = H \underline{z} + \underline{n}$$

$$\underline{z} = (I + H)^{-1} (\underline{y} - \underline{n})$$

$$R = (I + H)^{-1} (X - \mathcal{N})$$

waarbij =



$$E_{\underline{n}} (R^T \underline{n}) = + E_{\underline{n}} (\mathcal{N}^T (I + H^T)^{-1} \underline{n}) \neq 0$$

De schatting is niet asymptotisch zuiver want $(R^T R)^{-1} R^T \underline{n}$ gaat niet naar $\underline{0}$ voor N naar oneindig.

Een schatting die wel asymptotisch zuiver is en minder bewerkelijk dan de allereerste methode is:

$$\underline{\beta} = (X^T R)^{-1} X^T \underline{w}$$

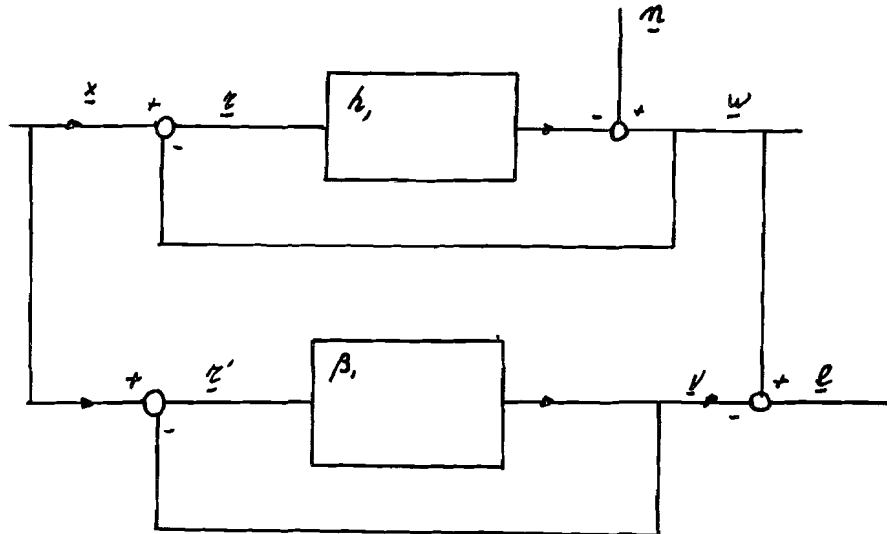
De schatting is niet zuiver omdat:

$$E_{\underline{n}} \left\{ (X^T R)^{-1} X^T \underline{n} \right\} \neq 0$$

Wel is deze schatting asymptotisch zuiver omdat voor $N \rightarrow \infty$ $X^T \underline{n} \rightarrow 0$ gaat en $\det_0 (X^T R) \neq 0$ zodat $(X^T R)^{-1} X^T \underline{n} \rightarrow 0$

$$\det_{N \rightarrow \infty} (X^T R) = \det_{N \rightarrow \infty} \left[X^T (I + H)^{-1} X - X^T (I + H)^{-1} \mathcal{N} \right] \neq 0$$

In het geval dat slechts één parameter geschat wordt kan aangetoond worden dat met deze methode het criterium $\min. \{ \underline{e}^T \underline{e} \}$ geminimaliseerd wordt voor



$$\underline{e} = \underline{w} - \underline{v} \quad , \quad \underline{v} = \beta \underline{r}^1 = \beta (\underline{x} - \underline{v}) \rightarrow \underline{v} = \frac{\beta}{1 + \beta} \underline{x}$$

$$\underline{e}^T \underline{e} = (\underline{w} - \underline{v})^T (\underline{w} - \underline{v})$$

$$\left(\underline{w} - \frac{\beta}{1 + \beta} \underline{x} \right)^T \left(\underline{w} - \frac{\beta}{1 + \beta} \underline{x} \right) =$$

$$\underline{w}^T \underline{w} - \frac{2\beta}{1 + \beta} \underline{x}^T \underline{w} + \frac{\beta^2}{(1 + \beta)^2} \underline{x}^T \underline{x}$$

Differentieer naar β :

$$\frac{-2}{(1 + \beta)^2} \underline{x}^T \underline{w} + \frac{2\beta}{(1 + \beta)^3} \underline{x}^T \underline{x} = 0$$

$$\frac{2}{(1 + \beta)^3} \left(- (1 + \beta) \underline{x}^T \underline{w} + \beta \underline{x}^T \underline{x} \right) = 0$$

$$(- \underline{x}^T \underline{w} + \beta \underline{x}^T \underline{x}) = 0 \quad \rightarrow \quad \beta \underline{x}^T \underline{x} = \underline{x}^T \underline{w}$$

$$\beta = (\underline{x}^T \underline{x})^{-1} \underline{x}^T \underline{w}$$

CONCLUSIES: Het blijkt bij geen van de drie genoemde methodes mogelijk een "zuivere" schatting van de parameters uit te voeren. Het bepalen van de "drempel" (werkelijke waarde van de parameters - E_n (geschatte waarde)) is niet mogelijk, omdat de mathematische uitdrukking hiervan vrij complex is. Twee van de drie methodes zijn asymptotisch zuiver. Hoe "sneller" de asymptotische waarde bereikt wordt des te belangrijker de twee methodes worden. Door de terugkoppeling wordt een beschrijvingswijze in het tijddomein bemoeilijkt, zo niet onuitvoerbaar. (beschouw daartoe een systeem met een vertraging in de teruggekoppelde keten). Met de bovengenoemde methodes zijn m.i. de mogelijkheden, om een least square schatting van de parameters te doen, uitgeput.

APPENDIX

A. 3.1 .

Stel dat $\text{COV}_{\tilde{L.S.}}^{\tilde{h}} = \text{COV}_{\tilde{M.V.}}^{\tilde{h}}$. Toon daar aan dat de deelruimte opgespannen door k vectoren van R samenvalt met de ruimte opgespannen door k eigenvectoren van M .

$\text{COV}_{\tilde{L.S.}}^{\tilde{h}}$ is een symmetrische matrix. Er is nu een orthogonale matrix C te vinden zodanig dat :

$$C^T \text{COV}_{\tilde{L.S.}}^{\tilde{h}} C \text{ diagonaal is.}$$

Stel $g^x = C g$ De hierbij behorende covariantie is:

$$\text{COV}_{\tilde{L.S.}}^{\tilde{x}} = R^{xT} M R^x$$

$$\text{COV}_{\tilde{M.V.}}^{\tilde{x}} = (R^{xT} M^{-1} R^x)^{-1} \text{ met } R^x = R C$$

$$C^T \text{COV}_{\tilde{L.S.}}^{\tilde{h}} C = C^T \text{COV}_{\tilde{M.V.}}^{\tilde{h}} C \longrightarrow$$

$$\text{COV}_{\tilde{L.S.}}^{\tilde{x}} = \text{COV}_{\tilde{M.V.}}^{\tilde{x}} \text{ en diagonaal}$$

$$(R^x)^T M R^x = ((R^x)^T M^{-1} R^x)^{-1}$$

Beschouw nu een component van de covariantie. Er moet gelden:

$$((R_1^x)^T M R_1^x) = ((R_1^x)^T M^{-1} R_1^x)^{-1} \text{ voor } i = 1, \dots, k$$

met $(R_1^x)^T R_1^x = 1$. vanwege de diagonaalvorm van de matrices.

Indien R_1^x een eigenvector van M is dan is voldaan aan de vergelijking

$$((R_1^x)^T M R_1^x) = (R_1^x)^T M^{-1} R_1^x)^{-1}$$

De matrix bestaande uit k eigenvectoren R_1^x ; $i = 1, \dots, k$; is $R^x \longrightarrow$

Er geldt $R^{\mathbf{x}} = R C \longrightarrow$

De deelruimte opgespannen door k vectoren van R valt samen met de deelruimte opgespannen door k eigenvectoren van M .

Indien $R_1^{\mathbf{x}}$ geen eigenvector van M is dan is het mogelijk de volgende vergelijking op te stellen.

$$M R_1^{\mathbf{x}} = \lambda_1 R_1^{\mathbf{x}} + \mu T_1, \quad T_1 \text{ is een vector loodrecht op de vector } R_1^{\mathbf{x}}$$

$$(R_1^{\mathbf{x}})^T M R_1^{\mathbf{x}} = \lambda_1 + \mu (R_1^{\mathbf{x}})^T T_1 = (\text{COV } \mathcal{L}^{\mathbf{x}} \text{ L.S.})_1 = \lambda_1$$

$$M^{-1} M R_1^{\mathbf{x}} = R_1^{\mathbf{x}} = \lambda_1 M^{-1} R_1^{\mathbf{x}} + \mu M^{-1} T_1$$

$$\longrightarrow M^{-1} R_1^{\mathbf{x}} = \frac{1}{\lambda_1} R_1^{\mathbf{x}} - \frac{\mu}{\lambda_1} M^{-1} T_1$$

$$(R_1^{\mathbf{x}})^T M^{-1} R_1^{\mathbf{x}} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\lambda_1} (R_1^{\mathbf{x}})^T M^{-1} T_1$$

$$((R_1^{\mathbf{x}})^T M^{-1} R_1^{\mathbf{x}})^{-1} = \lambda_1 (1 - \mu (R_1^{\mathbf{x}})^T M^{-1} T_1)^{-1} = (\text{COV } \mathcal{L}^{\mathbf{x}} \text{ M.V.})_1$$

Nu moet gelden dat $(\text{COV } \mathcal{L}^{\mathbf{x}} \text{ M.V.})_1 = (\text{COV } \mathcal{L}^{\mathbf{x}} \text{ L.S.})_1 = \lambda_1$ voor alle $i=1, \dots, k$

$$\text{Dus: } \lambda_1 (1 - (R_1^{\mathbf{x}})^T M^{-1} T_1)^{-1} = \lambda_1$$

Dit is mogelijk indien 1 $\mu = 0 \rightarrow R_1^{\mathbf{x}}$ is een eigenvector van M

2 T_1 loodrecht op $(R_1^{\mathbf{x}})^T M^{-1}$ doch deze mogelijkheid geeft hetzelfde resultaat als onder 1

$$\text{n.l.: } M^{-1} R_1^{\mathbf{x}} = \frac{1}{\lambda_1} R_1^{\mathbf{x}} - \frac{\mu}{\lambda_1} M^{-1} T_1$$

Vermenigvuldig met T_1^T :

$$T_1^T M^{-1} R_1^{\mathbf{x}} = - \frac{\mu}{\lambda_1} T_1^T M^{-1} T_1$$

$$T_1^T M^{-1} R_1^{\mathbf{x}} = 0, \quad T_1^T M^{-1} T_1 \neq 0, \quad \lambda_1 \neq 0 \rightarrow \mu = 0$$

Conclusie: $R_1^{\mathbf{x}}$ is een eigenvector van M . Zoals reeds aangetoond vallen de beide ruimten nu samen.

A P P E N D I X

A. 3.2.

Bewijs dat: $(\underline{\tilde{z}}^T \text{COV} \tilde{J} \text{ M.V. } \underline{\tilde{z}})^{-1} \ll \underline{\tilde{z}}^T \text{COV} \tilde{J} \text{ M.V. } \underline{\tilde{z}}$

Beschouw: $\underline{v} = \underline{\tilde{z}} \alpha + \underline{\mu}$

α = scalair, $\underline{\mu}$ is "unbiased" ruis met $E\{\underline{\mu}\underline{\mu}^T\} = \text{COV} \tilde{J} \text{ M.V.}$

De L.S. schatting van α heeft de volgende covariantie:

$$\underline{\tilde{z}}^T \text{COV} \tilde{J} \text{ M.V. } \underline{\tilde{z}}$$

De covariantie van de M.V. schatting bedraagt:

$$(\underline{\tilde{z}}^T \text{COV} \tilde{J} \text{ M.V. } \underline{\tilde{z}})^{-1}$$

De covariantie van de M.V. schatting is nu "kleiner" dan die van de L.S. schatting, dus:

$$(\underline{\tilde{z}}^T \text{COV} \tilde{J} \text{ M.V. } \underline{\tilde{z}})^{-1} \ll (\underline{\tilde{z}}^T \text{COV} \tilde{J} \text{ M.V. } \underline{\tilde{z}})$$

A P P E N D I X

A. 4.4.

Het computerprogramma op blz. 76 t/m blz. 78 berekent $COV\vec{\beta}_{L.S.}$ en $COV\vec{\beta}_{M.V.}$ als functie van $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ ($\frac{1}{4} \leq \frac{\sigma}{\sigma_0} \leq 4$) bij $N = 16$.

Het op de blz. 79, 80 en 81 gegeven computerprogramma berekent

$$E_x \left\{ COV\vec{\beta}_{L.S.} \right\} \text{ en } E_x \left\{ COV\vec{\beta}_{M.V.} \right\} \quad \text{bij } N = 36$$

en $\left(\frac{1}{4} \leq \frac{\sigma}{\sigma_0} \leq 4 \right)$

Tenslotte is op blz. 82 het computerprogramma gegeven voor de berekening van de eigenwaarde van de matrix $COV \underline{n}$ bij ingangereekslengte $N = 6$ en

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\sigma}{\sigma_0} \leq 4$$

A. 4.5.

Op de blz. 83, 84 is het computerprogramma gegeven ter berekening van de gemiddelde waarde en de variantie van $\sqrt{\frac{2}{n}}$ in het geval dat de ingangereekslengte $N = 96$.

```

DIMENSION H(5),W(70),X(46),R(70),A(50,5),B(5,5),WV(5),WW(5),
IC(5,50),COVN(50,50),D(5,50),F(5,5),GL(5,5),Z(50),BL(50),GM(5,5)
KL=15
DO 11 I=1,5
11 H(I)=EXP(-I+1.)
WRITE(3,83)
83 FORMAT (' DE TE SCHATTEN GETALLEN ')
WRITE(3,82) (H(I),I=1,5)
82 FORMAT (/5F11.8/)
DO 10 M=3,2,9
N=5*M+1
DO 60 I=1,5
DO 64 J=1,5
GL(I,J)=C.
64 GM(I,J)=C.
60 CONTINUE
KKL=1234567
DO 22 I=1,N
CALL GAUSS(KKL,1.0,0.0,V)
22 X(I)=V
DO 23 K=1,N
DO 24 I=1,5
J=I+K-1
24 A(J,I)=X(K)
23 CONTINUE
KN=N+4
KI=N+1
DO 25 K=KI,KN
KII=N+5-K
DO 5 I=1,KII
J=I+K-1
JJ=I+K-N
A(J,I)=C.
5 A(I,JJ)=A(J,I)
25 CONTINUE
DO 26 I=1,5
DO 27 J=1,I
B(I,J)=C.
B(J,I)=C.
DO 28 K=1,KN
28 B(I,J)=B(I,J)+A(K,I)*A(K,J)
27 B(J,I)=B(I,J)
26 CONTINUE
CALL MINV(B,5,D1,WV,WW)
WRITE(3,150)
150 FORMAT (' LEAST SQUARE WIT ')
WRITE(3,63) ((B(I,J),J=1,5),I=1,5)
DO 9 KK=1,5
E=EXP(-2.** (KK-3))
KN=N+24
DO 20 I=1,KN
CALL GAUSS (KL,0.6,0.0,V)
20 W(I)=V
R(1)=0.
DO 21 I=1,KN
21 R(I+1)=E*R(I)+(1-E)*W(I)
KN=N+4
DO 29 I=1,5

```


21/03/68

FORTMAIN

17-8, 9, 2

```

DO 30 J=1,KN
CC=0.
DO 31 K=1,5
31 CC=CC+A(J,K)*B(I,K)
30 C(I,J)=CC
29 CONTINUE
DO 68 I=1,KN
DO 32 J=1,I
COVN(I,J)=E**((I-J)
32 COVN(J,I)=COVN(I,J)
68 CONTINUE
DO 33 I=1,5
DO 34 J=1,KN
DD=0.
DO 35 K=1,KN
35 DD=DD+C(I,K)*COVN(K,J)
34 D(I,J)=DD
33 CONTINUE
DO 36 I=1,5
DO 37 J=1,5
F(I,J)=C.
DO 38 K=1,KN
38 F(I,J)=F(I,J)+D(I,K)*C(J,K)
37 CONTINUE
36 CONTINUE
7 DO 39 I=1,KN
ZZ=0.
DO 40 J=1,5
40 ZZ=ZZ+A(I,J)*H(J)
ZZ=ZZ+R(I+2C)
39 Z(I)=ZZ
DO 41 I=1,5
BLL=C.
DO 42 K=1,KN
42 BLL=BLL+C(I,K)*Z(K)
41 BL(I)=BLL
WRITE(3,61)
61 FORMAT (' LEAST SQUARE ')
WRITE(3,62) (BL(I),I=1,5),N,KN,L
62 FORMAT (/5(1X,F11.8),3I3/)
WRITE(3,63) ((F(I,J),J=1,5),I=1,5)
63 FORMAT (/1X,5(1X,F11.8)/)
4 DO 43 I=1,KN
DO 44 J=1,KN
44 COVN(I,J)=0.
43 CONTINUE
P=1.-E*E
COVN(1,1)=1./P
COVN(KN,KN)=COVN(1,1)
KI=N+3
DO 58 I=1,KI
COVN(I,I+1)=-E/P
58 COVN(I+1,I)=-E/P
DO 59 I=2,KI
Q=E*E
59 COVN(I,I)=(1.+Q)/P
DO 45 I=1,5
DO 46 J=1,KN
CC=0.

```

21/03/68

FORTMAIN

```
DO 47 K=1,KN
47 CC=CC+A(K,I)*COVN(K,J)
46 C(I,J)=CC
45 CONTINUE
DO 48 I=1,5
DO 49 J=1,5
BB=0.
DO 50 K=1,KN
50 BB=BB+C(I,K)*A(K,J)
49 GL(I,J)=BB
48 CONTINUE
CALL MINV(GL,5,D1,hV,hW)
13 DO 51 I=1,5
DO 52 J=1,KN
DD=0.
DO 53 K=1,5
53 DD=DD+GL(I,K)*C(K,J)
52 D(I,J)=DD
51 CONTINUE
DO 54 I=1,5
BLL=0.
DO 55 K=1,KN
55 BLL=BLL+D(I,K)*Z(K)
54 BL(I)=BLL
WRITE (3,70)
70 FORMAT (' MARKOV ')
WRITE(3,62) (BL(I),I=1,5),N,KN,L
WRITE(3,63) ((GL(I,J),J=1,5),I=1,5)
9 CONTINUE
10 CONTINUE
STOP
END
```

```

DIMENSION H(5),W(70),X(46),R(70),A(50,5),B(5,5),WV(5),WW(5),
IC(5,50),COVN(50,50),D(5,50),F(5,5),GL(5,5),Z(50),BL(50),GM(5,5)
KKL=15
KL=12
DO 11 I=1,5
11 H(I)=EXP(-I+1.)
WRITE(3,83)
83 FORMAT (' DE TE SCHATTEN GETALLEN ')
WRITE(3,82) (H(I),I=1,5)
82 FORMAT (/5F11.8/)
M=7
N=5*M+1
DO 9 KK=1,5
E=EXP(-2.** (KK-3))
KN=N+24
DO 20 I=1,KN
20 CALL GAUSS (KL,C.6,0.0,V)
W(I)=V
R(1)=C.
DO 21 I=1,KN
21 R(I+1)=E*R(I)+(1-E)*W(I)
DO 60 I=1,5
DO 64 J=1,5
GL(I,J)=C.
64 GM(I,J)=C.
60 CONTINUE
LL=1
DO 8 L=1,50
DO 22 I=1,N
22 CALL GAUSS(KKL,1.C,0.0,V)
X(I)=V
DO 23 K=1,N
DO 24 I=1,5
J=I+K-1
24 A(J,I)=X(K)
23 CONTINUE
KN=N+4
KI=N+1
DO 25 K=KI,KN
KII=N+5-K
DO 5 I=1,KII
J=I+K-1
JJ=I+K-N
A(J,I)=C.
5 A(I,JJ)=A(J,I)
25 CONTINUE
DO 26 I=1,5
DO 27 J=1,I
B(I,J)=C.
B(J,I)=C.
DO 28 K=1,KN
28 B(I,J)=B(I,J)+A(K,I)*A(K,J)
27 B(J,I)=B(I,J)
26 CONTINUE
CALL MINV(B,5,D1,WV,hk)
DO 29 I=1,5
DO 30 J=1,KN
CC=C.

```

16/02/68

FORTMAIN

```
DO 31 K=1,5
31 CC=CC+A(J,K)*B(I,K)
30 C(I,J)=CC
29 CONTINUE
DO 68 I=1,KN
DO 32 J=1,I
COVN(I,J)=E*(I-J)
32 COVN(J,I)=COVN(I,J)
68 CONTINUE
DO 33 I=1,5
DO 34 J=1,KN
DD=C.
DO 35 K=1,KN
35 DD=DD+C(I,K)*COVN(K,J)
34 D(I,J)=DD
33 CONTINUE
DO 36 I=1,5
DO 37 J=1,5
F(I,J)=C.
DO 38 K=1,KN
38 F(I,J)=F(I,J)+D(I,K)*C(J,K)
37 GL(I,J)=GL(I,J)+F(I,J)
36 CONTINUE
IF(L-LL) 4,7,4
7 DO 39 I=1,KN
ZZ=C.
DO 40 J=1,5
40 ZZ=ZZ+A(I,J)*H(J)
ZZ=ZZ+R(I+2C)
39 Z(I)=ZZ
DO 41 I=1,5
BLL=C.
DO 42 K=1,KN
42 BLL=BLL+C(I,K)*Z(K)
41 BL(I)=BLL
WRITE(3,61)
61 FORMAT (' LEAST SQUARE ')
WRITE(3,62) (BL(I),I=1,5),N,KN,L
62 FORMAT (/5(1X,F11.8),3I3/)
WRITE(3,63) ((F(I,J),J=1,5),I=1,5)
63 FORMAT (/1X,5(1X,F11.8)/)
4 DO 43 I=1,KN
DO 44 J=1,KN
44 COVN(I,J)=C.
43 CONTINUE
P=1.-E*E
COVN(1,1)=1./P
COVN(KN,KN)=COVN(1,1)
KI=N+3
DO 58 I=1,KI
COVN(I,I+1)=-E/P
58 COVN(I+1,I)=-E/P
DO 59 I=2,KI
Q=E*E
59 COVN(I,I)=(1.+Q)/P
DO 45 I=1,5
DO 46 J=1,KN
CC=C.
DO 47 K=1,KN
```

```

16/02/68          FORTMAIN
47  CC=CC+A(K,I)*COVN(K,J)
46  C(I,J)=CC
45  CONTINUE
     DO 48 I=1,5
     DO 49 J=1,5
     BB=C.
     DO 50 K=1,KN
50  BB=BB+C(I,K)*A(K,J)
49  B(I,J)=BB
48  CONTINUE
     CALL MINV(B,5,D1,wv,hw)
     DO 65 I=1,5
     DO 66 J=1,5
66  GM(I,J)=GM(I,J)+B(I,J)
65  CONTINUE
     IF(L-LL) 8,13,8
13  DO 51 I=1,5
     DO 52 J=1,KN
     DD=C.
     DO 53 K=1,5
53  DD=DD+B(I,K)*C(K,J)
52  D(I,J)=DD
51  CONTINUE
     DO 54 I=1,5
     BLL=C.
     DO 55 K=1,KN
55  BLL=BLL+D(I,K)*Z(K)
54  BL(I)=BLL
     WRITE (3,70)
70  FORMAT (' MARKOV ')
     WRITE(3,62) (BL(I),I=1,5),N,KN,L
     WRITE (3,63) ((B(I,J),J=1,5),I=1,5)
8   CONTINUE
     DO 56 I=1,5
     DO 57 J=1,5
     GM(I,J)=GM(I,J)/50.
57  GL(I,J)=GL(I,J)/50.
56  CONTINUE
     WRITE(3,73) N,KN
73  FORMAT(/,2I3)
     WRITE (3,71)
71  FORMAT(' M -LEAST SQUARE ')
     WRITE (3,63) ((GL(I,J),J=1,5),I=1,5)
     WRITE(3,72)
72  FORMAT (' M-MARKOV ')
     WRITE(3,63) ((GM(I,J),J=1,5),I=1,5)
9   CONTINUE
     STOP
     END

```

```

DIMENSION COVN (10, 10), A (55)
M=1
N=5*M+1
81  FORMAT (I3)
    DO 9 KK=1,5
      E=EXP(-2.** (KK-3))
      WRITE (3,30) E
30   FORMAT (F11.8)
      KN=N+4
      KNN=N+3
      DO 50 J=1,KN
50   COVN (1,J) =E** (J-1)
      DO 68 I=1,KNN
      DO 32 J=I,KNN
32   COVN (I+1,J+1)=COVN (I,J)
68   CONTINUE
      WRITE(3,81) N
      CALL MSIP (COVN,A,10,0,1)
      CALL EIGEN (A,R,10,1)
      DO 90 I=1,KN
      CALL LCC (I,I,IJ,10,10,1)
90   COVN (1,I) =A (IJ)
      B=0.25*(COVN (1,1)+COVN (1,KN))* (1./COVN (1,1)+1./COVN (1,KN))
      WRITE (3,80) (COVN (1,J), J=1,KN)
80   FORMAT (/10(1X,F11.8)/)
      WRITE (3,20) B,KN
20   FORMAT (/F11.8,I3/)
9    CONTINUE
      STCF
      END

```

```

DIMENSION H(5),X(496),W(500),A(500,5),Z(500),B(5,5),WV(5),
1 WW(5),C(5,500),BL(5),EZ(500)
WRITE(3,164)
164 FORMAT('/',BEREKENING VAN DE VARIANTIE VAN DE RUIS '/')
KKL=1234567
KL=15
DO 11 I=1,5
11 H(I)=EXP(-I+1.)
L=100
M=19
N=5*M+1
EEZ=0.
DO 200 LL=1,L
DO 22 I=1,N
CALL GAUSS(KKL,1.0,0.0,V)
22 X(I)=V
DO 23 K=1,N
DO 24 I=1,5
J=I+K-1
24 A(J,I)=X(K)
23 CONTINUE
KN=N+4
KI=N+1
DO 25 K=KI,KN
KII=N+5-K
DO 5 I=1,KII
J=I+K-1
JJ=I+K-N
A(J,I)=0.
5 A(I,JJ)=A(J,I)
25 CONTINUE
DO 20 I=1,KN
CALL GAUSS(KL,0.6,0.0,V)
20 W(I)=V
7 DO 39 I=1,KN
ZZ=0.
DO 40 J=1,5
40 ZZ=ZZ+A(I,J)*H(J)
ZZ=ZZ+W(I)
39 Z(I)=ZZ
DO 26 I=1,5
DO 27 J=1,I
B(I,J)=0.
B(J,I)=0.
DO 28 K=1,KN
28 B(I,J)=B(I,J)+A(K,I)*A(K,J)
27 B(J,I)=B(I,J)
26 CONTINUE
CALL MINV(B,5,D1,WV,WW)
DO 29 I=1,5
DO 30 J=1,KN
CC=0.
DO 31 K=1,5
31 CC=CC+A(J,K)*B(I,K)
30 C(I,J)=CC
29 CONTINUE
DO 41 I=1,5
BL(I)=0.

```

03/05/58

FORPMAIN

```
DO 42 K=1,KN
42  BLL=BLL+C(I,K)*Z(K)
41  BL(I)=BLL
    EZ(LL)=0*
    DO 150 I=1,KN
      ZZ=0*
      DO 151 J=1,5
151  ZZ=ZZ+A(I,J)*BL(J)
      Z(I)=Z(I)-ZZ
      Z(I)=Z(I)*Z(I)
150  EZ(LL)=EZ(LL)+Z(I)
      EZ(LL)=EZ(LL)/N
      EEZ=EEZ+EZ(LL)
200  CONTINUE
      EEZ=EEZ/L
      WRITE(3,162) EEZ
162  FORMAT (' DE GEMIDDELDE WAARDE = ',F11.8/)
      VARN=0*
      DO 153 I=1,L
        EZ(I)=EZ(I)-EEZ
        EZ(I)=EZ(I)*EZ(I)
153  VARN=VARN+EZ(I)
      VARN=VARN/(L-1*)
      WRITE(3,163) VARN
163  FORMAT (' DE VARIANTIE = ',F11.8/)
10  STOP
    END
```


L I T E R A T U U R

1. BOWMANN, F. "Introduction to Determinants and Matrices"
2. DEUTSCH, R. "Estimation theory"
Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall Inc., 1965
3. EYKHOFF, P. "Some Fundamental Aspects of Process Parameters
Estimation". IEEE - Transactions 1963
4. EYKHOFF, P. "Process Parameter and State Estimation"
Survey paper for the IFAC symposium, Prague, June 1967
5. FORSYTHE, G.E., MOLER, C.B. "Computer Solutions of linear Algebraic Systems"
6. GRENDER, U., and ROSENBLATT, M.
"Statistical Analyses of Stationary Time Series",
John Wiley and Sons, Inc, New York, N.Y., 1957.
7. LANING, J.H. and R.H. BATTIN
"Random Processes in Automatic Control"
New York, Mc. Graw Hill Book Company, 1956
8. LEVIN, M.J. "Optimum Estimation of Impulsive Response in the
Presence of Noise"
I.R.E. Trans., P.G.C.T., vol.7, blz. 50, March 1960
9. MAGNES, T.A., and McGUIRE, J.B.,
"Comparison of Least Square and Minimum Variance
Estimate of Regression Parameters"
Annals of Math. Stat. 33 (1962) blz. 462
10. PLACKETT "Regression Analysis"
11. WATSON "Serial Correlation in Regression Analysis"
Biometrika 42-327