

MASTER

RLC synthese van minimumresistieve immitantiefunkties

de Kruijk, A.

Award date:
1975

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

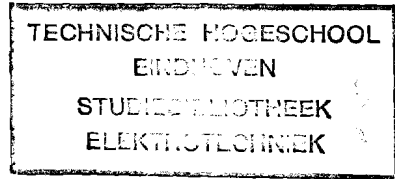
General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

1963 bse

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK
VAKGROEP THEORETISCHE ELEKTROTECHNIEK



RLC Synthese van minimumresistieve
immitantiefunkties,
door
A. de Kruijk.

ET-9-1975

Verslag van een afstudeeronderzoek, verricht
in de vakgroep ET, onder leiding van
ir. Tirtoprodjo.

juni 1975.

I N H O U D S O P G A V E

	pag.
INLEIDING	iii
I DE GEMODIFICEERDE KETTINGBREUKONTWIKKELING	1
1. Een zichtbaar minimumresistieve immitantiefunctie van oneven graad in teller en noemer	1
2. Een zichtbaar minimumresistieve immitantiefunctie van even graad in teller en noemer	7
3. Het benodigde aantal elementen (R,L,C)	12
4. De realiseerbaarheid van de gemodificeerde kettingbreuk- ontwikkeling	13
5. Conclusies	17
II EEN BIQUINTISCHE IMMITANTIEFUNCTIE, ZICHTBAAR MINIMUMRESISTIEF VOOR EEN ω^2 -WAARDE	18
1. De realiseerbaarheid van de stap $F_5(s) \longrightarrow F_4(s)$	18
2. De realiseerbaarheid van de stap $F_4(s) \longrightarrow F_3(s)$	25
3. Samenvatting der resultaten	31
4. Voorbeelden	33
III EEN IMMITANTIEFUNCTIE VAN ONEVEN GRAAD (n+1) IN TELLER EN NOEMER EN ZICHTBAAR MINIMUMRESISTIEF VOOR ($\frac{1}{2}n-1$) ω^2 -WAARDEN	62
1. De realiseerbaarheid van de stap $F_{n+1}(s) \longrightarrow F_n(s)$	62
2. De realiseerbaarheid van de stap $F_n(s) \longrightarrow F_{n-1}(s)$	68
3. Samenvatting der resultaten	72
IV EEN ZICHTBAAR MINIMUMRESISTIEVE BIQUARTISCHE IMMITANTIEFUNCTIE	73
1. De realiseerbaarheid van de stap $F_4(s) \longrightarrow F_3(s)$	74
2. Splitsing van $F_4(s)$ zowel als $1/F_4(s)$ in twee somtermen	78
3. Synthese van $F_4(s)$ volgens Miyata's methode	80
4. Synthese van $F_4(s)$ volgens Murray Lasso's methode	86
5. Een speciale klasse van zichtbaar minimumresistieve biquartische immitantiefuncties	91
V ENKELE OVEREENKOMSTEN TUSSEN DE GEMODIFICEERDE KETTINGBREUK- ONTWIKKELING, MIYATA'S METHODE EN MURRAY LASSO'S METHODE, TOEGEPAST OP LAGERE GRAADS IMMITANTIEFUNCTIES	94
1. Een minimumresistieve biquadratische immitantiefunctie	94
2. Een zichtbaar minimumresistieve bicubische immitantiefunctie	98
3. Een niet-zichtbaar minimumresistieve bicubische immitantiefunctie	100
APPENDIX A HET STURMTHEOREMA EN ZIJN TOEPASSING IN DE NETWERKTHEORIE	104
APPENDIX B MIYATA'S METHODE VOOR RLC-SYNTHESE VAN IMMITANTIE- FUNCTIES	107
APPENDIX C MURRAY LASSO'S METHODE VOOR RLC-SYNTHESE VAN IMMITANTIEFUNCTIES	111
LITERATUUR	115

INLEIDING

In de afgelopen jaren is in de vakgroep Theoretische Elektrotechniek aandacht besteed aan de RLC-synthese van een speciale klasse van immitantiefuncties. De syntheseprocedure waarvan gebruik werd gemaakt, de zgn. gemodificeerde kettingbreukontwikkeling, bleek zich uitstekend te lenen voor die klasse van immitantiefuncties, gekenmerkt door de zgn. zichtbare minimumresistiviteit. Om de lezer alvast enige bekendheid met deze begrippen te geven, schrijven we een positief reële immitantiefunctie als volgt op:

$$F_n(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)}$$

waarin de hoofdletters N en D respectievelijk de teller (Numerator) en de noemer (Denominator) van $F_n(s)$ zijn, en de indices e een o het even resp. het oneven deel hiervan aanduiden.

We gaan ervan uit dat van deze immitantiefunctie alle $j\omega$ -as-polen en -nulpunten zijn afgesplitst.

Het even deel van $F_n(s)$ voldoet aan:

$$\text{Ev } F_n(s) = \frac{1}{2} [F_n(s) + F_n(-s)] = \frac{N(s)D(-s) + N(-s)D(s)}{2D(s)D(-s)} = \frac{N_e(s)D_e(s) - N_o(s)D_o(s)}{[D_e(s)]^2 - [D_o(s)]^2}$$

Voor $s = j\omega$ is dit het reële deel van $F_n(s)$.

$F_n(s)$ is minimumresistief als $\text{Re } F_n(j\omega) = 0$ voor één of meerdere ω^2 -waarden. We noemen deze ω^2 -waarden: $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_k^2$ en voor de teller van $\text{Re } F_n(j\omega)$ kunnen we dan schrijven:

$$\text{Num } [\text{Re } F_n(j\omega)] = N_e(j\omega)D_e(j\omega) - N_o(j\omega)D_o(j\omega) = 0 \Big|_{\omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_k^2}$$

$F_n(s)$ is zichtbaar minimumresistief als één der polynomen $N_e(j\omega)$ of $D_e(j\omega)$ eveneens nul wordt voor $\omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_k^2$.

Stel b.v. dat $D_e(j\omega) = 0 \Big|_{\omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_k^2}$ dan is aan bovenstaande

vergelijking te zien dat ook $N_o(j\omega) = 0 \Big|_{\omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_k^2}$,

immers we hebben gesteld dat $F_n(s)$ geen polen of nulpunten op de $j\omega$ -as heeft. Als $N_e(j\omega) = 0 \Big|_{\omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_k^2}$ dan volgt hiermee analoog

dat $D_o(j\omega) = 0 \Big|_{\omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_k^2}$

De zichtbare minimumresistiviteit is door onderzoek van de quotiënten N_o/D_e en N_e/D_o , m.b.v. het algoritme van Euclides, eenvoudig op te sporen.

In hoofdstuk I zal exact geformuleerd worden wat de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling is, maar voorlopig zullen we volstaan met de volgende beschrijving hiervan: $F_n(s)$ of z'n geïnverteerde $1/F_n(s)$ wordt in twee somtermen gesplitst, z.d.d. één dezer delen een nulpunt heeft

voor $s = \infty$ (de eerste vorm) of
voor $s = 0$ (de tweede vorm).

In het algemeen zullen er zwaardere eisen aan $F_n(s)$ zijn opgelegd, dan die welke volgen uit z'n positief reële karakter, wil de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling realiseerbaar zijn. In het verleden is al aangetoond dat een zichtbaar minimumresistieve bicubische immitantiefunctie zonder extra voorwaarden in de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling realiseerbaar is, terwijl aan een zichtbaar minimumresistieve biquartische immitantiefunctie al enkele voorwaarden zijn opgelegd, welke tevens voldoende bleken te zijn. In dit verslag komt de realiseerbaarheid van zichtbaar minimumresistieve immitantiefuncties i.h.a. (zie hoofdstuk I) en van biquintische immitantiefuncties, zichtbaar minimumresistief voor één ω^2 -waarde, in het bijzonder (zie hoofdstuk II), aan de orde. Bovendien wordt ingegaan op de netwerkstructuren en het aantal benodigde elementen (R,L,C) die uit deze synthese-procedure voortvloeien.

Misschien zal de lezer weinig praktische waarde zien in een beschouwing over een dergelijke beperkte klasse van immitantiefuncties. Het zal n.l. erg toevallig zijn als de man-van-de-praktijk een zichtbaar minimumresistieve impedantie-/admittantiefunctie ontmoet die hij wil synthetiseren. Dit bezwaar kan echter verholpen worden door een niet-zichtbaar minimumresistieve immitantiefunctie (welke "in de praktijk" wél gebruikelijk is) met geschikt gekozen surplusfactoren in graad te verhogen (zie appendix B), z.d.d. de minimumresistiviteit wel zichtbaar wordt. Dit is ook een gebruikelijke stap in Miyata's methode, welke eveneens uitsluitend gebruik maakt van de elementen R,L en C. De eisen die Miyata's methode stelt aan de realiseerbaarheid van immitantiefuncties blijken echter, zoals in hoofdstuk IV.3 wordt aangetoond, zwaarder te zijn dan die welke volgen uit de realiseerbaarheid van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling. Er is een speciaal hoofdstuk gewijd aan een vergelijking van drie verschillende RLC-synthese-procedures, toegepast op lagere graads immitantiefuncties, n.l. de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling, Miyata's methode en Murray Lasso's methode (laatstgenoemde is een alternatief van Bott-Duffin's methode). Dit onderzoeksveld ligt nog behoorlijk braak en er kunnen m.i. nog interessante dingen over gezegd worden.

Een inleiding schrijf je pas als alles "achter de rug" is, en wat me bij een terugblik in dit verslag zo opvalt is de strakke en logische weg die gevolgd wordt, terwijl het feitelijke onderzoek veel grilliger verliep, het inzicht krijg je pas aan het eind, alhoewel ik niet kan zeggen dat ik alles van het onderwerp afweet. Het feit dat er zo weinig te visualiseren viel was voor mij enerzijds een groot struikelblok om in de stof door te dringen, anderzijds een prikkel om het fijnere te weten te komen. De moeilijkheden in de netwerksynthese liggen m.i. niet zozeer in de wiskundige handelingen, maar in het kunnen "zien" van de fysische realiteit die achter wiskundige formules verborgen ligt en daarom had de netwerksynthese altijd een mysterieus tintje voor mij. Al met al het blijft een boeiend stuk wetenschap !

I DE GEMODIFICEERDE KETTINGBREUKONTWIKKELING

De synthese van reactantiefuncties kan geschieden via een kettingbreukontwikkeling (de zgn. Cauer-synthese), waaruit een laddernetwerk volgt. De synthese van zichtbaar minimumresistieve immitantiefuncties gaat via een gemodificeerde kettingbreukontwikkeling waaruit, zoals zal worden aangetoond, eveneens een laddernetwerk volgt. Voorlopig zal worden aangenomen dat een dergelijke breukontwikkeling realiseerbaar is, pas aan het eind van dit hoofdstuk zal dit ter sprake komen. Er bestaan twee vormen van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling; de tweede vorm berustte op de transformatie $s := 1/s$ en een analoge procedure als die bij de eerste vorm werd op de immitantiefunctie toegepast. Het blijkt dat deze omweg vermeden kan worden, n.l. door $F(s)$ op een andere manier te splitsen in de somtermen $F'(s)$ en $F''(s)$ dan bij de eerste vorm. In het vervolg zal $F_n(s)$ een immitantiefunctie van gelijke graad n in teller en noemer zijn en de teller van het reële deel van $F_n(j\omega)$ wordt aangeduid met $A_n(\omega^2)$. De gemodificeerde kettingbreukontwikkeling zal achtereenvolgens worden toegepast op een zichtbaar minimumresistieve immitantiefunctie van oneven graad en even graad in teller en noemer.

I.1 EEN ZICHTBAAR MINIMUMRESISTIEVE IMMITANTIEFUNCTIE VAN ONEVEN GRAAD IN TELLER EN NOEMER

Stel de immitantiefunctie

$$F_{n+1}(s) = \frac{N_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)}$$

is van oneven graad $n+1$ in teller en noemer,

met

$$\begin{aligned} N_o(s) &= \sum_{i=0}^n a_{2i+1} \cdot s^{2i+1} \\ N_e(s) &= \sum_{i=0}^n a_{2i} \cdot s^{2i} \stackrel{!}{=} a_n \cdot g_{o1}(s) \cdot f(s) \\ D_o(s) &= \sum_{i=0}^n b_{2i+1} \cdot s^{2i+1} \stackrel{!}{=} s \cdot b_{n+1} \cdot g_{o2}(s) \cdot f(s) \\ D_e(s) &= \sum_{i=0}^n b_{2i} \cdot s^{2i} \end{aligned} \tag{1}$$

waarin

$$f(s) = \prod_{i=1}^K (s^2 + \omega_i^2)$$

waaruit volgt dat de polynomen $g_{o1}(s)$ en $g_{o2}(s)$ van graad $n-2k$ zijn. De gemeenschappelijk factor $f(s)$ is hier dus gekozen in het even deel van de teller en het oneven deel van de noemer. Dit maakt voor het betoog niets uit, als $f(s)$ n.l. in het even deel van de noemer en het oneven deel van de teller voorkomt, beschouwen we de functie $1/F_{n+1}(s)$.

Voor de teller van het reële deel van $F_{n+1}(j\omega)$ geldt:

$$\begin{aligned} A_{n+1}(\omega^2) &= N_e(j\omega) \cdot D_e(j\omega) - N_o(j\omega) \cdot D_o(j\omega) \\ &= f(j\omega) \left\{ a_n g_{o1}(j\omega) D_e(j\omega) - j\omega \cdot b_{n+1} g_{o2}(j\omega) N_o(j\omega) \right\} \end{aligned} \tag{2}$$

waarin de uitdrukkingen (1) zijn gebruikt.

angezien $F_{n+1}(s)$ positief reëel is, moet $A_{n+1}(\omega^2) \geq 0$ voor alle ω .
 De functie $f(j\omega)$ heeft k ω^2 -nulpunten die enkelvoudig zijn; $f(j\omega)$ is dus op verschillende ω -intervallen negatief. Aan de eis $A_{n+1}(\omega^2) \geq 0$ kan daarom alleen voldaan worden als $A_{n+1}(\omega^2)$ de term $f(j\omega)$ kwadratisch bevat, d.w.z.

$$a_n g_{o1}(j\omega) \cdot D_e(j\omega) - j\omega b_{n+1} g_{o2}(j\omega) N_o(j\omega) \equiv f(j\omega) \cdot h_{n+1}(\omega^2) \quad (3)$$

waarin $h_{n+1}(\omega^2)$ een nog nader te bepalen functie is met graad $2(n+1-2k)$.
 $A_{n+1}(\omega^2)$ is een polynoom van graad $2n+2$ en kan hooguit $n/2$ ω^2 -nulpunten bevatten; dan geldt n.l.

$$A_{n+1}(\omega^2) = a_{n+1} \cdot b_{n+1} (\omega^2 - \omega_1^2)^2 (\omega^2 - \omega_2^2)^2 \dots (\omega^2 - \omega_{\frac{n}{2}}^2)^2 (\omega^2 + \omega_{\frac{n}{2}+1}^2)$$

het aantal gemeenschappelijke ω^2 -nulpunten van $N_e(j\omega)$ en $D_o(j\omega)$ is k genoemd en het maximale aantal bedraagt eveneens $n/2$,

zodat volgt: $k \leq n/2$

1.1.1 DE EERSTE FORM VAN DE GEMODIFICEERDE KETTINGBREUKONTWIKKELING

De zichtbaar minimumresistieve inmitantiefunctie $F_{n+1}(s)$ wordt als volgt ontwikkeld:

$$F_{n+1}(s) = \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \cdot D_o(s)}{D_o(s) + D_e(s)} + \frac{N_o(s) - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} D_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)}$$

$$\stackrel{!}{=} F'_{n+1}(s) + F''_{n+1}(s)$$

$F'_{n+1}(s)$ kan als volgt geschreven worden:

$$F'_{n+1}(s) = \frac{1}{\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{D_e(s)}{D_o(s)}}$$

De noemer hiervan is de som van een constante en een reactantiefunctie, immers $D_e(s) + D_o(s)$ is een Hurwitzpolynoom.

Realisatie van $F_{n+1}'(s)$ levert dus verder geen problemen, het netwerk bestaat uit een weerstand parallel aan of in serie met een LC-netwerk. Omdat de teller van $F_{n+1}''(s)$ van graad n is, kunnen we van $1/F_{n+1}''(s)$ de pool voor $s = \infty$ afsplitsen:

$$F_{n+1}''(s) = \frac{1}{\frac{b_{n+1}}{a_n} s + F_n(s)} \quad \text{waarin}$$

$$F_n(s) = \frac{D_e(s) - s \left\{ \frac{b_{n+1}}{a_n} N_o(s) - \frac{a_{n+1}}{a_n} D_o(s) \right\} + D_o(s) - \frac{b_{n+1}}{a_n} s \cdot N_e(s)}{N_e(s) + N_o(s) - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} D_o(s)}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{N_e^*(s)}{D_e^*(s)} + \frac{N_o^*(s)}{D_o^*(s)}$$

De graad in teller en noemer van $F_n(s)$ bedraagt n . M.b.v. deze breukontwikkeling is dus een nieuwe functie $F_n(s)$ gecreëerd, die in graad één is verlaagd m.b.t. $F_{n+1}(s)$.

Met (1) schrijven we:

$$N_e^*(s) = D_e(s) - s \left\{ \frac{b_{n+1}}{a_n} N_o(s) - \frac{a_{n+1}}{a_n} D_o(s) \right\}$$

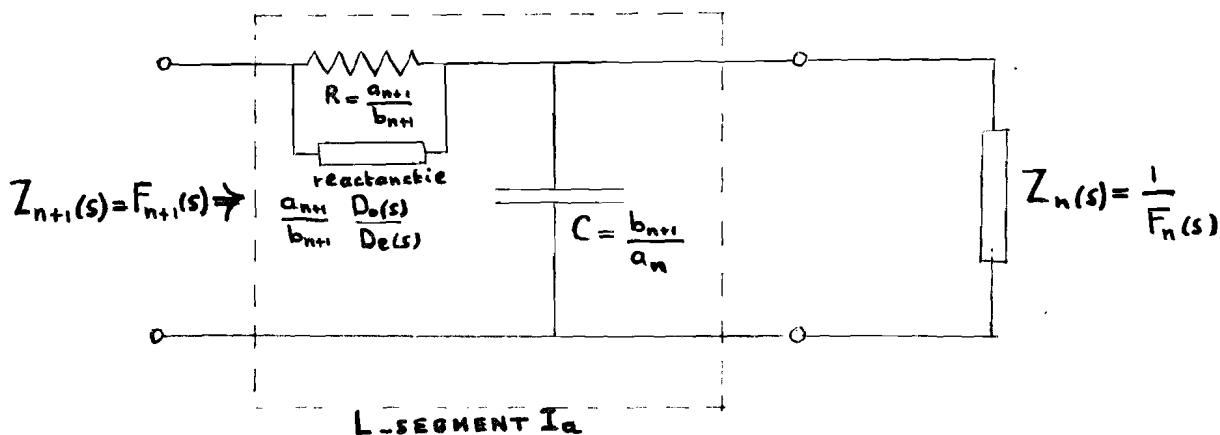
$$N_o^*(s) = D_o(s) - \frac{b_{n+1}}{a_n} s N_e(s) = s \cdot b_{n+1} f(s) [g_{o2}(s) - g_{o1}(s)]$$

$$D_e^*(s) = N_e(s) = a_n f(s) \cdot g_{o1}(s)$$

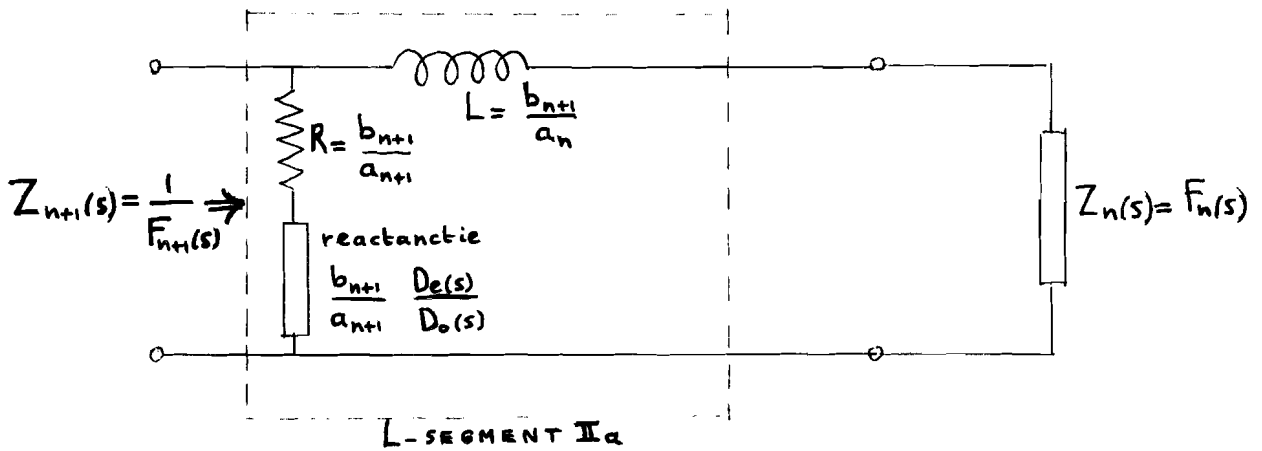
$$D_o^*(s) = N_o(s) - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} D_o(s)$$
(4)

We zien de factor $f(s)$ weer te voorschijn komen in $N_o^*(s)$ en $D_e^*(s)$, zodat de zichtbare minimumresistiviteit voor $k \omega^2$ -waarden dus behouden blijft. Deze eerste stap van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling van $F_{n+1}(s)$ zullen we nu realiseren.

Stelde $F_{n+1}(s)$ een impedantiefunctie voor, dan ontstaat het volgende netwerk:



Als $F_{n+1}(s)$ een admittantiefunctie voorstelde, verkrijgen we:



Voor maximaal zichtbare minimumresistiviteit, n.l. voor $k = z_n$ geldt:

$$g_{o1}(s) = g_{o2}(s) = 1 \quad (\text{zie hiervoor eveneens lit. [1]})$$

De coëfficiënten van $h_{n+1}(\omega^2)$ in identiteit (3) kunnen nu snel bepaald worden door de hoogste en laagste graads ω^2 -termen aan elkaar gelijk te stellen, wat oplevert:

$$h_{n+1}(\omega^2) = a_{n+1} \cdot b_{n+1} \omega^2 + \frac{a_n^2 b_o}{a_o} \quad (5)$$

De uitdrukkingen (4) worden m.b.v. (1), (3) en (5):

$$\begin{aligned} N_o^*(s) &= 0 \\ D_e^*(s) &= a_n f(s) \\ N_e^*(s) &= \left\{ D_e(s) - s \frac{b_{n+1}}{a_n} N_o(s) \right\} + s^2 \frac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{a_n} f(s) \\ &= f(s) \left\{ \frac{a_n b_o}{a_o} - \frac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{a_n} s^2 + \frac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{a_n} s^2 \right\} \\ &= \frac{a_n \cdot b_o}{a_o} \cdot f(s) \end{aligned}$$

met behulp waarvan we kunnen schrijven:

$$F_n(s) = \frac{\frac{a_n b_o}{a_o} f(s)}{a_n f(s) + D_o^*(s)} = \frac{1}{\frac{a_o}{b_o} + \frac{a_o}{a_n b_o} \frac{D_o^*(s)}{f(s)}}$$

Bij synthese van $F_{n+1}(s)$ wordt in dit geval het L-segment I_a afgesloten met een weerstand in serie met een reactantie, het L-segment II_a door een parallelschakeling van een weerstand en een reactantie.

I.1.2 DE TWEDE FORM VAN DE GEMODIFICEERDE KETTINGBREDKONTWIKKELING

Bij de tweede vorm wordt op de geïnverteerde van $F_{n+1}(s)$ de volgende splitsing toegepast:

$$\frac{1}{F_{n+1}(s)} = \frac{\frac{b_0}{a_0} N_e(s)}{N_e(s) + N_o(s)} + \frac{D_e(s) - \frac{b_0}{a_0} N_e(s) + D_o(s)}{N_e(s) + N_o(s)}$$

$$\stackrel{!}{=} F_{n+1}'(s) + F_{n+1}''(s)$$

$F_{n+1}'(s)$ delen door $\frac{b_0}{a_0} N_e(s)$:

$$F_{n+1}'(s) = \frac{1}{\frac{a_0}{b_0} + \frac{a_0}{b_0} \frac{N_o(s)}{N_e(s)}}$$

Deze functie levert bij realisatie, zoals reeds eerder gezegd, geen moeilijkheden. De teller van $F_{n+1}''(s)$ heeft een nulpunt voor $s = 0$, ofwel $1/F_{n+1}''(s)$ heeft een pool voor $s = 0$, welke afgesplitst wordt:

$$F_{n+1}''(s) = \frac{1}{\frac{a_0}{b_0 s} + F_n(s)} \quad \text{waarin}$$

$$F_n(s) = \frac{[N_o(s) - \frac{a_0}{b_0 s} \{D_e(s) - \frac{b_0}{a_0} N_e(s)\}]/s + [N_e(s) - \frac{a_0}{b_0 s} D_o(s)]/s}{[D_o(s)]/s + [D_e(s) - \frac{b_0}{a_0} N_e(s)]/s}$$

welke van graad n is in teller en noemer.

Langs deze weg zijn we er dus weer in geslaagd de graad van $F_{n+1}(s)$ met één te verlagen.

Stel

$$F_n(s) \stackrel{!}{=} \frac{N_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

dan volgt met (1):

$$N_e^*(s) = [N_o(s) - \frac{a_o}{b_1 s} \{D_e(s) - \frac{b_o}{a_o} N_e(s)\}] / s$$

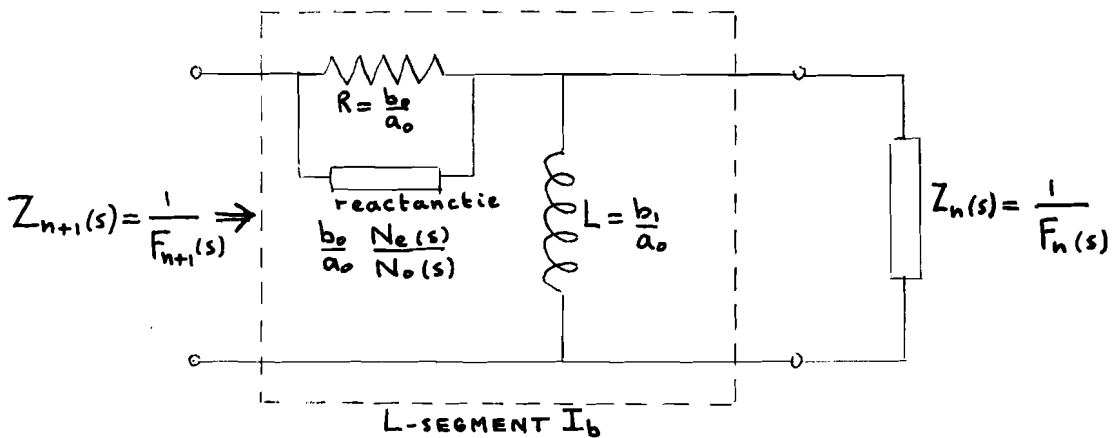
$$N_o^*(s) = [N_e(s) - \frac{a_o}{b_1 s} D_o(s)] / s = f(s) [a_n \cdot g_{o1}(s) - \frac{a_o b_{n+1}}{b_1} g_{o2}(s)] / s$$

$$D_e^*(s) = D_o(s) / s = f(s) \cdot b_{n+1} \cdot g_{o2}(s) \quad (6)$$

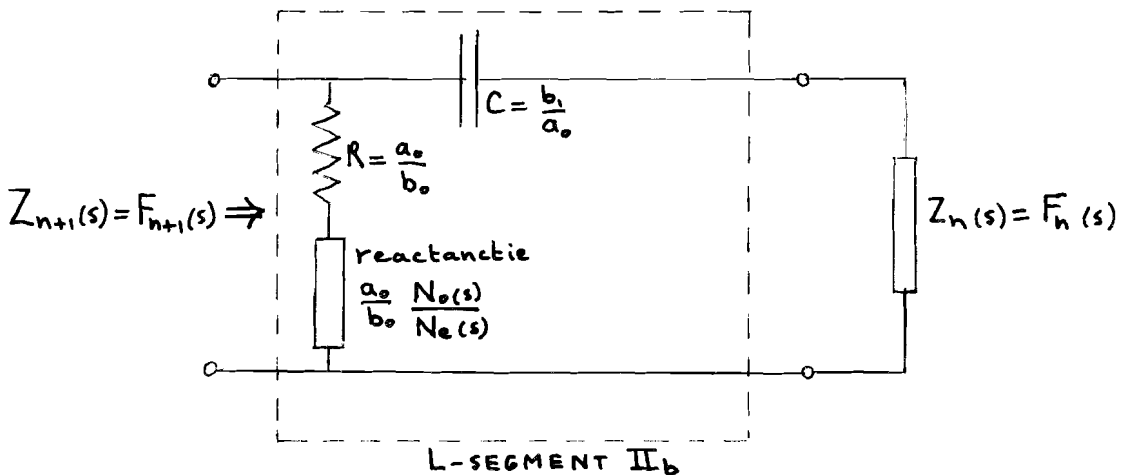
$$D_o^*(s) = [D_e(s) - \frac{b_o}{a_o} N_e(s)] / s$$

Ook hier verschijnt de factor $f(s)$ weer in $N_o^*(s)$ en $D_e^*(s)$, zodat de zichtbare minimumresistiviteit voor k ω^2 -waarden behouden blijft. De synthese van deze eerste stap van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling levert eveneens een L-netwerk op.

Voor $F_{n+1}(s)$ als admittantiefunctie geeft dit:



$F_{n+1}(s)$ als impedantiefunctie:



Voor maximaal zichtbare minimumresistiviteit ($k = \frac{1}{2}n$) geldt:

$$g_{01}(s) = g_{02}(s) = 1 \quad , \text{ waaruit volgt: } \frac{a_0}{a_n} = \frac{b_1}{b_{n+1}}$$

Met behulp hiervan en (1), (3) en (5) volgt voor de uitdrukkingen (6):

$$N_0^*(s) = f(s) \left\{ a_n - \frac{a_0 b_{n+1}}{b_1} \right\} = 0$$

$$D_e^*(s) = f(s) \cdot b_{n+1}$$

$$\begin{aligned} N_e^*(s) &= [N_0(s) - \frac{a_0}{b_1 s} D_e(s)] / s + \frac{a_n b_0}{b_1 s^2} f(s) \\ &= \frac{f(s)}{s^2} \left[a_{n+1} s^2 - \frac{a_n^2 b_0}{a_0 b_{n+1}} + \frac{a_n b_0}{b_1} \right] \\ &= a_{n+1} \cdot f(s) \end{aligned}$$

zodat $F_n(s)$ de volgende vorm krijgt:

$$F_n(s) = \frac{a_{n+1} \cdot f(s)}{b_{n+1} \cdot f(s) + D_0^*(s)} = \frac{1}{\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{D_0^*(s)}{a_{n+1} \cdot f(s)}}$$

Het L-segment l_b wordt hiermee afgesloten door een weerstand in serie met een reactantie; het L-segment ll_b door een weerstand parallel aan een reactantie.

I.2 EEN ZICHTBAAR MINIMUMRESISTIEVE IMMITANTIEFUNCTIE VAN EVEN GRAAD IN TELLER EN NOEMER

Stel de immitantiefunctie

$$F_n(s) = \frac{N_e(s) + N_0(s)}{D_e(s) + D_0(s)}$$

is van even graad n in teller en noemer, met

$$N_e(s) = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} a_{2i} \cdot s^{2i}$$

$$N_0(s) = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} a_{2i+1} \cdot s^{2i+1} \stackrel{!}{=} a_{n-1} \cdot s \cdot g_{11}(s) \cdot f(s)$$

$$D_e(s) = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} b_{2i} \cdot s^{2i} \stackrel{!}{=} b_n \cdot g_{12}(s) \cdot f(s)$$

$$D_0(s) = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} b_{2i+1} \cdot s^{2i+1}$$

(7)

waarin $f(s) = \prod_{i=1}^k (s^2 + \omega_i^2)$, waaruit volgt dat $g_{11}(s)$ van graad $(n-2-2k)$ en $g_{12}(s)$ van graad $(n-2k)$ is.
 Eventueel kan $F_n(s)$ uit $F_{n+1}(s)$ volgen na één stap van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling van $F_{n+1}(s)$.

N.B.: de coëfficiënten a_i en b_i van $F_n(s)$ zijn niet identiek aan die van $F_{n+1}(s)$ als $F_n(s)$ uit $F_{n+1}(s)$ voortkomt; dan zal $f(s)$ wel identiek zijn voor beide functies.

Voor de teller van het reële deel van $F_n(j\omega)$ geldt:

$$A_n(\omega^2) = N_e(j\omega) \cdot D_e(j\omega) - N_o(j\omega) \cdot D_o(j\omega) \\ = f(j\omega) \{ b_n g_{12}(j\omega) N_e(j\omega) - j\omega a_{n-1} g_{11}(j\omega) D_o(j\omega) \} \quad (8)$$

Zoals reeds in hoofdstuk I.1 is gezegd, moet nu gelden:

$$b_n \cdot g_{12}(j\omega) N_e(j\omega) - j\omega a_{n-1} g_{11}(j\omega) D_o(j\omega) \equiv f(j\omega) \cdot h_n(\omega^2) \quad (9)$$

waarin $h_n(\omega^2)$ een nog nader te bepalen polynoom is van graad $2(n-2k)$.
 $A_n(\omega^2)$ is een polynoom van graad $2n$ en kan maximaal $\frac{1}{2}n$ ω^2 -nulpunten bevatten; dan geldt n.l.

$$A_n(\omega^2) = a_n b_n (\omega^2 - \omega_1^2)^2 (\omega^2 - \omega_2^2)^2 \dots (\omega^2 - \omega_{\frac{n}{2}}^2)^2$$

Het aantal gemeenschappelijke ω^2 -nulpunten van $N_e(j\omega)$ en $D_o(j\omega)$ (dit is k genoemd) kan hooguit $(\frac{1}{2}n-1)$ bedragen, zodat volgt: $k \leq \frac{1}{2}n-1$.

1.2.1 DE EERSTE VOOR VAN DE GEMODIFICEERDE KETTINGBREUKONTWIKKELING

Evenals bij $F_{n+1}(s)$ wordt $F_n(s)$ gesplitst in twee functies $F_n''(s)$ en $F_n'(s)$, z.d.d. $F_n''(s)$ een nulpunt heeft voor $s = \infty$:

$$F_n(s) = \frac{\frac{a_n}{b_n} D_e(s)}{D_e(s) + D_o(s)} + \frac{N_e(s) - \frac{a_n}{b_n} D_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \\ \stackrel{!}{=} F_n'(s) + F_n''(s)$$

$F_n'(s)$ delen door $\frac{a_n}{b_n} D_e(s)$ levert:

$$F_n'(s) = \frac{1}{\frac{b_n}{a_n} + \frac{b_n}{a_n} \frac{D_e(s)}{D_e(s)}}$$

wat geen moeilijkheden oplevert bij realisatie.

De teller van $F_n''(s)$ is van graad $(n-1)$, dus van de geïnverteerde van $F_n''(s)$ kan een pool voor $s = \infty$ worden afgesplitst:

$$F_n''(s) = \frac{1}{\frac{b_n}{a_{n-1}} s + F_{n-1}(s)}$$

waarin

$$F_{n-1}(s) = \frac{D_o(s) - \frac{b_n}{a_{n-1}} s \{ N_e(s) - \frac{a_n}{b_n} D_e(s) \} + D_e(s) - \frac{b_n}{a_{n-1}} s N_o(s)}{N_o(s) + N_e(s) - \frac{a_n}{b_n} D_e(s)}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{N_o^*(s)}{D_o^*(s)} + \frac{N_e^*(s)}{D_e^*(s)}$$

De graad in teller en noemer hiervan bedraagt $(n-1)$.

M.b.v. (7) schrijven we:

$$\begin{aligned} N_o^*(s) &= D_o(s) - \frac{b_n}{a_{n-1}} s \left\{ N_e(s) - \frac{a_n}{b_n} D_e(s) \right\} \\ N_e^*(s) &= D_e(s) - \frac{b_n}{a_{n-1}} s N_o(s) = b_n \cdot f(s) \{ g_{12}(s) - s^2 g_{11}(s) \} \\ D_o^*(s) &= N_o(s) = a_{n-1} \cdot f(s) s \cdot g_{11}(s) \\ D_e^*(s) &= N_e(s) - \frac{a_n}{b_n} D_e(s) \end{aligned} \tag{10}$$

$F_{n-1}(s)$ is dus zichtbaar minimumresistief voor k ω^2 -waarden, aangezien zowel $N_e^*(s)$ als $D_o^*(s)$ de factor $f(s)$ bevatten.

Als $F_n(s)$ een impedantiefunctie is, zal synthese ervan dezelfde netwerkstructuur opleveren als die van het L-segment I_a , afgesloten met de impedantie $Z_{n-1}(s) = 1/F_{n-1}(s)$.

$F_n(s)$ als admittantiefunctie levert dezelfde netwerkstructuur als die van het L-segment II_a op, afgesloten met de impedantie $Z_{n-1}(s) = F_{n-1}(s)$.

Als $F_n(s)$ maximaal zichtbaar minimumresistief is (n.l. als $k = \frac{1}{2}n-1$) dan geldt:

$$g_{11}(s) = 1 \quad ; \quad g_{12}(s) = s^2 + \omega_{n+1}^2$$

(zie hiervoor eveneens lit. [2])

M.b.v. (7) kunnen we ω_{k+1}^2 uitdrukken in de coëfficiënten a_i en b_i :

$$f(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_{2i+1} \cdot s^{2i}}{a_{n-1}} \quad \text{en} \quad f(s) \cdot g_{12}(s) = \frac{D_e(s)}{b_n}$$

wat na uitwerking oplevert:

$$\omega_{k+1}^2 = \frac{a_{n-1} \cdot b_0}{a_1 \cdot b_n} \quad \text{en} \quad \omega_{k+1}^2 + \frac{a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{b_{n-2}}{b_n}$$

$N_e^*(s)$ en $D_o^*(s)$ krijgen hiermee de volgende vorm:

$$\begin{aligned} N_e^*(s) &= b_n \cdot \omega_{k+1}^2 \cdot f(s) \\ D_o^*(s) &= a_{n-1} \cdot s \cdot f(s) \end{aligned}$$

waaruit volgt dat $F_{n-1}(s)$ maximaal zichtbaar minimumresistief is. Daar $F_{n-1}(s)$ van oneven graad is in teller en noemer, kunnen we deze immitantiefunctie volgens hoofdstuk I.1 realiseren met een L-segment (één der vier types) afgesloten met een weerstand in combinatie met een reactantie.

We onderzoeken nog even $N_o^*(s)$ en $D_e^*(s)$ m.b.v. (9):

$$\begin{aligned} N_o^*(s) &= D_o(s) - \frac{b_n}{a_{n-1}} s N_e(s) + \frac{a_n \cdot b_n}{a_{n-1}} (s^2 + \omega_{k+1}^2) f(s) \\ &= f(s) \left\{ \frac{a_n b_n}{a_{n-1}} (s^2 + \omega_{k+1}^2) - \frac{h_n(\omega^2)}{s a_{n-1}} \right\} + \frac{b_n \omega_{k+1}^2}{s a_{n-1}} N_e(s) \\ D_e^*(s) &= N_e(s) - a_n (s^2 + \omega_{k+1}^2) f(s) \end{aligned}$$

waaruit blijkt dat $N_o^*(s)$ en $D_e^*(s)$ de factor $f(s)$ niet bevatten als produkt-term (behalve als $N_e(s)$ de factor $f(s)$ bevat, wat impliceert dat $D_o(s)$ deze factor eveneens bevat; $F_n(s)$ wordt dan biquadratisch en behoort niet tot de hierboven besproken klasse).

I.2.2 DE TWEEDE FORM VAN DE GEMODIFICEERDE KETTINGBREUKONTWIKKELING

$F_n(s)$ wordt gesplitst in $F_n'(s)$ en $F_n''(s)$, z.d.d. $F_n''(s)$ een nulpunt voor $s = 0$ bevat:

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \frac{\frac{a_0}{b_0} D_e(s)}{D_e(s) + D_o(s)} + \frac{N_e(s) - \frac{a_0}{b_0} D_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \\ &\stackrel{!}{=} F_n'(s) + F_n''(s) \end{aligned}$$

$F_n'(s)$ delen door $\frac{a_0}{b_0} \cdot D_e(s)$:

$$F_n'(s) = \frac{1}{\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_0}{a_0} \frac{D_e(s)}{D_e(s)}}$$

Van $1/F_n''(s)$ splitsen we de pool voor $s = 0$ af:

$$F_n''(s) = \frac{1}{\frac{b_0}{a_1 s} + F_{n-1}(s)} \quad \text{waarin}$$

$$F_{n-1}(s) = \frac{[D_e(s) - \frac{b_0}{a_1 s} N_0(s)]/s + [D_e(s) - \frac{b_0}{a_1 s} \{N_e(s) - \frac{a_0}{b_0} D_e(s)\}]/s}{[N_e(s) - \frac{a_0}{b_0} D_e(s)]/s + [N_0(s)]/s}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{N_0^*(s)}{D_0^*(s)} + \frac{N_e^*(s)}{D_e^*(s)}$$

waarvan teller en noemer van graad $(n-1)$ zijn.

M.b.v. (6) verkrijgen we:

$$N_e^*(s) = [D_e(s) - \frac{b_0}{a_1 s} \{N_e(s) - \frac{a_0}{b_0} D_e(s)\}]/s$$

$$N_0^*(s) = [D_e(s) - \frac{b_0}{a_1 s} N_0(s)]/s = f(s) [b_n g_{11}(s) - \frac{a_{n-1} b_0}{a_1} g_{11}(s)]/s$$

$$D_e^*(s) = [N_0(s)]/s = f(s) \cdot a_{n-1} g_{11}(s) \quad (11)$$

$$D_0^*(s) = [N_e(s) - \frac{a_0}{b_0} D_e(s)]/s$$

en we "zien" dat de minimumresistiviteit voor $k \omega^2$ - waarden behouden blijft. $F_n(s)$ als impedantiefunctie gerealiseerd levert dezelfde netwerkstructuur op als die van het L-segment l_b , afgesloten met de impedantie $Z_{n-1}(s) = 1/F_{n-1}(s)$; voor $F_n(s)$ als admittantiefunctie de netwerkstructuur van het L-segment ll_b , afgesloten met de impedantie $Z_{n-1}(s) = F_{n-1}(s)$. Het speciale geval $k = \frac{1}{2}n-1$ (maximaal zichtbare minimumresistiviteit) levert:

$$N_0^*(s) = f(s) [b_n (s^2 + \frac{a_{n-1} b_0}{a_1 b_n}) - \frac{a_{n-1} b_0}{a_1}]/s = s f(s) \cdot b_n$$

$$D_e^*(s) = a_{n-1} f(s)$$

zodat $F_{n+1}(s)$ maximaal zichtbaar minimumresistief is. Tevens is $F_{n+1}(s)$ van oneven graad in teller en noemer, zodat $F_{n+1}(s)$ m.b.v. de procedure uit hoofdstuk I.1 gesynthetiseerd kan worden met één L-segment, afgesloten met een weerstand in combinatie met een reactantie.

I.3 HET BENODIGDE AANTAL ELEMENTEN (R,L,C)

Aangetoond is dat een immitantiefunctie $F_i(s)$, van willekeurige en gelijke graad i in teller en noemer en zichtbaar minimumresistief voor $k \omega^2$ -waarden, zodanig in een breuk is te ontwikkelen dat een nieuwe functie $F_{i-1}(s)$ wordt gecreëerd met graad $i-1$ en zichtbaar minimumresistief voor $k \omega^2$ -waarden. Als $F_{n+1}(s)$ (met n is even) volledig in een gemodificeerde kettingbreuk ontwikkeld wordt, ontstaat de reeks:

$$F_{n+1}(s) \rightarrow F_n(s) \rightarrow F_{n-1}(s) \rightarrow \dots \rightarrow F_i(s) \rightarrow \dots \rightarrow F_2(s)$$

waarin $F_2(s)$ een maximaal zichtbaar minimumresistieve immitantiefunctie van oneven graad in teller en noemer voorstelt, dus waarvoor geldt:

$$k = \frac{l-1}{2} \quad \text{ofwel} \quad l = 2k+1$$

Iedere $F_i(s)$ is voor $i = n+1, n, \dots, l$ zichtbaar minimumresistief voor $k \omega^2$ -waarden en iedere stap $F_i(s) \rightarrow F_{i-1}(s)$ voegt één L-segment toe aan het laddernetwerk. Voor realisatie van $F_2(s)$ is nog één L-segment vereist plus een $2k$ -orde reactantie parallel aan of in serie met een weerstand. In totaal bestaat het laddernetwerk dus uit $n+2-l = n+1-2k$ L-segmenten. De stap $F_i(s) \rightarrow F_{i-1}(s)$ levert een i -de orde reactantie op plus één reactief element plus één weerstand; ofwel hiervoor zijn $i+1$ reactieve elementen en één weerstand vereist.

Het totaal aan reactieve elementen wordt dus:

$$2k + \sum_{i=l+1}^{n+2} i = 2k + \sum_{i=2k+2}^{n+2} i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 2k^2 - k + 2$$

Het totale aantal weerstanden bedraagt: $n+2-2k$

en het totale aantal elementen is dus: $\frac{1}{2}n(n+7) - k(2k+3) + 4$

Startte de reeks met $F_n(s)$ (die van even graad in teller en noemer is), dan moet hiervan het aantal elementen dat het eerste L-segment bevat worden afgetrokken: $n+2$ reactieve elementen en één weerstand.

Het totale aantal elementen dat voor realisatie van $F_n(s)$ nodig is wordt

dan: $\frac{1}{2}n(n+5) - 2k^2 - 3k + 1$ waarvan $n+1-2k$ weerstanden en $\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 2k^2 - k$ reactieve elementen.

We kunnen deze aantallen samenvatten voor een immitantiefunctie $F_n(s)$ die van willekeurige en gelijke graad n is in teller en noemer:

$$\begin{aligned} \text{Aantal reactieve elementen} &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 2k^2 - k \\ \text{Aantal weerstanden} &= \frac{n - 2k + 1}{2} + \\ \text{Totale aantal elementen} &= \frac{1}{2}n(n+5) - k(2k+3) + 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Voor b.v. $n = 10$ en $k = 2$, vereist een synthese

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10+5) - 2 \cdot (2 \cdot 2 + 3) + 1 = 62 \text{ elementen}$$

I.4 DE REALISEERBAARHEID VAN DE GEMODIFICEERDE KETTINGBREUKONTWIKKELING

Tot nog toe is stilzwijgend aangenomen dat de immitantiefuncties volgens de gebruikte procedure realiseerbaar zijn. Het zal echter blijken dat de voorwaarden hiertoe i.h.a. strenger zijn dan die welke volgen uit het positief reëel zijn van deze functies.

Een positief reële immitantiefunctie $F_i(s)$ (of $1/F_i(s)$) werd steeds gesplitst in een som van twee functies $F_i'(s)$ en $F_i''(s)$, z.d.d. de geïnverteerde van $F_i'(s)$ was te schrijven als de som van een constante en een reactantiefunctie. Onderzocht zal nu worden of $F_i'(s)$ zowel als $F_i''(s)$ positief reëel zijn.

Aangezien polen en nulpunten van $F_i(s)$ in het open linker s-halfvlak liggen en de noemer van $F_i'(s)$ zowel als $F_i''(s)$ identiek is aan óf de teller óf de noemer van $F_i(s)$, kunnen we ons onderzoek beperken tot de

$$\text{test } \text{Re } F_i'(j\omega) \geq 0 \quad \text{en} \quad \text{Re } F_i''(j\omega) \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega.$$

Daar $1/F_i'(s)$ een constante + reactantiefunctie is, is aan de eerste eis voldaan. Van $1/F_i''(s)$ wordt een pool voor $s = 0$ of $s = \infty$ afgesplitst en het resterende deel werd $F_{i-1}(s)$ genoemd.

$$\text{Dan wordt: } \text{Re } [1/F_i''(j\omega)] = \text{Re } F_{i-1}(j\omega)$$

Onderzocht zal dus worden of $\text{Re } F_{i-1}(j\omega) \geq 0$ voor iedere ω , en aangezien de noemer hiervan altijd positief is, kunnen we ons beperken tot de teller hiervan.

I.4.1 DE IMMITANTIEFUNCTIE VAN ONEVEN GRAAD IN TELLER EN NOEMER

Voor de teller van het reële deel van $F_{n+1}(j\omega)$ (met n is even) is afgeleid (2) en (3):

$$A_{n+1}(\omega^2) = [f(j\omega)]^2 \cdot h_{n+1}(\omega^2)$$

$$\text{met } h_{n+1}(\omega^2) = a_{n+1} b_{n+1} \omega^{2(n+1-2k)} + \dots + \frac{a_n^2 b_0}{a_0} \lambda_0^2$$

waarin λ_0 de coëfficiënt voor de laagste orde term (ω^0) in $g_{01}(j\omega)$ voorstelt.

Voor de eerste vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling leiden we af:

$$\text{Num} [\text{Re } F_n(j\omega)] = N_e^*(j\omega) D_e^*(j\omega) - N_o^*(j\omega) D_o^*(j\omega)$$

en vullen (4) in, waarna uitdrukking (3) gebruikt zal worden:

$$\begin{aligned} \text{Num} [\text{Re } F_n(j\omega)] &= \\ f(j\omega) [a_n g_{o1}(j\omega) \cdot N_e^*(j\omega) - b_{n+1} j\omega \{g_{o2}(j\omega) - g_{o1}(j\omega)\} D_o^*(j\omega)] &= \\ [f(j\omega)]^2 \cdot [h_{n+1}(\omega^2) - a_{n+1} b_{n+1} \omega^2 \{g_{o2}(j\omega)\}^2] & \quad (13) \end{aligned}$$

Hierin zijn de coëfficiënten voor de hoogste orde term van

$$h_{n+1}(\omega^2) \quad \text{en} \quad a_{n+1} b_{n+1} \omega^2 \{g_{o2}(j\omega)\}^2 \quad \text{identiek.}$$

Samenvattend:

$F_{n+1}(s)$ is een positief reële (afgekort: p.r.) functie en dus geldt:

$$h_{n+1}(\omega^2) \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

$F_n(s)$ zal een p.r. functie zijn als geldt:

$$h_{n+1}(\omega^2) - a_{n+1} b_{n+1} \omega^2 \{g_{o2}(j\omega)\}^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega \quad (14)$$

Voor de tweede vorm leiden we af:

$$\text{Num} [\text{Re } F_n(j\omega)] = N_e^*(j\omega) \cdot D_e^*(j\omega) - N_o^*(j\omega) \cdot D_o^*(j\omega)$$

en vullen (6) in, waarna (3) weer gebruikt zal worden:

$$\begin{aligned} \text{Num} [\text{Re } F_n(j\omega)] &= \\ f(j\omega) \cdot [b_{n+1} g_{o2}(j\omega) N_e^*(j\omega) - \frac{1}{j\omega} \{a_n g_{o1}(j\omega) - \frac{a_o b_{n+1}}{b_1} g_{o2}(j\omega)\} D_o^*(j\omega)] &= \\ [f(j\omega)]^2 [h_{n+1}(\omega^2) - \frac{a_n^2 b_o}{a_o} \{g_{o1}(j\omega)\}^2] / \omega^2 & \end{aligned}$$

De coëfficiënten voor de laagste orde term van $h_{n+1}(\omega^2)$ en $\frac{a_n^2 b_o}{a_o} [g_{o1}(j\omega)]^2$ zijn identiek.

Samenvattend:

$F_{n+1}(s)$ is een p.r. functie en dus geldt:

$$h_{n+1}(\omega^2) \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

$F_n(s)$ zal een p.r. functie zijn als geldt:

$$\left[h_{n+1}(\omega^2) - \frac{a_n^2 b_0}{a_0} \{g_{01}(j\omega)\}^2 \right] / \omega^2 \geq 0 \text{ voor iedere } \omega \quad (15)$$

1.4.2 DE IMMITANTIEFUNCTIE VAN EVEN GRAAD IN TELLER EN NOEMER

Voor de teller van het reële deel van $F_n(j\omega)$ (n is even) is afgeleid (8) met (9):

$$A_n(\omega^2) = [f(j\omega)]^2 h_n(\omega^2)$$

met
$$h_n(\omega^2) = a_n b_n \omega^{2(n-2k)} + \dots + \frac{a_0 b_n^2}{b_0} \lambda_1^2$$

waarin λ_1 de coëfficiënt voor de laagste orde term in $g_{12}(j\omega)$ voorstelt.

Voor de eerste vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling wordt afgeleid:

$$\text{Num} [\text{Re } F_{n-1}(j\omega)] = N_e^*(j\omega) D_e^*(j\omega) - N_o^*(j\omega) D_o^*(j\omega)$$

m.b.v. (10) en vervolgens (9) wordt dit:

$$\text{Num} [\text{Re } F_{n-1}(j\omega)] =$$

$$f(j\omega) [b_n \{ g_{12}(j\omega) + \omega^2 g_{11}(j\omega) \} D_e^*(j\omega) - j\omega a_n g_{11}(j\omega) N_o^*(j\omega)] =$$

$$[f(j\omega)]^2 [h_n(\omega^2) - a_n b_n \{ g_{12}(j\omega) \}^2]$$

De coëfficiënten voor de hoogste orde term van $h_n(\omega^2)$ en $a_n b_n [g_{12}(j\omega)]^2$ zijn identiek.

Samenvattend:

$F_n(s)$ is een p.r. functie en dus geldt:

$$h_n(\omega^2) \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

$F_{n-1}(s)$ zal een p.r. functie zijn als geldt:

$$h_n(\omega^2) - a_n b_n [g_{12}(j\omega)]^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega \quad (16)$$

Voor de tweede vorm leiden we eveneens af:

$$\text{Num} [\text{Re } F_{n-1}(j\omega)] = N_e^*(j\omega) D_e^*(j\omega) - N_o^*(j\omega) D_o^*(j\omega)$$

en vullen (11) in en gebruiken vervolgens (9):

$$\text{Num} [\text{Re } F_{n-1}(j\omega)] =$$

$$f(j\omega) \left[a_n g_{11}(j\omega) N_e^*(j\omega) - \frac{1}{j\omega} \left\{ b_n g_{12}(j\omega) - \frac{a_n b_o}{a_1} g_{11}(j\omega) \right\} D_o^*(j\omega) \right] =$$

$$\left[f(j\omega) \right]^2 \left[h_n(\omega^2) - \frac{a_o b_n^2}{b_o} \{ g_{12}(j\omega) \}^2 \right] / \omega^2$$

De coëfficiënten voor de laagste orde term van $h_n(\omega^2)$ en $\frac{a_o b_n^2}{b_o} [g_{12}(j\omega)]^2$ zijn identiek.

Samenvattend:

$F_n(s)$ is een p.r. functie en er geldt dus:

$$h_n(\omega^2) \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

$F_{n-1}(s)$ zal een p.r. functie zijn als geldt:

$$\left[h_n(\omega^2) - \frac{a_o b_n^2}{b_o} \{ g_{12}(j\omega) \}^2 \right] / \omega^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega \quad (17)$$

I.5 CONCLUSIES

Deze abstracte beschouwing over zichtbaar minimumresistieve immitantiefuncties laat zien wat een gemodificeerde kettingbreukontwikkeling is en hoe hieruit een reeks van functies ontstaat die in graad steeds lager worden. De netwerkstructuur die hieruit voortvloeide, bleek een cascade van L-segmenten te zijn, waarbij ieder L-segment slechts één der types I_a, I_b, II_a, II_b kon zijn. Tevens kan het aantal elementen dat deze synthese vereist voorspeld worden.

Stel $F_n(s)$ is een immitantiefunctie van gelijke en willekeurige graad n in teller en noemer, en is zichtbaar minimumresistief voor k ω^2 -waarden.

Dan geldt: $Num [Re F_n(j\omega)] = [f(j\omega)]^2 h_n(\omega^2)$

Wordt $F_n(s)$ in een gemodificeerde kettingbreuk ontwikkeld, dan ontstaat

$$\text{een reeks } F_n(s) \rightarrow F_{n-1}(s) \rightarrow \dots \rightarrow F_i(s) \rightarrow \dots \rightarrow F_{2k+1}(s)$$

waarin $F_i(s)$ van graad i is in teller en noemer en $F_{2k+1}(s)$ maximaal zichtbaar minimumresistief is.

We kunnen nu concluderen:

1°) $F_i(s)$ is zichtbaar minimumresistief voor k ω^2 -waarden
voor $i = n, n-1, \dots, 2k+1$

2°) $Num [Re F_i(j\omega)] = [f(j\omega)]^2 h_i(\omega^2)$
waarin $h_i(\omega^2)$ het verschil is van $h_{i+1}(\omega^2)$ en een andere functie van ω^2 .

3°) $F_n(s)$ is realiseerbaar indien

$$h_{2k+1}(\omega^2) \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega.$$

De diverse relaties die in dit hoofdstuk zijn afgeleid geven ons een snellere toegang tot de "praktischere" gevallen.

II EEN BIQUINTISCHE IMMITANTIEFUNCTIE, ZICHTBAAR MINIMUMRESISTIEF VOOR EEN ω^2 - WAARDE

De biquintische immitantiefunctie

$$F_S(s) = \frac{N_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)} = \frac{s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^5 + b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

is zichtbaar minimumresistief voor één ω^2 - waarde, d.w.z. $N_e(s)$ en $D_o(s)$ bevatten een gemeenschappelijk polynoom $f(s) = s^2 + \omega^2$:

$$\begin{aligned} N_e(s) &= a_4 s^4 + a_2 s^2 + a_0 \stackrel{!}{=} a_4 f(s) \cdot g_{o1}(s) \\ D_o(s) &= s^5 + b_3 s^3 + b_1 s \stackrel{!}{=} s \cdot f(s) \cdot g_{o2}(s) \end{aligned} \quad (18)$$

waarin $g_{o1}(s) \stackrel{!}{=} s^2 + \omega_2^2$ en $g_{o2}(s) \stackrel{!}{=} s^2 + \omega_3^2$

Voor $F_S(s)$ is afgeleid de formule (3):

$$a_4 g_{o1}(j\omega) \cdot D_e(j\omega) - j\omega g_{o2}(j\omega) N_o(j\omega) \equiv f(j\omega) h_S(\omega^2) \quad (19)$$

met $h_S(\omega^2) \stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^3 d_i \cdot \omega^{2i} \geq 0$ voor iedere ω .

M.b.v. de vergelijkingen (18) en (19) kunnen de coëfficiënten van de polynomen $f(s)$, $g_{o1}(s)$, $g_{o2}(s)$, $h_S(\omega^2)$ uitgedrukt worden in a_i en b_i met $i = 0, \dots, 5$.

$F_S(s)$ wordt in een kettingbreuk ontwikkeld, zoals beschreven in hoofdstuk I.1, zowel in de eerste als de tweede vorm. Hieruit komt een biquartische immitantiefunctie $F_4(s)$ voort.

II.1 DE REALISEERBAARHEID VAN DE STAP $F_S(s) \rightarrow F_4(s)$

De relaties (18) bevatten 3 onbekenden ω_i^2 ($i=1,2,3$) die met 4 vergelijkingen worden opgelost, zodat er tussen de coëfficiënten a_i en b_i een relatie moet gelden.

Daar $f(s) = \frac{N_e(s)}{a_4 g_{o1}(s)} = \frac{D_o(s)}{s g_{o2}(s)}$ volgt:

$$\begin{aligned} a_4 s^6 + a_4 (b_3 + \omega_2^2) s^4 + a_4 (b_1 + b_3 \omega_2^2) s^2 + a_4 b_1 \omega_2^2 &\equiv \\ a_4 s^6 + (a_2 + a_4 \omega_3^2) s^4 + (a_0 + a_2 \omega_3^2) s^2 + a_0 \omega_3^2 &\equiv \end{aligned}$$

Hieruit leiden we af:

$$\begin{aligned}\omega_2^2 &= \frac{a_0}{a_4} \cdot \frac{a_4 b_3 - a_2}{a_4 b_1 - a_0} = \frac{a_0}{a_4} \cdot \frac{a_4 b_1 - a_0}{a_2 b_1 - a_0 b_3} \\ \omega_3^2 &= b_1 \frac{a_4 b_3 - a_2}{a_4 b_1 - a_0} = b_1 \frac{a_4 b_1 - a_0}{a_2 b_1 - a_0 b_3}\end{aligned}\tag{20}$$

en de coëfficiëntrelatie:

$$(a_4 b_1 - a_0)^2 = (a_4 b_3 - a_2)(a_2 b_1 - a_0 b_3)\tag{21}$$

ω_1^2 kan nu snel m.b.v. (18) bepaald worden:

$$s^4 + \frac{a_2}{a_4} s^2 + \frac{a_0}{a_4} \equiv s^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2) s^2 + \omega_1^2 \omega_2^2$$

$$s^4 + b_3 s^2 + b_1 \equiv s^4 + (\omega_1^2 + \omega_3^2) s + \omega_1^2 \omega_3^2$$

waaruit valt af te leiden:

$$\omega_1^2 = \frac{a_4 b_1 - a_0}{a_4 b_3 - a_2} = \frac{a_2 b_1 - a_0 b_3}{a_4 b_1 - a_0}\tag{22}$$

$$\text{en } \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{a_2}{a_4} \quad ; \quad \omega_1^2 + \omega_3^2 = b_3\tag{23}$$

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = \frac{a_0}{a_4} \quad ; \quad \omega_1^2 \omega_3^2 = b_1$$

$$\text{Uit (20) volgt: } \omega_2^2 = \frac{a_0}{a_4 b_1} \omega_3^2\tag{24}$$

Relatie (19) bevat 4 onbekenden d_i ($i=0,1,2,3$) die m.b.v. 5 vergelijkingen worden opgelost, zodat we weer een coëfficiëntrelatie (van a_i 's en b_i 's) kunnen verwachten:

$$\begin{aligned}
 & -\omega^8 - \omega^6 (a_4 b_4 - a_3 - \omega_3^2) + \omega^4 (-a_1 - a_3 \omega_3^2 + a_4 b_2 + a_4 b_4 \omega_2^2) \\
 & - \omega^2 (a_4 b_0 + a_4 b_2 \omega_2^2 - a_1 \omega_3^2) + a_4 b_0 \omega_2^2 \equiv \\
 & - d_3 \omega^8 - \omega^6 (d_2 - d_3 \omega_1^2) + \omega^4 (-d_1 + d_2 \omega_1^2) \\
 & - \omega^2 (d_0 - d_1 \omega_1^2) + d_0 \omega_1^2
 \end{aligned}$$

en we leiden af met gebruikmaking van (23):

$$\begin{aligned}
 d_3 &= 1 \\
 d_2 &= a_4 b_4 - a_3 + b_3 - 2 \omega_3^2 \\
 d_0 &= \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_2^4 = \frac{a_2 b_0}{b_1} \omega_3^2 - a_4 b_0 = \frac{a_0 b_0}{b_1^2} \omega_3^4 \\
 d_1 &= \frac{\omega_3^2}{b_1} \left\{ \frac{\omega_3^2}{b_1} (a_1 b_1 - a_0 b_2 + a_2 b_0) - 2 a_4 b_0 \right\}
 \end{aligned} \tag{25}$$

en de coëfficiëntrelatie:

$$\omega_1^2 \frac{\omega_1^2 - \omega_3^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = -a_4 \frac{b_4 \omega_1^4 - b_2 \omega_1^2 + b_0}{\omega_1^4 - a_3 \omega_1^2 + a_1} \tag{26}$$

waarin we voor ω_2^2 en ω_3^2 de uitdrukkingen (20) en voor ω_1^2 de uitdrukking (22) kunnen invullen.

Deze coëfficiëntrelatie was eveneens (en sneller) af te leiden uit de eis:

$$\left. \frac{d[\operatorname{Re} F_s(j\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_1} = 0$$

De eerste vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling is realiseerbaar, indien (14) geldt, n.l.

$$h_5(\omega^2) - \omega^2 [g_{02}(j\omega)]^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

$$\text{ofwel: } \omega^6 + d_2 \omega^4 + d_1 \omega^2 + d_0 - \omega^2 [\omega^2 - \omega_3^2]^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

uitwerken:

$$(d_2 + 2\omega_3^2) \omega^4 + (d_1 - \omega_3^4) \omega^2 + d_0 \geq 0$$

voor iedere ω

Hieruit volgen 3 eisen:

$$\begin{aligned}
 1^\circ) \quad & d_2 + 2\omega_3^2 \geq 0 \\
 2^\circ) \quad & -d_1 + \omega_3^4 \leq 2\sqrt{(d_2 + 2\omega_3^2)d_0} \\
 3^\circ) \quad & d_0 \geq 0
 \end{aligned} \tag{27}$$

Aan de derde eis $d_0 = \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_3^4 \geq 0$ is voldaan.

Met gebruik van (25) houden we de volgende 2 eisen over:

$$\begin{aligned}
 1^\circ) \quad & a_4 b_4 - a_3 + b_3 \geq 0 \\
 2^\circ) \quad & a_1 b_1 - a_0 b_2 + a_2 b_0 \geq b_1^2 + \frac{2b_1}{\omega_3^2} (a_4 b_0 - \sqrt{a_0 b_0 (a_4 b_4 - a_3 + b_3)})
 \end{aligned} \tag{28}$$

De tweede vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling is realiseerbaar, als (15) geldt, n.l.

$$[h_s(\omega^2) - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \{g_{01}(j\omega)\}^2] / \omega^2 \geq 0 \text{ voor iedere } \omega$$

$$\text{ofwel: } [\omega^6 + d_2 \omega^4 + d_1 \omega^2 + d_0 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} (\omega^2 - \omega_3^2)^2] / \omega^2 \geq 0$$

met $d_0 = \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_3^4$ volgt:

$$\omega^4 + (d_2 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0}) \omega^2 + (d_1 + 2 \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_3^2) \geq 0 \text{ voor iedere } \omega$$

Hieruit volgen 2 eisen:

$$\begin{aligned}
 1^\circ) \quad & d_1 \geq -2 \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_3^2 \\
 2^\circ) \quad & d_2 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \geq -2 \sqrt{d_1 + 2 \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_3^2}
 \end{aligned} \tag{29}$$

welke met gebruik van (24) en (25) zijn om te vormen tot:

$$\begin{aligned}
 1^\circ) \quad & a_1 b_1 - a_0 b_2 + a_2 b_0 \geq 0 \\
 2^\circ) \quad & a_4 b_4 - a_3 + b_3 \geq \frac{a_4^2 b_0}{a_0} + 2 \frac{\omega_3^2}{b_1} (b_1 - \sqrt{a_1 b_1 + a_2 b_0 - a_0 b_2})
 \end{aligned} \tag{30}$$

De eisen (28) en (30) korten we af door te definiëren:

$$\eta_0 \stackrel{\text{!}}{=} a_4 b_4 - a_3 + b_3 \quad \text{en} \quad \eta_1 \stackrel{\text{!}}{=} a_1 b_1 - a_0 b_2 + a_2 b_0$$

zodat we krijgen voor de

eerste
vorm

$$1^\circ) \quad \eta_0 \geq 0$$

(31^a)

$$2^\circ) \quad \eta_1 \geq b_1^2 + \frac{2b_1}{\omega_3^2} (a_4 b_0 - \sqrt{a_0 b_0 \eta_0})$$

(31^b)

tweede
vorm

$$\begin{array}{l} 1^\circ) \quad \eta_1 \geq 0 \\ 2^\circ) \quad \eta_0 \geq \frac{a_4^2 b_0}{a_0} + 2 \frac{\omega_3^2}{b_1} (b_1 - \sqrt{\eta_1}) \end{array}$$

(32^a)

(32^b)

We vragen ons af of de eisen (31) noodzakelijk en voldoende zijn voor de realiseerbaarheid van $F_s(s) \rightarrow F_u(s)$ volgens de eerste vorm.

Er geldt: $d_2 = \eta_0 - 2\omega_3^2$

Kies: $d_1 = \omega_3^4 - 2\sqrt{d_0 \eta_0} + \epsilon$ waarin $\eta_0 \geq 0$ en $\epsilon \geq 0$

dan is aan (27) voldaan en dus ook aan (31).

Deze gegevens invullen in $h_s(\omega^2) = \sum_{i=0}^3 d_i \omega^{2i}$:

$$\begin{aligned} h_s(\omega^2) &= \omega^6 + (\eta_0 - 2\omega_3^2)\omega^4 + (\omega_3^4 - 2\sqrt{d_0 \eta_0} + \epsilon)\omega^2 + d_0 \\ &= \omega^2 (\omega^2 - \omega_3^2)^2 + \eta_0 (\omega^2 - \sqrt{\frac{d_0}{\eta_0}})^2 + \epsilon \omega^2 \end{aligned} \quad (33)$$

en aangezien $\eta_0 \geq 0$ en $\epsilon \geq 0$ volgt dat $h_s(\omega^2) \geq 0$ voor iedere ω

Voorwaarden (31) zijn dus voldoende voor de realiseerbaarheid van $F_s(s) \rightarrow F_u(s)$ volgens de eerste vorm.

Echter, andersom volgt (31) niet uit de voorwaarde $h_s(\omega^2) \geq 0$ voor iedere ω
Stel n.l. dat

$$h_s(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 (\omega^2 + \frac{d_0}{\omega_0^4})$$

$F_s(s)$ is nu minimumresistief voor $\omega^2 = \omega_0^2$ (zichtbaar)
en voor $\omega^2 = \omega_0^2$ (niet zichtbaar).

Voorwaarde (31) volgt hieruit als er een $\eta_0 \geq 0$ en een $\epsilon \geq 0$ gevonden kan worden, z.d.d. vergelijking (33) voor $\omega^2 = \omega_0^2$ wordt:

$$\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega_3^2) + \eta_0 (\omega_0^2 - \sqrt{\frac{d_0}{\eta_0}})^2 + \epsilon \omega_0^2 = 0$$

Dit is alleen mogelijk als $\omega_0^2 = \omega_3^2$, $\eta_0 = 0$, $\epsilon = 0$

of $\omega_0^2 = \omega_3^2 = \sqrt{\frac{d_0}{\eta_0}}$, $\epsilon = 0$

Voor $\omega_0^2 = \omega_3^2$ wordt $F_s(s)$ maximaal zichtbaar minimumresistief en deze voorwaarde is niet aan $F_s(s)$ opgelegd.

De voorwaarden (31^a) en (31^b) volgen dus niet uit $h_s(\omega^2) \geq 0$ en zijn hiermee noodzakelijk.

Met een analoge redenering is aan te tonen dat de eisen (32) noodzakelijk en voldoende zijn voor de realiseerbaarheid van $F_s(s) \rightarrow F_4(s)$ volgens de tweede vorm.

Een korter bewijs hiervoor:

de tweede vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling toepassen op $F_s(s)$ is hetzelfde als de eerste vorm toepassen op $F_s(1/s)$

Daar de eisen voor realiseerbaarheid van $F_s(s) \rightarrow F_4(s)$ noodzakelijk en voldoende zijn, zijn de eisen voor realiseerbaarheid van $F_s(1/s) \rightarrow F_4(1/s)$ ook noodzakelijk en voldoende.

Aan het eind van dit hoofdstuk zullen voorbeelden van de immitantiefunctie $F_s(s)$ (zichtbaar minimumresistief voor één ω^2 -waarde) worden gecreëerd. Omdat we zeker willen zijn dat deze functies p.r. zijn, moet onderzocht worden of

$$h_s(\omega^2) = \sum_{i=0}^3 d_i \omega^{2i} \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

wat voor $x \stackrel{!}{=} \omega^2$ wordt:

$$h_s(x) = \sum_{i=0}^3 d_i x^i \geq 0 \quad \text{voor } 0 \leq x \leq \infty$$

Voor dit onderzoek zal gebruik worden gemaakt van het Sturmtheorema. Dit theorema geeft een methode aan om het aantal reële nulpunten van een polynoom op een gegeven interval te berekenen. Voor een beschrijving en verklaring van dit theorema: zie appendix A.

Na enig rekenwerk verkrijgen we de volgende Sturmfuncties voor $f_0(x) \stackrel{!}{=} h_s(x)$:

$$f_0(x) = x^3 + d_2 x^2 + d_1 x + d_0$$

$$f_1(x) = 3x^2 + 2d_2 x + d_1$$

$$f_2(x) = \frac{2}{3} a x - b \tag{34}$$

$$f_3(x) = -d_1 - \frac{3b}{2a} \left(2d_2 + \frac{9b}{2a} \right)$$

waarin $a = \frac{d_2^2}{3} - d_1$

en $b = d_0 - \frac{d_1 \cdot d_2}{9}$

Het Sturmtheorema zegt dat het aantal enkelvoudige reële nulpunten van $f_0(x)$ op het interval $0 \leq x < \infty$ gelijk is aan de absolute waarde van het verschil van het aantal tekenvariaties ν_0 in de rij $f_0(0), f_1(0), f_2(0), f_3$ en het aantal tekenvariaties ν_∞ in de rij $f_0(\infty), f_1(\infty), f_2(\infty), f_3$.
 Als één der functies $f_i(x) \equiv 0$ dan bevat $f_0(x)$ één of meer meervoudige nulpunten.

We zullen dit met een voorbeeld illustreren.
 Stel b.v. dat

$$f_0(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$$

De resterende Sturmfuncties berekenen we m.b.v. (34):

$$f_1(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

$$f_2(x) = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$$

$$f_3(x) = -25$$

Geen enkele $f_i(x) \equiv 0$, zodat $f_0(x)$ geen meervoudige nulpunten bevat.

$f_i(0)$ en $f_i(\infty)$ zetten we in de volgende tabel:

	f_0	f_1	f_2	f_3	
$x=0$	+	+	-	-	$\Rightarrow \nu_0 = 1$
$x=\infty$	+	+	+	-	$\Rightarrow \nu_\infty = 1$

Aangezien $|\nu_0 - \nu_\infty| = 0$, heeft $f_0(x)$ op het interval $0 \leq x < \infty$ geen reële nulpunten, zodat volgt:

$$f_0(x) > 0 \quad \text{voor} \quad 0 \leq x < \infty$$

II.2 DE REALISEERBAARHEID VAN DE STAP $\overline{F}_4(s) \rightarrow \overline{F}_3(s)$

Ervan uitgaande dat de stap $\overline{F}_5(s) \rightarrow \overline{F}_4(s)$ realiseerbaar is, onderzoeken we thans of de stap $\overline{F}_4(s) \rightarrow \overline{F}_3(s)$ realiseerbaar is.

$\overline{F}_4(s)$ is een maximaal zichtbare minimumresistieve biquartische immittantiefunctie, die realiseerbaar is als aan één der stelsels voorwaarden, afgeleid door de heer Pijs (lit. [2]) is voldaan.

De theorie van hoofdstuk I zal gebruikt worden om voorwaarden af te leiden, die uitgedrukt worden in de coëfficiënten a_i en b_i van $\overline{F}_5(s)$.

Stel dat de eerste vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling van $\overline{F}_5(s) \rightarrow \overline{F}_4(s)$ realiseerbaar is, zodat aan de voorwaarden (31) is voldaan.

$$\overline{F}_4(s) = \frac{N_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)} \quad \text{voldoet volgens (4) aan:}$$

$$N_e^*(s) = \frac{\eta_0}{a_4} s^4 + \frac{a_4 b_2 - a_1 + b_1}{a_4} s^2 + b_0$$

$$N_o^*(s) = \frac{a_4 b_3 - a_2}{a_4} s^3 + \frac{a_4 b_1 - a_0}{a_4} s$$

$$D_e^*(s) = a_4 s^4 + a_2 s^2 + a_0 = a_4 \cdot f(s) g_{01}(s)$$

$$D_o^*(s) = (a_3 - b_3) s^3 + (a_1 - b_1) s$$

(35)

voor $A_u(\omega^2) \stackrel{!}{=} \text{Num}[\text{Re } \overline{F}_4(j\omega)]$ is afgeleid:

$$A_u(\omega^2) = [f(j\omega)]^2 \cdot h_u(\omega^2)$$

waarin $h_u(\omega^2) = h_s(\omega^2) - \omega^2 \{g_{02}(j\omega)\}^2$

$$= \eta_0 \omega^4 + (d_1 - \omega_3^4) \omega^2 + d_0 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

Voorwaarden (31) volgen hieruit, die identiek zijn aan (27), welke we voor het gemak iets anders zullen schrijven:

$$1^\circ) \quad \eta_0 \geq 0 \quad (36)$$

$$2^\circ) \quad -d_1 + \omega_3^4 \leq 2 \eta_0 \omega_2^2 \sqrt{\frac{a_4^2 b_0}{a_0 \eta_0}} \quad (37)$$

De stap $\overline{F}_4(s) \rightarrow \overline{F}_3(s)$ is volgens de eerste vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling realiseerbaar, als aan (16) is voldaan:

$$h_u(\omega^2) - a_u' \cdot b_u' \cdot [g_{12}(j\omega)]^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

waarin m.b.v. (35): $a_u' = \frac{\eta_0}{a_u}$; $b_u' = a_u$; $g_{12}(j\omega) = g_{01}(j\omega) = -\omega^2 + \omega_2^2$

Deze gegevens in bovenstaande ongelijkheid invullen:

$$\eta_0 \omega^4 + (d_1 - \omega_3^4) \omega^2 + d_0 - \eta_0 (\omega^2 - \omega_2^2)^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

en uitwerken:

$$(d_1 - \omega_3^4 + 2\eta_0 \omega_2^2) \omega^2 + d_0 - \eta_0 \omega_2^4 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

Twee eisen volgen hieruit:

1°) $d_0 - \eta_0 \omega_2^4 \geq 0$ wat met $d_0 = \frac{a_u^2 b_0}{a_0} \omega_2^4$ wordt:

$$\frac{a_u^2 b_0}{a_0 \eta_0} \geq 1 \quad (38)$$

2°) $-d_1 + \omega_3^4 \leq 2\eta_0 \omega_2^2$ (39)

voorwaarde (37):

$$-d_1 + \omega_3^4 \leq 2\eta_0 \omega_2^2 \sqrt{\frac{a_u^2 b_0}{a_0 \eta_0}} \quad \text{is van kracht}$$

en als aan (38) ook nog voldaan is, blijkt dat eis (39) hieruit niet voortvloeit; wel andersom: uit (38) en (39) volgt (37).
Eis (39) wordt m.b.v. (24) en (25):

$$\eta_1 \geq b_1^2 + \frac{2b_1}{\omega_3^2} \left(a_u b_0 - \frac{a_0 \eta_0}{a_u} \right) \quad (40)$$

De stap $F_4(s) \rightarrow F_3(s)$ is volgens de tweede vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling realiseerbaar als (17) geldt:

$$\left[h_4(\omega^2) - \frac{a_0'(b_4')^2}{b_1'} \{g_{11}(j\omega)\}^2 \right] / \omega^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

waarin m.b.v. (35):

$$a_0' = b_0 ; \quad b_0' = a_0 ; \quad b_4' = a_4 ; \quad g_{12}(j\omega) = g_{01}(j\omega) = -\omega^3 + \omega_2^2$$

Deze gegevens in bovenstaande ongelijkheid invullen en uitwerken:

$$\left[\eta_0 \omega^4 + (d_1 - \omega_3^4) \omega^2 + d_0 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} (\omega^2 - \omega_2^2)^2 \right] / \omega^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

$$\left(\eta_0 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \right) \omega^2 + d_1 - \omega_3^4 + 2 \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_2^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

Hieruit volgen twee eisen:

$$1^\circ) \quad \eta_0 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \geq 0$$

$$\text{ofwel:} \quad \frac{a_0 \eta_0}{a_4^2 b_0} \geq 1 \quad (41)$$

$$2^\circ) \quad -d_1 + \omega_3^4 \leq 2 \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_2^2 \quad (42)$$

Voorwaarde (37) is van kracht, waarvan het rechter deel anders wordt geschreven:

$$-d_1 + \omega_3^4 \leq 2 \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_2^2 \sqrt{\frac{a_0 \eta_0}{a_4^2 b_0}}$$

Als aan (41) ook nog voldaan is, volgt (42) hier niet uit; wel andersom: uit (41) en (42) volgt (37).

Eis (42) wordt m.b.v. (24) en (25):

$$\eta_1 \geq b_1^2 \quad (43)$$

Stel nu dat de tweede vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling van $F_3(s) \rightarrow F_4(s)$ realiseerbaar is, zodat aan de voorwaarden (32) is voldaan. In dit geval voldoet

$$F_4(s) = \frac{N_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)} \quad \text{volgens (6) aan:}$$

$$N_e^*(s) = s^4 + \left(\frac{a_3 b_1 - a_0 b_4 + a_4 b_0}{b_1} \right) s^2 + \frac{\eta_1}{b_1}$$

$$N_o^*(s) = \left(\frac{a_4 b_1 - a_0}{b_1} \right) s^3 + \left(\frac{a_2 b_1 - a_0 b_3}{b_1} \right) s$$

$$D_e^*(s) = s^4 + b_3 s^2 + b_1 = f(s) g_{02}(s)$$

(44)

$$D_o^*(s) = \left(\frac{a_0 b_4 - a_4 b_0}{a_0} \right) s^3 + \left(\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_0} \right) s$$

Voor $A_u(\omega^2) \stackrel{!}{=} \text{Num}[Re F_4(j\omega)]$ is afgeleid:

$$A_u(\omega^2) = [f(j\omega)]^2 h_u(\omega^2)$$

waarin

$$h_u(\omega^2) = \left[h_s(\omega^2) - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \{g_{01}(j\omega)\} \right] / \omega^2$$

$$= \omega^4 + \left(d_2 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \right) \omega^2 + d_1 + 2 \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega^2 \gg 0 \text{ voor iedere } \omega$$

Hieruit volgden de voorwaarden (32), die identiek zijn aan (29), welke we anders opschrijven:

$$1^\circ) \quad \eta_1 \geq 0 \quad (45)$$

$$2^\circ) \quad d_2 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \geq -2 \omega_3^2 \sqrt{\frac{\eta_1}{b_1^2}} \quad (46)$$

De stap $F_4(s) \rightarrow F_3(s)$ is volgens de eerste vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling realiseerbaar, als (16) geldt:

$$h_u(\omega^2) - a_4' b_4' [g_{12}(j\omega)]^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

waarin m.b.v. (44):

$$a_4' = b_4' = 1 \quad ; \quad g_{12}(j\omega) = g_{02}(j\omega) = -\omega^2 + \omega_3^2$$

Waarmee de ongelijkheid wordt omgewerkt tot:

$$\omega^4 + (d_2 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0}) \omega^2 + d_1 + 2 \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_3^2 - (\omega^2 - \omega_3^2)^2 =$$

$$(d_2 + 2\omega_3^2 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0}) \omega^2 + d_1 - \omega_3^4 + 2 \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_3^2 \geq 0$$

voor iedere ω

Twee eisen volgen hieruit:

$$1^\circ) d_1 - \omega_3^4 + 2 \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_3^2 \geq 0$$

wat m.b.v. (24) en (25) wordt:

$$\eta_1 / b_1^2 \geq 1 \quad (47)$$

$$2^\circ) d_2 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \geq -2\omega_3^2 \quad (48)$$

voorwaarde (46)

$$d_2 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \geq -2\omega_3^2 \sqrt{\frac{\eta_1}{b_1^2}} \text{ is geldig,}$$

en als (47) ook geldt, volgt (48) hier niet uit; wel andersom: uit (47) en (48) volgt (46).

Eis (48) wordt m.b.v. (24) en (25):

$$\eta_0 \geq \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \quad (49)$$

De stap $F_4(s) \rightarrow F_3(s)$ is volgens de tweede vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling realiseerbaar, als (17) geldt:

$$[h_u(\omega^2) - \frac{a_0'(b_4')^2}{b_0'} \{g_{12}(j\omega)\}^2] / \omega^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

waarin m.b.v. (44):

$$a_0' = \eta_1 / b_1 \quad ; \quad b_0' = b_1 \quad ; \quad b_4' = 1 \quad ; \quad g_{12}(j\omega) = g_{02}(j\omega) = -\omega^2 + \omega_3^2$$

zodat deze ongelijkheid wordt:

$$\left[\omega^4 + (d_2 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0}) \omega^2 + d_1 + 2 \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \omega_3^2 - \frac{\eta_1}{b_1^2} (\omega^2 - \omega_3^2)^2 \right] / \omega^2 =$$

$$\left(1 - \frac{\eta_1}{b_1^2} \right) \omega^2 + \left(d_2 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} + 2 \frac{\eta_1 \omega_3^2}{b_1^2} \right) \geq 0$$

Hieruit volgen twee eisen:

$$1^\circ) \quad 1 - \eta_1 / b_1^2 \geq 0 \quad \text{ofwel} \quad \frac{b_1^2}{\eta_1} \geq 1 \quad (50)$$

$$2^\circ) \quad d_2 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \geq -2 \frac{\omega_3^2 \eta_1}{b_1^2} \quad (51)$$

Voorwaarde (46) is van kracht, waarvan het rechter deel anders wordt geschreven:

$$d_2 - \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \geq -2 \frac{\omega_3^2 \eta_1}{b_1^2} \sqrt{\frac{b_1^2}{\eta_1}}$$

Als (50) ook geldt, volgt (51) hier niet uit; wel andersom: uit (50) en (51) volgt (46).

Eis (51) werken we m.b.v. (25) om tot:

$$\eta_0 \geq \frac{a_4^2 b_0}{a_0} + 2 \frac{\omega_3^2}{b_1} \left(b_1 - \frac{\eta_1}{b_1} \right) \quad (52)$$

Er zijn nu 4 stelsels van eisen afgeleid, waarvan stelsel (41), (43) identiek blijkt te zijn met stelsel (47), (49).

Is aan één dezer stelsels van eisen voldaan, dan bleek $\bar{F}_5(s) \rightarrow \bar{F}_4(s)$ volgens de eerste en/of de tweede vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling ook steeds realiseerbaar te zijn, mits $\eta_0 \geq 0$ en/of $\eta_1 \geq 0$.

Als aan één dezer stelsels van eisen voldaan is, dan is de bicubische immitantiefunctie $\bar{F}_3(s)$ (die maximaal zichtbaar minimumresistief is) die hier uit voortvloeit zonder bijkomende voorwaarden in de eerste of de tweede vorm van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling realiseerbaar (zie lit.).

II.3 SAMENVATTING DER RESULTATEN

De resultaten van de vorige subhoofdstukken zullen nu gecomprimeerd worden weergegeven met behulp van de volgende afspraken:

$F_i(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_{i-1}(s)$ betekent:

de immitantiefunctie $F_i(s)$ van graad i in teller en noemer wordt in de eerste vorm van de gemodificeerde kettingbreuk ontwikkeld, waaruit een immitantiefunctie $F_{i-1}(s)$ voortvloeit, die van graad $(i-1)$ is in teller en noemer

De betekenis van $F_i(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_{i-1}(s)$ is hiermee ook duidelijk: in de voorgaande zin wordt "eerste" door "tweede" vervangen.

Noem $w_3^2 = b_1(a_4 b_3 - a_2) / (a_4 b_1 - a_0)$

$$\eta_0 = a_4 b_4 - a_3 + b_3$$

$$\eta_1 = a_1 b_1 - a_0 b_2 + a_2 b_0$$

$$L_0 = \frac{a_4^2 b_0}{a_0} + \frac{2 w_3^2}{b_1} (b_1 - \sqrt{\eta_1})$$

$$L_1 = b_1^2 + \frac{2 b_1}{w_3^2} (a_4 b_0 - \sqrt{a_0 b_0 \eta_0})$$

$$M_0 = \frac{a_4^2 b_0}{a_0} + \frac{2 w_3^2}{b_1} (b_1 - \eta_1 / b_1)$$

$$M_1 = b_1^2 + \frac{2 b_1}{w_3^2} (a_4 b_0 - a_0 \eta_0 / a_4)$$

De immitantiefunctie

$$F_5(s) = \frac{N_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)} = \frac{\sum_{i=0}^5 a_i s^i}{\sum_{i=0}^5 b_i s^i}$$

gekenmerkt door $\frac{N_e(s)}{D_o(s)} = \frac{a_4 (s^2 + w_3^2)}{s (s^2 + w_3^2)}$

is in een gemodificeerde kettingbreukontwikkeling realiseerbaar, als aan één der volgende stelsels van eisen is voldaan:

$$\eta_0 \geq 0 \wedge \eta_1 \geq L_1 \implies F_5(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_4(s)$$

$$\eta_1 \geq 0 \wedge \eta_0 \geq L_0 \implies F_5(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_4(s)$$

$$0 \leq \eta_0 \leq \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \wedge \eta_1 \geq M_1 \implies F_5(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_4(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3(s)$$

$$0 \leq \eta_1 \leq b_1^2 \wedge \eta_0 \geq M_0 \implies F_5(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_4(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_3(s)$$

$$\eta_0 \geq \frac{a_4^2 b_0}{a_0} \wedge \eta_1 \geq b_1^2 \implies \begin{cases} F_5(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_4(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_3(s) \\ F_5(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_4(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3(s) \end{cases}$$

(53)

11.4 VOORBEELDEN

Voorbeelden van de biquintische immitantiefunctie $F_S(s)$, zichtbaar minimumresistief voor één ω^2 -waarde, zijn moeilijk te vinden in de literatuur. Daarom is overgegaan tot de constructie van dergelijke functies, die de juistheid van de voorwaarden (53) zullen aantonen. Hierbij is uitgegaan van een biquartische admittantiefunctie, welke minimumresistief (niet zichtbaar) is voor $\omega^2 = 4$ (lit. [4]).

$$Y(s) = \frac{s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + 10}{s^4 + 1,5s^3 + 4s^2 + 2,4s + 1,6} \quad (56)$$

$$\text{met Num [Re } Y(j\omega)] = (\omega^2 - 4)^2 (\omega^4 - \omega^2 + 1) \quad (57)$$

De volgende procedure wordt toegepast:

De teller van $Y(s)$ wordt intact gehouden, de noemercoëfficiënten worden variabel gekozen en deze nieuwe $Y(s)$ wordt vermenigvuldigd met $(s+h)/(s+q)$. De zo ontstane biquintische immitantiefunctie wordt zichtbaar minimumresistief gemaakt voor $\omega^2 = 4$:

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \frac{s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + 10}{s^4 + as^3 + bs^2 + cs + d} \cdot \frac{s+h}{s+q} \\ &= \frac{s^5 + (h+4)s^4 + (4h+11)s^3 + (11h+14)s^2 + (14h+10)s + 10h}{s^5 + (q+a)s^4 + (qa+b)s^3 + (qb+c)s^2 + (qc+d)s + qd} \\ &= \frac{N_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)} \end{aligned}$$

Als $N_o(j^2) = 0$, dan volgt: $h = -9$

Als $N_e(j^2) = 0$, dan volgt: $h = 4/9$

De teller moet een Hurwitzpolynoom zijn, ofwel h moet positief zijn. Voor $h = 4/9$ bevat $N_e(s)$ de produktterm $(s^2 + 4)$. De a_i -coëfficiënten van de teller zijn hiermee bekend:

$$N_e(s) + N_o(s) = s^5 + \frac{40}{9}s^4 + \frac{115}{9}s^3 + \frac{170}{9}s^2 + \frac{146}{9}s + \frac{40}{9} \quad (58)$$

De b_i -coëfficiënten van de noemer worden zodanig gekozen, dat $F_5(s)$ zichtbaar minimumresistief is voor $\omega^2 = 4$.
Aan $F_5(s)$ moeten dan 2 beperkingen worden opgelegd:

$$1^\circ) D_o(j\omega) = 0 \quad \text{ofwel:} \quad d + qc = 4(b + qa) - 16 \quad (59)$$

2°) relatie (26):

$$\omega_1^2 \frac{\omega_1^2 - \omega_3^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = -a_4 \cdot \frac{b_4 \omega_1^4 - b_2 \omega_1^2 + b_0}{\omega_1^4 - a_3 \omega_1^2 + a_1}$$

$$\text{waarin } \omega_1^2 = 4; \quad \omega_2^2 = 1/4; \quad \omega_3^2 = \frac{b_1}{\omega_1^2} = \frac{d + qc}{4}$$

Uitwerking hiervan geeft:

$$c - \frac{qd}{4} = aq \left(4 + \frac{17}{15}\right) + b \left(\frac{17}{15} - q\right) + 4q - \frac{136}{15} \quad (60)$$

Door de 2 vergelijkingen (59) en (60) kunnen we van de 5 onbekenden a, b, c, d en q er nog 3 willekeurig kiezen. Dit garandeert welliswaar nog niet dat $F_5(s)$ een p.r. functie is.

De nulpunten van $F_5(s)$ liggen in het open linker s -halfvlak en

$$\text{de eis } A_5(\omega^2) = (\omega^2 - 4)^2 \cdot h_5(\omega^2) \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega,$$

$$\text{ofwel } h_5(\omega^2) \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega, \text{ is dus voldoende opdat } F_5(s)$$

een p.r.functie is.

De hierna volgende 6 voorbeelden van de immitantiefunctie

$$F_5(s) = \frac{s^5 + 40/9 s^4 + 115/9 s^3 + 170/9 s^2 + 146/9 s + 40/9}{s^5 + (q+a)s^4 + (qa+b)s^3 + (qb+c)s^2 + (qc+d)s + qd} \quad (61)$$

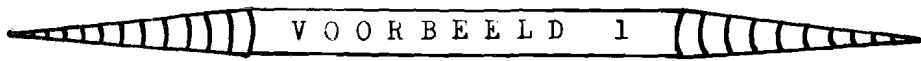
voldoen aan de vergelijkingen (58), (59) en (60), waarbij a, b en q willekeurig gekozen zijn.

Analytisch zowel als grafisch wordt aangetoond dat $h_5(\omega^2) \geq 0$, waarmee $F_5(s)$ positief reëel is.

M.b.v. de voorwaarden (53) zal voorspeld worden of $F_5(s) \rightarrow F_4(s)$ zowel als $F_5(s) \rightarrow F_4(s) \rightarrow F_3(s)$ realiseerbaar is.

De juistheid van deze voorspellingen wordt door synthese van $F_5(s)$ aangetoond en voor de stap $F_5(s) \rightarrow F_4(s)$ gebeurt dit tevens grafisch.

Bij het vele rekenwerk en het tekenen der grafieken is gebruik gemaakt van de rekenmachine.



De keuze $a = 3/2$, $b = 4$, $q = 4/9$ genereert de functie

$$F_S(s) = \frac{s^5 + \frac{40}{9}s^4 + \frac{115}{9}s^3 + \frac{170}{9}s^2 + \frac{146}{9}s + \frac{40}{9}}{s^5 + \frac{35}{18}s^4 + \frac{14}{3}s^3 + \frac{100}{45}s^2 + \frac{8}{3}s + \frac{32}{45}}$$

$$= \frac{N_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)}$$

waarin $N_e(s) = \frac{40}{9}(s^2+4)(s^2+\frac{1}{4})$
 en $D_o(s) = s(s^2+4)(s^2+\frac{2}{3})$

a , b en q zijn zodanig gekozen dat $F_S(s) = Y(s) \cdot \frac{s+4/9}{s+4/9}$

waarin $Y(s)$ voldoet aan (56).

Aangezien $Y(s)$ positief reëel is, is $F_S(s)$ dit ook.
 Met (57) volgt:

$$A_S(\omega^2) = (\omega^2-4)^2 (\omega^4 - \omega^2 + 1) (\omega^2 + \frac{16}{81})$$

$$= (\omega^2-4) (\omega^6 - \frac{65}{81}\omega^4 + \frac{65}{81}\omega^2 + \frac{16}{81})$$

Voor de grafische weergave van $A_S(\omega^2)$: zie bijlage pag. 1.

Na berekening volgt:

$\eta_0 = 0,53086$	$\frac{a_0^2 b_0}{a_0} = 3,16049$	$L_0 = 1,40662$	$M_0 = -2,65432$
$\eta_1 = 30,12346$	$b_1^2 = 7,11111$	$L_1 = 22,03269$	$M_1 = 20,14015$

en m.b.v. (53) concluderen we:

$F_5(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_4(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3(s)$ is realiseerbaar, alle andere combinaties niet

Door berekening van deze 8 getallen kunnen we voorspellen dat $F_5(s)$ volledig in een gemodificeerde kettingbreukontwikkeling realiseerbaar is, en hiervan uitsluitend de eerste vorm.

De synthese van $F_5(s)$ is al verricht volgens deze procedure (lit. [2])

Uit (53) blijkt dat $F_5(s) \xrightarrow{\text{②}} F_4(s)$ niet realiseerbaar is, wat aangetoond zal worden op een andere manier.

$$\frac{1}{F_5(s)} = F_5'(s) + F_5''(s)$$

met
$$F_5'(s) = \frac{1}{\frac{a_0}{b_0} + \frac{a_0}{b_0} \frac{N_0(s)}{N_e(s)}}$$

welke realiseerbaar is, en

$$F_5''(s) = \frac{1}{\frac{a_0}{b_1 s} + F_4(s)}$$

waarin
$$F_4(s) = \frac{s^4 + 2,777778 s^3 + 10,72222 s^2 + 11,11111 s + 14,29630}{s^4 + 1,23333 s^3 + 4,66667 s^2 + 1,15556 s + 2,66667}$$

We berekenen de teller van het reële deel:

$$A_4(\omega^2) = (\omega^2 - 4)^2 (\omega^4 - 3,96296 \omega^2 + 1,14815)$$

De term $(\omega^4 - 3,96296 \omega^2 + 1,14815) \neq 0$ op een bepaald ω^2 -interval (vul b.v. in: $\omega^2 = 1$), zodat $F_4(s)$ niet positief reëel is.

De grafische weergave van $\text{Num}[\text{Re } F_5'(j\omega)]$ voor resp. de eerste en de tweede vorm bevestigen voorgaande conclusies (zie bijlage pag. 1).



De keuze $a = 2$, $b = 4$, $q = 5/9$ genereert de functie

$$F_5(s) = \frac{s^5 + \frac{40}{9}s^4 + \frac{115}{9}s^3 + \frac{170}{9}s^2 + \frac{146}{9}s + \frac{40}{9}}{s^5 + 2,55556s^4 + 5,11111s^3 + 7,18268s^2 + 4,44444s + 0,93013}$$

waarin $N_e(s) = \frac{40}{9} (s^2 + 4) (s^2 + \frac{1}{4})$

en $D_o(s) = s (s^2 + 4) (s^2 + \frac{10}{9})$

en waarvan $A_5(\omega^2) = \omega^{10} - 6,53086\omega^8 + 5,78068\omega^6 + 11,49665\omega^4 + 22,45550\omega^2 + 4,16947$

$$= (\omega^2 - 4)^2 (\omega^6 + 1,46914\omega^4 + 1,53180\omega^2 + 0,26052)$$

$$= (\omega^2 - 4)^2 \cdot h_5(\omega^2)$$

Daar $h_5(\omega^2)$ uitsluitend positieve coëfficiënten bevat, is $h_5(\omega^2) \geq 0$ voor iedere ω , zodat $F_5(s)$ p.r. is.

Voor de grafische weergave van $A_5(\omega^2)$: zie bijlage pag. 2.

Na berekening volgt:

$\eta_0 = 3,69136$	$\frac{a_0^2 b_0}{a_0} = 4,16947$	$L_0 = 2,58722$	$M_0 = -1,12161$
$\eta_1 = 57,89598$	$b_1^2 = 19,75309$	$L_1 = 21,72373$	$M_1 = 23,57796$

en m.b.v. (53) blijkt dat

$F_5(s) \xrightarrow{(2)} F_4(s)$ en $F_5(s) \xrightarrow{(1)} F_4(s) \xrightarrow{(1)} F_3(s)$ zijn realiseerbaar, alle andere combinaties niet

Allereerst wordt $F_r(s) \xrightarrow{\text{O}} F_u(s) \xrightarrow{\text{O}} F_s(s)$ gerealiseerd:

$$F_s(s) = F_s'(s) + F_s''(s) \quad \text{waarin}$$

$$F_s'(s) = \frac{1}{1 + \frac{D_e(s)}{D_o(s)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{0,39130 s + \frac{1}{1,11087 s + \frac{1}{0,86704 s + \frac{1}{0,81290 s + \frac{1}{3,47920 s}}}}}}$$

(op $\frac{D_e(s)}{D_o(s)}$ is een kettingbreukontwikkeling toegepast)

$$\text{en } F_s''(s) = \frac{1}{0,225 s + F_u(s)}, \quad \text{waarin}$$

$$F_u(s) = \frac{0,83056 s^4 + 0,86111 s^3 + 4,53268 s^2 + 3,44444 s + 0,93813}{4,44444 s^4 + 7,66667 s^3 + 18,88889 s^2 + 11,77778 s + 4,44444} = \frac{N_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

Zoals te verwachten was, blijken $N_o^*(s)$ en $D_e^*(s)$ de produktterm $(s^2 + 4)$ te bevatten:

$$N_o^*(s) = 0,86111 s(s^2 + 4)$$

$$D_e^*(s) = 4,44444 (s^2 + 4)(s^2 + 1/4)$$

Het reële deel van $F_u(j\omega)$ voldoet aan

$$A_u(\omega^2) = (\omega^2 - 4)^2 (3,69136 \omega^4 + 0,29724 \omega^2 + 0,26052) = (\omega^2 - 4)^2 \cdot h_u(\omega^2)$$

$h_u(\omega^2)$ bevat uitsluitend positieve coëfficiënten, zodat $A_u(\omega^2) \geq 0$ voor iedere ω .

Zoals voorspeld, is de stap $F_4(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_3(s)$ niet realiseerbaar, wat met het volgende aangetoond wordt:

$$F_4(s) = F_4'(s) + F_4''(s) \quad \text{waarin}$$

$$F_4''(s) = \frac{N_e^*(s) - \frac{0,93813}{4,44444} D_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

$$= \frac{-0,10757 s^4 + 0,86111 s^3 + 0,54580 s^2 + 3,44444 s}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

De teller bevat een negatieve coëfficiënt, zodat $F_4''(s)$ niet p.r. is.

$F_4(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3(s)$ realiseren:

$$F_4(s) = F_4'(s) + F_4''(s) \quad \text{waarin}$$

$$F_4'(s) = \frac{0,83056}{4,44444} \frac{D_e^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

$$= \frac{1}{5,35475 + \frac{1}{0,10833 s + \frac{1}{3,40146 s + \frac{1}{0,37213 s + \frac{1}{3,60129 s}}}}}$$

en $F_4''(s) = \frac{1}{5,16129 s + F_3(s)}$

$$\begin{aligned} \text{waarin } F_3(s) &= \frac{2,49084 s^3 + 1,11111 s^2 + 11,22256 s + 4,44444}{0,86111 s^3 + 1,00282 s^2 + 3,44444 s + 0,10757} \\ &= \frac{N_o^{**}(s) + N_e^{**}(s)}{D_o^{**}(s) + D_e^{**}(s)} \end{aligned}$$

$N_e^{**}(s)$ en $D_o^{**}(s)$ bevatten de produktterm $(s^2 + 4)$:

$$N_e^{**}(s) = 1,11111 (s^2 + 4)$$

$$D_o^{**}(s) = 0,86111 s(s^2 + 4)$$

Het reële deel van $F_3(j\omega)$:

$$A_3(\omega^2) = (\omega^2 - 4)^2 (2,14292 \omega^2 + 0,02981)$$

waaruit blijkt dat $A_3(\omega^2) \geq 0$ voor iedere ω

Voor realisatie van $F_3(s) \rightarrow F_2(s)$ kiezen we de eerste vorm:

$$F_3(s) = F_3'(s) + F_3''(s), \text{ waarin}$$

$$F_3'(s) = \frac{\frac{2,49084}{0,86111} D_o^{**}(s)}{D_o^{**}(s) + D_e^{**}(s)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2,89259} + \frac{1}{2,48384 s + \frac{1}{0,10342 s + \frac{1}{90,13839 s}}}}$$

$$\text{en } F_3''(s) = \frac{1}{0,77500 s + F_2(s)}$$

$$\text{waarin } F_2(s) = \frac{1}{41,31676 + \frac{1}{0,02136 s + \frac{1}{11,70586 s}}}$$

$F_5(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_4(s)$ realiseren:

$$\frac{1}{F_5(s)} = F_5'(s) + F_5''(s), \quad \text{waarin}$$

$$F_5'(s) = \frac{\frac{0,93813}{4,44444} N_e(s)}{N_e(s) + N_o(s)}$$

$$= \frac{1}{4,73756 + 1,06595 s + \frac{1}{0,11001 s + \frac{1}{3,51627 s + \frac{1}{0,32262 s + \frac{1}{3,95708 s}}}}}$$

$$\text{en } F_5''(s) = \frac{1}{\frac{1}{s} + F_4(s)} \quad \text{waarin}$$

$$F_4(s) = \frac{s^4 + 3,44444 s^3 + 11,16035 s^2 + 13,77778 s + 13,02659}{s^4 + 1,61743 s^3 + 5,11111 s^2 + 3,19563 s + 4,44444}$$

$$= \frac{N_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

$N_o^*(s)$ en $D_e^*(s)$ bevatten de produktterm $(s^2 + 4)$:

$$N_o^*(s) = 3,4444 s(s^2 + 4)$$

$$D_e^*(s) = (s^2 + \frac{10}{9})(s^2 + 4)$$

$$\text{Het reële deel van } F_4(j\omega) : A_4(\omega^2) = (\omega^2 - 4)^2 (\omega^4 - 2,70033 \omega^2 + 3,61653) \\ = (\omega^2 - 4)^2 \cdot h_4(\omega^2)$$

$h_u(\omega^2)$ heeft geen reële ω - nulpunten, want $-2,70033 > -2\sqrt{3,61653}$
 zodat $h_u(\omega^2) > 0$ voor iedere ω en $F_4(s)$ hiermee p.r. is.

Voorspeld is dat $F_4(s) \xrightarrow{\text{①}} F_3(s)$ niet realiseerbaar is, zowel in de eerste als de tweede vorm. Dit zal aangetoond worden:

$F_4(s) \xrightarrow{\text{①}} F_3(s)$ realiseren:

$$F_4(s) = F_4'(s) + F_4''(s) \quad \text{waarin}$$

$$F_4''(s) = \frac{N_e^*(s) - D_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)} = \frac{1}{0,29032 s + F_3(s)}$$

waarin $F_3(s) = \frac{-0,15621 s^3 + 1,07147 s^2 + 0,84438 s + 4,44444}{3,44444 s^3 + 6,04924 s^2 + 13,77778 s + 8,01928}$

$F_3(s)$ bevat een negatieve tellercoëfficiënt en is dus niet p.r.

$F_4(s) \xrightarrow{\text{②}} F_3(s)$ realiseren:

$$F_4(s) = F_4'(s) + F_4''(s) \quad \text{waarin}$$

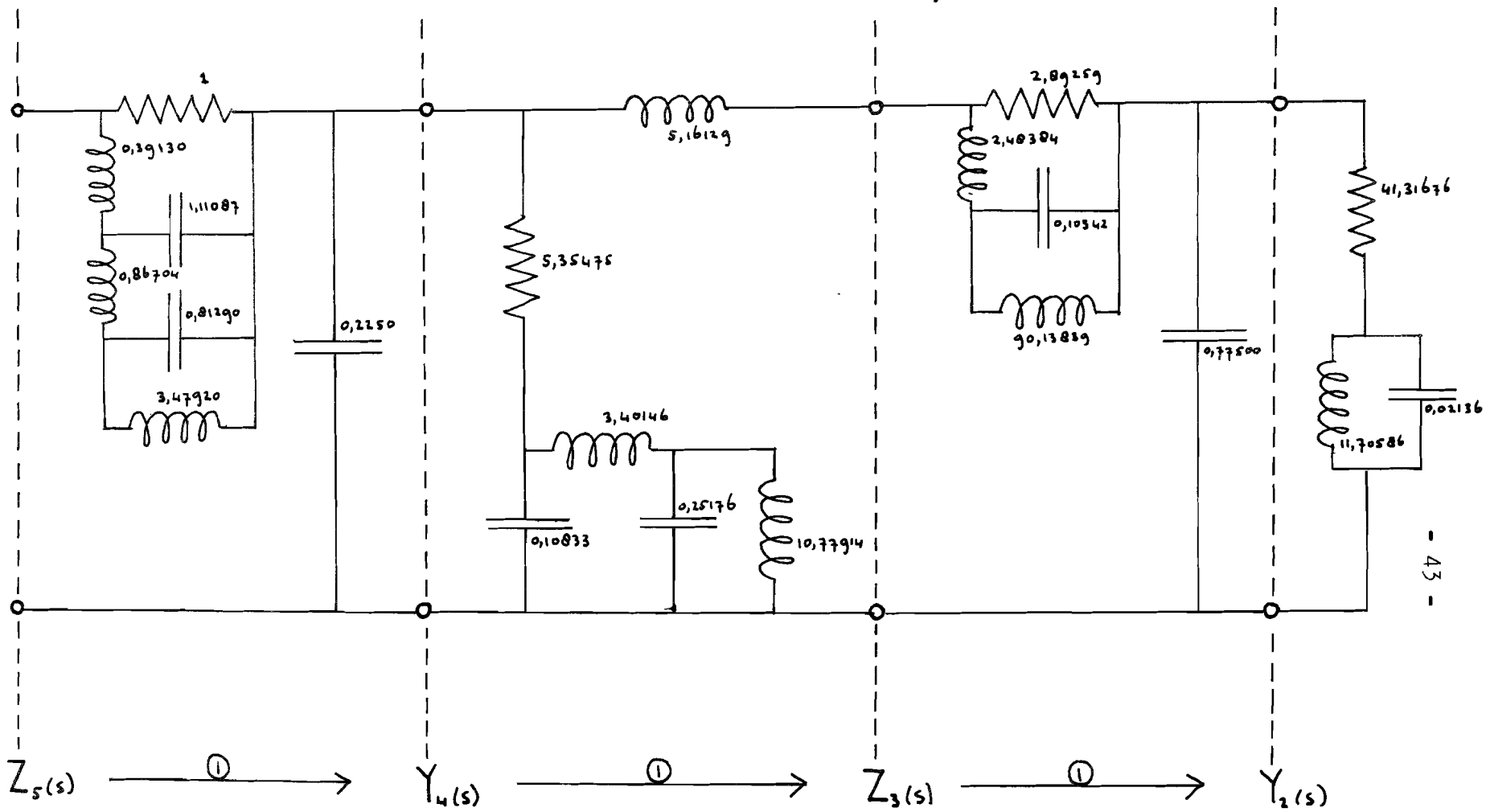
$$F_4''(s) = \frac{N_e^*(s) - \frac{12,46372}{4,44444} D_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

We zien direct dat de tellercoëfficiënt voor s^4 negatief is, waarmee $F_4''(s)$ niet p.r. is.

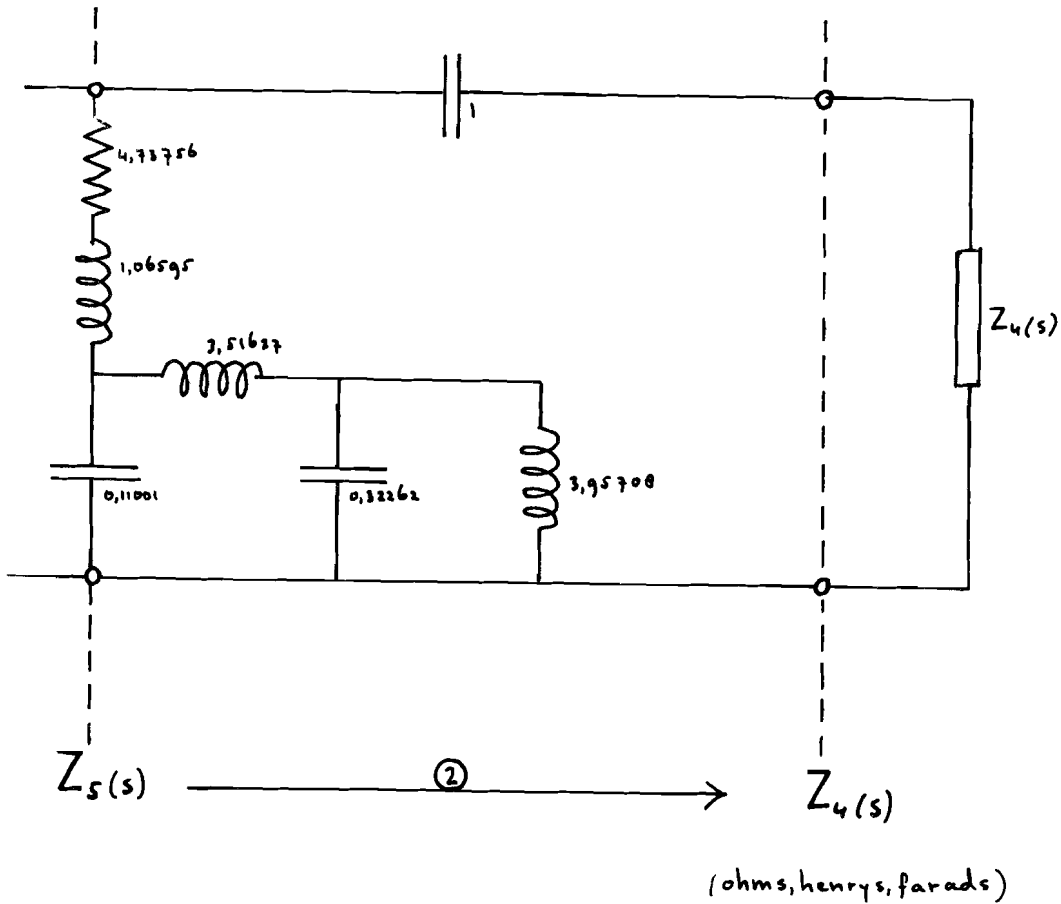
De grafische weergave van $\text{Num} [Re F_5'(j\omega)]$ voor de eerste vorm zowel als de tweede vorm bevestigen dat $F_5(s) \xrightarrow{\text{①}} F_4(s)$ voor beide vormen realiseerbaar is (zie bijlage pag. 2).

$F_5(s)$ zal nu gesynthetiseerd worden en wordt daartoe als impedantie-functie $Z_5(s)$ beschouwd.

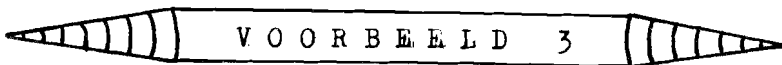
Voor de reeks $F_5(s) \xrightarrow{\text{①}} F_4(s) \xrightarrow{\text{①}} F_3(s) \xrightarrow{\text{①}} F_2(s)$ wordt dan:
 $Z_5(s) = F_5(s)$; $Y_4(s) = F_4(s)$; $Z_3(s) = F_3(s)$; $Y_2(s) = F_2(s)$ en voor de reeks $F_5(s) \xrightarrow{\text{②}} F_4(s)$ wordt $Z_5(s) = F_5(s)$; $Z_4(s) = F_4(s)$.



(ohms, henrys, farads)



Deze tweede realisatie van $Z_5(s)$ stopt bij $Z_4(s)$. Voor synthese van $Z_4(s)$ moet van een andere methode gebruik worden gemaakt. Bij de eerste, succesvolle realisatie blijkt dat we 17 reactieve elementen en 4 weerstanden nodig hebben, wat in overeenstemming is met (12).



De keuze $a = 6/5$, $b = 4$, $q = 5/9$ genereert de functie

$$F_5(s) = \frac{s^5 + \frac{40}{9}s^4 + \frac{115}{9}s^3 + \frac{170}{9}s^2 + \frac{146}{9}s + \frac{40}{9}}{s^5 + 1,75556s^4 + 4,66667s^3 + 3,51506s^2 + 2,66667s + 1,08246}$$

waarin $N_e(s) = \frac{40}{9}(s^2 + 4)(s^2 + 1/4)$

$D_o(s) = s(s^2 + 4)(s^2 + 2/3)$

$$\begin{aligned} \text{en waarvan } A_s(\omega^2) &= \omega^{10} - 9,64199 \omega^8 + 29,73554 \omega^6 - 30,76883 \omega^4 + 7,19035 \omega^2 \\ &\quad + 4,81092 \\ &= (\omega^2 - 4)^2 (\omega^6 - 1,64199 \omega^4 + 0,59962 \omega^2 + 0,30068) \\ &= (\omega^2 - 4)^2 \cdot h_s(\omega^2) \end{aligned}$$

De eis $h_s(\omega^2) \geq 0$ voor iedere ω wordt onderzocht m.b.v. het Sturm-theorema. Daartoe worden de vergelijkingen (34) gebruikt en we berekenen:

$$\begin{aligned} a &= \frac{d_1^2}{3} - d_1 = 0,299090 ; \quad b = d_0 - \frac{d_1 \cdot d_2}{9} = 0,41008 ; \\ f_3 &= -d_1 - \frac{3b}{2a} \left(2d_2 + \frac{9b}{2a} \right) = -6,53477 \end{aligned}$$

De Sturmtable wordt:

	f_0	f_1	f_2	f_3	
$x = 0$	+	+	-	-	$\Rightarrow \nu_0 = 1$
$x = \infty$	+	+	+	-	$\Rightarrow \nu_\infty = 1$

en aangezien $|\nu_0 - \nu_\infty| = 0$ volgt: $h_s(\omega^2) > 0$ voor iedere ω
De grafische weergave van $A_s(\omega^2)$ bevestigt deze conclusie (zie bijlage pag. 3).

Na berekening volgt:

$\eta_0 = -0,30864$	$\frac{a_1^2 b_0}{a_0} = 4,81093$	$L_0 = 2,67716$	$M_0 = -2,87134$
$\eta_1 = 48,08324$	$b_1^2 = 7,11111$	$L_1 = 35,85020$	$M_1 = 48,06771$

en m.b.v. (53) concluderen we:

geen enkele vorm van $F_1(s) \rightarrow F_4(s)$ is realiseerbaar

Geprobeerd wordt toch $F_2(s) \xrightarrow{\text{①}} F_4(s)$ te realiseren:

$$F_2(s) = F_2'(s) + F_2''(s) \quad , \quad \text{waarin } F_2''(s) = \frac{N_0(s) - D_0(s) + N_2(s)}{D_0(s) + D_2(s)} = \frac{1}{0,225 s + F_4(s)}$$

$$\text{waarin } F_4(s) = \frac{-0,06944 s^4 + 0,41667 s^3 + 0,46506 s^2 + 1,66667 s + 1,08246}{4,44444 s^4 + 8,11111 s^3 + 18,88888 s^2 + 13,55556 s + 4,44444}$$

waaruit valt af te leiden dat $F_s''(s)$ niet p.r. is.

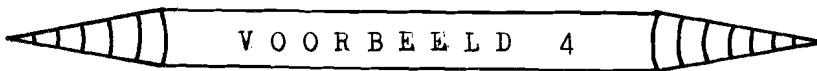
We proberen vervolgens $F_s(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_u(s)$ te realiseren:

$$\frac{1}{F_s'(s)} = F_s'(s) + F_s''(s), \text{ waarin } F_s''(s) = \frac{D_e(s) - \frac{b_0}{a_0} N_e(s) + D_o(s)}{N_e(s) + N_o(s)} = \frac{1}{0,6 s} + F_u(s),$$

$$\text{waarin } F_u(s) = \frac{s^4 + 2,77778 s^3 + 11,65595 s^2 + 11,11111 s + 18,03121}{s^4 + 0,67309 s^3 + 4,66667 s^2 - 1,08539 s + 2,66667}$$

Ook hier zorgt de negatieve coëfficiënt er al voor dat $F_u(s)$ geen p.r. functie is.

De grafische weergave van $\text{Num}[Re F_s'(j\omega)]$ bevestigt dat $F_s(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_u(s)$ voor beide vormen niet realiseerbaar is (zie bijlage pag. 3).



De keuze $a = 4$, $b = 4$ en $q = 0,98$ genereert de functie

$$F_s(s) = \frac{s^5 + 40/9 s^4 + 115/9 s^3 + 170/9 s^2 + 146/9 s + 40/9}{s^5 + 4,98000 s^4 + 7,92000 s^3 + 19,84689 s^2 + 15,68000 s + 0,07022}$$

$$\text{waarin } N_e(s) = \frac{40}{9} (s^2 + 4)(s^2 + 1/4)$$

$$\text{en } D_o(s) = s(s^2 + 4)(s^2 + 3,92)$$

en waarvan

$$\begin{aligned} A_s(\omega^2) &= \omega^8 + 1,43556 \omega^8 - 49,17283 \omega^6 + 68,49551 \omega^4 + 164,82973 \omega^2 + 0,31208 \\ &= (\omega^2 - 4)^2 (\omega^6 + 9,43556 \omega^4 + 10,31165 \omega^2 + 0,01951) \\ &= (\omega^2 - 4)^2 \cdot h_s(\omega^2) \end{aligned}$$

Aangezien $h_s(\omega^2)$ uitsluitend positieve coëfficiënten bevat, is $h_s(\omega^2) > 0$ voor iedere ω . De grafische weergave van $A_s(\omega^2)$ bevestigt dit eveneens (zie bijlage pag. 4).

Na berekening volgt:

$\eta_0 = 17,27556$	$\frac{a_4^2 b_0}{a_0} = 0,31209$	$L_0 = 1,68134$	$M_0 = 2,81145$
$\eta_1 = 167,48242$	$b_1^2 = 245,8642$	$L_1 = 229,78341$	$M_1 = 110,15467$

en m.b.v. (53) concluderen we:

$F_5(s) \xrightarrow{(2)} F_4(s) \xrightarrow{(2)} F_3(s)$ is realiseerbaar;
 alle andere combinaties zijn niet realiseerbaar.

We proberen allereerst $F_5(s) \xrightarrow{(1)} F_4(s)$ te realiseren:

$$F_5(s) = F_5'(s) + F_5''(s), \text{ waarin } F_5''(s) = \frac{N_o(s) - D_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)} = \frac{1}{0,225 s + F_4(s)}, \text{ waarin}$$

$$F_4(s) = \frac{3,88700 s^4 + 3,67000 s^3 + 19,72489 s^2 + 14,68000 s + 0,07022}{4,44444 s^4 + 4,85778 s^3 + 18,88889 s^2 + 0,54222 s + 4,44444}$$

Het reële deel van $F_4(j\omega)$ (en hiervan de teller):

$$\begin{aligned}
 A_4(\omega^2) &= (\omega^2 - 4)^2 (17,27556 \omega^4 - 5,05475 \omega^2 + 0,01951) \\
 &= (\omega^2 - 4)^2 \cdot h_4(\omega^2)
 \end{aligned}$$

$h_4(\omega^2) \neq 0$ op een bepaald ω^2 -interval (vul b.v. $\omega^2 = 0,1$ in), zodat $F_4(s)$ niet p.r. is. De grafische weergave van $\text{Num}[\text{Re } F_5'(j\omega)]$ bevestigt deze conclusie (zie bijlage pag. 4).

$F_5(s) \xrightarrow{(2)} F_4(s)$ realiseren:

$$\frac{1}{F_5(s)} = F_5'(s) + F_5''(s), \text{ waarin } F_5'(s) = \frac{\frac{b_o}{a_o} N_e(s)}{N_e(s) + N_o(s)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{63,293 + 14,24093 s + \frac{1}{0,00823 s + \frac{1}{49,26744 s + \frac{1}{0,01472 s + \frac{1}{167,51109 s}}}}}
 \end{aligned}$$

en $F_5''(s) = \frac{1}{\frac{1}{3,5505 s} + F_4(s)}$, waarin

$$F_4(s) = \frac{s^4 + 4,16099 s^3 + 11,38612 s^2 + 16,64399 s + 10,68128}{s^4 + 4,90978 s^3 + 7,92000 s^2 + 19,54846 s + 15,68000}$$

$$= \frac{N_o^*(s)}{D_e^*(s)} + \frac{N_e^*(s)}{D_o^*(s)}$$

$N_o^*(s)$ en $D_e^*(s)$ bevatten de produktterm $(s^2 + 4)$:

$$N_o^*(s) = 4,16099 s(s^2 + 4) \quad \text{en} \quad D_e^*(s) = (s^2 + 3,92)(s^2 + 4)$$

Berekend wordt de teller van het reële deel van $F_4(j\omega)$

$$A_4(\omega^2) = (\omega^2 - 4)(\omega^2 + 9,12347 \omega^2 + 10,46770) \geq 0, \text{ zodat } F_4(s) \text{ p.r. is.}$$

Zoals voorspeld is $F_4(s) \xrightarrow{\text{①}} F_3(s)$ niet realiseerbaar, wat gecontroleerd zal worden:

$$F_4(s) = F_4'(s) + F_4''(s), \text{ waarin } F_4''(s) = \frac{N_e^*(s) - D_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

$$= \frac{4,16099 s^3 + 3,46612 s^2 + 16,64399 s - 4,99872}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

en de voorspelling blijkt juist te zijn.

$F_4(s) \xrightarrow{\text{②}} F_3(s)$ realiseren:

$$F_4(s) = F_4'(s) + F_4''(s), \text{ waarin } F_4''(s) = \frac{N_e^*(s) - \frac{10,68128}{15,68} D_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

$$= \frac{1}{1,06148 s} + F_3(s) \quad \text{en} \quad F_4'(s) = \frac{\frac{10,68128}{15,68} D_e^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

$$= \frac{1}{1,46799 + \frac{1}{0,13874 s + \frac{1}{1,83003 s + \frac{1}{1894,063 s + \frac{1}{0,000133 s}}}}}$$

$$F_3(s) = \frac{s^3 + 4,60945 s^2}{0,31880 s^3 + 4,16099 s^2 + 5,99098 s + 16,64399} \quad \frac{4 s + 13,90446}{16,64399}$$

$$= \frac{N_e^{**}(s)}{D_e^{**}(s)} + \frac{N_o^{**}(s)}{D_o^{**}(s)}$$

De produkterterm $(s^2 + 4)$ keert weer terug in

$$N_o^{**}(s) = s(s^2 + 4) \quad \text{en} \quad D_e^{**}(s) = 4,16099 (s^2 + 4)$$

De teller van het reële deel van $F_3(j\omega)$:

$$A_3(\omega^2) = (\omega^2 - 4)(0,31880 \omega^2 + 14,46411) \geq 0, \text{ zodat } F_3(s) \text{ p.r. is.}$$

$$\frac{1}{F_3(s)} \xrightarrow{\text{①}} F_2(s) \text{ realiseren: } \frac{1}{F_3(s)} = F_2'(s) + F_2''(s), \text{ waarin}$$

$$F_3'(s) = \frac{0,3188 N_o''(s)}{N_o''(s) + N_e''(s)} = \frac{1}{3,13676 + \frac{1}{0,06916 s + \frac{1}{14,70149 s + \frac{1}{0,02255 s}}}}$$

$$\text{en } F_3''(s) = \frac{1}{0,24034 s + F_2(s)}$$

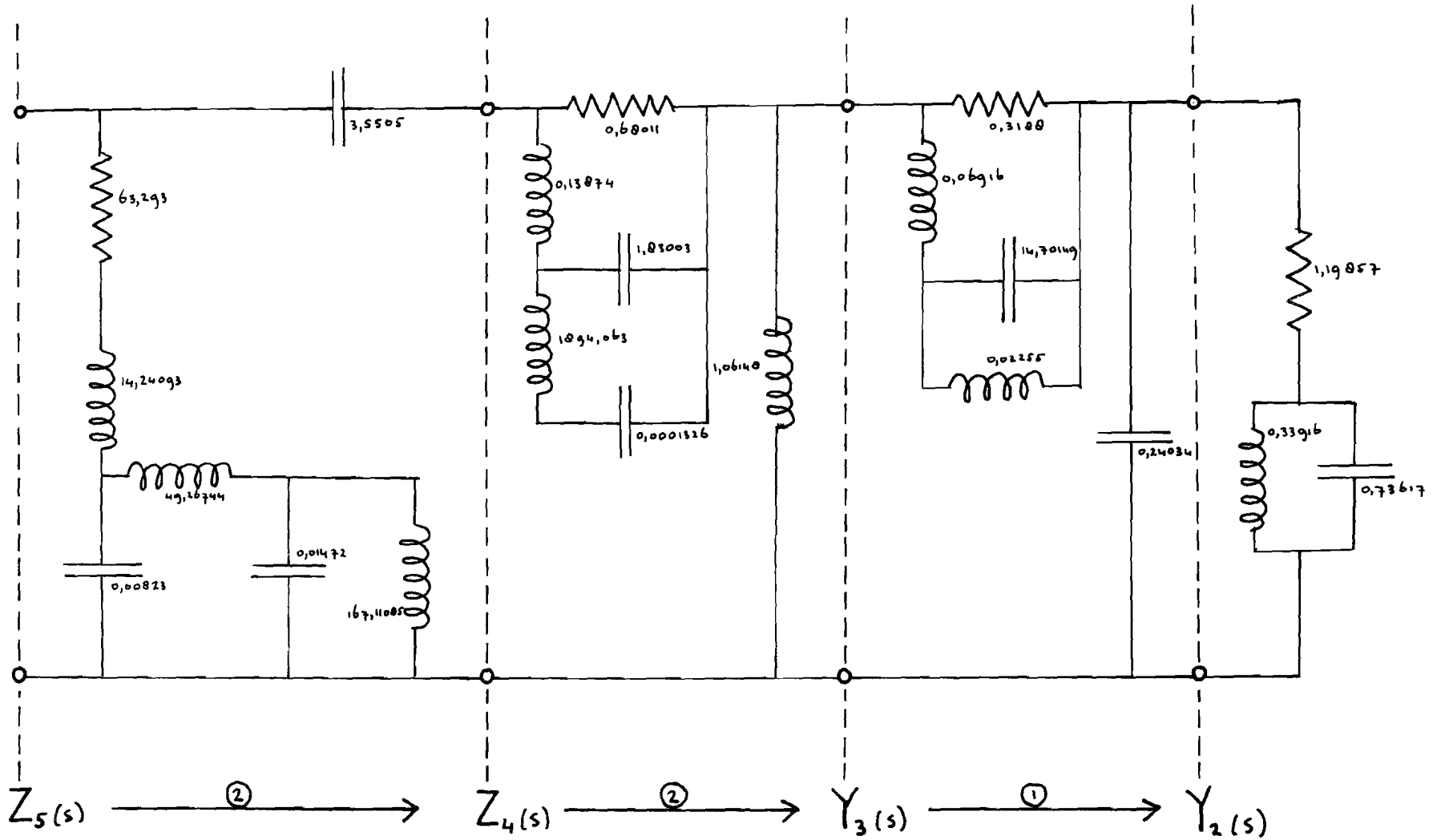
$$\text{met } F_2(s) = \frac{1}{1,19857 + \frac{1}{0,73617 s + \frac{1}{0,33916 s}}}$$

$F_5(s)$ is nu volledig in de gemodificeerde kettingbreuk ontwikkeld en het elektrisch netwerk kan gebouwd worden.

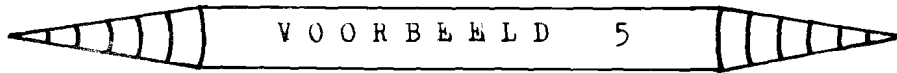
Daartoe wordt $F_5(s)$ als impedantiefunctie $Z_5(s)$ beschouwd.

Met $F_5(s) = Z_5(s)$ volgt: $F_4(s) = Z_4(s)$; $F_3(s) = Y_3(s)$; $F_2(s) = Y_2(s)$.

Opm.: Een snelle controle van het netwerk op de volgende pagina laat zien dat het gedrag voor $s = 0$ en $s = \infty$ voldoet aan de verwachtingen.



(ohms, henrys, farads)



De keuze $a = 6/5$, $b = 4$ en $q = 7/11$ genereert de functie

$$F_s(s) = \frac{s^5 + \frac{40}{9}s^4 + \frac{115}{9}s^3 + \frac{170}{9}s^2 + \frac{146}{9}s + \frac{40}{9}}{s^5 + 1,83636s^4 + 4,76364s^3 + 4,01477s^2 + 3,05455s + 1,34879}$$

waarin $N_e(s) = \frac{40}{9}(s^2 + 4)(s^2 + 1/4)$

en $D_e(s) = s(s^2 + 4)(s^2 + 0,76364)$, en waarvan

$$\begin{aligned} A_s(\omega^2) &= \omega^{10} - 9,37980\omega^8 + 27,61515\omega^6 - 26,31624\omega^4 + 6,23096\omega^2 + 5,99462 \\ &= (\omega^2 - 4)(\omega^6 - 1,37980\omega^4 + 0,57875\omega^2 + 0,37466) \\ &= (\omega^2 - 4)^2 \cdot h_s(\omega^2) \end{aligned}$$

De eis $h_s(\omega^2) \geq 0$ wordt onderzocht m.b.v. het Sturmtheorema. We gebruiken (34) en berekenen:

$$\begin{aligned} a &= \frac{d_2^2}{3} - d_1 = 0,05587 \quad ; \quad b = d_0 - \frac{d_1 d_2}{9} = 0,46338 \quad ; \\ f_3 &= -d_1 - \frac{3b}{2a}(2d_2 + \frac{9b}{2a}) = -430,652 \end{aligned}$$

De Sturmtable wordt hiermee:

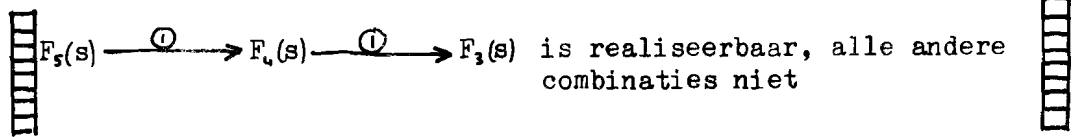
	f	f	f	f	
x = 0	+	+	-	-	$\Rightarrow \nu_0 = 1$
x = ∞	+	+	+	-	$\Rightarrow \nu_\infty = 1$

Aangezien $|\nu_0 - \nu_\infty| = 0$, volgt: $h_s(\omega^2) \geq 0$ voor iedere ω , zodat $F_s(s)$ een p.r. functie is (voor de grafiek van $A_s(\omega^2)$: zie bijlage pag. 5)

Na berekening volgt:

$\eta_0 = 0,14746$	$\frac{a_1^2 b_0}{a_0} = 5,99462$	$L_0 = 3,74085$	$M_0 = -1,83878$
$\eta_1 = 57,18531$	$b_1^2 = 9,33028$	$L_1 = 49,76564$	$M_1 = 56,10756$

en m.b.v. (53) concluderen we:



Probeer $F_5(s) \xrightarrow{(2)} F_4(s)$ te realiseren:

$$\frac{1}{F_5(s)} = F_5'(s) + F_5''(s), \text{ waarin } F_5''(s) = \frac{D_e(s) - \frac{b_0}{a_0} N_e(s) + D_o(s)}{N_e(s) + N_o(s)} = \frac{1}{0,18829 s + F_4(s)}$$

$$\text{waarin } F_4(s) = \frac{s^4 + 2,98942 s^3 + 12,06835 s^2 + 11,95768 s + 18,72135}{s^4 + 0,48757 s^3 + 4,76364 s^2 - 1,71759 s + 3,05455}$$

en de negatieve coëfficiënt zorgt er al voor dat $F_4(s)$ niet p.r. is.

$F_5(s) \xrightarrow{(1)} F_4(s)$ realiseren:

$$F_5(s) = F_5'(s) + F_5''(s), \text{ waarin } F_5'(s) = \frac{D_o(s)}{D_o(s) + D_e(s)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{0,55456 s + \frac{1}{0,71249 s + \frac{1}{1,09130 s + \frac{1}{2,78467 s + \frac{1}{0,62880 s}}}}}}$$

$$\text{en } F_5'(s) = \frac{N_o(s) - D_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)} = \frac{1}{0,225 s + F_4(s)}, \text{ waarin}$$

$$F_4(s) = \frac{0,033179 s^4 + 0,51364 s^3 + 1,05204 s^2 + 2,05455 s + 1,34879}{4,44444 s^4 + 8,01414 s^3 + 18,88889 s^2 + 13,16767 s + 4,44444}$$

$$= \frac{N_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

Probeer weer $F_4(s) \xrightarrow{(2)} F_3(s)$ te realiseren:

$$F_4(s) = F_4'(s) + F_4''(s), \text{ waarin}$$

$$F_4''(s) = \frac{N_e^*(s) - \frac{1,34879}{4,44444} D_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)} = \frac{-1,31561 s^4 + \dots}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

$F_4(s) \xrightarrow{(1)} F_3(s)$ realiseren:

$$F_4(s) = F_4'(s) + F_4''(s), \text{ waarin}$$

$$F_4'(s) = \frac{0,03318}{4,44444} D_e^*(s)$$

$$= \frac{1}{133,95354 + \frac{1}{0,00414 s + \frac{1}{92,65324 s + \frac{1}{0,008569 s + \frac{1}{304,21285 s}}}}}$$

en $F_4''(s) = \frac{N_e^*(s) - \frac{0,03318}{4,44444} D_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)} = \frac{1}{8,65284 s + F_3(s)}$, waarin

$$F_3(s) = \frac{0,13115 s^3 + 1,11111 s^2 + 1,78390 s + 4,44444}{0,51364 s^3 + 0,91103 s^2 + 2,05204 s + 1,31561}$$

$$= \frac{N_e^{**}(s) + N_o^{**}(s)}{D_e^{**}(s) + D_o^{**}(s)}$$

Voor de verandering passen we op $F_3(s)$ de tweede vorm toe: $F_3(s) \xrightarrow{(2)} F_2(s)$

$$\frac{1}{F_3(s)} = F_3'(s) + F_3''(s) , \text{ waarin } F_3'(s) = \frac{1,31561}{4,44444} \frac{N_e^{**}(s)}{N_o^{**}(s) + N_e^{**}(s)}$$

$$= \frac{1}{3,37824 + 0,39875 s + \frac{1}{0,26118 s + \frac{1}{0,95720 s}}}$$

en $F_3''(s) = \frac{D_e^{**}(s) - \frac{1,31561}{4,44444} N_e^{**}(s) + D_o^{**}(s)}{N_e^{**}(s) + N_o^{**}(s)} = \frac{1}{0,46171 s} + F_2(s)$

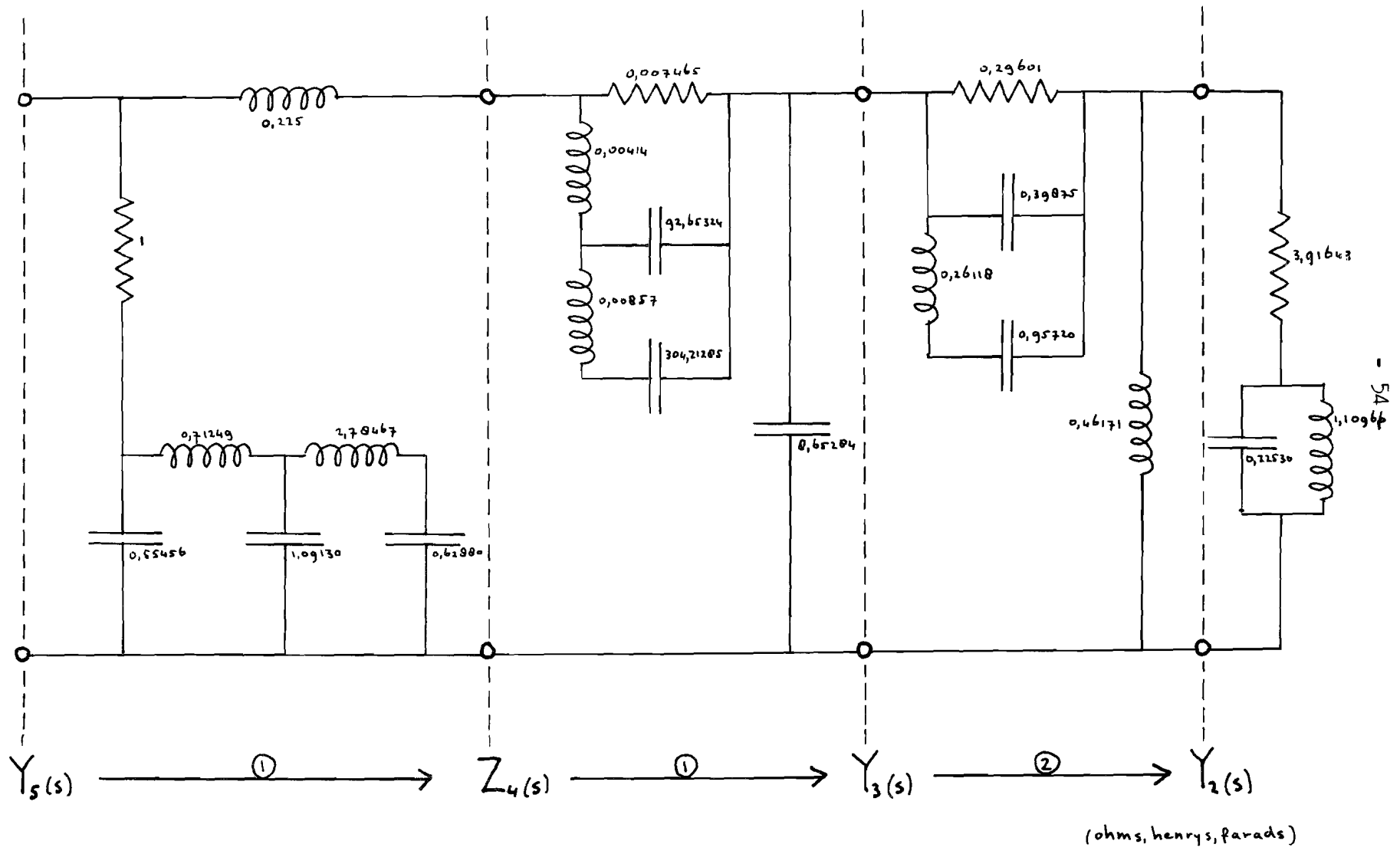
met $F_2(s) = \frac{1}{3,91643 + \frac{1}{0,22530 s + \frac{1}{1,10966 s}}}$

$F_5(s)$ is nu volledig in de gemodificeerde kettingbreuk ontwikkeld en we kunnen het netwerk synthetiseren.

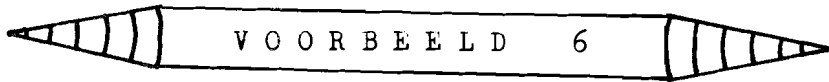
Beschouw daartoe $F_5(s)$ als een admittantiefunctie $Y_5(s)$, zodat

met $F_5(s) = Y_5(s)$ volgt: $F_4(s) = Z_4(s)$; $F_3(s) = Y_3(s)$; $F_2(s) = Y_2(s)$

De kettingbreukontwikkeling wordt met de volgende schakeling gerealiseerd:



- 5A



De keuze $a = 3, b = 4, q = 0,7$ genereert de functie

$$F_s(s) = \frac{s^5 + \frac{40}{9}s^4 + \frac{115}{9}s^3 + \frac{170}{9}s^2 + \frac{146}{9}s + \frac{40}{9}}{s^5 + 3,7s^4 + 6,1s^3 + 12,88167s^2 + 8,4s + 0,93999}$$

waarin $N_e(s) = \frac{40}{9}(s^2 + 4)(s^2 + 1/4)$

en $D_o(s) = s(s^2 + 4)(s^2 + \frac{21}{10})$ en waarvan

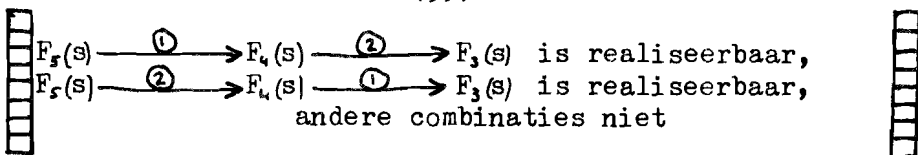
$$\begin{aligned} A_s(\omega^2) &= \omega^{10} - 2,43333\omega^8 - 24,57406\omega^6 + 57,65357\omega^4 + 61,25956\omega^2 + 4,17771 \\ &= (\omega^2 - 4)^2(\omega^6 + 5,56667\omega^4 + 3,95928\omega^2 + 0,26111) \\ &= (\omega^2 - 4)^2 \cdot h_s(\omega^2) \end{aligned}$$

$h_s(\omega^2)$ heeft uitsluitend positieve coëfficiënten, zodat $F_s(s)$ p.r. is. Voor de grafische weergave van $A_s(\omega^2)$: zie bijlage pag. 6.

Na berekening volgt:

$\eta_0 = 9,76667$	$\frac{a_4^2 b_0}{\alpha_0} = 4,17771$	$L_0 = 3,45912$	$M_0 = 2,61759$
$\eta_1 = 96,77011$	$b_1^2 = 70,56$	$L_1 = 52,88034$	$M_1 = 25,84836$

en we concluderen m.b.v. (53):



Allereerst wordt $F_s(s) \xrightarrow{①} F_4(s) \xrightarrow{②} F_3(s)$ gerealiseerd:

$$\begin{aligned} F_s(s) &= F_s^I(s) + F_s^{II}(s), \text{ waarin } F_s^I(s) = \frac{D_o(s)}{D_o(s) + D_e(s)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{0,27027s} + \frac{1}{1,41304s} + \frac{1}{1,90973s} + \frac{1}{0,21589s} + \frac{1}{6,75626s}} \end{aligned}$$

en $F_s''(s) = \frac{N_o(s) - D_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)} = \frac{1}{0,225 s + F_4(s)}$, waarin

$$F_4(s) = \frac{2,1975 s^4 + 1,85 s^3 + 11,12166 s^2 + 7,4 s + 0,93999}{4,44444 s^4 + 6,67778 s^3 + 18,88889 s^2 + 7,82222 s + 4,44444}$$

$$= \frac{N_e^*(s)}{D_e^*(s)} + \frac{N_o^*(s)}{D_o^*(s)}, \text{ waarvan}$$

$$A_u(\omega^2) = (\omega^2 - 4)^2 (9,76667 \omega^4 - 0,45072 \omega^2 + 0,26111)$$

$$= (\omega^2 - 4)^2 \cdot h_u(\omega^2)$$

Daar $-0,45072 > -2 \sqrt{9,76667 \cdot 0,26111}$ is $h_u(\omega^2) > 0$ voor iedere ω .

Na deze eerste stap zal $F_u(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3(s)$ niet realiseerbaar zijn:

$F_u(s) = F_u'(s) + F_u''(s)$, waarin

$$F_u''(s) = \frac{-\frac{2,19750}{4,44444} D_e^*(s) + N_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)} = \frac{1,85 s^3 + \dots + 7,4 s - 1,25751}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

en de negatieve coëfficiënt in de teller van $F_u''(s)$ bewijst dit.

$F_u(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_3(s)$ realiseren:

$$F_u(s) = F_u'(s) + F_u''(s), \text{ waarin } F_u'(s) = \frac{0,93999}{4,44444} \frac{D_e^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

$$= \frac{1}{4,72818 + \frac{1}{0,14076 s + \frac{1}{2,30756 s + \frac{1}{0,51191 s + \frac{1}{6,01404 s}}}}}$$

$$\text{en } F_u''(s) = \frac{N_e^*(s) - \frac{0,93999}{4,44444} D_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)} = \frac{1}{1,665 s + F_3(s)}$$

$$\text{met } F_3''(s) = \frac{4,44444 s^3 + 5,92252 s^2 + 17,77778 s + 3,54192}{1,25751 s^3 + 1,85 s^2 + 7,12670 s + 7,4}$$

$$= \frac{N_o''(s)}{D_o''(s)} + \frac{N_e''(s)}{D_e''(s)}$$

waarin $N_o''(s) = 4,44444 s(s^2 + 4)$ en $D_e''(s) = 1,85 (s^2 + 4)$.

$\frac{1}{F_3(s)} \xrightarrow{(2)} F_2(s)$ realiseren:

$F_3(s) = F_3'(s) + F_3''(s)$, waarin

$$F_3'(s) = \frac{\frac{3,54192}{7,4} D_e''(s)}{D_e''(s) + D_o''(s)} = \frac{1}{2,08926 + 1,42015 s + \frac{1}{0,42233 s + \frac{1}{0,59196 s}}}$$

en $F_3''(s) = \frac{1}{\frac{1}{2,40240 s} + F_2(s)}$, waarin $F_2(s) = \frac{1}{3,53432 + \frac{1}{0,24965 s + \frac{1}{1,00139 s}}}$

Hiermee is deze breukontwikkeling van $F_5(s)$ afgerond.

Vervolgens zal $F_5(s) \xrightarrow{(2)} F_4(s) \xrightarrow{(1)} F_3(s)$ gerealiseerd worden:

$$\frac{1}{F_5(s)} = F_5'(s) + F_5''(s), \text{ waarin } F_5'(s) = \frac{\frac{b_o}{a_o} N_e(s)}{N_e(s) + N_o(s)}$$

$$= \frac{1}{4,72818 + 1,06384 s + \frac{1}{0,11023 s + \frac{1}{3,68053 s + \frac{1}{0,19698 s + \frac{1}{12,51360 s}}}}}$$

en $F_5''(s) = \frac{D_e(s) - \frac{b_o}{a_o} N_e(s) + D_o(s)}{N_e(s) + N_o(s)} = \frac{1}{1,89 s} + F_4(s)$

$$\text{met } F_4(s) = \frac{s^4 + 3,91534 s^3 + 11,31745 s^2 + 15,66138 s + 11,52025}{s^4 + 2,76002 s^3 + 6,1 s^2 + 8,88673 s + 8,4}$$

$$= \frac{N_e^{**}(s)}{D_e^{**}(s)} + \frac{N_o^{**}(s)}{D_o^{**}(s)}$$

Waarin $N_o^{**}(s) = 3,91534 s(s^2 + 4)$ en $D_e^{**}(s) = (s^2 + 2,1)(s^2 + 4)$ en waarvan $A_u(\omega^2) = (\omega^2 - 4)(\omega^4 + 1,38894 \omega^2 + 6,04815) \geq 0$ voor iedere ω .

$F_4(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_3(s)$ realiseren :

$$F_4(s) = F_4'(s) + F_4''(s), \text{ waarin } F_4''(s) = \frac{N_e^*(s) - \frac{11,52025}{8,4} D_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

waaruit valt af te leiden dat $F_4''(s)$ niet p.r. is, vanwege de negatieve tellercoëfficiënt voor s^4 .

$F_4(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3(s)$ realiseren:

$$F_4(s) = F_4'(s) + F_4''(s), \text{ waarin } F_4'(s) = \frac{D_e^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{0,36232 s + 1}{0,95828 s + 1} \frac{1}{3,44022 s + \frac{1}{0,09967 s}}}$$

$$\text{en } F_4''(s) = \frac{N_e^*(s) - D_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e^*(s) + D_o^*(s)} = \frac{1}{0,255406 s + F_3(s)}$$

$$\text{met } F_3(s) = \frac{1,42746 s^3 + 2,1 s^2 + 8,08981 s + 8,4}{3,91534 s^3 + 5,21745 s^2 + 15,66138 s + 3,12025}$$

$$= \frac{N_o^{**}(s)}{D_o^{**}(s)} + \frac{N_e^{**}(s)}{D_e^{**}(s)}$$

waarin $N_e^{**}(s) = 2,1 (s^2 + 4)$ en $D_o^{**}(s) = 3,91534 s(s^2 + 4)$ en waarvan $A_3(\omega^2) = (\omega^2 - 4)(5,58894 \omega^2 + 1,63815) \geq 0$ voor iedere ω .

$F_3(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_1(s)$ realiseren: $F_3(s) = F_3'(s) + F_3''(s)$, waarin

$$F_3'(s) = \frac{\frac{1,42746}{3,91534} D_o^{**}(s)}{D_o^{**}(s) + D_e^{**} s} = \frac{1}{2,74287 + \frac{1}{0,27358 s + \frac{1}{1,55636 s}}}$$

en $F_3''(s) = \frac{1}{1,86445 s + F_2(s)}$

waarin $F_2(s) = \frac{1}{2,69231 + \frac{1}{0,32773 s + \frac{1}{0,76275 s}}}$

Langs verschillende wegen is $F_3(s)$ volledig in de gemodificeerde kettingsbreuk ontwikkeld.

Er zullen twee netwerken worden gerealiseerd die beide corresponderen met $F_3(s)$. Daartoe wordt $F_3(s)$ als impedantiefunctie $Z_f(s)$ beschouwd.

Voor de ontwikkeling

$$F_f(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_u(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_3(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_1(s)$$

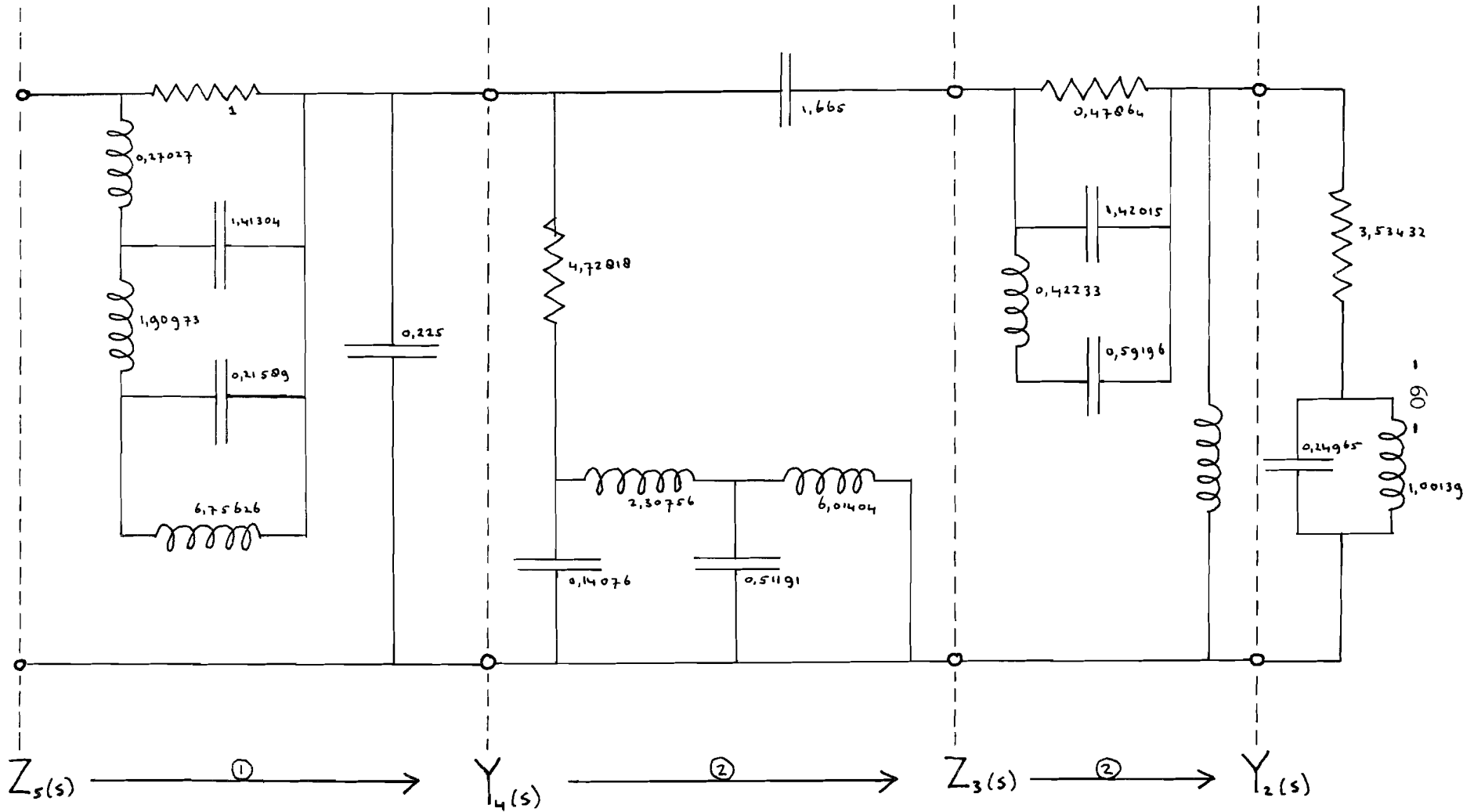
volgt met $F_f(s) = Z_f(s) : F_u(s) = Y_u(s) ; F_3(s) = Z_3(s) ; F_1(s) = Y_1(s)$,

en voor de ontwikkeling

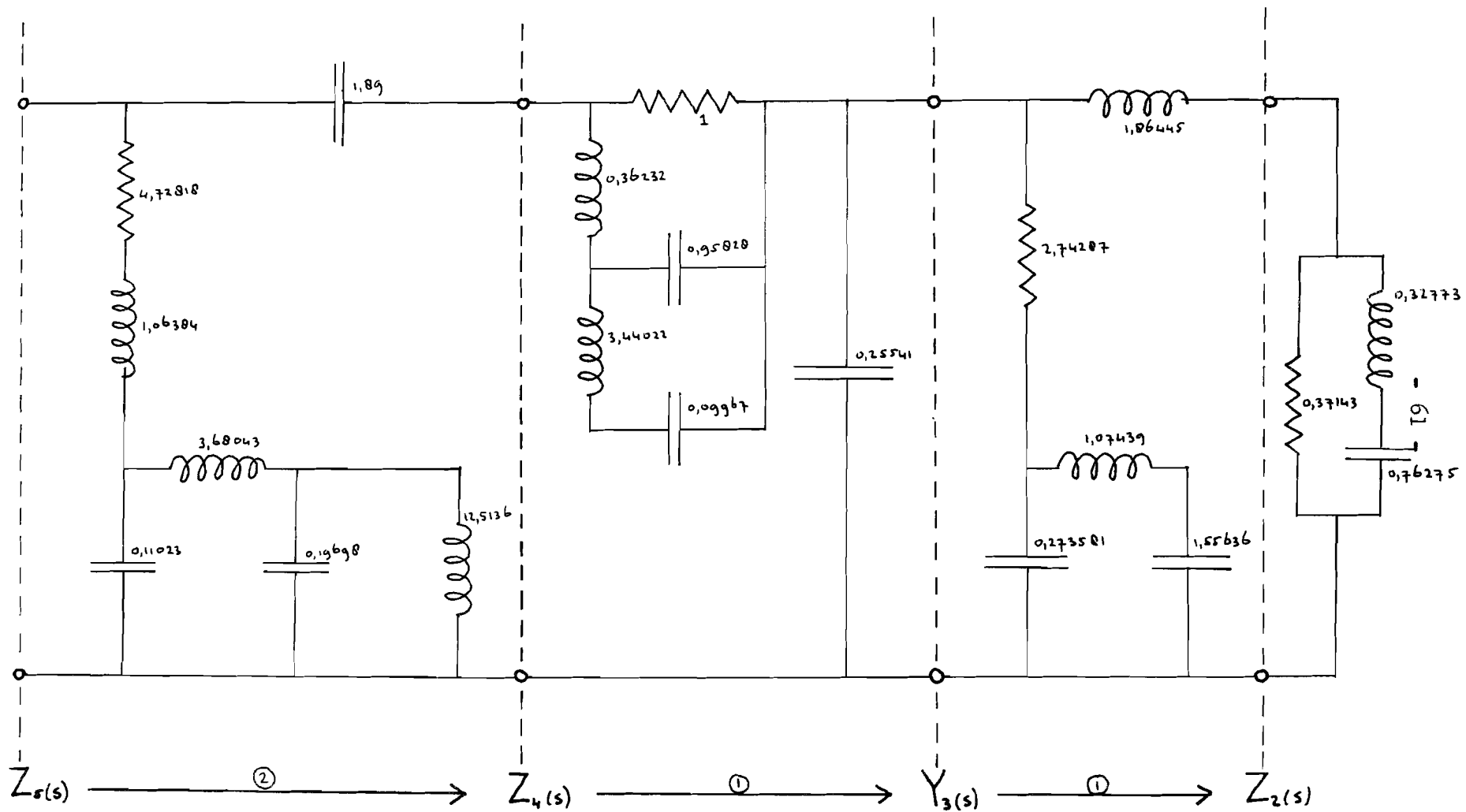
$$F_f(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_u(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_1(s)$$

volgt met $F_f(s) = Z_f(s) : F_u(s) = Z_u(s) ; F_3(s) = Y_3(s) ; F_1(s) = Z_1(s)$.

Voor de grafische weergave van $\text{Num}[Re F_f'(j\omega)]$ (eerste en tweede vorm): zie bijlage pag. 6.



(ohms, henrys, farads)



(ohms, henrys, farads)

III EEN IMMITANTIEFUNCTIE VAN ONEVEN GRAAD (n + 1) IN TELLER EN NOEMER EN ZICHTBAAR MINIMUMRESISTIEF VOOR (½n - 1) ω² - WAARDEN

Met een analoge redenering als die welke op de biquintische immitantiefunctie van hoofdstuk II is toegepast, kunnen we aantonen dat voor immitantiefuncties van oneven graad (n + 1) in teller en noemer en zichtbaar minimumresistief voor (½n - 1) ω² -waarden soortgelijke voorwaarden afgeleid kunnen worden als (53).

Stel

$$F_{n+1}(s) = \frac{N_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} a_i s^i}{\sum_{i=0}^{n+1} b_i s^i}, \text{ waarin } a_{n+1} = b_{n+1} = 1 \text{ en}$$

$$\begin{aligned} N_e(s) &= \sum_{i=0}^n a_{2i} s^{2i} = a_n \cdot f(s) \cdot g_{o1}(s) \\ D_o(s) &= \sum_{i=0}^n b_{2i+1} s^{2i} = s \cdot f(s) \cdot g_{o2}(s) \end{aligned} \quad (63)$$

$$\text{met } f(s) \stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1} c_{2i} s^{2i}, \quad g_{o1}(s) \stackrel{!}{=} s^2 + \omega_x^2, \quad g_{o2}(s) \stackrel{!}{=} s^2 + \omega_x^2 \quad (64)$$

Zoals bekend is $N_e(s) + D_o(s)$ een Hurwitzpolynoom, zodat $(N_e(s))/(D_o(s))$ een derde orde reactantiefunctie voorstelt.

Voor $F_{n+1}(s)$ is relatie (3) afgeleid:

$$a_n \cdot g_{o1}(j\omega) \cdot D_e(j\omega) - j\omega \cdot g_{o1}(j\omega) \cdot N_o(j\omega) \equiv f(j\omega) \cdot h_{n+1}(\omega^2) \quad (65)$$

$$\text{met } h_{n+1}(\omega^2) = \sum_{i=0}^{\frac{3}{2}n} d_i \cdot \omega^{2i} \quad (66)$$

$F_{n+1}(s)$ wordt in de gemodificeerde kettingbreuk ontwikkeld, zoals beschreven in hoofdstuk I.

III.1 DE REALISEERBAARHEID VAN DE STAP $F_{n+1}(s) \longrightarrow F_n(s)$

De relaties (63) bevatten (½n - 1) onbekenden c_{2i} ($i = 0, 1, \dots, (\frac{1}{2}n - 2)$ want $c_{n-2} = 1$) en 2 onbekenden ω_x^2 en ω_x^2 , die m.b.v. n vergelijkingen worden opgelost; er moeten dus (½n - 1) relaties gelden tussen de coëfficiënten a_i en b_i .

$$\text{Daar } f(s) = \frac{N_e(s)}{a_n \cdot g_{o1}(s)} = \frac{D_o(s)}{s \cdot g_{o2}(s)} \text{ volgt :}$$

$$a_n (s^2 + \omega_x^2) \left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} b_{2i+1} s^{2i+1} \right) = s(s^2 + \omega_x^2) \left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} a_{2i} s^{2i} \right)$$

waaruit valt af te leiden:

$$a_n (b_{2i-1} + b_{2i+1} \omega_x^2) = a_{2i-2} + a_{2i} \omega_x^2 \quad \text{voor } i = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}n$$

met behulp waarvan ω_x^2 en ω_{II}^2 uitgedrukt kunnen worden in a_i en b_i :

$$\omega_x^2 = \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{a_n b_{n-1} - a_{n-2}}{a_n b_1 - a_0} \tag{67}$$

$$\omega_{\text{II}}^2 = b_1 \frac{a_n b_{n-1} - a_{n-2}}{a_n b_1 - a_0}$$

$$\omega_x^2 = \frac{a_0}{a_n b_1} \omega_{\text{II}}^2 \tag{68}$$

De coëfficiënten moeten voldoen aan:

$$\frac{a_n b_{2i-1} - a_{2i-2}}{a_{2i} b_1 - a_0 b_{2i+1}} = \frac{a_n b_{n-1} - a_{n-2}}{a_n b_1 - a_0} \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, (\frac{1}{2}n-1)$$

Uit (63) en (64) volgt verder:

$$\frac{D_0(s)}{s} = g_{01}(s) \cdot f(s) \quad \text{ofwel:} \quad \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} b_{2i+1} s^{2i} = (s^2 + \omega_{\text{II}}^2) \left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1} c_{2i} s^{2i} \right)$$

$$\text{zodat volgt:} \quad c_{2i-2} = b_{2i+1} - \omega_{\text{II}}^2 \cdot c_{2i} \tag{69}$$

$$\text{en } \frac{N_e(s)}{a_n} = g_{01}(s) \cdot f(s) \quad \text{ofwel:} \quad \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} \frac{a_{2i}}{a_n} s^{2i} = (s^2 + \omega_x^2) \left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1} c_{2i} s^{2i} \right)$$

$$\text{waaruit volgt:} \quad c_{2i-2} = \frac{a_{2i}}{a_n} - \omega_x^2 c_{2i} \tag{70}$$

Uit (69), (70) en (67) volgt nu:

$$c_{2i} = \frac{a_n b_{2i+1} - a_{2i}}{a_n b_{n-1} - a_{n-2}} = \frac{a_{2i+2} b_1 - a_0 b_{2i+3}}{a_n b_1 - a_0} \quad \text{voor } i = 0, 1, \dots, (\frac{1}{2}n-1)$$

Relatie (65) bevat 4 onbekenden d_i ($i = 0, 1, 2, 3$) die m.b.v. $(\frac{1}{2}n+3)$ vergelijkingen worden opgelost, zodat er $(\frac{1}{2}n-1)$ coëfficiëntrelaties (van a_i 's en b_i 's) moeten gelden.

(65) met (64) en (66) uitwerken:

$$\left(\sum_{i=0}^3 d_i \cdot \omega^{2i} \right) \left(\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}n-1} (-1)^r c_{2r} \cdot \omega^{2r} \right) = a_n (-\omega^2 + \omega_I^2) \left(\sum_{l=0}^{\frac{1}{2}n} (-1)^l b_{2l} \cdot \omega^{2l} \right) + \omega^2 (-\omega^2 + \omega_{II}^2) \left(\sum_{m=0}^{\frac{1}{2}n} (-1)^m a_{2m+1} \cdot \omega^{2m} \right)$$

waaruit we afleiden:

$$-c_{2i-6} d_3 + c_{2i-4} d_2 - c_{2i-2} d_1 + c_{2i} d_0 = a_n (b_{2i-2} + \omega_I^2 b_{2i}) - (a_{2i-3} + \omega_{II}^2 a_{2i-1})$$

voor $i = 0, 1, \dots, (\frac{1}{2}n+2)$ (71)

Voor $i = \frac{1}{2}n + 2$ volgt uit deze vergelijking: $d_3 = 1$

Voor $i = \frac{1}{2}n + 1$ volgt: $d_2 = c_{n-4} + a_n b_n - a_{n-1} - \omega_{II}^2$

Uit (69) volgt: $c_{n-4} = b_{n-1} - \omega_{II}^2$, zodat

$$d_2 = a_n b_n - a_{n-1} + b_{n-1} - 2 \omega_{II}^2$$

Voor $i = 0$ volgt: $d_0 = (a_n b_0 \omega_I^2) / c_0$

Uit (70) volgt: $c_0 = a_0 / (a_n \omega_I^2)$, zodat

$$d_0 = \frac{a_n^2 b_0}{a_0} \omega_I^2 = \frac{a_0 b_0}{b_1^2} \omega_{II}^2$$

Voor $i = 1$ volgt: $-c_0 d_1 + c_2 d_0 = a_n (b_0 + b_2 \omega_I^2) - a_1 \omega_{II}^2$

Uit (70) volgt: $c_2 = \frac{1}{\omega_I^2} \left(\frac{a_2}{a_n} - \frac{a_0}{a_n \omega_I^2} \right)$, zodat

$$d_1 = \frac{\omega_{II}^2}{b_1} \left\{ \frac{\omega_{II}^2}{b_1} (a_1 \cdot b_1 - a_0 \cdot b_2 + a_2 b_0) - 2 a_n b_0 \right\}$$

We kunnen nu schrijven: $h_{n+1}(\omega^2) = \sum_{i=0}^3 d_i \cdot \omega^{2i}$

$$= \omega^6 + (a_n b_n - a_{n-1} + b_{n-1} - 2 \omega_{II}^2) \omega^4 + \frac{\omega_{II}^2}{b_1} \left\{ \frac{\omega_{II}^2}{b_1} (a_1 b_1 - a_0 b_2 + a_2 b_0) - 2 a_n b_0 \right\} \omega^2 + \frac{a_0 b_0}{b_1^2} \omega_{II}^2$$

(72)

De $(\frac{1}{2}n - 1)$ coëfficiëntrelaties (van a_i 's en b_i 's) kunnen m.b.v. (71) bepaald worden, maar een elegantere vorm hiervan vinden we m.b.v.

$$\frac{d [\text{Num}\{\text{Re } F_{n+1}(j\omega)\}]}{d(j\omega)} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \\ \omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{1}{2}n-1} \end{array} \right. \quad (73)$$

waarin $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{1}{2}n-1}$ de frequenties zijn waarvoor $F_{n+1}(s)$ zichtbaar minimumresistief is.

Uit (73) volgt:

$$\frac{d}{d(j\omega)} \left\{ N_e(j\omega) \cdot D_e(j\omega) - N_o(j\omega) \cdot D_o(j\omega) \right\} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \\ \omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{1}{2}n-1} \end{array} \right.$$

en m.b.v. (63) volgt hieruit:

$$\frac{D_e(j\omega)}{N_o(j\omega)} = \frac{j\omega \cdot g_{o2}(j\omega)}{a_n \cdot g_{o1}(j\omega)} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{1}{2}n-1} \end{array} \right.$$

zodat we krijgen:

$$\omega_\ell^2 \frac{\omega_\ell^2 - \omega_{\text{II}}^2}{\omega_\ell^4 - \omega_{\text{I}}^4} = -a_n \frac{\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} (-1)^i b_{2i} \cdot \omega_\ell^{2i}}{\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} (-1)^i a_{2i+1} \cdot \omega_\ell^{2i}} \quad (74)$$

voor $\ell = 1, 2, \dots, (\frac{1}{2}n-1)$

$F_{n+1}(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_n(s)$ is realiseerbaar, als aan (14) is voldaan:

$$h_{n+1}(\omega^2) - \omega^2 [g_{o2}(j\omega)]^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega.$$

(64) en (66) hierin invullen:

$$(d_2 + 2\omega_{\text{II}}^2) \omega^4 + (d_1 - \omega_{\text{II}}^4) \omega^2 + d_0 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

Hieruit volgen 3 eisen :

$$\begin{aligned}
 1^\circ) \quad & d_2 + 2 \omega_{\text{II}}^2 \geq 0 \\
 2^\circ) \quad & d_1 - \omega_{\text{II}}^2 \geq -2 \sqrt{d_0(d_2 + 2 \omega_{\text{II}}^2)} \\
 3^\circ) \quad & d_0 \geq 0
 \end{aligned} \tag{75}$$

Aan de derde eis $d_0 = \frac{a_0 b_0}{b_1^2} \omega_{\text{II}}^2 \geq 0$ is voldaan.

Met gebruik van (72) houden we de volgende 2 eisen over:

$$\begin{aligned}
 1^\circ) \quad & a_n b_n - a_{n-1} + b_{n-1} \geq 0 \\
 2^\circ) \quad & a_1 b_1 - a_0 b_2 + a_2 b_0 \geq b_1^2 + \frac{2 b_1}{\omega_{\text{II}}^2} (a_n b_0 - \sqrt{a_0 b_0 (a_n b_n - a_{n-1} + b_{n-1})})
 \end{aligned} \tag{76}$$

$F_{n+1}(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_n(s)$ is realiseerbaar als (15) geldt:

$$\left\{ h_{n+1}(\omega^2) - \frac{a_n^2 b_0}{a_0} [g_{01}(j\omega)]^2 \right\} / \omega^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

(64) en (66) invullen:

$$\omega^4 + (d_2 - \frac{a_n^2 b_0}{a_0}) \omega^2 + d_1 + \frac{2 a_n^2 b_0}{a_0} \omega_{\text{II}}^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

Hieruit volgen 2 eisen:

$$\begin{aligned}
 1^\circ) \quad & d_1 \geq -2 \frac{a_n^2 b_0}{a_0} \omega_{\text{II}}^2 \\
 2^\circ) \quad & d_2 - \frac{a_n^2 b_0}{a_0} \geq -2 \sqrt{d_1 + \frac{2 a_n^2 b_0}{a_0} \omega_{\text{II}}^2}
 \end{aligned} \tag{77}$$

en m.b.v. (68) en (72) volgt:

$$\begin{aligned}
 1^\circ) \quad & a_1 b_1 - a_0 b_2 + a_2 b_0 \geq 0 \\
 2^\circ) \quad & a_n b_n - a_{n-1} + b_{n+1} \geq \frac{a_n^2 b_0}{a_0} + \frac{2 \omega_{\text{II}}^2}{b_1} (b_1 - \sqrt{a_1 b_1 - a_0 b_2 + a_2 b_0})
 \end{aligned} \tag{78}$$

De eisen (76) en (78) korten we af door te definiëren:

$$\eta_0 \stackrel{!}{=} a_n b_n - a_{n-1} + b_{n-1} \quad \text{en} \quad \eta_1 \stackrel{!}{=} a_1 b_1 - a_0 b_2 + a_2 b_0$$

zodat we verkrijgen:

Als 1°) $\eta_0 \geq 0$ en 2°) $\eta_1 \geq b_1^2 + \frac{2 b_1}{\omega_{\text{II}}^2} (a_n b_0 - \sqrt{a_0 b_0 \eta_0})$	(79)
--	------

dan is $F_{n+1}(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_n(s)$ realiseerbaar

Als 1°) $\eta_1 \geq 0$ en 2°) $\eta_0 \geq \frac{a_n^2 b_0}{a_0} + \frac{2 \omega_{\text{II}}^2}{b_1} (b_1 - \sqrt{\eta_1})$	(80)
--	------

dan is $F_{n+1}(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_n(s)$ realiseerbaar

We vragen ons af of de eisen (79) noodzakelijk en voldoende zijn voor de realiseerbaarheid van $F_{n+1}(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_n(s)$.

Er geldt: $d_2 = \eta_0 - 2 \omega_{\text{II}}^2$

Kies: $d_1 = \omega_{\text{II}}^2 - 2 \sqrt{\eta_0 d_0} + \varepsilon$

Voor $\eta_0 \geq 0$ en $\varepsilon \geq 0$ is aan (79) voldaan; (66) wordt hiermee:

$$\begin{aligned}
 h_{n+1}(\omega^2) &= \omega^6 + (\eta_0 - 2 \omega_{\text{II}}^2) \omega^4 + (\omega_{\text{II}}^2 - 2 \sqrt{\eta_0 d_0} + \varepsilon) \omega^2 + d_0 \\
 &= \omega^2 (\omega^2 - \omega_{\text{II}}^2)^2 + \eta_0 (\omega^2 - \sqrt{\frac{d_0}{\eta_0}})^2 + \varepsilon \omega^2
 \end{aligned}
 \tag{81}$$

en aangezien $\eta_0 \geq 0$ en $\varepsilon \geq 0$ volgt dat $h_{n+1}(\omega^2) \geq 0$ voor iedere ω . Voorwaarden (79) zijn dus voldoende, opdat $F_{n+1}(s)$ p.r. is. Echter andersom volgt (79) niet uit de voorwaarde $h_{n+1}(\omega^2) \geq 0$ voor iedere ω

Stel n.l. dat $h_{n+1}(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 (\omega^2 + \frac{d_0}{\omega_0^4})$

$F_{n+1}(s)$ is in dat geval behalve voor

$\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{n}{2}-1}$ minimumresistief (zichtbaar) ook voor
 $\omega = \omega_0$ minimumresistief (niet zichtbaar).
 Voor deze keuze van $h_{n+1}(\omega^2)$ volgt voorwaarde (79) hieruit als er een $\eta_0 \geq 0$ en $\varepsilon \geq 0$ gevonden kan worden, z.d.d. vergelijking (81) voor $\omega = \omega_0$ wordt:

$$\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega_{\text{II}}^2)^2 + \eta_0 (\omega_0^2 - \sqrt{\frac{d_0}{\eta_0}})^2 + \varepsilon \omega_0^2 = 0$$

Dit is alleen mogelijk als $\varepsilon = 0, \eta_0 = 0, \omega_0^2 = \omega_{\text{II}}^2$
 of $\varepsilon = 0, \omega_0^2 = \omega_{\text{II}}^2 = \sqrt{d_0/\eta_0}$

Voor $\omega_0 = \omega_{\text{II}}$ wordt $F_{n+1}(s)$ maximaal zichtbaar minimumresistief en deze voorwaarde is niet aan $F_{n+1}(s)$ opgelegd. We kunnen dus concluderen: eisen (79) zijn noodzakelijk. Met een analoge redenering is af te leiden: eisen (80) zijn voldoende en noodzakelijk.

III.2 DE REALISEERBAARHEID VAN DE STAP $F_n(s) \longrightarrow F_{n-1}(s)$

We vragen ons af of $F_n(s) \longrightarrow F_{n-1}(s)$ realiseerbaar is, ervan uitgaande dat $F_{n+1}(s) \longrightarrow F_n(s)$ wel realiseerbaar is (eerste en/of tweede vorm). $F_{n+1}(s)$ is een maximaal zichtbaar minimumresistieve immitantiefunctie (zie hoofdstuk I) en verdere stappen van de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling behoeven dus niet meer onderzocht te worden op hun realiseerbaarheid.

Stel dat $F_{n+1}(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_n(s)$ realiseerbaar is, zodat aan (79) voldaan is,

hetgeen we voor het gemak iets anders schrijven:

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad \eta_0 &\geq 0 \\ 2^\circ) \quad -d_1 + \omega_{II}^2 &\leq 2 \eta_0 \omega_I^2 \sqrt{\frac{a_n^2 b_0}{a_0 \eta_0}} \end{aligned} \quad (82)$$

Met $F_n(s) \stackrel{!}{=} \frac{\sum_{i=0}^n a'_i s^i}{\sum_{i=0}^n b'_i s^i}$ volgt m.b.v. (4):

$$a'_n = \frac{\eta_0}{a_0} \quad ; \quad b'_n = a_n \quad ; \quad a'_0 = b_0 \quad ; \quad b'_0 = a_0 \quad (83)$$

$$g_{12}(j\omega) = g_{01}(j\omega) = -\omega^2 + \omega_{II}^2$$

Bekend is reeds: $h_n(\omega^2) = \eta_0 \omega^4 + (d_1 - \omega_{II}^2) \omega^2 + d_0 \geq 0$

$F_n(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_{n-1}(s)$ is realiseerbaar als aan (13) is voldaan, n.l.

$$h_n(\omega^2) - a'_n b'_n [g_{12}(j\omega)]^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

M.b.v. (83) wordt deze ongelijkheid:

$$(d_1 - \omega_{II}^2 + 2 \eta_0 \omega_I^2) \omega^2 + d_0 - \eta_0 \omega_I^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

waaruit twee eisen volgen:

$$1^\circ) \quad d_0 \geq \eta_0 \omega_I^2 \quad , \quad \text{wat met } d_0 = \frac{a_n^2 b_0}{a_0} \omega_I^2 \quad \text{wordt}$$

$$\frac{a_n^2 b_0}{a_0 \eta_0} \geq 1 \quad (84)$$

$$2^{\circ}) -d_1 + \omega_{\text{II}}^2 \leq 2 \eta_0 \omega_{\text{I}}^2 \quad (85)$$

Deze ongelijkheid volgt niet uit (82) als tevens aan (84) is voldaan; wel andersom: is aan (84) en (85) voldaan, dan volgt (82) hieruit.

(85) wordt m.b.v. (68) en (72):

$$\eta_1 \geq b_1^2 + \frac{2 b_1}{\omega_{\text{II}}^2} (a_n b_0 - \frac{a_0 \eta_0}{a_n}) \quad (86)$$

$F_n(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_{n-1}(s)$ is realiseerbaar als (17) geldt:

$$\left[h_n(\omega^2) - \frac{a_0' (b_n')^2}{b_0'} \{g_{12}(j\omega)\}^2 \right] / \omega^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

wat met (72) en (83) wordt:

$$\left(\eta_0 - \frac{a_n^2 b_0}{a_0} \right) \omega^2 + d_1 - \omega_{\text{II}}^2 + \frac{2 a_n^2 b_0}{a_0} \omega_{\text{I}}^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

waaruit twee eisen volgen:

$$1^{\circ}) \frac{a_0 \eta_0}{a_n^2 b_0} \geq 1 \quad (87)$$

$$2^{\circ}) -d_1 + \omega_{\text{II}}^2 \leq \frac{2 a_n^2 b_0}{a_0} \omega_{\text{I}}^2 \quad (88)$$

Voorwaarde (82) is van kracht:

$$-d_1 + \omega_{\text{II}}^2 \leq \frac{2 a_n^2 b_0}{a_0} \omega_{\text{I}}^2 \sqrt{\frac{a_0 \eta_0}{a_n^2 b_0}}$$

en als (87) ook nog geldt, volgt (88) hier niet uit; wel andersom: uit (87) en (88) volgt (82).

Eis (88) werken we m.b.v. (68) en (72) om tot:

$$\eta_1 \geq b_1^2 \quad (89)$$

Stel dat $F_{n-1}(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_n(s)$ realiseerbaar is, zodat aan (80) voldaan is, hetgeen we iets anders weergeven:

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad \eta_1 &\geq 0 \\ 2^\circ) \quad d_2 - \frac{a_n^2 b_o}{a_o} &\geq -2 \omega_{\text{II}}^2 \sqrt{\frac{\eta_1}{b_1^2}} \end{aligned} \quad (90)$$

Met $F_n(s) \stackrel{!}{=} \frac{\sum_{i=0}^n a_i' s^i}{\sum_{i=0}^n b_i' s^i}$ volgt m.b.v. (6):

$$a_n' = b_n' = 1 \quad ; \quad a_o' = \eta_1 / b_1 \quad ; \quad b_o' = b_1 \quad ; \quad g_{12}(j\omega) = g_{21}(j\omega) = -\omega^2 + \omega_{\text{II}}^2$$

$$\text{Bekend is reeds: } h_n(\omega^2) = \omega^4 + (d_2 - \frac{a_n^2 b_o}{a_o}) \omega^2 + d_1 + \frac{2 a_n^2 b_o}{a_o} \omega_1^2 \quad (91)$$

voor iedere ω

$F_n(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_{n-1}(s)$ is realiseerbaar als aan (16) is voldaan:

$$h_n(\omega^2) - a_n' b_n' [g_{12}(j\omega)]^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

wat met (91) wordt:

$$(d_2 + 2 \omega_{\text{II}}^2 - \frac{a_n^2 b_o}{a_o}) \omega^2 + d_1 - \omega_{\text{II}}^2 + \frac{2 a_n^2 b_o}{a_o} \omega_1^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

waaruit 2 eisen volgen:

$$1^\circ) \quad d_1 - \omega_{\text{II}}^2 + \frac{2 a_n^2 b_o}{a_o} \omega_1^2 \geq 0 \quad \text{wat m.b.v. (68) en (72) wordt:}$$

$$\eta_1 \geq b_1^2 \quad (92)$$

$$2^\circ) \quad d_2 - \frac{a_n^2 b_o}{a_o} \geq -2 \omega_{\text{II}}^2 \quad (93)$$

Deze ongelijkheid volgt niet uit (90) als tevens (92) geldt; andersom wel: (90) volgt uit (92) en (93).

Eis (93) wordt m.b.v. (68) en (72):

$$\eta_0 \geq \frac{a_n^2 b_0}{a_0} \quad (94)$$

$F_n(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_{n+1}(s)$ is realiseerbaar als (17) geldt, n.l.

$$\left[h_n(\omega^2) - \frac{a_0' (b_n')^2}{b_0'} \{g_{12}(j\omega)\}^2 \right] / \omega^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

wat met (91) wordt:

$$\left(1 - \frac{\eta_1}{b_1^2}\right) \omega^2 + d_2 - \frac{a_n^2 b_0}{a_0} + \frac{2 \eta_1 \omega_{\pi}^2}{b_1^2} \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega$$

waaruit 2 eisen volgen:

$$1^\circ) \quad \frac{b_1^2}{\eta_1} \geq 1 \quad (95)$$

$$2^\circ) \quad d_2 - \frac{a_n^2 b_0}{a_0} \geq -2 \frac{\eta_1 \omega_{\pi}^2}{b_1^2} ; \text{ voorwaarde (90) geldt:} \quad (96)$$

$$d_2 - \frac{a_n^2 b_0}{a_0} \geq -2 \frac{\eta_1 \omega_{\pi}^2}{b_1^2} \sqrt{\frac{b_1^2}{\eta_1}}$$

en we zien dat (96) niet uit (90) en (95) volgt; wel volgt (90) uit (95) en (96).

Eis (96) wordt m.b.v. (68) en (72):

$$\eta_0 \geq \frac{a_n^2 b_0}{a_0} + \frac{2 \omega_{\pi}^2}{b_1} \left(b_1 - \frac{\eta_1}{b_1}\right) \quad (97)$$

Er zijn nu 4 stelsels van eisen afgeleid, waarvan stelsel (87), (89) identiek is aan stelsel (94), (92).

Als aan één dezer stelsels van eisen is voldaan, dan bleek

$F_{n+1}(s) \longrightarrow F_n(s)$ volgens de eerste en/of tweede vorm ook steeds realiseerbaar te zijn, mits $\eta_0 \geq 0$ en/of $\eta_1 \geq 0$.

III.3 SAMENVATTING DER RESULTATEN

Als voor een immitantiefunctie

$$F_{n+1}(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} a_i s^i}{\sum_{i=0}^{n+1} b_i s^i} = \frac{N_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)} \quad \text{geldt:}$$

$$\frac{N_e(s)}{D_o(s)} = \frac{a_n (s^2 + \omega_x^2)}{s(s + \omega_x^2)} \quad \text{en} \quad a_{n+1} = b_{n+1} = 1$$

dan is $F_{n+1}(s)$ in een gemodificeerde kettingbreukontwikkeling realiseerbaar, als m.b.v. de volgende afkortingen:

$$\omega_x^2 = b_1(a_n b_{n-1} - a_{n-2}) / (a_n b_1 - a_0)$$

$$\eta_0 = a_n b_n - a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$\eta_1 = a_1 b_1 - a_0 b_2 + a_2 b_0$$

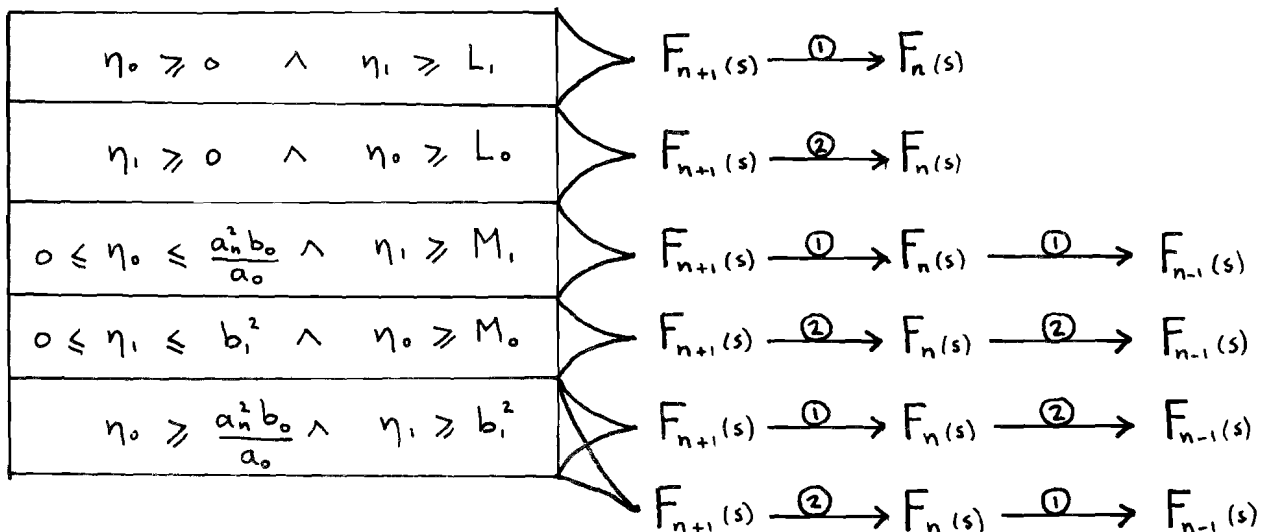
$$L_0 = a_n^2 b_0 / a_0 + \frac{2 \omega_x^2}{b_1} (b_1 - \sqrt{\eta_1})$$

$$L_1 = b_1^2 + \frac{2 b_1}{\omega_x^2} (a_n b_0 - \sqrt{a_0 b_0 \eta_0})$$

$$M_0 = a_n^2 b_0 / a_0 + \frac{2 \omega_x^2}{b_1} (b_1 - \eta_1 / b_1)$$

$$M_1 = b_1^2 + \frac{2 b_1}{\omega_x^2} (a_n b_0 - a_0 \eta_0 / a_n)$$

aan één der volgende stelsels van eisen voldaan is:



IV. EEN ZICHTBAAR MINIMUMRESISTIEVE BIQUARTISCHE IMMITANTIEFUNCTIE

Doel van dit hoofdstuk is na te gaan of een zichtbaar minimumresistieve biquartische immitantiefunctie $F_4(s)$ welke niet realiseerbaar is volgens de gemodificeerde kettingbreukontwikkeling (voortaan afgekort met g.k.o.), op een andere en eveneens "goedkope" manier te realiseren valt.

Daartoe worden allereerst de voorwaarden afgeleid voor realiseerbaarheid van $F_4(s)$ volgens de g.k.o., wat m.b.v. de formules uit hoofdstuk I kort kan worden weergegeven. Dit is dus min of meer een herhaling van het door de heer Pijs verrichte onderzoek (lit. [2]), alleen nu zal $F_4(s)$ niet genormeerd zijn (d.w.z. de keuze $\lim_{s \rightarrow \infty} F_4(s) = 1$ zal niet meer gelden), wat nodig zal blijken te zijn voor het volgende subhoofdstuk.

Hierin zal $F_4(s)$ zowel als $1/F_4(s)$ in twee somtermen gesplitst worden. Aangetoond zal worden dat er geen somtermen bestaan die wél volgens de g.k.o. (eerste of tweede vorm) realiseerbaar zijn. In het derde resp. vierde subhoofdstuk wordt onderzocht of de RLC-synthese volgens de methode van Miyata resp. de methode van Murray Lasso voordelen oplevert.

Dit hoofdstuk wordt afgesloten met een speciale klasse van zichtbaar minimumresistieve biquartische immitantiefuncties, n.l. voortkomend uit een graadverhoging van een niet-zichtbaar minimumresistieve bicubische immitantiefunctie. Dat deze klasse altijd volgens de g.k.o. realiseerbaar is, is reeds aangetoond door de heer Tirtoprodjo (lit. [7]), maar dit bewijs zal nu op een alternatieve manier worden geleverd.

We zullen eerst de uitgangspunten weergeven.

De immitantiefunctie

$$F_4(s) = \frac{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{N_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)}$$

is maximaal zichtbaar minimumresistief, d.w.z.

$$N_o(s) = a_3 s^3 + a_1 s = a_3 s f(s) \tag{98}$$

$$D_e(s) = b_4 s^4 + b_2 s^2 + b_0 = b_4 g_{12}(s) f(s)$$

waarin $f(s) \stackrel{!}{=} s^2 + \omega_1^2$ en $g_{12}(s) \stackrel{!}{=} s^2 + \omega_2^2$ (99)

Voor $F_4(s)$ is afgeleid relatie (9):

$$b_4 g_{12}(j\omega) \cdot N_e(j\omega) - j\omega a_3 D_o(j\omega) \equiv f(j\omega) \cdot h_4(\omega^2) \tag{100}$$

waarin $h_4(\omega^2) \stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^2 d_i \cdot \omega^{2i}$ (101)

V.1 DE REALISEERBAARHEID VAN DE STAP $F_4(s) \longrightarrow F_3(s)$

We drukken eerst de onbekenden ω_1^2 , ω_2^2 , d_i uit in a_i en b_i .
 Uit (98) en (99) volgt:

$$\omega_1^2 = \frac{a_1}{a_3} \quad \text{en} \quad \omega_2^2 = \frac{b_0}{b_4 \omega_1^2} = \frac{b_2}{b_4} - \omega_1^2 \quad (102)$$

en de coëfficiëntrelatie

$$\frac{b_2}{b_4} = \frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3 b_0}{a_1 b_4} \quad (103)$$

Uitwerking van (100) met gebruik van (101) geeft:

$$\begin{aligned} & - a_4 b_4 \omega^6 + \omega^4 (a_2 b_4 - a_3 b_3 + a_4 b_4 \omega_1^2) + \omega^2 (a_3 b_1 - a_0 b_4 - a_2 b_4 \omega_1^2) + a_0 b_4 \omega_1^2 \\ \equiv & - d_2 \omega^6 + \omega^4 (\omega_1^2 d_2 - d_1) + \omega^2 (\omega_1^2 d_1 - d_0) + \omega_1^2 d_0 \end{aligned}$$

waaruit we de coëfficiënten d_i kunnen bepalen:

$$d_2 = a_4 b_4 \quad ; \quad d_0 = \frac{a_0 b_4 \omega_1^2}{\omega_1^2} = \frac{a_0 b_4^2}{b_0} \omega_1^4 \quad ; \quad (104)$$

$$d_1 = - 2 a_4 b_4 \omega_1^2 + a_3 b_3 - a_2 b_4 + a_4 b_2 \quad (105)$$

$$= - 2 \frac{a_0 b_4^2}{b_0} \omega_1^2 + \frac{b_4^2}{b_0^2} \omega_1^4 (a_1 b_1 - a_2 b_0 + a_0 b_2) \quad (106)$$

en de coëfficiëntrelatie

$$\frac{a_4 \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 - a_2 \left(\frac{a_1}{a_3}\right) + a_0}{- b_3 \left(\frac{a_1}{a_3}\right) + b_1} = \frac{a_1}{b_4 \left(\frac{a_1}{a_3}\right) - b_0 b_4 \left(\frac{a_1}{a_3}\right)} \quad (107)$$

$F_u(s)$ is positief reëel, wat impliceert dat $h_u(\omega^2) \geq 0$ voor iedere ω ,

zodat geldt: $d_1 \geq - 2 \sqrt{d_0 d_2}$

Met gebruik van (104) en (105) volgt hieruit de voorwaarde:

$$a_3 b_3 - a_2 b_4 + a_4 b_2 \geq 2 b_4 \sqrt{\frac{a_4}{b_0}} \omega_1^2 (\sqrt{a_4 b_0} - \sqrt{a_0 b_4}) \quad (108)$$

en met (104) en (106) de voorwaarde

$$a_1 b_1 - a_2 b_0 + a_0 b_2 \geq 2 \frac{b_0}{\omega_1^2} \sqrt{\frac{a_0}{b_4}} (\sqrt{a_0 b_4} - \sqrt{a_4 b_0}) \quad (109)$$

Voorwaarde (108) impliceert voorwaarde (109), dit vanwege de coëfficiëntrelaties (103) en (107).

$F_4(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3(s)$ is realiseerbaar als (16) geldt:

$$h_4(\omega^2) - a_4 b_4 [g_{12}(j\omega)]^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega,$$

hetgeen m.b.v. (99), (101), (104) en (105) wordt:

$$(a_3 b_3 - a_2 b_4 + a_4 b_2) \omega^2 + \frac{b_4}{b_0} \omega_1^2 (a_0 b_4 - a_4 b_0) \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega.$$

Hieruit volgen 2 eisen:

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad a_3 b_3 - a_2 b_4 + a_4 b_2 &\geq 0 \\ 2^\circ) \quad a_0 b_4 - a_4 b_0 &\geq 0 \end{aligned} \quad (110)$$

Voorwaarde (108) impliceert deze eisen niet, zodat ze noodzakelijk zijn. Andersom impliceren deze eisen wel voorwaarde (108).

$F_4(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_3(s)$ is realiseerbaar als (17) geldt:

$$[h_4(\omega^2) - \frac{a_0}{b_0} \{g_{12}(j\omega)\}^2] / \omega^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega,$$

hetgeen m.b.v. (99), (101), (104) en (106) wordt:

$$\frac{b_4}{b_0} (a_4 b_0 - a_0 b_4) \omega^2 + \frac{b_4^2 \omega_1^4}{b_0^2} (a_1 b_1 - a_2 b_0 + a_0 b_2) \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega,$$

waaruit 2 eisen volgen:

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad a_1 b_1 - a_2 b_0 + a_0 b_2 &\geq 0 \\ 2^\circ) \quad a_0 b_4 - a_4 b_0 &\leq 0 \end{aligned} \quad (111)$$

Voorwaarde (109) impliceert deze eisen niet, zodat ze noodzakelijk zijn; andersom impliceren deze eisen wel voorwaarde (109).

M.b.v. de volgende definities:

$$\eta_0 \stackrel{!}{=} a_3 b_3 - a_2 b_4 + a_4 b_2$$

$$\eta_1 \stackrel{!}{=} a_1 b_1 - a_2 b_0 + a_0 b_2$$

$$L \stackrel{!}{=} a_0 b_4 - a_4 b_0$$

kunnen we de resultaten samenvatten:

$$\left[\begin{array}{l} \eta_0 \geq 0 \wedge L \geq 0 \\ \eta_1 \geq 0 \wedge L \leq 0 \end{array} \right. \Rightarrow F_L(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3(s) \text{ is realiseerbaar} \quad (112)$$

$$\left[\begin{array}{l} \eta_0 \geq 0 \wedge L \geq 0 \\ \eta_1 \geq 0 \wedge L \leq 0 \end{array} \right. \Rightarrow F_L(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_3(s) \text{ is realiseerbaar} \quad (113)$$

Als aan (112) of (113) is voldaan, dan is $F_3(s)$ een zichtbaar minimumresistieve bicubische immitantiefunctie, die zonder bijkomende voorwaarden in de g.k.o. realiseerbaar is.

Het is interessant om het gedrag van $h_u(\omega^2)$ te onderzoeken als de g.k.o. tot mislukken gedoemd is.

Stel dat $L \geq 0$, dan drukken we $h_u(\omega^2)$ m.b.v. (104), (105) en $x \stackrel{!}{=} \omega^2$ uit:

$$h_u(x) = a_u b_u \left[x^2 - 2 \left(\omega_2^2 - \frac{\eta_0}{2 a_u b_u} \right) x + \frac{a_0 b_u}{a_u b_0} \omega_2^4 \right]$$

$h_u(x)$ gevisualiseerd stelt een parabool voor, waarvan het minimum $W_{\min} = \omega_2^2 - \frac{\eta_0}{2 a_u b_u}$

$$\text{en } h_u(W_{\min}) = - a_u b_u \left(\omega_2^2 - \frac{\eta_0}{2 a_u b_u} \right)^2 + \frac{a_0 b_u^2}{a_0} \omega_2^4 \quad (114)$$

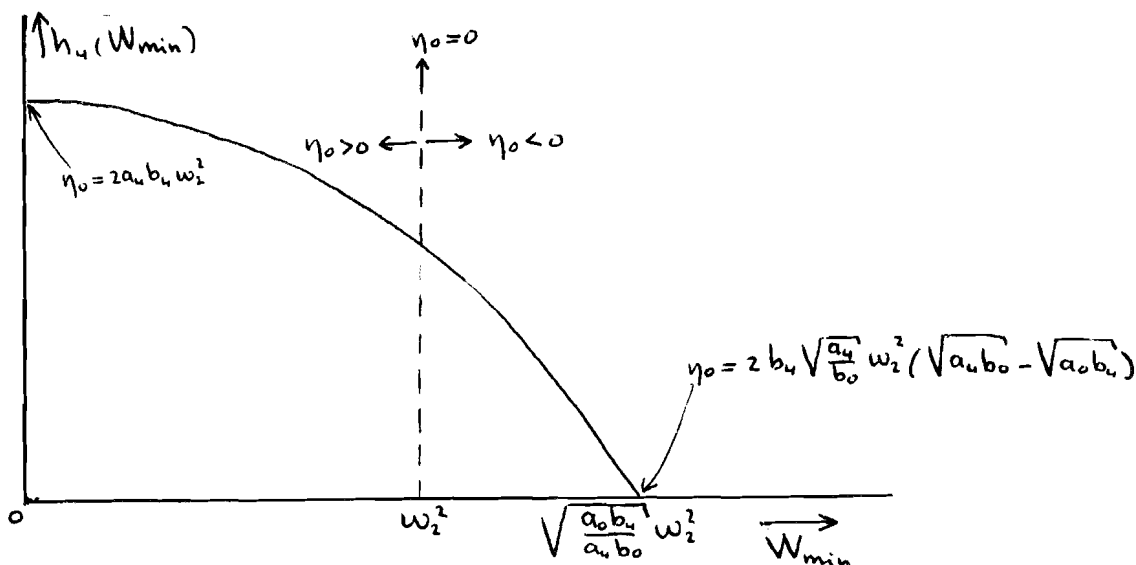
Volgens (108) is de minimale waarde van η_0 gelijk aan

$$2 b_u \sqrt{\frac{a_u}{b_0}} \omega_2^2 \left(\sqrt{a_u b_0} - \sqrt{a_0 b_u} \right)$$

en in dit geval heeft $h_u(x)$ een reëel tweede orde nulpunt

$$W_{\min} = \sqrt{\frac{a_0 b_u}{a_u b_0}} \omega_2^2 \quad (115)$$

We laten W_{\min} als functie van η_0 variëren en tekenen m.b.v. voorgaande gegevens de grafiek van $h_u(W_{\min})$.



Uit deze grafiek blijkt dat het minimum van $h_u(x)$ niet te dicht bij de x -as mag liggen, wil de eerste vorm van de g.k.o. van $F_u(s)$ realiseerbaar zijn, scherper geformuleerd, de eis geldt:

$$W_{\min} \leq \omega_1^2$$

Als $L \leq 0$, drukken we $h_u(\omega^2)$ m.b.v. (104), (106) en $x = \omega^2$ als volgt uit:

$$h_u(x) = \frac{a_o b_u^2}{b_o} \left[\frac{a_u b_o}{a_o b_u} x^2 - 2 \left(\omega_1^2 - \frac{\eta_1}{2 a_o b_o} \right) x + \omega_1^4 \right]$$

waarvan het minimum $W_{\min} = \frac{a_o b_u}{a_u b_o} \left(\omega_1^2 - \frac{\eta_1}{2 a_o b_o} \right)$

(116)

en $h_u(W_{\min}) = \frac{a_o b_u^2}{b_o} \left[- \frac{a_o b_u}{a_u b_o} \left(\omega_1^2 - \frac{\eta_1}{2 a_o b_o} \right) + \omega_1^4 \right]$

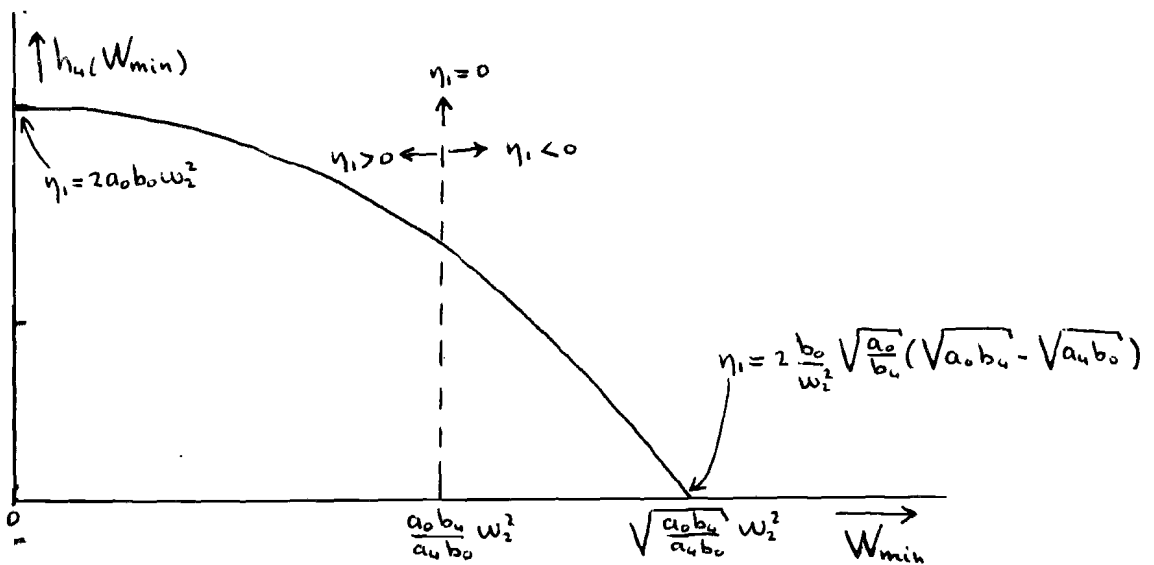
Volgens (109) is de minimale waarde van η_1 gelijk aan

$$2 \frac{b_o}{\omega_1^2} \sqrt{\frac{a_o}{b_u}} \left(\sqrt{a_o b_u} - \sqrt{a_u b_o} \right)$$

en in dit geval heeft $h_u(x)$ een reëel tweede orde nulpunt

$$W_{\min} = \sqrt{\frac{a_o b_u}{a_u b_o}} \omega_1^2$$

We laten W_{\min} als functie van η_1 variëren en tekenen de grafiek van $h_u(W_{\min})$ m.b.v. voorgaande gegevens.



We zien ook nu weer dat het minimum van $h_u(x)$ niet te dicht bij de x -as mag liggen, wil de tweede vorm van de g.k.o. van $F_L(s)$ realiseerbaar zijn. Geeist wordt dan:

$$W_{\min} \leq \frac{a_0 b_u}{a_u b_0} \omega_1^2$$

IV.2 SPLITSING VAN $F_L(s)$ ZOWEL ALS $1/F_L(s)$ IN TWEE SOMTERMEN

Ervan uitgaande dat de g.k.o. van $F_L(s)$ niet realiseerbaar is, proberen we $F_L(s)$ zowel als $1/F_L(s)$ in twee somtermen $F_L^*(s)$ en $F_L^{**}(s)$ te splitsen, z.d.d. iedere term wel in de eerste of de tweede vorm van de g.k.o. realiseerbaar is. Dit betekent dat we er voor moeten zorgen dat $F_L^*(s)$ en $F_L^{**}(s)$ zichtbaar minimumresistief zijn.

We stellen $L > 0$ en $\eta_0 < 0$, (117)
zodat aan (112) en (113) niet voldaan is.

Ons onderzoek kunnen we tot dit geval beperken, immers, een immitantiefunctie waarvan $L < 0$ en $\eta_0 < 0$ (zodat aan (112) en (113) niet voldaan is) kunnen we m.b.v. de transformatie $s = 1/S$ omzetten tot een immitantiefunctie waarvan $L > 0$ en $\eta_0 < 0$.

a) Eerste splitsing

$$F_L(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N^*(s)}{D(s)} + \frac{N^{**}(s)}{D(s)} \tag{118}$$

$$\stackrel{!}{=} F_L^*(s) + F_L^{**}(s)$$

Bekend is reeds: $N(s) = \sum_{i=0}^L a_i s^i$, $\eta_0 = a_3 b_3 - a_2 b_4 + a_u b_2$
en $L = a_0 b_u - a_u b_0$

Stel $N^*(s) = \sum_{i=0}^4 a_i^* s^i$ en $N^{**}(s) = \sum_{i=0}^4 a_i^{**} s^i$,

dan volgt uit (118): $a_i = a_i^* + a_i^{**}$ ($i=0,1,\dots,4$)

wat met $\eta_0^* \stackrel{!}{=} a_3^* b_3 - a_1^* b_4 + a_4^* b_2$ en $\eta_0^{**} \stackrel{!}{=} a_3^{**} b_3 - a_2^{**} b_4 + a_4^{**} b_2$

geeft: $\eta_0 = \eta_0^* + \eta_0^{**}$ (119)

en met $L^* \stackrel{!}{=} a_0^* b_4 - a_4^* b_0$ en $L^{**} \stackrel{!}{=} a_0^{**} b_4 - a_4^{**} b_0$:

$$L = L^* + L^{**} \quad (120)$$

$F_4^*(s)$ zowel als $F_4^{**}(s)$ zijn zichtbaar minimumresistief, zodat

$$\omega_1^2 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{a_1^*}{a_3^*} = \frac{a_1^{**}}{a_3^{**}}$$

N.B. De keuze $N_0^*(j\omega_1) < 0$ en $N_0^{**}(j\omega_1) = -N_0^*(j\omega_1)$ voldoet aan de eis $N_0(j\omega_1) = N_0^*(j\omega_1) + N_0^{**}(j\omega_1) = 0$.

Dan is $\text{Num}[\text{Re } F_4^*(j\omega_1)] = -N_0^*(j\omega_1) D_0(j\omega_1)$

en $\text{Num}[\text{Re } F_4^{**}(j\omega_1)] = -N_0^{**}(j\omega_1) D_0(j\omega_1)$

Welk teken $D_0(j\omega_1)$ ook heeft, altijd zal één dezer termen negatief zijn, zodat $F_4^*(s)$ of $F_4^{**}(s)$ niet positief reëel is.

Conclusie: $N_0^*(j\omega_1) = N_0^{**}(j\omega_1) = 0$

We onderscheiden 3 mogelijkheden om $F_4^*(s)$ zowel als $F_4^{**}(s)$ in de gemodificeerde kettingbreuk te ontwikkelen:

a1) $F_4^*(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3^*(s)$ en $F_4^{**}(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3^{**}(s)$ zijn realiseerbaar als volgens (112): $\eta_0^* \geq 0$ en $\eta_0^{**} \geq 0$.
Dit is in strijd met (117) en (119).

a2) $F_4^*(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_3^*(s)$ en $F_4^{**}(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_3^{**}(s)$ zijn realiseerbaar als volgens (113): $L^* \leq 0$ en $L^{**} \leq 0$.
Dit is in strijd met (117) en (120).

a3) $F_4^*(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3^*(s)$ en $F_4^{**}(s) \xrightarrow{\textcircled{2}} F_3^{**}(s)$ zijn realiseerbaar als volgens (112) en (113) geldt: $\eta_0^* \geq 0$ en $L^{**} \leq 0$.
M.b.v. (108) volgt dan: $\eta_0^{**} \geq 0$, wil $F_4^{**}(s)$ p.r. zijn.
Dit is in strijd met (117) en (119).

Conclusie: Er bestaan geen somtermen van $F_4(s)$ die in de g.k.o. (eerste of tweede vorm) realiseerbaar zijn.

b) Tweede splitsing

$$\begin{aligned} 1/F_4(s) &= \frac{D(s)}{N(s)} = \frac{D^*(s)}{N(s)} + \frac{D^{**}(s)}{N(s)} \\ &\stackrel{!}{=} 1/F_4^*(s) + 1/F_4^{**}(s) \end{aligned} \quad (121)$$

Bekend is reeds: $D(s) = \sum_{i=0}^4 b_i s^i$, $\eta_0 = a_3 b_3 - a_2 b_4 + a_4 b_2$,
 $L = a_0 b_4 - a_4 b_0$.

Stel $D^*(s) = \sum_{i=0}^4 b_i^* s^i$ en $D^{**}(s) = \sum_{i=0}^4 b_i^{**} s^i$,

dan volgt uit (121): $b_i = b_i^* + b_i^{**}$ ($i=0,1,\dots,4$)

wat met $\eta_0^* \triangleq a_3 b_3^* - a_2 b_4^* + a_4 b_2^*$ en $\eta_0^{**} \triangleq a_3 b_3^{**} - a_2 b_4^{**} + a_4 b_2^{**}$

geeft: $\eta_0 = \eta_0^* + \eta_0^{**}$ (122)

en met $L^* \triangleq a_0 b_4^* - a_4 b_0^*$ en $L^{**} \triangleq a_0 b_4^{**} - a_4 b_0^{**}$:

$$L = L^* + L^{**} \quad (123)$$

$F_u^*(s)$ zowel als $F_u^{**}(s)$ zijn zichtbaar minimumresistief, zodat

$$D_e^*(j\omega_i) = D_e^{**}(j\omega_i) = 0$$

We onderscheiden weer 3 mogelijkheden om $F_u^*(s)$ en $F_u^{**}(s)$ in de gemodificeerde kettingbreuk te ontwikkelen.

In de gevallen a1), a2) en a3) behoeven we slechts (119) door (122) en (120) door (123) te vervangen en ieder bewijs is weer van kracht.

Conclusie: Er bestaan geen somtermen van $1/F_u(s)$ die in de g.k.o. (eerste of tweede vorm) realiseerbaar zijn.

IV.3 SYNTHESE VAN $F_u(s)$ VOLGENS MIYATA'S METHODE

We stellen weer dat $\eta_0 < 0$ en $L > 0$, zodat aan (112) en (113) niet voldaan is. De immitantiefunctie $F_u(s)$ wordt genormeerd, z.d.d.

$$a_i' = \frac{a_i}{a_4} \quad \text{en} \quad b_i' = \frac{b_i}{b_4}$$

Van de nieuwe immitantiefunctie $F_u'(s) = \left(\sum_{i=0}^4 a_i' s^i \right) / \left(\sum_{i=0}^4 b_i' s^i \right)$

laten we in het vervolg de accenten weg en we nemen aan dat in subhoofdstuk IV.1 geldt: $a_4 = b_4 = 1$.

De teller van het reële deel van $F_u(j\omega)$:

$$A_u(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_1^2)^2 \cdot (d_2 \omega^4 + d_1 \omega^2 + d_0)$$

bevat één paar tweede orde nulpunten, n.l. voor $\omega = \pm \omega_1$; de coëfficiënt $d_1 = -2\omega_1^2 + \eta_0 < 0$, daar $\eta_0 < 0$.

In de zgn. "Extensions of the Miyata procedure" wordt voor dergelijke immitantiefuncties een interessante synthesemethode beschreven.

(zie appendix B).

We splitsen $h_u(\omega^2) = d_2 \omega^4 + d_1 \omega^2 + d_0 = \omega^4 - 2(\omega_2^2 - \frac{\eta_0}{2}) \omega^2 + \frac{a_0}{b_0} \omega_2^4$

in twee somtermen $[\omega^2 - (\omega_2^2 - \frac{\eta_0}{2})]^2$ en $\frac{a_0}{b_0} \omega_2^4 - (\omega_2^2 - \frac{\eta_0}{2})^2$

waarvan de constante $k \triangleq \frac{a_0}{b_0} \omega_2^4 - (\omega_2^2 - \frac{\eta_0}{2})^2 > 0$ (124)

omdat deze ongelijkheid identiek is aan voorwaarde (108).

Met deze splitsing schrijven we voor $A_u(\omega^2)$:

$$A_u(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_2^2)^2 (\omega^2 - W_{min})^2 + (\omega^2 - \omega_2^2)^2 \cdot k$$

$$\stackrel{!}{=} A_u^*(\omega^2) + A_u^{**}(\omega^2) \quad (125)$$

waarin $W_{min} = \omega_2^2 - \frac{\eta_0}{2} > \omega_2^2$ daar $\eta_0 < 0$ (126)

De immitantiefuncties die corresponderen met deze somtermen noemen we resp.

$$F_u^*(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 a_i^* \cdot s^i}{\sum_{i=0}^4 b_i \cdot s^i} \quad \text{en} \quad F_u^{**}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 a_i^{**} \cdot s^i}{\sum_{i=0}^4 b_i \cdot s^i}$$

Aangezien $F_u(s) = F_u^*(s) + F_u^{**}(s)$ volgt: $a_i = a_i^* + a_i^{**}$

Allereerst wordt $F_u^{**}(s)$ geconstrueerd. Daartoe drukken we de coëfficiënten a_i^{**} in a_i , b_i en k uit: berekend wordt de teller van het reële deel van $F_u^{**}(j\omega)$ en vervolgens wordt gebruik gemaakt van (125).

$$A_u^{**}(\omega^2) = a_4^{**} \omega^8 + (a_3^{**} b_3 - a_4^{**} b_2 - a_2^{**}) \omega^6 +$$

$$(a_4^{**} b_0 + a_0^{**} + a_2^{**} b_2 - a_3^{**} b_1 - a_1^{**} b_3) \omega^4 +$$

$$(a_1^{**} b_1 - a_2^{**} b_0 - a_0^{**} b_2) \omega^2 + a_0^{**} b_0$$

$$= k \omega^4 - 2k \omega_2^2 \omega^2 + k \omega_2^4$$

waaruit is af te leiden:

$$a_4^{**} = 0 \quad ; \quad a_3^{**} = k \cdot \frac{\omega_2^2}{b_0} \cdot \frac{b_2 \omega_2^2 - 2 b_0}{b_1 \omega_2^2 - b_0 b_3} \quad ;$$

$$a_2^{**} = b_3 a_3^{**} \quad ; \quad a_1^{**} = \omega_1^2 a_3^{**}$$

$$\text{ofwel} \quad \frac{a_1^{**}}{a_3^{**}} = \omega_1^2 \quad (127)$$

$$a_0^{**} = k \frac{\omega_1^4}{b_0} \quad \text{wat m.b.v. (102) en (124) wordt}$$

$$a_0^{**} = a_0 - b_0 \left(1 - \frac{\eta_0}{2 \omega_1^2} \right)^2 \quad (128)$$

Realisatie van $F_4^{**}(s)$ vereist 4 reactieve elementen en een weerstand, wat blijkt uit de volgende breukontwikkeling van $F_4^{**}(s)$:

$$F_4^{**}(s) = \frac{1}{\frac{s}{a_3^{**}} + \frac{1}{\frac{a_3^{**}}{\omega_1^2} s + \frac{1}{\alpha_0 + \frac{\alpha_1 s}{s^2 + \omega_1^2}}}}$$

waarin α_0 en α_1 positief en reëel zijn.

Van $F_4^*(s)$ zijn de coëfficiënten a_i^* nu ook bekend: $a_i^* = a_i - a_i^{**}$

$$\text{Uit (102) en (127) blijkt: } \omega_1^2 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{a_1^{**}}{a_3^{**}}$$

zodat $\frac{a_1^*}{a_3^*} = \frac{a_1 - a_1^{**}}{a_3 - a_3^{**}} = \omega_1^2$ en hieruit volgt dat $F_4^*(s)$ zichtbaar

minimumresistief is voor $\omega^2 = \omega_1^2$. Tevens is $F_4^*(s)$ minimumresistief (niet zichtbaar) voor $\omega^2 = W_{\min}$ (zie (125)).

$$\text{Volgens (115) geldt dan: } W_{\min} = \sqrt{\frac{a_0^*}{b_0}} \omega_1^2 \quad (129)$$

$$\text{en m.b.v. (126) volgt dan: } a_0^* > b_0 \quad (130)$$

Dit resultaat is ook anders af te leiden: $a_0^* = a_0 - a_0^{**}$

$$\text{en met (128) geeft dit: } a_0^* = b_0 \left(1 - \frac{\eta_0}{2 \omega_1^2} \right)^2.$$

Daar $\eta_0 < 0$ volgt: $a_0^* > b_0$.

$F_4^*(s)$ wordt in graad verhoogd met een Hurwitzpolynoom $P(s) = P_e(s) + P_o(s)$:

$$\begin{aligned}
 F_{14}^*(s) &= \frac{N_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \cdot \frac{P_e(s) + P_o(s)}{P_e(s) + P_o(s)} \\
 &= \frac{[N_e^*(s) P_e(s) + N_o^*(s) P_o(s)] + [N_e^*(s) P_o(s) + N_o^*(s) P_e(s)]}{[D_e(s) P_e(s) + D_o(s) P_o(s)] + [D_e(s) P_o(s) + D_o(s) P_e(s)]} \\
 &\stackrel{!}{=} \frac{\hat{N}_e(s)}{\hat{D}_e(s)} + \frac{\hat{N}_o(s)}{\hat{D}_o(s)} \quad (131)
 \end{aligned}$$

De polynoom $P(s)$ wordt zodanig gekozen, dat

$$\begin{aligned}
 \text{of } \hat{D}_e(s) = 0 &\left| \begin{array}{l} s^2 = -\omega_1^2, -W_{\min} \end{array} \right. \quad \text{wat impliceert dat} \\
 \hat{N}_o(s) = 0 &\left| \begin{array}{l} s^2 = -\omega_1^2, -W_{\min} \end{array} \right. \\
 &\quad \text{(geval A)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{of } \hat{N}_e(s) = 0 &\left| \begin{array}{l} s^2 = -\omega_1^2, -W_{\min} \end{array} \right. \quad \text{wat impliceert dat} \\
 \hat{D}_o(s) = 0 &\left| \begin{array}{l} s^2 = -\omega_1^2, -W_{\min} \end{array} \right. \\
 &\quad \text{(geval B)}
 \end{aligned}$$

dit vanwege het feit dat ω_1^2 en W_{\min} nulpunten zijn van

$$\{ N_e^*(j\omega) D_e(j\omega) - N_o^*(j\omega) D_o(j\omega) \}$$

Gestreefd wordt naar een polynoom $P(s)$ van zo laag mogelijke graad, om het aantal elementen dat realisatie van $F_{14}^*(s)$ vereist zo klein mogelijk te maken.

$$\text{In geval A is } \hat{D}_e(s) = D_e(s) P_e(s) + D_o(s) P_o(s) = 0 \left| \begin{array}{l} s^2 = -\omega_1^2, -W_{\min} \end{array} \right.$$

$$\text{ofwel: } (s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_1^2) P_e(s) + (b_3 s^3 + b_1 s) P_o(s) = 0 \left| \begin{array}{l} s^2 = -\omega_1^2, -W_{\min} \end{array} \right.$$

Voor $s^2 = -\omega_1^2$ kan hieraan voldaan worden met de keus

$$P_o(s) = s(s^2 + \omega_1^2), \text{ zodat de polynoom } P(s) \text{ tenminste}$$

van de derde graad moet zijn.

In geval B is $\hat{N}_e s = N_e^*(s) P_e(s) + N_o^*(s) P_o(s) = 0 \Big|_{s^2 = -\omega_1^2, -W_{min}}$

$$\text{ofwel: } (s^4 + a_2^* s^2 + a_0^*) P_e(s) + a_3 s (s^2 + \omega_1^2) P_o(s) = 0 \Big|_{s^2 = -\omega_1^2, -W_{min}} \quad (132)$$

Met de keuze $P_e(s) = s^2 + \omega_1^2$ en $P_o(s) = \alpha s$ kan hieraan voldaan worden, mits $\alpha > 0$.

Het onderzoek zal beperkt worden tot geval B en de keuze $P(s) = s^2 + \alpha s + \omega_1^2$. (132) reduceert zich dan tot:

$$s^4 + (a_2^* + \alpha a_3^*) s^2 + a_0^* = 0 \Big|_{s^2 = -W_{min}}$$

$$\text{zodat } \alpha = \frac{1}{a_3^* W_{min}} N_e^*(j\sqrt{W_{min}}) = \frac{1}{a_3^* W_{min}} (W_{min}^2 - a_2^* W_{min} + a_0^*) \quad (133)$$

Als $\alpha > 0$ wordt

$$\hat{N}_e(s) = (s^2 + \omega_1^2)(s^2 + W_{min})(s^2 + W_n) \quad (134)$$

waarin $W_n = \frac{a_0^*}{W_{min}}$; met (129) en (102) wordt dit:

$$W_n = \sqrt{\frac{a_0^*}{b_0}} \omega_1^2 \quad (135)$$

en met (130) volgt dan: $W_n > \omega_1^2$

De teller van het reële deel van de in graad verhoogde immitantiefunctie $F_v^*(s)$ wordt nu voor $s = j\omega$:

$$A_v^*(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_1^2)^2 (\omega^2 - W_{min})^2 \cdot h_b(\omega^2)$$

$$\text{waarin } h_b(\omega^2) = [P_e(j\omega)]^2 - [P_o(j\omega)]^2 = \omega^4 + (\alpha^2 - 2\omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^4 \quad (136)$$

Volgens Miyata's methode moet $h_b(\omega^2)$ uitsluitend positieve coëfficiënten bevatten, wat leidt tot de voorwaarde:

$$\alpha^2 \geq 2\omega_1^2 \quad (137)$$

Er duikt nu echter een aantrekkelijk alternatief op:

$\frac{1}{F_v^*(s)} \cdot \frac{P(s)}{P(s)}$ is een maximaal zichtbaar minimumresistieve bisextische immitantiefunctie en kan dus in een gemodificeerde kettingbreuk

worden ontwikkeld. De laagste orde term van de teller van deze immitantiefunctie is gelijk aan $b_0 \omega_1^2$, van de noemer: $a_0^* \omega_1^2$. Met (130), n.l.: $a_0^* > b_0$, volgt dat we op deze immitantiefunctie de tweede vorm van de g.k.o. moeten toepassen:

$$\frac{1}{F_b^*(s)} \cdot \frac{P(s)}{P(s)} = \frac{\hat{D}_e(s) + \hat{D}_o(s)}{\hat{N}_e(s) + \hat{N}_o(s)} = \frac{\frac{b_0}{a_0^*} \hat{N}_e(s)}{\hat{N}_e(s) + \hat{N}_o(s)} + \frac{\hat{D}_e(s) - \frac{b_0}{a_0^*} \hat{N}_e(s) + \hat{D}_o(s)}{\hat{N}_e(s) + \hat{N}_o(s)}$$

$$\stackrel{!}{=} F_b'(s) + F_b''(s)$$

$F_b''(s)$ is positief reëel, als volgens (17) geldt:

$$\left[h_b(\omega^2) - \frac{b_0 \omega_1^2}{a_0^* \omega_1^2} \{g_{12}(j\omega)\}^2 \right] / \omega^2 \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega.$$

Uit (134) volgt: $g_{12}(j\omega) = -\omega^2 + W_n$

De ongelijkheid wordt dan m.b.v. (135) en (136):

$$\left(1 - \frac{b_0}{a_0^*}\right) \omega^2 + \left(\alpha^2 - 2\omega_1^2 + \frac{2b_0}{a_0^*} W_n\right) \geq 0 \quad \text{voor iedere } \omega.$$

Aangezien $a_0^* > b_0$, volgt hieruit één eis:

$$\alpha^2 \geq 2\omega_1^2 - \frac{2b_0}{a_0^*} W_n, \quad \text{wat met (135) wordt:}$$

$$\alpha^2 \geq 2\omega_1^2 \left(1 - \sqrt{\frac{b_0}{a_0^*}}\right) \quad (138)$$

Deze eis is minder zwaar dan (137), zodat de g.k.o. van de in graad verhoogde $F_b(s)$ een grotere kans tot slagen heeft dan het volledig uitvoeren van Miyata's methode.

Realisatie van $F_b^{**}(s)$ vereiste 5 elementen. Volgens (12) vereist realisatie

van $\frac{1}{F_b^*(s)} \cdot \frac{P(s)}{P(s)}$ 20 elementen.

Conclusies: In het gunstigste geval, n.l. als de polynoom $P(s)$ van een zo laag mogelijke graad is, vereist synthese van $F_b(s)$ volgens Miyata's methode 25 elementen. Als de g.k.o. van $F_b(s)$ wel realiseerbaar was, vereiste synthese 14 elementen. Dit maakt Miyata's methode niet erg aantrekkelijk. Gebleken is wel dat graadverhoging gecombineerd met de g.k.o. de eisen voor realiseerbaarheid minder zwaar maakt.

IV.4 SYNTHESE VAN $F_u(s)$ VOLGENS MURRAY LASSO'S METHODE

We zullen weer met een genormeerde $F_u(s)$ (zoals in IV.3) werken en stellen dat $\eta_0 < 0$ en $L > 0$, zodat aan (112) en (113) niet voldaan is. Onderzocht zal worden of het feit dat de minimumresistiviteit van $F_u(s)$ zichtbaar is, voordelen oplevert bij synthese volgens Murray Lasso's methode. (Voor een beschrijving hiervan: zie appendix C) Teller en noemer van $F_u(s)$ worden vermenigvuldigd met de surplusfaktor $s + h$:

$$\begin{aligned}
 F_u(s) &= \frac{M_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \cdot \frac{s + h}{s + h} \\
 &= \frac{(s^2 + \omega_1^2) B(s)}{(D_e(s) + D_o(s))(s + h)} + \frac{s C(s)}{(D_e(s) + D_o(s))(s + h)} \\
 &\stackrel{!}{=} F_u^I(s) + F_u^{II}(s) \tag{139}
 \end{aligned}$$

en vervolgens hebben we $F_u(s)$ gesplitst in twee somtermen $F_u^I(s)$ en $F_u^{II}(s)$, z.d.d. $F_u^I(s)$ nulpunten heeft voor $s = \pm j\omega_1$ en $F_u^{II}(s)$ een nulpunt in de oorsprong. $B(s)$ en h worden zodanig gekozen dat geldt:

$$\begin{aligned}
 \text{Num [Ev } F_u^I(s)] &= (s^2 + \omega_1^2) B(s) [D_e(s) - D_o(s)] (s + h) \\
 &= (s^2 + \omega_1^2) h^2 \cdot h_u(-s^2)
 \end{aligned}$$

$$\text{Met } M(s) \stackrel{!}{=} -B(s) \cdot (s - h)/h^2 \tag{140}$$

wordt deze vergelijking gereduceerd tot:

$$\text{Ev [} M(s) \{ D_e(s) - D_o(s) \}] = (s^2 + \omega_1^2) \cdot h_u(-s^2) \tag{141}$$

Uit deze vergelijking is af te leiden dat de polynoom $M(s)$ van de derde graad is:

$$M \cdot s \stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^3 m_i s^i \tag{142}$$

De coëfficiënten m_i zijn m.b.v. (141) te bepalen. Als $M(s)$ geen reële positieve wortel h heeft, inverteren we $F_u(s)$ en dezelfde procedure als bovenstaande wordt hierop toegepast. Vergelijking (141) wordt dan:

$$\text{Ev [} M(s) \{ N_e(s) - N_o(s) \}] = (s^2 + \omega_1^2) \cdot h_u(-s^2) \tag{143}$$

Er bestaat een eenvoudige test om te weten te komen of $M(s)$ een reële positieve wortel h heeft:

$$\text{Als } \frac{F_u(j\omega_1)}{j\omega_1} = \frac{a_3}{\omega_2^2 - \omega_1^2} > 0 \quad \text{ofwel: } \omega_2^2 > \omega_1^2,$$

dan is er een $h > 0$ (geval A)

$$\text{Als } \frac{F_u(j\omega_1)}{j\omega_1} < 0, \text{ inverteren we } F_u(s) \text{ en zal } \frac{1}{j\omega_1 F_u(j\omega_1)} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{a_1} > 0$$

ofwel: $\omega_2^2 < \omega_1^2$ en dan is er een $h > 0$ (geval B)

Beide gevallen worden onderzocht.

A) Vergelijking (141) met (142) uitwerken:

$$(m_2 s^2 + m_0)(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) - (m_3 s^3 + m_1 s)(b_3 s^3 + b_1 s) = (s^2 + \omega_1^2)(s^4 - d_1 s^2 + d_0) \quad (144)$$

$$\text{Voor iedere } s \text{ moet deze vergelijking gelden, zodat } \frac{m_1}{m_3} = \omega_1^2 \quad (145)$$

(144) reduceert zich dan tot:

$$(m_2 - b_3 m_3) s^4 + (m_2 \omega_1^2 + m_0 - m_3 b_1) s^2 + m_0 \omega_2^2 = s^4 - d_1 s^2 + d_0$$

Met gebruik van (104) en (105) bepalen we hieruit de coëfficiënten m_i :

$$m_3 = \frac{\omega_1^2 (1 - a_0/b_0) - \eta_0}{b_3 \omega_1^2 - b_1}; \quad m_2 = 1 + b_3 m_3; \quad m_0 = \frac{a_0}{b_0} \omega_1^2 \quad (146)$$

Alhoewel volgens (144): $m_1 = \omega_1^2 m_3$, kunnen we toch niet op een eenvoudige manier de reële positieve wortel h van $M(s)$ bepalen.

B) Nu moeten we $F_u(s)$ inverteren. We werken vergelijking (143) met (142) uit:

$$(m_2 s^2 + m_0)(s^4 + a_2 s^2 + a_0) - a_3 s^2 (s^2 + \omega_1^2)(m_3 s^2 + m_1) = (s^2 + \omega_1^2)(s^4 - d_1 s^2 + d_0)$$

Deze vergelijking moet voor iedere s gelden, dus geldt: $\frac{m_0}{m_2} = \omega_1^2$ (147)

Hiermee reduceert zich deze vergelijking tot:

$$(m_2 - a_3 m_3) s^4 + (a_2 m_2 - a_3 m_1) s^2 + a_0 m_2 = s^4 - d_1 s^2 + d_0$$

Met gebruik van (104) en (105) bepalen we hieruit de coëfficiënten m_i :

$$m_3 = \frac{\omega_1^4}{a_3 b_0} - \frac{1}{a_3} ; m_2 = \frac{\omega_1^4}{b_0} ; m_1 = \frac{a_2 \omega_1^4}{a_3 b_0} - 2 \frac{\omega_1^2}{a_3} + \frac{\eta_0}{a_3} \quad (148)$$

Ook nu valt er niets bijzonders uit de polynoom $M(s)$ te halen. Het feit dat $F_u(s)$ zichtbaar minimumresistief is, werkt slechts door in de relatie $m_0 = \omega_1^2 m_2$.

We zullen dit met een

VOORBEELD illustreren:

Van de admittantiefunctie

$$Y_u(s) = \frac{N_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} = \frac{s^4 + \frac{1}{3}s + \frac{35}{9}s + \frac{4}{3}s + 2}{s^4 + \frac{101}{50}s + \frac{5}{2}s + \frac{51}{25}s + 1}$$

is de teller van het reële deel van $Y_u(j\omega)$:

$$A_u(\omega^2) = (\omega^2 - 2) \cdot h_u(\omega^2)$$

waarin $h_u(\omega^2) = \omega^4 - \frac{469}{450} \omega^2 + \frac{1}{2} > 0$ voor iedere ω ,

aangezien $-\frac{469}{450} > -\sqrt{2}$. Verder heeft $Y_u(s)$ geen polen of nulpunten op de $j\omega$ -as, zodat deze admittantiefunctie positief reëel is.

$Y_u(s)$ is zichtbaar minimumresistief voor $\omega^2 = \omega_1^2 = 2$. Met $\omega_2^2 = \frac{1}{2}$ volgt dat $\omega_2^2 < \omega_1^2$, zodat we $Y_u(s)$ moeten inverteren.

Na berekening volgt: $\eta_0 = -19/450 < 0$ en $L = 1 > 0$, zodat aan (112) en (113) niet voldaan is en de g.k.o. van $Y_u(s)$ tot mislukken gedoemd is.

We berekenen de coëfficiënten m_i m.b.v. (147) en (148) en schrijven hiermee

$$M(s) = -\frac{9}{8} s^3 + \frac{1}{4} s^2 - \frac{21}{200} s + \frac{1}{2}$$

$M(s)$ heeft een reële positieve wortel $h = \frac{4}{5}$

m.b.v. (140) kunnen we nu $B(s)$ berekenen:

$$B(s) = -h^2 \frac{M(s)}{s-h} = \frac{18}{25} s^2 + \frac{52}{125} s + \frac{2}{5}$$

en m.b.v. (139) volgt hiermee:

$$C(s) = s^4 + \frac{21}{10} s^3 + \frac{37}{10} s^2 + \frac{11}{5} s + \frac{9}{5}$$

De somtermen $Z_u^I(s)$ en $Z_u^{II}(s)$ van $Z_u(s) = \frac{1}{Y_u(s)}$ zijn nu bekend:

$$\begin{aligned} Z_u^I(s) &= \frac{(s^2 + 2) \left(\frac{18}{25} s^2 + \frac{52}{125} s + \frac{2}{5} \right)}{s^5 + \frac{21}{15} s^4 + \frac{199}{45} s^3 + \frac{40}{9} s^2 + \frac{46}{15} s + \frac{9}{5}} \\ &= \frac{1}{\frac{200}{117} \frac{s}{s^2 + 2} + \frac{25}{18} s + \frac{1}{\frac{91}{100} Z_2(s)}} \end{aligned} \quad (149)$$

$$\begin{aligned} Z_u^{II}(s) &= \frac{s \left(s^4 + \frac{21}{10} s^3 + \frac{37}{10} s^2 + \frac{11}{5} s + \frac{9}{5} \right)}{s^5 + \frac{21}{15} s^4 + \frac{199}{45} s^3 + \frac{40}{9} s^2 + \frac{46}{15} s + \frac{9}{5}} \\ &= \frac{1}{\frac{9}{8} s + \frac{6s}{s^2 + 2} + Z_2(s)} \end{aligned} \quad (150)$$

waarin $Z_2(s) = \frac{s^2 + \frac{93}{130} s + \frac{9}{10}}{s^2 + \frac{26}{45} s + \frac{5}{9}}$

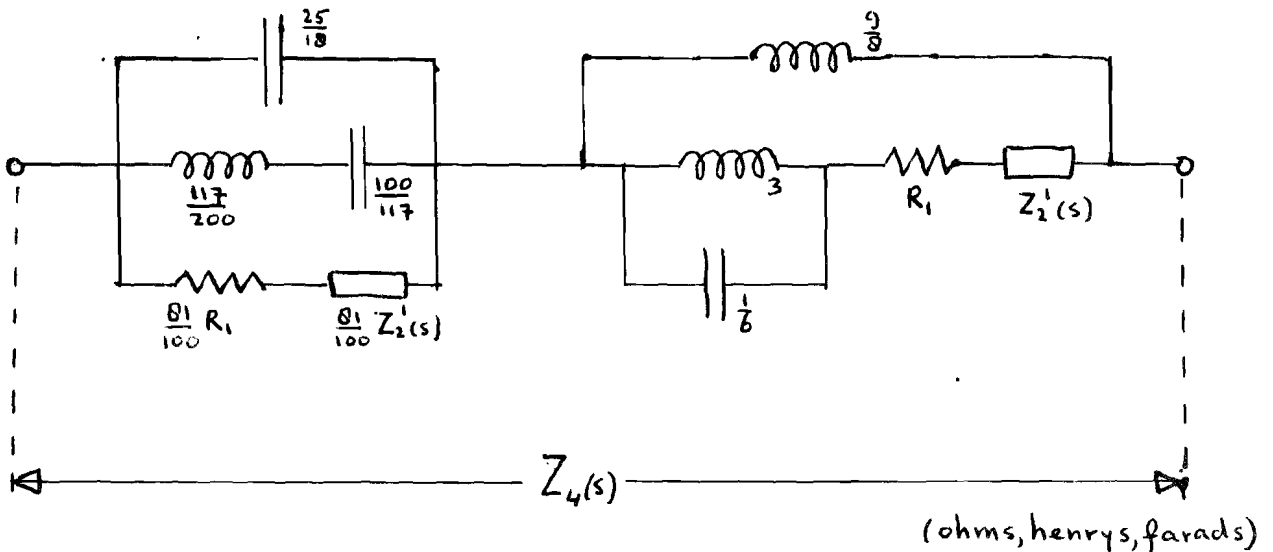
De teller van het reële deel van $Z_2(j\omega)$:

$$A_2(\omega^2) = \omega^4 - \frac{469}{450} \omega^2 + \frac{1}{2} > 0 \text{ voor iedere } \omega, \text{ daar}$$

$$-\frac{469}{450} > -\sqrt{2}$$

Na van $Z_2(s)$ de kleinste waarde van z 'n reële deel R_1 , op de $j\omega$ -as afgetrokken te hebben, kunnen we op de rest $Z_2'(s)$ dezelfde procedure toepassen (dus $Z_2(s) = R_1 + Z_2'(s)$) als op $Z_4(s)$.

Met (149) en (150) synthetiseren we $Y_u(s)$:



Synthese van $Z_2'(s)$ volgens Murray Lasso's methode vereist 8 elementen, zodat het totale aantal benodigde elementen voor synthese van $Y_u(s)$ 24 bedraagt. Door een kleine variatie op deze synthese toe te passen kan volgens Reza (lit.) dit aantal gereduceerd worden tot 21.

Conclusies: Uit dit voorbeeld blijkt dat het feit dat de minimumresistiviteit van $Y_u(s)$ zichtbaar is, geen bijzondere voordelen oplevert als Murray Lasso's methode wordt toegepast: het aantal benodigde elementen (R,L,C) is even groot als $Y_u(s)$ niet-zichtbaar minimumresistief zou zijn. Wel verdient synthese van $Y_u(s)$ volgens deze methode de voorkeur boven Miyata's methode, omdat het aantal benodigde elementen kleiner is.

IV.5 EEN SPECIALE KLASSE VAN ZICHTBAAR MINIMUMRESISTIEVE BIQUARTISCHE
IMMITANTIEFUNCTIES

Door een minimumresistieve bicubische immitantiefunctie $F_3^*(s)$ met een surplusfaktor $(s + q)$ in graad te verhogen, verkrijgen we bij een juiste keuze van q een zichtbaar minimumresistieve biquartische immitantiefunctie $F_4(s)$. In dit subhoofdstuk zal bewezen worden dat de g.k.o. van $F_4(s)$ altijd realiseerbaar is. Dit bewijs zal berusten op toepassing van de voorwaarden (112) en (113).

De bicubische immitantiefunctie

$$F_3^*(s) = \frac{s^3 + a_2^*s^2 + a_1^*s + a_0^*}{s^3 + b_2^*s^2 + b_1^*s + b_0^*}$$

is minimumresistief voor $\omega^2 = \omega_1^2$. De teller van het reële deel van $F_3^*(j\omega)$ bevat dus een nulpunt voor $\omega^2 = \omega_1^2$:

$$\begin{aligned} A_3(\omega^2) &= \omega^6 + (a_2^*b_2^* - a_1^* - b_1^*)\omega^4 + (a_1^*b_1^* - a_2^*b_0^* - a_0^*b_2^*)\omega^2 + a_0^*b_0^* \\ &= (\omega^2 - \omega_1^2)\left(\omega^2 + \frac{a_0^*b_0^*}{\omega_1^4}\right) \end{aligned} \quad (151)$$

waaruit valt af te leiden:

$$a_2^*b_2^* - a_1^* - b_1^* = \frac{a_0^*b_0^*}{\omega_1^4} - 2\omega_1^2 \quad (152)$$

$$a_1^*b_1^* - a_2^*b_0^* - a_0^*b_2^* = \omega_1^4 - 2\frac{a_0^*b_0^*}{\omega_1^2} \quad (153)$$

$F_3^*(s)$ wordt met een surplusfaktor $(s + q)$ in graad verhoogd:

$$\begin{aligned} F_4(s) &= F_3^*(s) \frac{s + q}{s + q} = \frac{s^4 + (a_2^* + q)s^3 + (a_1^* + qa_2^*)s^2 + (a_0^* + qa_1^*)s + qa_0^*}{s^4 + (b_2^* + q)s^3 + (b_1^* + qb_2^*)s^2 + (b_0^* + qb_1^*)s + qb_0^*} \\ &= \frac{N_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \end{aligned}$$

Gezocht wordt een positief reële q , z.d.d.

$$\text{of } D_e(j\omega) = 0, \text{ ofwel } q_1 = \frac{\omega_1^2(\omega_1^2 - b_1^*)}{b_2^*\omega_1^2 - b_0^*} \quad (154)$$

$$\text{Voor deze keuze van } q \text{ volgt met } N_e(s)D_e(s) - N_o(s)D_o(s) = 0 \left| \begin{array}{l} s^2 = -\omega_1^2 \end{array} \right.$$

dat $N_o(j\omega_1) = 0$; q_1 voldoet dus ook aan:

$$q_1 = \frac{a_2^* \omega_1^2 - a_o^*}{a_1^* - \omega_1^2}$$

óf $N_e(j\omega_1) = 0$, ofwel $q_2 = \frac{\omega_1^2 (\omega_1^2 - a_1^*)}{a_2^* \omega_1^2 - a_o^*}$

Voor deze keuze van q volgt met $N_e(s) D_e(s) - N_o(s) D_o(s) = 0 \left| \begin{array}{l} s^2 = -\omega_1^2 \end{array} \right.$

dat $D_o(j\omega_1) = 0$ en q_2 voldoet dus eveneens aan

$$q_2 = \frac{b_2^* \omega_1^2 - b_o^*}{b_1^* - \omega_1^2} \tag{155}$$

Uit (154) en (155) volgt: $q_2 \omega_1^2 = -q_1$
 en hiermee kunnen we concluderen dat er altijd een positief reële q gevonden kan worden.

In het vervolg stellen we: $q_1 > 0$. Is hieraan niet voldaan bij een te realiseren $F_3^*(s)$, dan inverteren we $F_3^*(s)$ en passen hierop vervolgens bovenstaande procedure weer toe.

$F_4(s) \xrightarrow{\textcircled{1}} F_3(s)$ is realiseerbaar, als aan (112) is voldaan:

- 1°) $q_1 a_o^* \geq q_1 b_o^*$ ofwel $a_o^* \geq b_o^*$
- 2°) $(a_2^* + q_1)(b_2^* + q_1) - (a_1^* + q_1 a_2^*) + (b_1^* + q_1 b_2^*) \geq 0$

De tweede ongelijkheid is om te werken tot:

$$(a_2^* b_2^* - a_1^* - b_1^*) + 2 (b_2^* q_1 + b_1^*) + q_1^2 \geq 0 \tag{156}$$

Aangezien $D_e(j\omega_1) = 0$ ofwel $\omega_1^4 - (b_2^* q_1 + b_1^*) \omega_1^2 + q_1 b_o^* = 0$

volgt: $b_2^* q_1 + b_1^* = \omega_1^2 + \frac{q_1 b_o^*}{\omega_1^2}$ (157)

Dit resultaat en (152) verwerken we in (156):

$$\frac{a_o^* b_o^*}{\omega_1^4} + 2 \frac{q_1 b_o^*}{\omega_1^2} + q_1^2 \geq 0$$

Aan deze ongelijkheid is altijd voldaan, daar er uitsluitend positieve termen in voorkomen. Als enigste eis blijft hiermee over:

$$a_o^* \geq b_o^* \quad (158)$$

$F_u(s) \xrightarrow{(2)} F_3(s)$ is realiseerbaar, als aan (113) is voldaan:

$$1^{\circ}) \quad a_o^* \leq b_o^*$$

$$2^{\circ}) \quad (a_o^* + q_1 a_1^*)(b_o^* + q_1 b_1^*) - (a_1^* + q_1 a_2^*) b_o^* q_1 + (b_1^* + q_1 b_2^*) a_o^* q_1 \geq 0,$$

hetgeen wordt omgewerkt tot:

$$q_1^2 (a_1^* b_1^* - a_2^* b_o^* - a_o^* b_2^*) + 2q_1 a_o^* (q_1 b_2^* + b_1^*) + a_o^* b_o^* \geq 0$$

M.b.v. (153) en (157) wordt deze ongelijkheid :

$$q_1^2 \omega_1^4 + 2q_1 a_o^* \omega_1^2 + a_o^* b_o^* \geq 0$$

Hieraan is altijd voldaan; als enigste eis blijft hiermee over:

$$a_o^* \leq b_o^* \quad (159)$$

Uit (158) en (159) blijkt dat $F_u(s)$ altijd in de eerste óf de tweede vorm van de g.k.o. realiseerbaar is.

V ENKELE OVEREENKOMSTEN TUSSEN DE GEMODIFICEERDE KETTINGBREUKONTWIKKELING, MIYATA'S METHODE EN MURRAY LASSO'S METHODE, TOEGEPAST OP LAGERE GRAADS IMMITANTIEFUNCTIES.

In het vorige hoofdstuk is aangetoond dat Miyata's en Murray Lasso's methode, toegepast op een zichtbaar minimumresistieve biquartische immitantiefunctie, nauwelijks overeenkomt met de g.k.o. We zullen dit onderzoek voortzetten en beide methodes toepassen op een minimumresistieve biquadratische en een minimumresistieve (zichtbaar én niet-zichtbaar) bicubische immitantiefunctie om vervolgens een vergelijking met de g.k.o. te maken. Omdat uitsluitend immitantiefuncties behandeld zullen worden die minimumresistief zijn voor één ω^2 -waarde, kunnen we voor het reële deel van $F_n(j\omega)$ schrijven: (en hiervan uitsluitend de teller):

$$A_n(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_1^2)^2 \cdot h_n(\omega^2)$$

waarin n de graad is van zowel de teller als de noemer van $F_n(s)$. Bij toepassing van Miyata's methode op $F_n(s)$ wordt relatie (141) dan:

$$\text{Ev} \left[M(s) \left\{ D_e(s) - D_o(s) \right\} \right] = (s^2 + \omega_1^2) \cdot h_n(\omega^2) \quad (160)$$

waarin M(s) een (n-1)de graads polynoom is:

$$M(s) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i s^i \quad (161)$$

V.1 EEN MINIMUMRESISTIEVE BIQUADRATISCHE IMMITANTIEFUNCTIE

De biquadratische immitantiefunctie

$$F_2(s) = \frac{N_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} = \frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$

is minimumresistief voor $\omega^2 = \omega_1^2$, d.w.z.

$$\begin{aligned} A_2(\omega^2) &= \omega^4 - (a_0 + b_0 - a_1 b_1) \omega^2 + a_0 b_0 \\ &= (\omega^2 - \sqrt{a_0 b_0})^2 \end{aligned}$$

waaruit volgt dat $\omega_1^2 = \sqrt{a_0 b_0}$ (162)

en verder de coëfficiëntrelatie $a_1 b_1 = (\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0})^2$

We stellen $a_o < b_o$, wat geen beperking inhoudt, want als $a_o > b_o$, inverteren we $F_2(s)$ en dan is de laagste graads term van de teller hiervan ook kleiner dan die van de noemer.

Als $F_2(s)$ wordt gesynthetiseerd volgens

MIYATA'S METHODE

wordt $F_2(s)$ in graad verhoogd met de surplusfaktor $P(s) = (s + q)$:

$$F_2(s) = F_2(s) \frac{s + q}{s + q} = \frac{s^3 + (a_1 + q) s^2 + (a_o + qa_1) s + qa_o}{s^3 + (b_1 + q) s^2 + (b_o + qb_1) s + qb_o}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{\hat{N}_o(s) + \hat{N}_e(s)}{\hat{D}_o(s) + \hat{D}_e(s)} \quad (163)$$

zodat $\hat{N}_e(j\omega) \hat{D}_e(j\omega) - \hat{N}_o(j\omega) \hat{D}_o(j\omega) = (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 + q^2)$

$$\stackrel{!}{=} A_3(\omega^2) \quad (164)$$

q wordt zodanig gekozen dat geldt:

$$\hat{D}_e(j\omega_1) = 0, \text{ ofwel: } q = \frac{b_1 \omega_1^2}{b_o - \omega_1^2} \quad (165)$$

Voor deze keuze van q volgt met (164):

$$\hat{N}_o(j\omega_1) = 0, \text{ ofwel: } q = \frac{\omega_1^2 - a_o}{a_1} \quad (166)$$

Aangezien $a_o < b_o$, volgt met (162) dat $q > 0$

De in graad verhoogde $F_2(s)$ wordt gesplitst in twee somtermen $F_3^I(s)$ en $F_3^{II}(s)$, z.d.d.

$$\text{Re } F_3^I(j\omega) = \frac{q^2(\omega^2 - \omega_1^2)^2}{[\hat{D}_e(j\omega)]^2 - [\hat{D}_o(j\omega)]^2} = \frac{q^2(s^2 + \omega_1^2)^2}{(b_1 + q)^2(s^2 + \omega_1^2)^2 - s^2(s^2 + b_o + qb_1)^2} \Bigg|_{s=j\omega}$$

$$\text{Re } F_3^{II}(j\omega) = \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_1^2)^2}{[\hat{D}_e(j\omega)]^2 - [\hat{D}_o(j\omega)]^2} = \frac{-s^2(s^2 + \omega_1^2)^2}{(b_1 + q)^2(s^2 + \omega_1^2)^2 - s^2(s^2 + b_o + qb_1)^2} \Bigg|_{s=j\omega}$$

en met (164) blijkt: $\operatorname{Re} F_2(j\omega) = \operatorname{Re} F_3^I(j\omega) + \operatorname{Re} F_3^{II}(j\omega)$

$F_3^I(s)$ laat zich gemakkelijk construeren uit deze splitsing:

$$F_3^I(s) = \frac{(s^2 + \omega_1^2) q^2 / (b_1 + q)}{(b_1 + q)(s^2 + \omega_1^2) + s(s^2 + b_0 + q b_1)}$$

Daar $\hat{D}_e(j\omega_1) = 0$ volgt: $q^2 = \frac{\omega_1^4}{b_0^2} (b_1 + q)^2$ en met (162):

$$q^2 = \frac{a_0}{b_0} (b_1 + q)^2,$$

zodat

$$F_3^I(s) = \frac{\frac{a_e}{b_0} \hat{D}_e(s)}{\hat{D}_e(s) + \hat{D}_0(s)} \quad (167)$$

Met $F_3^{II}(s) = F_2(s) - F_3^I(s)$ volgt:

$$F_3^{II}(s) = \frac{\hat{N}_e(s) - \frac{a_e}{b_0} \hat{D}_e(s) + \hat{N}_0(s)}{\hat{D}_e(s) + \hat{D}_0(s)} \quad (168)$$

Bij synthese volgens de

GEMODIFICEERDE KETTINGBREUKONTWIKKELING

moeten we $F_2(s)$ eveneens in graad verhogen, z.d.d. de minimumresistiviteit zichtbaar wordt, ofwel: (165) geldt weer. Er blijkt nu dat de splitsing van

$F_2(s) \frac{s+q}{s+q}$ in twee somtermen $F_3^I(s)$ en $F_3^{II}(s)$ die voldoen aan (167) en (168)

identiek is aan de tweede vorm van de g.k.o.

Als $F_2(s)$ volgens

MURRAY LASSO'S METHODE

wordt gesynthetiseerd, dan moet eerst getest worden of

$$\frac{F_2(j\omega_1)}{j\omega_1} > 0, \text{ ofwel } \frac{1}{\sqrt{b_0}} \cdot \frac{a_1}{\sqrt{b_0} - \sqrt{a_0}} > 0$$

Daar we gesteld hebben dat $a_0 < b_0$, is hieraan voldaan.
 We werken (160) met (161) uit ($n=2$):

$$(s^2 + b_0) m_0 - m_1 b_1 s^2 = s^2 + \omega_1^2$$

Met (162) volgt: $m_0 = \sqrt{\frac{a_0}{b_0}}$; $m_1 = \frac{\sqrt{\frac{a_0}{b_0}} - 1}{b_1}$

en hiermee wordt de positieve wortel van $M(s)$:

$$h = -\frac{m_0}{m_1} = \frac{\sqrt{\frac{a_0}{b_0}} b_1}{1 - \sqrt{\frac{a_0}{b_0}}} = \frac{b_1 \omega_1^2}{b_0 - \omega_1^2}$$

en met (165) zien we dat $h = q$ (169)

Met $h = \frac{\omega_1^2}{b_0} (b_1 + h)$ en (162) lossen we $B(s)$ op (zie (140)):

$$\begin{aligned} B(s) &= \frac{-h^2}{s-h} \cdot M(s) = -h^2 m_1 = h m_0 = \sqrt{\frac{a_0}{b_0}} \frac{\omega_1^2}{b_0} (b_1 + h) \\ &= \frac{a_0}{b_0} (b_1 + h) \end{aligned} \quad (170)$$

$$\begin{aligned} \text{Daar } F_2(s) \frac{s+h}{s+h} &= \frac{(s^2 + \omega_1^2) B(s)}{\hat{D}_e(s) + \hat{D}_o(s)} + \frac{s C(s)}{\hat{D}_e(s) + \hat{D}_o(s)} \\ &\stackrel{!}{=} F_3^I(s) + F_3^{II}(s) \end{aligned}$$

volgt met (169) en (170) dat $F_3^I(s)$ voldoet aan (167) en $F_3^{II}(s)$ aan (168).

Hiermee is aangetoond dat Miyata's methode, Murray Lasso's methode en de tweede vorm van de g.k.o., toegepast op een minimumresistieve biquadratische immitantiefunctie, hetzelfde resultaat opleveren.

Langs verschillende wegen belanden we dus bij identieke somtermen $F_3^I(s)$ en $F_3^{II}(s)$. Realisatie van $F_2(s)$ vereist daarom telkens 8 elementen (6 reactieve elementen en 2 weerstanden).

V.2 EEN ZICHTBAAR MINIMUMRESISTIEVE BICUBISCHE IMMITANTIEFUNCTIE

De bicubische immitantiefunctie

$$F_3(s) = \frac{N_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)} = \frac{s^3 + a_1 s^2 + a_0 s + a_o}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_o}$$

is zichtbaar minimumresistief voor $\omega^2 = \omega_1^2$, d.w.z.

$$N_o(s) = s^3 + a_1 s = s(s^2 + \omega_1^2)$$

$$D_e(s) = b_2 s^2 + b_o = b_2(s^2 + \omega_1^2)$$

waaruit volgt dat $\omega_1^2 = a_1 = \frac{b_o}{b_2}$ (171)

De teller van het reële deel van $F_3(j\omega)$ voldoet aan:

$$\begin{aligned} A_3(\omega^2) &= (\omega^2 - \omega_1^2)^2 \left(\omega^2 + \frac{a_o b_2}{a_1} \right) \\ &= (\omega^2 - \omega_1^2)^2 \cdot h_3(\omega^2) \end{aligned} \quad (172)$$

waaruit de coëfficiëntrelatie

$$b_2 \left(a_2 + \frac{a_o}{a_1} \right) = a_1 - b_1 \quad \text{volgt.}$$

Volgens MIYATA'S METHODE

moeten we een Hurwitzpolynoom $P(s) = P_e(s) + P_o(s)$ zoeken, z.d.d. geldt:

$$D_e(s) P_e(s) + D_o(s) P_o(s) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} s^2 = -\omega_1^2 \end{array} \right. \quad (173)$$

Graadverhoging van $F_3(s)$ blijkt niet nodig te zijn, want $D_e(j\omega_1) = 0$, zodat de keus $P(s) = 1$ aan (173) voldoet.

Verder bevat $h_3(\omega^2)$ uitsluitend positieve coëfficiënten, zodat $F_3(s)$ dezelfde procedure kan ondergaan als

$$F_2(s) \frac{s + q}{s + q} \quad \text{in hoofdstuk V.1.}$$

Miyata's methode is hier dus identiek aan de tweede vorm van de g.k.o.

Als we op $F_3(s)$

MURRAY LASSO'S METHODE

toepassen, moet eerst getest worden of

$$\frac{F_3(j\omega_1)}{j\omega_1} > 0, \text{ ofwel: } \frac{1}{b_2} > 0$$

Hieraan is voldaan, zodat $F_3(s)$ niet geïnverteerd behoeft te worden. We werken (160) met (161) uit ($n=3$):

$$b_2(m_2s^2 + m_0)(s^2 + \omega_1^2) - m_1s^2(s^2 + b_1) = (s^2 + \omega_1^2)(-s^2 + \frac{a_0b_2}{a_1})$$

Deze vergelijking geldt voor iedere s , en daar $b_1 \neq \omega_1^2$ (anders zou $F_3(s)$ polen op de $j\omega$ -as hebben), volgt: $m_1 = 0$.

Uit deze vergelijking is verder af te leiden:

$$m_2 = -1/b_2 \quad ; \quad m_0 = a_0/a_1 .$$

We schrijven hiermee:

$$M(s) = -\frac{1}{b_2} s^2 + \frac{a_0}{a_1} = -\frac{1}{b_2} (s^2 - \frac{a_0}{b_0} b_2^2)$$

waarin gebruik is gemaakt van (171).

De reële positieve wortel van $M(s)$: $h = b_2 \sqrt{\frac{a_0}{b_0}}$ is nu bekend

en (140) wordt hiermee:

$$B(s) = \frac{-h^2 M(s)}{s-h} = \frac{a_0 b_2}{b_0} (s+h) \tag{174}$$

$F_3(s)$ wordt gesplitst in twee somtermen $F_3^i(s)$ en $F_3^{ii}(s)$, z.d.d.

$$F_3^i(s) = \frac{(s^2 + \omega_1^2) B(s)}{(D_0(s) + D_2(s))(s+h)}$$

Wat we bij de zichtbaar minimumresistieve biquartische immittantiefunctie niet zagen optreden, gebeurt hier wel. Vullen we in deze vergelijking n.l. (174) en vervolgens (171) in, dan geeft dit:

$$F_3'(s) = \frac{(s^2 + \omega_1^2) a_0 b_2 / b_0}{D_o(s) + D_e(s)} = \frac{\frac{a_0 b_2}{b_0} s^2 + a_0}{D_o(s) + D_e(s)}$$

Met $F_3''(s) = F_3(s) - F_3'(s)$ volgt:

$$F_3''(s) = \frac{s^3 + (a_2 - \frac{a_0 b_2}{b_0}) s^2 + a_1 s}{D_o(s) + D_e(s)}$$

Deze splitsing blijkt volledig identiek te zijn aan die van de tweede vorm van de g.k.o.

We kunnen dus concluderen dat de tweede vorm van de g.k.o., Miyata's methode en Murray Lasso's methode, toegepast op een zichtbaar minimumresistieve bicubische immitantiefunctie resulteren in identieke netwerkstructuren.

V.3 EEN NIET-ZICHTBAAR MINIMUMRESISTIEVE BICUBISCHE IMMITANTIEFUNCTIE

De bicubische immitantiefunctie

$$F_3(s) = \frac{N_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)} = \frac{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

is niet-zichtbaar minimumresistief voor $\omega^2 = \omega_1^2$, d.w.z. de teller van het reële deel van $F_3(j\omega)$ voldoet aan:

$$\begin{aligned} A_3(\omega^2) &= \omega^6 + (a_2 b_2 - a_1 - b_1) \omega^4 + (a_1 b_1 - a_0 b_2 - a_2 b_0) \omega^2 + a_0 b_0 \\ &= (\omega^2 - \omega_1^2)^2 \left(\omega^2 + \frac{a_0 b_0}{\omega_1^4} \right) \end{aligned} \quad (175)$$

waaruit valt af te leiden:

$$\begin{aligned} a_2 b_2 - a_1 - b_1 &= \frac{a_0 b_0}{\omega_1^4} - 2 \omega_1^2 \\ a_1 b_1 - a_2 b_0 - a_0 b_2 &= \omega_1^4 - 2 \frac{a_0 b_0}{\omega_1^2} \end{aligned} \quad (176)$$

Zoals in hoofdstuk IV.5 is aangetoond, is $F_3(s)$ na een graadverhoging met een juiste surplusfaktor altijd realiseerbaar volgens één der vormen van de g.k.o.

Realisering van $F_3(s)$ volgens

MIYATA'S METHODE

houdt in dat we de teller en de noemer van $F_3(s)$ met een Hurwitzpolynoom $P(s) = P_o(s) + P_e(s)$ moeten vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned}
 F_3(s) &= \frac{N_o(s) + N_e(s)}{D_o(s) + D_e(s)} \cdot \frac{P_o(s) + P_e(s)}{P_o(s) + P_e(s)} \\
 &= \frac{N_e(s) P_e(s) + N_o(s) P_o(s) + N_e(s) P_o(s) + N_o(s) P_e(s)}{D_e(s) P_e(s) + D_o(s) P_o(s) + D_e(s) P_o(s) + D_o(s) P_e(s)} \\
 &\stackrel{!}{=} \frac{\hat{N}_e(s)}{\hat{D}_e(s)} + \frac{\hat{N}_o(s)}{\hat{D}_o(s)}
 \end{aligned}$$

Met hoofdstuk IV.5 blijkt dat de keuze $P(s) = s + q$, waarbij voor q (154) of (155) wordt ingevuld, voldoet aan de door Miyata's methode gestelde eis, n.l. óf $\hat{D}_e(j\omega_1) = 0$, óf $\hat{N}_e(j\omega_1) = 0$. Zoals daar al is opgemerkt, kunnen we, zonder afbreuk te doen aan dit betoog, voor q uitdrukking (154) gebruiken:

$$q = \frac{\omega_1^2 (\omega_1^2 - b_1)}{b_2 \omega_1^2 - b_0}, \text{ waarmee } \hat{D}_e(j\omega_1) = 0.$$

De teller van het reële deel van $F_3(j\omega) \cdot \frac{j\omega + q}{j\omega + q}$ wordt nu:

$$\begin{aligned}
 A_4(\omega^2) &= A_3(\omega^2) (\omega^2 + q^2) \\
 &= (\omega^2 - \omega_1^2)^2 \frac{q^2 a_o b_o}{\omega_1^4} + \omega^2 (\omega^2 - \omega_1^2)^2 \left(\frac{a_o b_o}{\omega_1^4} + q^2 \right) + \omega^4 (\omega^2 - \omega_1^2)^2 \\
 &\stackrel{!}{=} A_{41}(\omega^2) + A_{42}(\omega^2) + A_{43}(\omega^2)
 \end{aligned}$$

waarin voor $A_3(\omega^2)$ uitdrukking (175) is gebruikt. In hoofdstuk IV.3 is een immitantiefunctie geconstrueerd, waarvan het reële deel langs de $j\omega$ -as dezelfde vorm heeft als $\text{Re } F_{41}(j\omega)$: Er blijken 5 elementen vereist te zijn voor synthese van $F_{41}(s)$ (4 reactieve elementen + 1 weerstand). Constructie van $F_{42}(s)$ en $F_{43}(s)$ m.b.v. $F_{41}(s)$ is een eenvoudig proces en voor synthese van ieder van deze immitantiefuncties blijken ook weer 5 elementen nodig te zijn.

Op de constructie van $F_{4i}(s)$, z.d.d.

$$\operatorname{Re} F_{4i}(j\omega) = \frac{A_{4i}(\omega^2)}{[\hat{D}_e(j\omega)]^2 - [\hat{D}_o(j\omega)]^2} \quad (i=1,2,3)$$

zal niet verder worden ingegaan, want we kunnen al concluderen dat Miyata's methode afwijkt van de g.k.o.: De in graad verhoogde $F_3(s)$ wordt in 3 i.p.v. 2 somtermen gesplitst en zal bij realisatie één element meer kosten.

Als $F_3(s)$ volgens

MURRAY LASSO'S METHODE

wordt gerealiseerd, moet eerst getest worden of

$$\frac{F_3(j\omega_1)}{j\omega_1} > 0, \text{ ofwel: } \frac{a_1 - \omega_1^2}{b_o - b_2 \omega_1^2} > 0$$

Stel dat hieraan voldaan is (zo niet, dan moeten we $F_3(s)$ inverteren), dan werken we (160) met (161) uit ($n=3$):

$$(m_2 s^2 + m_o)(b_2 s^2 + b_o) - m_1 s^2(s^2 + b_1) = (s^2 + \omega_1^2)(-s^2 + \frac{a_o b_o}{\omega_1^4})$$

waaruit is af te leiden met gebruik van (176):

$$m_o = \frac{a_o}{\omega_1^2} ; m_2 = \frac{a_2 b_2 + \omega_1^2 - a_o b_2 / \omega_1^2 - a_1}{b_o - b_1 b_2} ; m_1 = 1 + b_2 m_2 \quad (177)$$

Voor de reële positieve wortel h van $M(s)$ kan geen eenvoudige uitdrukking gevonden worden.

Een voorbeeld kan hier meer helderheid verschaffen:

$$F_3(s) = \frac{s^3 + 2,5 s^2 + 2 s + 3}{s^3 + 4 s^2 + 12 s + 6}$$

is minimumresistief voor $\omega^2 = \omega_1^2 = 3$
M.b.v. (177) berekenen we :

$$M(s) = -\frac{1}{6} s^2 + \frac{1}{3} s + 1 = -\frac{1}{6} (s - 1 - \sqrt{7})(s - 1 + \sqrt{7})$$

waarvan de reële positieve wortel $h = 1 + \sqrt{7}$, zodat (140) wordt:

$$B(s) = -h^2 M(s) / (s - h) = \frac{1}{6} (1 + \sqrt{7})^2 (s - 1 + \sqrt{7})$$

$F_3(s)$ wordt gesplitst in twee somtermen $F_3'(s)$ en $F_3''(s)$, waarvan

$$\begin{aligned} F_3'(s) &= \frac{(s^2 + 3) B(s)}{(D_o(s) + D_e(s))(s + h)} \\ &= \frac{\frac{1}{6} (1 + \sqrt{7})^2 (s^2 + 3)(s - 1 + \sqrt{7})}{(s^3 + 4s^2 + 12s + 6)(s + 1 + \sqrt{7})} \end{aligned}$$

Als de g.k.o. was toegepast, had één der somtermen nooit een vorm zoals de bovenstaande.

Er blijkt dus dat er tussen de diverse hier beschreven methodes geen overeenkomst bestaat, als ze toegepast worden op een niet-zichtbaar minimumresistieve bicubische immitantiefunctie.

Zoals in het vorige hoofdstuk is aangetoond, geldt deze conclusie ook voor een zichtbaar minimumresistieve biquartische immitantiefunctie.

APPENDIX A

HET STURMTHEOREMA EN ZIJN TOEPASSING IN DE NETWERKTHEORIE

Van een polynoom

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

kan het aantal reële nulpunten binnen een gegeven interval $a \leq x \leq b$ berekend worden m.b.v. het Sturmtheorema (door Sturm in 1829 ontdekt en gepubliceerd in "Memoires Divers des Savants Etrangers", 1935, Parijs).

Van $f_0(x)$ bepalen we de eerste afgeleide:

$$f_0'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$$

$$\stackrel{!}{=} f_1(x)$$

$f_0(x)$ en $f_1(x)$ zijn de eerste twee functies van een verzameling van zgn. Sturmfuncties. De resterende functies worden gevonden door een proces van continue deling, zoals dat bij de Hurwitztest gedaan wordt, maar wel zodanig dat iedere deling een quotiënt van twee termen oplevert. De opeenvolgende resten die onderling in graad steeds één verschillen en een tegengesteld algebraïsch teken krijgen, vormen de resterende Sturmfuncties $f_i(x)$. Kortweg kunnen we dit proces als volgt samenvatten:

$$\begin{aligned} f_0 &= q_1 f_1 - f_2 \\ f_1 &= q_2 f_2 - f_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_{m-1} &= q_{m-1} f_{m-1} - f_m \end{aligned} \tag{A.1}$$

f_m stelt hierin de laatste functie van deze reeks voor, welke een constante is. Iedere factor q_i is een eerste graads polynoom.

Het Sturmtheorema luidt:

Van de verzameling reële polynomen f_i is voor $b > a$ het aantal enkelvoudige reële nulpunten van $f_0(x)$ op het interval $a \leq x \leq b$ gelijk aan de absolute waarde van het verschil van het aantal tekenvariaties in de reeks $f_0(a), f_1(a), \dots, f_m$ en het aantal tekenvariaties in de reeks $f_0(b), f_1(b), \dots, f_m$.

Het bewijs hiervan gaat als volgt:

Als de polynoom $f_0(x)$ meervoudige nulpunten heeft, dan heeft z'n afgeleide $f_1(x)$ deze nulpunten ook, d.w.z. f_0 en f_1 hebben een gemeenschappelijke factor. Volgens het algoritme van Euclides zal het proces, zoals (A.1) dat weergeeft, voortijdig eindigen en deze factor zichtbaar maken. Op deze factor en op $f_0(x)$ gedeeld door deze factor passen we vervolgens dezelfde procedure toe als (A.1). Stel daarom dat $f_0(x)$ geen meervoudige nulpunten meer bevat en m.b.v. (A.1) kunnen we de volgende conclusies trekken:

- 1) $f_m \neq 0$, want anders bevatten de voorafgaande f_i 's een gemeenschappelijke factor.
- 2) Twee opeenvolgende f_i 's kunnen niet voor eenzelfde waarde van x nul worden, want anders bevatten deze f_i 's en alle voorafgaande een gemeenschappelijke factor.
- 3) Als $f_i(c) = 0$ dan hebben $f_{i-1}(c)$ en $f_{i+1}(c)$ een tegengesteld teken.

Stel $f_i(c) = 0$ en we onderzoeken $f_{i-1}(c)$ en $f_{i+1}(c)$ over een interval $c - h \leq x \leq c + h$, waarin h zodanig is gekozen, dat andere f_i 's op dit interval niet nul worden. De tekens van $f_{i-1}(x)$ voor $x = c - h, c, c + h$ zijn dan b.v. $+++$, die van $f_{i+1}(x)$ moeten dan zijn: $---$, terwijl die van $f_i(x)$ zijn: $\pm 0 \pm$. Voor $x = c - h$ zijn de tekens van f_{i-1}, f_i, f_{i+1} : $+ \pm -$, voor $x = c$: $+ 0 -$, en voor $x = c + h$: $+ \pm -$. Voor ieder van deze keuzes van x is het aantal tekenvariatiëen in de reeks f_{i-1}, f_i, f_{i+1} gelijk aan één, ook als we ervan uit zouden zijn gegaan dat f_{i-1} negatief was voor $x = c$ (en f_{i+1} dus positief moet zijn). Deze redenering geldt voor iedere f_i , met inbegrip van $f_1(x) = f_0'(x)$, maar niet voor $f_0(x)$. Als $f_0(x)$ voor $x = c$ een nulpunt heeft, zijn de tekens van $f_0(x)$ voor $x = c - h, c, c + h$: $- 0 +$ óf $+ 0 -$, terwijl die van $f_1(x)$ dan moeten zijn: $+++$ óf $---$. In iedere situatie zullen de tekens van f_0 en f_1 vóór $x = c$ verschillen en gelijk zijn erna. Hiermee is bewezen dat, als x toeneemt, de Sturmfuncties nooit een verschil in het aantal tekenvariatiëen zullen opleveren, behalve als x door een nulpunt van $f_0(x)$ gaat.

Dit theorema kan ons van dienst zijn om het positief reële karakter van een immitantiefunctie $F(s)$ te testen en wel of de teller van het reële deel hiervan positief of gelijk aan nul is langs de $j\omega$ -as.

Noem $\text{Num}[\text{Re } F(j\omega)] = A(\omega^2)$, waarin:

$$A(-s^2) = N_e(s) D_e(s) - N_o(s) D_o(s) = A_n (s_1^2 - s^2)(s_2^2 - s^2) \dots (s_n^2 - s^2)$$

Daar moet gelden: $A(\omega^2) \geq 0$ voor iedere ω ,
zijn er 3 mogelijkheden voor s_i^2 :

1) s_i^2 is positief reëel, zodat volgt dat $s_i^2 + \omega^2 \geq 0$

2) s_i^2 's komen in complex geconjugeerde paren voor:

$$(s_i^2 + \omega^2)(\overline{s_i^2} + \omega^2)$$

en deze term is ook altijd positief.

3) s_i^2 is negatief reëel, zodat volgt: $s_i^2 + \omega^2 \leq 0$ op een bepaald ω -interval. Dit kan alleen voorkomen worden als dergelijke termen kwadratisch in $A(\omega^2)$ voorkomen. M.b.v. het Sturmtheorema zullen deze kwadratische termen automatisch zichtbaar worden (de reeks van f_i 's stopt voortijdig).

De eis $A(\omega^2) \geq 0$ voor iedere ω wordt met $x \stackrel{!}{=} \omega^2$:

$$A(x) \geq 0 \quad \text{voor} \quad 0 \leq x \leq \infty$$

Met $f_0(x) = A(x)$ vormen we de Sturmfuncties $f_i(x)$ en maken de volgende tabel om het aantal tekenvariatiës ν_0 in de reeks $f_0(0), f_1(0), \dots, f_m(0)$ en ν_∞ in de reeks $f_0(\infty), f_1(\infty), \dots, f_m(\infty)$ te kunnen tellen:

	f_0	f_1	f_2	f_m	
$x = 0$	+	+	-		-	$\longrightarrow \nu_0$
$x = \infty$	+	+	+		-	$\longrightarrow \nu_\infty$

Als blijkt dat $|\nu_0 - \nu_\infty| \neq 0$, dan is $A(\omega^2)$ op een bepaald ω -interval negatief, als $|\nu_0 - \nu_\infty| = 0$, dan is $A(\omega^2) > 0$ voor iedere ω .

APPENDIX B

MIYATA'S METHODE VOOR RLC-SYNTHESE VAN IMMITANTIEFUNCTIES

In tegenstelling tot de Bott-Duffin methode volgt deze methode een meer directe en logische weg en is het totale aantal benodigde elementen een lineaire i.p.v. een exponentiële functie van de graad van een gegeven immitantiefunctie.

In mei '52 publiceerde Miyata z'n "A New System of Two-Terminal Synthesis" in de "Electrical Communication Engineer of Japan", wat Guillemin inspireerde tot z'n "Extensions of the Miyata Method", waardoor de klasse van realiseerbare immitantiefuncties groter werd. Beide beschouwingen komen in deze appendix aan de orde: allereerst wordt Miyata's methode beschreven en vervolgens Guillemin's uitbreidingen van deze theorie. (lit. [3])

Een gegeven positief reële immitantiefunctie schrijven we als volgt:

$$F(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \quad (B.1)$$

Berekend wordt het even deel van $F(s)$:

$$\begin{aligned} \text{Ev } F(s) &= \frac{1}{2} [F(s) + F(-s)] = \frac{N(s)D(-s) + N(-s)D(s)}{2D(s)D(-s)} \\ &= \frac{N_e(s)D_e(s) - N_o(s)D_o(s)}{[D_e(s)]^2 - [D_o(s)]^2} \end{aligned} \quad (B.2)$$

Voor $s = j\omega$ is dit het reële deel van $F(s)$:

$$\text{Re } F(j\omega) = \left. \frac{N_e(s)D_e(s) - N_o(s)D_o(s)}{[D_e(s)]^2 - [D_o(s)]^2} \right|_{s = j\omega} = \frac{A_0 + A_1 \omega^2 + \dots + A_n \omega^{2n}}{B_0 + B_1 \omega^2 + \dots + B_n \omega^{2n}} \quad (B.3)$$

Door de noemerpolynoom in deze uitdrukking af te korten met $B(\omega^2)$, kunnen we schrijven:

$$\text{Re } F(j\omega) = \frac{A_0}{B(\omega^2)} + \frac{A_1 \omega^2}{B(\omega^2)} + \frac{A_2 \omega^4}{B(\omega^2)} + \dots + \frac{A_n \omega^{2n}}{B(\omega^2)} \quad (B.4)$$

Als deze termen achtereenvolgens worden gezien als de reële delen van de immitantiefuncties $F_0(s)$, $F_1(s)$, ..., $F_n(s)$, dan is duidelijk dat de som hiervan gelijk is aan $F(s)$.

Aangezien iedere term in vergelijking (B.4) een reëel deel is waarvan z'n tweede orde nulpunten uitsluitend voorkomen in $s = 0$ en/of $s = \infty$, volgt met Darlington's theorie dat een corresponderende immitantiefunctie $F_K(s)$ realiseerbaar is als een laddernetwerk met spoelen en condensatoren in z'n takken, afgesloten met een weerstand. Alle elementen zijn reëel en positief als de coëfficiënten A_0, A_1, \dots, A_n positief zijn. Hierin ligt de beperking van deze methode, want het niet-negatief zijn van het totale reële deel (B.3) impliceert niet dat alle coëfficiënten A_K positief zijn.

Het is niet moeilijk om aan te tonen dat een voldoende voorwaarde voor het positief zijn van deze coëfficiënten is dat de nulpunten van

$$M(s) = N_e(s) D_e(s) - N_o(s) D_o(s) \quad , \quad (B.5)$$

welke in groepen symmetrisch liggen rond zowel de reële als de imaginaire assen van het complexe s -vlak, tenminste 45° verwijderd zijn van de $j\omega$ -as van dat vlak.

Als enkele coëfficiënten in (B.3) negatief zijn, kan men een equivalente uitdrukking vinden met alleen positieve coëfficiënten door vermenigvuldiging van de teller en de noemer met geschikt gekozen surplusfactoren. Het aantal van deze factoren zal echter groter worden, naarmate één of meer nulpunten van (B.5) steeds dichterbij de $j\omega$ -as komen te liggen. Alvorens in te gaan op wegen die dit nadeel kunnen omzeilen, is het nuttig om Miyata's methode te bespreken om immitantiefuncties te construeren die corresponderen met een gegeven reëel deel. Dit proces bestaat uit 2 stappen, allereerst construeert men een "hulp-immitantiefunctie":

$$F'(s) = \frac{N'(s)}{D(s)} = \frac{N_e'(s) + N_o'(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \quad (B.6)$$

waarvan de uitdrukking (B.5) voldoet aan de voorwaarde

$$M'(s) = N_e'(s) D_e(s) - N_o'(s) D_o(s) = 1 \quad (B.7)$$

wat met de Bode of Gewertz methoden altijd zal lukken. Met (B.5) en (B.7) kunnen we nu schrijven:

$$N_e'(s) M(s) D_e(s) - N_o'(s) M(s) D_o(s) = N_e(s) D_e(s) - N_o(s) D_o(s) \quad (B.8)$$

$$\text{zodat geldt: } N_e'(s) M(s) = N_e(s) + N_e^*(s) \text{ en } N_o'(s) M(s) = N_o(s) + N_o^*(s) \quad (B.9)$$

waarin $N_e^*(s)$ en $N_o^*(s)$ een even resp. een oneven polynoom zijn, die voldoen aan:

$$N_e^*(s) D_e(s) - N_o^*(s) D_o(s) \equiv 0 \quad (B.10)$$

Met (B.9) vormen we de functie

$$G(s) = \frac{(N_e^1(s) + N_o^1(s)) M(s)}{D_e(s) + D_o(s)} = \frac{N_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} + \frac{N_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \quad (B.11)$$

en we concluderen m.b.v. (10) dat

$$\frac{N_e^*(s) + N_o^*(s)}{D_e(s) + D_o(s)} = \frac{N_e^*(s)}{D_o(s)} = \frac{N_o^*(s)}{D_e(s)} = g(s) = \text{een oneven rationale functie} \quad (B.12)$$

$$\text{zodat } G(s) = F(s) + g(s) \quad (B.13)$$

Met de aanname dat $F(s)$ geen polen op de $j\omega$ -as heeft, tonen vergelijkingen (B.11) en (B.13) aan dat $g(s)$ ook geen polen op de $j\omega$ -as kan hebben. Vergelijking (B.12) daarentegen laat zien dat $g(s)$ geen andere polen kan hebben dan $j\omega$ -as polen. De enigst mogelijke conclusie is dat $g(s)$ geen polen heeft die eindig zijn en dus een oneven eindige polynoom moet zijn. De weg om $F(s)$ te construeren uit de "hulp-immitantiefunctie" $F'(s)$ is nu duidelijk: We vormen de rationale functie $M(s)F'(s) = M(s)(N_e^1 + N_o^1)/(D_e + D_o)$ en delen de teller hiervan door z'n noemer, net zo lang tot de graad van de tellerpolynoom niet meer groter is dan die van de noemer.

Het is duidelijk dat deze methode zeer geschikt is om de immitantiefuncties te bepalen die overeenstemmen met de afzonderlijke termen in (B.4), aangezien ze allemaal uit één "hulp-immitantiefunctie" te construeren zijn.

Als $F(s)$ voor één of meerdere ω^2 -waarden minimumresistief is, faalt de surplusfactoren-methode in bovenstaande beschouwing. Een interessante oplossing voor dit probleem biedt zich aan door zichtbaar minimumresistieve immitantiefuncties in ogenschouw te nemen. Als b.v. alle nulpunten van het even deel, vergelijking (B.2), op de $j\omega$ -as liggen, en als deze samenvallen met de nulpunten van $D_e(s)$, dan voldoet het even deel aan (op een eventuele constante na) :

$$(D_e(s))^2 / ([D_e(s)]^2 - [D_o(s)]^2) \quad \text{en het is duidelijk dat hiermee}$$

$$F(s) = \frac{D_e(s)}{D_e(s) + D_o(s)} = \frac{1}{1 + \frac{D_o(s)}{D_e(s)}} \quad (B.14)$$

en realisering hiervan levert verder geen problemen.

Ofschoon deze situatie te gespecialiseerd is om van veel praktische waarde te zijn, kan ze toch belangrijk worden als alleen de nulpunten van het even deel op de $j\omega$ -as liggen en niet samenvallen.

We verhogen de gegeven immitantiefunctie (B.1) dan in graad:

$$F(s) = \frac{N_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \cdot \frac{P_e(s) + P_o(s)}{P_e(s) + P_o(s)} = \frac{\hat{N}_e(s) + \hat{N}_o(s)}{\hat{D}_e(s) + \hat{D}_o(s)} \quad (B.15)$$

met een Hurwitzpolynoom $P(s) = P_e(s) + P_o(s)$ (van graad k), z.d.d.

$$\begin{aligned} \hat{D}_e(s) &= D_e(s) P_e(s) + D_o(s) P_o(s) = \sqrt{M(s)} \cdot h(s^2) \\ &= (s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) \dots (s^2 + \omega_m^2) \cdot h(s^2) \end{aligned} \quad (B.16)$$

waarin de ($m = \frac{1}{2}n$) tweede orde $j\omega$ -as nulpunten van het even deel van $F(s)$ gedefinieerd zijn door:

$$M(s) = N_e(s) D_e(s) - N_o(s) D_o(s) = (s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) \dots (s^2 + \omega_m^2) \quad (B.17)$$

en de even polynoom

$$h(s^2) = (s^2 + u_1^2)(s^2 + u_2^2) \dots (s^2 + u_r^2); \quad (2r=k \text{ of } k-1) \quad (B.18)$$

bestaat uit geschikt gekozen surplusfactoren.

Ervan uitgaande dat de polynoom

$$\left. [P_e(s)]^2 - [P_o(s)]^2 \right|_{s=j\omega} = \alpha_0 + \alpha_1 \omega^2 + \dots + \alpha_k \omega^{2k} \quad (B.19)$$

alleen positieve coëfficiënten heeft, corresponderen de termen van het in graad verhoogde reële deel

$$\operatorname{Re} F(j\omega) = \frac{M(P_e^2 - P_o^2)}{(D_e^2 - D_o^2)(P_e^2 - P_o^2)} = \frac{\alpha_0 M}{\hat{D}_e^2 - \hat{D}_o^2} + \frac{\alpha_1 M \omega^2}{\hat{D}_e^2 - \hat{D}_o^2} + \dots + \frac{\alpha_k M \omega^{2k}}{\hat{D}_e^2 - \hat{D}_o^2} \quad (B.20)$$

met de reële delen van immitantiefuncties, die realiseerbaar zijn als ladder-netwerken met spoelen en condensatoren in z'n takken en afgesloten met immitanties die de vorm (B.14) hebben.

De polynoom $P(s)$ kan gevonden worden door constructie van een "immitantie-functie"

$$\hat{F}(s) = \frac{P_e(s) - P_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)}$$

waarvan het reële deel

$$\frac{D_e P_e + D_o P_o}{D_e^2 - D_o^2} = \frac{\sqrt{M} h(s^2)}{D_e^2 - D_o^2} \quad (\text{zie (B.16)})$$

Miyata's methode is het meest geschikt om $P(s)$ te bepalen, aangezien de voorwaarde dat (B.19) slechts positieve coëfficiënten mag hebben, het beste kan worden gecontroleerd door de surplusfactoren van $h(s^2)$ één voor één in te voeren.

APPENDIX C

MURRAY LASSO'S METHODE VOOR RLC-SYNTHESE VAN IMMITANTIEFUNCTIES

De netwerken waartoe deze methode leidt, zijn dezelfde als die waartoe Bott-Duffin's methode leidt, alleen de weg naar dit resultaat is anders: Murray-Lasso's methode volgt een logischere en directere weg.

We gaan uit van een positief reële functie, welke van te voren geminimaliseerd is en zodoende een tweede orde nulpunt in z'n reële deel heeft voor $s = \pm j \omega_1$:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \quad (C.1)$$

waarvan

$$\text{Ev } F(s) = \frac{N_e(s) D_e(s) - N_o(s) D_o(s)}{[D_e(s)]^2 - [D_o(s)]^2} = \frac{(s^2 + \omega_1^2)^2 A(-s)^2}{[D_e(s)]^2 - [D_o(s)]^2} \quad (C.2)$$

waarin

$$A(-s^2) = \frac{N_e(s) D_e(s) - N_o(s) D_o(s)}{(s^2 + \omega_1^2)^2} \quad (C.3)$$

Omdat het reële deel nul wordt voor $s = \pm j \omega_1$, proberen we reactieve delen af te splitsen die het reële deel niet beïnvloeden. Daartoe wordt $F(s)$ in graad verhoogd met de surplusfaktor $s + h$:

$$F(s) = \frac{(N_e + N_o)(s + h)}{(D_e + D_o)(s + h)} = \frac{(s^2 + \omega_1^2) B(s)}{(D_e + D_o)(s + h)} + \frac{s C(s)}{(D_e + D_o)(s + h)} = F_1(s) + F_2(s) \quad (C.4)$$

waarin $F(s)$ gesplitst is in twee delen, één met nulpunten op de $j\omega$ -as voor $\pm \omega_1$, en één met een nulpunt in de oorsprong.

$B(s)$ en h worden zodanig gekozen dat geldt:

$$\text{Ev } F_1(s) = \frac{(s^2 + \omega_1^2)^2 h^2 A(-s^2)}{(D_e^2 - D_o^2)(h^2 - s^2)} = \text{Ev } \frac{(s^2 + \omega_1^2) B(s) (D_e - D_o)(-s + h)}{(D_e^2 - D_o^2)(h^2 - s^2)} \quad (C.5)$$

zodat het even deel van $F_1(s)$ dezelfde nulpunten heeft als het even deel van $F(s)$. $F_2(s)$ moet dan voldoen aan:

$$\text{Ev } F_2(s) = \frac{(s^2 + \omega_1^2) A(-s^2)(-s^2)}{(D_e^2 - D_o^2)(h^2 - s^2)} \quad (C.6)$$

zodat $\text{Ev } F(s) = \text{Ev } F_1(s) + \text{Ev } F_2(s)$.

De faktor $(s^2 + \omega_1^2)/(D_e^2 - D_o^2)(h^2 - s^2)$ is even, zodat we deze buiten het Ev - teken in vergelijking (C.5) kunnen plaatsen en het reduceren tot:

$$\text{Ev } [-B(s) (D_e - D_o)(s - h)] = h^2 (s^2 + \omega_1^2) A(-s^2) \quad (\text{C.7})$$

Noem $-B(s)(s - h)/h^2 = M(s)$ en $(s^2 + \omega_1^2) A(-s^2) = A'(-s^2)$, zodat (C.7) wordt:

$$\text{Ev } [M(s) (D_e - D_o)] = A'(-s^2) \quad (\text{C.8})$$

Stel dat $N(s)$ en $D(s)$ van graad n zijn, dan zal $M(s)$ i.h.a. van graad $n-1$ zijn:

$$M(s) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i s^i \quad (\text{C.9})$$

Vergelijking (C.7) geldt voor iedere s , zodat hieruit $n-1$ vergelijkingen volgen, waarmee de coëfficiënten m_i van (C.9) te bepalen zijn.

Om h en $B(s)$ te weten te komen, bepalen we de wortels van $M(s) = 0$.

Verderop zal aangetoond worden dat $M(s)$ slechts één reële positieve wortel heeft, welke h bepaalt.

We verkrijgen dan $B(s) = -h^2 M(s)/(s - h)$, waarmee $F_1(s)$ bepaald kan worden, en met $F_2(s) = F(s) - F_1(s)$ de tweede somterm. We bewijzen dat $F_1(s)$ en $F_2(s)$ positief reëel zijn.

Het reële deel van $F_1(j\omega)$ is:

$$\text{Re } F_1(j\omega) = \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 A(\omega^2)}{(D_e^2 - D_o^2)(h^2 + \omega^2)} \quad (\text{C.10})$$

welke niet-negatief is voor iedere ω , omdat $A(\omega^2)$ uit vergelijking (C.2) komt en we gesteld hebben dat $F(s)$ van vergelijking (C.1) positief reëel was.

Het reële deel van $F_2(j\omega)$:

$$\text{Re } F_2(j\omega) = \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 A(\omega^2) \omega^2}{(D_e^2 - D_o^2)(h^2 + \omega^2)} \quad (\text{C.11})$$

is hiermee eveneens niet-negatief voor iedere ω . Er rest ons dan nog slechts het bewijs dat er een reële positieve h gevonden kan worden. Daartoe herschrijven we vergelijking (C.7):

$$\begin{aligned} \text{Re } [-B(j\omega) (j\omega - h) D(-j\omega)] &= -|D(j\omega)|^2 \text{Re } [B(j\omega) (j\omega - h)/D(j\omega)] \\ &= (-\omega^2 + \omega_1^2) A(\omega^2) h^2 \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

De rechterkant van vergelijking (C.12) verandert één keer van teken op het interval $0 < \omega < \infty$ en heeft een negatieve coëfficiënt voor de hoogste graads term, zodat $B(s) (s - h)$ hoogstens een nulpunt in het rechter s-halfvlak kan hebben. Dit betekent dat er 2 mogelijkheden zijn:

- 1) $B(s) (s - h)$ bevat een $h > 0$ en $B(s)$ is een Hurwitzpolynoom, óf
- 2) $B(s) (s - h)$ is een Hurwitzpolynoom, maar $B(s)$ is vermenigvuldigd met een negatieve coëfficiënt.

Om te testen of we met de eerste mogelijkheid te maken hebben, moeten we onderzoeken of het teken van de coëfficiënt voor de hoogste graads term van $B(s)$ positief is.

We delen vergelijking (C.12) door $h^2 |D(j\omega)|^2$ en vergelijken het resultaat met (C.3), zodat:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{h^2} \operatorname{Re} \left[B(j\omega) (j\omega - h) / D(j\omega) \right] &= (-\omega^2 + \omega_1^2) A(\omega^2) / |D(j\omega)|^2 \\
 &= \operatorname{Re} \left[F(j\omega) / (\omega_1^2 - \omega^2) \right] \quad (C.13)
 \end{aligned}$$

zodat

$$\operatorname{Re} F(j\omega) = -\operatorname{Re} \left[(\omega_1^2 - \omega^2) B(j\omega) (j\omega - h) / D(j\omega) \right] \frac{1}{h^2} \quad (C.14)$$

Als we nu de deling $(s^2 + \omega_1^2) B(s) (s - h) / D(s) h^2$ uitvoeren, in herinnering brengend dat $B(s) (s - h)$ van graad $n-1$ is en $D(s)$ van graad n , dan verkrijgen we:

$$\frac{(s^2 + \omega_1^2) B(s) (s - h)}{h^2 D(s)} = k s + \frac{R(s)}{D(s)} \quad (C.15)$$

Het teken van k zal het teken zijn van de hoogste graads term van $B(s)$, aangezien $D(s)$ een Hurwitzpolynoom is. Door de reële delen voor $s = j\omega$ aan beide zijden van vergelijking (C.15) te nemen en te vergelijken met (C.14), kunnen we concluderen dat $R(s) = -N(s)$, gebruik makend van het feit dat een immitantiefunctie volledig door z'n reële deel wordt bepaald als het minimumresistief is.

Met vergelijking (C.15) verkrijgen we hiermee:

$$\frac{1}{h^2} B(s) (s - h) = \frac{D(s) [k s - N(s) / D(s)]}{s^2 + \omega_1^2} = [k s D(s) - N(s)] / (s^2 + \omega_1^2) \quad (C.16)$$

De teller van het rechter deel hiervan moet $s^2 + \omega_1^2$ bevatten, wat impliceert dat $ks D(s) = N(s)$ voor $s = j\omega_1$, of $k = N(j\omega_1)/j\omega_1 D(j\omega_1) = F(j\omega_1)/j\omega_1$. Als $F(j\omega_1)/j\omega_1$ positief is, zal de hoogste graads term van $B(s)$ ook positief zijn en h dus ook. Als daarentegen $F(j\omega_1)/j\omega_1$ negatief is, inverteren we $F(s)$ en we zullen een positieve h verkrijgen, omdat $1/F(j\omega_1) \cdot j\omega_1$ dan positief zal zijn.

Hiermee is bewezen dat het altijd mogelijk is een positieve h te vinden en dat $F_1(s)$ en $F_2(s)$ p.r. zijn.

Teneinde $F_1(s)$ te realiseren, splitsen we de polen af voor $s = \pm j\omega_1$ en $s = \infty$ van $1/F_1(s)$:

$$F_1(s) = \frac{1}{\frac{as}{s^2 + \omega_1^2} + bs + \frac{1}{F_3(s)}} \quad (C.17)$$

Overeenkomstig schrijven we voor $F_2(s)$:

$$F_2(s) = \frac{1}{\frac{c}{s} + \frac{1}{\frac{ds}{s^2 + \omega_1^2} + F_4(s)}} \quad (C.18)$$

Het voorkomen van $s^2 + \omega_1^2$ in $F_2(s)$, ondanks het feit dat dit niet te zien was aan vergelijking (C.4) kan verklaard worden:

Het feit dat $F_1(s)$ en $F_2(s)$ hetzelfde reële deel hebben voor $s = j\omega$ op een faktor ω^2/h^2 na (zie vergelijkingen (C.10) en (C.11)) en dat de kritische frequenties zijn afgesplitst van de $j\omega$ -as, houdt in dat de resten slechts kunnen verschillen door een constante, d.w.z. $F_3(s) = K F_4(s)$ in vergelijkingen (C.17) en (C.18). Dit komt omdat 2 minimumreactieve immitantiefuncties volledig door hun reële delen worden bepaald.

De resten $F_3(s)$ en $F_4(s)$ die van graad $n-2$ zijn, kunnen op dezelfde manier worden behandeld als $F(s)$, enz., totdat een volledige realisatie is bereikt.

L I T E R A T U U R

- [1] Ir. S. Tirtoprodjo, Synthesis by continued fraction expansion, Electronics Letters, Vol. 7 No. 20, 18 aug. '71.
- [2] C.P.M. Pijs, Een Synthese voor Minimumresistieve Immitantiefuncties, afstudeerverslag, vakgroep theoretische elektrotechniek, juli '73.
- [3] E.A. Guillemin, Synthesis of Passive Networks, New York, John Wiley and Sons inc., 1957.
- [4] idem, blz. 434.
- [5] E.A. Guillemin, "New Methods of Driving-point and Transfer Impedance Synthesis", Proceedings of the Symposium on Modern Network Synthesis, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1956.
- [6] M.A. Murray Lasso, "Generalized Impedance Leveling in Network Synthesis", Proceedings Second Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, University of Illinois, sept. '64.
- [7] Ir. S. Tirtoprodjo, Series-parallel RLC synthesis of the bicubic impedance, Electronics Letters, Vol. 9 No. 16, 9 aug. '73.
- [8] H.W. Turnbull, Theory of Equations, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1963.

VOORBEELD 1

(zie pag. 35)

- = Num[Re $F_5(j\omega)$]
- - - = Num[Re $F_5'(j\omega)$] 1^{ste} VORM
- + + + + = Num[Re $F_5''(j\omega)$] 2^{de} VORM

0

1

2

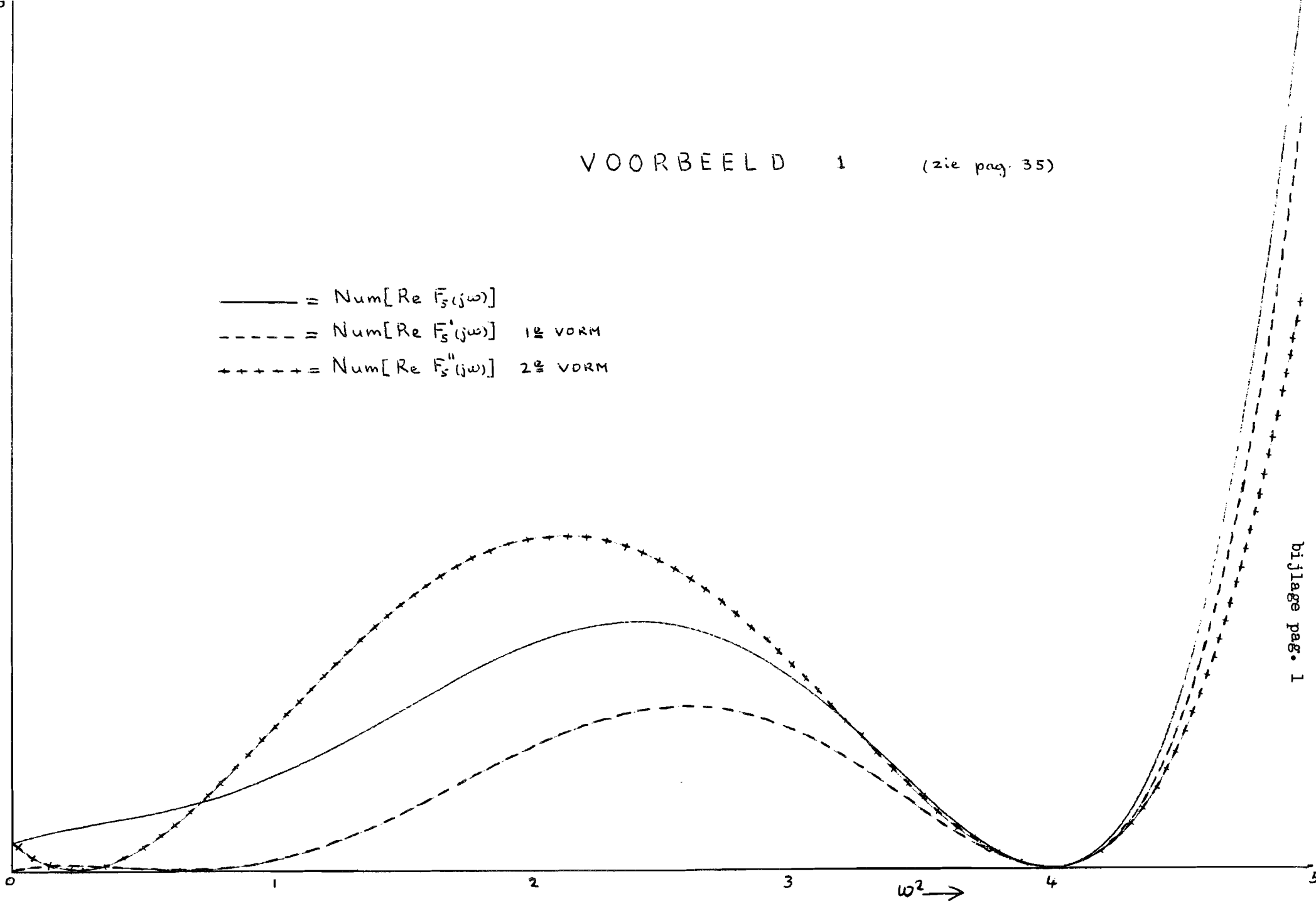
3

$\omega^2 \rightarrow$

4

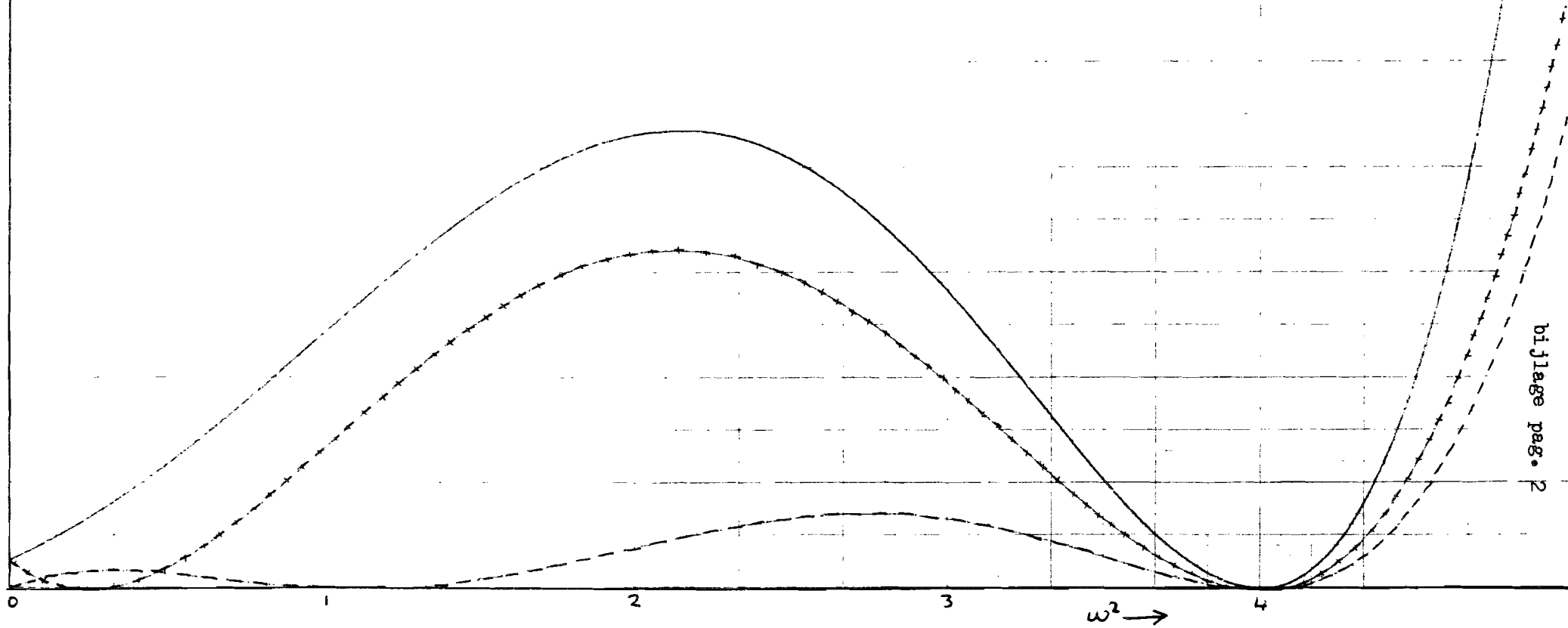
5

bijlage pag. 1

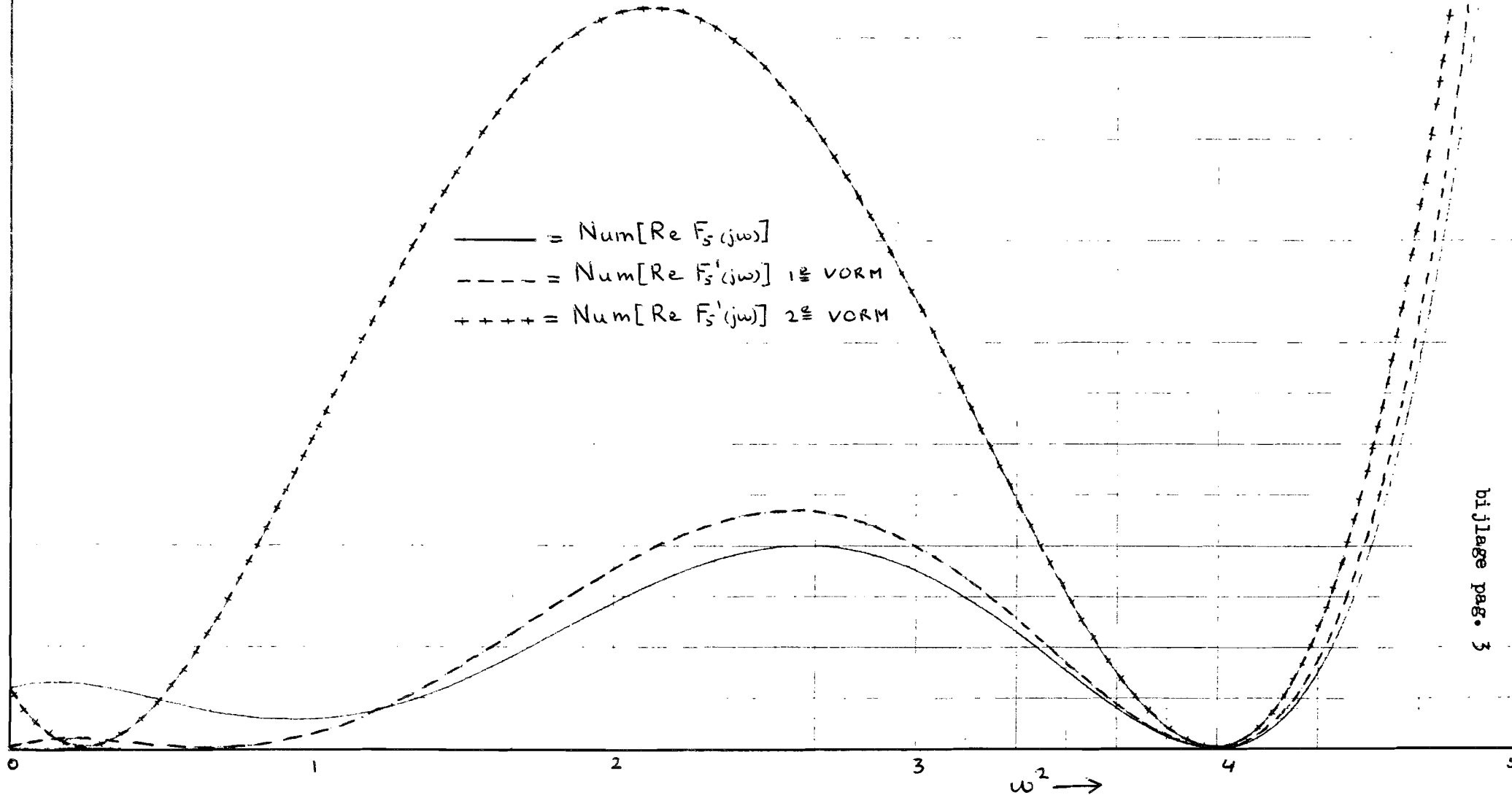


VOORBEELD 2 (zie pag. 37)

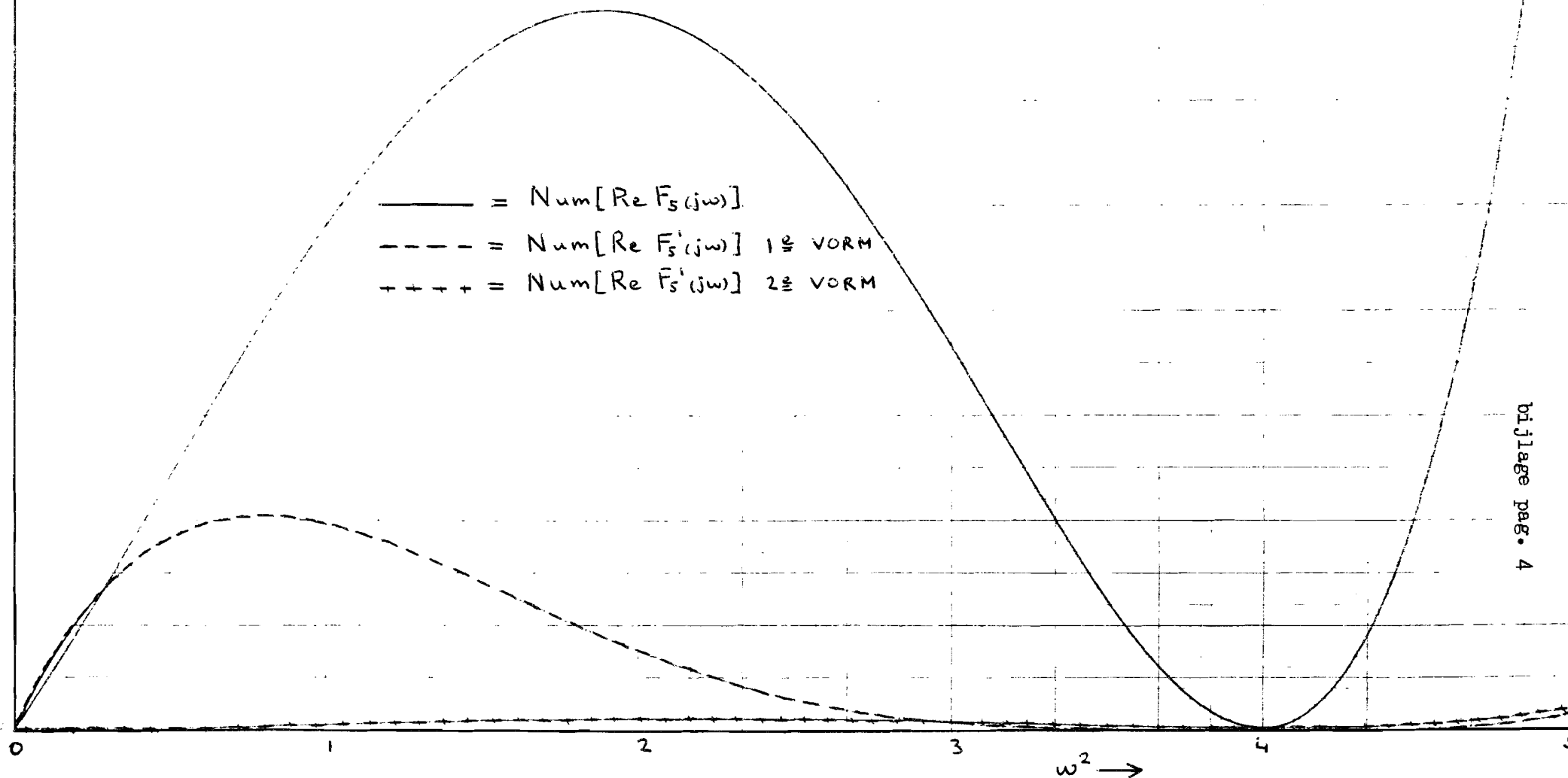
— = Num[Re $F_S(j\omega)$]
- - - = Num[Re $F_S'(j\omega)$] 1^e VORM
+ + + + = Num[Re $F_S'(j\omega)$] 2^e VORM



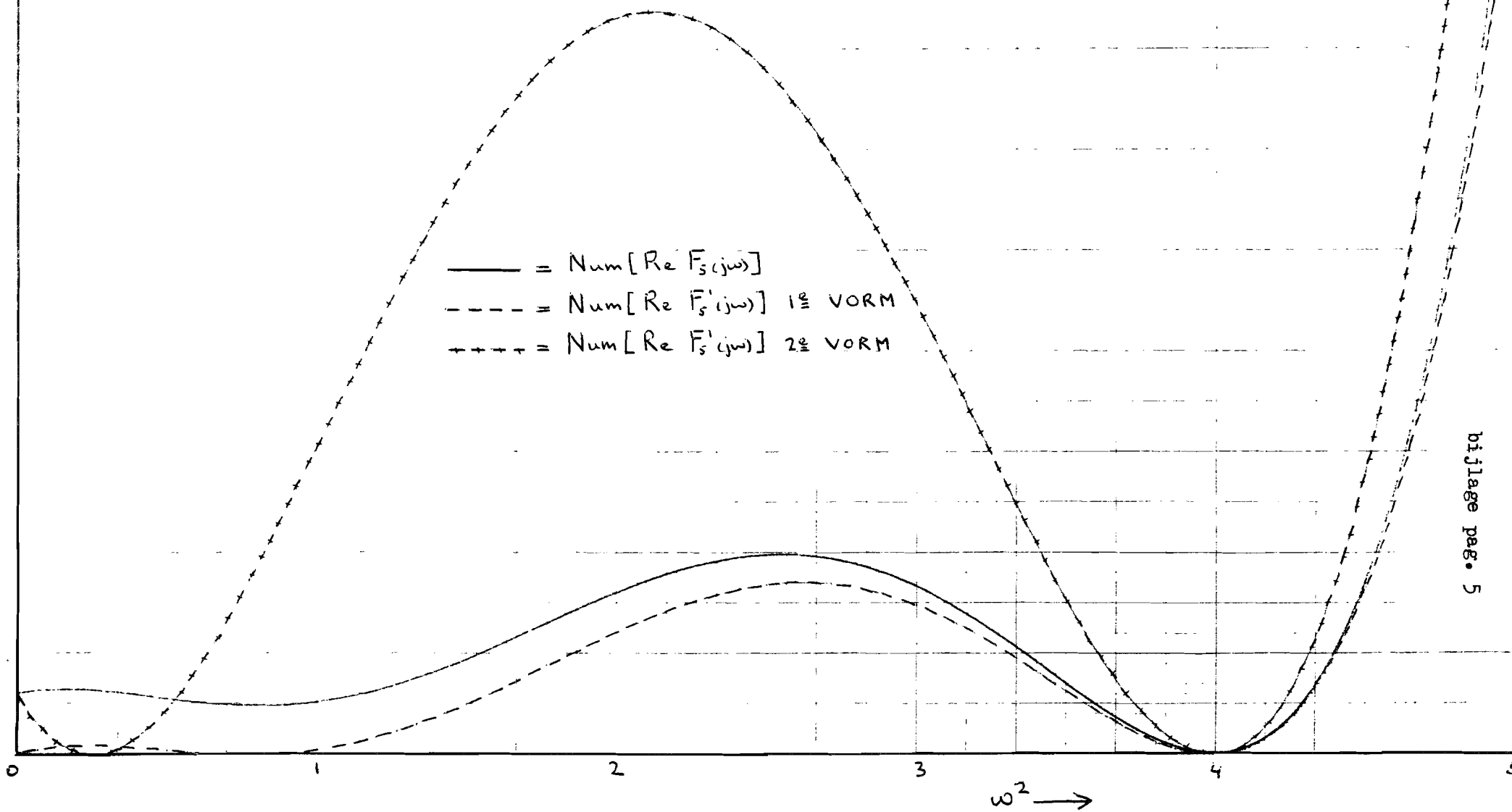
VOORBEELD 3 (zie pag. 44)



VOORBEELD 4 (zie pag. 46)



VOORBEELD 5 (zie pag. 51)



bi jlage pag. 5

VOORBEELD 6 (zie pag. 55)

- = Num [Re $F_S(j\omega)$]
- - - - = Num [Re $F_S'(j\omega)$] 1^e VORM
- - - - = Num [Re $F_S'(j\omega)$] 2^e VORM

