

MASTER

Dynamische permeabiliteit

Eggels, R.L.G.M.

Award date:
1991

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

L

364978

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Technische Natuurkunde
Vakgroep Transportfysica
Werkeenheid Gasdynamica

Dynamische Permeabiliteit

R.L.G.M. Eggels

R-1113-A

juni 1991

begeleiders: ir. D.M.J. Smeulders
dr. ir. M.E.H. van Dongen

Samenvatting

De dynamische permeabiliteit en de daarmee samenhangende dynamische tortuositeit beschrijven het verband tussen een oscillerende drukgradiënt over een poreus materiaal en de macroscopische snelheid van de vloeistof of het gas door het poreuze materiaal. Door een middelingsprocedure toe te passen op de microscopische Navier-Stokes vergelijking wordt een uitdrukking afgeleid voor de dynamische tortuositeit. Door, in navolging van Johnson et al., te veronderstellen dat voor hoge frequenties de wrijving beperkt is tot een dunne grenslaag kan het hoge frequentiegedrag voor de dynamische tortuositeit beschreven worden met twee van de poriegeometrie afhankelijke parameters: de hoge frequentielimiet voor de tortuositeit α_∞ en een karakteristieke porie-afmeting Λ .

De door Johnson et al. geïntroduceerde parameter $M = \frac{8\alpha_\infty k(0)}{\phi\Lambda^2}$, met ϕ de porositeit, is voor een grote variatie in poriegeometrieën numeriek bepaald en bleek te variëren tussen 0,9 en 1,3. Dit resultaat bevestigt de voorspelling van Johnson dat $M \approx 1$ is.

De resultaten van metingen van de dynamische permeabiliteit van verschillende poreuze materialen tonen aan dat sprake is van een "universele" frequentie-afhankelijkheid van de dynamische permeabiliteit.

Inhoud

Samenvatting	1
1 Inleiding	4
2 Dynamische permeabiliteit en tortuositeit	6
2.1 Inleiding	6
2.2 Afleiding dynamische tortuositeit uit de microscopische Navier-Stokes vergelijking	7
2.2.1 Microscopische vergelijkingen	8
2.2.2 Macroscopische vergelijkingen	11
2.2.3 Combinatie van microscopische en macroscopische vergelijkingen	11
2.2.4 Asymptotisch gedrag $\alpha(\omega)$ voor hoge frequenties . . .	13
2.2.5 Een eenvoudige toepassing van de hoge frequentielimiet	19
2.2.6 De dynamische permeabiliteit en tortuositeit voor het gehele frequentie bereik	20
3 Numerieke berekeningen	23
3.1 Probleem omschrijving	23
3.2 Opzet	25
3.3 Resultaten	27
3.4 Conclusies	33
4 Metingen	34
4.1 Inleiding	34
4.2 Stationaire doorlatendheid	34
4.3 Porositeit	35
4.4 Tortuositeit	38
4.5 Dynamische permeabiliteit en tortuositeit	39

	3
4.5.1 Theorie	39
4.5.2 Experimentele opstelling	41
4.5.3 Resultaten	41
4.5.4 Conclusies	44
5 Conclusies	45
A Asymptotisch gedrag reële gedeelte $\alpha(\omega)$ voor hoge frequen- ties	46
A.1 Bepaling verplaatsingsdikte	48
A.2 Asymptotisch gedrag $\alpha(\omega)$	51
B Bepaling Δl_2	55
C Ijking drukopnemers	59
Referenties	61

Hoofdstuk 1

Inleiding

In de groep gasdynamica van de vakgroep Transportfysica van de faculteit Technische Natuurkunde wordt onderzoek gedaan naar golfvoortplanting in poreuze media. Golfvoortplanting in poreuze media is o.a. van belang voor de beschrijving van golven door het aardoppervlak bij de opsporing van olie, bij aardbevingen en bij (offshore) heiprocesen.

De golfvoortplanting wordt bestudeerd door middel van een schokbuisopstelling. De poreuze kolom wordt onderworpen aan een stapvormige druk-sprong. De golven door het poreuze materiaal die hierbij ontstaan worden bestudeerd.

Voor de golfvoortplanting is het frequentie-afhankelijk verband tussen de drukgradiënt over het poreuze materiaal en de snelheid van de vloeistof in de kolom van belang. De parameters die dit verband beschrijven zijn de dynamische permeabiliteit en de dynamische tortuositeit. Deze parameters zijn nader onderzocht in een aparte opstelling. In deze opstelling wordt m.b.v. een zuiger een oscillerende drukgradiënt over een poreus materiaal aangelegd. De frequenties die daarbij gebruikt worden zijn veel lager (10-300 Hz) dan bij het schokbuisexperiment (1-100 KHz). Door de lage frequenties is de golflengte veel groter dan de afmetingen van het poreuze materiaal. De vloeistof kan dan als incompressibel beschouwd worden. Door schaling met verschillende poreuze materialen kan over een groot dimensieloos frequentiebereik gemeten worden (3 decaden).

In het verleden zijn metingen verricht aan gemodelleerd poreus materiaal dat uit buisjes bestond en werd goede overeenkomst met de theorie gevonden. Bij metingen aan andere poreuze materialen traden problemen op met het geheel verzadigen met water van de poreuze materialen. Door de vacuum

eigenschappen van de opstelling en de vulprocedure te verbeteren konden de materialen nu wel goed met water verzadigd worden. Er zijn metingen verricht aan poreuze materialen bestaande uit gelijkde glazen bolletjes en uit gelijkmd grind.

In hoofdstuk 2 wordt de dynamische permeabiliteit afgeleid uit de Navier-Stokes vergelijking op porieschaal. In hoofdstuk 3 volgen de resultaten van numerieke berekeningen van de stationaire doorlatendheid k_0 , de tortuositeit α_∞ en een karakteristieke porie-lengtemaat Λ voor verschillende poriegeometrieën. In hoofdstuk 4 zijn de metingen van $k(0)$, α_∞ , de porositeit ϕ en de dynamische permeabiliteit beschreven.

Hoofdstuk 2

Dynamische permeabiliteit en tortuositeit

2.1 Inleiding

Voor de beschrijving van de stroming door een poreus medium zijn de permeabiliteit en de daarmee samenhangende tortuositeit belangrijke parameters. Deze worden ook wel Darcycoëfficiënt en toegevoegde massaparameter genoemd. Beschouw een poreus materiaal met porositeit ϕ . Dit betekent dat de volumefractie van de poriën ϕ is, en van het vaste materiaal $(1 - \phi)$. We veronderstellen de poreuze materialen geheel met vloeistof verzadigd. Onder invloed van een drukgradiënt ∇P over het poreuze materiaal gaat de vloeistof stromen. We definiëren de macroscopische snelheid \vec{v} als de gemiddelde snelheid in de poriën. Het debiet door een poreuze kolom met oppervlak A is dan gelijk aan $(\vec{v}, \vec{n})\phi A$, met \vec{n} de normaalvector loodrecht op het oppervlak.

We zijn geïnteresseerd in de dynamische permeabiliteit als functie van de frequentie en bekijken daarom de stroming door het poreuze materiaal waaraan een oscillerende drukgradiënt: $\nabla P = \nabla \hat{P}e^{-i\omega t}$ is opgelegd. De macroscopische snelheid verandert met dezelfde frequentie en schrijven we als $\vec{v} = \hat{\vec{v}}e^{-i\omega t}$. De dynamische permeabiliteit $k(\omega)$ geeft het verband tussen $\hat{\vec{v}}$ en $\nabla \hat{P}$ en is gedefiniëerd volgens:

$$\phi \hat{\vec{v}} = \frac{-k(\omega)}{\eta} \nabla \hat{P}, \quad (2.1)$$

met η de viscositeit van de vloeistof. Een andere parameter die veel gebruikt wordt voor de beschrijving van een oscillerende vloeistofstroming door een

poreus materiaal is de toegevoegde massaparameter $\alpha(\omega)$. Deze is gedefiniëerd als:

$$-i\omega\alpha(\omega)\rho\hat{v} = -\nabla\hat{P}, \quad (2.2)$$

waarin ρ de dichtheid van de vloeistof is.

Het is duidelijk dat de permeabiliteit $k(\omega)$ en de tortuositeit $\alpha(\omega)$ van elkaar afhankelijk complexe grootheden zijn:

$$\alpha(\omega) = \frac{i\eta\phi}{\omega k(\omega)\rho} \quad (2.3)$$

We kunnen twee limieten onderscheiden. Voor $\omega \rightarrow 0$ is de wrijving in het poreuze materiaal overheersend. Dan zal de permeabiliteit $k(\omega)$ naderen tot de stationaire permeabiliteit $k(0)$.

In de limiet voor $\omega \rightarrow \infty$ zijn de instationaire traagheidskrachten overheersend en nadert de dynamische tortuositeit een constante, die α_∞ wordt genoemd. Voor $\omega = \omega_c = \frac{\eta\phi}{\rho k(0)\alpha_\infty}$ zijn de wrijvingskrachten en instationaire krachten van gelijke grootte.

Johnson, Koplik en Dashen [JOH87] hebben een benadering voor de dynamische permeabiliteit gegeven. Zij introduceren een dimensieloze functie $k(\omega)/k(0)$ in afhankelijkheid van een geschaalde frequentie ω/ω_c en onderzoeken de suggestie dat dit functionele verband uniform van toepassing zou kunnen zijn op een grote klasse van poreuze materialen. Of dat zo is hangt sterk af van het gedrag van $k(\omega)/k(0)$ voor hoge frequenties. Johnson et al. introduceren een lengteparameter Λ die bepalend is voor het hoge frequentiegedrag en geven het verband tussen Λ en de poreuze structuur.

Wij leiden in dit hoofdstuk dezelfde hoge frequentielimiet af, gebruik makende van de homogenisatie theorie van Burridge en Keller [BUR81]. In deze theorie worden twee lengteschalen gebruikt. Een microscopische schaal, ter grootte van porieafmetingen, en een macroscopische schaal ter grootte van het poreuze materiaal. We gaan uit van de N.S. vergelijking op microscopische schaal. Door deze te integreren worden de macroscopische vergelijkingen verkregen. Het eindresultaat van deze afleiding is gelijk aan dat van Johnson et al. maar de gekozen weg is enigszins anders.

2.2 Afleiding dynamische tortuositeit uit de microscopische Navier-Stokes vergelijking

We willen een relatie voor $\alpha(\omega)$ als functie van de frequentie afleiden. De tortuositeit is een macroscopische grootheid. Om die te verkrijgen uit de

microscopische N.S. vergelijking integreren we over de poriën. We veronderstellen dat het poreuze materiaal star is en zich niet verplaatst. Volgens P. Sheng et al. [SHE88] is de verplaatsing van het poreuze materiaal te beschouwen als een extra bronterm, een extra bijdrage aan de drukgradiënt, en mag daarom verwaarloosd worden voor de berekening van de tortuositeit.

2.2.1 Microscopische vergelijkingen

Op microschaal, porieschaal, kan de Navier-Stokes vergelijking gebruikt worden:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla P' + \nabla(\eta' \nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot (2\eta \vec{D}), \quad (2.4)$$

waarin \vec{u} de microscopische snelheid, de snelheid van de vloeistof in de poriën is. P' is de microscopische druk; het accent is toegevoegd om onderscheid te maken met de macroscopische druk. \vec{D} is de deformatie-snelheidstensor: $\hat{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right)$.

De convectieve term $\rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ kan verwaarloosd worden als $Re = \frac{Ua}{\nu} \ll 1$. a is een maat voor de porie-afmeting.

Uit de continuïteitsvergelijking $\rho_0 \nabla \cdot \vec{u} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ volgt voor de oscillerende stroming dat $|\nabla \cdot \vec{u}| = \omega \frac{\hat{\rho}}{\rho_0}$. Met $\hat{\rho}$ de dichtheidsverstoring t.o.v. de dichtheid ρ_0 . Dit betekent dat $\nabla \cdot \vec{u}$ gekoppeld is aan de dichtheidsverstoring $\hat{\rho}$. Deze verandert op de lengteschaal van de golflengte λ . We veronderstellen dat de golflengte veel groter is dan de porie afmeting a . We zullen dat verderop uitwerken. Hiervan gebruik makende, kunnen we de laatste twee termen in de Navier-Stokes vergelijking 2.4 t.o.v. elkaar afschatten:

$$\frac{\eta' \nabla(\nabla \cdot \vec{u})}{\eta \nabla^2 \vec{u}} \approx \frac{\eta' \frac{U}{\lambda^2}}{\eta \frac{U}{a^2}} = \frac{\eta' a^2}{\eta \lambda^2} \ll 1$$

Van de N.S. vgl. 2.4 resteert, na substitutie van $\vec{u} = \hat{\vec{u}} e^{-i\omega t}$, $P' = \hat{P}' e^{-i\omega t}$ en $\vec{D} = \hat{\vec{D}} e^{-i\omega t}$:

$$-i\omega \rho \hat{\vec{u}} = -\nabla \hat{P}' + \nabla \cdot (2\eta \hat{\vec{D}}) \quad (2.5)$$

Uit de continuïteitsvergelijking volgt:

$$\nabla \cdot \hat{\vec{u}} = i\omega \frac{\hat{\rho}}{\rho_0} \quad (2.6)$$

Deze vergelijking gecombineerd met de constitutieve vergelijking $\frac{\hat{p}}{\rho_0} = \frac{\hat{p}'}{K_f}$, waarbij K_f de vloeistof-compressiemodulus is, leidt tot:

$$i\omega \hat{P}' = K_f \nabla \cdot \hat{\vec{u}} \quad (2.7)$$

We gaan nu over op dimensieloze grootheden. We maken de vergelijkingen dimensieloos door iedere grootheid te delen door een referentiewaarde. Deze zijn met $\nu = \frac{\eta}{\rho}$:

$$u_{ref} = \frac{\nu}{a} \quad P_{ref} = \frac{L\eta^2}{\rho a^3} \quad \omega_{ref} = \frac{\nu}{a^2} \quad t_{ref} = \frac{a^2}{\nu} = \frac{1}{\omega_{ref}}$$

Beschouw $L = ct_{ref}$ als een karakteristieke lengte voor de macroscopische schaal, met c de geluidssnelheid die gelijk is aan $\sqrt{\frac{K_f}{\rho_0}}$ (Dit volgt uit $\frac{\hat{p}'}{\hat{\rho}} = c^2$ en de constitutieve vergelijking). De dimensieloze grootheden worden geschreven met een $\tilde{\cdot}$. De nabla operator in de dimensieloze vorm is: $\tilde{\nabla} = a\nabla$. De vergelijkingen 2.5 en 2.7 zijn in dimensieloze vorm, met $\varepsilon = \frac{a}{L}$ als kleine parameter:

$$-i\tilde{\omega}\tilde{\vec{u}} = -\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\nabla}\tilde{P}' + 2\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\vec{D}} \quad (2.8)$$

en

$$i\tilde{\omega}\tilde{P}' = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}} \quad (2.9)$$

De term $2\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\vec{D}}$ uit vergelijking 2.8 is gelijk aan $\tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{u}} + \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}})$. We volgen de homogenisatie-theorie van Burridge and Keller [BUR81] en definiëren twee coördinaten corresponderend met de twee lengteschalen $\vec{x} = \frac{\vec{r}}{L}$ en $\vec{y} = \frac{\vec{r}}{a}$ en we schrijven $\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}_y + \varepsilon\tilde{\nabla}_x$. We ontwikkelen de snelheid $\tilde{\vec{u}}$ in ε als:

$$\tilde{\vec{u}} = \tilde{u}_0(\vec{x}, \vec{y}) + \varepsilon\tilde{u}_1(\vec{x}, \vec{y}) + \dots \quad (2.10)$$

en ook de druk als

$$\tilde{P}' = \tilde{P}_0(\vec{x}, \vec{y}) + \varepsilon\tilde{P}_1(\vec{x}, \vec{y}) + \dots \quad (2.11)$$

We laten voortaan de tilde weg zolang dit geen verwarring scheidt. Na substitutie van vergelijkingen 2.10 en 2.11 in de vergelijkingen 2.8 en 2.9 volgt na rangschikken van gelijke machten van ε :

$$-\nabla_y P_1 + i\omega\vec{u}_0 + \nabla_y^2\vec{u}_0 = \nabla_x P_0 \quad (2.12)$$

•

$$\nabla_{\mathbf{y}} P_0 = 0 \tag{2.13}$$

Dit resultaat betekent dat de gradiënt van de druk op microscopische schaal gelijk is aan nul. De druk P_0 mag konstant verondersteld worden op microschaal, dus $P_0(\vec{x}, \vec{y}) = P_0(\vec{x})$.

•

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \vec{u}_0 = 0 \tag{2.14}$$

Dit betekent dat de snelheid \vec{u}_0 divergentievrij is op microschaal. Dit komt overeen met de eerdere redenatie dat de divergentie van \vec{y} alleen op macroscopische schaal varieert. Op microschaal is de stroming als incompressibel te beschouwen.

•

$$i\omega P_0 = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \vec{u}_0 + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \vec{u}_1 \tag{2.15}$$

Neem het inproduct van \vec{u}_0^* , de complex geconjugeerde van \vec{u}_0 en vergelijking 2.12 en tel daarbij de complex geconjugeerde van de verkregen vergelijking op:

$$-\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (P_1 \vec{u}_0^* + P_1^* \vec{u}_0) + \vec{u}_0^* \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0 + \vec{u}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0^* = \vec{u}_0^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}} P_0 + \vec{u}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} P_0^* \tag{2.16}$$

In de eerste term zijn \vec{u}_0^* en \vec{u}_0 binnen haakjes gebracht m.b.v. vgl. 2.14. We middelen vergelijking 2.16 nu over de y -coördinaat. De middeling wordt genoteerd als $\langle \dots \rangle$. We middelen over het porievolume V_p zodat:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{V_p} \int_{V_p} A dV \tag{2.17}$$

Bekijken we de eerste term van vergelijking 2.16, dan is deze na middeling en gebruik makend van de stelling van Gauß te schrijven als:

$$\frac{1}{V_p} \int_A ((P_1 \vec{u}_0^* + P_1^* \vec{u}_0) \cdot \vec{n}) dA, \tag{2.18}$$

met A het omsloten oppervlak van het volume waarover geïntegreerd wordt. De druk P_1 en de snelheid \vec{u}_0 zijn begrensd, zodat uitdrukking 2.18 begrensd is tot een constante maal $\frac{A}{V_p}$. Als we integreren over een bol met straal R dan bestaat A uit het oppervlak van de bol en het wandoppervlak van de poriën. Op het wandoppervlak van de poriën geldt dat $(\vec{u}_0 \cdot \vec{n})$ gelijk aan nul is. Het

volume waarover we integreren is evenredig met R^3 . Uitdrukking 2.18 is dus evenredig met $1/R$. In de limiet voor toenemende straal R , nadert uitdrukking 2.18 naar nul. We mogen R heel groot laten worden omdat we integreren op microschaal [BUR81].

Van vergelijking 2.16 resteert dan na middeling:

$$\langle \vec{u}_0^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}} P_0 + \vec{u}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} P_0^* \rangle = \langle \vec{u}_0^* \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0 + \vec{u}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0^* \rangle \quad (2.19)$$

De middeling in vgl. 2.19 over de y -coördinaat heeft alleen betrekking op de snelheid \vec{u}_0 . We hebben immers al gezien dat de druk P_0 alleen op macroscopische schaal verandert, op microscopische schaal, de y -schaal, mag deze als constant verondersteld worden. De druk P_0 kan dus beschouwd worden als de macroscopische druk P . De macroscopische snelheid \vec{v} zoals deze in de eerste paragraaf gedefiniëerd is, wordt in dimensieloze vorm na weglating van $e^{-i\omega t}$; \vec{v} . Voor het gemak wordt de tilde nu ook weer weggelaten, zolang dit geen verwarring scheidt. De dimensieloze macroscopische snelheid is dus gelijk aan: $\frac{1}{V_p} \int \vec{u}_0 dV$. Vergelijking 2.19 kan dan geschreven worden als

$$\vec{v}^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}} P + \vec{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} P^* = \langle \vec{u}_0^* \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0 + \vec{u}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0^* \rangle \quad (2.20)$$

2.2.2 Macroscopische vergelijkingen

Op macroscopische schaal hebben we alleen te maken met de macroscopische gradiënt, zodat de gradiënt in dimensieloze vorm geschreven kan worden als $\nabla_{\mathbf{x}}$. De macroscopische dimensieloze snelheidsamplitude is, na weglating van de tilde: \vec{v} .

Vergelijking 2.2 herschrijven we in de dimensieloze vorm:

$$i\omega\alpha(\omega)\vec{v} = \nabla_{\mathbf{x}} P \quad (2.21)$$

Uit de continuïteitsvergelijking en de constitutieve vergelijking toegepast op de macroscopische grootheden volgt:

$$i\omega P = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \vec{v} \quad (2.22)$$

2.2.3 Combinatie van microscopische en macroscopische vergelijkingen

Uit vergelijking 2.20 en 2.22 volgt:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (P\vec{v}^* + P^*\vec{v}) = \langle \vec{u}_0^* \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0 + \vec{u}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0^* \rangle \quad (2.23)$$

Vergelijking 2.23 kan geïnterpreteerd worden als: de divergentie van de akoestische energiestroom is het gevolg van dissipatie.

Het imaginaire gedeelte van $\alpha(\omega)$

Als we de tortuositeit $\alpha(\omega)$ splitsen in een reëel en een imaginair deel volgt uit vergelijking 2.21 voor het imaginaire gedeelte:

$$2\omega\alpha_i(\omega)|\vec{v}|^2 = -\vec{v}^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}} P_0 - \vec{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} P_0^* \quad (2.24)$$

Combinatie van de microscopische vergelijking 2.20 met de macroscopische 2.24 levert met $|\vec{v}|^2 = |\langle \vec{u}_0 \rangle|^2$:

$$\alpha_i = -\frac{\langle \vec{u}_0^* \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0 + \vec{u}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0^* \rangle}{2\omega |\langle \vec{u}_0 \rangle|^2} \quad (2.25)$$

Hiermee is het imaginaire gedeelte van $\alpha(\omega)$ uitgedrukt in het snelheidsveld in de poriën. De teller hangt samen met de dissipatie in de poriën.

Het reële gedeelte van $\alpha(\omega)$

Analoog aan de afleiding voor het imaginaire gedeelte van $\alpha(\omega)$ kunnen we een uitdrukking afleiden voor het reële gedeelte. De microscopische vergelijking wordt verkregen door het inproduct te nemen van \vec{u}_0^* en vergelijking 2.12 en daar de complex geconjugeerde van de verkregen vergelijking van af te trekken.

$$(-\vec{u}_0^* \cdot \nabla_{\mathbf{y}} P_1 + \vec{u}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}} P_1^*) + 2i\omega |\vec{u}_0|^2 + \vec{u}_0^* \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0 - \vec{u}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0^* = \vec{u}_0^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}} P_0 - \vec{u}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} P_0^* \quad (2.26)$$

De eerste term van vergelijking 2.26 nadert naar nul door over de y -coördinaat te middelen, op de zelfde wijze als voor het imaginaire gedeelte is gedaan. De macroscopisch vergelijking volgt uit vgl. 2.21:

$$2i\omega\alpha_r(\omega)|\vec{v}|^2 = \vec{v}^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}} P_0 - \vec{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} P_0^* \quad (2.27)$$

Uit vergelijkingen 2.26 en 2.27 volgt met $|\vec{v}|^2 = |\langle \vec{u}_0 \rangle|^2$:

$$\alpha_r = \frac{|\langle \vec{u}_0 \rangle|^2}{|\langle \vec{u}_0 \rangle|^2} + \frac{\langle \vec{u}_0^* \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0 - \vec{u}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}}^2 \vec{u}_0^* \rangle}{2i\omega |\langle \vec{u}_0 \rangle|^2} \quad (2.28)$$

Zodat ook α_r uitgedrukt is in het snelheidsveld in de poriën.

2.2.4 Asymptotisch gedrag $\alpha(\omega)$ voor hoge frequenties

Om de tortuositeit middels vergelijking 2.25 en 2.28 te bepalen, moet het snelheidsveld in de poriën bekend zijn. Omdat voor hoge frequenties een benadering toegepast kan worden, die het probleem aanzienlijk vereenvoudigt, bekijken we de hoge frequentielimiet van $\alpha(\omega)$.

Bij voldoende hoge frequenties kunnen we de kern van de poriën niet alleen als incompressibel maar ook als wrijvingsloos beschouwen. Het snelheidsveld in de kern kunnen we dan bepalen m.b.v. potentiaaltheorie. Het potentiaal probleem dat opgelost moet worden is dan: $\vec{u}_0 = \nabla_y \psi$ en $\nabla_y^2 \psi = 0$.

Aan de wand kan wrijving niet verwaarloosd worden. Voor dit gebied, de grenslaag, kunnen we ook een schatting van het snelheidsprofiel maken; het profiel van een oscillerende stroming langs een vlakke plaat. Dit omdat voor kleine grenslaagdikte δ het wandoppervlak als vlak beschouwd kan worden.

Hoge frequentielimiet voor $\alpha(\omega)$

In het limiet geval voor $\omega \rightarrow \infty$ wordt de grenslaagdikte nul, en is dus de stroming in de porie als incompressibel en wrijvingsloos te beschouwen. Het snelheidsveld in de gehele porie is dan te bepalen m.b.v. het potentiaalprobleem. Dit snelheidsveld noemen we \vec{u}_∞ . In de uitdrukking voor het reële gedeelte en het imaginaire gedeelte van $\alpha(\omega)$ komt de term $\nabla_y^2 \vec{u}_0$ voor. Voor de wrijvingsloze kern is dit in de limiet voor $\omega \rightarrow \infty$ gelijk aan nul. Voor de grenslaag die beperkt is tot het wandoppervlak van de poriën levert de laatste term van vergelijking 2.28 geen bijdrage op. Dit zullen we later laten zien (appendix A). De integratie over de grenslaag levert voor het imaginaire gedeelte ook geen bijdrage (dit volgt uit de volgende paragraaf), zodat $\alpha_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha(\omega)$ gelijk is aan:

$$\alpha_\infty = \frac{\langle |\vec{u}_\infty|^2 \rangle}{|\langle \vec{u}_\infty \rangle|^2} \tag{2.29}$$

α_∞ is een constante en wordt de tortuositeit genoemd. Deze is voor de beschrijving voor stroming door poreus materiaal een belangrijke parameter.

Asymptotisch gedrag $\alpha_i(\omega)$ voor hoge frequenties

We bekijken nu hoe het imaginaire gedeelte van de tortuositeit zich gedraagt voor hoge frequenties. In vergelijking 2.25 is deze uitgedrukt in het snelheidsveld in de poriën. Wordt de benadering van het snelheidsveld voor

hoge frequenties gesubstitueerd (wrijvingsloze kern en het vlakke plaat profiel voor de snelheid in de grenslaag), dan levert de kern geen bijdrage tot $\alpha_i(\omega)$. Dit is aannemelijk omdat juist de wrijving verantwoordelijk is voor het imaginaire deel van $\alpha(\omega)$. We moeten in vergelijking 2.25 dus het snelheidsveld in de grenslaag substitueren en integreren over de grenslaag.

Het profiel van een oscillerende stroming langs een vlakke plaat is: $\hat{u}_t = \hat{u}_{pt}(1 - e^{iK\beta})$. \hat{u}_t is de amplitude (dimensievol) van de tangentiële component van de snelheid. De normale component staat loodrecht op de wand en is gelijk aan nul. \hat{u}_{pt} is de amplitude van de tangentiële component van de snelheid aan de wand als oplossing van het potentiaalprobleem. De parameter K is gelijk aan $\frac{(1+i)}{\delta}$, met δ de grenslaagdikte, die gelijk is aan $\sqrt{\frac{2\eta}{\rho\omega}}$. Verder is β een lokale coördinaat, die loodrecht op de wand staat en de afstand tot de wand aangeeft ($\beta = 0$ op de wand). Deze grootheden zijn nog dimensievol. De dimensieloze grootheden (*met een tilde*) zijn als volgt uitgedrukt in de dimensievolle parameters.

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta}{a} \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta}{a} \quad \tilde{K} = K.a$$

Zodat $\tilde{K} = \frac{(1+i)}{\tilde{\delta}}$. In het vervolg worden de tildes weer weggelaten.

De term $\langle \vec{u}_0^* \cdot \nabla_y^2 \vec{u}_0 + \vec{u}_0 \cdot \nabla_y^2 \vec{u}_0^* \rangle$ uit vergelijking 2.25 is in indexnotatie :

$$\langle u_{0j}^* \frac{\partial^2 u_{0j}}{\partial y_i^2} + u_{0j} \frac{\partial^2 u_{0j}^*}{\partial y_i^2} \rangle$$

en is gelijk aan:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i} (u_{0j}^* \frac{\partial u_{0j}}{\partial y_i} + u_{0j} \frac{\partial u_{0j}^*}{\partial y_i}) - 2 \frac{\partial u_{0j}^*}{\partial y_i} \frac{\partial u_{0j}}{\partial y_i} \right\rangle \quad (2.30)$$

Ook de hier gebruikte y is dimensieloos. We integreren over de grenslaag. De eerste term van vergelijking 2.30 is m.b.v. de stelling van Gauß te schrijven als:

$$\frac{1}{V_p} \int_S (u_{0j}^* \frac{\partial u_{0j}}{\partial y_i} + u_{0j} \frac{\partial u_{0j}^*}{\partial y_i}) n_i dS = \frac{1}{V_p} \int_S \frac{\partial}{\partial y_i} |u_{0j}|^2 n_i dS, \quad (2.31)$$

waarbij S het wandoppervlak van de poriën is. Met het snelheidsprofiel in de grenslaag $\vec{u}_0 = \vec{u}_p(1 - e^{(i-1)\beta/\delta})$ wordt uitdrukking 2.31:

$$\frac{1}{V_p} \int_S \frac{\partial}{\partial y_i} |\vec{u}_p|^2 (1 - e^{(i-1)\beta/\delta} - e^{-(i+1)\beta/\delta} + e^{-2\beta/\delta}) dS \quad (2.32)$$

Door $\frac{\partial}{\partial y_i}$ te schrijven als $\frac{\partial \beta}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial \beta}$ wordt uitdrukking 2.32:

$$\frac{1}{V_p} \int_S \frac{\partial \beta}{\partial y_i} |\vec{u}_p|^2 \left(-\frac{i-1}{\delta} e^{(i-1)\beta/\delta} + \frac{i+1}{\delta} e^{-(i+1)\beta/\delta} - \frac{2}{\delta} e^{-2\beta/\delta} \right) dS \quad (2.33)$$

Op S , het wandoppervlak van de poriën is β gelijk aan nul, zodat uitdrukking 2.33 en dus ook uitdrukking 2.31 nul oplevert.

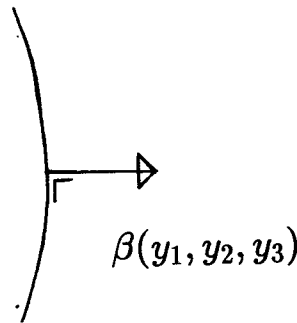
De teller van het imaginaire gedeelte van $\alpha(\omega)$ (vgl. 2.25) wordt dan gelijk aan de tweede term in vgl. 2.30, zodat:

$$\alpha_i = \frac{\langle \frac{\partial u_{0j}^*}{\partial y_i} \frac{\partial u_{0j}}{\partial y_i} \rangle}{\omega v^2} \quad (2.34)$$

Er hoeft alleen geïntegreerd te worden over de grenslaag, we hebben al laten zien dat de bijdrage van de kern nul is. De teller van uitdrukking 2.34 is dus te schrijven als:

$$\frac{1}{V_p} \int_{\text{grenslaag}} \frac{\partial u_{0j}^*}{\partial y_i} \frac{\partial u_{0j}}{\partial y_i} dS d\beta \quad (2.35)$$

Het volumeëlementje dV is vervangen door $dS d\beta$, met β een lokale coördinaat die de afstand tot de wand van de porie aangeeft (zie figuur 2.1), en S het wandoppervlak van de poriën.



Figuur 2.1: Lokale coördinaat β

Uitdrukking 2.35 is te schrijven als:

$$\frac{1}{V_p} \int_{\text{grenslaag}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y_i} \right)^2 \frac{\partial u_{0j}^*}{\partial \beta} \frac{\partial u_{0j}}{\partial \beta} dS d\beta \quad (2.36)$$

In lokale coördinaten (y_1, y_2, y_3) is β gelijk aan:

$$\beta = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \quad (2.37)$$

Voor de afgeleide geldt dan:

$$\frac{\partial \beta}{\partial y_i} = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \quad (2.38)$$

Zodat gesommeerd over i :

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial y_i}\right)^2 = 1 \quad (2.39)$$

Het snelheidsprofiel in de grenslaag is:

$$\vec{u}_0 = \vec{u}_p(1 - e^{(i-1)\beta/\delta})$$

Hieruit volgt dat:

$$\frac{\partial u_{0j}}{\partial \beta} = -\frac{(i-1)}{\delta} u_{pj} e^{(i-1)\beta/\delta} \text{ en } \frac{\partial u_{0j}^*}{\partial \beta} = \frac{(i+1)}{\delta} u_{pj}^* e^{-(i+1)\beta/\delta} \quad (2.40)$$

Uitdrukking 2.36 wordt met 2.39 en 2.40:

$$\frac{1}{V_p} \int_{\text{grenslaag}} |\vec{u}_p|^2 \frac{2}{\delta^2} e^{-2\beta/\delta} dS d\beta \quad (2.41)$$

Uitdrukking 2.41 geïntegreerd met β lopend van nul naar oneindig levert:

$$\frac{1}{V_p \delta} \int_S |\vec{u}_p|^2 dS \quad (2.42)$$

We nemen aan dat een verwaarloosbare fout ontstaat door β tot oneindig te integreren, we integreren immers op microschaal. Vergelijking 2.34 wordt dan:

$$\alpha_i = \frac{\int_S |\vec{u}_p|^2 dS}{V_p \delta \omega v^2} \quad (2.43)$$

Deze vergelijking is nog steeds dimensieloos. De volgende relatie geldt voor $\tilde{\delta}$ en $\tilde{\omega}$ (*Nu wel met tilde om onderscheid met de dimensionevolle grootheden te*

maken): $\bar{\delta} = \frac{\delta}{a} = \frac{\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}}{a} = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega a^2}} = \sqrt{\frac{2}{\bar{\omega}}}$. Dit gesubstituëerd in vergelijking 2.43 leidt tot:

$$\alpha_i = \frac{\delta \int_S |\vec{u}_p|^2 dS}{2V_p v^2} \quad (2.44)$$

Deze vergelijking geldt zowel voor de dimensievolle grootheden als voor de dimensieloze, omdat δ en y op dezelfde manier dimensieloos zijn gemaakt. $(\delta.S)/V$ en ook α_i is dimensieloos. Als het debiet door de poriën, in het geval er een dunne grenslaag aanwezig is, benaderd mag worden door het debiet bij grenslaagdikte gelijk aan nul, dan is \vec{v} gelijk aan $\vec{v}_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \vec{v}$. Vergelijking 2.44 kan dan m.b.v. $\alpha_\infty = \frac{\langle |\vec{u}_\infty|^2 \rangle}{v_\infty^2}$ (vergelijking 2.29) geschreven worden als:

$$\alpha_i(\omega) = \frac{\delta(\omega) \alpha_\infty \int_S |\vec{u}_p|^2 dS}{2 \int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV} \quad (2.45)$$

De integraal in de teller, $\int_S |\vec{u}_p|^2 dS$, is de integraal over het porieoppervlak van de absolute waarde van de snelheid in het kwadraat, als oplossing van het potentiaal probleem in de kern van de poriën, dus als er een dunne grenslaag aanwezig is. Deze integraal is in eerste benadering gelijk aan de integraal van de absolute waarde van de snelheid van de potentiaal oplossing zonder grenslaag. Voor de bepaling van het imaginaire gedeelte van de toegevoegde massaparameter m.b.v. vgl.2.45 hoeft dus alleen het potentiaalprobleem voor de poriën opgelost te worden.

We introduceren nu Λ_1 , door α_i te schrijven als:

$$\alpha_i(\omega) = \alpha_\infty \frac{\delta(\omega)}{\Lambda_1} \quad (2.46)$$

Met vgl. 2.45 volgt dan:

$$\frac{2}{\Lambda_1} = \frac{\int_S |\vec{u}_\infty|^2 dS}{\int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV} \quad (2.47)$$

Deze vergelijking is nog steeds dimensieloos. De vergelijking geldt ook voor de dimensievolle grootheden omdat δ , Λ_1 , S en V_p alle dimensieloos gemaakt zijn met a . De definitie van Λ_1 in vergelijking 2.47 komt overeen met die van Johnson, Koplik en Dashen [JOH87]. De parameter Λ_1 is te beschouwen als een met de snelheid gewogen volume- oppervlakte verhouding, die voor de beschrijving van stroming door poreuze media wordt gebruikt als een

karacteristieke lengtemaat.

Uit vergelijking 2.46 volgt dat het imaginaire gedeelte van $\alpha(\omega)$ voor hogere frequenties afneemt met $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$.

Asymptotisch gedrag $\alpha_r(\omega)$ voor hoge frequenties

Voor het reële gedeelte van $\alpha(\omega)$ weten we dat deze voor de limiet van $\omega \rightarrow \infty$ gelijk is aan α_∞ . Als we een soortgelijk asymptotisch gedrag van het reële gedeelte van $\alpha(\omega)$ veronderstellen als bij het imaginaire gedeelte, kunnen we het reële gedeelte van $\alpha(\omega)$ schrijven als:

$$\alpha_r(\omega) = \alpha_\infty \left(1 + \frac{\delta(\omega)}{\Lambda_2} \right) \tag{2.48}$$

Dat het reële gedeelte van $\alpha(\omega)$ zo geschreven kan worden is als volgt aan-nemelijk te maken (we volgen hier de redenering van Johnson [JOH87]): De complexe grootheid $\alpha(\omega)$ moet voldoen aan de symmetrierelatie [LAN60]:

$$\alpha(-\omega^*) = \alpha^*(\omega) \tag{2.49}$$

Het bewijs hiervan is als volgt: De macroscopische snelheid \vec{v} op het tijdstip t is het gevolg van een drukgradiënt ∇P op het tijdstip t en van de drukgradiënten vóór het tijdstip t . De snelheid van de vloeistof reageert immers met een bepaalde traagheid. De snelheid op tijdstip t is dus te schrijven in de vorm van een convolutieïntegraal:

$$\vec{v}(t) = \int_0^\infty f(\tau) \nabla P(t - \tau) d\tau \tag{2.50}$$

Als we nu overgaan naar het frequentiedomein met behulp een van Fourier-transformatie wordt vergelijking 2.50:

$$\hat{\vec{v}}(\omega) = F(\omega) \nabla \hat{P}(\omega) \tag{2.51}$$

met

$$F(\omega) = \int_0^\infty f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \tag{2.52}$$

Uit vergelijking 2.51 en vergelijking 2.1 volgt dat $\frac{k(\omega)}{\phi\eta} = F(\omega)$.
Uit vergelijking 2.52 volgt:

$$k(-\omega^*) = k^*(\omega) \tag{2.53}$$

Gebruik makende van vergelijking 2.3 volgt uit vgl.2.53 de vgl.2.49. Voor reële ω geldt dan: $\alpha(-\omega) = \alpha^*(\omega)$. In het imaginaire gedeelte van $\alpha(\omega)$ is alleen δ afhankelijk van de frequentie. Daarvoor geldt: $\delta(-\omega) = \pm i\delta(\omega)$. Met vergelijking 2.46 en 2.48 volgt dan dat Λ_1 gelijk moet zijn aan Λ_2 . Voor Λ_2 kan ook een uitdrukking afgeleid worden uit de vergelijking voor het reële gedeelte van $\alpha(\omega)$ (vgl. 2.28). Dit is gedaan in Appendix A. De in deze appendix afgeleide uitdrukking voor Λ_2 is:

$$\frac{2}{\Lambda_2} = \frac{- \left[\frac{\partial}{\partial r_w} \int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV \right]_\psi}{\int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV} \quad (2.54)$$

De teller van het rechterlid van de vergelijking betekent de verandering van de integraal als de wand verplaatst wordt loodrecht op de wand, bij een constant potentiaalverschil over de porie. Dit verplaatsen van de wand is naar binnen positief gedefiniëerd. Het schijnbaar verplaatsen van de wand wordt veroorzaakt door een groeiende grenslaag bij afnemende frequentie. We zullen Λ_2 voor een porie berekenen m.b.v. vgl. 2.54 ter controle op de vergelijkingen en de berekeningen (Dit wordt uitvoerig beschreven in Appendix A).

De in deze paragraaf afgeleide hoge frequentielimiet voor $\alpha(\omega)$ (vgl. 2.46 en 2.48) is eerder gevonden door Johnson, Koplik en Dashen [JOH87].

2.2.5 Een eenvoudige toepassing van de hoge frequentielimiet

We onderzoeken het hoge frequentiegedrag in het geval dat het poreus materiaal bestaat uit rechte cilindrische buisjes. De oplossing van het potentiaal probleem is dat de snelheid overal even groot is, en gericht is in de lengterichting van de buisjes. Uit vgl. 2.29 volgt dat $\alpha_\infty = 1$. M.b.v. de vergelijking 2.54 voor Λ_2 en vergelijking 2.47 is eenvoudig in te zien dat Λ_1 en Λ_2 gelijk zijn aan de straal R van de buisjes.

De dynamische tortuositeit is voor buisjes ook analytisch te bepalen. Deze analytische oplossing is uitgedrukt in Besselfuncties [GRI87]. In de volgende paragraaf volgt een figuur van deze analytische functie. Voor de buisjes is ook de stationaire permeabiliteit analytisch te bepalen, uit de Stokes vergelijking:

$$\eta \nabla^2 \vec{v} = \nabla P \quad (2.55)$$

Deze Stokes vergelijking volgt uit de Navier- Stokes vergelijking indien $Re \ll 1$ (verwaarlozing convectieve termen) en de stroming incompressibel is ($(\eta + \eta')\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = 0$ omdat $\nabla \cdot \vec{u}$ gelijk aan nul is). De oplossing van de Stokes vergelijking 2.55 is voor de buisjes identiek aan de oplossing van Poiseuille:

$$U = \frac{\Delta P}{4L\eta}(R^2 - r^2) \quad (2.56)$$

Er is alleen maar een snelheid U in de lengterichting van de buisjes. R is de straal van het buisje, r de afstand tot de symmetrieas en $\Delta P/L$ de drukgradiënt over het buisje. Uit vergelijking 2.56 volgt dat

$$V = \frac{R^2 \Delta P}{8L\eta} \quad (2.57)$$

De snelheid V is de al eerder gebruikte macroscopische snelheid. Met vgl. 2.1 volgt:

$$k(0) = \frac{1}{8}\phi R^2 \quad (2.58)$$

We introduceren nu een dimensieloze parameter M :

$$M = \frac{8\alpha_\infty k(0)}{\phi \Lambda^2} \quad (2.59)$$

Deze parameter M is voor de buisjes gelijk aan 1. Johnson et al. suggereren dat M altijd ongeveer 1 zal zijn voor willekeurig materiaal [JOH87]. Dat zou betekenen dat de onafhankelijke te bepalen parameters α_∞ , $k(0)$, ϕ en Λ afhankelijk zijn. Dit blijkt voor numerieke berekeningen [SHE88] en metingen [SHE88] zo te zijn (zie ook Hoofdstuk 3), alleen voor poreus materiaal dat op microschaal scherpe hoeken bevat, lijkt dit niet op te gaan.

2.2.6 De dynamische permeabiliteit en tortuositeit voor het gehele frequentie bereik

In het voorgaande is een hoge frequentielimiet voor $\alpha(\omega)$ en daarmee ook voor $k(\omega)$, met behulp van vergelijking 2.3, afgeleid. We zouden echter $\alpha(\omega)$ en $k(\omega)$ in het gehele frequentiebereik willen weten. De functie voor de dynamische permeabiliteit, dimensieloos gemaakt met de stationaire permeabiliteit, $k(\omega)/k(0)$ moet dan voldoen aan:

- $k(\omega)/k(0) \rightarrow 1$ voor $\omega \rightarrow 0$

- $k(\omega)/k(0)$ moet voor hoge frequenties voldoen aan het hoge frequentiegedrag. Dit volgt uit de vergelijkingen 2.3, 2.46 en 2.48.

$$\frac{k(\omega)}{k(0)} = \frac{i\eta\phi}{k(0)\rho\omega\alpha_\infty(1 + \frac{\delta}{\Lambda}(i+1))} \quad (2.60)$$

Met $\omega_c = \frac{\eta\phi}{\alpha_\infty k(0)\rho}$ volgt voor deze hoge frequentielimiet:

$$\frac{k(\omega)}{k(0)} = \frac{\omega_c}{-i\omega + \frac{\omega\delta}{\Lambda}(i-1)} \quad (2.61)$$

Met $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ volgt $\frac{\omega\delta}{\Lambda} = \sqrt{\frac{2\nu\omega}{\Lambda^2}}$. Verder geldt dat $(i-1) = \sqrt{-2i}$ zodat:

$$\frac{k(\omega)}{k(0)} = \frac{\omega_c}{-i\omega + \sqrt{\frac{-4i\nu\omega}{\Lambda^2}}} \quad (2.62)$$

Met $M = \frac{8\alpha_\infty k(0)}{\phi\Lambda^2}$ volgt dat $M\omega_c = \frac{8\nu}{\Lambda^2}$ zodat:

$$\frac{k(\omega)}{k(0)} = \frac{\omega_c}{-i\omega + \sqrt{\frac{-iM\omega\omega_c}{2}}} \quad (2.63)$$

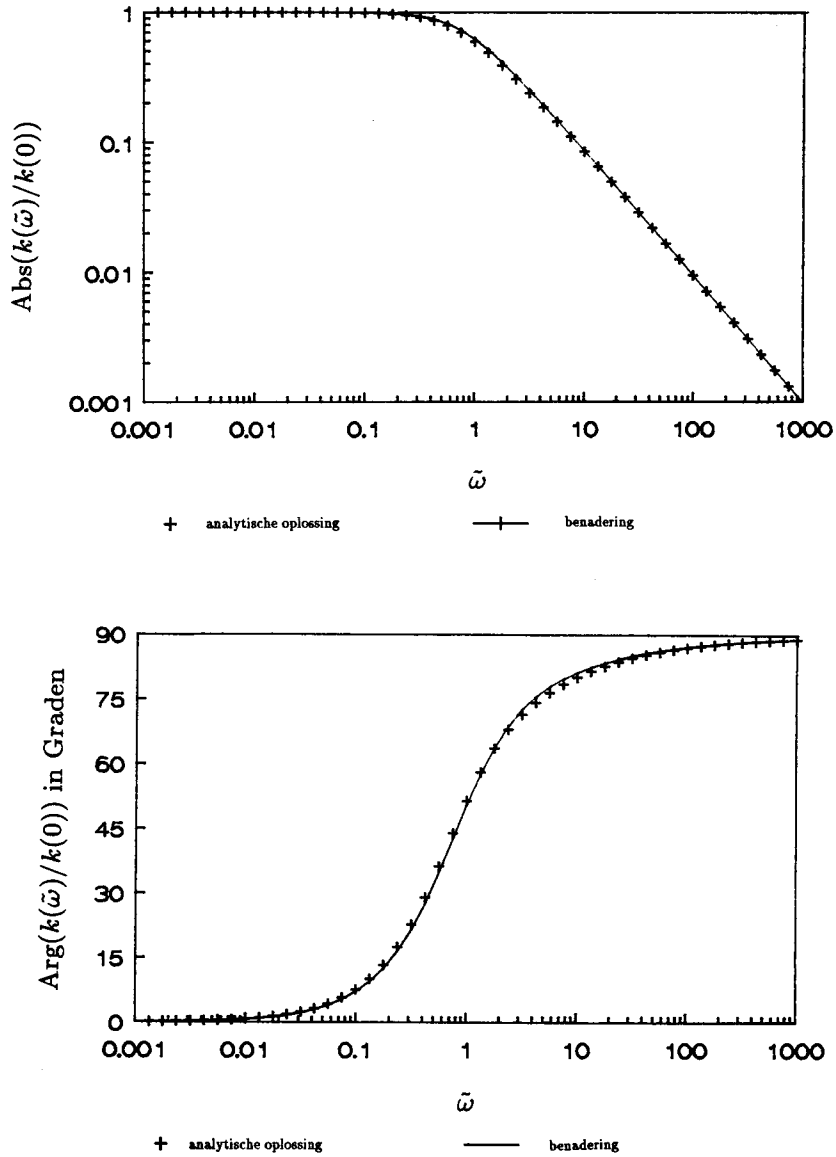
We voeren nu een dimensieloze frequentie $\tilde{\omega} = \omega/\omega_c$ in. Deze dimensieloze frequentie is niet dezelfde als de eerder gebruikte! Die was namelijk dimensieloos gemaakt met ω_{ref} . Voor de hoge frequentielimiet voor $k(\omega)/k(0)$ volgt dan:

$$\frac{k(\omega)}{k(0)} = \frac{1}{-i\tilde{\omega} + \sqrt{-iM\tilde{\omega}/2}} \quad (2.64)$$

Een eenvoudige functie die aan beide limieten voldoet is [JOH87]:

$$\frac{k(\tilde{\omega})}{k(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 - iM\tilde{\omega}/2} - i\tilde{\omega}} \quad (2.65)$$

De functie van vergelijking 2.65 is voor buisjes ($M=1$) uitgezet in figuur 2.2. Daarbij is ook de analytische oplossing van de buisjes uitgezet. Vergelijking van de functie in vergelijking 2.65 met de analytische oplossing van de buisjes leidt tot de conclusie dat de functie over het gehele frequentiebereik een goede benadering is.



Figuur 2.2: Analytische oplossing van de dynamische permeabiliteit voor de buisjes en de benadering

Hoofdstuk 3

Numerieke berekeningen

3.1 Probleem omschrijving

In het voorgaande hoofdstuk is het asymptotisch gedrag van $\alpha(\omega)$ besproken. Belangrijke parameters daarbij zijn de lengteschalen Λ_1 en Λ_2 . Volgens de lineaire responsie theorie moeten Λ_1 en Λ_2 aan elkaar gelijk zijn. Ze kunnen ook onafhankelijk bepaald worden met vergelijking 2.47 en vergelijking 2.54, hetgeen ons de mogelijkheid geeft om de kwaliteit van de berekeningen van Λ_1 en Λ_2 te controleren.

We beschouwen een poreus materiaal opgebouwd uit gelijkvormige poriën. Het potentiaalprobleem is opgelost voor één enkele porie. Verschillende poriegeometrieën worden gebruikt. We kunnen dan Λ_1 en Λ_2 bepalen, maar ook α_∞ . Daarnaast bepalen we $k(0)$ door de Stokesvergelijking op te lossen. Als we deze parameters berekend hebben, kunnen we de parameter M bepalen en nagaan in hoeverre deze parameter van de waarde 1 afwijkt.

We doen dit voor poriën die rotatiesymmetrisch zijn en gebruiken cylindercoördinaten. Twee typen poriegeometrieën zullen voor de berekeningen gebruikt worden. Deze zullen beschreven worden in de volgende paragraaf. We lossen het potentiaal probleem op voor de amplitude van snelheid $\vec{u} = \hat{u}e^{-i\omega t}$. Het potentiaalprobleem voor de porie is dan:

$$\hat{u} = \nabla\psi \quad \nabla^2\psi = 0 \quad (3.1)$$

En randvoorwaarden voor $z = 0$; de keel van de porie (de smalste doorsnede) en $z = 1$; de buik (de breedste doorsnede) van de porie:

$$\psi(z = 0) = 0 \quad \psi(z = 1) = 1 \quad \text{en} \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \text{ op de wand}$$

De in het potentiaal probleem opgelegde potentiaalgradiënt betekent voor de oscillerende stroming in de porie een oscillerende drukgradiënt. Dit volgt uit de Navier-Stokes vergelijking zonder wrijving en $Re \ll 1$:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla P \quad (3.2)$$

Met $\vec{u} = \hat{u}e^{-i\omega t}$ en $P = \hat{P}e^{i\omega t}$ volgt uit vgl. 3.2

$$- \rho i\omega \hat{u} = -\nabla \hat{P} \quad (3.3)$$

Uit deze vergelijking en vgl. 3.1 volgt

$$- i\omega\rho\nabla\psi = -\nabla\hat{P}, \quad (3.4)$$

zodat

$$\psi = \frac{\hat{P}}{i\omega\rho} \quad (3.5)$$

De stationaire permeabiliteit of Darcycoëfficiënt $k(0)$ kan bepaald worden uit de Stokesvergelijking:

$$\eta\nabla^2\hat{u} = \nabla\hat{P} \quad (3.6)$$

Met randvoorwaarden:

$$P(z = 0) = 0 \quad P(z = 1) = 1 \quad \hat{u} = \vec{0} \text{ aan de wand}$$

De plaatsen waar de druk is opgelegd ($z = 0$ en $z = 1$), zijn of de keel van de porie, de smalste doorsnede, of de buik, de breedste doorsnede van de porie (zie figuur 3.1). De druk is constant verondersteld op die plaatsen. De rechtvaardiging hiervoor is als volgt:

We schrijven de snelheid \vec{u} als functie van r en z : $\vec{u}(r, z)$, en onderscheiden $u_r(r, z)$ in de r -richting en $u_z(r, z)$ in de z -richting.

Wegens symmetrie in $z = 0$ geldt:

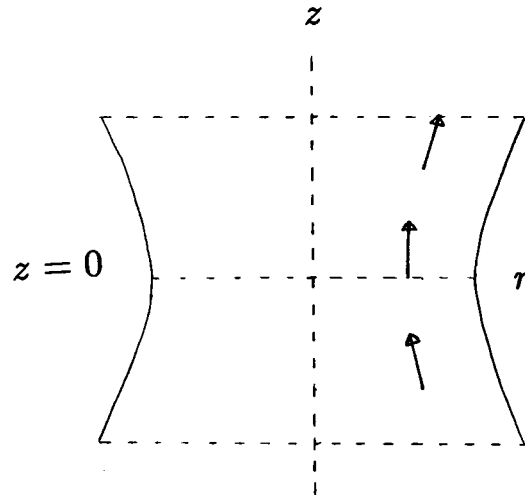
$$u_r(r, z) = -u_r(r, -z) \quad (3.7)$$

De snelheid u_r kan worden geschreven als een reeks met alleen oneven machten van z :

$$u_r(r, z) = \alpha_1(r)z + \alpha_3(r)z^3 + \alpha_5(r)z^5 + \dots \quad (3.8)$$

Uit vgl. 3.7 en ook uit vgl. 3.8 volgt dat $u_r(r, 0)$ gelijk aan nul is. Uit vgl. 3.8 volgt

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0 \quad (3.9)$$



Figuur 3.1: Schets doorsnede van een porie

Uit de stokesvergelijking 3.6 in cylindercoördinaten volgt:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \eta \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.10)$$

Wegens de cylinder symmetrie is $\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} = 0$, zodat uit vgl. 3.9 en 3.10 volgt dat $\frac{\partial P}{\partial r} |_{z=0} = 0$. De druk in de doorsnede ter hoogte $z = 0$ is dus constant. Eenzelfde redenering kan gehouden worden voor de breedste doorsnede van de porie ($z = 1$).

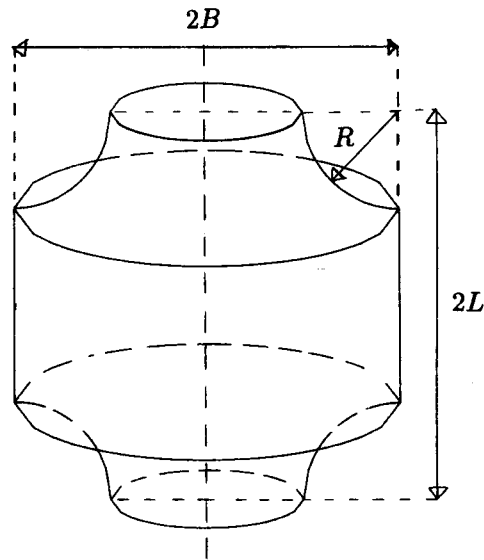
De numerieke berekeningen zijn gedaan met het eindige elementen programma Sepran. Met dit pakket kunnen differentiaalvergelijkingen als 3.1 en 3.6 voor een willekeurige porie opgelost worden.

3.2 Opzet

Bij de numerieke berekeningen is uitgegaan van twee verschillende porie geometrieën.

- 1. De porie-geometrie geschetst in figuur 3.2. Wegens symmetrie is voor de berekeningen slechts een halve porie gebruikt. Deze halve porie

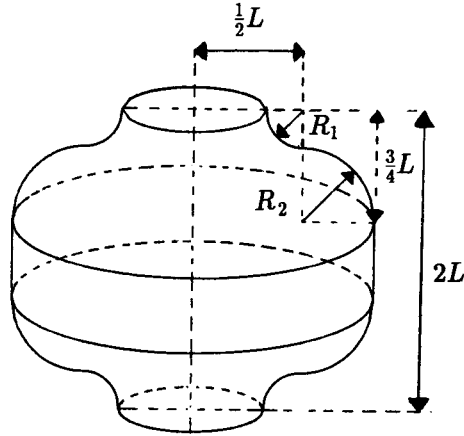
is het omwentelingslichaam met een genererende kromme bestaande uit een kwart cirkelboog met straal R en een lijnstuk evenwijdig aan de omwentelingsas. De lengte van de halve porie is gelijk aan L , de grootste straal van de porie is gelijk aan B . Voor deze porie zijn de parameters α_∞, Λ en $k(0)$ berekend, voor verschillende waarden van R/L en B/L .



Figuur 3.2: Porie geometrie 1

- 2. De andere geometrie is geschetst in figuur 3.3. Ook nu is voor de berekeningen een halve porie gebruikt. Deze halve porie is het omwentelingslichaam met een genererende kromme bestaande uit twee kwart cirkelbogen met stralen R_1 en R_2 en een lijnstuk evenwijdig aan de omwentelingsas. De lengte van de halve porie is L en de stralen R_1 en R_2 voldoen aan de volgende relatie: $R_1 + R_2 = \frac{3}{4}L$. Bepaald zijn $\alpha_\infty, k(0)/\phi, \Lambda_1$ en Λ_2 , voor verschillende waarden van R_1 .

De parameters Λ_1 en Λ_2 zijn berekend met vgl. 2.47 resp. vgl. 2.54. Door R_1 te laten toenemen verschuift de wand, loodrecht op de wand naar binnen. De afgeleide $\frac{\partial}{\partial r_w}$ uit vgl. 2.54 kan dan vervangen worden door $\frac{\partial}{\partial R_1}$. De berekeningen zijn gedaan bij gelijk potentiaal verschil over de porie. Uit



Figuur 3.3: Porie geometrie 2

de berekende waarden van $\left[\int_{V_p} |\vec{u}|^2 dV \right]_{\psi}$ is de afgeleide naar R_1 en daarmee Λ_2 bepaald.

3.3 Resultaten

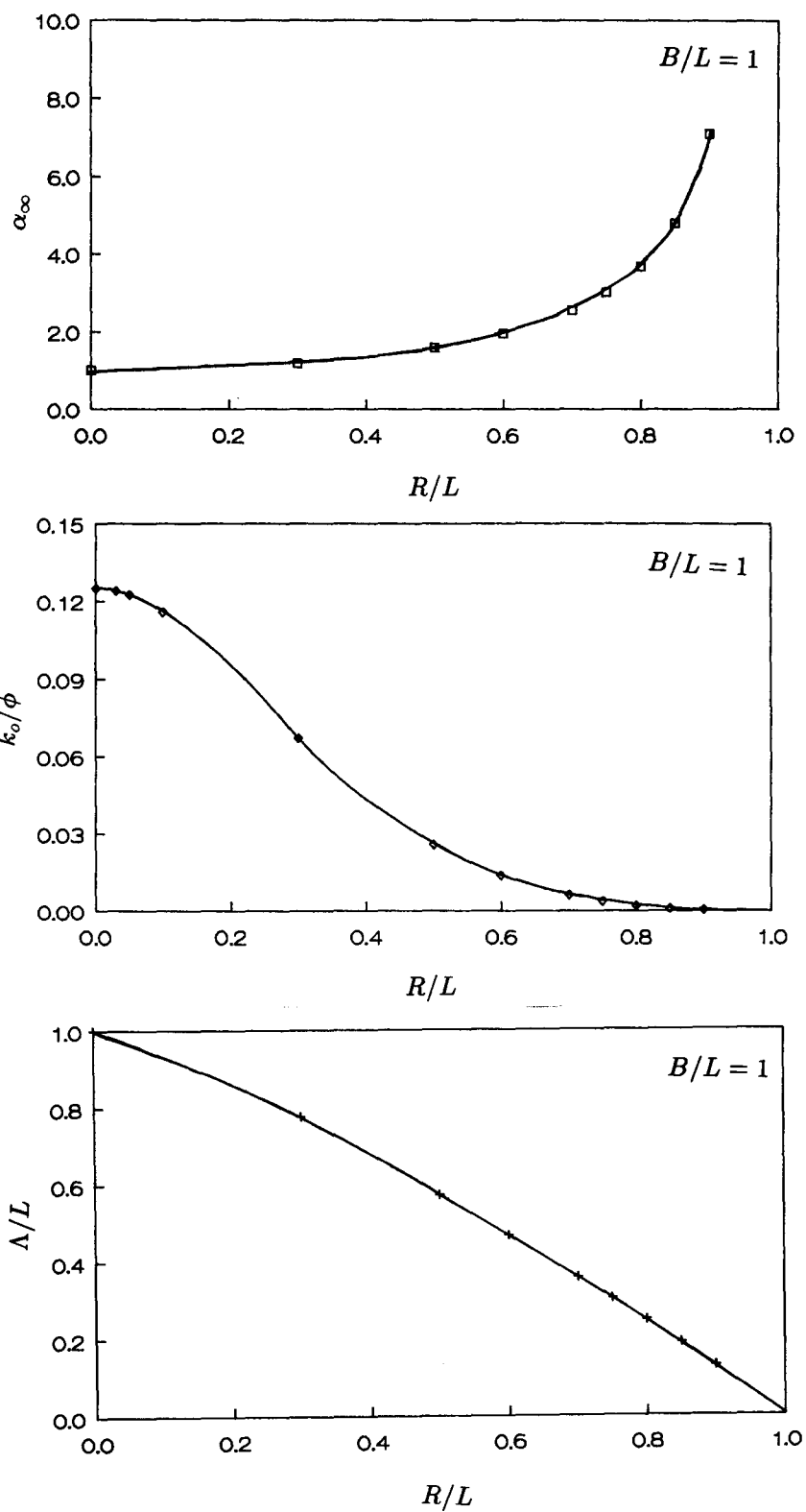
- 1. De berekende waarden van α_{∞} , $k(0)$ en Λ_1 zijn uitgezet in figuur 3.4 als functie van R/L met $B/L = 1$, en in figuur 3.5 als functie van B/L met $R/L = 1/2$. De berekende waarden van M staan in de volgende tabel.

$B/L = 1$		$R/L = 1/2$	
R/L	M	B/L	M
0.3	1.04±0.02	1.0	1.00±0.02
0.5	1.00	0.9	0.99
0.6	0.98	0.8	0.96
0.7	0.98	0.7	0.95
0.75	0.97	0.65	0.94
0.8	0.95	0.6	0.93
0.85	0.95		
0.9	0.93		

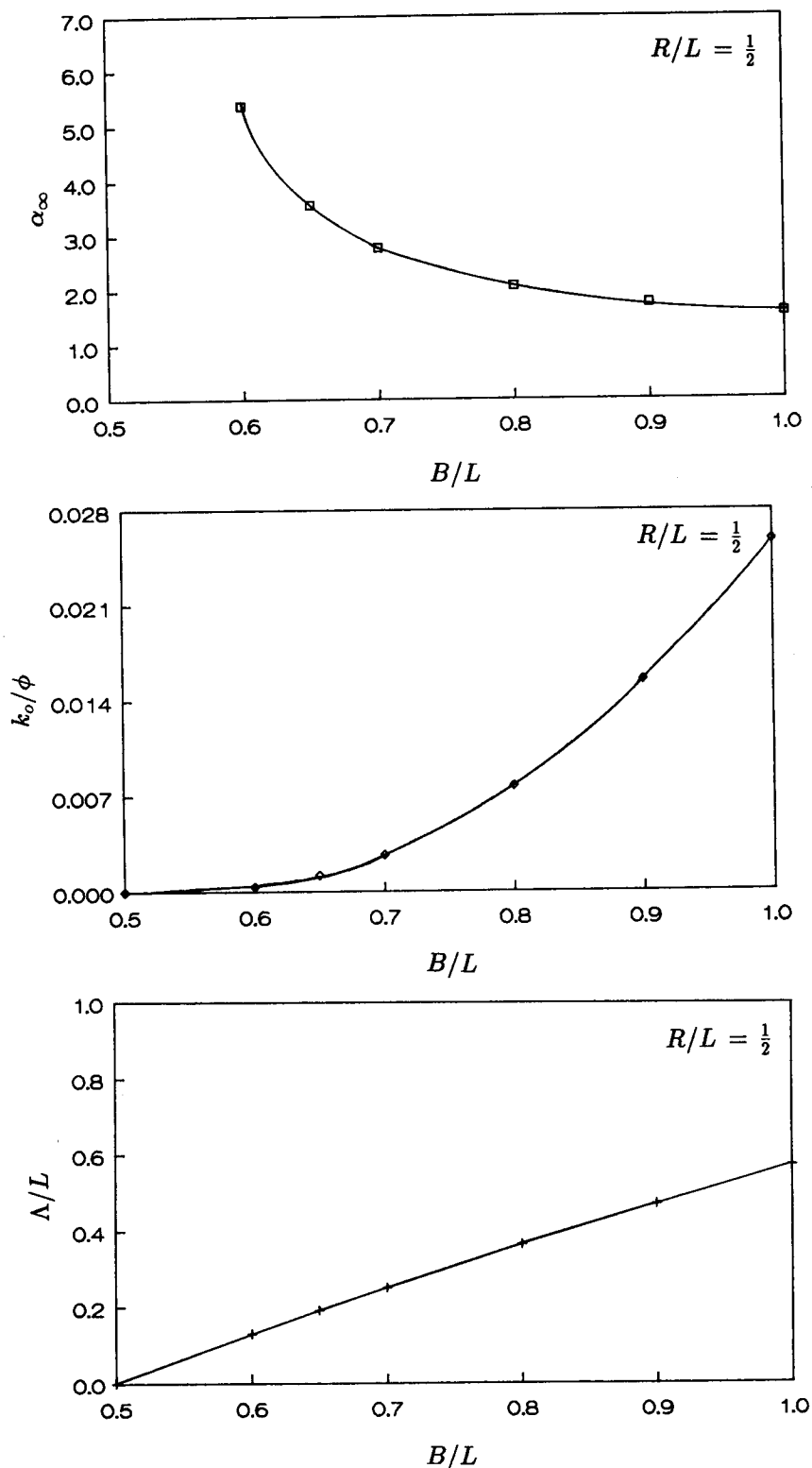
- 2. De berekende waarden van α_∞ , $k(0)$, Λ_1 voor de tweede porie-geometrie zijn uitgezet in figuur 3.6. De berekende waarden voor Λ_1 en Λ_2 zijn nog een keer apart uitgezet in figuur 3.7. De berekende waarden van M staan in de volgende tabel. In de laatste kolom zijn enkele nauwkeurige waarden van M gegeven (Er is hier meshverfijning toegepast).

R/L	M	M
0.05	1.25±0.07	1.29±0.02
0.10	1.08	
0.15	1.03	
0.20	0.98	
0.25	0.96±0.05	1.01±0.01
0.30	0.94	
0.35	0.92	
0.40	0.92	
0.45	0.90±0.02	0.91±0.01

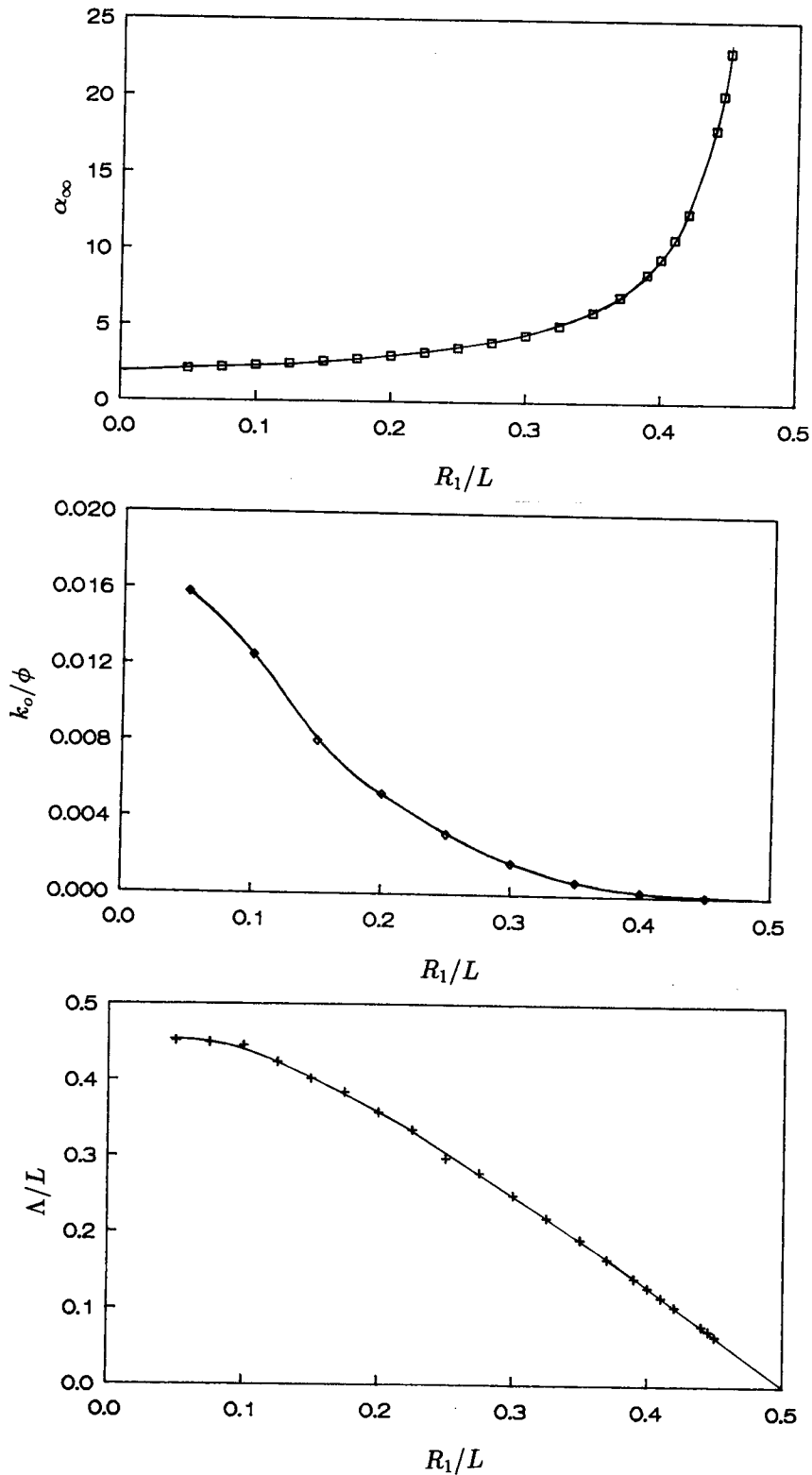
In figuur 3.8 zijn de berekende snelheidsverdeling en de potentiaallijnen van de potentiaal oplossing van een porie gegeven. In figuur 3.9 zijn de snelheidsverdeling en de druklijnen van de Stokes oplossing voor een porie gegeven.



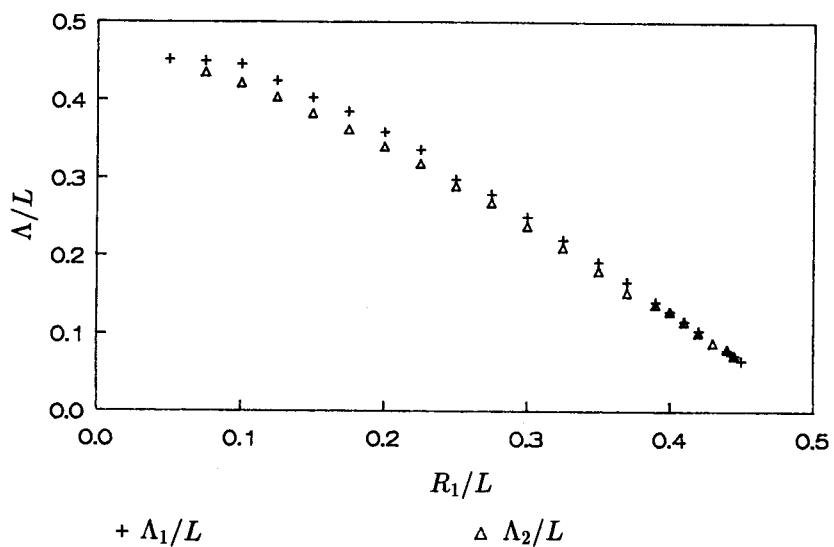
Figuur 3.4: Poriegeometrie 1: α_∞ , $k(0)$ en Λ_1 als functie van R/L



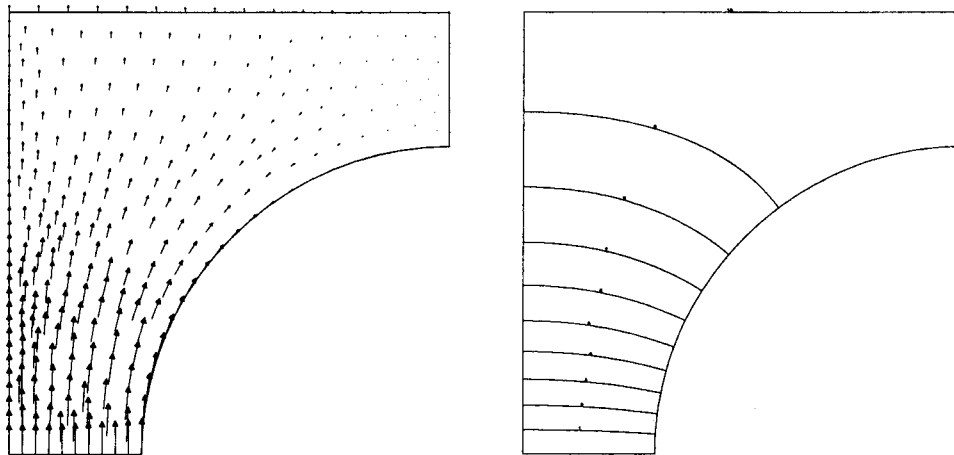
Figuur 3.5: Poriegeometrie 1: α_∞ , $k(0)$ en Λ_1 als functie van B/L



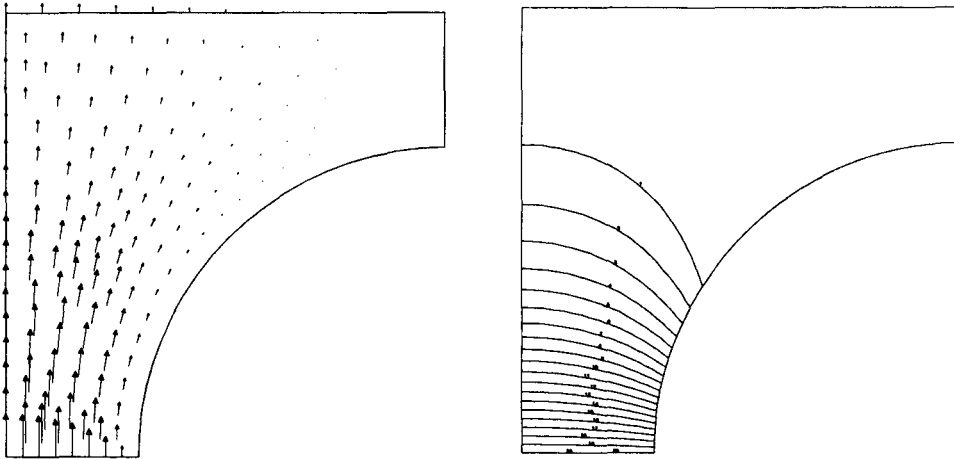
Figuur 3.6: Poriegeometrie 2: α_∞ , $k(0)$ en Λ_1 als functie van R_1



Figuur 3.7: Vergelijking van Λ_1 en Λ_2



Figuur 3.8: Snelheidsveld en potentiaallijnen



Figuur 3.9: Snelheidsveld en druklijnen van de Stokesoplossing

3.4 Conclusies

De berekende waarden van α_∞ , $k(0)$ en Λ voldoen bij $B/L = 1$ en $R/L = 0$ aan: $\alpha_\infty = 1$, $\frac{k(0)}{\phi L^2} = \frac{1}{8}$, $\frac{\Lambda}{L} = 1$. In dat geval is de porie namelijk gelijk aan een buis, waarvoor de parameters analytisch te berekenen zijn. Verder nadert $\alpha_\infty \rightarrow \infty$, $k(0) \rightarrow 0$ en $\Lambda \rightarrow 0$ als de keeldiameter van de porie naar nul nadert. Het blijkt dat de waarde van Λ ongeveer gelijk is aan de breedte van de keel van de porie. De fouten in de berekende waarden van M zijn bepaald door de mesh te verfijnen en α_∞ , $k(0)$ en Λ_1 opnieuw te bepalen. Voor enkele porieconfiguraties zijn meer nauwkeurigere waarden van M gegeven, die het resultaat zijn van berekeningen met verfijnde mesh. De waarde van M blijft ongeveer gelijk aan 1, maar wijkt enigszins van 1 af als:

- 1. De keel van de porie erg nauw wordt.
- 2. De doorsnede van de porie sterk verandert bij kleine variatie van z , in de buurt van de keel.

P.Sheng en M-Y Zhou [SHE87] vonden numeriek ook een afwijking van M bij grote verandering van de doorsnede in de keel, maar zij vinden dat $M < 1$, terwijl hier afwijkingen van $M > 1$ gevonden zijn.

Uit figuur 3.7 blijkt dat de berekende waarden van Λ_1 en Λ_2 binnen de berekende nauwkeurigheid aan elkaar gelijk zijn. Dit geeft vertrouwen in de gebruikte numerieke berekeningen.

Hoofdstuk 4

Metingen

4.1 Inleiding

In hoofdstuk 2 is de dynamische doorlatendheid onderzocht. Daarbij bleek dat de geschaalde functie, zoals die door Johnson is voorgesteld een goede benadering te zijn voor de dynamische doorlatendheid voor een poreus materiaal bestaande uit evenwijdige buisjes. Deze functie zou ook een goede benadering moeten zijn voor willekeurig poreus materiaal. We willen dat toetsen. Daartoe bepalen we eerst d.m.v. onafhankelijke metingen de schalingsparameters $k(0)$, ϕ en α_∞ . Met behulp van een opstelling waarbij een zuiger zorgt voor een oscillerende drukgradiënt wordt vervolgens de dynamische permeabiliteit gemeten. De metingen en de theorie kunnen dan vergeleken worden.

4.2 Stationaire doorlatendheid

De stationaire doorlatendheid $k(0)$ kan bepaald worden door een drukverschil over het poreuze materiaal aan te leggen en daarbij het debiet door het poreuze materiaal te meten. Indien de macroscopische snelheid \vec{v} en het drukverschil over het poreuze materiaal klein genoeg zijn ($Re \ll 1$), is de snelheid evenredig met de opgelegde drukgradiënt. Dit is de wet van Darcy.

$$\phi \vec{v} = \frac{k(0)}{\eta} \nabla P \quad (4.1)$$

De bepaling van de stationaire doorlatendheid is uitgevoerd met lucht. De poreuze materialen zijn aan elkaar gelijmde glazen bolletjes met verschillende diameters (0.46mm, 1.28mm en 3 mm). Deze zijn in een messing buis

gelijmd. Deze configuraties worden ook gebruikt voor de bepaling van de porositeit en de dynamische doorlatendheid. Aan beide zijden van het poreuze materiaal wordt de druk gemeten met twee Betz water-manometers. Het debiet wordt bepaald met een gasmeter (Meterfabriek Dordrecht natte precisie gasmeter Type 1). Het grootste drukverschil over het poreuze materiaal met de kleinste doorlatendheid is 1000 Pa. Het relatieve verschil in dichtheid van de lucht in het poreus materiaal is dus kleiner dan 1%. We kunnen de lucht dus als incompressibel beschouwen.

In de grafieken in figuur 4.1 zijn de gemeten drukverschillen uitgezet tegen het debiet per oppervlakte $\Phi/A = \phi v$, met Φ het debiet in m^3/s . Er is sprake van een niet lineair verband tussen het debiet en de drukgradiënt, omdat niet steeds voldaan is aan de voorwaarde $Re \ll 1$. Daarom wordt als regressiecurve een kwadratische functie gekozen. De stationaire doorlatendheid volgt uit de richtingscoëfficiënt bij $v = 0$. $Re < 1$ voor de materialen met diameters van de bolletjes van 0.46, 1.28 en 3 mm als $\phi v < 0.01$ resp. 0.02 resp. 0.04.

De bepaalde doorlatendheden zijn:

$d[mm]$	$k(0)[m^2]$
0.46 ± 0.06	$(1.41 \pm 0.05)10^{-10}$
1.28 ± 0.12	$(7.08 \pm 0.1)10^{-10}$
3.0 ± 0.5	$(4.2 \pm 0.1)10^{-9}$

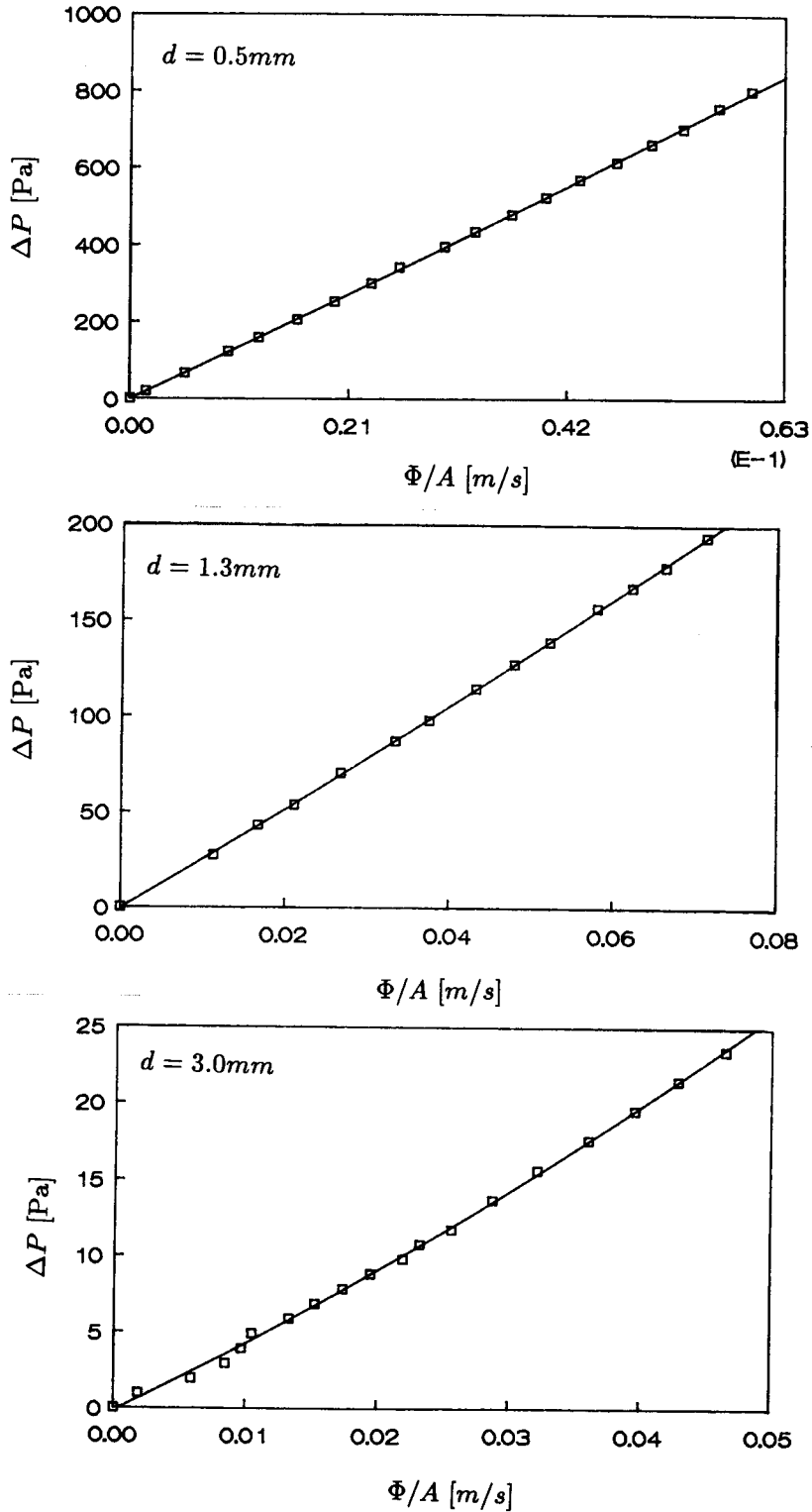
De doorlatendheid is het nauwkeurigst te bepalen bij het minst doorlatende poreuze materiaal, omdat het drukverschil over het materiaal dan het grootste is. Bij het poreus materiaal met de grootste doorlatendheid ($d = 3mm$) bedraagt het drukverschil over het poreus materiaal slechts 25 Pa.

4.3 Porositeit

De porositeit ϕ is de volumefractie van de poriën. De porositeit is bepaald door het poreuze materiaal zowel in lucht als onder water te wegen. Voor de massa m van het poreuze materiaal geldt:

$$m = (1 - \phi)\rho_s V_t, \quad (4.2)$$

met ρ_s de dichtheid van het vaste materiaal en V_t het volume van het poreuze materiaal. De poreuze materialen zijn met water verzadigd door deze



Figuur 4.1: Stationaire doorlatendheid

vacuum te pompen, CO_2 in te laten en vervolgens met water te vullen, onder lage druk. Door het poreus materiaal tenslotte onder druk (1.2 Bar overdruk) te zetten lossen de resten CO_2 op in water. Onder water meten we massa m' .

$$m' = (1 - \phi)(\rho_s - \rho)V_t, \quad (4.3)$$

met ρ de dichtheid van water. Het verschil in massa is:

$$(m - m') = (1 - \phi)\rho V_t \quad (4.4)$$

Uit vergelijking 4.4 volgt de porositeit. Door substitutie van de verkregen porositeit in vergelijking 4.2 volgt de dichtheid van het vaste materiaal. De gebruikte poreuze materialen zijn dezelfde glazen gelijkde bolletjes als die gebruikt zijn voor de bepaling van de doorlatendheid. Deze zijn gemaakt in een messing buis, zodat voor de bepaling van de massa en het volume van het poreuze materiaal gecorrigeerd moet worden voor de massa en het volume van de buis. Daarvoor is de massa van eenzelfde buis zowel in lucht als onder water gemeten. De bepaalde porositeiten zijn:

$d[mm]$	ϕ
0.46	0.31 ± 0.01
1.28	0.31 ± 0.01
3.0	0.32 ± 0.01

De met vergelijking 4.2 berekende dichtheden zijn:

$d[mm]$	$\rho_s [Kg/m^2]$
0.46	$2.67 \cdot 10^2$
1.28	$2.71 \cdot 10^2$
3.0	$2.65 \cdot 10^2$

De bepaalde porositeiten van de gelijkde bolletjes zijn alle ongeveer gelijk. Dit is niet verwonderlijk omdat bij een gelijke manier van stapelen de porositeit onafhankelijk is van de diameter van de bolletjes. De theoretische waarde van de porositeit voor een dichte bolstapeling is $(1 - \pi/3\sqrt{2}) \approx 0.26$ [GRI87]. De bepaalde porositeit is iets groter. De m.b.v. de gemeten waarden van porositeit berekende dichtheden van het glas zijn alle ongeveer gelijk. Dit ondersteunt de kwaliteit van de bepaling van de porositeit.

4.4 Tortuositeit

De tortuositeit kan onafhankelijk bepaald worden door de elektrische geleidbaarheid van het verzadigde poreuze materiaal en van de gebruikte oplossing te meten. In een poreus materiaal zijn de differentiaal vergelijkingen en de randvoorwaarden voor een oscillerende vloeistof in de limiet naar oneindig hoge frequenties namelijk gelijk aan die voor elektrische geleiding [GRI87]. De tortuositeit α_∞ is gelijk aan:

$$\alpha_\infty = \phi \frac{\sigma_f}{\sigma_{eff}}, \quad (4.5)$$

met σ_f de geleidbaarheid van de vloeistof en σ_{eff} die van de vloeistof in het poreuze materiaal.

De poreuze materialen zijn weer gelijmde glazen bolletjes met diameters van 0.46, 1.28 en 3mm maar nu gelijmd in een niet geleidende plastic houder met een lengte van 8.5cm en binnen-diameter van 7.0cm. De elektroden zijn van nikkel en tegen beide zijden van het poreuze materiaal geplaatst. De oplossing was een 0,01 molair *KCl* opl. (0.74 gr/l). De geleidbaarheid werd gemeten met een weerstandsbrug (Marconi Universal Bridge TF2700). Om elektrolyse te voorkomen is gemeten met frequentie van 1000 Hz. Het poreuze materiaal is onder lage druk gevuld met de oplossing. Daarna is het materiaal onder druk gezet om resten lucht op te lossen. Het gebruik van *CO*₂ is vermeden omdat deze de geleidbaarheid van de oplossing vergrootte. De bepaalde waarden van α_∞/ϕ zijn:

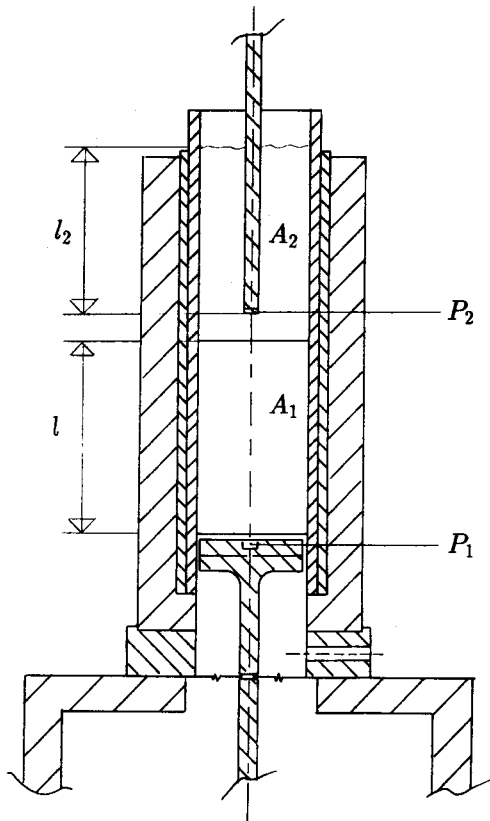
$d[mm]$	α_∞/ϕ
0.46	7.5 ± 0.8
1.28	8.1 ± 0.8
3.0	8.0 ± 0.8

We verwachten dat de waarden van α_∞/ϕ ongeveer gelijk zijn voor de verschillende poreuze materialen omdat het hier een vormeigenschap betreft, die onafhankelijk van de diameter van de bolletjes is. Binnen de onzekerheidsgrenzen wordt dat ook gevonden.

4.5 Dynamische permeabiliteit en tortuositeit

4.5.1 Theorie

De schematische weergave van de opstelling voor de bepaling van de dynamische doorlatendheid is gegeven in figuur 4.2. Aan beide zijden van het



Figuur 4.2: Schematische weergave van de opstelling

poreuze materiaal wordt de druk gemeten. De bovenste drukopnemer is mechanisch ontkoppeld van de rest van de opstelling. De onderste drukopnemer is in de zuiger geplaatst die voor een oscillerende drukgradiënt zorgt. De invloed van de beweging van de drukopnemer op het gemeten druksignaal is verwaarloosbaar, door de kleine uitwijking van de zuiger ($1..10\mu\text{m}$). Gekozen wordt voor dusdanige lage frequenties dat de afmetingen van de poreuze kolom (lengte l) veel kleiner zijn dan een $\frac{1}{4}$ golflengte. De oscillerende

stroming is dan op de lengteschaal l als incompressibel te beschouwen. Voor de tortuositeit geldt vergelijking 2.2:

$$i\omega\alpha(\omega)\rho\hat{v} = \nabla\hat{P} \quad (4.6)$$

De amplitude van de drukgradiënt over het poreuze materiaal $\nabla\hat{P}$ is gelijk aan $\frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{l}$, met \hat{P}_1 en \hat{P}_2 de amplitudes van de gemeten drukken beneden en boven het poreuze materiaal. De macroscopische snelheid \hat{v} volgt uit het druksignaal van de bovenste drukopnemer. Uit de Navier-Stokes vergelijking volgt dat de convectieve term verwaarloosbaar is t.o.v. de instationaire term als $Sr = \frac{\omega l}{\nu} \gg 1$ en wrijving mag verwaarloosd worden t.o.v. de instationaire term als $ReSr \gg 1$, omdat aan beide voorwaarden is voldaan geldt:

$$i\omega\rho\hat{v}_2 = \nabla\hat{P}_2, \quad (4.7)$$

met \hat{v}_2 de amplitude van de snelheid van de vloeistof boven de bovenste drukopnemer. Indien de stroming boven de drukopnemer uniform is dan is $\nabla\hat{P}_2$ gelijk aan \hat{P}_2/l_2 , met l_2 de hoogte van de waterkolom boven de drukopnemer. In werkelijkheid is de stroming enigszins verstoord door de drukopnemer. We introduceren een effectieve waterhoogte l_{2eff} , die een waarde $\Delta l_2 = l_{2eff} - l_2$ afwijkt van de werkelijke waterhoogte l_2 zodat:

$$i\omega\rho\hat{v}_2 = \hat{P}_2/l_{2eff}, \quad (4.8)$$

met \hat{v}_2 nu de snelheid op geruime afstand boven de drukopnemer. De bepaling van deze correctie wordt uitgewerkt in Appendix B. De amplitude van het debiet boven de bovenste drukopnemer moet gelijk zijn aan de amplitude van het debiet door het poreus materiaal ($\nabla\cdot\hat{v} = 0$), zodat:

$$A_2\hat{v}_2 = A_1\hat{v}\phi, \quad (4.9)$$

met A_1 de doorsnede van de cylinder waarin het poreuze materiaal zich bevindt en A_2 het vloeistofoppervlak ter hoogte van de drukopnemerstang. De tortuositeit voor een bepaalde frequentie volgt uit vergelijkingen 4.6, 4.8 en 4.9:

$$\alpha(\omega) = \left(\frac{\hat{P}_1}{\hat{P}_2} - 1 \right) \frac{l_{2eff}}{l} \frac{\phi A_1}{A_2} \quad (4.10)$$

In deze vergelijking is geen rekening gehouden met het feit dat de drukopnemers op een afstand Δx_1 en Δx_2 van het poreuze materiaal afstaan. Hiervoor kan gecorrigeerd worden, maar in de praktijk is gebleken dat deze correcties erg klein zijn (1 a 2 %).

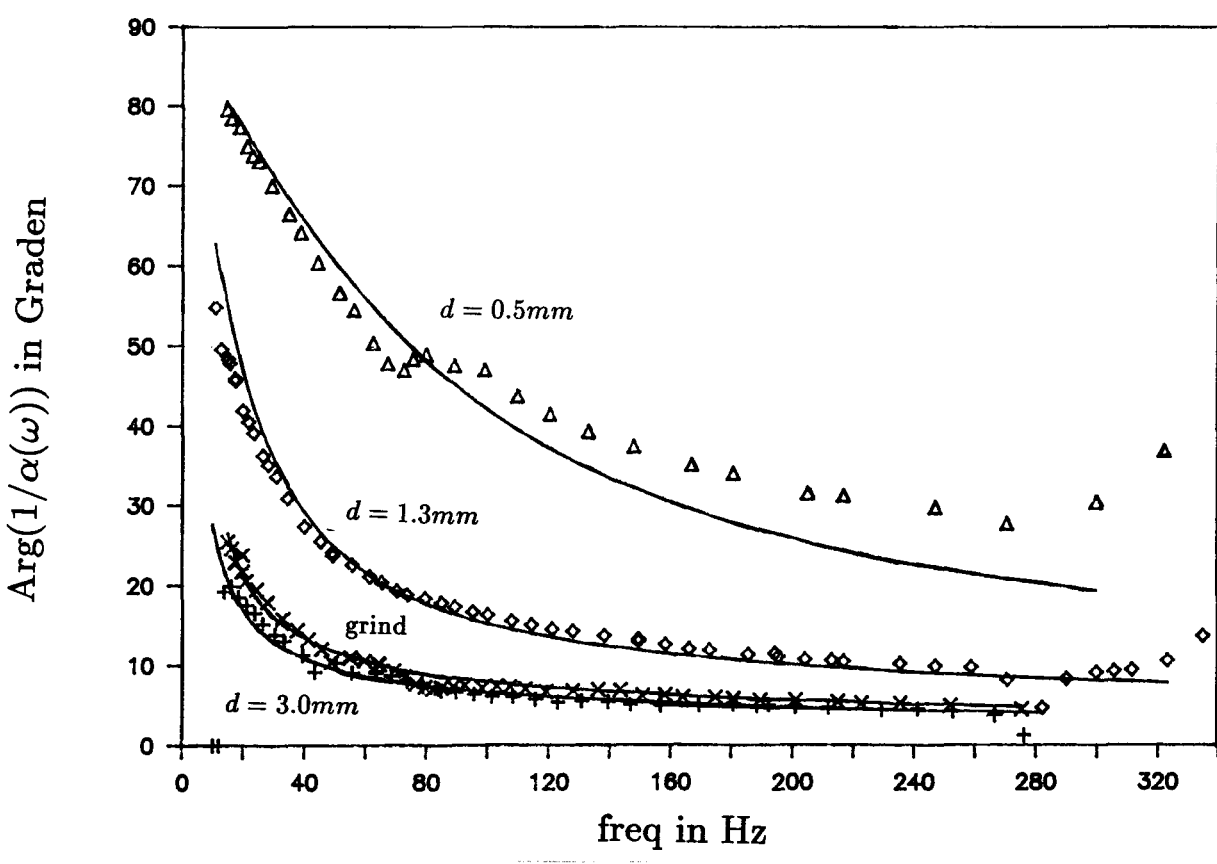
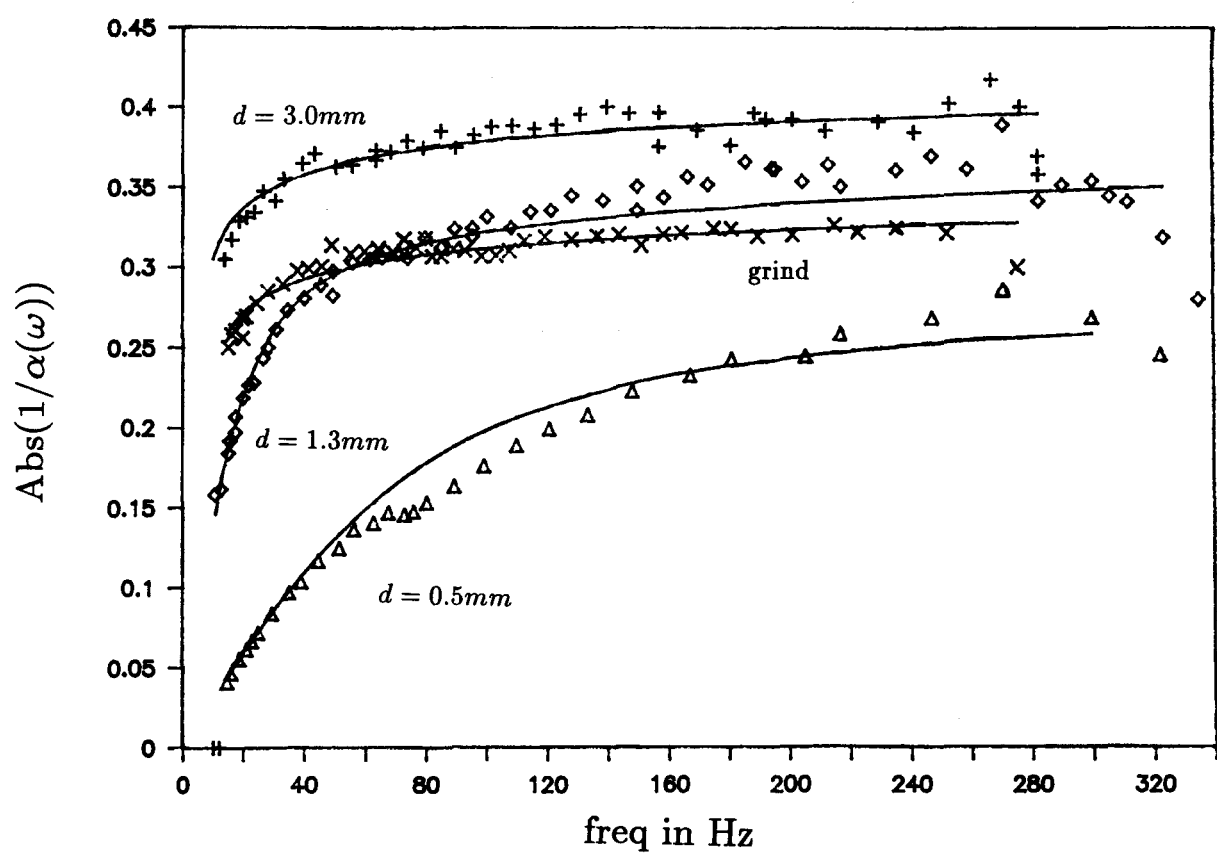
4.5.2 Experimentele opstelling

De gebruikte poreuze materialen zijn gelijmde glasbolletjes en gelijmd grind waarvan de stationaire doorlatendheid en de porositeit bekend zijn. De modale diameters van de glasbolletjes zijn 0.46, 1.2 en 3 mm, de diameter van de kiezels van het gelijmd grind varieert van 2 tot 4mm. Het poreuze materiaal is met een lijmverbinding bevestigd aan de binnenwand van een messing cylinder (lengte 25 cm, diameter 60 mm, wanddikte 5 mm), op een afstand van 3 cm boven de onderzijde van de cylinder. In de ruimte onder het poreuze materiaal kan een zuiger bewegen. De bovenzijde van de zuiger bevindt zich enkele mm onder het poreuze materiaal. In de zuiger bevindt zich de onderste drukopnemer (PCB 116A). De uitwijking van de zuiger is in de orde van 1..10 μ m. De cylinder met het poreuze materiaal bevindt zich in een andere cylinder (wanddikte 20 mm) met daartussen een afstandsbus (wanddikte 5 mm). Op ongeveer 1 cm boven het poreus materiaal bevindt zich de bovenste drukopnemer. De afdichting van de opstelling wordt verzorgd door een metalen membraan dat ondoorlatend verbonden is aan zowel de onderzijde van de buitenste cylinder als aan de zuigerstang. Tussen de zuiger en het membraan bevindt zich de opening waardoor vloeistof in de opstelling kan worden gelaten. Door deze lage positie van de inlaat worden ongewenste luchtinluitsels in het poreuze materiaal voorkomen. De vulprocedure is als volgt: Eerst wordt de opstelling vacuum gezogen. Daarna wordt CO_2 ingelaten. Dit wordt een maal herhaald. De opstelling wordt weer vacuum gezogen en onder lage druk wordt de vloeistof ingelaten. Daarna wordt de opstelling onder druk gezet (1.2 Bar), zodat de resterende CO_2 en minimaal aanwezige lucht oplossen.

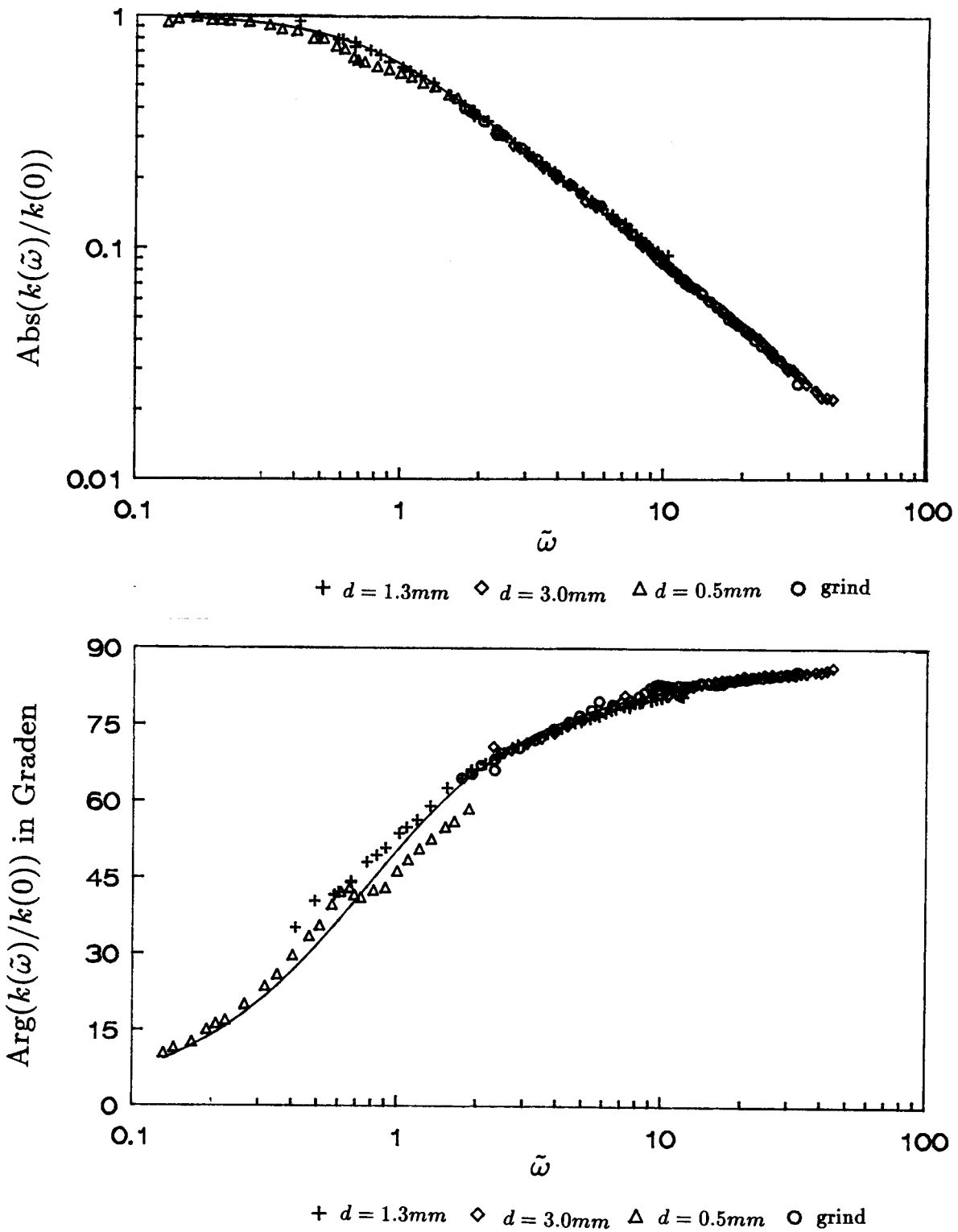
De zuiger wordt aangedreven door een excitator. Deze wordt aangestuurd door een versterker en frequentiegenerator. De opstelling is op een betonblok geplaatst om overdracht van trillingen van de omgeving te voorkomen. De signalen van de drukopnemers worden versterkt door Kistler ladingsversterkers (5001). Deze worden uitgelezen door een "Polar". Dit is een snelle AD-converter die uitgelezen wordt m.b.v. een PC. De drukopnemers zijn in de opstelling geïjkt, dit is beschreven in Appendix C.

4.5.3 Resultaten

De gemeten waarden van $1/\alpha(\omega)$ zijn uitgezet in figuur 4.3. De getrokken lijnen in deze figuur zijn de theoretische krommen voor $1/\alpha(\omega)$ (deze volgen uit vgl. 2.3 en 2.65), waarbij de waarde van de parameter M gelijk aan 1



Figuur 4.3: Gemeten waarden van $1/\alpha(\omega)$ en theoretische krommen



Figuur 4.4: meetresultaten en theoretische functie van $k(\omega)/k(0)$

is genomen. De waarden voor de parameters $k(0)$ en α_∞/ϕ zijn dusdanig aangepast dat een optimale overeenkomst werd gevonden tussen de gemeten en theoretische tortuositeit. Voorgaande metingen zijn ook op een andere manier gepresenteerd (figuur 4.4). De kwaliteit van de theorie wordt getoetst door de aangepaste waarden van $k(0)$ en α_∞/ϕ te vergelijken met de gemeten waarden daarvan. De waarden van de parameters $k(0)$ en α_∞/ϕ uit de aanpassing en de onafhankelijk bepaalde waarden van deze parameters voor de poreuze materialen bestaande uit glazen bolletjes zijn weergegeven in de volgende tabel.

$d[mm]$	$k(0)[m^2]$	$k(0)[m^2]$	α_∞/ϕ	α_∞/ϕ
	aanpassing	onafh. bep.	aanpassing	onafh. bep.
0.46	$1.45 \cdot 10^{-10}$	$(1.41 \pm 0.05)10^{-10}$	9.7	7.5 ± 0.8
1.28	$7.56 \cdot 10^{-10}$	$(7.08 \pm 0.1)10^{-10}$	8.4	8.1 ± 0.8
3.0	$3.36 \cdot 10^{-9}$	$(4.2 \pm 0.1)10^{-9}$	7.8	8.0 ± 0.8

De onafhankelijk bepaalde waarden van $k(0)$ en α_∞/ϕ voor het grind (door Volleman [VOL86]) en de aangepaste waarden zijn in de volgende tabel gegeven.

$k(0)[m^2]$	$k(0)[m^2]$	α_∞/ϕ	α_∞/ϕ
aanpassing	onafh. bep.	aanpassing	onafh. bep.
$2.0 \cdot 10^{-9}$	$(2.4 \pm 1)10^{-9}$	9.3	9.0 ± 0.9

4.5.4 Conclusies

De dynamische permeabiliteit en de dynamische tortuositeit voor verschillende materialen zijn op een gelijkvormige manier van de frequentie afhankelijk. Onze metingen zijn daarmee in overeenstemming met metingen van E. Charlaix et al. [CHA88]. Het frequentiegedrag van verschillende poreuze materialen is hetzelfde, indien goed geschaald wordt met de parameters $k(0)$, α_∞ en ϕ . De aangepaste waarden komen binnen de onzekerheids grenzen overeen met de onafhankelijk bepaalde. Alleen wijken de waarden α_∞/ϕ voor de kleinste bolletjes en de stationaire doorlatendheid van de grootste glazen bolletjes van de onafhankelijke metingen meer af van de aangepaste waarden dan de fout in de onafhankelijk bepaalde waarden toelaat. Door schaling met bolletjes met verschillende diameters kon gemeten worden over een dimensieloos frequentiebereik van drie decades, hoewel de frequenties slechts varieerden van 12 tot 300 Hz.

Hoofdstuk 5

Conclusies

Uit de microscopische Navier-Stokes vergelijking is de dynamische permeabiliteit afgeleid, waarbij een verband werd gelegd tussen het macroscopisch begrip permeabiliteit en de microscopische geometrische eigenschappen van het poreus materiaal. In de limiet naar hoge frequenties wordt het eerder door Johnson et al. afgeleide verband gevonden. De afleiding resulteert in twee alternatieve methoden om Λ , de lengteparameter bepalend voor het hoge frequentiegedrag, te berekenen.

Beide methoden zijn gebruikt om de berekeningen van Λ , die gedaan zijn m.b.v. van een numeriek eindig elementen pakket te controleren. De op de twee manieren berekende Λ 's komen binnen de onzekerheidsgrenzen overeen. Ook zijn de parameters α_∞ en k_0/ϕ voor een grote variatie in poriegeometrieën numeriek berekend. De parameter $M = \frac{8\alpha_\infty k_0}{\phi \Lambda^2}$ bleek voor alle poriegeometrieën ongeveer de waarde 1 te hebben ($0,90 \pm 0,02$.. $1,29 \pm 0,02$), in overeenstemming met de theorie van Johnson et al.

De dynamische permeabiliteit van een aantal poreuze materialen bestaande uit glasbolletjes van verschillende diameters en gelijmd grind is experimenteel bepaald. Kwalitatief goede metingen werden verkregen nadat grote zorg was besteed aan de verzadigingsprocedure van het poreus materiaal in de opstelling. Door aanpassing van de parameters $k(0)$ en α_∞/ϕ konden alle experimentele resultaten in overeenstemming gebracht worden met het door Johnson et al. voorgestelde geschaalde functionele verband. De aldus gevonden waarden van $k(0)$ en α_∞/ϕ stemden binnen de meetonnauwkeurigheid overeen met de waarden gevonden uit onafhankelijke metingen. Door gebruik te maken van bolletjes van verschillende diameters is gemeten over een dimensieloos geschaald frequentiebereik van drie decades, hoewel het frequentiebereik zelf beperkt was van 12 tot 300 Hz.

Appendix A

Asymptotisch gedrag reële gedeelte $\alpha(\omega)$ voor hoge frequenties

In paragraaf 1.2.4 is een vergelijking afgeleid voor het reële gedeelte van $\alpha(\omega)$, m.b.v. lineaire responsietheorie. Deze theorie geeft namelijk dat $\alpha(-\omega^*) = \alpha^*(\omega)$.

Het asymptotisch gedrag van $\alpha_r(\omega)$ moet echter ook af te leiden zijn m.b.v. vergelijking 2.28. Dit wordt in deze appendix gedaan.

Voor hoge frequenties nemen we net zoals voor het imaginaire gedeelte van $\alpha(\omega)$ aan dat de stroming in de kern wrijvingsloos is, en dus als een potentiaalstroming op te vatten is. De stroming aan de wand, in de grenslaag wordt beschreven door het profiel van een oscillerende stroming langs een vlakke plaat.

In de vergelijking 2.28 komt de volgende term voor;

$$\langle \bar{u}_0^* \cdot \nabla_y^2 \bar{u}_0 - \bar{u}_0 \cdot \nabla_y^2 \bar{u}_0^* \rangle \quad (\text{A.1})$$

In indexnotatie:

$$\langle u_{0j}^* \frac{\partial^2 u_{0j}}{\partial y_i^2} - u_{0j} \frac{\partial^2 u_{0j}^*}{\partial y_i^2} \rangle \quad (\text{A.2})$$

We hebben al gezien dat de kern geen bijdrage geeft vanwege $\nabla_y^2 \bar{u}_0 = 0$ (potentiaal stroming). Uitdrukking A.2 schrijven we als:

$$\left\langle \left(\frac{\partial \beta}{\partial y_i} \right)^2 \left(u_{0j}^* \frac{\partial^2 u_{0j}}{\partial \beta^2} - u_{0j} \frac{\partial^2 u_{0j}^*}{\partial \beta^2} \right) \right\rangle \quad (\text{A.3})$$

We hebben al gezien dat $\left(\frac{\partial\beta}{\partial y_i}\right)^2 = 1$ (vergelijking 2.39). Met het profiel voor de snelheid in de grenslaag $\vec{u}_o = \vec{u}_p(1 - e^{(i-1)\beta/\delta})$. volgt:

$$\frac{\partial^2 u_{0j}}{\partial \beta^2} = \frac{-2i}{\delta^2} \vec{u}_{pj} e^{(i-1)\beta/\delta} \quad (\text{A.4})$$

De middeling uit de term A.1 is een middeling over het porievolume. Bij deze middeling kan een volumeëlementje dV geschreven worden als $dS d\beta$, omdat alleen over de grenslaag geïntegreerd wordt. De term A.1 wordt dan:

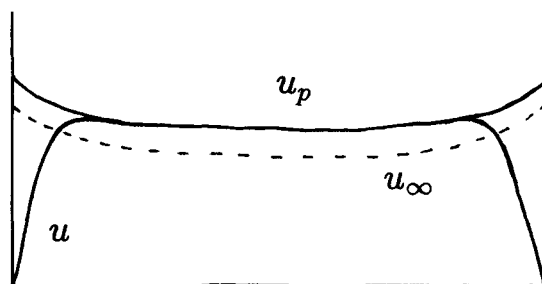
$$\frac{1}{V_p} \int_S |\vec{u}_p|^2 dS \int_0^\infty \frac{-2i}{\delta^2} \left(e^{(i-1)\beta/\delta} + e^{-(i+1)\beta/\delta} - 2e^{-2\beta/\delta} \right) d\beta \quad (\text{A.5})$$

Na integratie over β levert dit nul op zodat ook de term A.1 gelijk aan nul is. Het reële gedeelte van $\alpha(\omega)$ vgl.2.28 wordt dan:

$$\alpha_r(\omega) = \frac{\langle |\vec{u}_0|^2 \rangle}{\langle |\vec{u}_o|^2 \rangle} \quad (\text{A.6})$$

Om een soortgelijke uitdrukking voor het reële gedeelte van $\alpha(\omega)$ te krijgen als voor het imaginaire gedeelte is verkregen moeten we het snelheidsveld \vec{u}_0 uitdrukken in het snelheidsveld \vec{u}_∞ .

We bekijken daartoe het snelheidsveld in de porie op een bepaalde dwarsdoorsnede (zie figuur A.1). In deze figuur is u_∞ de snelheid van de potenti-



Figuur A.1: Schets snelheidsveld op een bepaalde doorsnede. u is de dimensieloze snelheid, u_p die van de potentiaal oplossing voor de kern, en u_∞ de snelheid voor oneindig hoge frequenties

aal oplossing voor de porie, dus als er geen grenslaag is. De stroming is dan overal niet-visceus.

Zijn er dunne grenslagen aanwezig, bij hoge frequenties dan is alleen het snelheidsveld in de kern wrijvingsloos te beschouwen. Dit snelheidsveld, aangeduid met u_p , is geëxtrapoleerd tot aan de wand. De grenslaag heeft invloed op de wrijvingsloze potentiaalstroming in de kern. Omdat de snelheid in de grenslaag kleiner is dan de niet visceuze snelheid, is het gevolg dat de snelheid in de niet-visceuze kern toeneemt. De grenslaag heeft als effect op de kernstroming dat de wand schijnbaar verplaatst wordt over een zekere afstand δ^* , de verplaatsingsdikte.

Voor de berekening van het reële gedeelte van $\alpha(\omega)$ zijn we geïnteresseerd in $|\vec{u}_0|^2$. Het snelheidsveld \vec{u}_p zal indien de grenslaag voldoende klein is t.o.v. de porieafmetingen, weinig afwijken van de potentiaalstroming zonder grenslaag. We passen daarom een Taylorbenadering toe op de absolute waarde van de snelheid in het kwadraat:

$$|\vec{u}_p|^2 = |\vec{u}_\infty|^2 + \delta^* \left[\frac{\partial}{\partial r_w} |\vec{u}_\infty|^2 \right]_{\phi_m} \quad (\text{A.7})$$

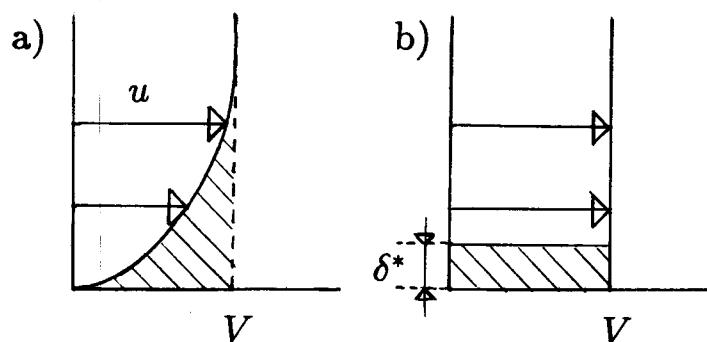
Hierbij is $\left[\frac{\partial}{\partial r_w} |\vec{u}_\infty|^2 \right]_{\phi_m}$ de verandering van $|\vec{u}_\infty|^2$ bij het verplaatsen van de wand, loodrecht op de wand naar binnen gericht. Het verplaatsen van de wand moet gebeuren bij constant blijvend debiet ϕ_m door de porie. De wand wordt schijnbaar verplaatst door het groter worden van de verplaatsingsdikte. De grootte van de verplaatsingsdikte wordt bepaald in de volgende paragraaf.

A.1 Bepaling verplaatsingsdikte

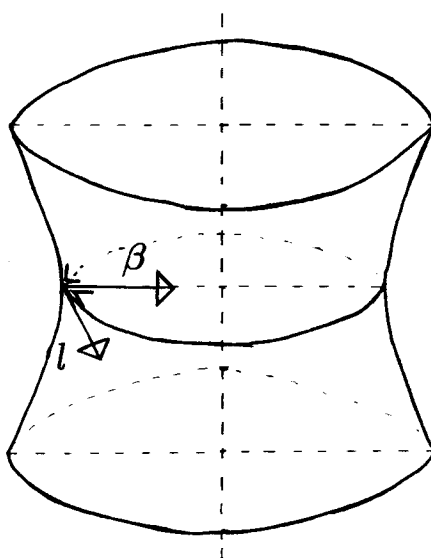
We bekijken het snelheidsprofiel in figuur A.2a, met hoofdstroomsnelheid V . De verplaatsingsdikte δ^* is zo gedefiniëerd, dat de hoeveelheid vloeistof die in de grenslaag tegengehouden wordt, gelijk is aan de afname van hoeveelheid vloeistof bij een niet visceuze stroming bij verplaatsing van de wand over een afstand δ^* (figuur A.2b). De massastroom is beide gevallen even groot. In formulevorm geldt voor de verplaatsingsdikte:

$$\delta^* V = \int_0^\infty (V - u) dy \quad (\text{A.8})$$

Om een verplaatsingsdikte in de porie te bepalen introduceren we een orthogonaal, kromlijng coördinatensysteem l, β (zie figuur A.3). Hierbij staat β loodrecht op de wand en is l een coördinaat die over de wand van de porie



Figuur A.2: Definitie verplaatsingsdikte, het gearceerde oppervlak is in beide gevallen even groot



Figuur A.3: Kromlijng coördinatenstelcel l, β

loopt loodrecht op β . Deze coördinaten beschrijven een gebogen oppervlak. Het debiet door dit oppervlak is gelijk aan:

$$\int_A (\vec{u} \cdot \vec{n}) dl d\beta, \quad (\text{A.9})$$

waarbij \vec{n} de normaalvector van het oppervlak is. De snelheid van het potentiaalprobleem geëxtrapoleerd tot aan de wand op die doorsnede schrijven we als $\vec{u}_p(l, \beta)$. De snelheid op de wand is alleen nog afhankelijk van l ($\beta = 0$). De verplaatsingsdikte wordt dan:

$$\delta^* \oint (\vec{u}_p(l, 0) \cdot \vec{n}) dl = \int_A ((\vec{u}_p - \vec{u}) \cdot \vec{n}) dl d\beta \quad (\text{A.10})$$

Het linker lid in vgl. A.10 is de vermindering van het debiet voor de potentiaalstroming door het verplaatsen van de wand. Het rechterlid is de hoeveelheid vloeistof die in de grenslaag wordt tegengehouden. De hoeveelheid vloeistof die in de grenslaag wordt tegen gehouden is gelijk aan het debiet ϕ_p door de porie voor het potentiaalveld \vec{u}_p vermindert met het debiet ϕ_m , het debiet door de porie (snelheidsveld \vec{u}).

We berekenen eerst het debiet ϕ_m door de porie. Het debiet door de grenslaag en omgeving is:

$$\oint (\vec{u}_p(l, 0) \cdot \vec{n}) dl \int_0^\beta (1 - e^{(i-1)\beta'/\delta}) d\beta' \quad (\text{A.11})$$

Dit is gelijk aan:

$$\oint (\vec{u}_p(l, 0) \cdot \vec{n}) dl \left(\beta + \frac{\delta}{2}(i+1)e^{(i-1)\beta/\delta} - \frac{\delta}{2}(i+1) \right) \quad (\text{A.12})$$

Uitdrukking A.12 nadert voor toenemende β naar:

$$\oint (\vec{u}_p(l, 0) \cdot \vec{n}) dl \left(\beta - \frac{\delta}{2}(i+1) \right) \quad (\text{A.13})$$

Het totale debiet door de porie is dan gelijk aan:

$$\int_A (\vec{u}_p(l, \beta) \cdot \vec{n}) dl d\beta - \frac{\delta}{2}(i+1) \oint (\vec{u}_p(l, 0) \cdot \vec{n}) dl \quad (\text{A.14})$$

De eerste term is gelijk aan ϕ_p . Stel Q gelijk aan $\frac{\delta}{2} \oint (\vec{u}_p(l, 0) \cdot \vec{n}) dl$. Voor het debiet ϕ_m vgl. A.14 geldt dan:

$$\phi_m = \phi_p - (i + 1)Q \quad (\text{A.15})$$

We zijn geïnteresseerd in de grootte van het debiet:

$$|\phi_m| = \sqrt{(\phi_p - Q)^2 + Q^2} = \phi_p \sqrt{1 - \frac{2Q}{\phi_p} + \frac{2Q^2}{\phi_p^2}} \quad (\text{A.16})$$

Voor $Q \ll \phi_p$ wordt dit benaderd door:

$$|\phi_m| = \phi_p \left(1 - \frac{Q}{\phi_p}\right) = \phi_p - Q \quad (\text{A.17})$$

Het rechterlid van vgl.A.10, is gelijk aan $\phi_p - \phi_m$. Dit wordt dan:

$$Q = \frac{\delta}{2} \oint (\vec{u}_p(l, 0) \cdot \vec{n}) dl \quad (\text{A.18})$$

Voor de verplaatsingsdikte vgl.A.10 geldt dan:

$$\delta^* = \frac{\delta}{2} \quad (\text{A.19})$$

A.2 Asymptotisch gedrag $\alpha(\omega)$

Nu we weten wat de verplaatsingsdikte is wordt vgl. A.7:

$$|\vec{u}_p|^2 = |\vec{u}_\infty|^2 + \frac{\delta}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r_w} |\vec{u}_\infty|^2 \right]_{\phi_m} \quad (\text{A.20})$$

Voor vgl. A.6 willen we de term $\int_{V_p} |\vec{u}_0|^2 dV$ weten. We schrijven:

$$\int_{V_p} |\vec{u}_0|^2 dV = \int_{V_p} |\vec{u}_p|^2 dV + \int_{V_p} (|\vec{u}_0|^2 - |\vec{u}_p|^2) dV \quad (\text{A.21})$$

De laatste term in vergelijking A.21 is gelijk aan:

$$\int_S \int_0^\infty (|\vec{u}_0|^2 - |\vec{u}_p|^2) dS d\beta \quad (\text{A.22})$$

Nu is dus geïntegreerd over de grenslaag, want $\vec{u}_0 = \vec{u}_p$ in de kern. De integraal in A.22 wordt met het profiel in de grenslaag:

$$\int_S |\vec{u}_p|^2 \int_0^\infty \left(-e^{(i-1)\beta/\delta} - e^{-(i+1)\beta/\delta} + e^{-2\beta/\delta} \right) dS d\beta = -\frac{\delta}{2} \int_S |\vec{u}_p|^2 dS \quad (\text{A.23})$$

Combinatie van vgl.A.21 en A.23 levert:

$$\int_{V_p} |\vec{u}_0|^2 dV = \int_{V_p} |\vec{u}_p|^2 dV - \frac{\delta}{2} \int_S |\vec{u}_p|^2 dS \quad (\text{A.24})$$

Substitutie van vgl.A.20 in vgl.A.24 levert:

$$\int_{V_p} |\vec{u}_0|^2 dV = \int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV + \frac{\delta}{2} \int_{V_p} \left[\frac{\partial}{\partial r_w} |\vec{u}_\infty|^2 \right]_{\phi_m} dV - \frac{\delta}{2} \int_S |\vec{u}_p|^2 dS \quad (\text{A.25})$$

De middelste term in het rechterlid van vgl. A.25 is gelijk aan:

$$\frac{\delta}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r_w} \int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV \right]_{\phi_m} + \frac{\delta}{2} \int_S |\vec{u}_\infty|^2 dS \quad (\text{A.26})$$

Dit omdat bij het verplaatsen van de wand over een afstand Δr_w ook het volume van de porie met S maal Δr_w kleiner wordt. De integraal $\int_S |\vec{u}_p|^2 dS$ uit vergelijking A.25 is in eerste benadering gelijk aan $\int_S |\vec{u}_\infty|^2 dS$. Vgl. A.25 wordt dan:

$$\int_{V_p} |\vec{u}_0|^2 dV = \int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV + \frac{\delta}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r_w} \int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV \right]_{\phi_m} \quad (\text{A.27})$$

Het reële gedeelte van $\alpha(\omega)$ vgl.A.6 wordt dan:

$$\alpha_r(\omega) = \frac{\int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV}{\left| \int_{V_p} \vec{u}_0 dV \right|^2} + \frac{\delta}{2} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial r_w} \int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV \right]_{\phi_m}}{\left| \int_{V_p} \vec{u}_0 dV \right|^2} \quad (\text{A.28})$$

De noemer $|\int_{V_p} \vec{u}_0 dV|^2$ is gelijk aan $V_p |\vec{v}|^2$. Het debiet door de porie is hetzelfde verondersteld als het debiet voor $\omega \rightarrow \infty$, zodat $\vec{v} = \vec{v}_\infty$. Met vgl.2.29 volgt uit vgl.A.28:

$$\alpha_r(\omega) = \alpha_\infty \left(1 + \frac{\delta}{2} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial r_w} \int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV \right]_{\phi_m}}{\int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV} \right) \quad (\text{A.29})$$

De teller in de laatste term betekent: de verandering van $\int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV$, bij het verplaatsen van de wand. Bij een debiet dat gelijk moet blijven aan het debiet bij oneindig hoge frequenties. Als we α_r schrijven als:

$$\alpha_r(\omega) = \alpha_\infty \left(1 + \frac{\delta(\omega)}{\Lambda_2} \right), \quad (\text{A.30})$$

volgt voor Λ_2 :

$$\frac{2}{\Lambda_2} = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial r_w} \int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV \right]_{\phi_m}}{\int_{V_p} |u_\infty|^2 dV} \quad (\text{A.31})$$

We zullen nu bewijzen dat vergelijking A.31 gelijk is aan:

$$\frac{2}{\Lambda_2} = \frac{- \left[\frac{\partial}{\partial r_w} \int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV \right]_\psi}{\int_{V_p} |u_\infty|^2 dV} \quad (\text{A.32})$$

Bewijs: Voor ψ bestaat de volgende identiteit:

$$\nabla \cdot (\psi \cdot \nabla \psi) = \psi \nabla^2 \psi + (\nabla \psi \cdot \nabla \psi) \quad (\text{A.33})$$

Er geldt $\nabla^2 \psi = 0$ en $\nabla \psi = \vec{u}_\infty$ zodat:

$$\nabla \cdot (\psi \cdot \nabla \psi) = |\vec{u}_\infty|^2 \quad (\text{A.34})$$

Na integreren over het porievolume, en het toepassen van de stelling van Gauß volgt:

$$\int_A \psi (\vec{u}_\infty \cdot \vec{n}) dA = \int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV \quad (\text{A.35})$$

Met A het omsloten oppervlak van de integratie. Voor het oppervlak $z = 0$ geldt $\psi = 0$. Op de wanden van de porie geldt $(\vec{u}_\infty \cdot \vec{n}) = 0$, zodat de integratie alleen over het vlak $z = 1$ plaats vindt (potentiaal ψ). Het linkerlid in vgl.A.35 is dus gelijk aan ψ maal het debiet ϕ_m door de porie. De teller in vergelijking A.31 is dus gelijk aan:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r_w} (\psi \phi_m) \right]_{\phi_m} = \phi_m \left[\frac{\partial \psi}{\partial r_w} \right]_{\phi_m} \quad (\text{A.36})$$

Het debiet ϕ_m is alleen afhankelijk van het r_w en ψ , zodat $\phi_m = \phi_m(r_w, \psi)$. Voor $d\phi_m = 0$ geldt:

$$\left[\frac{\partial \phi_m}{\partial r_w} \right]_{\psi} dr_w + \left[\frac{\partial \phi_m}{\partial \psi} \right]_{r_w} d\psi = 0, \quad (\text{A.37})$$

zodat:

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial r_w} \right]_{\phi_m} = \frac{- \left[\frac{\partial \phi_m}{\partial r_w} \right]_{\psi}}{\left[\frac{\partial \phi_m}{\partial \psi} \right]_{r_w}} \quad (\text{A.38})$$

Het debiet ϕ_m is lineair met ψ zodat $\left[\frac{\partial \phi_m}{\partial \psi} \right]_{r_w} = \frac{\phi_m}{\psi}$. Vergelijking A.36 wordt dan met vergelijking A.38:

$$- \psi \left[\frac{\partial \phi_m}{\partial r_w} \right]_{\psi} = - \left[\frac{\partial}{\partial r_w} (\psi \phi_m) \right]_{\psi} = - \left[\frac{\partial}{\partial r_w} \int_{V_p} |\vec{u}_\infty|^2 dV \right]_{\psi}, \quad (\text{A.39})$$

zodat vergelijking A.32 bewezen is. De laatste vergelijking A.32 is gebruikt om Λ_2 numeriek te bepalen.

Appendix B

Bepaling Δl_2

Voor de bepaling van de dynamische tortuositeit wordt de amplitude van het debiet door het poreuze materiaal bepaald uit de amplitude van de druk van de bovenste drukopnemer (zie hoofdstuk 3). De schematische weergave van de plaatsing van de bovenste drukopnemer is gegeven in figuur B.1. De drukopnemer is onderin de drukopnemerstang geplaatst. We hebben een effectieve waterhoogte boven de bovenste drukopnemer gedefiniëerd (vergelijking 4.8):

$$i\omega\rho\hat{v}_2 = \frac{\hat{P}_2}{l_{2eff}}, \quad (\text{B.1})$$

met \hat{v}_2 de snelheid van de vloeistof op ruime afstand boven de drukopnemer. De correctie op de hoogte van de waterkolom is gelijk aan $\Delta l_2 = l_{2eff} - l_2$, met l_2 de werkelijke hoogte van de waterkolom.

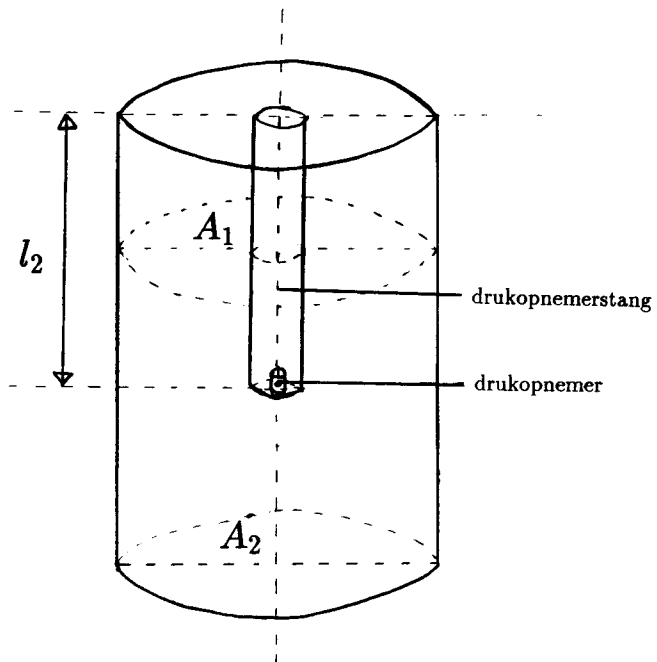
Vlak boven het poreuze materiaal is de snelheid uniform en de amplitude van de snelheid is gelijk aan \hat{v}_1 . Het debiet boven de drukopnemer is gelijk aan het debiet onder de drukopnemer zodat:

$$\hat{v}_1 A_1 = \hat{v}_2 A_2, \quad (\text{B.2})$$

met A_1 de doorsnede van de cylinder en A_2 het vloeistofoppervlak ter hoogte van de drukopnemerstang. De snelheden \hat{v}_1 en \hat{v}_2 verhouden dus als:

$$\frac{\hat{v}_1}{\hat{v}_2} = \frac{A_2}{A_1} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2, \quad (\text{B.3})$$

met R_1 de straal van de cylinder en R_2 de straal van de drukopnemerstang. Indien de frequentie hoog genoeg is ($Sr Re \gg 1$) is de wrijving beperkt



Figuur B.1: Schematische weergave van de drukopnemerstang in de cilinder

tot een dunne grenslaag en is de stroming als een potentiaalstroming te beschrijven. Voor de amplitude van de snelheid \vec{u} geldt dan:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \nabla \psi \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned} \tag{B.4}$$

met randvoorwaarden voor $z = 0$, vlak boven het poreus materiaal, en $z = 1$, het vloeistofoppervlak. Deze randvoorwaarden zijn:

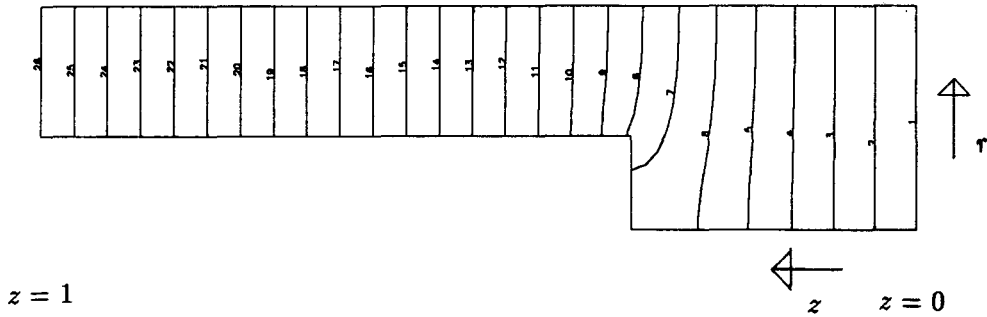
$$\psi(z = 0) = 0 \quad \psi(z = 1) = 1$$

Voor de drukamplitude \hat{P} geldt: $\hat{P} = i\omega\rho\psi$ (zie vergelijking 3.5). De druk \hat{P}_2 volgt uit de gemiddelde potentiaal ψ_2 ter plekke van de drukopnemer. Met de definitie voor de effectieve waterhoogte boven de drukopnemer (vgl. B.1) volgt:

$$l_{eff} = \frac{\psi_2}{\hat{v}_2} \tag{B.5}$$

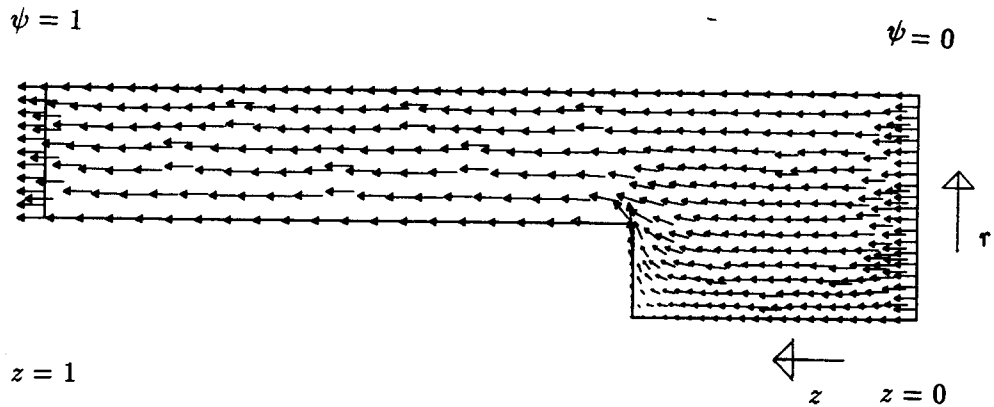
Het potentiaal probleem is opgelost m.b.v. Sepran. Het berekende potentiaalveld en de snelheidsverdeling zijn weergegeven in figuur B.2 en figuur B.3.

We zien in figuur B.2 dat de lijnen van constante druk voor kleine en grote $\psi = 1$ $\psi = 0$



Figuur B.2: Lijnen van constante druk

z -waarden evenwijdig aan elkaar lopen en de afstand tussen de lijnen constant is. De snelheid is hier zoals verwacht constant. De berekeningen zijn gedaan voor twee drukopnemerstangen met diameters van 15mm en 25mm. De cylinder heeft een diameter van 60mm. De correctie-waarde Δl_2 is ook gemeten [TRI89],[BEC91]. De berekende waarden en de gemeten waarden van Δl_2 staan in de volgende tabel.



Figuur B.3: Berekend snelheidsveld

d [mm]	Δl_2 [mm] ber	Δl_2 [mm] gem
15	3.9	1.9 ± 0.2
25	7.0	7.0 ± 1.2

De berekende waarde van Δl_2 voor de dikke drukopnemerstang komt goed overeen met de gemeten. De waarde van Δl_2 voor de kleine drukopnemerstang wijkt enigszins af. De berekeningen laten zien dat de fout in de aanname dat de stroming rond de drukopnemer uniform zou zijn klein is. Bij de metingen is de smalle drukopnemerslang gebruikt, dus de correctie is dus slechts enkele mm op 116mm, de hoogte van de waterkolom boven de drukopnemer.

Appendix C

Ijking drukopnemers

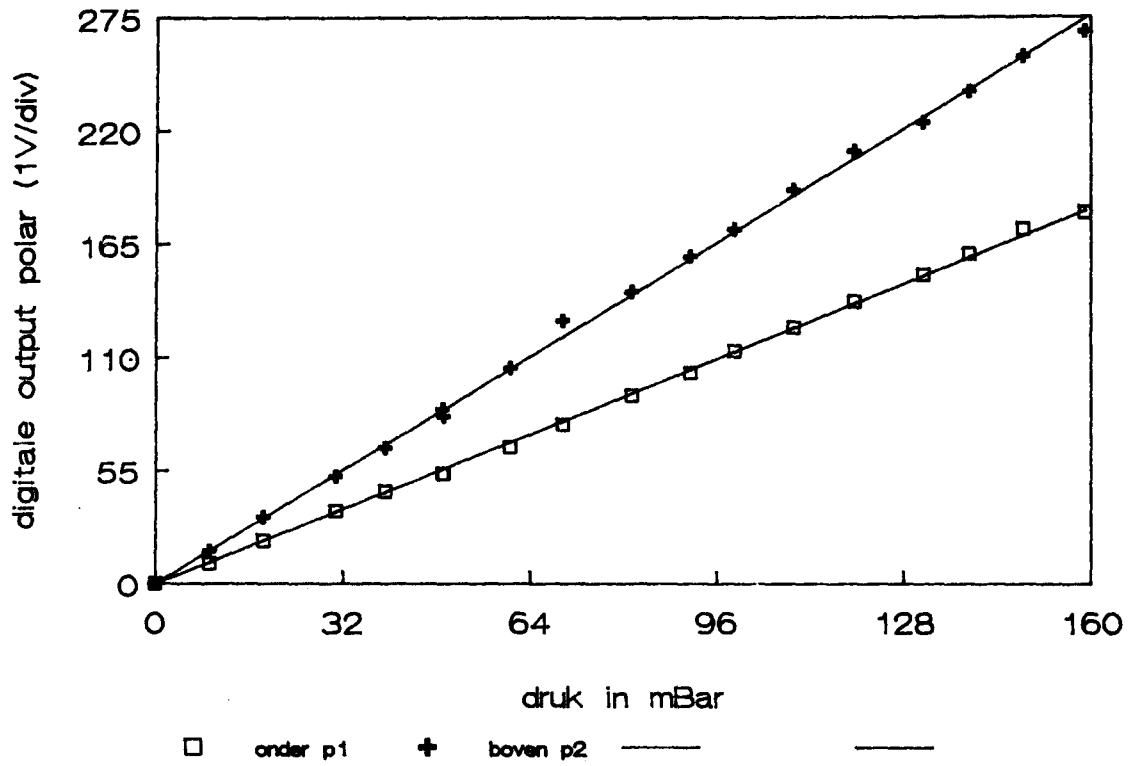
De drukopnemers en Kistler ladingsversterkers zijn geijkt. Daarvoor is op het vat een deksel geplaatst met daarin de bovenste drukopnemer. De onderste drukopnemer is in de zuiger geplaatst, in dezelfde positie die ook tijdens de metingen van de dynamische doorlatendheid gebruikt wordt. De instelling van de Kistler ladingsversterkers die in de 'long'-mode stonden zijn daarna niet meer veranderd. De ijking is gedaan door op het vat, volledig gevuld met water, druk te zetten en plotseling de druk af te laten. De begindruk is afgelezen met een watermanometer. De signalen uit de ladingsversterkers zijn ingevoerd in de polar en m.b.v. een PC uitgelezen. De resultaten zijn omgerekend naar de waarde die de polar zou geven als die in de stand van 1V/div zou staan. De digitale output van de 8-bits polar in figuur C.1 kan dan dus groter zijn dan 256, wat in de stand van 1V/div overeenkomt met 10V. Het resultaat is:

$$P_1 = 0.8787 \pm 0.003 \text{ mbar/eenheid uitlezing polar (in de stand 1V/div)}$$

$$P_2 = 0.5799 \pm 0.003 \text{ mbar/eenheid uitlezing polar (in de stand 1V/div)}$$

De gemeten waarden van de druk en uitlezing van de polar staan in figuur C.1 Voor de bepaling van de dynamische tortuositeit is $\frac{\hat{P}_1}{\hat{P}_2}$ van belang (zie vgl. 4.6). Hiervoor geldt dus:

$$\frac{\hat{P}_1}{\hat{P}_2} = (1.52 \pm 0.02) \frac{\hat{P}_1}{\hat{P}_2 \text{ gemeten}}$$



Figuur C.1: Ijking drukopnemers

Referenties

- [LAN60] Electrodynamics of continuous media
L.D. Landau and E.M. Lifshitz (1960)
- [BUR81] Poroelasticity equations derived from microstructure
R. Burridge, J.B. Keller
J. Acoust. Soc. Am. 70(4), pp 1140 (1981)
- [JOH86] New Pore-Size Parameter Characterizing Transport in Porous Media
D.L. Johnson, J. Koplik and L.M. Schwartz
Phys. Rev. Lett. vol 57, pp 2564 (1986)
- [VOL86] Frekwentie Afhankelijkheid van de Complexe Darcycoëfficiënt
R.W.R.M. Volleman
afstudeerverslag R-795-A, vakgroep Transportfysica, T.U.E. (1986)
- [JOH87] Theorie of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media
D.L. Johnson, J. Koplik and R. Dashen
J. Fluid Mech. vol.176, pp 379 (1987)
- [GRI87] An Experimental Study of Shock Induced Wave Propagation in Dry, Water-Saturated and Partial Saturated Porous Media
J.G.M. van der Grinten
proefschrift T.U.E. (1987)
- [SHE88] Dynamic Permeability in Porous Media
P. Sheng, M-Y.Zhou
Phys. Rev. Lett. 61, pp 1591 (1988)

- [CHA88] Experimental Study of Dynamic Permeability in Porous Media
E. Charlaix, A.P. Kushnick and J.P. Stokes
Phys. Rev. Lett. 61, pp 1595 (1988)
- [LAR89] A Periodic Grain Consolidation Model of Porous Media
R.E. Larson, J.J.L. Highdon
Phys. Fluids A 1(1) (1989)
- [RUB89] Flow in Random Porous Media: Mathematical Formulation, Variational Principles and Rigorous Bounds
J. Rubenstein, S. Torquato
J. Fluid Mech vol 206, pp 25 (1989)
- [JOH89] Scaling Function for Dynamic Permeability in Porous Media
D.L. Johnson
Phys. Rev. Lett. vol 63, pp 580 (1989)
+Reply
P. Sheng, M-Y. Zhou, E. Charlaix, A.P. Kushnick, J.P. Stokes
Phys. Rev. Lett. vol 63, pp 581 (1989)
- [TRI89] Bepaling v.d. Complexe Darcycoëfficiënt
R.R. Trieling
stageverslag R-1014-S, vakgroep Transportfysica, T.U.E. (1989)
- [BEC91] Complexe Darcycoëfficiënt
M. Beckers
stageverslag R-1111-S, vakgroep Transportfysica, T.U.E. (1991)