

MASTER

Numeriek onderzoek naar de dynamica van hairpinwervels

van den Bosch, E.

Award date:
1997

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Technische Natuurkunde
Vakgroep Transportfysica

Numeriek onderzoek naar de dynamica van hairpinwervels

E. van den Bosch
R-1439-A
Augustus 1997

Werkeenheid:
Vakgroep:

Werveldynamica en Turbulentie
Transportfysica

Afstudeerhoogleraar:
Begeleider:
Met dank aan:

Prof. dr. ir. G.J.F. van Heijst
Ir. J.H Voskamp
Dr. ir. H.A. Zondag

Samenvatting

Het doel van dit afstudeeronderzoek is het proberen een bijdrage te leveren aan een beter begrip van het gedrag van hairpinwervels. De hairpinwervel is één van de coherente structuren van de stromingsleer die een belangrijke rol speelt in de turbulente grenslaag van stromingen langs een wand, maar is een dermate gecompliceerde structuur dat men tot voor enkele jaren geleden was aangewezen op grove theoretische benaderingen en fysische experimenten. Nu de capaciteit van de computer steeds meer toeneemt, is het ook mogelijk numeriek onderzoek te verrichten, dit afstudeeronderzoek is daar een deel van. Formeel moet de hairpinwervel beschreven worden met een instationaire driedimensionale code, maar dit is met behulp van de processoren beschikbaar in de onderzoeksgroep Werveldynamica en Turbulentie nog niet mogelijk. Om toch een start te maken met het numeriek onderzoek naar hairpinwervels is een instationaire 2D code en een stationaire 3D code geschreven, waarmee in dit afstudeeronderzoek verder is gegaan. We kunnen natuurlijk niet verwachten dat we de hairpinwervel geheel kunnen beschrijven met de 2 genoemde programma's, maar het afstudeeronderzoek is er dan ook op gericht een aantal deelmechanismen te simuleren die belangrijk kunnen zijn voor de ontwikkeling van hairpinwervels. Enkele van deze onderzochte mechanismen zijn bijvoorbeeld de Kelvin-Helmholtz instabiliteit, het ontstaan en gedrag van wandvorticeiteit, wederzijdse interactie van wervels en/of vorticeiteit en wervelstrekking, -tilting en -twisting. Daartoe is gebruik gemaakt van contourfiguren van vorticeiteit, snelheid en stroomfunctie alsmede van figuren van snelheidsprofielen.

Er is gebleken dat de vereenvoudiging van de instationaire 3D code inderdaad ervoor zorgt dat niet alle verschijnselen (nauwkeurig) gesimuleerd kunnen worden. Met name het effect van werveltilting en -twisting gaf geen goede resultaten. Tevens blijkt het programma beperkingen te hebben wat betreft het Reynoldsgetal: wanneer deze boven de 1500 komt, is de invloed van zogenaamde numerieke diffusie niet meer verwaarloosbaar.

Er is echter ook gebleken dat met behulp van de twee programma's uitstekend de interactie tussen wervels, het gedrag van wervels in de buurt van een wand en wervelstrekking gesimuleerd kan worden. Daarnaast gaven ook de simulaties waarin de Kelvin-Helmholtz instabiliteit gesimuleerd werd goede resultaten.

Technologische relevantie

Turbulentie is een nog zeer slecht begrepen gebied van de fysica. Toch zijn er zeer veel technologische processen waar turbulentie een grote rol speelt. Enkele voorbeelden hiervan zijn de stromingsweerstand van schepen en vliegtuigen, debietmetingen van allerlei stromingen in pijpleidingen en verbranding en menging in industriële branders. Vele andere voorbeelden zijn ook te geven. De stromingsweerstand, de nauwkeurigheid van een debietmeting of de vorm van menging zijn mede sterk bepaald door de aard van de turbulentie. Omdat turbulentie nog slecht begrepen is zijn al dit soort processen ook moeilijk op puur theoretische gronden te voorspellen en is het ontwikkelen van de diverse technologische ontwerpen moeilijk.

Dit onderzoek beperkt zich tot wand-turbulentie en doet een poging iets meer te begrijpen van de stromingsprocessen die zich daar afspelen. Turbulentie wordt in het algemeen gedacht toch te betaan uit een aantal basis stromingsstructuren (coherente structuren), een dominante structuur is de haarspeldwervel (hairpin vortex). In dit verslag wordt deze wervel nader bestudeerd, althans onderdelen hiervan. Een basis stelsel vergelijkingen wordt afgeleid en een manier is ontwikkeld om deze vergelijkingen numeriek op te lossen. Voor een aantal situaties is bestudeerd hoe de wervels, in samenwerking met de wand, op elkaar inwerken en de stroming beïnvloeden. Hiermee is geprobeerd weer een heel, heel klein stapje verder te zetten in zowel de methodieken om turbulentie te bestuderen alsmede in het fysisch inzicht van het gedrag van turbulentie.

Inhoudsopgave

Samenvatting	1
Technologische relevantie.	3
1 Inleiding	7
2 De basisvergelijkingen	11
2.1 Het volledige 3D tijdsafhankelijke stelsel	12
2.2 Het 2D tijdsafhankelijke stelsel	14
2.3 Het quasi-3D tijdsonafhankelijke stelsel	15
2.4 De basisvergelijkingen in het programma	18
2.5 Randvoorwaarden	22
2.5.1 Gewone randvoorwaarden	22
2.5.2 Periodieke randvoorwaarden	23
3 Het programma	25
3.1 Het Q3D programma	25
3.2 Het 2D programma	27
3.3 Waarden voor enkele programma-parameters	27
3.4 Schaling van grootheden	28
3.5 Tests van het programma	28
4 2D numerieke simulaties	31
4.1 De schuiflaag	32
4.1.1 De schuiflaag zonder verstoring	32
4.1.2 De schuiflaag met een verstoring in één punt	34
4.1.3 De schuiflaag met random verstoringen op een lijn	34
4.2 Wervelgeneratie en -regeneratie	38
4.2.1 Het Blasius-snelheidsprofiel	38
4.2.2 Het buigpunt-snelheidsprofiel	41
5 Quasi-3D numerieke simulaties	45
5.1 De ontwikkeling van vorticititeit	46
5.1.1 De algemene stromingssituatie	46

5.1.2	De invloed van diverse parameters	49
5.2	De verplaatsing van wervels	60
5.2.1	Eén wervel	60
5.2.2	Twee wervels	61
5.3	De ontwikkeling van snelheidsprofielen	62
5.4	De groei van vortciteit en wervels	66
5.4.1	De termen uit de Q3D-vortciteitsvergelijking	68
5.4.2	Wervelstrekking	71
5.5	Simulaties met benen en staande wervels	83
6	Conclusies en aanbevelingen	91
6.1	Conclusies	91
6.2	Aanbevelingen voor verder onderzoek	93
	Bibliografie	95
A	De stelsels basisvergelijkingen	99
A.1	De basisvergelijkingen in continue vorm	99
A.2	De basisvergelijkingen in discrete vorm	99
B	Viskeuze en numerieke diffusie	103
B.1	De invloed van viskeuze diffusie	104
B.2	De invloed van numerieke diffusie	104
B.3	Conclusies	106

Hoofdstuk 1

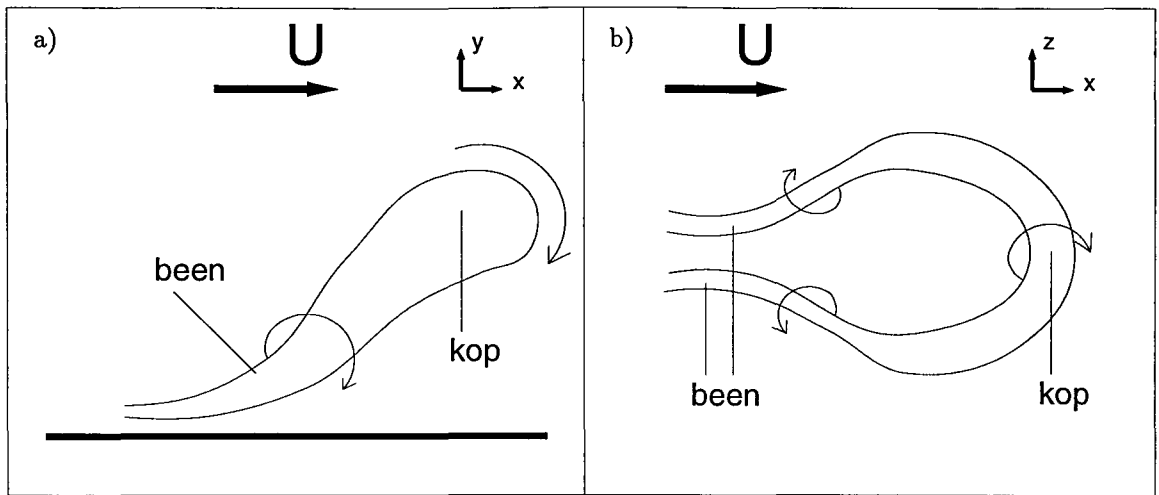
Inleiding

Voor U ligt het verslag van een afstudeeronderzoek uitgevoerd in de onderzoeksgroep Werveldynamica en Turbulentie. Het verrichte onderzoek hangt nauw samen met zowel de onderwerpen werveldynamica als turbulentie, het verbindende begrip is de *vorticititeit*. In dit verslag zal namelijk aan de ene kant veel gesproken worden over de vorticititeit van *wervels*, aan de andere kant is bekend dat een stroming met fluctuerende vorticititeit als *turbulent* beschouwd wordt. Het begrip vorticititeit loopt dus als een rode draad door dit verslag.

Het onderzoek is gedaan naar aanleiding van het in de turbulente stromingsleer zeer frequent voorkomen van een bepaalde soort coherente structuur, de *hairpin vortex*, of haarspeldwervel¹. Een schematische weergave van een hairpinwervel is te zien in figuur 1.1. In deze figuur is te zien dat de hairpinwervel in wezen een U-vormige wervelbuis is, bestaande uit een kop en twee benen. De benen zijn parallel aan elkaar en aan de hoofdstroomrichting U gericht en worden verbonden door de kop, welke geïoriënteerd is loodrecht op de hoofdstroomrichting.

Hairpinwervels, zo wordt aangenomen, ontstaan in eerste instantie door turbulentie in een stroming langs een wand, oftewel een grenslaag. Deze wandstroming zorgt voor gebieden waar, op een chaotische manier, de snelheid van de vloeistof in de stroomrichting relatief laag danwel hoog is. De vloeistof van lage snelheid (de *low-speed-streaks*) gecombineerd met de hogesnelheidsvloeistof van de wandstroming op een zekere afstand van de wand, zorgen voor een instabiele situatie, de zogenaamde *schuiflaag*. Elke kleine verstoring kan ervoor zorgen dat deze schuiflaag oprolt. Op dat moment is het mogelijk dat er een hairpinwervel ontstaat. De kop van de hairpinwervel induceert een snelheidsveld, waardoor de op dat moment nog kleine benen omhoog worden bewogen. De benen komen dus in een gebied terecht met steeds hogere snelheid en groeien daardoor in sterkte ten gevolge van de wervelstrekking die dan optreedt. Deze interactie tussen kop en benen noemt men *zelfinductie*. De kop zelf neemt ook toe in sterkte, door zogenaamde *ejections*: de benen induceren een snelheidsveld, waardoor vloeistof tussen de benen (van lage snelheid) omhoog

¹In dit verslag zal echter meestal gesproken worden over de *hairpinwervel*.



Figuur 1.1: Schematische weergave van een hairpinwervel: (a) zijaanzicht en (b) bovenaanzicht.

wordt bewogen. Zoals al opgemerkt, is de snelheid van de stroming verder van de wand relatief hoog, er ontstaat op het grensvlak van de lage en hoge snelheidsvloeistof opnieuw een schuiflaag die de vortciteit van de kop voedt.

De hairpinwervel als geheel blijft omhoog bewegen en groeit door wervelstrekking verder in sterkte. Op een gegeven moment wordt de hairpinwervel op zijn beurt instabiel en valt dan uiteen in kleinere wervelstructuren. Dit noemt men een *burst*. Na deze burst wordt er nieuwe vloeistof naar de wand bewogen, die een relatief hoge snelheid heeft. Door deze zogenaamde *sweep* kan het hele proces opnieuw beginnen en kan een nieuwe hairpinwervel ontstaan.

Bij het ontstaan van een hairpinwervel spelen dus een aantal effecten een belangrijke, maar soms ook complexe rol. Aangezien het gedrag van hairpinwervels erg ingewikkeld is, is het zaak eerst deze effecten goed te begrijpen. Dit kan daarna leiden tot een beter begrip van hairpinwervels en turbulentie in het algemeen. Het onderzoek naar deze mechanismen in turbulentie beperkte zich tot enkele jaren geleden nog slechts tot theoretisch en experimenteel onderzoek. Hierbij werd veelvuldig gebruik gemaakt van wiskundige en statistische benaderingen, maar men is er niet in geslaagd een analytische oplossing van de Navier-Stokes vergelijkingen voor turbulentie te vinden. Met de komst van zeer snelle en krachtige processoren is de aandacht voor turbulentie-onderzoek de laatste jaren mede gevestigd op het uitvoeren van *numerieke* experimenten, dit verslag is daar een onderdeel van. In principe moet het namelijk mogelijk zijn een numerieke oplossing van de Navier-Stokes (NS) vergelijkingen uit te rekenen. De berekeningen worden dan uitgevoerd in een driedimensionaal rooster waarin de NS vergelijkingen gediscrètiseerd worden met bijvoorbeeld eindige differenties. Wanneer we het verkregen stelsel algebraïsche vergelijkingen oplossen, vinden we de waarden voor de snelheidsvector als functie van tijd en plaats (i.e. het driedimensionale rooster). Deze methode van simuleren (zonder beperkende veronderstellingen) wordt ook wel *Directe Numerieke Simulatie* (DNS) genoemd.

Het grote voordeel van deze numerieke simulaties is dat we een volledig driedimensionaal (3D) beeld krijgen van de stroming. Bovendien kunnen we gemakkelijker grootheden te weten komen die we in het laboratorium niet of nauwelijks kunnen meten, zoals druk en vortichiteit. Daarnaast is het met numerieke simulaties in principe mogelijk elke gewenste experimentele opstelling te bouwen, waar dat in de praktijk niet mogelijk is.

Er kleven echter ook nadelen aan numeriek onderzoek naar turbulentie. Zo kan het analyseren van de grote hoeveelheid data een probleem zijn. Elke dataset bestaat uit waarden voor drie snelheidscomponenten voor elk roosterpunt. Het is dan niet eenvoudig de ontwikkeling van één specifieke wervel te volgen als functie van plaats en tijd. Daarnaast is turbulentie in essentie een verschijnsel dat optreedt op zowel macro- als microschaal. Wanneer we 3D simulaties willen uitvoeren die beide schalen voldoende nauwkeurig beschrijven, moet het aantal roosterpunten N minimaal gelijk zijn aan

$$N \sim \left(\frac{L}{\eta}\right)^3, \quad (1.1)$$

waarbij L en η de lengteschalen zijn voor respectievelijk de macro- en de microschaal. Uit [Nieuwstadt 82] weten we dat dit neerkomt op $N \sim Re^{9/4}$. Het vereiste aantal roosterpunten neemt dus zeer snel toe met het Reynoldsgetal. Aangezien turbulentie alleen bij hoge Reynoldsgetallen optreedt (ongeveer vanaf $Re = 2300$), betekent dit dat de grens van de hedendaagse computers bereikt wordt. Ter vergelijking: voor een Cray-2 ligt de grens voor toepassing van DNS ongeveer bij $Re \simeq 2600$. De computers die in de onderzoeksgroep Werveldynamica en Turbulentie beschikbaar zijn hebben een veel geringere capaciteit dan de Cray-2, de grens voor DNS ligt dan bij $Re \simeq 75$. Wij kunnen dus geen DNS toepassen en zullen in ons programma vereenvoudigingen van de Navier-Stokes vergelijkingen moeten aanbrengen. Het is dan niet langer reëel te verwachten dat het ontstaan en evolueren van de hairpinwervel met behulp van ons programma volledig begrepen kan worden. Daarom beperken wij ons tot het simuleren van enkele mechanismen die een rol (kunnen) spelen in het gedrag van hairpinwervels.

Dit verslag is als volgt ingedeeld:

In hoofdstuk 2 worden behandeld de basisvergelijkingen die we gebruiken om onze stromingssituaties te beschrijven. In onze simulaties rekenen we met een instationaire tweedimensionale (2D) en een stationaire quasi-driedimensionale (Q3D) benadering van het volledige stelsel basisvergelijkingen, welke duidelijk van elkaar verschillen. Deze benaderingen worden in aparte paragrafen behandeld. Daarna worden de afgeleide vergelijkingen worden gediscretiseerd teneinde ingepast te kunnen worden in het programma. Tevens worden enkele aspecten van de discretisatie toegelicht. De discretisatie heeft gevolgen voor de implementatie van de op te leggen randvoorwaarden, dit komt in de laatste paragraaf aan de orde.

Aan de hand van een stroomdiagram en enige tekstuele uitleg wordt de globale werking van het programma (2D en Q3D) uitgelegd in hoofdstuk 3. Tevens worden in dit hoofdstuk beperkingen en aanbevolen waarden voor enkele programma-parameters besproken.

Tenslotte wordt de schaling van grootheden toegelicht en worden enkele tests van het programma besproken.

Hoofdstuk 4 bevat de resultaten van het 2D programma. Er is een aantal simulaties uitgevoerd, welke ingedeeld zijn in twee paragrafen. Eerst wordt gekeken naar enkele stromingssituaties waarin Kelvin-Helmholtz instabiliteit een grote rol speelt. Daarna worden simulaties besproken waarin de ontwikkeling van de *kop* van de hairpinwervel geprobeerd wordt te simuleren.

In hoofdstuk 5 worden de resultaten van simulaties met het Q3D programma besproken. Verschillende aspecten van wervels in de buurt van een wand worden in afzonderlijke paragrafen behandeld. Deze aspecten zijn achtereenvolgens de ontwikkeling van vorticititeit (aan een wand en van wervels), de verplaatsing van wervels, de ontwikkeling van het longitudinale snelheidsprofiel en de groei van wervels. Tenslotte worden de resultaten besproken van simulaties die zoveel mogelijk op de situatie van het fysische experiment in de windtunnel zijn toegespitst: twee hairpin-benen, omgeven door twee staande wervels. De resultaten hiervan worden vergeleken met resultaten van windtunnelexperimenten uitgevoerd door Zondag (zie [Zondag 97]).

In het laatste hoofdstuk 6.1 worden conclusies uit de resultaten van het afstudeeronderzoek getrokken en worden suggesties gegeven die bij het vervolg van het werk van nut kunnen zijn.

Hoofdstuk 2

De basisvergelijkingen

In dit hoofdstuk zullen behandeld worden de basisvergelijkingen om de stromingssituaties te kunnen beschrijven die van belang zijn voor het bestuderen van hairpinwervels. In de eerste paragraaf van dit hoofdstuk zullen de volledige driedimensionale tijdsafhankelijke basisvergelijkingen worden behandeld, die vervolgens in de paragrafen daarna (§ 2.2 en § 2.3) vereenvoudigd zullen worden. De bedoeling hiervan is de vergelijkingen voor ons numeriek hanteerbaarder en de resultaten meer inzichtelijk te maken te maken. Het berekenen van het volledige stelsel driedimensionale basisvergelijkingen voor stroomfunctie, vorticeiteit en snelheid (4 vergelijkingen met 4 onbekenden¹) zou in de orde van dagen of weken gaan duren en bovendien de oorzakelijke verbanden niet duidelijker maken, zodat deze vereenvoudigingen zeer gewenst zijn. Er is een oplosmethode gekozen die bestaat uit twee benaderingen:

- Een stelsel met tweedimensionale basisvergelijkingen met *tijdsafhankelijke* variabelen.
- Een stelsel met zogenaamde quasi-driedimensionale basisvergelijkingen, waarbij de variabelen *niet tijdsafhankelijk* zijn.

In beide gevallen wordt dus één dimensie van het volledige stelsel driedimensionale tijdsafhankelijke basisvergelijkingen niet in de berekening meegenomen. In het eerste geval is dat een ruimtelijke coördinaat, in het tweede geval worden alle variabelen onafhankelijk van de tijdcoördinaat verondersteld en ontstaat er dus een stationaire situatie.

Om de basisvergelijkingen toe te kunnen passen in een discreet domein (i.e. een rooster) worden de vereenvoudigde basisvergelijkingen verderop in dit hoofdstuk (§ 2.4) gediscrètiseerd en worden de gebruikte randvoorwaarden afgeleid tot een gediscrètiseerde vorm (§ 2.5).

¹Componentsgewijs komt dit neer op 10 vergelijkingen met 10 onbekenden.

2.1 Het volledige 3D tijdsafhankelijke stelsel

Uitgangspunt voor beschrijving van alle stromingen zijn altijd de Navier-Stokes vergelijkingen. Nu geldt voor de stromingssituaties die wij willen beschouwen dat de wand vaak een grote rol speelt en we verwachten dat het effect van wand én viscositeit op de stroming niet te verwaarlozen is. De viscositeit van de stroming wordt dus principieel meegenomen in de Navier-Stokes vergelijkingen, die in korte notatie geschreven kunnen worden als één vectorvergelijking:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla \vec{u}) + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} = 0. \quad (2.1)$$

Aan het feit dat het dimensieloze getal Re (het Reynoldsgetal) in deze vectorvergelijking voorkomt, kan de lezer direct zien dat het hier gaat om genormeerde grootheden. Deze normering is gemaakt volgens de gangbare schaling van de Navier-Stokes vergelijkingen, zoals onder andere vermeld in [Vossers 86], pagina 67.

In (2.1) is $\vec{u} = (u, v, w)$ de snelheidsvector in een Cartesisch coördinatenstelsel. Verder is p de druk, t de tijd en ∇ de zogenaamde nabla-operator, gegeven door

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (2.2)$$

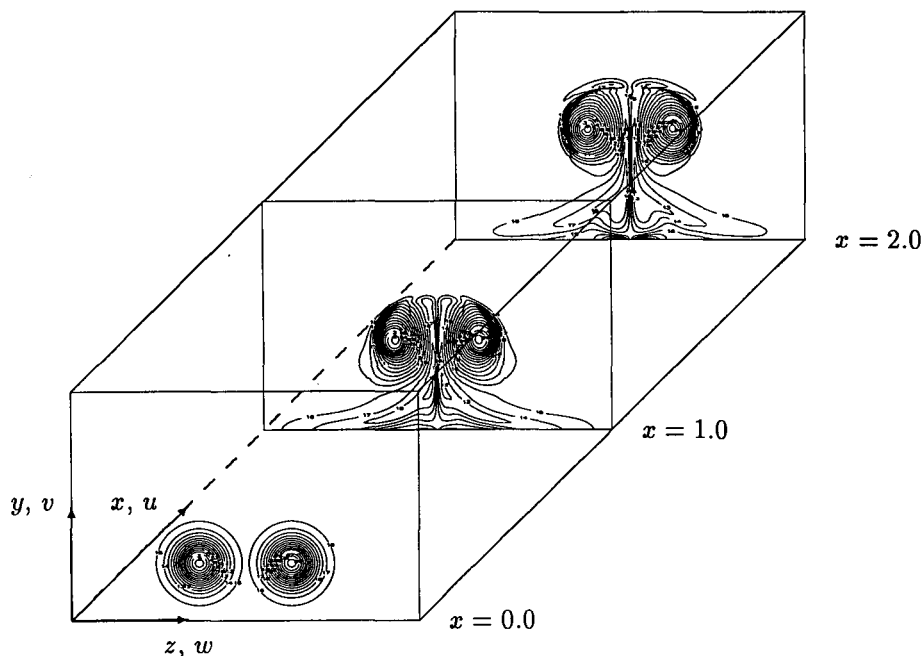
Het Reynoldsgetal in (2.1) wordt gegeven door $Re = \frac{UL}{\nu}$. Hierin zijn U en L respectievelijk karakteristieke waarden voor de snelheid en afmeting van de stromingssituatie. De dynamische viscositeit ν wordt gegeven door $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, waarin μ dan weer de kinematische viscositeit en ρ de dichtheid van de vloeistof voorstelt.

De Navier-Stokes vergelijkingen maken het *eerste* onderdeel uit van het stelsel basisvergelijkingen, genoemd in de inleiding van dit hoofdstuk.

Het coördinatenstelsel dat gekozen is om onze stromingen te simuleren is weergegeven in figuur 2.1. De plaatsvector wordt voor dit stelsel gegeven door $\vec{x} = (x, y, z)$, waarin y de afstand tot de onderkant van het domein voorstelt. In veel van de gesimuleerde stromingssituaties was er een wand aanwezig, deze bevond zich dan altijd op $y = 0$. De z -coördinaat is gericht dwars op de richting van de hoofdstroom u , parallel aan het ondervlak. In de literatuur wordt vaak de term *spanwise* gebruikt voor de z -coördinaat. Analoog hieraan wordt de term *streamwise* (stroomafwaarts) gebruikt voor de x -coördinaat. In figuur 2.1 is als voorbeeld een drietal doorsnedes te zien van twee wervelbuizen op verschillende plaatsen stroomafwaarts ($x = 0.0$, $x = 1.0$ en $x = 2.0$). De wervelbuizen in deze figuur zijn weergegeven door middel van lijnen van gelijke vorticititeit ω_x , de zogenaamde contourlijnen of iso-vorticititeitslijnen.

Voor elke incompressibele stroming geldt dat er voldaan moet zijn aan de continuïteitsvergelijking voor massabehoud:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$



Figuur 2.1: *Het coördinatenstelsel.*

in korte notatie gegeven door

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \tag{2.4}$$

Ter vergemakkelijking en vergroting van het inzicht in de vergelijkingen voeren we definities in voor vorticeit $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \tag{2.5}$$

en stroomfunctie $\vec{\psi} = (\psi_x, \psi_y, \psi_z)$:

$$\vec{u} = \nabla \times \vec{\psi}. \tag{2.6}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat door deze twee definities automatisch is voldaan aan de continuïteitsvergelijking voor massabehoud (2.4).

De uitdrukkingen voor de afzonderlijke snelheidscomponenten zijn eenvoudig af te leiden door combinatie van (2.2) en (2.6):

$$u = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \quad \text{en} \quad w = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}. \tag{2.7}$$

Daarnaast kunnen we voor de x -, y - en z -component van stroomfunctie en vorticeit elk een Poissonvergelijking afleiden, die gedrieën geschreven kunnen worden als één vectorvergelijking, namelijk

$$\nabla^2 \vec{\psi} = -\vec{\omega}. \tag{2.8}$$

Dit is relatief eenvoudig af te leiden uit (2.5) en (2.6), hiervoor wordt de lezer verwezen naar [Stoffels 94], pagina 7. De set Poissonvergelijkingen is na de Navier-Stokes vergelijking de tweede vectorvergelijking van het stelsel basisvergelijkingen waarmee we onze stromingen proberen te beschrijven.

Om de derde af te leiden wordt (2.5) toegepast op (2.1):

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\vec{\omega}) - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\omega} = 0, \quad (2.9)$$

de zogenaamde vorticitetsvergelijking in vectornotatie.

Zo hebben we een stelsel van drie vectorvergelijkingen ((2.1), (2.8) en (2.9)) en de vergelijking voor massabehoud (2.4) verkregen, waarmee we de vectoren snelheid (u, v, w) , stroomfunctie (ψ_x, ψ_y, ψ_z) en vorticitet $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ en de druk p kunnen berekenen in een instationair driedimensionaal domein. Zoals reeds vermeld vergt het oplossen van dit stelsel te veel van de capaciteit van de beschikbare processoren en zijn de volledige 3D datasets in de praktijk niet erg inzichtelijk gebleken. Enige vereenvoudigingen en verwaarlozingen zijn derhalve wenselijk. Dit heeft geleid tot twee benaderingen, die in de twee nu volgende paragrafen afzonderlijk zullen worden besproken.

2.2 Het 2D tijdsafhankelijke stelsel

Teneinde de filosofie achter de benaderingen die in deze paragraaf gemaakt zullen worden te kunnen begrijpen, werpen we nogmaals een blik op figuur 2.1. Wanneer we één ruimtelijke coördinaat niet meenemen in de berekening en toch een berekening willen doen die nog enige wetenschappelijke waarde heeft voor het onderzoek naar hairpinwervels, is de keuze van die coördinaat niet willekeurig.

De meest geschikte keuze voor de weg te laten coördinaat is de z -coördinaat. In dit geval worden de berekeningen gedaan in het tijdsafhankelijke, tweedimensionale xy -domein. Uit figuur 2.1 blijkt dat dit overeenkomt met een verticale doorsnede van het 'doosje' in de hoofdstroomrichting x . Een zinnige berekening in het xy -vlak kan alleen gedaan worden als er geen duidelijke invloed is van de andere xy -vlakken (voor andere z). Bij de hairpinwervel is dit alleen het geval in het symmetrie-vlak tussen de benen. Oftewel: in 2D simulaties kunnen we een infinitesimaal dun schijfje van de kop van de hairpinwervel beschouwen. In deze beschouwing kunnen we de ontwikkeling van vorticitet en stroomfunctie in de z -richting (ω_z en ψ_z) bekijken, alsmede de snelheden in x - en y -richting, respectievelijk u en v .

Afgaande op bovengenoemde schematisering is de vereenvoudiging van het stelsel basisvergelijkingen gemakkelijk te realiseren wanneer overal gesteld wordt:

$$w = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0. \quad (2.10)$$

Wanneer we deze vereenvoudigingen toepassen op de x - en y -component van (2.5), volgt

dat $\omega_x = 0$ en $\omega_y = 0$. De z -component van de vorticiiteit wordt berekend uit de vorticiiteitsvergelijking (2.9). Voor de z -component heeft deze de vorm:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega_z)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega_z)}{\partial y} + \frac{\partial(w\omega_z)}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right] = 0. \quad (2.11)$$

Dit vereenvoudigt na toepassen van (2.10) tot

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega_z)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega_z)}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right] = 0. \quad (2.12)$$

De uiteindelijke waarde voor ω_z in een roosterpunt op een bepaald tijdstip t wordt in het programma berekend door de meest linkse term van (2.12) te integreren over t . Het is dus beter (2.12) te schrijven als

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = -\frac{\partial(u\omega_z)}{\partial x} - \frac{\partial(v\omega_z)}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right]. \quad (2.13)$$

Uit de berekende waarde voor ω_z wordt met behulp van de vereenvoudigde Poissonvergelijking de z -component de waarde voor ψ_z berekend:

$$\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} = -\omega_z. \quad (2.14)$$

Omdat in de 2D-benadering overal geldt dat $\omega_x = 0$ en $\omega_y = 0$, zijn de grootheden ψ_x en ψ_y onbelangrijk en worden gelijk aan nul gesteld.

Rest nog het berekenen van de snelheidscomponenten u en v . Het is mogelijk deze impliciet te berekenen uit de Navier-Stokes vergelijking, maar aangezien de grootheid ψ_z met behulp van (2.14) nauwkeurig bekend is ($\psi_x = 0$ en $\psi_y = 0$), worden u en v als volgt expliciet berekend:

$$u = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \quad \text{en} \quad v = -\frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \quad (2.15)$$

af te leiden uit (2.7) en (2.10). Deze expliciete berekening is aanzienlijk eenvoudiger en reduceert daardoor de rekentijd.

Samenvattend levert de 2D benadering ons 4 onbekende grootheden op (ω_z , ψ_z , u en v), op te lossen uit 4 vergelijkingen: (2.13), (2.14) en (2.15).

2.3 Het quasi-3D tijdsafhankelijke stelsel

Voor het vereenvoudigen van het volledige stelsel basisvergelijkingen naar het quasi-3D tijdsafhankelijke stelsel basisvergelijkingen wordt slechts één veronderstelling gemaakt,

namelijk $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Dit geeft slechts een kleine vereenvoudiging in de vorticieteits- en Navier-Stokes vergelijking en verdere vereenvoudiging is noodzakelijk om het stelsel (met de beschikbare processoren) binnen afzienbare tijd op te kunnen lossen.

De vereenvoudigde vorm van de vorticieteitsvergelijking ziet er uit als:

$$\nabla \cdot (\vec{u}\vec{\omega}) - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\omega} = 0, \quad (2.16)$$

waarbij de x -component gegeven wordt door

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega_x)}{\partial y} + \frac{\partial(w\omega_x)}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

De keuze voor de x -coördinaat wordt aan het eind van deze paragraaf toegelicht.

Er wordt nu verondersteld dat de snelheid waarmee diffusie in de hoofdstroomrichting optreedt, klein is ten opzichte van convectie in de hoofdstroomrichting. Dat wil zeggen dat

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0, \quad (2.18)$$

zodat (2.17) vereenvoudigt tot

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega_x)}{\partial y} + \frac{\partial(w\omega_x)}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En met behulp van

$$\frac{\partial(u\omega_x)}{\partial x} = u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.20)$$

wordt dit

$$u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega_x)}{\partial y} + \frac{\partial(w\omega_x)}{\partial z} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right] = 0. \quad (2.21)$$

waarbij de y - en z -componenten van de vorticieteit gegeven worden door

$$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{en} \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.22)$$

Wanneer dit in de vorticieteitsvergelijking (2.21) wordt ingevuld, leidt dit tot de uiteindelijke vorm van de vorticieteitsvergelijking die in het programma is geïmplementeerd:

$$u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = - \frac{\partial(v\omega_x)}{\partial y} - \frac{\partial(w\omega_x)}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right]. \quad (2.23)$$

De nieuwe waarde voor de vorticeit (ω_x aan de linkerkant van (2.23)) wordt dus berekend met behulp van de waarde van de vorticeit één iteratiestap eerder (de ω_x -en aan de rechterkant van (2.23)).

Uit de berekende waarde voor ω_x kan men de x -component van de stroomfunctie berekenen door gebruik te maken van de Poissonvergelijking. Deze luidt (na toepassen van (2.18)) voor de x -component

$$\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} = -\omega_x. \quad (2.24)$$

Voor de berekening van de u -snelheid kunnen we in de Q3D benadering geen gebruik meer maken van (2.7), omdat ψ_y en ψ_z niet (nauwkeurig genoeg) bekend zijn. Het is dus noodzakelijk de Navier-Stokes vergelijking op te lossen. Daarvoor gaan we uit van (2.1) en schrijven we opnieuw de component in de x -richting geheel uit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = 0. \quad (2.25)$$

Met behulp van de in deze paragraaf gemaakte veronderstelling ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) en (2.18) wordt dit een enigszins eenvoudiger vergelijking:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = 0, \quad (2.26)$$

wat met behulp van (2.3) in een andere vorm gegoten kan worden:

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = 0. \quad (2.27)$$

De snelheid u wordt in het programma berekend door de eerste term in (2.27) te integreren over x . We zijn er niet in geslaagd een uitdrukking voor de drukval $\frac{\partial p}{\partial x}$ te vinden; we gaan ervan uit dat de druk constant is en nemen de drukval daarom niet mee in de berekening. De snelheidsvergelijking ziet er in het programma dan uiteindelijk als volgt uit:

$$2u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]. \quad (2.28)$$

Ook nu wordt weer de nieuwe waarde voor u berekend met behulp van de waarden voor u één iteratiestap eerder.

De resterende snelheidscomponenten v en w kunnen benaderd worden door (2.7) toe te passen met $\psi_y = 0$ en $\psi_z = 0$. Dan is $v = \frac{\partial \psi_x}{\partial z}$ en $w = -\frac{\partial \psi_x}{\partial y}$.

Nu hebben we drie vergelijkingen met als onbekenden ω_x , u en ψ_x waarmee we stromingen kunnen beschrijven in een quasi-driedimensionale benadering, achtereenvolgens (2.23), (2.28) en (2.24). Hierbij moet men in het oog houden dat er is gekozen voor een stapsgewijze oplossing van variabelen in de x -richting. Dit betekent dat zowel de vorticeits-

en Poisson-, als de snelheidsvergelijking in deze richting wordt opgelost. De keuze voor integratie in de x -richting is niet willekeurig; de vorticeit van de benen van een hairpin-wervel is namelijk geïoriënteerd parallel aan deze richting, net als de wervelbuis afgebeeld in figuur 2.1. Zodoende kan met de Q3D benadering de ontwikkeling van de benen van de hairpinwervel beschouwd worden. Let wel: de situatie is stationair!

2.4 De basisvergelijkingen in het programma

Om de basisvergelijkingen die in de vorige twee paragrafen zijn afgeleid te kunnen implementeren in het programma, moeten deze gediscretiseerd worden. Hiertoe zullen de 2D en Q3D Poissonvergelijking op een zodanige manier herschreven worden, dat duidelijk wordt dat *alle* basisvergelijkingen op dezelfde manier opgelost kunnen worden. Dit betekent een aanzienlijke vereenvoudiging van het programma.

Herschrijven van de Poissonvergelijkingen

De Poissonvergelijking zal voor beide benaderingen (2D en Q3D) iteratief opgelost worden. De 2D Poissonvergelijking (2.14) verandert dan in

$$\tau \frac{\partial \psi_z}{\partial \vartheta} = \left[\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} \right] + \omega_z, \quad (2.29)$$

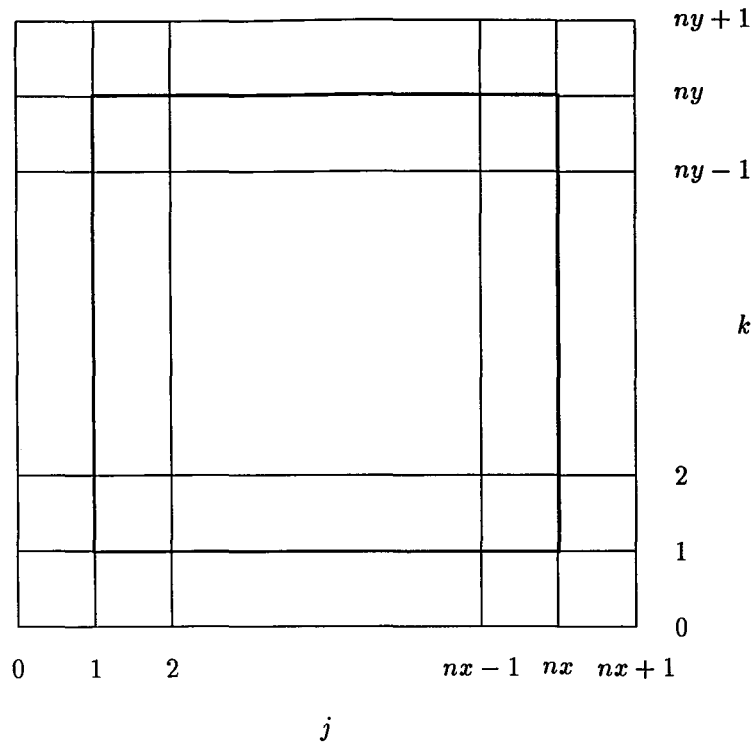
waarbij de variabele ϑ de dummy-coördinaat voorstelt waarin ψ_z iteratief wordt opgelost. Door herhaaldelijke iteratie wordt $\tau \frac{\partial \psi_z}{\partial \vartheta}$ steeds kleiner. Het programma heeft een consistente oplossing voor het stromingsprobleem gevonden wanneer voor alle roosterpunten (x, y) aan het criterium $\tau \frac{\partial \psi_z}{\partial \vartheta} < \epsilon$ is voldaan, waarbij ϵ een zo klein mogelijke constante is: $\epsilon \simeq 0$. De constante τ bepaalt de convergentiesnelheid: hoe kleiner τ , hoe eerder aan het criterium is voldaan. Een te klein gekozen τ kan echter leiden tot numerieke instabiliteit (zie § 3.3). Als $\tau \frac{\partial \psi_z}{\partial \vartheta} < \epsilon$, gaat vergelijking (2.29) over in de originele 2D Poissonvergelijking (2.14).

De Q3D Poissonvergelijking wordt analoog aan de 2D Poissonvergelijking omgeschreven. Dit leidt tot

$$\tau \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} \right] + \omega_x. \quad (2.30)$$

De variabele ξ speelt in (2.30) een analoge rol als ϑ in (2.29).

Daarmee zijn de Poissonvergelijkingen nu zo geschreven, dat de grootheden snelheid, vorticeit en stroomfunctie analoog berekend kunnen worden door integratie van de desbetreffende term aan de linkerkant van elke vergelijking. In het 2D geval betreft het dan vergelijkingen (2.13) en (2.29), in het Q3D geval gaat het om de vergelijkingen (2.23), (2.28) en (2.30).



Figuur 2.2: Het gebruikte rooster.

Discretisatie van de basisvergelijkingen

Voor de discretisatie wordt gebruik gemaakt van een tweedimensionaal rechthoekig rooster, waarvan de coördinaten gegeven worden door j in de horizontale richting en k in de verticale richting van het domein. De waarde van een variabele wordt in een roosterpunt (j, k) aangeduid met twee indices, bijvoorbeeld $\omega_{j,k}$ voor de vortichtheid. Het aantal binnen-roosterpunten in horizontale en verticale richting bedraagt voor 2D simulaties achtereenvolgens nx (index j loopt van 1 t/m nx) en ny (index k loopt van 1 t/m ny). Zie figuur 2.2.

Tevens wordt een extra kolom danwel rij aan de linker- en rechterkant ($j = 0$ en $j = nx + 1$) en onder- en bovenkant ($k = 0$ en $k = ny + 1$) meegenomen in de berekening om randvoorwaarden toe te kunnen passen. In veel simulaties is een wand in het domein geplaatst op $y = 0$, deze bevindt zich dan op $k = 1$.

Het rooster en de discretisatie is behalve enkele naamgevingen van coördinaten identiek in het 2D en Q3D programma. Deze coördinaten zijn als volgt gediscetiseerd:

	2D	Q3D	
Iteratierichting	$t = n\Delta t$	$x = n\Delta x$	(2.31)
Horizontale richting (j)	$x = n\Delta x$	$z = n\Delta z$	
Vertikale richting (k)	$y = n\Delta y$	$y = n\Delta y$	

In bovenstaande vergelijkingen stellen Δt , Δx , Δy en Δz de stapgrootte van tijd en plaats voor. De variabele n geeft het aantal tijd- danwel plaatsstappen aan. Als gevolg van deze discretisatie wordt het aantal roosterpunten in horizontale richting in Q3D simulaties gegeven door nz in plaats van nx .

De gehele methode van discretisatie zal hier niet uitvoerig worden behandeld. De uiteindelijke vorm van de gediscretiseerde vergelijkingen is ingewikkeld en draagt niet veel bij aan het inzicht in de werking van het programma. De gediscretiseerde vergelijkingen zijn samen met de volledige sets continue basisvergelijkingen opgenomen in bijlage A. Hier wordt volstaan met te vermelden dat de basisvergelijkingen berekend worden met behulp van een algemeen bekend impliciete discretisatieschema, namelijk de Alternating Direction Implicit (ADI) methode. Dit schema kenmerkt zich door een grote nauwkeurigheid en stabiliteit. Het aantal berekeningen dat gedaan moet worden, wordt daarnaast aanzienlijk gereduceerd door gebruik te maken van het zeer efficiënte Thomas algoritme. Voor een gedetailleerde uiteenzetting over ADI en dit algoritme wordt de lezer verwezen naar [Stoffels 94], [Dankers 93] en [Fletcher 91].

Differentieschema's

In enkele van onze vereenvoudigde basisvergelijkingen komen zogenaamde convectieve termen voor. In de 2D vorticitetsvergelijking (2.13) wordt deze gegeven door

$$-\frac{\partial(u\omega_z)}{\partial x} - \frac{\partial(v\omega_z)}{\partial y}, \quad (2.32)$$

in de Q3D vorticitetsvergelijking (2.23) luidt deze

$$-\frac{\partial(v\omega_x)}{\partial y} - \frac{\partial(w\omega_x)}{\partial z} \quad (2.33)$$

en in de Q3D snelheidsvergelijking (2.28) heeft de convectieve term tenslotte de volgende vorm:

$$-\frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{\partial(uw)}{\partial z}. \quad (2.34)$$

Het nauwkeurig berekenen van de differentiaal die in deze convectieve termen is een lastig karwei. Er zijn in de loop der jaren dan ook verschillende numerieke schema's gebruikt om de convectieve term zo nauwkeurig mogelijk te berekenen. De meest eenvoudige van deze differentieschema's zijn de volgende drie (neem $f(x)$ de te differentiëren functie):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \end{aligned} \quad (2.35)$$

af te leiden uit de Taylorbenadering voor de afgeleide van een willekeurige functie $f(x)$. De differentiemethoden in (2.35) worden respectievelijk de *voorwaarts gedeelde*, *achterwaarts gedeelde* en *centraal gedeelde* differentie genoemd. In (2.35) is Δx de afstand tussen twee gridpunten en $O(\cdot)$ de lokale afbreekfout, die gezien kan worden als een maat voor de nauwkeurigheid van de betreffende differentiemethode. Centraal gedeelde differentie is dus een orde nauwkeuriger is dan de voorwaarts en achterwaarts gedeelde differentie. Wanneer centraal gedeelde differentie wordt toegepast, wordt de convectieterm (neem als voorbeeld de convectieve term uit 2D vorticitetsvergelijking, (2.32)) in de x -richting als volgt gediscrètiseerd:

$$\left. \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} \right|_{j,k} = \frac{u_{j+1,k}\omega_{j+1,k} - u_{j-1,k}\omega_{j-1,k}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.36)$$

Hoewel centraal gedeelde differentie volgens de Taylorbenadering nauwkeuriger is, is het niet per definitie beter dan voorwaartse of achterwaartse differentie. Dit heeft te maken met de lokale vorm van de te differentiëren functie. We kunnen ons een differentieerbare functie voorstellen die voor kleine x vlak loopt, maar op een bepaald punt een plotselinge (maar wel continue) 'knik' omhoog maakt en voor grote x monotoon zeer snel stijgt. De afgeleide van $f(x)$ in een punt vlak voor deze knik is dan nog steeds nul, waar deze met centraal gedeelde differentie juist een zeer grote waarde kan krijgen. In dit punt zou achterwaarts gedeelde differentie dus beter zijn. Eenzelfde redenering geldt voor de afgeleide vlak na het knikpunt, die met centraal gedeelde differentie te laag zou uitvallen. In dat geval is dus voorwaarts gedeelde differentie beter.

Nu is het mogelijk om afhankelijk van het lokale gedrag van de te differentiëren functie voor elk punt te kiezen voor achterwaarts of voorwaarts gedeelde differentie. Dit is het principe van het *upwind* differentieschema. Bij de berekening van de convectieve term wordt dus per roosterpunt bekeken of de snelheid u positief danwel negatief is; dan wordt achterwaarts respectievelijk voorwaarts gedeelde differentie toegepast (neem weer de 2D vorticitetsvergelijking als voorbeeld):

$$\begin{aligned} u > 0 & \rightarrow \left. \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} \right|_{j,k} = \frac{u_{j,k}\omega_{j,k} - u_{j-1,k}\omega_{j-1,k}}{\Delta x} + O(\Delta x) \\ u < 0 & \rightarrow \left. \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} \right|_{j,k} = \frac{u_{j+1,k}\omega_{j+1,k} - u_{j,k}\omega_{j,k}}{\Delta x} + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Opgemerkt dient te worden dat dit schema (slechts) eerste orde nauwkeurig is.

In alle simulaties in dit verslag besproken worden, wordt dit upwind differentieschema gebruikt. Het is mogelijk dit schema nog verder te verfijnen door afhankelijk van het lokale gedrag van de te differentiëren functie te kiezen voor het upwind danwel het centraal gedeelde differentieschema. Dit wordt het *hybride* differentieschema genoemd, maar zal hier verder niet worden besproken. Geïnteresseerden worden verwezen naar [Heijmans 96],

[Patankar 80] en [Van Steenhoven 84]. Naast het hybride differentieschema zijn er ook nog hogere orde upwind differentieschema's met grotere nauwkeurigheid, deze zijn vermeld in [Fletcher 91].

2.5 Randvoorwaarden

Het toepassen van discrete randvoorwaarden voor stroomfunctie en vorticititeit op een rooster is niet altijd een triviale zaak. Voor de verschillende snelheidscomponenten levert de toepassing hiervan geen problemen op, maar de formulering van ons stromingsprobleem met de hulpbegrippen vorticititeit en stroomfunctie zorgt wel voor het ontbreken van natuurlijke randvoorwaarden voor deze twee grootheden. Met name de implementatie van randvoorwaarden voor de vorticititeit verdient extra aandacht.

2.5.1 Gewone randvoorwaarden

Er worden in een simulatie zogenaamde 'gewone' randvoorwaarden toegepast wanneer de toepassing van periodieke randvoorwaarden niet mogelijk en/of niet gewenst is.

Indien vloeistof vrij door de rand van het domein moet kunnen bewegen (bijvoorbeeld bij gedwongen in- en uitstroming), worden de waarden voor alle grootheden op de randen van het domein (dus op de kolommen $j = 0$ en $j = nx + 1$ en op de rijen $k = 0$ en $k = ny + 1$) berekend door extrapolatie van de waarden van die grootheid op de twee kolommen c.q. rijen ernaast. Deze extrapolatie houdt in dat de tweede afgeleide van de te extrapoleren grootheid gelijk is aan nul, bijvoorbeeld

$$\omega_{1,k} = \frac{1}{2} (\omega_{0,k} + \omega_{2,k}) \quad (2.38)$$

voor de vorticititeit op de linkerrand. De vorticititeit voor $j = 0$ wordt dan gegeven door

$$\omega_{0,k} = 2\omega_{1,k} - \omega_{2,k}. \quad (2.39)$$

Wanneer er wél een wand aanwezig is, wordt de afleiding van de randvoorwaarde voor vorticititeit ingewikkelder. We plaatsen de wand onderin het domein, op $k = 1$. Wanneer de wand slipvrij is, zullen de snelheidscomponenten parallel aan de wand gelijk zijn aan nul, dus $u_{j,1} = 0$ (en $w_{j,1} = 0$). Hieruit volgt een randvoorwaarde voor ψ :

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{j,1} = 0. \quad (2.40)$$

In alle simulaties is de wand niet doordringbaar verondersteld, dus $v_{j,1} = 0$. Uit deze aanname voor $v_{j,1}$ volgt nog een randvoorwaarde voor ψ (voor afleiding zie [Stoffels 94], pagina 14):

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{j,1} = 0. \quad (2.41)$$

Dan is de vortciteit op de wand ($\omega_{j,1}$) weer te geven door (gebruik (2.8))

$$\omega_{j,1} = - \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{j,1} = \frac{1}{\Delta y^2} (-\psi_{j,0} + 2\psi_{j,1} - \psi_{j,2}), \quad (2.42)$$

waarin alleen $\psi_{j,0}$ onbekend is. Voor de bepaling van deze term maken we gebruik van een tweede of derde orde benadering van de term $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ op de wand. De tweede orde benadering is de eenvoudigste en betekent dat

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{j,1} = \frac{1}{2\Delta y} (-\psi_{j,0} - \psi_{j,2}). \quad (2.43)$$

Dit moet gelijk zijn aan (2.40), dus $\psi_{j,0} = \psi_{j,2}$. De randvoorwaarde voor de vortciteit wordt dan

$$\omega_{j,1} = \frac{2}{\Delta y^2} (\psi_{j,1} - \psi_{j,2}). \quad (2.44)$$

Wanneer de derde orde benadering wordt gebruikt, is de uitdrukking voor $\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{j,1}$ minder eenvoudig:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{j,1} = \frac{1}{6\Delta y} (2\psi_{j,0} + 3\psi_{j,1} - 6\psi_{j,2} + \psi_{j,3}). \quad (2.45)$$

Wanneer we dit gelijk stellen aan (2.40) vinden we na een lastige afleiding².

$$\psi_{j,0} = -\frac{3}{2}\psi_{j,1} + 3\psi_{j,2} - \frac{1}{2}\psi_{j,3}. \quad (2.46)$$

Er volgt uit (2.42) en (2.46) dat de randvoorwaarde voor de vortciteit aan de wand nu wordt gegeven door

$$\omega_{j,1} = \frac{1}{2\Delta y^2} (7\psi_{j,1} - 8\psi_{j,2} + \psi_{j,3}). \quad (2.47)$$

2.5.2 Periodieke randvoorwaarden

Periodieke randvoorwaarden zijn zeer eenvoudig te implementeren in het programma. In de simulaties die gedaan zijn is alleen de situatie voorgekomen waarin periodieke randvoorwaarden toegepast konden worden in horizontale richting. Er wordt gesteld dat alle variabelen op de kolom $j = nx + 1$ gelijk zijn aan dezelfde variabelen op de kolom $j = 2$. Analoog hieraan worden de variabelen op de kolom $j = 0$ berekend met de waarden op de kolom $j = nx - 1$.

²Deze afleiding wordt uitgebreid behandeld in [Zondag 97], pagina 100.

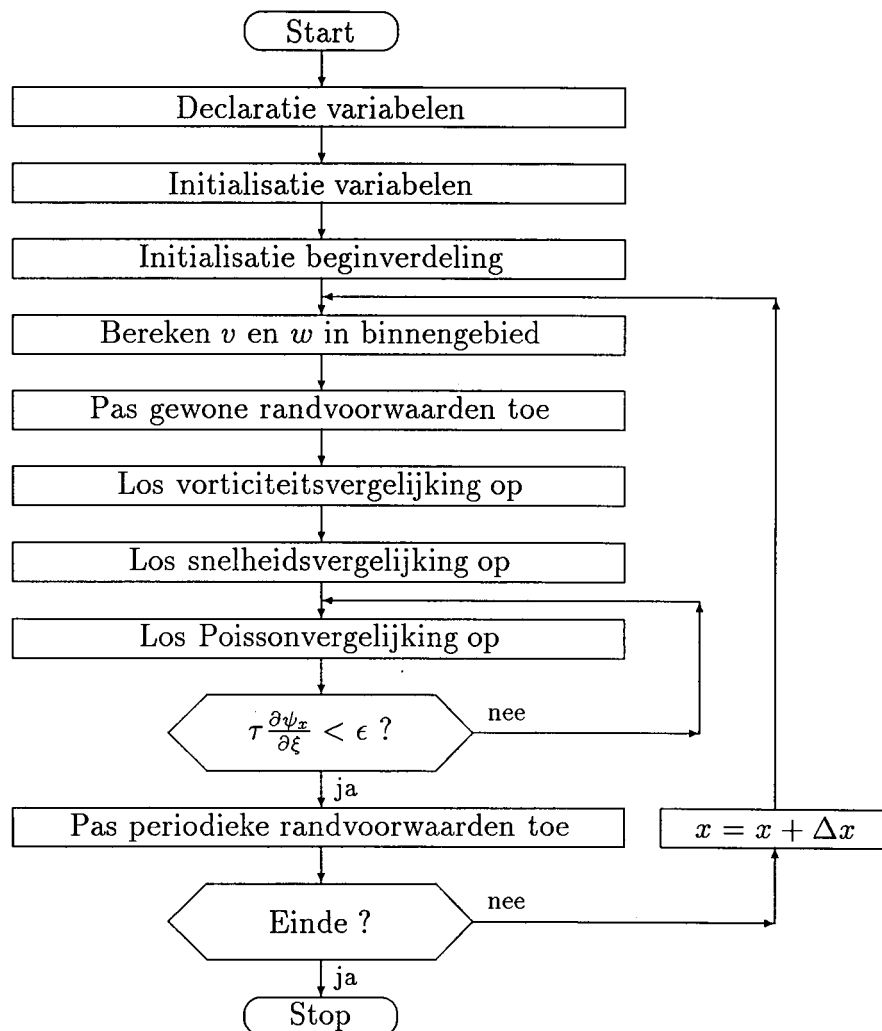
Hoofdstuk 3

Het programma

In dit hoofdstuk wordt aan de hand van een stroomdiagram de globale werking van het 2D en Q3D programma uitgelegd. De volledige listing hiervan is te vinden in een apart gedrukte programma-handleiding [Van den Bosch 97], waarin ook kort wordt ingegaan op de werking van de verschillende programmaprocedures. Het Q3D programma wordt in dit hoofdstuk eerst behandeld aangezien het 2D programma slechts kleine vereenvoudigingen ten opzichte van het Q3D programma inhoudt. Om dezelfde reden is in [Van den Bosch 97] alleen de listing van het Q3D programma opgenomen.

3.1 Het Q3D programma

Het stroomdiagram is weergegeven in figuur 3.1 op pagina 26. Om te beginnen worden alle variabelen gedeclareerd en krijgen waar vereist een startwaarde. Daarna wordt een eventuele beginsituatie gecreëerd: initiële waarden voor de vortichtheid, de drie snelheidscomponenten en de stroomfunctie voor $x = 0$ kunnen worden ingegeven. Vervolgens worden de snelheidscomponenten v en w berekend voor het binnengebied van het domein ((2.7) wordt toegepast) en worden alle grootheden (u , v , w , ω_x en ψ_x) berekend op de randen. Daarna berekent men voor ieder roosterpunt de nieuwe waarde (dus op punt $x = x + \Delta x$) voor de vortichtheid met behulp van (2.23). In de volgende stap wordt dit ook gedaan voor de x -component van de snelheid met behulp van (2.28). De geschreven Poissonvergelijking (2.30) wordt daarna gebruikt om de stroomfunctie te berekenen uit de nieuwe verdeling van de vortichtheid. Men zoekt hiervoor net zo lang naar een consistente oplossing zodat voor alle roosterpunten geldt: $\tau \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} < \epsilon$. Dan is de term $\tau \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi}$ in (2.30) verwaarloosbaar en gaat deze over in de originele Q3D Poissonvergelijking (2.24). Vervolgens wordt de waarde van x met een stap verhoogd en begint de berekening van vortichtheid, snelheid en stroomfunctie opnieuw tenzij de eindwaarde voor x is bereikt.



Figuur 3.1: Het stroomdiagram van het Q3D programma

3.2 Het 2D programma

In het tweedimensionale programma hoeft de snelheidsvergelijking niet opgelost te worden, u wordt tegelijk met v berekend uit (2.15) en de randvoorwaarden. Iteratie vindt nu plaats in de loop van de tijd, dus in het 2D programma wordt dit dan de ophoging $t = t + \Delta t$ in plaats van $x = x + \Delta x$. De term $\frac{\partial \psi_x}{\partial \xi}$ dient vervangen te worden door $\frac{\partial \psi_x}{\partial \vartheta}$. De rest van het Q3D stroomdiagram is ook van toepassing op het 2D programma.

3.3 Waarden voor enkele programma-parameters

Om te zorgen dat het programma betrouwbare resultaten geeft, moet het in ieder geval een consistente oplossing vinden, oftewel convergeren. Een van de parameters die hierin een rol speelt is de stap in de iteratierichting, Δx . Deze mag vanzelfsprekend niet te groot zijn. Daarnaast mag ook de variabele τ (die de convergentiesnelheid bepaalt) in (2.30) niet te groot zijn. Bovendien blijkt uit de Q3D Poissonvergelijking (2.30) dat $\frac{\Delta x}{\tau}$ niet te groot mag zijn. Op analoge wijze geldt dit ook voor $\frac{\Delta x}{u}$ wanneer we naar de Q3D vorticitets- en snelheidsvergelijking kijken. Hoe kleiner τ echter wordt, hoe groter $\frac{\Delta x}{\tau}$ wordt. Een recept voor het vinden van een stabiele combinatie van waarden voor Δx en τ is er niet, in (3.1) zijn de in *elke* simulatie gebruikte, stabiele waarden vermeld. Voor 2D simulaties geldt op analoge manier dat Δt en $\frac{\Delta t}{\tau}$ niet te groot mogen zijn.

Q3D		2D	
Δx	=	$4.0 \cdot 10^{-4}$	Δt = $1.0 \cdot 10^{-3}$
ϵ	=	$1.5 \cdot 10^{-5}$	ϵ = $1.0 \cdot 10^{-5}$
τ	=	0.25	τ = 25
$\frac{\Delta x}{\tau}$	=	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$\frac{\Delta t}{\tau}$ = $4.0 \cdot 10^{-5}$

(3.1)

De constante ϵ bepaalt de nauwkeurigheid van de oplossing. Hoe kleiner ϵ , hoe nauwkeuriger de oplossing. Het programma heeft bij kleine ϵ wel meer tijd nodig die oplossing te vinden. In [Stoffels 94] wordt op pagina 36 geconcludeerd dat het produkt $\tau \cdot \epsilon$ te waarborgen moet zijn ten opzichte van de andere termen in de Poissonvergelijkingen.

Een andere parameter die een grote invloed op het resultaat van de simulatie heeft, is het aantal roosterpunten $n_x \cdot n_y$ ($n_x \cdot n_y$ voor 2D simulaties). Er worden door het programma namelijk kleine numerieke fouten gemaakt wanneer er gradiënten in het domein voorkomen. Hoe groter deze gradiënten, hoe groter de numerieke fout. Deze fout is te beperken door het aantal roosterpunten zo groot mogelijk te nemen, zodanig dat de capaciteit van het geheugen van de processor optimaal gebruikt wordt. De gevonden maximale waarden voor n_x , n_y en n_z zijn vermeld in (3.2). Merk op dat door het oplossen van de snelheidsvergelijking voor Q3D simulaties het maximale aantal roosterpunten voor Q3D simulaties kleiner is dan voor 2D simulaties.

Q3D	2D	
$nz = 151$	$nx = 201$	
$ny = 101$	$ny = 101$	
$z_{max} = 3.0$	$x_{max} = 12.0$	(3.2)
$y_{max} = 2.0$	$y_{max} = 2.0$	
$\Delta z = 0.020$	$\Delta x = 0.060$	
$\Delta y = 0.020$	$\Delta y = 0.020$	

Het tweedimensionale rooster ($nz \times ny$ danwel $nx \times ny$) wordt begrensd door twee van de drie reële afmetingen x_{max} , y_{max} en z_{max} . De waarden voor x_{max} , y_{max} en z_{max} zijn voor elke simulatie (Q3D én 2D) hetzelfde. Dit betekent ook dat de reële afstand tussen twee roosterpunten (Δz en Δy danwel Δx en Δy) vast ligt.

3.4 Schaling van grootheden

In hoofdstuk 2 hebben we de basisvergelijkingen voor 2D en Q3D simulaties afgeleid in dimensieloze vorm. Het Reynoldsgetal Re is toen geïntroduceert. Het dimensieloos maken van de basisvergelijkingen heeft tot gevolg dat de grootheden die een rol spelen in het programma geschaalde, dimensieloze grootheden zijn. Wat de waarde van deze geschaalde grootheden betekent voor de waarde van de werkelijke, ongeschaalde grootheden wordt nu kort toegelicht.

Het Reynoldsgetal is gedefinieerd als $Re = \frac{UL}{\nu}$, waarbij U en L respectievelijk een karakteristieke snelheid (in $[m/s]$) en karakteristieke lengte (in $[m]$) voor de stroming zijn. De parameter ν stelt de dynamische viscositeit voor en wordt gegeven in $[m^2/s]$. De werkelijke waarde van de grootheden \vec{x} , \vec{u} , t , $\vec{\omega}$ en $\vec{\psi}$ kan nu berekend worden wanneer de waarden van bovengenoemde parameters bekend zijn.

Voorbeeld We simuleren een stroming in lucht ($\nu = 15 \cdot 10^{-6} m^2/s$), met karakteristieke lengte-eenheid $L = 5.0 \cdot 10^{-2} m$ en $Re = 1500$. Dan is de karakteristieke snelheid U gelijk aan $U = 0.45 m/s$ en worden alle snelheden uitgedrukt in eenheden van $0.45 m/s$. Voor de resterende grootheden geldt dat de tijd t dan wordt uitgedrukt in eenheden van $\frac{L}{U} = 0.11 s$, de vortciteit wordt uitgedrukt in eenheden van $\frac{U}{L} = 9.0 /s$ en de stroomfunctie $\vec{\psi}$ in eenheden van $UL = 2.25 \cdot 10^{-2} m^2/s$.

3.5 Tests van het programma

De eerste versie van het programma is ontwikkeld in 1994 door Voskamp. Sindsdien zijn door Dankers en Stoffels enkele verbeteringen en aanpassingen gemaakt en zijn verschillende programma-onderdelen getest. De resultaten van enkele van deze tests zijn vermeld

in [Dankers 93] en [Stoffels 94]. In laatstgenoemde publicatie wordt onder andere de conclusie getrokken dat de snelheidsvergelijking goed in het Q3D programma is ingebouwd en dat het programma geschikt is om botsingen van dipolen met een wand of met elkaar te simuleren.

Er zijn ook 2D simulaties gedaan met stromingen waarin vierkante ribbels zijn aangebracht, de resultaten hiervan zijn te vinden in [Heijmans 96]. Er is gebleken dat het programma niet echt geschikt is voor dergelijke simulaties. Daarnaast bleek het kiezen van het juiste differentieschema niet eenvoudig. De door Heijmans uitgevoerde simulaties bleken het beste resultaat te geven met het *hybride* schema.

In de loop van het afstudeeronderzoek is het programma op enkele punten aangepast. Zo zijn ten eerste alle procedures, declaraties en initialisaties overzichtelijk gerangschikt en zijn overbodige regels geschrapt. Verder is het upwind differentieschema ingebouwd en zijn nieuwe procedures toegevoegd waardoor file-handling en debuggen gemakkelijker verloopt. Ook is het visualiseren van de datafiles gemakkelijker gemaakt.

Voor zover bekend en getest zitten er dus geen fouten in het programma. Het programma heeft wel zijn beperkingen: doordat het niet mogelijk is zuiver 3D tijdsafhankelijke simulaties (DNS) uit te voeren, zullen niet alle stromingsverschijnselen waargenomen kunnen worden. Gedurende het afstudeeronderzoek zijn enkele van dergelijke beperkingen ontdekt, deze worden in de volgende twee hoofdstukken vermeld.

Aangezien een aantal onderdelen van het programma nog steeds aangepast wordt, is het belangrijk te realiseren dat de simulaties die in dit verslag vermeld zijn, niet alleen bedoeld zijn om stromingssituaties te kunnen begrijpen, maar ook om het programma op toepasbaarheid voor bepaalde stromingssituaties te testen. Zodoende leert men de beperkingen van het programma het beste kennen.

Hoofdstuk 4

2D numerieke simulaties

De in dit hoofdstuk besproken resultaten zijn verkregen met behulp van het 2D programma. Dit programma is - zo is al opgemerkt in § 2.2 - geschikt om het gedrag van de *kop* van de hairpinwervel te simuleren. Er wordt daartoe een yx -doorsnede van het driedimensionale xyz -domein genomen, zodoende kunnen we een dwarsdoorsnede van de hairpinkop bekijken.

In de eerste paragraaf van dit hoofdstuk worden simulaties besproken waarin een fenomeen uit de stromingsleer geprobeerd is te simuleren dat belangrijk wordt geacht voor de ontwikkeling en groei van de kop van een hairpinwervel, namelijk de *schuiflaag*. In de paragrafen daarna zullen simulaties besproken worden waarin geprobeerd wordt wervels in de buurt van een wand te laten ontstaan en/of opnieuw te laten ontstaan en wordt gekeken onder welke omstandigheden wervels in de buurt van de wand ontstaan.

Teneinde de stroming te kunnen beschrijven, wordt gebruik gemaakt van weergaves van vorticheit. De resultaten van de numerieke simulaties zijn verwerkt met programmatuur die ruwe datafiles met vorticheitsverdelingen omzet in contourplots met iso-vorticheitslijnen. Het logische vervolg van deze keuze van presenteren is de in dit verslag gebruikte definitie van het centrum van de wervel: de plaats waar de vorticheit van de wervel een minimale danwel maximale waarde bereikt voor respectievelijk wervels van negatieve danwel positieve vorticheit. Opgemerkt dient te worden dat een keuze voor weergaves van de stroomfunctie niet per definitie hetzelfde centrum van de wervel tot gevolg zou hebben. De extrema van vorticheit en stroomfunctie vallen namelijk over het algemeen *niet exact* samen.

De contourfiguren waarvan in dit hoofdstuk regelmatig gebruik zal worden gemaakt, zijn altijd weergaves van het *gehele* domein. De linkerbenenhoek van de contourplots komt dus altijd overeen met het punt $(0.0, 0.0)$, de rechterbovenhoek met (x_{max}, y_{max}) . Deze afmetingen hebben voor 2D simulaties respectievelijk de vaste waarden $x_{max} = 12.0$ en $y_{max} = 2.0$.

4.1 De schuiflaag

In de stromingsleer wordt met een schuiflaag aangeduid een dunne laag vloeistof waarin (loodrecht op de lengterichting van de laag) een grote snelheidsgradiënt aanwezig is. Met andere woorden: in een zeer klein gebied bevindt zich in verticale richting een relatief groot verschil in snelheid over een relatief grote afstand in horizontale richting. Zo'n schuiflaag blijkt een instabiele situatie te zijn, die in het algemeen vaak Kelvin-Helmholtz instabiliteit wordt genoemd.

In hoofdstuk 1 is reeds vermeld dat het vermoeden bestaat dat de kop van de hairpinwervel in vorticititeit kan groeien door de aanwezigheid van een schuiflaag. Een schuiflaag is van nature altijd instabiel en evolueert tot een vorticititeitsverdeling met één of meerdere wervels. Deze wervels zouden kunnen samensmelten met de kop van de hairpinwervel en op deze manier de kop doen groeien in sterkte.

Om een volledig beeld te krijgen van deze instabiele situatie zijn drie 2D simulaties uitgevoerd waarin een schuiflaag aanwezig is:

- de schuiflaag zonder verstoring,
- de schuiflaag met kleine verstoring in slechts één punt van de scheidingslijn en
- de schuiflaag met kleine random verstoringen op elk punt van de scheidingslijn.

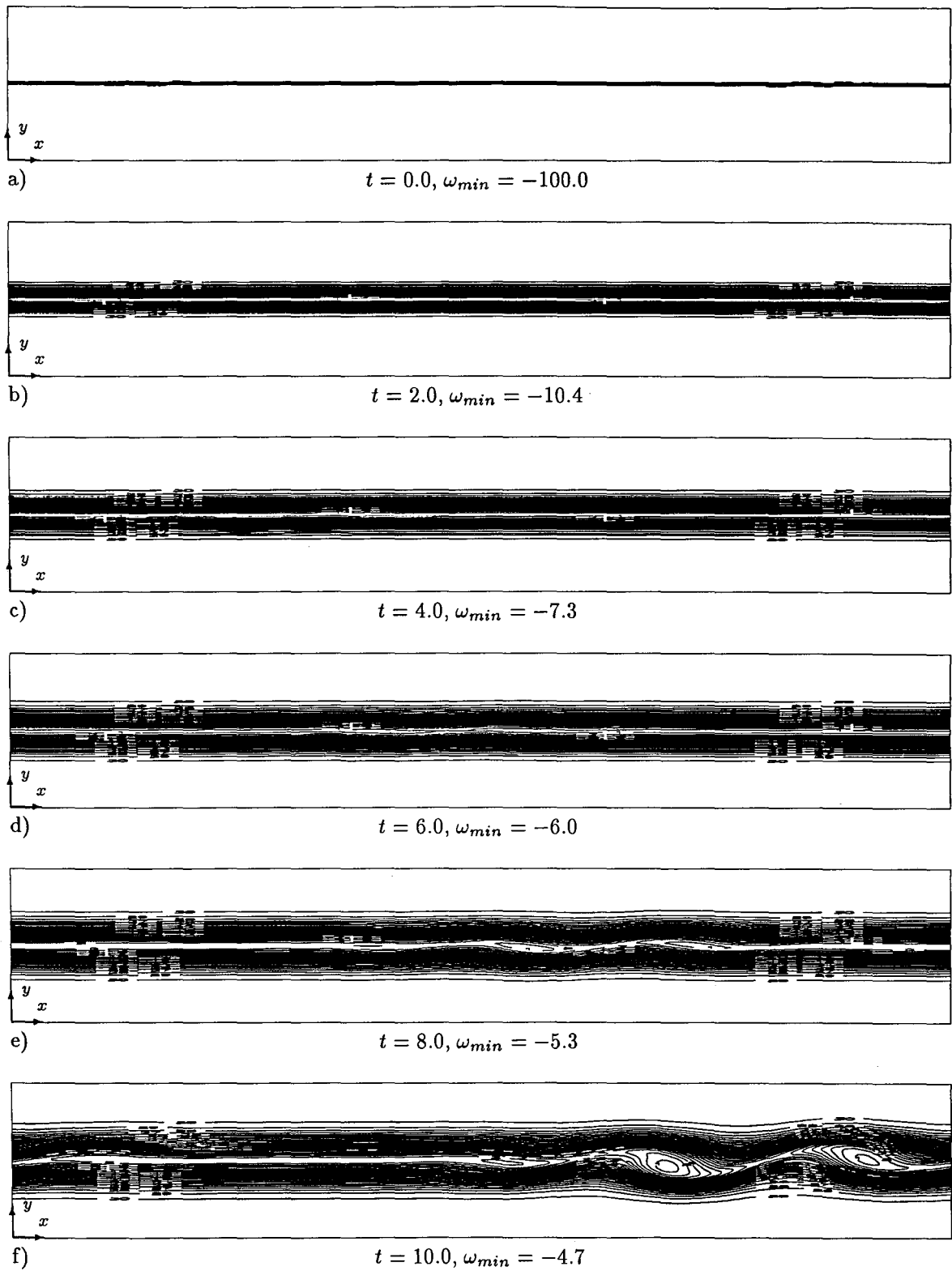
Behalve de vorticititeitsverdeling op de scheidingslijn, is de stromingssituatie voor alledrie de simulaties exact hetzelfde. Het snelheidsprofiel is in alledrie de gevallen als volgt: de u -snelheid in de onderste helft van het xy -domein ($0 \leq y < \frac{1}{2}y_{max}$) is gelijk aan nul, de snelheid in de bovenste helft ($\frac{1}{2}y_{max} < y \leq y_{max}$) is gelijk aan U_{max} , welke gelijk is aan 2.0. De snelheid op de scheidingslijn ($y = \frac{1}{2}y_{max}$) is gelijk aan $\frac{1}{2}U_{max}$. Door het snelheidsveld te differentiëren danwel te integreren wordt de verdeling van vorticititeit danwel stroomfunctie in het gehele domein berekend. Verder heeft het Reynoldsgetal een waarde van 667. Er bevinden zich geen wanden in het domein en er worden periodieke randvoorwaarden toegepast in horizontale richting (x).

4.1.1 De schuiflaag zonder verstoring

De resultaten zijn te zien in figuur 4.1, waarin voor 6 verschillende tijdstippen de vorticititeitsverdeling is weergegeven. De in de onderschriften vermelde waarde voor ω_{min} stelt de grootste (negatieve) vorticititeit voor die in het domein voorkomt.

We zien dat de lijn van constante initiële vorticititeit $\omega_{schuiflaag} = -100.0$ zich door diffusie in de loop van de tijd verspreidt en dus breder wordt. De vorticititeit wordt in de loop van de tijd dan ook steeds lager, in het begin is deze daling al heel sterk: op $t = 2.0$ is ω_{min} nog slechts 10% van de beginvorticititeit $\omega_{schuiflaag}$.

Uit theoretische benaderingen van de schuiflaag weten we dat een zeer kleine verstoring in de u -snelheid het labiele evenwicht van de schuiflaag kan verstoren. Dit zien we ook in



Figuur 4.1: Een schuiflaag zonder verstoringen.

deze simulatie gebeuren en is voor het eerst te zien voor $t = 2.0$, maar de verstoring is dan nog te klein om in figuur 4.1b duidelijk te kunnen zien. De verstoring groeit in de tijd en is wel goed zichtbaar in figuur 4.1d, ongeveer in het midden van de figuur. In de figuren daarna zien we dat de verstoring in de vorticitetsverdeling verder groeit en zich ontwikkelt tot twee wervels. De grootste negatieve vorticitet ω_{min} van deze wervels voor $t = 8.0$ is -5.3 en voor $t = 10.0$ is deze -4.8 .

We zien dat de verstoring verplaatst naarmate de simulatie verloopt, deze wordt als het ware door de stroming meegevoerd. Wanneer we ervan uitgaan dat de snelheid waarmee deze verstoring zich verplaatst ongeveer constant is, kunnen we de plaats schatten waar de verstoring is ontstaan. Deze blijkt dan in de buurt van de linkerrand van het domein te zijn ontstaan. Dit zou kunnen betekenen dat de verstoring te wijten is aan het niet voldoende nauwkeurig toepassen van de randvoorwaarden. Dit is echter moeilijk te begrijpen aangezien er in horizontale richting periodieke randvoorwaarden zijn toegepast.

4.1.2 De schuiflaag met een verstoring in één punt

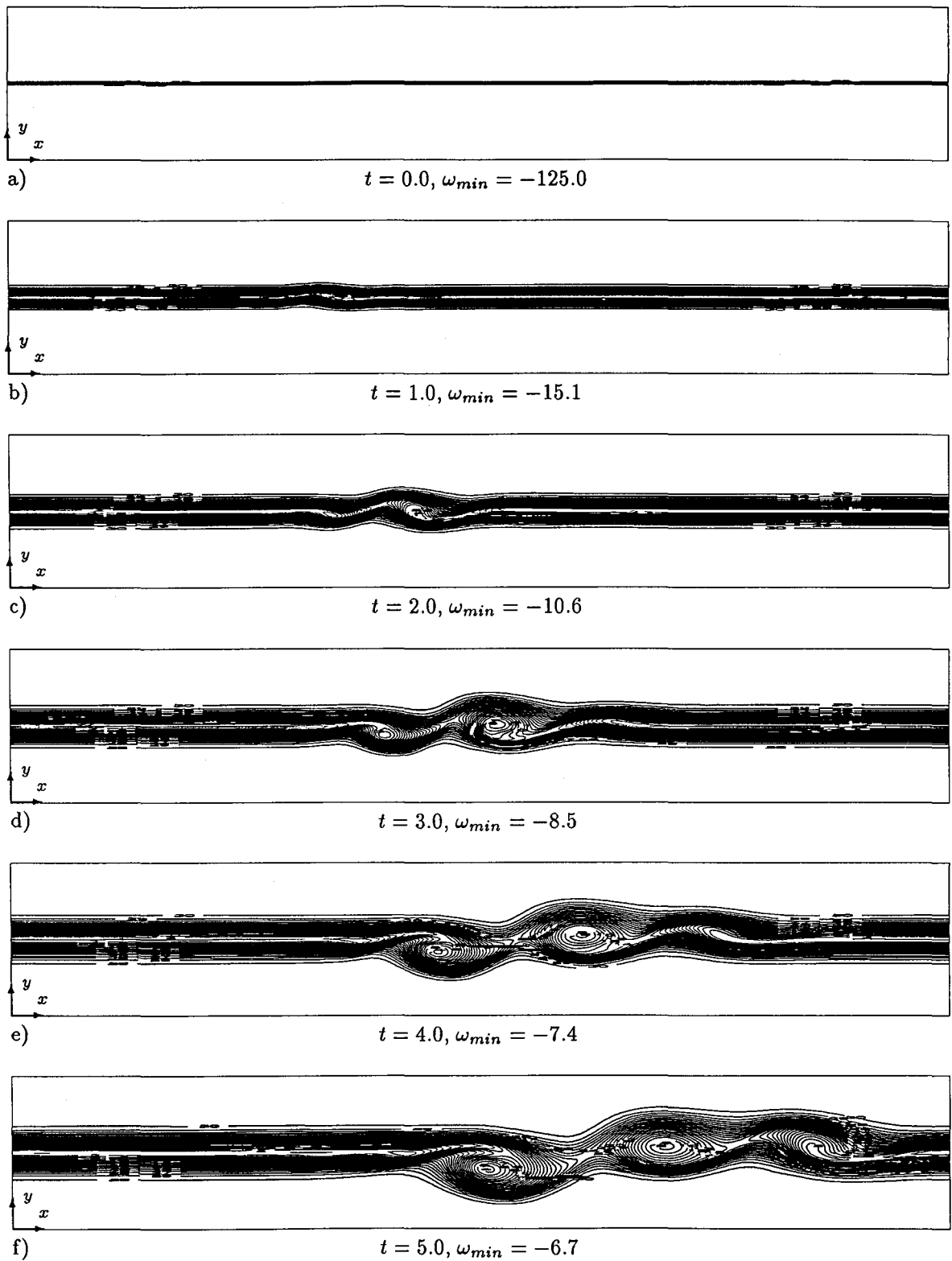
De vorticitet in het punt $(x, y) = (2.0, 1.0)$ is ten opzichte van de vorige stromingssituatie van $\omega_{schuiflaag} = -100.0$ met 25% vergroot tot $\omega_{schuiflaag} = -125.0$. De vorticitet in de andere punten op de scheidingslijn blijft gelijk aan -100.0 .

De gevolgen hiervan zijn weergegeven in figuur 4.2. We zien in deze serie plots dat ten opzichte van de vorticitetsverdeling van figuur 4.1 de vorticitetsverdeling nu veel sneller wordt verstoord, voor $t = 1.0$ is dit al duidelijk te zien. Dit is logisch, aangezien de waarde van de aangebrachte verstoring veel groter is dan de numerieke verstoring die optrad in de vorige simulatie. In het verdere verloop van de simulatie is de grootste negatieve vorticitet ω_{min} in de schuiflaag dan ook op elk tijdstip groter dan in de stromingssituatie zonder de aangebrachte verstoring.

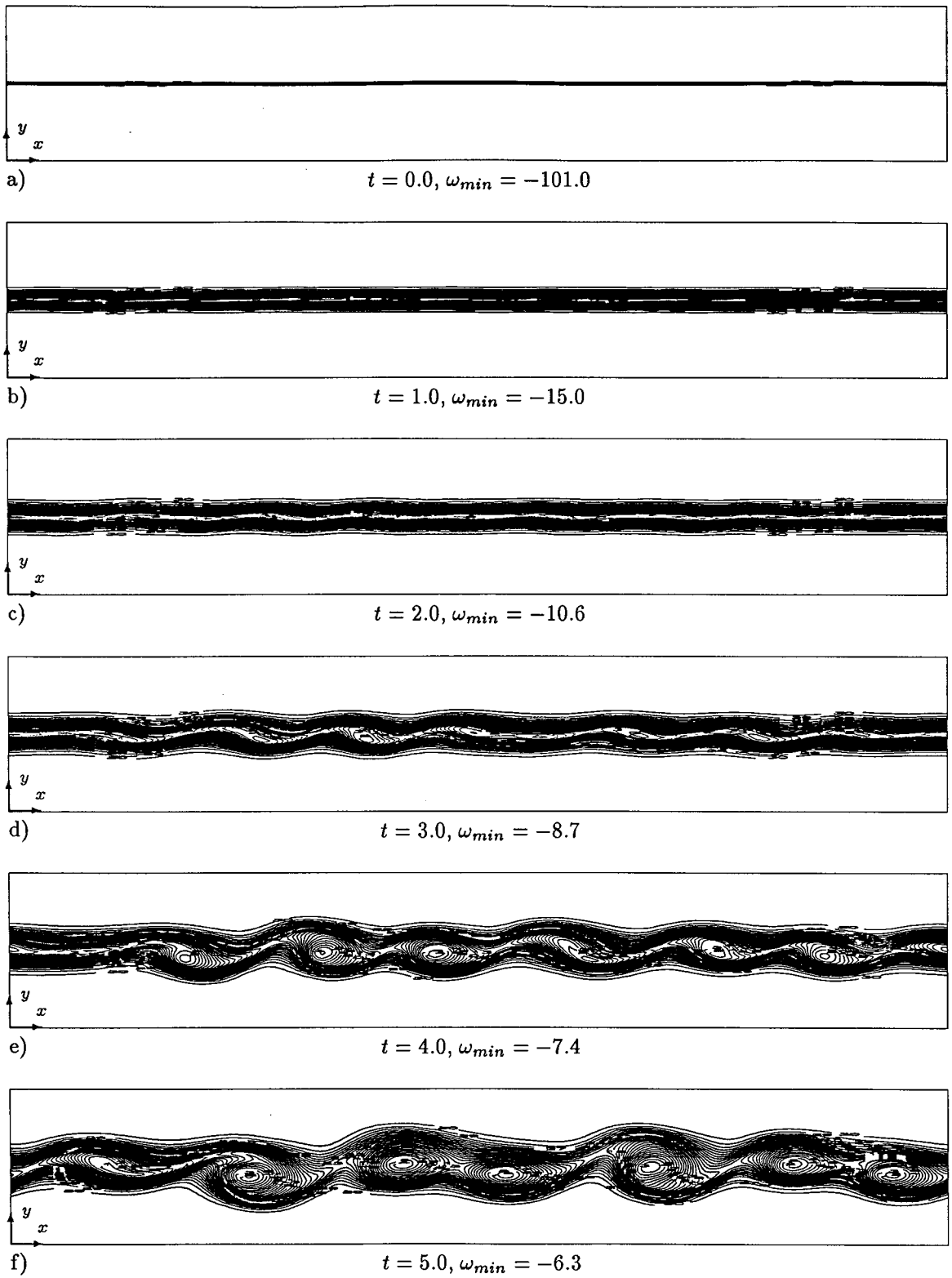
4.1.3 De schuiflaag met random verstoringen op een lijn

In deze stromingssituatie worden op alle punten van de scheidingslijn verstoringen in de vorticitet aangebracht. Deze verstoringen zijn willekeurig van grootte, met een maximale waarde van ± 1.0 (dus 1% van de onverstoordde waarde voor de vorticitet). Voor de vorticitet op elk punt van de scheidingslijn geldt dus dat $-101.0 \leq \omega_{schuiflaag} \leq -99.0$. Het resultaat is weergegeven in figuur 4.3 (dit zijn 9 contourplots, verdeeld over twee pagina's).

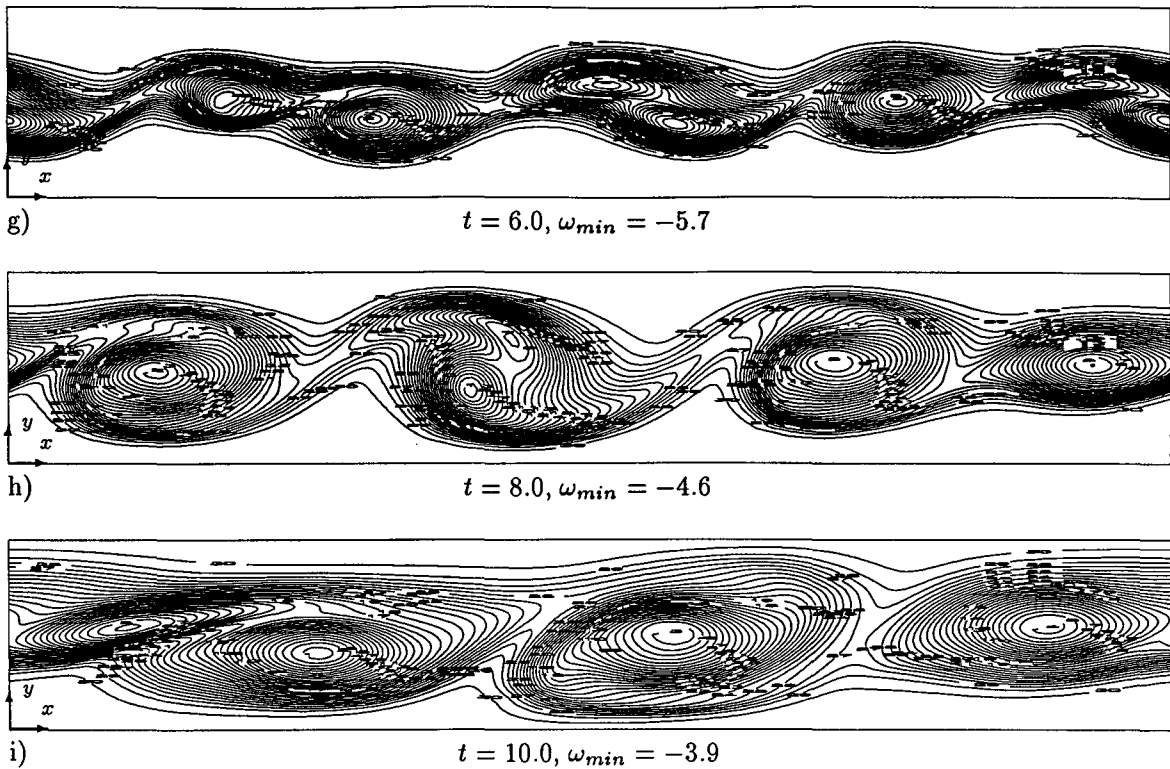
Er blijken over de gehele lengte van het domein wervels te ontstaan, die in omvang toenemen naarmate de tijd verstrijkt. De vorticitet van de wervels daalt monotoon. Daarnaast neemt het aantal wervels dat zich in het domein bevindt af met de tijd: op $t = 2.0$ zijn 12 kleine wervels te zien, waar op $t = 5.0$ nog maar 7 grote wervels te zien zijn. In tabel 4.1 zijn voor verschillende tijdstippen het aantal wervels n en de amplitude A gegeven, waarvoor we gewoon de gemiddelde straal van de wervels hebben genomen.



Figuur 4.2: Een schuiflaag met een verstoring in één punt.



Figuur 4.3: Een schuiflaag met random verstoringen op een lijn.



We zien dan dat het aantal wervels monotoon daalt, maar dat de amplitude van de verstoring steeds toeneemt. Dit is niet geheel in overeenstemming met de theorie en eerder verrichte numerieke simulaties van schuiflagen. Daaruit blijkt namelijk dat de golflengte van de verstoring gelijk blijft, wat in ons geval niet zo is, aangezien het aantal wervels in de verstoring slaag steeds afneemt. Het feit dat de amplitude van de verstoring toeneemt, komt wel overeen met theorie en eerder verrichte numerieke simulaties (zie bijvoorbeeld [Kundu 90], pagina 380).

t	n	A
0.0		
1.0	17	0.016
2.0	12	0.055
3.0	9	0.16
4.0	8	0.32
5.0	7	0.46
6.0	5	0.55
8.0	4	0.74
10.0	3	0.79

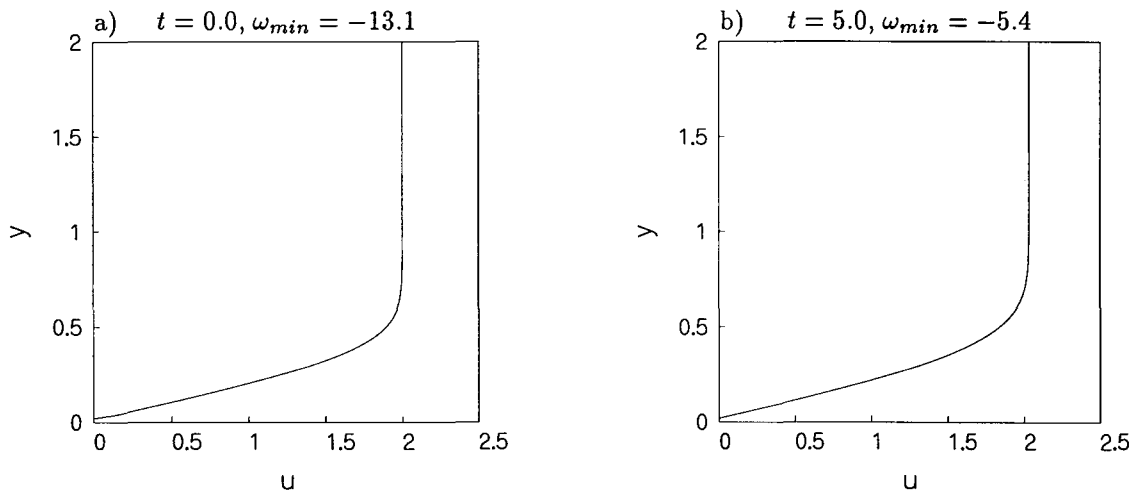
Tabel 4.1: Aantal wervels en amplitude als functie van de tijd.

4.2 Wervelgeneratie en -regeneratie

In de inleiding van dit verslag is reeds gesproken over het cyclische karakter van het ontstaan en uiteenvallen van een hairpinwervel. Na elke burst, waarbij de hairpinwervel uiteenvalt in kleine turbulente structuren, stroomt er vloeistof van hoge snelheid naar de wand en kan er een nieuwe hairpinwervel ontstaan. In deze paragraaf worden besproken simulaties waarin geprobeerd is dit cyclische karakter na te bootsen. In deze paragraaf worden simulaties besproken waarin geprobeerd is wervels aan de wand te doen ontstaan, te laten ontwikkelen en nieuwe wervels aan de wand te laten ontstaan. Daartoe is ten eerste een zeer eenvoudige simulatie uitgevoerd waarin een stroming met het Blasius-snelheidsprofiel parallel langs een wand stroomt.

4.2.1 Het Blasius-snelheidsprofiel

De wand waarlangs de stroming stroomt bevindt zich op $y = 0$ en is ondoordringbaar. De maximale snelheid U_{max} van de stroming bedraagt 2.0 en komt alleen aan de bovenkant van het domein ($y = 2.0$) voor. Verder heeft het Reynoldsgetal een waarde van 667 en worden gewone randvoorwaarden toegepast.



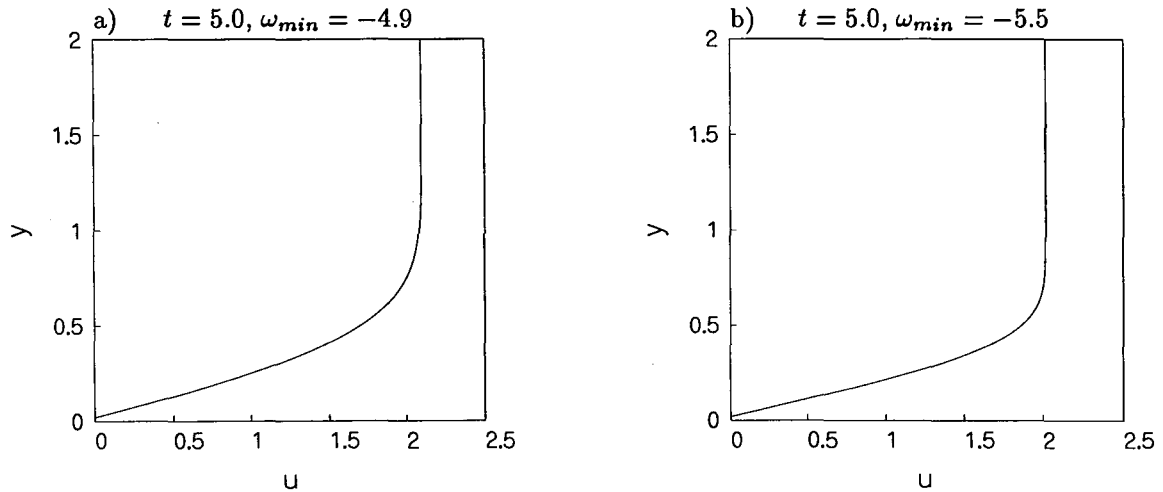
Figuur 4.4: Het snelheidsprofiel op $x = \frac{1}{2}x_{max}$ voor twee verschillende tijdstippen bij $Re = 667$.

In de simulatie zien we geen wervel of vorticietsverstoringen ontstaan, de contourplots van de vorticeit zijn dus niet erg interessant. Daarom bekijken we in dit geval de ontwikkeling van het snelheidsprofiel, we vergelijken daartoe figuren 4.4a en 4.4b. In deze twee figuren zijn de snelheidsprofielen op twee verschillende tijdstippen ($t = 0.0$ en $t = 5.0$) gegeven. Dit is gedaan voor een representatief punt in het domein¹, er is gekozen

¹Overigens is gebleken dat het snelheidsprofiel voor elke x in dit geval hetzelfde is.

voor $x = \frac{1}{2}x_{max} = 6.0$. In het bovenschrijf van figuur 4.4 is tevens de grootste (negatieve) waarde voor de vorticeit ω_{min} gegeven.

We concluderen uit figuur 4.4 dat het snelheidsprofiel niet is veranderd. Dit resultaat is volgens verwachting, omdat het Blasius-snelheidsprofiel de stationaire oplossing voor een laminaire stroming ($Re < 2300$) langs een wand is. Wel is er diffusie, want de maximum negatieve vorticeit - die zich aan de wand bevindt - daalt naarmate t toeneemt.



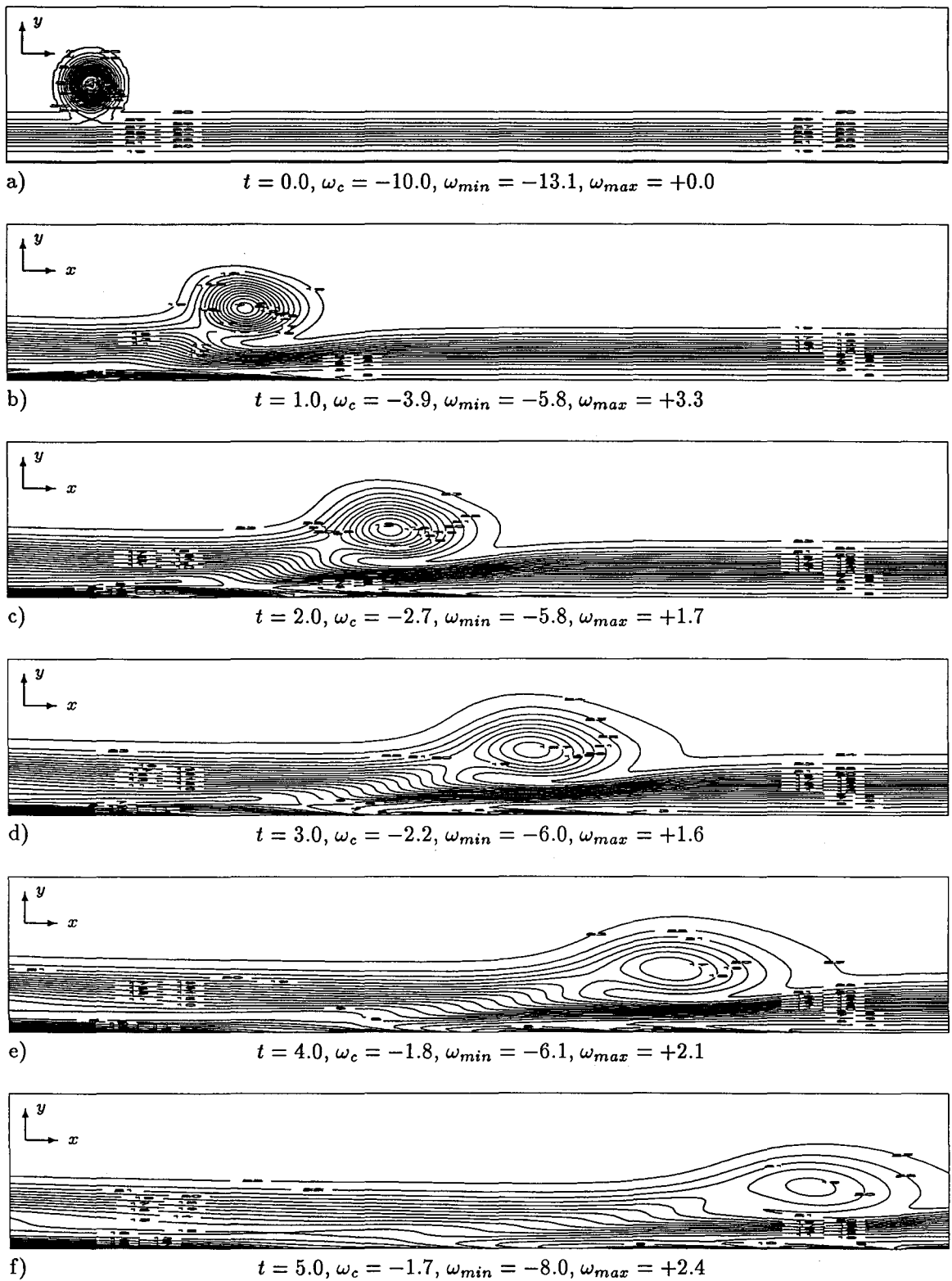
Figuur 4.5: Het snelheidsprofiel op $x = \frac{1}{2}x_{max}$ voor (a) $Re = 150$ en (b) $Re = 1500$.

De simulatie is herhaald voor $Re = 150$ en $Re = 1500$. In figuren 4.5a en 4.5b zien we weer de snelheidsprofielen voor $x = \frac{1}{2}x_{max}$ afgebeeld. Deze verschillen enigszins van de simulatie met $Re = 667$, doordat de vorticeit dicht bij de wand sneller danwel langzamer diffundeert voor lage danwel hoge Reynoldsgetallen. De invloed van het Reynoldsgetal is gering, er ontstaan ook nu geen wervelstructuren.

Geprobeerd is het grenslaaggebied enigszins te verstoren door een Gaussische wervel met beginvorticeit in het centrum van $\omega_{c,0} = -10.0$ en beginstraal $r_0 = 0.5$ aan te brengen even boven de grenslaag, op $y = 0.75$. Uit de ontstane verstoring zou mogelijk een wervel kunnen ontstaan. De resultaten zijn te zien in de contourplots van figuur 4.6. In de onderschriften van de contourplots zijn gegeven de centrumvorticeit van de wervel ω_c , de grootste negatieve vorticeit in het domein ω_{min} en de grootste positieve vorticeit in het domein ω_{max} .

We zien dat er wel verstoringen in de vorticeit aan de wand optreden, maar dat deze zich niet ontwikkelen tot een wervel. De vorticeit in het centrum van de Gaussische wervel daalt continu.

Daarnaast zien we een vreemd verschijnsel zich voordoen in de linkerbenedenhoek van het domein: daar bevindt zich een klein gebied van negatieve vorticeit tegen de wand, die in sterkte *toe neemt* naarmate t groter wordt. Bovendien is de vorticeit van dit gebied



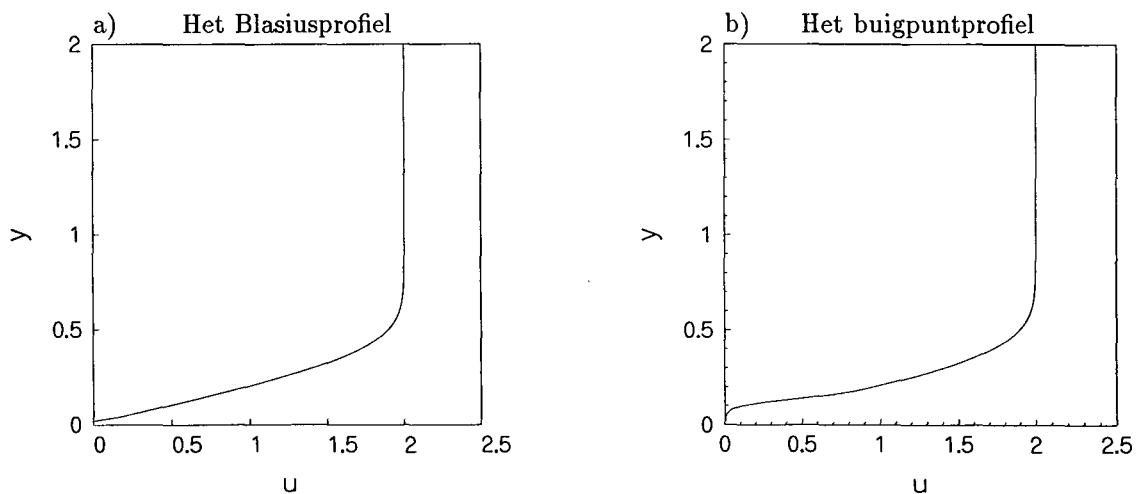
Figuur 4.6: Een wervel in een wandstrooming met Blasius-snelheidsprofiel voor $Re = 667$.

gedurende de hele simulatie in absolute waarde groter dan de vorticeit in het centrum van de wervel. Een verklaring voor het verschijnen van dit gebied is nog niet gevonden, in elk geval is het vreemd dat deze *niet* ontstaat in de voorafgaande simulaties zonder wervel in de beginsituatie.

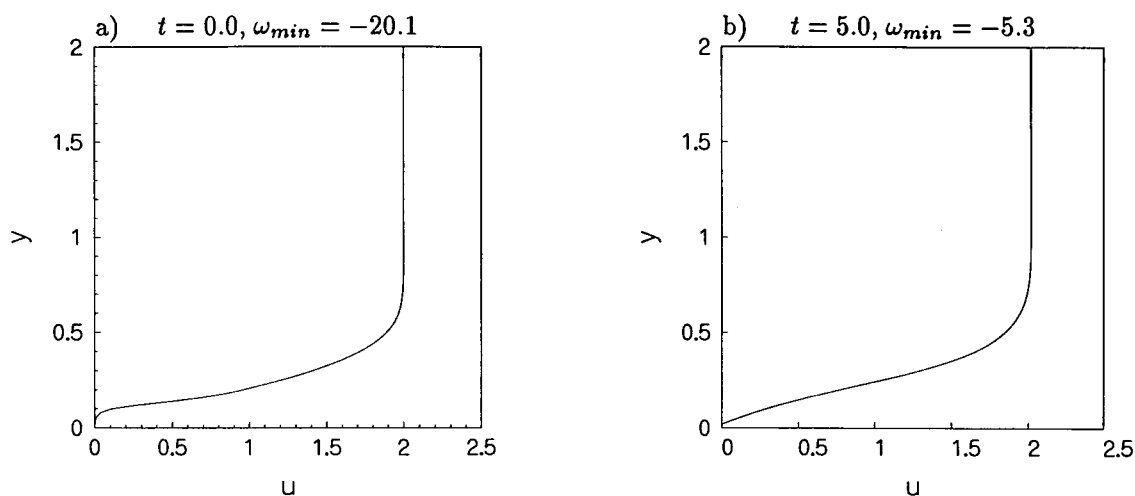
Het numerieke experiment is herhaald voor andere waarden voor enkele belangrijke parameters: het Reynoldsgetal Re , de maximale stroomsnelheid U_{max} en de verticale positie van de wervel, y_0 . In geen van deze simulaties is echter het ontstaan van een wervel in het grenslaaggebied waargenomen. Het is dus blijkbaar onmogelijk met behulp van het 2D programma wervels te laten ontstaan in een stroming langs een wand met het Blasius-snelheidsprofiel.

4.2.2 Het buigpunt-snelheidsprofiel

Aan de hand van bekende theoretische beschouwingen en resultaten van fysische experimenten is gedetailleerder gekeken naar het snelheidsprofiel achter de kop van een hairpinwervel. Dan blijkt dat dit snelheidsprofiel niet gelijk te zijn aan het Blasius-snelheidsprofiel, maar enigszins vervormd is door de snelheid die de kop en de benen van de hairpinwervel induceren in het gebied achter de hairpinwervel (zie bijvoorbeeld [Hinze 59]). Dit zou van essentiële invloed kunnen zijn op het wel of niet ontstaan van kleine wervels in de buurt van de wand. Daarom zijn simulaties gedaan met een aangepast snelheidsprofiel, afgebeeld in figuur 4.7b. Kenmerkend voor dit aangepaste snelheidsprofiel is de aanwezigheid van een buigpunt voor $y \simeq 0.15$, het aangepaste snelheidsprofiel wordt in het vervolg dan ook aangeduid met 'buigpunt-snelheidsprofiel'. Het gevolg van dit buigpunt is dat in vergelijking tot het Blasius-snelheidsprofiel (figuur 4.7a), de u -snelheid dicht tegen de wand ($0.0 < y < 0.1$) veel lager is. Voor grotere y nadert het buigpunt-snelheidsprofiel weer naar het Blasius-snelheidsprofiel.



Figuur 4.7: Twee verschillende gebruikte snelheidsprofielen.

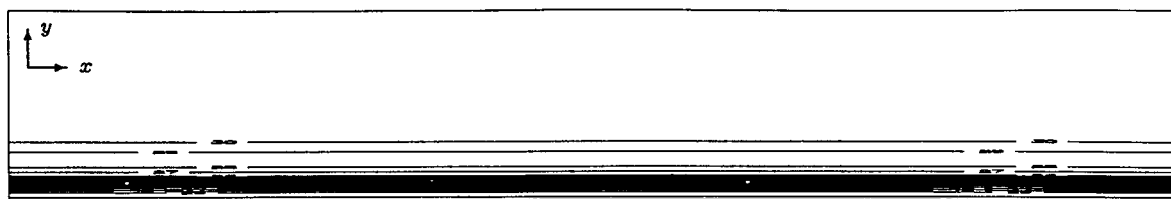


Figuur 4.8: Het snelheidsprofiel op $x = \frac{1}{2}x_{max}$ voor $Re = 667$.

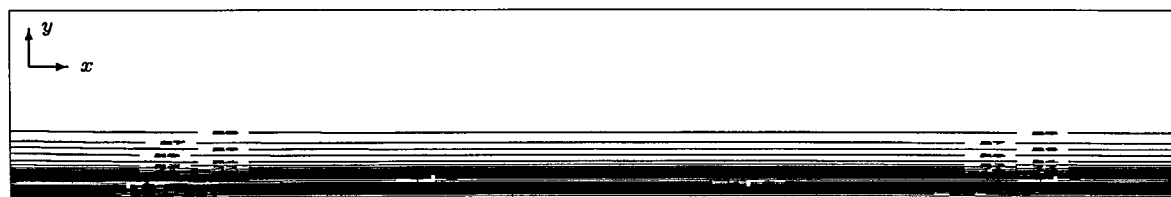
De simulatie is uitgevoerd met $Re = 667$ en $U_{max} = 2.0$. Er is nu *geen* Gaussische wervel aanwezig in de beginsituatie. In de simulatie ontstaan geen wervels of grote verstoringen in de vorticititeit. Het buigpunt-snelheidsprofiel op $t = 0.0$ diffundeert tot het sterk lijkt op het Blasius-snelheidsprofiel. In figuur 4.8 zien we het snelheidsprofiel van de simulatie met buigpunt-snelheidsprofiel voor $t = 0.0$ en $t = 5.0$. Wanneer we figuur 4.8b vergelijken met 4.7a zien we dat het snelheidsprofiel inderdaad het Blasius-snelheidsprofiel is geworden.

De simulatie is herhaald voor een grotere hoofdstroomsnelheid $U_{max} = 4.0$. De resultaten zijn gegeven in de contourplots van figuur 4.9. De grootte ω_{min} geeft weer de grootste negatieve vorticititeit in het gehele domein weer.

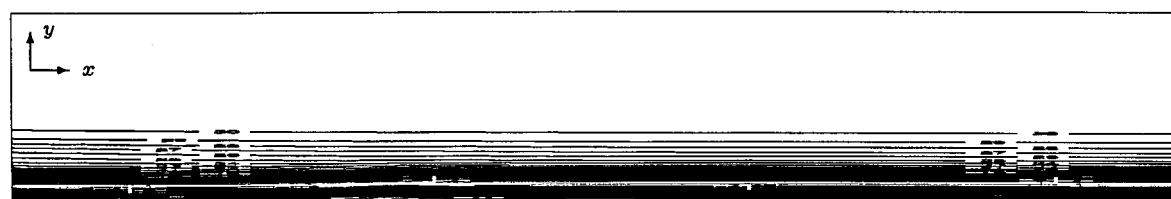
We zien dat er nu wel wervels in het grenslaaggebied ontstaan. Op $t = 3.0$ (figuur 4.9d) is dit al te zien. De vraag is nu waar de wervels precies vandaan komen. In § 4.1 is reeds gevonden dat in gebied met een grote gradiënt in het profiel van de longitudinale snelheid u , oftewel in een schuiflaag, er gemakkelijk wervels kunnen ontstaan. In feite hebben we in de simulatie van figuur 4.9 te maken met ook zo'n schuiflaag. Rond het buigpunt - in figuur 4.7b voor $y = 0.25$ - is de gradiënt van u in de y -richting zeer groot, het profiel loopt dan bijna horizontaal. We zien dat de wervels ontstaan op een afstand tot de wand van ongeveer $y = 0.25$, dus op dezelfde hoogte als de schuiflaag. Men zou dus kunnen concluderen dat de wervels simpelweg uit de schuiflaag zijn ontstaan en niet uit de wandvorticititeit, zoals bij turbulente grenslagen het geval is. Het is echter goed mogelijk dat ook in turbulente grenslagen de schuiflaag een rol speelt in de productie van vorticititeit.



a) $t = 0.0, \omega_{min} = -40.3$



b) $t = 1.0, \omega_{min} = -18.9$



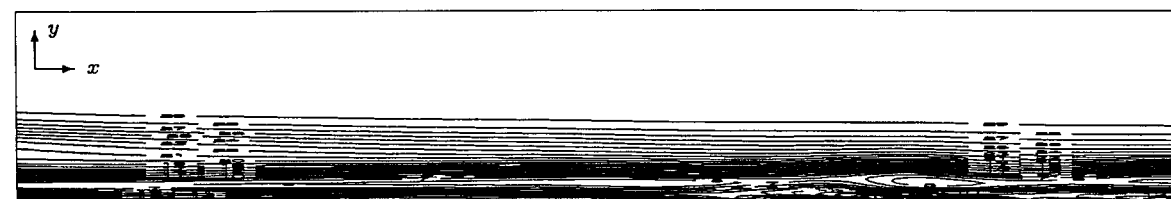
c) $t = 2.0, \omega_{min} = -14.9$



d) $t = 3.0, \omega_{min} = -12.9$



e) $t = 4.0, \omega_{min} = -11.7$



f) $t = 5.0, \omega_{min} = -12.4$

Figuur 4.9: Een wandstroming met het buigpunt-snelheidsprofiel voor $Re = 667$ en $U_{max} = 4.0$.

Hoofdstuk 5

Quasi-3D numerieke simulaties

In dit hoofdstuk worden de resultaten besproken van numerieke simulaties die uitgevoerd zijn met behulp van het quasi-driedimensionale programma. Evenals de in het voorgaande hoofdstuk besproken resultaten van het 2D programma, is het Q3D programma ontworpen om simulaties uit te kunnen voeren die binnen beperkte tijd uitgevoerd zijn en toch bijdragen aan het begrip van hairpinwervels. Waar het 2D programma zich uitstekend leende voor numerieke simulaties van de *kop* van een hairpinwervel, is het Q3D programma geschikt voor het simuleren van de *benen* van de hairpinwervel. In deze Q3D simulaties is getracht enkele bekende verschijnselen en/of parameters uit de stromingsleer te toetsen op aanwezigheid bij (en invloed op) het ontstaan en evolueren van hairpinbenen. De simulaties die in dit hoofdstuk worden besproken, betreffen zoveel mogelijk vereenvoudigde stromingssituaties om het netto effect van één van die verschijnselen en/of parameters te kunnen bekijken. Daartoe wordt er in de eerste paragraaf gekeken naar de ontwikkeling van vorticeiteit van wervels en van vorticeiteit aan de wand. Ook de verplaatsing van wervels en de veranderingen die optreden in het longitudinale snelheidsprofiel worden bestudeerd, deze twee aspecten worden achtereenvolgens in § 5.2 en § 5.3 behandeld. Daarna worden andere Q3D simulaties besproken, waarin de groei van wervels wordt onderzocht. Tenslotte worden enkele simulaties besproken, die gedaan zijn met waarden voor parameters die bepaald zijn via windtunnelexperimenten.

In hoofdstuk 4 werden de resultaten van 2D simulaties besproken aan de hand van vorticeiteitsplots. De resultaten van de Q3D simulaties worden op dezelfde manier gepresenteerd, met één belangrijk verschil. De keuze van het coördinatenstelsel zoals weergegeven in figuur 2.1 heeft namelijk tot gevolg dat in de vorticeiteitsweergaves van Q3D simulaties de negatieve vorticeiteitsvector het vlak *uit* gericht is (dus naar de lezer *toe*, de rotatie van een negatieve wervel is tegen de klok in gericht). Dit is in tegenstelling tot de gebruikelijke tweedimensionale weergaves van vorticeiteit die weergegeven zijn in hoofdstuk 4 en die men in de literatuur meestal aantreft. Overigens zullen waar zinvol de vorticeiteitsplots aangevuld worden met plots van de stroomfunctie en snelheid. Deze plots worden op een identieke manier gepresenteerd.

Ook voor de contourfiguren van Q3D simulaties geldt, dat altijd het gehele domein wordt

afgebeeld. De linkerbenenhoek van de contourplots komt dus weer overeen met het punt $(0.0, 0.0)$; de rechterbovenhoek nu met (z_{max}, y_{max}) . Voor Q3D simulaties gelden de vaste waarden $z_{max} = 3.0$ en $y_{max} = 2.0$.

5.1 De ontwikkeling van vorticititeit

Met behulp van een eenvoudige theoretische benadering kan men voorspellen dat de aanwezigheid van een wand een grote invloed heeft op de stroming in de buurt van die wand. Er wordt namelijk een strenge randvoorwaarde opgelegd: de snelheid van de vloeistof loodrecht op de wand is gelijk aan nul (de wand is niet poreus) en ook de snelheden parallel aan de wand moeten gelijk zijn aan nul. De wand is dan niet-wrijvingsloos verondersteld; men heeft het in de literatuur dan vaak over de 'no-slip' conditie. Wanneer er zich in de buurt van de wand een wervel bevindt, zal de stroming aanzienlijk beïnvloed worden: enerzijds probeert de wervel de vloeistof in het gehele domein te verplaatsen, anderzijds legt de wand randvoorwaarden op die de vloeistof tegen de wand stil doet staan.

Behalve de aanwezigheid van een wand blijkt er nog een aantal andere parameters een belangrijke invloed te hebben op de ontwikkeling van wervels. Om het netto effect van deze parameters te kunnen bekijken wordt in de eerstvolgende subparagraaf als referentie een eenvoudige stromingssituatie van een wervel in een hoofdstroming langs een wand beschouwd. In de subparagraaf daarna worden stromingssituaties bekeken waarin telkens één of meerdere parameters van de algemene stromingssituatie verschilt.

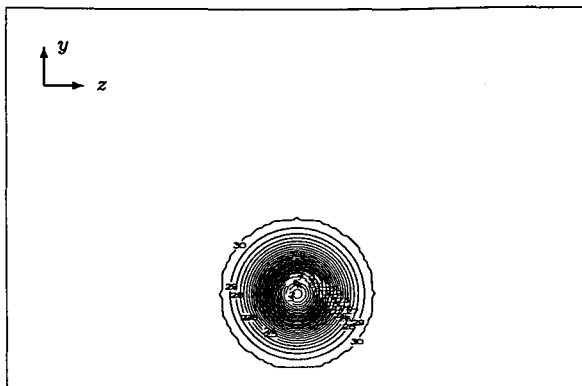
5.1.1 De algemene stromingssituatie

In de algemene situatie van onze berekeningen wordt een Gaussische wervel met straal r_0 en negatieve vorticititeit in het centrum $\omega_{c,0}$ geplaatst in de buurt van een wand, die zich aan de onderkant van het domein bevindt. De resterende drie randen van het domein worden als 'vrij' beschouwd: vloeistof kan ongehinderd in- en uitstromen; er zijn gewone randvoorwaarden toegepast (zie § 2.5.1). Het stromingsdomein heeft de gebruikelijke horizontale en verticale afmeting z_{max} en y_{max} zoals gegeven in (3.2) voor Q3D simulaties. De Gaussische wervel is geplaatst op $(z, y) = (1.5, 0.5)$, dus in het midden van het z -bereik en op een kwart van de maximale verticale afstand tot de wand y_{max} (zie figuur 5.1a). De wervel heeft een beginsterkte $\omega_{c,0}$ van -10.0 en een straal r_0 van 0.40. Voor Re is een waarde van 1500 genomen. Het profiel van de hoofdstroom u heeft ter plaatse $x = 0.0$ de vorm van een lineaire shear:

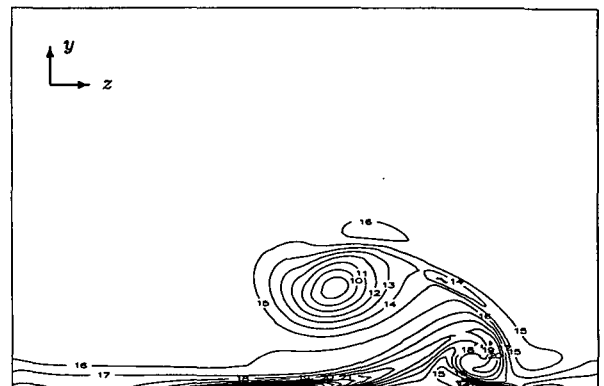
$$u(y) = U_{max} \frac{y}{y_{max}}, \quad (5.1)$$

waarbij U_{max} gelijk is aan 2.0.

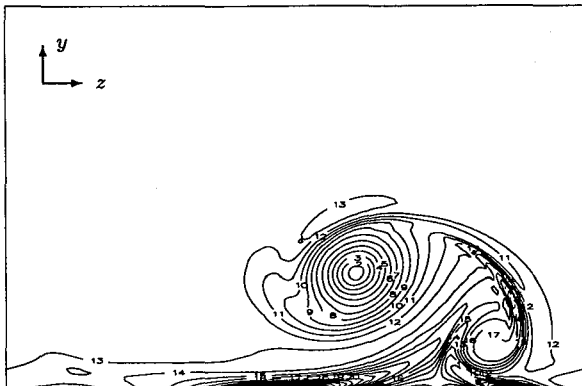
Onder invloed van de hoofdstroom in de x -richting zal de vorticititeitsverdeling op $x = 0.0$ zich gaan ontwikkelen; de wervelbuis zal verderop in de stroming een andere doorsnede vertonen. Ook het snelheidsprofiel zal (onder invloed van de wervel en de wand) in de loop



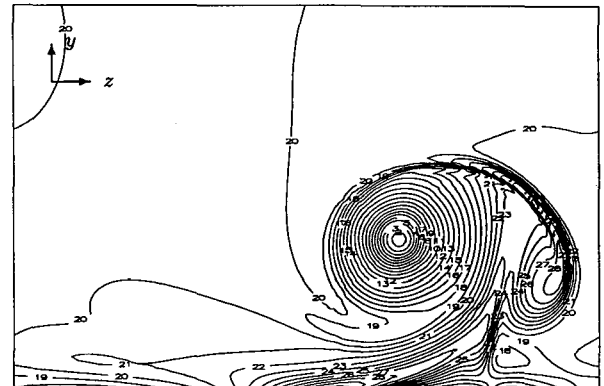
a) $x = 0.0, \omega_{c,p} = -10.0$



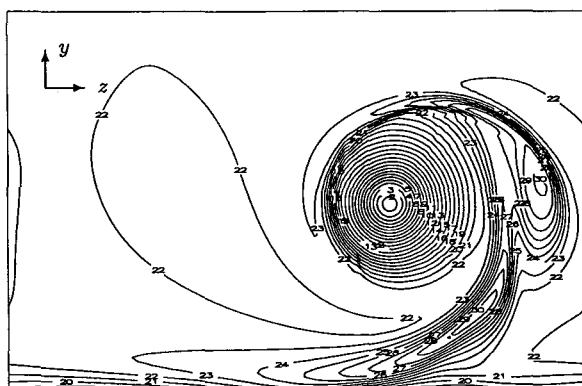
b) $x = 0.5, \omega_{c,p} = -8.7, \omega_{c,s} = +5.4$



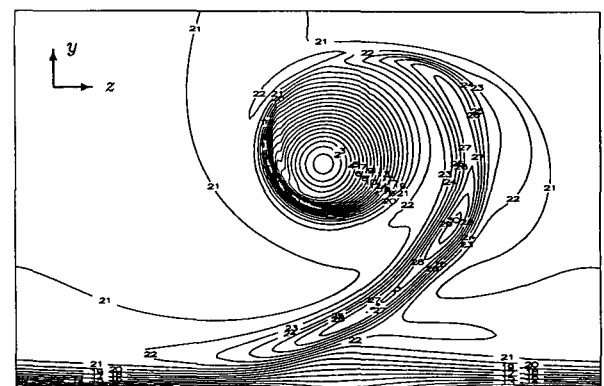
c) $x = 1.0, \omega_{c,p} = -7.9, \omega_{c,s} = +3.3$



d) $x = 2.5, \omega_{c,p} = -6.4, \omega_{c,s} = +2.8$



e) $x = 5.0, \omega_{c,p} = -4.9, \omega_{c,s} = +1.9$



f) $x = 10.0, \omega_{c,p} = -3.5, \omega_{c,s} = +1.7$

Figuur 5.1: De algemene stromingssituatie voor één wervel bij $Re = 1500$.

van de hoofdstroomrichting x veranderen. Dit wordt in § 5.3 behandeld.

De resultaten van de hierboven geschetste simulatie zijn voor enkele plaatsen in de stroming weergegeven in figuur 5.1. In het onderschrift van elke plot zijn de waarden voor x , $\omega_{c,p}$ en $\omega_{c,s}$ gegeven. De twee laatstgenoemde grootheden stellen de centrumvortciteit van respectievelijk de primaire en secundaire wervel voor, waarbij de primaire wervel de originele wervel is en de secundaire wervel een in de loop van de simulatie ontstane wervel. In de serie plots van figuur 5.1 zien we onder andere dat de primaire wervel niet op dezelfde plaats blijft liggen¹. Daarnaast blijkt de vortciteit van de originele Gaussische wervel op $x = 0.0$ zich in de loop van x te verspreiden (diffusie) en blijkt de vortciteit in het centrum van de wervel af te nemen. Op $x = 10.0$ is de vortciteit in het centrum van de primaire wervel gedaald tot $\omega_{c,p} = -3.5$.

In figuur 5.1b is tevens te zien dat er recht onder de primaire wervel vortciteit aan de wand is gegenereerd. Deze wandvortciteit is van tegengesteld teken en overtreft de primaire wervel in grootte: $\omega_{wand,p} = +17.0$, waarbij $\omega_{wand,p}$ als de maximale wandvortciteit ten gevolge van de primaire wervel wordt genoteerd. Uit een vortciteitsplot van de stromingssituatie na één iteratiestap² ($x = 0.001$) blijkt dat deze wandvortciteit in het begin van de simulatie een zeer hoge waarde heeft (orde 100). Het feit dat deze wandvortciteit niet voor $x = 0.0$ (figuur 5.1a) te zien is, ligt in het feit dat de stromingssituatie voor $x = 0.0$ fysisch niet realistisch is: deze situatie is een in het programma opgegeven randvoorwaarde voor $x = 0.0$. Wanneer het programma de stromingssituatie na één iteratiestap heeft berekend, kunnen we spreken van een fysisch realistische situatie.

Een deel van de wandvortciteit op $x = 0.001$ maakt zich los van de wand en evolueert tot een wervel van tegengesteld teken, de zogenaamde secundaire wervel (vortciteit $\omega_{c,s}$). Dit is te zien in figuur 5.1b, voor $x = 0.5$. Het overgebleven deel van de wandvortciteit op $x = 0.001$ blijft aan de wand gekleefd en neemt in sterkte af tot de al genoemde wandvortciteit van $\omega_{wand,p} = +17.0$ op $x = 0.5$.

De ontstane secundaire wervel genereert ook wandvortciteit, eveneens van tegengesteld teken (dus nu weer negatief). Voor $x = 0.5$ is deze maximale wandvortciteit $\omega_{wand,s}$ ongeveer even groot als de wandvortciteit ten gevolge van de primaire wervel $\omega_{wand,p}$, ondanks het feit dat de secundaire wervel veel zwakker is dan de primaire wervel. In § 5.1.2.2 zal blijken dat dit veroorzaakt wordt door het feit dat de secundaire wervel zich dicht bij de wand bevindt.

De wandvortciteit daalt in het verdere verloop van de simulatie zeer snel in sterkte. Met name wanneer de wervels zich van de wand af gaan bewegen (vanaf $x = 5.0$) slinkt de vortciteit aan de wand snel. Ook hier blijkt dus weer de invloed van de afstand tussen wand en wervel op de grootte van de wandvortciteit.

In de vortciteitsweergaves van de algemene stromingssituatie zijn al met al vier gebieden van vortciteit te onderscheiden (neem als voorbeeld $x = 1.0$, figuur 5.1c):

¹De verplaatsing van de wervels komt uitgebreid aan de orde in § 5.2.

²Deze is overigens niet in figuur 5.1 afgebeeld.

- de primaire wervel ($\omega_{c,p} \simeq -7.9$),
- de secundaire wervel ($\omega_{c,s} \simeq +3.3$),
- de wandvorticeit ten gevolge van de primaire wervel ($\omega_{wand,p} \simeq +11.9$) en
- de wandvorticeit ten gevolge van de secundaire wervel ($\omega_{wand,s} \simeq -7.0$).

De daling van de vorticeit in het centrum van de primaire wervel, het ontstaan van wandvorticeit en het ontstaan van een secundaire wervel is eerder ook berekend door Stoffels, in [Stoffels 94]. Hij deed simulaties met hetzelfde programma, maar voor een Reynoldsgetal van 600. Daarnaast gebruikte hij iets andere roosterparameters: $nz = 201$, $\Delta z = 0.015$, $\Delta x = 3.0 \cdot 10^{-4}$ en $\epsilon = 1.0 \cdot 10^{-4}$. De resterende parameters zijn gelijk. De resultaten komen kwalitatief goed overeen.

Het beschreven mechanisme van creatie van wandvorticeit en secundaire wervel is eenvoudig te verklaren: door de wervel wordt de vloeistof naar de wand bewogen en in positieve z -richting (van links naar rechts) onder de wervel door geperst. Gegeven is dat de stroming viskeus is en dat de snelheid van de vloeistof aan de wand gelijk is aan nul ('no-slip'). Ten gevolge van het persen van vloeistof tussen de wervel en de wand door ontstaat in een relatief klein stromingsgebiedje een grote gradiënt in de horizontale snelheid w , dus parallel aan de wand. Doordat de snelheid van de vloeistof aan de wand nul moet zijn, 'krult' de vloeistof met hoge snelheid tussen de wervel en de wand op tot vorticeit. Deze fysische verklaring wordt ondersteund door de redenering dat de absolute waarde van $\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$ moet toenemen, omdat de gradiënt $\frac{\partial w}{\partial y}$ plaatselijk plotseling erg groot is. De secundaire wervel genereert wandvorticeit volgens hetzelfde principe. De secundaire wervel stuwt eveneens vloeistof langs de wand, maar dan in tegengestelde richting. In de buurt van de secundaire wervel ontstaat dus ook hoge vorticeit aan de wand, logischerwijs van tegengesteld teken.

5.1.2 De invloed van diverse parameters

De ontwikkeling van de vorticeitsverdeling van de simulatie weergegeven in figuur 5.1 is zoals reeds vermeld zeer sterk afhankelijk gebleken van een aantal parameters. Met name de grootte van de vorticeit van de secundaire wervel en de vorticeit aan de wand blijken zeer sterk onderhevig aan:

- de waarde van het Reynoldsgetal,
- de locatie en sterkte van de primaire wervel,
- het opgelegde snelheidsprofiel $u = f(y)$ en
- de aanwezigheid van een eventuele tweede wervel op $x = 0$ en daarmee samenhangend de plaats en sterkte van deze tweede wervel.

5.1.2.1 Het Reynoldsgetal

De invloed van het Reynoldsgetal is af te leiden uit figuur 5.2. Deze zes plots zijn resultaten van identieke stromingssituaties, alleen de waarden voor het Reynoldsgetal zijn telkens verschillend. De simulatie uitgevoerd met $Re = 1500$ is al eerder in dit hoofdstuk besproken, dit is namelijk de algemene stromingssituatie van § 5.1.1, figuur 5.1. Figuur 5.2d is derhalve dezelfde als figuur 5.1c.

Zoals bekend is, is het Reynoldsgetal direct gerelateerd aan de viscositeit van de vloeistof en beïnvloedt Re de viskeuze diffusie van vorticeiteit. Men verwacht dus dat de vorticeitsverdeling van zowel de primaire als de secundaire wervel verandert bij variatie van het Reynoldsgetal. Ook de primaire en secundaire wandvorticeiteit zal veranderen met het Reynoldsgetal, omdat de wandvorticeiteit zich als functie van het Reynoldsgetal sneller of minder snel van de wand af verspreidt. Een overzicht van de grootte van de vorticeiteit van de 4 in § 5.1.1 genoemde gebieden voor Reynoldsgetalen variërend van 50 tot 15000 wordt gegeven in tabel 5.1. In de laatste kolom van deze tabel is tevens een theoretische voorspelling voor $\omega_{c,p}$ gegeven, namelijk $\omega_{c,th}$. Deze is berekend door gebruik te maken van het behoud van circulatie, dus $\Gamma_0 = \Gamma(t)$. Voor een Gaussische wervel geldt dat $\Gamma \sim \omega_c r^2$, waarbij ω_c de vorticeiteit in het centrum van de Gaussische wervel en r de straal van de wervel voorstellen. Wanneer we deze twee vergelijkingen combineren vinden we

$$\omega_{c,0} r_0^2 = \omega_c(t) r^2(t), \quad (5.2)$$

waarin $\omega_{c,0}$ en r_0 vanzelfsprekend de centrumvorticeiteit en straal op $t = 0$ voorstellen. In [Zondag 97], pagina 32 wordt gesteld dat de vergroting van de straal van een Gaussische wervel door diffusie als functie van de tijd gegeven wordt door

$$r^2(t) = 4\nu t + r_0^2, \quad (5.3)$$

dus er geldt

$$\omega_{c,0} r_0^2 = \omega_c(t) (4\nu t + r_0^2). \quad (5.4)$$

Wanneer we deze vergelijking dimensieloos maken ($r_0 = Lr'_0$ en $t = \frac{L}{U}t'$) en $\nu = \frac{UL}{Re}$ invullen, krijgen we voor de centrumvorticeiteit van een Gaussische wervel als functie van de dimensieloze tijd t'

$$\omega_c(t') = \omega_{c,0} \frac{r_0'^2}{\frac{4t'}{Re} + r_0'^2}. \quad (5.5)$$

We zijn geïnteresseerd in de ontwikkeling van de centrumvorticeiteit als functie van de dimensieloze plaats x en stellen dus dat $t' = Cx$, waarbij C een omrekenconstante is met de dimensie van een reciproke snelheid (deze snelheid heeft echter niets met de karakteristieke snelheid van de stroming U te maken). We krijgen dus

$$\omega_c(x) = \omega_{c,0} \frac{r_0'^2}{\frac{4Cx}{Re} + r_0'^2}, \quad (5.6)$$

waarbij het accent bij r'_0 voor het gemak is weggelaten. De constante $4C$ wordt bepaald met behulp van de waarde voor $\omega_c(x = 1.0)$ voor $Re = 50$. Dan vinden we dat $4C = 34.1$. De waarden voor ω_c bij hogere Reynoldsgetallen zijn hiermee berekend en te vinden in tabel 5.1 (genaamd $\omega_{c,th}$).

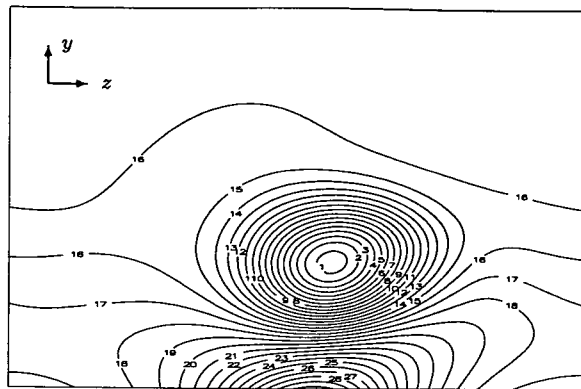
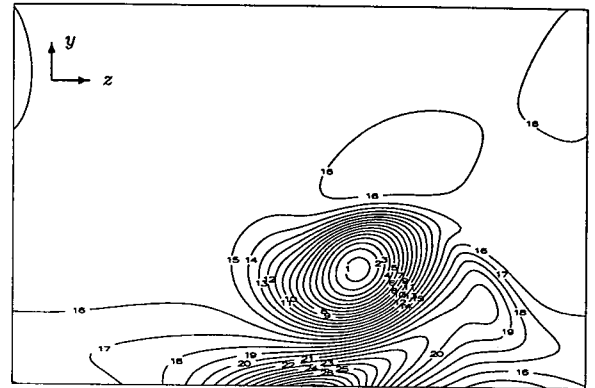
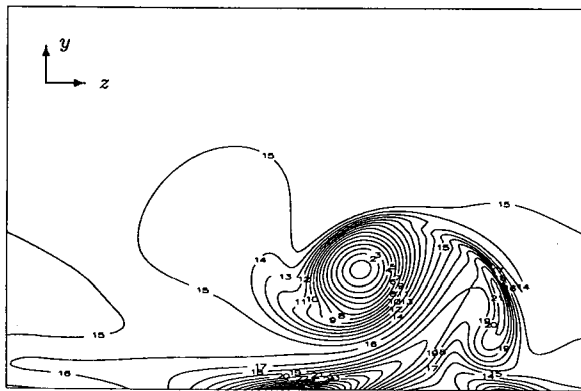
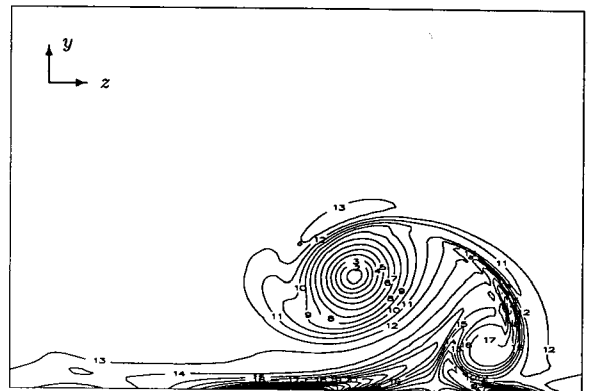
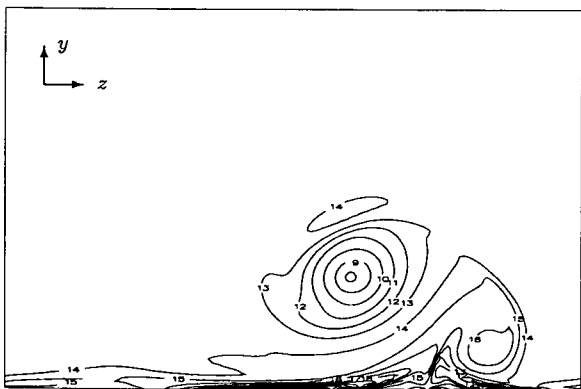
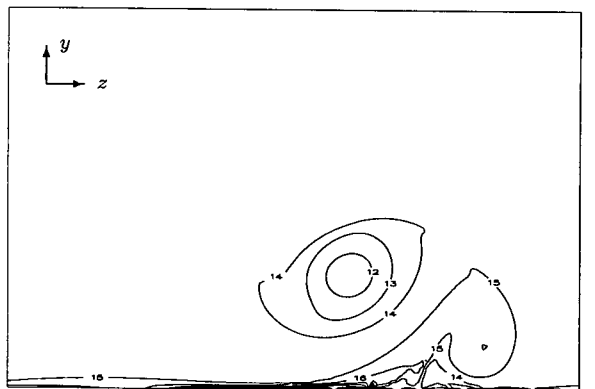
Re	$\omega_{c,p}$	$\omega_{c,s}$	$\omega_{wand,p}$	$\omega_{wand,s}$	$\omega_{c,th}$
50	-1.9		+1.7		-1.9
150	-4.1	+1.2	+3.9	-0.5	-4.1
500	-6.7	+3.0	+7.1	-2.6	-7.0
1500	-7.9	+3.3	+11.9	-7.4	-8.8
5000	-7.3	+3.7	+20.6	-16.3	-9.6
15000	-7.2	+3.4	+34.8	-30.2	-9.9

Tabel 5.1: Wervel- en wandvorticeiteit bij verschillende Reynoldsgetallen voor $x = 1.0$.

Wanneer we op de grootte van de wandvorticeiteit (zowel primair ($\omega_{wand,p}$) als secundair ($\omega_{wand,s}$)) letten, zien we in de vorticeiteitsplots duidelijk diffusie optreden. Dit kan men concluderen uit het feit dat bij hogere Reynoldsgetallen de wandvorticeiteit dichter en langer tegen de wand gekleefd blijft. Bovendien is de absolute waarde van de wandvorticeiteit het hoogst wanneer het Reynoldsgetal het hoogst is. Dit geldt zowel voor de primaire als voor de secundaire wandvorticeiteit, zoals uit tabel 5.1 blijkt. De maximale waarde voor de primaire wandvorticeiteit is bij $Re = 50$ ongeveer 20 maal zo laag als bij $Re = 15000$. Voor de secundaire wandvorticeiteit is geen vergelijking mogelijk, omdat bij $Re = 50$ helemaal geen secundaire wandvorticeiteit ontstaat (er ontstaat zelfs geen secundaire wervel, dit wordt verderop behandeld).

Ook als we kijken naar het verloop van de vorticeiteit van de wervel(s) als functie van het Reynoldsgetal kunnen we conclusies trekken over de invloed van Re en viskeuze diffusie. Men zou, net als in het geval van wandvorticeiteit, verwachten dat de vorticeiteit in het centrum van de primaire en secundaire wervel daalt met toenemende diffusie, dus met afnemend Reynoldsgetal. Dit gaat voor beide wervels inderdaad op, ongeveer tot en met $Re = 1500$. De waarden van $\omega_{c,p}$ en $\omega_{c,s}$ zijn voor $Re = 1500$ beduidend hoger dan voor $Re = 50$. Dit is in overeenstemming met de resultaten besproken in [Stoffels 94], op pagina 40. Deze simulaties werden uitgevoerd met hetzelfde programma, voor $Re = 600$ en $Re = 1500$. De wandvorticeiteit en de vorticeiteit van de wervels bleek hoger voor $Re = 1500$. In onze simulaties blijkt echter ook nog dat voor Reynoldsgetallen hoger dan 1500 de centrumvorticeiteit van de primaire en secundaire wervel ongeveer gelijk blijft: $\omega_{c,p} = -7.5 \pm 0.5$ en $\omega_{c,s} = +3.5 \pm 0.5$. De diffusie is dus ongeveer constant wanneer voor $Re > 1500$ het Reynoldsgetal verder wordt verhoogd. Andere (niet afgebeelde) simulaties voor nog veel hogere Reynoldsgetallen bevestigen dit.

Deze opmerkelijke waarneming wordt verder bevestigd door goed naar figuren 5.2d, e en f te kijken. Uit deze plots blijkt dat het algemene beeld van de stroming nauwelijks verschil-

a) $Re = 50, \omega_{c,p} = -1.9$ b) $Re = 150, \omega_{c,p} = -4.1, \omega_{c,s} = +1.2$ c) $Re = 500, \omega_{c,p} = -6.7, \omega_{c,s} = +3.0$ d) $Re = 1500, \omega_{c,p} = -7.9, \omega_{c,s} = +3.3$ e) $Re = 5000, \omega_{c,p} = -7.3, \omega_{c,s} = +3.7$ f) $Re = 15000, \omega_{c,p} = -7.2, \omega_{c,s} = +3.4$

Figuur 5.2: De algemene stromingssituatie bij verschillende Reynoldsgetallen voor $x = 1.0$.

lend is³. In alle drie de plots zien we een secundaire wervel ontstaan, een effect dat alleen door diffusie veroorzaakt kan worden. Bovendien daalt de vorticeit in het centrum van de primaire en secundaire wervel monotoon in het verdere verloop van de simulatie (hier niet afgebeeld). Ook dit is een effect dat een diffuus karakter heeft. Er moeten dus duidelijk vraagtekens gezet worden bij het simuleren van stromingen met ons Q3D programma wanneer het Reynoldsgetal groter wordt dan 1500. Dit wordt nog duidelijker wanneer we naar de voorspelde waarde voor de vorticeit van de primaire wervel ω_p^v kijken. Deze komt voor $Re = 150$, $Re = 500$ en $Re = 1500$ redelijk goed overeen met de waarde voor $\omega_{c,p}$. Voor $Re = 5000$ en $Re = 15000$ echter, zien we ω_p^v toenemen met het Reynoldsgetal, waar $\omega_{c,p}$ ongeveer constant blijft. De waarden voor ω_p^v in tabel 5.1 zijn weliswaar benaderingen⁴, maar dit kan het grote verschil tussen $\omega_{c,p}$ en ω_p^v voor $Re > 1500$ niet verklaren. Er wordt dus inderdaad een (numerieke) fout gemaakt bij hoge Reynoldsgetalen.

De verklaring voor de onverwacht grote diffusie bij hoge Reynoldsgetalen moet gezocht worden in de aard van de diffusie. De diffusie die we voor Reynoldsgetalen hoger dan 1500 nog steeds waarnemen is geen viskeuze diffusie, maar numerieke diffusie. Er is een aantal Q3D simulaties uitgevoerd om meer inzicht te krijgen in de invloed van numerieke diffusie, deze simulaties worden besproken in bijlage B op pagina 103. In deze bijlage zal geconcludeerd worden dat bij het simuleren van stromingen voor $Re \leq 1500$ de invloed van numerieke diffusie gering is.

5.1.2.2 Initiële locatie en circulatie van de primaire wervel

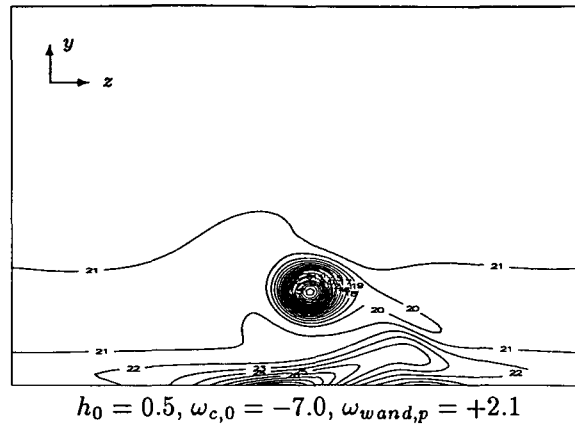
In deze subparagraaf is ten eerste een simulatie uitgevoerd waarin een kleine wervel ($r_0 = 0.3$) zich in een stroming langs een wand bevindt met lineair snelheidsprofiel met $U_{max} = 2.0$. De initiële centrumvorticeit van de wervel bedraagt $\omega_{c,0} = -7.0$ en het centrum van de wervel bevindt zich op $x = 0.0$ op een afstand $h_0 = 0.5$ van de wand. Het Reynoldsgetal bedraagt 1500. Het resultaat van deze simulatie is voor $x = 1.0$ gegeven in figuur 5.3. Teneinde de invloed van de initiële afstand van de primaire wervel tot de wand en de initiële sterkte van de primaire wervel te bepalen, voeren we vervolgens nog twee simulaties uit, waarin óf alleen de beginhoogte h_0 van de wervel, óf alleen de beginvorticeit $\omega_{c,0}$ veranderd is ten opzichte van de eerste simulatie.

Zodoende is in figuur 5.4a het resultaat voor $x = 1.0$ gegeven van een simulatie waarin de beginhoogte van de wervel verkleind is tot $h_0 = 0.3$. De andere parameters blijven onveranderd ten opzichte van de simulatie van figuur 5.3.

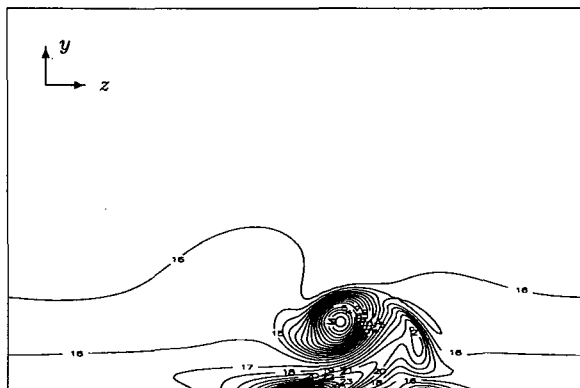
We zien dat de wandvorticeit ten gevolge van de primaire wervel bij kleinere afstand tot de wand groter is, namelijk $\omega_{wand,p} = +3.3$ in plaats van $\omega_{wand,p} = +2.1$. Dit is aannemelijk, omdat een wervel dicht bij de wand een grotere gradiënt in horizontale snelheid veroorzaakt. Hoe groter deze gradiënt, hoe groter de vorticeit dicht bij de wand.

³De figuren bij hogere Reynoldsgetalen zijn minder inzichtelijk door het feit dat het verschil tussen minimale en maximale vorticeit zeer groot wordt. Het aantal contouren in de figuren is constant (30), dus er worden minder contouren gebruikt om de wervel te tekenen.

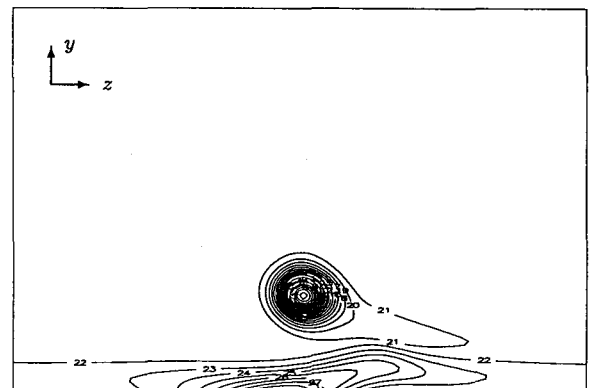
⁴De wervel blijft niet exact Gaussisch en er is invloed van de wand(vorticeit).



Figuur 5.3: Een kleine wervel in een stroming met lineair snelheidsprofiel voor $x = 1.0$.



a) $h_0 = 0.3, \omega_{c,0} = -7.0, \omega_{wand,p} = +3.3$



b) $h_0 = 0.5, \omega_{c,0} = -4.0, \omega_{wand,p} = +1.1$

Figuur 5.4: Een kleine wervel met andere (a) beginhoogte h_0 en (b) beginvorticeiteit $\omega_{c,0}$, voor $x = 1.0$.

De invloed van de initiële sterkte (circulatie) van de primaire wervel halen we uit figuren 5.3 en 5.4b. In figuur 5.4b is weergegeven het resultaat voor $x = 1.0$ van een simulatie waarbij de initiële centrumvorticeiteit ten opzichte van de simulatie van figuur 5.3 verkleind is tot $\omega_{c,0} = -4.0$. Het resultaat stemt overeen met de verwachting: een sterkere wervel genereert bij gelijke afstand tot de wand een hogere vorticeiteit aan de wand. De wandvorticeiteit bedraagt in geval van de sterke wervel (beginvorticeiteit $\omega_{c,0} = -7.0$) $\omega_{wand,p} = +2.1$, waar deze voor de zwakke wervel ($\omega_{c,0} = -4.0$) slechts $\omega_{wand,p} = +1.1$ bedraagt. In de situaties van figuren 5.3 en 5.4b is de verhouding $\omega_{wand,p}/\omega_{c,0}$ ongeveer hetzelfde (respectievelijk 0.30 en 0.28).

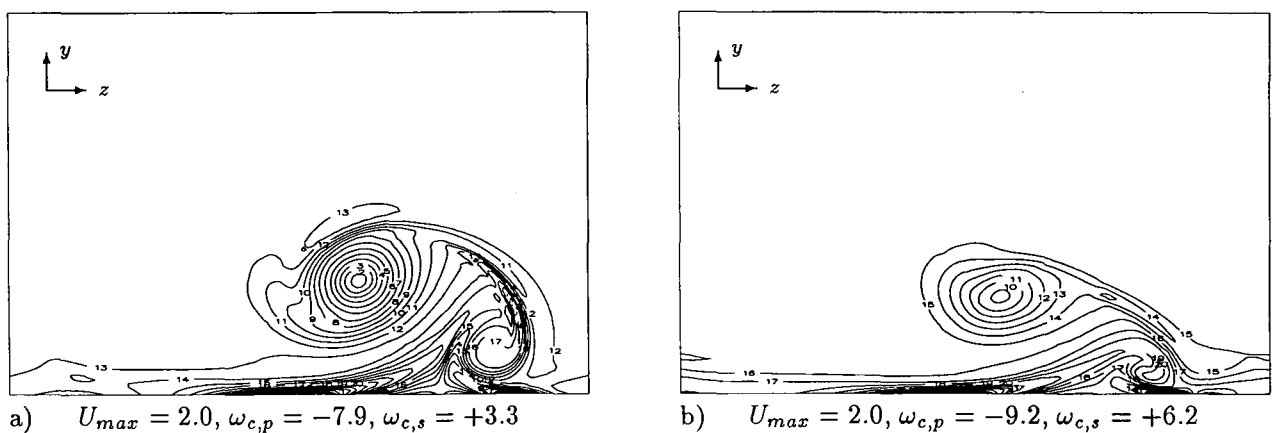
Opmerking Naast het verschil in grootte van de wandvorticeiteit verschilt de ontwikkeling van de primaire en secundaire wervels in figuren 5.3 en 5.4a duidelijk. Zo is in figuur

5.4a al het begin van een secundaire wervel zichtbaar. In figuur 5.3 niet. Dit verschil in ontwikkeling wordt indirect veroorzaakt door het verschil in afstand tot de wand. Wanneer het snelheidsprofiel niet uniform is (zoals in dit geval van een lineair snelheidsprofiel) is de grootte van de hoofdstroomsnelheid op verschillende afstanden tot de wand verschillend. Dit betekent dat er in figuren 5.3 en 5.4a niet evenveel tijd is geweest voor ontwikkeling en diffusie van de wervels. In figuur 5.4b daarentegen is de grootte van de hoofdstroomsnelheid ter plekke van het centrum van de wervel gelijk aan die van figuur 5.3, de ontwikkeling van vorticeiteit komt dan ook goed overeen.

Bovengenoemd effect wordt uitgebreid besproken in § 5.1.2.3, waarin de invloed van het initiële snelheidsprofiel wordt behandeld.

5.1.2.3 Het initiële snelheidsprofiel

De invloed van de vorm van het snelheidsprofiel op de vorticeitsverdeling en de generatie van wandvorticeiteit is af te leiden uit het resultaat van twee simulaties, weergegeven in figuur 5.5. Beide simulaties betreffen weer de algemene stromingssituatie van § 5.1.1, met

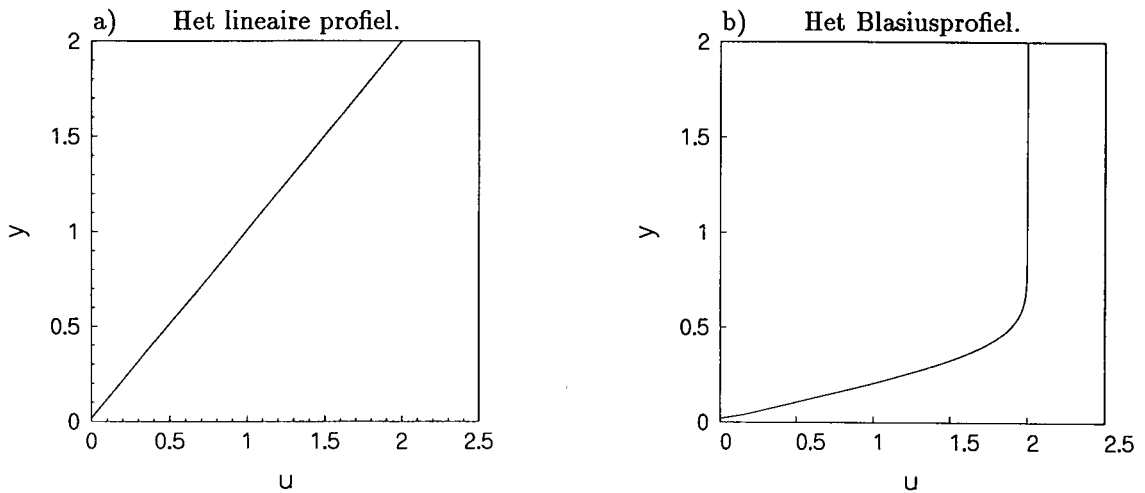


Figuur 5.5: Wandstroming met (a) lineair profiel en (b) Blasiusprofiel voor $x = 1.0$.

uitzondering van de simulatie weergegeven in figuur 5.5b, waarin geen stroming met een lineair snelheidsprofiel, maar met het Blasius-snelheidsprofiel is opgelegd. De maximum hoofdstroomsnelheid is voor beide simulaties wel gelijk ($U_{max} = 2.0$). De twee snelheidsprofielen zijn weergegeven in figuur 5.6. Deze maximum snelheid wordt alleen bereikt aan de bovenkant van het domein ($y = 2.0$), aan de onderkant (op de wand) is de snelheid uiteraard nul.

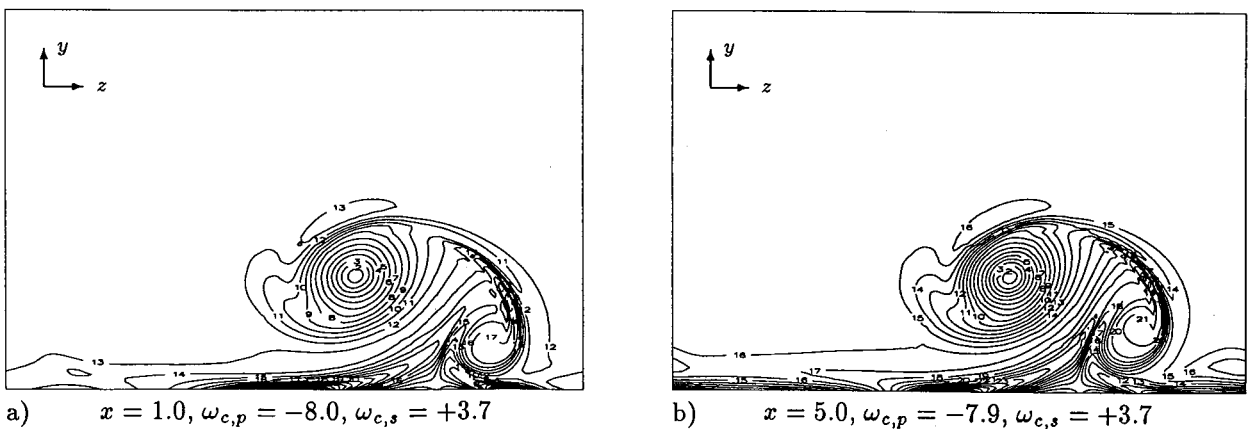
De vergelijking van beide contourplots van figuur 5.5 laat zien dat de wervelstructuren in geval van het Blasius-snelheidsprofiel (figuur 5.5b) minder ontwikkeld zijn in vergelijking met het lineaire snelheidsprofiel (figuur 5.5a): de vorticeiteit aan de wand en in het centrum van de primaire en secundaire wervel is groter en de wervels zijn compacter. Er heeft dus minder diffusie plaats gevonden. Dit is logisch, wanneer men bedenkt dat bij een Blasius-snelheidsprofiel de stroomsnelheid vlak boven de wand hoger is vergeleken met de

stroomsnelheid op dezelfde hoogte in geval van een lineair snelheidsprofiel. Dit betekent dat de wervel en de vorticeiteit dicht tegen de wand in het Blasius-geval (figuur 5.5b) minder tijd hebben gehad om te ontwikkelen.



Figuur 5.6: Twee verschillende gebruikte snelheidsprofielen.

Het bewijs voor de aanwezigheid van dit effect (eerder aangestipt in de vorige paragraaf, § 5.1.2.2) wordt geleverd door de resultaten van twee simulaties weergegeven in figuur 5.7. Uit deze figuur blijkt namelijk dat de vorticeitsverdeling bij een 5 maal zo grote maximum hoofdstroomsnelheid ($U_{max} = 10.0$ t.o.v. $U_{max} = 2.0$) bijna exact hetzelfde is op een punt dat ook 5 maal zo ver stroomafwaarts ligt (dus $x = 5.0$ t.o.v. $x = 1.0$). In beide situaties is de ontwikkelingstijd T dan in eerste benadering gelijk, immers $U_{max} = \frac{x}{T}$.



Figuur 5.7: Wandstroming voor verschillende hoofdstroomsnelheden: (a) $U_{max} = 2.0$ en (b) $U_{max} = 10.0$.

De vorm van het snelheidsprofiel blijkt dus van geringe invloed op het eindresultaat, alleen de absolute waarde van de snelheid ter hoogte van de wervel is van belang. Deze bepaalt namelijk de tijd die beschikbaar is voor ontwikkeling van de wervel. De absolute waarde van de snelheid ter hoogte van de wervel is natuurlijk wel weer afhankelijk van de vorm van het snelheidsprofiel, zo is de vorm van het snelheidsprofiel indirect toch van invloed op het eindresultaat (zie figuur 5.5).

Het snelheidsprofiel versterken met een bepaalde factor heeft dus wel invloed op hetzelfde punt x stroomafwaarts, maar het effect is gering als men de vorticitetsverdeling bekijkt op een punt x maal zo ver stroomafwaarts.

5.1.2.4 Twee wervels

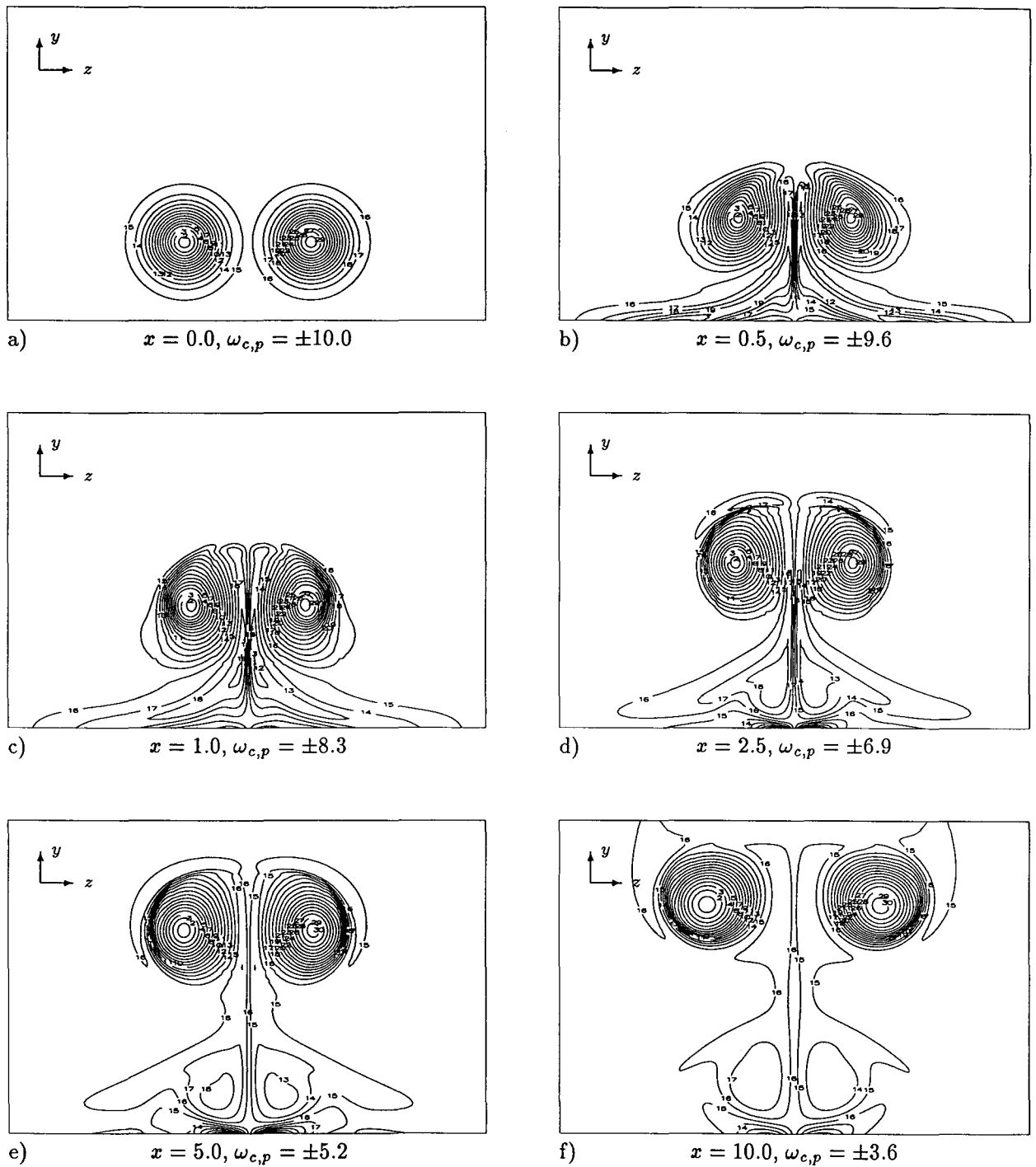
Aangezien een hairpinwervel uit *twee* benen bestaat, zijn ook simulaties gedaan met twee wervels in de buurt van een wand. De situatie is symmetrisch ten opzichte van het vlak $z = \frac{1}{2}z_{max}$, met uitzondering van het teken van vorticitet van de twee wervels. Alle andere parameters zijn hetzelfde als in de algemene stromingssituatie van § 5.1.1.

In vergelijking met de algemene stromingssituatie met één wervel (§ 5.1.1, figuur 5.1) ontwikkelt zich ook nu vorticitet aan de wand, maar deze ontwikkelt zich niet tot secundaire wervel(s): de wandvorticitet wordt tussen de twee primaire wervels door omhoog gesleurd (in positieve y -richting). Zie hiervoor figuur 5.8b. De gegenereerde wandvorticitet is dan ook veel kleiner: maximaal ± 3.7 voor $x = 0.5$. Dit is een factor 4.6 lager dan in het geval met één wervel. Het feit dat de lobs omhoog worden gestuwd, is te verklaren door te kijken naar het snelheidsveld dat de twee wervels induceren. In het gebied tussen de twee wervels heeft de snelheid een verticale component, die omhoog gericht is. De lobs bewegen dus omhoog.

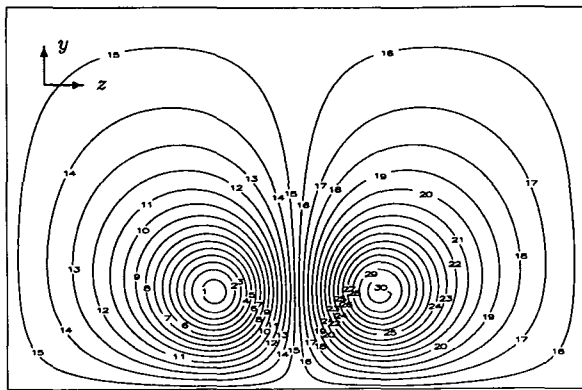
Op een punt verder stroomafwaarts zijn de opgestuwde 'lobs' zover omhoog verplaatst, dat ze zich boven de wervels gaan begeven. De lobs worden dan om de wervels heen geslingerd (figuren 5.8d en 5.8e). Het bekijken van de lobs voor $x = 10.0$ stuit op problemen, omdat deze zich dan gedeeltelijk buiten het domein bevinden. Er treedt dan een kleine fout op in de berekening ten gevolge van noodzakelijke benaderingen in de randvoorwaarden (zie § 2.5.1).

Er blijft ook een gedeelte van de lobs dicht bij de wand achter en induceert opnieuw vorticitet aan de wand: in figuur 5.8e is dit goed te zien. Deze nieuwe wandvorticitet is uiteraard weer van tegengesteld teken en zorgt ervoor dat er een soort quadrupool ontstaat: vier gebieden van vorticitet van afwisselend negatieve en positieve vorticitet. In figuur 5.9 zijn de plots voor de stroomfunctie ψ_x op analoge manier en voor corresponderende x weergegeven in vergelijking tot de vorticitetsplots van figuur 5.8. In de stroomfunctieplots zien we voor $x = 2.5$, $x = 5.0$ en $x = 10.0$ dat er door het ontstaan van deze quadrupool een gebied is ontstaan waarin vloeistof in twee cirkelbanen getransporteerd wordt, met andere woorden: er zijn twee wervels dicht bij de wand ontstaan.

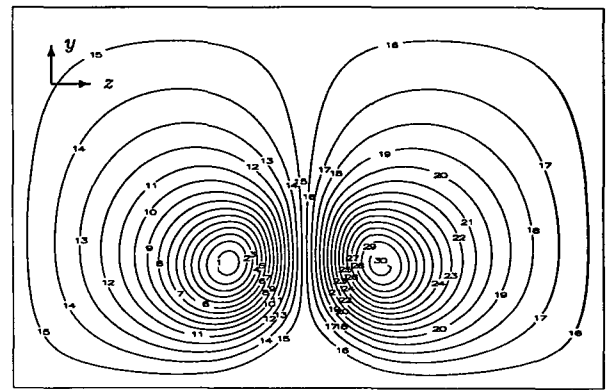
Het opstuwen van de lobs is nog beter waarneembaar wanneer er in de beginsituatie meer ruimte is tussen de wervels (niet afgebeeld). De gevormde lobs hebben dan een hogere



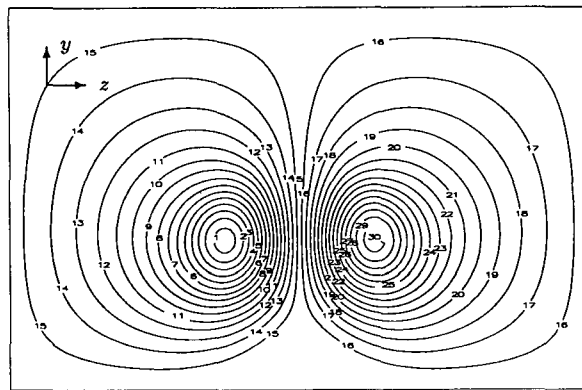
Figuur 5.8: Vorticeitsplots van de algemene stromingssituatie voor twee wervels.



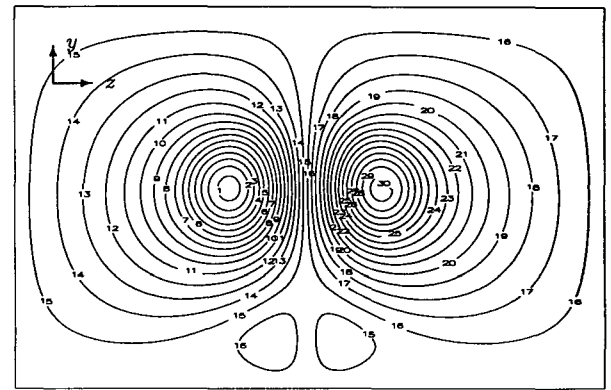
a) $x = 0.0, \psi_{c,p} = \pm 0.28$



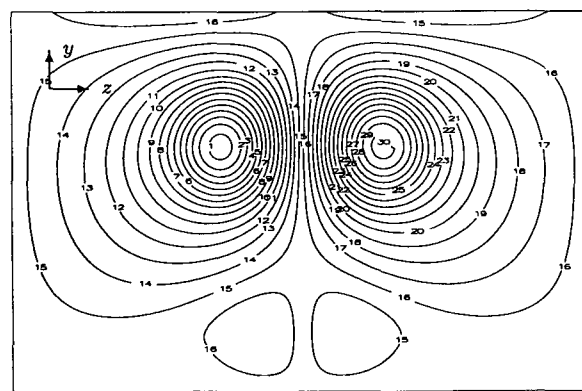
b) $x = 0.5, \psi_{c,p} = \pm 0.24$



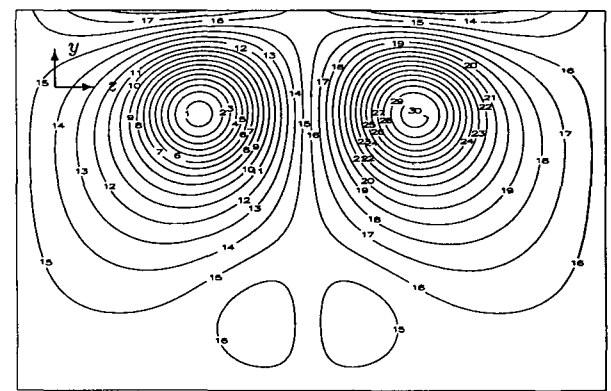
c) $x = 1.0, \psi_{c,p} = \pm 0.22$



d) $x = 2.5, \psi_{c,p} = \pm 0.18$



e) $x = 5.0, \psi_{c,p} = \pm 0.15$



f) $x = 10.0, \psi_{c,p} = \pm 0.13$

Figuur 5.9: Stroomfunctie plots van de algemene stromingssituatie voor twee wervels.

vortciteit, maar breken op bij $x = 5.0$.

5.2 De verplaatsing van wervels

Om verwarring te voorkomen is het zinvol een opmerking vooraf te maken over de interpretatie van de Q3D simulaties.

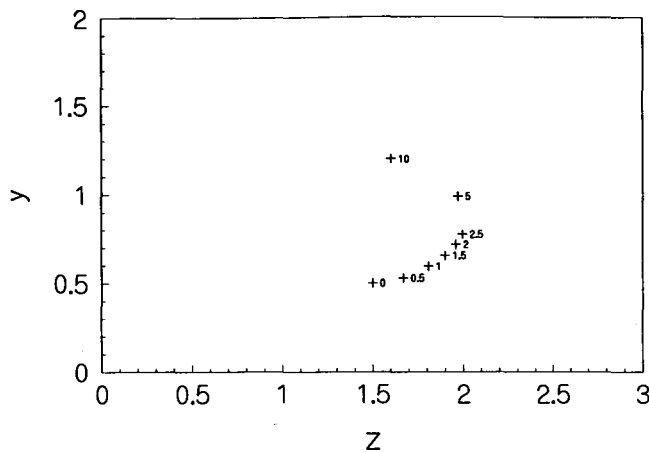
In de Q3D simulaties is de tijd geen variabele, alle beschouwde stromingssituaties zijn stationair. Het is dan ook principieel fout om van *verplaatsing* van wervels in de *tijd* te spreken. In Q3D simulaties wordt daarom met beweging of verplaatsing van een wervel bedoeld: een verschil in *locatie* in het *zy*-vlak van een wervel tussen twee situaties op verschillende plaatsen stroomafwaarts, dus voor verschillende x . Ter illustratie: 'de wervel beweegt van de wand af', wil zeggen: 'de wervel bevindt zich *verderop in de stroming* verder van de wand'.

In de twee nu volgende subparagrafen worden achtereenvolgens het traject van een enkele wervel en van twee wervels in de buurt van een wand besproken en worden verklaringen gegeven voor het waargenomen gedrag. De verplaatsing van de wervels wordt voor het leeuwendeel bepaald door het aantal wervels en de plaats ervan in de stroming. De invloed van de wandvortciteit is kleiner en wordt weer bepaald door de parameters genoemd in § 5.1.2. De expliciete invloed van deze parameters op de *verplaatsing* van wervels is niet apart onderzocht.

5.2.1 Eén wervel

Voor het beschouwen van de verplaatsing van een enkele wervel in de buurt van een wand nemen we nogmaals de serie vortciteitsweergaves van figuur 5.1 ter hand. Uit deze serie figuren blijkt het globale traject van één wervel wanneer een wand nabij is. Het exacte traject van de wervel is uitgezet in figuur 5.10. In deze figuur is op enkele markante plaatsen in de stroming de ligging van het centrum van vortciteit van de wervel in het *zy*-vlak bepaald. Het onderste punt in deze figuur ($(z, y) = (1.5, 0.5)$) is de positie van het centrum van de wervel voor $x = 0.0$. Voorts zijn de centra van de wervels aangegeven voor de volgende waarden van x : 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 5.0 en 10.0. Volgens figuur 5.10 beweegt de wervel in een bijna cirkelvormig traject, en wel tegen de klok in.

De verplaatsing van de wervel is deels te verklaren met behulp van een benadering waarin de wervel beschouwd wordt als een tweedimensionale wervel in een niet-viskeuze stroming. In dat geval mogen we het principe van virtuele spiegelwervels toepassen. In ons geval volstaat het om te zeggen dat uit dit principe blijkt dat een enkele wervel van negatieve vortciteit een horizontale beweging naar rechts zal vertonen. Voor een uitvoeriger uiteenzetting van virtuele spiegelwervels wordt de lezer verwezen naar [Van Heijst 92].



Figuur 5.10: *Het traject van één wervel in de algemene stromingssituatie.*

In figuur 5.10 zien we dat dit in het begin bij benadering klopt. De naar rechts verschuivende wervel is eerder waargenomen en besproken in [Stoffels 94] en [Brooke 92]. In ons geval ontstaat er door viscositeit echter een secundaire wervel van ongelijke sterkte (zie § 5.1.1). In 2D-wervelterminologie heet deze combinatie van primaire en secundaire wervel van tegengestelde vorticeiteit een dipool, in dit geval een asymmetrische dipool. Volgens de 2D-werveldynamica beweegt een asymmetrische dipool in een gekromde baan (het draaipunt ligt het dichtst bij de sterkste pool), hetgeen in overeenstemming is met het cirkelvormige traject van figuur 5.10.

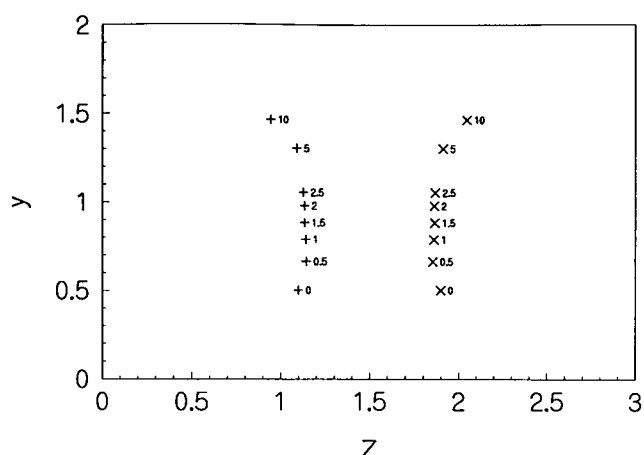
5.2.2 Twee wervels

De situatie in het geval van *twee* wervels van tegengestelde vorticeiteit is principieel anders. Er wordt geen secundaire wervel gegenereerd, wat de beweging van de wervels geheel anders maakt in vergelijking tot de situatie met slechts één wervel. Dit essentiële verschil was al geconstateerd in § 5.1.2.4.

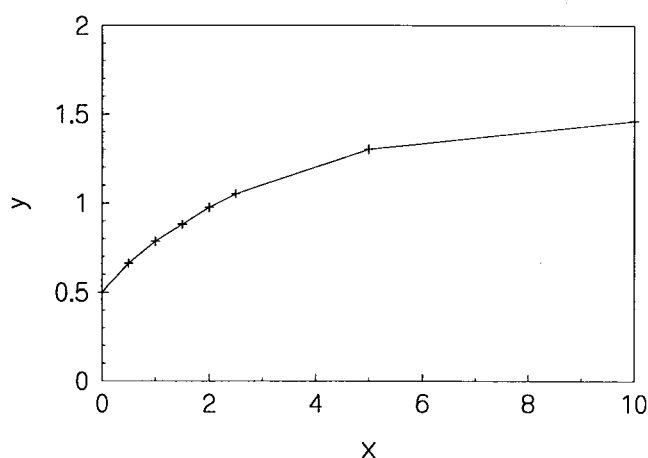
Het traject van de wervels zoals gedaan in de simulatie weergegeven in figuur 5.8 is overzichtelijk gepresenteerd in figuur 5.11. In deze figuur zien we de centra van de twee wervels van de wand af bewegen. Wanneer we, analoog aan de situatie met één wervel, het principe van mutuele interactie toepassen, zullen de wervels zich gedragen als een (nu symmetrische) dipool. Dipolen bezitten een intrinsieke snelheid, in dit geval zou deze loodrecht van de wand af gericht zijn. Dit is dus in overeenstemming met figuur 5.11.

Ten gevolge van viskeuze diffusie neemt de sterkte van de wervels steeds verder af, waardoor ook de mutuele interactie afneemt. De verticale afstand tussen het wervelpaar en de wand neemt steeds minder toe naarmate x toeneemt, dit is duidelijk te zien in figuur 5.12. De verticale snelheid van het wervelpaar neemt dus in de loop van x af.

Wanneer de wervels in de beginsituatie verder van elkaar zijn verwijderd, blijkt dat zij



Figuur 5.11: *Het traject van twee wervels in de algemene stromingssituatie.*

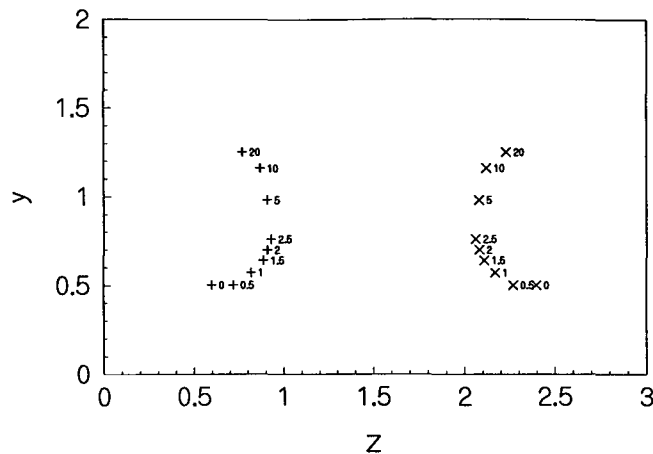


Figuur 5.12: *Vertikale afstand van de twee wervels tot de wand in de algemene stromingssituatie.*

eerst naar elkaar toe bewegen (figuur 5.13). Dit is eveneens met behulp van de virtuele spiegelwervel-benadering te verklaren. We hebben in de situatie met één wervel gezien dat volgens deze benadering een wervel met negatieve vorticiiteit horizontaal naar rechts beweegt en een wervel met positieve vorticiiteit horizontaal naar links. Voor de dipool betekent dit dat de polen naar elkaar toe bewegen, het wervelpaar wordt compacter. Na $x = 2.5$ bewegen de polen weer van elkaar af. Dit is het gevolg van het feit dat het effect van de spiegelwervels afneemt, doordat de afstand tot de wand steeds groter wordt.

5.3 De ontwikkeling van snelheidsprofielen

De rol die het snelheidsprofiel speelt bij de ontwikkeling van hairpinwervels is reeds uiteengezet in de inleiding, hoofdstuk 1. Kort samengevat is toen aangenomen dat er veranderingen in de snelheidsverdeling van u , v en w zullen optreden ten gevolge van de

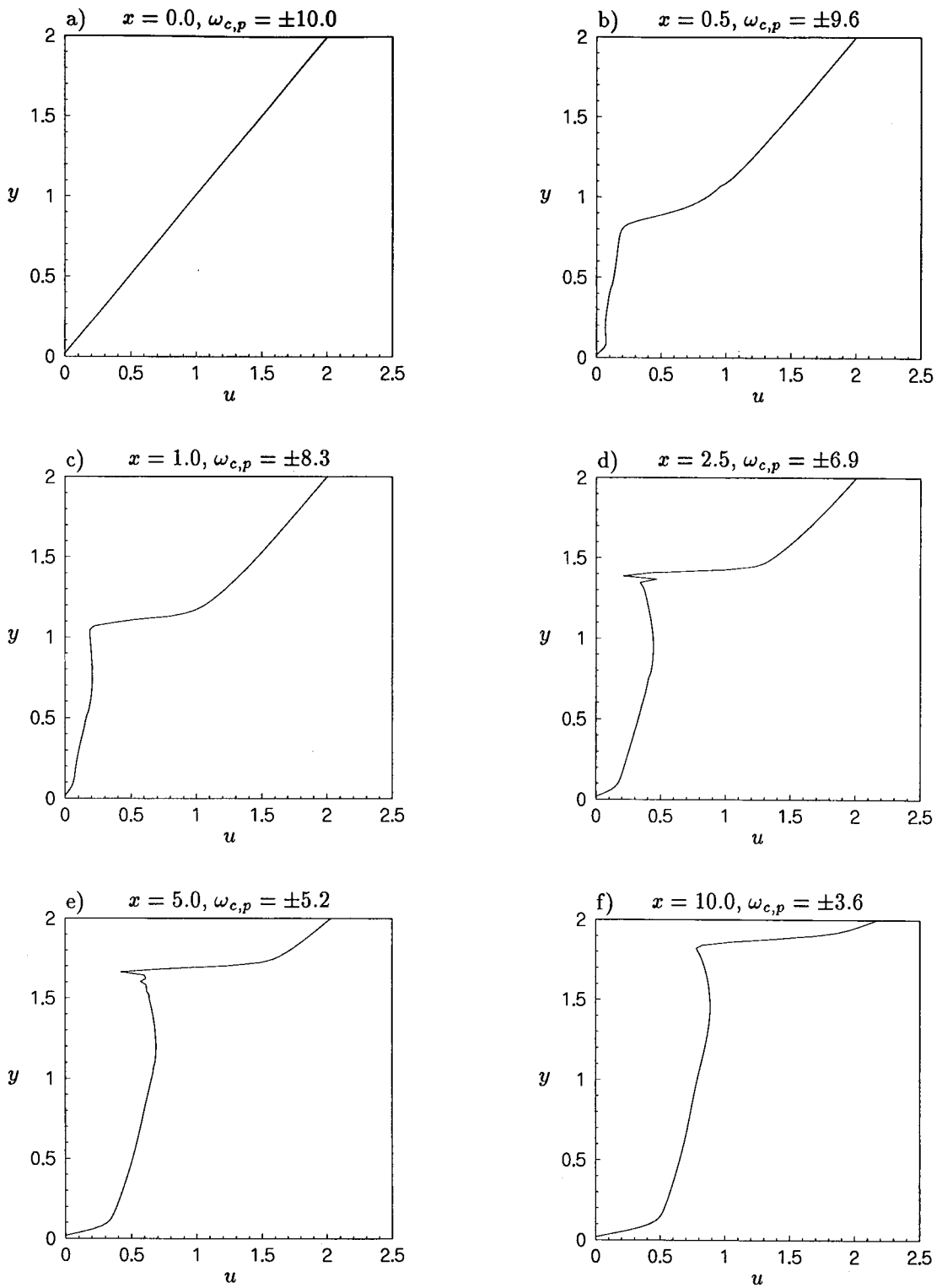


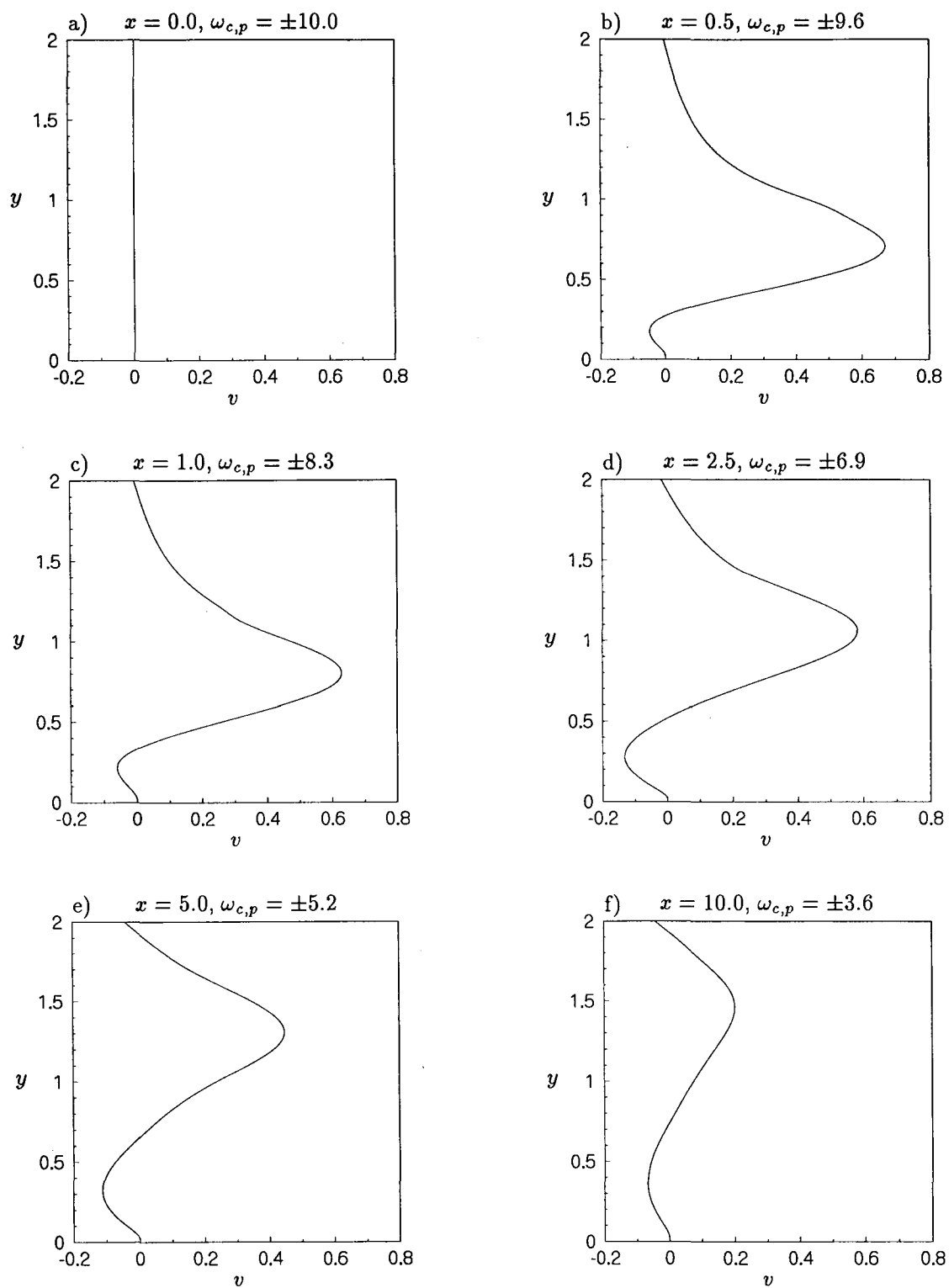
Figuur 5.13: *Het traject van twee ver van elkaar verwijderde wervels.*

(instationaire) vorticeit van de kop en de benen van de hairpinwervel. Vice versa kan de vorticeitsverdeling sterk beïnvloed worden door veranderingen in het snelheidsprofiel. Op deze manier zijn de vorticeits- en snelheidsverdelingen van de hairpinwervel onlosmakelijk met elkaar verbonden. In deze paragraaf zal geprobeerd worden dit ingewikkelde proces enigszins uit te rafelen door te onderzoeken hoe de snelheidsprofielen van u en v beïnvloed worden door twee wervels in de buurt van een wand. Deze resultaten kunnen gebruikt worden bij 2D simulaties van de hairpinkop. In hoofdstuk 4 is reeds gerekend met verschillende snelheidsprofielen (§ 4.2).

De interesse naar de snelheidsprofielen van u en v heeft ook een relatie met experimenteel onderzoek. De in de vakgroep Werveldynamica en Turbulentie gebruikelijke methode om hairpinwervels te analyseren geschiedt door snelheidsmetingen in een windtunnel met behulp van enkele hittedraden. De numerieke resultaten van de snelheidsprofielen kunnen zodoende vergeleken worden met de resultaten van de windtunnelexperimenten. Aangezien de verticale snelheid v zich hoofdzakelijk sterk ontwikkelt tussen *twee* benen, worden in deze paragraaf alleen numerieke simulaties besproken met *twee* wervels. Een dergelijke simulatie is reeds besproken in § 5.1.2.4 en is afgebeeld in figuren 5.8 en 5.9 voor vorticeit en stroomfunctie. De afgebeelde snelheidsprofielen (figuren 5.14 en 5.15) zijn resultaten van dezelfde simulatie. In deze figuren is het profiel van respectievelijk de hoofdstroomsnelheid $u(y)$ en de verticale snelheid $v(y)$ bekeken voor verschillende x voor één vaste waarde van z , precies tussen de twee wervels, dus $z = \frac{1}{2}z_{max}$. In de simulatie zijn overigens randvoorwaarden opgelegd waarbij vloeistof ongehinderd door de randen van het domein kan in- en uitstromen, uiteraard met uitzondering van de wand.

We zien in figuur 5.14 dat het initiële lineaire snelheidsprofiel tot bepaalde hoogte y gedeformeerd is. In een zeker bereik van y is de u -component namelijk in waarde afgenomen, doordat de wervels vloeistof van lage snelheid omhoog stuwten. Deze lage-snelheidsvloeistof

Figuur 5.14: Profielen van de hoofdstroomsnelheid u .



Figuur 5.15: Profielen van de verticale snelheid v .

'ontmoet' de hogesnelheidsvloeistof afkomstig van het lineaire snelheidsprofiel vlak boven het wervelpaar alwaar dus een relatief grote gradiënt in u ontstaat ($\frac{\partial u}{\partial y}$). Aangezien de wervels omhoog bewegen, verplaatst deze schuiflaag zich eveneens omhoog: op $x = 0.5$ bevond deze zich nog op $y = 0.9$, waar deze verplaatst is naar $y = 1.9$ voor $x = 10.0$. Het gedeelte van het u -profiel dat zich tussen of onder de wervels bevindt is bij benadering uniform. De maximale waarde van dit uniforme profiel groeit naarmate x groter wordt: $u = 0.17$ voor $x = 0.5$ en $u = 0.88$ voor $x = 10.0$.

De verticale snelheid v is in het stromingsgebied tussen de wervels van dezelfde orde-grootte als de hoofdstroomsnelheid u .

Volgens de theorie van tweedimensionale wervels is de snelheid op de as tussen twee wervels in een domein met twee wervels van tegengestelde vorticeiteit (een dipool) het grootst precies tussen de twee wervels in en is deze snelheid loodrecht gericht op de as tussen de twee wervels. Deze maximum snelheid is in ons geval precies v , want u is op de as tussen de twee wervels nul. In figuur 5.15 zijn inderdaad pieken in de v -snelheid te zien. De hoogte y waarop deze pieken zich bevinden, zou gelijk moeten zijn aan de hoogte van de centra van de wervels, af te leiden uit figuur 5.8. De overeenkomst blijkt inderdaad treffend: de gemiddelde afwijking bedraagt 1%.

Opmerkelijk is het feit dat er een klein gebied dicht tegen de wand ontstaat, waarin vloeistof naar de wand toe stroomt (v is negatief). Dit effect is het sterkst aanwezig bij $x = 2.5$ en $x = 5.0$, er stroomt vloeistof naar de wand tot een hoogte $y \simeq 0.5$. Een mogelijke verklaring hiervoor halen we uit vorticeiteitsplots 5.8b en c en de stroomfunctieplots 5.9d, e en f. In de vorticeiteitsplots hebben we gezien dat de vorticeiteit die aan de wand wordt gegenereerd vlak onder de wervels zich gaat ontwikkelen en zich tussen de wervels gaat begeven. Aangezien deze lobs een vorticeiteit van tegengesteld teken hebben, zal de richting van de verticale snelheid tussen deze lobs ook tegengesteld zijn aan de verticale snelheid tussen de twee originele wervels. Met andere woorden: de primaire wervels induceren een *positieve* v -snelheid voor $z = \frac{1}{2}z_{max}$, de lobs induceren een *negatieve* v -snelheid op de verticaal $z = \frac{1}{2}z_{max}$. Omdat de lobs zich uitstrekken over een groter gebied (zelfs nog tot aan de wand) dan de wervels, is de invloed van de lobs dicht bij de wand groter dan van de wervels. Dicht bij de wand kan men dus een negatieve verticale snelheid verwachten. Dit wordt nog bevestigd door de stroomfunctieplots voor $x = 2.5$, $x = 5.0$ en $x = 10.0$ (figuren 5.9d, e en f): dicht tegen de wand zijn er twee kleine wervels ontstaan, die vloeistof van en naar de wand transporteren.

5.4 De groei van vorticeiteit en wervels

Uit de resultaten van de vorige paragrafen hebben we geconcludeerd dat het gedrag van de benen van een hairpinwervel volgend uit theoretische beschouwingen treffende overeenkomsten vertoont met het gedrag van Gaussische wervels in onze numerieke experimenten: zij bewegen bijvoorbeeld beiden naar elkaar toe en bovendien van de wand af. De vorticeiteit

van de benen van een werkelijke hairpinwervel neemt daarnaast ook toe in de beginfase van de ontwikkeling van de hairpinwervel. In onze numerieke experimenten zijn echter nog geen wervels waargenomen die in vorticititeit toenemen naarmate zij zich ontwikkelen. In alle simulaties bleek vorticititeit te diffunderen en nam de vorticititeit in het centrum van een wervel in de loop van x af. In deze paragraaf zal de aandacht gevestigd zijn enerzijds op het zoeken naar een verklaring hiervan en anderzijds op het creëren en simuleren van relevante stromingssituaties waarin wervels *wel* in sterkte groeien.

Als leidraad hiervoor is genomen een artikel van Brooke en Hanratty ([Brooke 92]) waarin resultaten vermeld staan van numerieke simulaties met behulp van een programma waarin de volledige driedimensionale tijdsafhankelijke Navier-Stokes vergelijkingen opgelost worden. Brooke en Hanratty simuleerden via Direct Numerical Simulation (DNS) turbulente stromingen langs een wand zonder enige vorticititeit in de beginsituatie en zagen vorticititeit aan de wand ontstaan en zich ontwikkelen tot wervels. Om de herkomst van deze groei van vorticititeit te kunnen achterhalen is het fysisch het meest inzichtelijk om naar de grootte van de afzonderlijke termen van de vorticititeitsvergelijking voor de component in longitudinale richting te kijken. In [Brooke 92] wordt de vorticititeitsvergelijking gegeven in de volgende vorm:

$$\frac{D\omega_x}{Dt} = \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_x, \quad (5.7)$$

waarin $\frac{D\omega_x}{Dt}$ de totale afgeleide van de vorticititeit voorstelt. Deze wordt gedefinieerd door

$$\frac{D\omega_x}{Dt} \equiv \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z}, \quad (5.8)$$

waarbij de tijdsafgeleide $\frac{\partial}{\partial t}$ in onze Q3D simulaties gelijk is aan nul. Dan is (5.7) af te leiden uit onze vorm van de vorticititeitsvergelijking, (2.23). Zie hiervoor § 5.4.1.

De rechterkant van (5.7) is opgebouwd uit een aantal karakteristieke termen, respectievelijk

- de stretching term ($\omega_x \frac{\partial u}{\partial x}$),
- een term die de netto bijdrage van tilting voorstelt ($\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$),
- een term die de netto bijdrage van twisting voorstelt ($\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z}$) en
- de viskeuze term ($\frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_x$).

De convectieve term is gelijk aan de drie meest rechtse termen aan de rechterkant van (5.8), oftewel de materiële afgeleide van ω_x .

Brooke en Hanratty vergeleken de grootte van de afzonderlijke termen op verschillende afstanden tot de wand op het moment dat wervels zichtbaar werden in het wandgebied en ontdekten dat de netto bijdrage van de *tilting term* op elke afstand tot de wand dominant is. De bijdrage van de stretching, twisting en viskeuze term *samen* bleek kleiner dan 10%. Als we uitgaan van een wervel van negatieve vorticititeit zal deze dus in sterkte groeien wanneer bijvoorbeeld de *spanwise* snelheidscomponent w toeneemt als functie van x . Dan is immers $-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} < 0$ en wordt de vorticititeit nog meer negatief.

5.4.1 De termen uit de Q3D-vorticeiteitsvergelijking

Naar aanleiding van de conclusie van Brooke en Hanratty zijn in ons Q3D programma procedures opgenomen waarmee de vorticeiteitsvergelijking uitgesplitst kan worden. In ons programma gebruiken we een andere vorm van de vorticeiteitsvergelijking (zie ook (2.23)):

$$u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = -\frac{\partial(v\omega_x)}{\partial y} - \frac{\partial(w\omega_x)}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right], \quad (5.9)$$

maar deze is in feite hetzelfde als die van Brooke en Hanratty, (5.7). Dit is in te zien door voor de term aan de linkerkant van (5.9) te schrijven:

$$u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = -\omega_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(u\omega_x)}{\partial x}. \quad (5.10)$$

Dan verandert (5.9) in

$$\frac{\partial(u\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega_x)}{\partial y} + \frac{\partial(w\omega_x)}{\partial z} = \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right]. \quad (5.11)$$

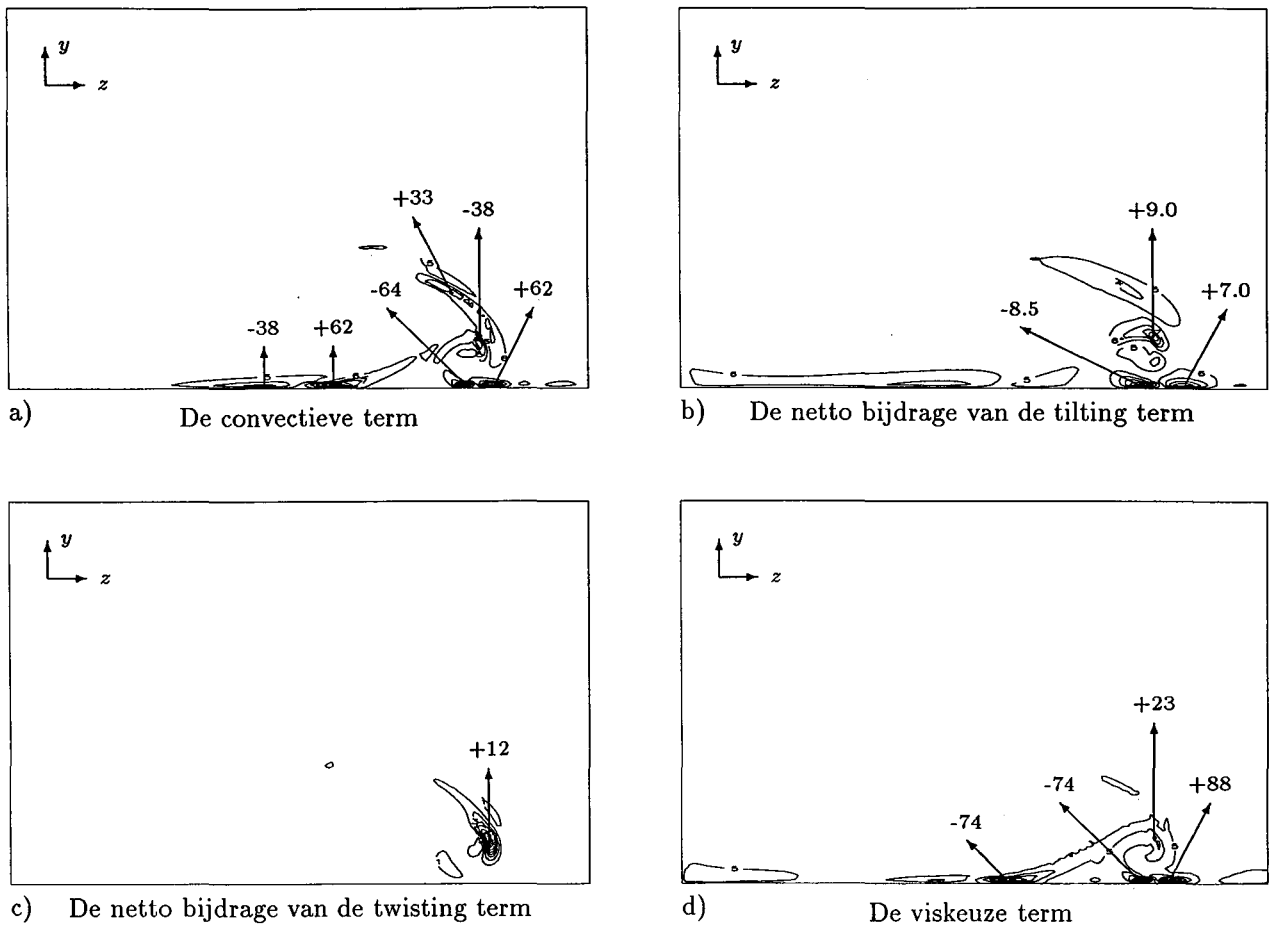
Wanneer we de termen aan de linkerkant van (5.11) (de zogenaamde convectieve term) geheel uitschrijven door de kettingregel toe te passen en daarna behoud van massa toepassen (zie (2.3)) vinden we de formulering van Brooke en Hanratty (voor $\frac{\partial}{\partial t} = 0$).

De tilting, twisting en viskeuze term zijn in (5.9) dus identiek geformuleerd als in (5.7). De stretching term $\omega_x \frac{\partial u}{\partial x}$ komt in onze formulering niet expliciet voor, deze is door toepassen van de kettingregel (2.20) weggevallen tegen een deel van de convectieve term. De convectieve term is in onze formulering dus ook bewerkt, de twee termen die overgebleven zijn aan de rechterkant van (5.9), namelijk $-\frac{\partial(v\omega_x)}{\partial y} - \frac{\partial(w\omega_x)}{\partial z}$, worden voortaan de convectieve term van de vorticeiteitsvergelijking genoemd, hoewel deze formeel dus slechts een deel van de convectieve term voorstelt.

Er is geprobeerd de grootte van de verschillende termen uit de vorticeiteitsvergelijking te bepalen voor een representatieve stromingssituatie, er is daartoe gekozen voor de algemene stromingssituatie van § 5.1.1. De code van de simulatie die als algemene stromingssituatie is uitgevoerd (figuur 5.1), is daarom zodanig aangepast dat de afzonderlijke termen als functie van x berekend kunnen worden. In figuur 5.16 zijn hiervan de resultaten weergegeven in contourplots voor het punt $x = 0.5$ in de stroming.

Uit deze vier plots blijkt duidelijk dat de verdelingen van de verschillende termen zeer verschillend zijn: verschillende termen vertonen op verschillende plaatsen maximale en minimale waarden. Ook de grootte van een bepaalde term kan aanzienlijk verschillen voor verschillende plaatsen in het zy -domein. Ter vergroting van het inzicht in figuur 5.16 volgt eerst een kwantitatieve beschouwing van elke afzonderlijke term.

De convectieve term is qua absolute waarde het grootst dicht tegen de wand. Daar komen van links naar rechts achtereenvolgens gebieden voor met piekwaarden van



Figuur 5.16: De algemene stromingssituatie voor één wervel voor $x = 0.5$.

$-38 \cdot 10^{-3}$, $+62 \cdot 10^{-3}$, $-64 \cdot 10^{-3}$ en $+62 \cdot 10^{-3}$. Deze pieken zijn te herkennen aan de grote dichtheid van (ellipsvormige) contourlijnen. In het gebied iets verder van de wand - tussen en rondom de wervels - variëren deze waarden van $-38 \cdot 10^{-3}$ tot $+33 \cdot 10^{-3}$. Deze maximale waarden komen respectievelijk vlak boven de secundaire wervel en in de lob rechtsboven de twee wervels voor.

De tilting term bereikt nooit een absolute waarde van hoger dan $9.0 \cdot 10^{-3}$. Er komen waarden van $-8.5 \cdot 10^{-3}$ en $+7.0 \cdot 10^{-3}$ voor in het gebied dicht tegen de wand direct onder de secundaire wervel. Vlak boven de secundaire wervel wordt een maximum waarde bereikt voor de tilting term, namelijk $+9.0 \cdot 10^{-3}$. In het resterende gebied is de tilting term aanzienlijk kleiner.

De twisting term is bijna overal ongeveer gelijk aan nul. Het enige gebied waar de twisting term een bijdrage van betekenis levert, is in een gebiedje vlak boven de secundaire wervel. Daar is de waarde $+12 \cdot 10^{-3}$.

De viskeuze term is relatief groot dicht tegen de wand. Daar worden waarden bereikt van $-74 \cdot 10^{-3}$ in het wandgebied recht onder de primaire wervel. In het wandgebied recht onder de secundaire wervel varieert de viskeuze term van $-74 \cdot 10^{-3}$ tot $+88 \cdot 10^{-3}$. In het deel van het domein dat niet dicht tegen de wand ligt, reikt de absolute waarde van de viskeuze term echter niet verder dan $23 \cdot 10^{-3}$.

Uit bovenstaande kwantitatieve beschouwing blijkt dat voor $x = 0.5$ de convectieve term dominant is in het gebied waarin de wervels zich bevinden. De maximale waarden hiervan variëren van $-38 \cdot 10^{-3}$ tot $+33 \cdot 10^{-3}$. De maximale waarden van de resterende termen reiken hooguit tot een waarde van $+12 \cdot 10^{-3}$ voor de twisting term, $+9.0 \cdot 10^{-3}$ voor de tilting term en $\pm 5.0 \cdot 10^{-3}$ voor de viskeuze term, alle drie voorkomend in het gebiedje vlak boven de secundaire wervel. Aan de wand komen zeer uiteenlopende waarden voor, met name tussen wervel en wand kan de absolute waarde van de verschillende termen hoog oplopen. Veruit de grootste waarden worden bereikt door de convectieve en viskeuze term. Ter verificatie is dezelfde procedure gevolgd voor andere plaatsen in de stroming ($x = 0.01$, $x = 0.1$ en $x = 2.5$). In deze gevallen is het beeld ongeveer hetzelfde. De convectieve term is in alle gevallen het grootst, al dan niet samen met andere termen. Voor $x = 0.01$ en $x = 0.1$ zijn de convectieve en de tilting term het grootst, voor $x = 2.5$ zijn de convectieve en viskeuze term het grootst. De twisting term is ook voor deze plaatsen in de stroming van geen enkele betekenis in het gehele stromingsgebied.

Ook in een andere stromingssituatie zien we hetzelfde beeld: wanneer we van de simulatie met twee wervels (zie figuur 5.8) de uitgesplitste termen bekijken, zijn wederom de convectieve en viskeuze term het grootst. De tilting term is ruwweg een factor 10 kleiner dan deze twee termen, de twisting term is ongeveer een factor 100 kleiner.

In [Stoffels 94] zijn in simulaties met een oudere versie van het Q3D programma de termen uit de vorticiteitsvergelijking op dezelfde manier vergeleken als Brooke en Hanratty deden. Stoffels concludeerde dat geen enkele term dominant is behalve de viskeuze term, wanneer het gebied dicht bij de wand wordt beschouwd. Dit is dus ruwweg in overeenstemming met de zojuist genoemde resultaten.

De uitsplitsing van de termen van de Q3D vorticiteitsvergelijkingen levert een ander resultaat op dan in de simulaties van Brooke en Hanratty: de convectieve term is met uitzondering van het gebied zeer dicht tegen de wand in het gehele domein dominant. Dicht tegen de wand is de viskeuze term dominant. De tilting term en de viskeuze term kunnen plaatselijk ook van dezelfde orde-grootte worden, maar worden nooit dominant. De twisting term is nergens in het domein van enige betekenis.

Deze waarnemingen zijn echter niet in tegenspraak met de resultaten van Brooke en Hanratty. Zij namen het ontstaan van wervels waar, en daarnaast bleken deze wervels ook nog in sterkte te groeien. Dit ging gepaard met een dominantie van de tilting term. In onze simulaties nemen wij geen wervelgroei waar, maar de tilting term is in onze simulaties dan ook niet dominant gebleken. We kunnen dus concluderen dat door de vereenvoudigingen van de basisvergelijkingen (die Brooke en Hanratty niet deden) het blijkbaar niet mogelijk

is voor de tilting term om dominant te worden, het effect van tilting is als het ware door de vereenvoudigingen 'weg verwaarloosd'. Wanneer wervels ontstaan en evolueren door een dominante tilting term is het dus mogelijk dat met behulp van ons Q3D programma het groeien van vorticititeit en wervels niet volledig gesimuleerd kan worden.

5.4.2 Wervelstrekking

Het mechanisme wervelstrekking is onderzocht om twee redenen. Ten eerste zijn we geïnteresseerd in de rol die wervelstrekking zou kunnen spelen in het toenemen van longitudinale vorticititeit. Er is gebleken dat we met behulp van het Q3D programma nog niet in staat zijn geweest een wervel te laten toenemen in vorticititeit, omdat het Q3D programma het effect van tilting (en dus ook twisting) niet volledig kan simuleren, in ieder geval niet voor het zog achter een obstructie. Hiervoor is een driedimensionaal rooster noodzakelijk, onze quasi-driedimensionale benadering voldoet dan niet. In de Q3D benadering is namelijk slechts één component van de vorticititeitsvector voldoende nauwkeurig bekend, de x -component. De y - en z -componenten worden in het Q3D programma benaderd met (2.22). De tilting en twisting term, respectievelijk $\omega_y \frac{\partial u}{\partial y}$ en $\omega_z \frac{\partial u}{\partial z}$ zijn dan ook slechts benaderingen. De Q3D benadering voldoet mogelijk wél wanneer wervelstrekking gesimuleerd wordt; in dat geval bekijken we het effect van $\omega_x \frac{\partial u}{\partial x}$, waarbij ω_x wel nauwkeurig bekend is.

De interesse naar het verschijnsel wervelstrekking is ook van algemene aard. Wervelstrekking wordt namelijk verondersteld aan de basis van turbulentie te liggen. Wanneer een wervel gestrekt wordt, wordt deze sterker, maar ook compacter. Er wordt dus energie van een grote structuur naar een kleinere overgedragen. Anders gezegd: door wervelstrekking gaat een wervel sneller draaien; de energie die dit kost wordt geleverd door een versnellende stroming. Wanneer dit proces lang genoeg duurt en voldoende sterk aanwezig is, kunnen coherente structuren op macroschaal dan energie overdragen aan structuren op de microschaal. De hoogste vorticititeit komt dan dus voor op microschaal. Dit proces wordt het cascade-proces genoemd en is essentieel een driedimensionaal proces. In een zuiver tweedimensionale situatie vindt een omgekeerd proces plaats: het inverse cascade-proces. Bewegingsenergie kan zich slechts in twee vrijheidsgraden verplaatsen, waardoor kleine vorticititeitsstructuren zich zullen organiseren tot grotere. Op deze manier ontstaan bijvoorbeeld veel tweedimensionale wervels in gelaagde stromingen, zie hiervoor bijvoorbeeld [Van Heijst 92].

In deze paragraaf wordt het verschijnsel wervelstrekking eerst vanuit een theoretisch oogpunt bekeken. Daarna wordt geprobeerd wervelstrekking te implementeren in het Q3D programma en worden simulaties besproken waarmee we de mogelijke invloed van wervelstrekking in het gedrag van hairpinwervels kunnen beoordelen.

Vortex stretching of wervelstrekking vindt plaats wanneer een wervelbuis met bepaalde vorticititeit ω_x zich bevindt in een hoofdstroom U die toeneemt bij grotere x . De vorticititeitsvector is gericht parallel aan de hoofdstroomrichting. Wanneer $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ zal de wervelbuis

strekken: de vorticeiteit gaat zich concentreren in een kleinere doorsnede, omdat er voldaan moet zijn aan behoud van massa:

$$\frac{D}{Dt}(UA) = 0, \quad (5.12)$$

waarin A het oppervlak van de doorsnede voorstelt en $\frac{D}{Dt}$ weer de totale afgeleide is. De vorticeiteit in het centrum van de wervelbuis stijgt onder invloed van het verkleinende oppervlak A , omdat de circulatie constant dient te zijn. Strikt genomen geldt dit alleen voor niet-viskeuze stromingen, maar ook voor niet te sterk viskeuze stromingen is het toepasbaar. Er geldt nu dus bij benadering dat de circulatie Γ constant is, dus

$$\frac{D}{Dt} \iint \omega_x dA \simeq 0. \quad (5.13)$$

Om de hoofdstroom te laten versnellen als functie van x , is het mogelijk niet langer de snelheidsvergelijking op te lossen, maar u te forceren met de gewenste versnellende stroming. Er moet tegelijk voldaan blijven aan massabehoud; een positieve $\frac{\partial u}{\partial x}$ impliceert dan dat er massa via de zij- boven- of onderrand van het domein in moet worden gebracht. Zodoende zijn simulaties uitgevoerd waarin niet alleen de hoofdstroom, maar ook een instroming van massa in positieve en/of negatieve y -richting werd geforceerd.

In feite impliceert het aanleggen van een geforceerde extra in- en uitstroming (v resp. u) de introductie van de variabele ψ_z wanneer men bedenkt dat

$$u = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \quad \text{en} \quad w = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}. \quad (5.14)$$

We zien aan (5.14) dat introductie van ψ_y zinloos is, omdat v onafhankelijk is van ψ_z . Er zou dan geen extra instroming plaats kunnen vinden. Een forcering van ψ_x is uiteraard ook niet mogelijk, omdat ψ_x door het programma iteratief uit de Poissonvergelijking wordt opgelost.

In de simulatie gaan we uit van een geforceerde instroming u , die expliciet wordt opgelegd. Hieruit volgt dan ψ_z door integratie van u over y (van $y = y_{max}$ tot $y = 0$). Daarna differentiëren we ψ_z naar x om de bijdrage van de instroming aan v te bepalen. Deze methode van integratie en differentiatie bleek echter niet nauwkeurig genoeg: theoretisch gezien zou men in het gehele x -bereik op de wand een waarde voor v moeten vinden gelijk aan nul. Bij de integratie van u worden echter kleine afrondfouten en fouten ten gevolge van het discrete karakter van het rooster gemaakt. Daardoor ontstaat een verticale snelheid aan de wand ongelijk aan nul, terwijl de wand ondoordringbaar was verondersteld. Integratie in de omgekeerde richting (van $y = 0$ tot $y = y_{max}$) leverde een soortgelijk probleem aan de bovenrand en ook een combinatie van beide integraties leidde niet tot een voldoende nauwkeurige berekening.

Teneinde deze onnauwkeurige integratie te voorkomen is geprobeerd te rekenen met een forcering van de grootheid ψ_z , deze wordt dus expliciet gekozen. Hieruit volgen dan door differentiatie de bijdrage van ψ_z aan de componenten u en v (zie 5.15). Deze bijdragen kunnen expliciet bepaald worden, de grootheid ψ_z komt in feite alleen fictief in het programma voor. Voor het totale snelheidsveld wordt de bijdrage van ψ_z aan het snelheidsveld gesuperponeerd op het bestaande snelheidsveld ten gevolge van de wervel (i.e. de bijdrage van ψ_x). De drie snelheidscomponenten worden dan uiteindelijk berekend door:

$$u = \frac{\partial \psi_z}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \quad \text{en} \quad w = -\frac{\partial \psi_x}{\partial y}. \quad (5.15)$$

Ter verduidelijking een overzicht van alle grootheden:

- ψ_x en ω_x zijn de bijdrage aan de stroming ten gevolge van de situatie op $x = 0.0$ (dus ten gevolge van de wervel en het initiële snelheidsprofiel).
- ψ_z is de bijdrage aan de stroming ten gevolge van de instroming van bovenaf en uitstroming in de hoofdstroomrichting. ω_z wordt berekend met $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$.
- ψ_y en ω_y blijven gelijk aan nul.
- De snelheidscomponenten u , v en w worden nu expliciet berekend met behulp van (5.15); u wordt niet langer berekend met (2.28).

Voor ψ_z mogen we elke willekeurige functie van x en y verzinnen, mits overal in het xyz -domein geldt dat $u > 0$ en $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$. Er zijn simulaties gedaan met een aantal functievoorschriften voor ψ_z , in dit verslag worden twee ervan uitgebreid besproken:

1. $\psi_z = C_1 x(y - \frac{1}{2} y_{max}) + C_2 y$.

Er stroomt een gelijke hoeveelheid vloeistof het domein binnen door de boven- én onderrand: $v = -C_1(y - \frac{1}{2} y_{max})$. Op $y = 0$ bevindt zich dus geen wand. Het profiel van de uitstroming u is uniform en neemt in grootte lineair toe als functie van x : $u = C_1 x + C_2$. Er geldt dus dat $\frac{\partial u}{\partial x} = C_1$. Voor beide constanten C_1 en C_2 is een waarde gekozen van 1.0.

2. $\psi_z = C_1 x y^2 + C_2 y^2 + C_3 y$.

In deze stromingssituatie is een ondoordringbare wand geplaatst op $y = 0$. Het longitudinale snelheidsprofiel is nu een lineair snelheidsprofiel. De amplitude van dit lineaire snelheidsprofiel neemt daarnaast ook nog lineair toe als functie van x , dus $u = 2C_1 x y + 2C_2 y + C_3$ en $\frac{\partial u}{\partial x} = 2C_1 y$. C_3 is de longitudinale snelheid op $y = 0$, waarbij $C_3 \simeq 0$ aangezien de wand stil staat⁵. In vergelijking met het vorige ψ_z -voorschrift is de totale hoeveelheid vloeistof die naar binnen stroomt gelijk, nu stroomt er echter alleen vloeistof door de bovenrand van het domein naar binnen, dus $v = -C_1 y$. De andere constanten C_1 en C_2 zijn beide gelijk gekozen aan 0.25.

⁵De constante C_3 is niet exact gelijk aan nul, omdat voor elk roosterpunt in het xyz -domein moet gelden dat $u_{j,k} > 0$. Dan en slechts dan is stapsgewijze oplossing van de basisvergelijkingen in de x -richting mogelijk.

5.4.2.1 Instroming door de boven- en onderrand, uniforme uitstroming

Er geldt dus dat

$$\begin{aligned}\psi_z &= x(y-1) + y \\ u &= x + 1 \\ v &= -(y-1)\end{aligned}\tag{5.16}$$

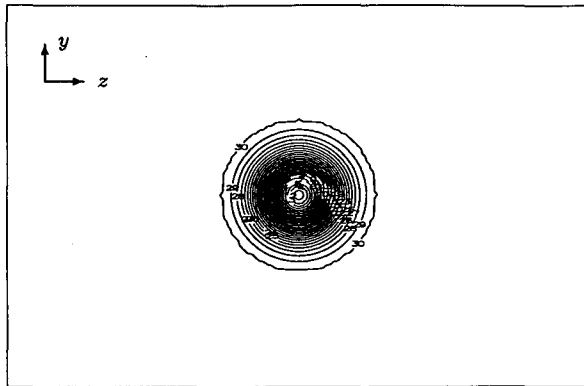
Om te kunnen zien of er wervelstrekking plaats vindt, kan men de vorticititeit in het centrum van de wervel en de straal van de wervel beschouwen. In de voorgaande paragraaf is gebleken dat - om te voldoen aan behoud van circulatie en massa - de vorticititeit in het centrum *toe* en de straal *af* moet nemen. Omdat de wervel in deze stromingssituatie geacht wordt op dezelfde hoogte y te blijven (de instroming van bovenaf is symmetrisch aan de instroming van onderaf), is het gemakkelijk doorsnedes van de wervel voor verschillende x te maken, bijvoorbeeld van de vorticititeitsverdeling. Uit deze vorticititeitsdoorsnedes is de vorticititeit in het centrum en de straal nauwkeurig te bepalen.

Aan de hand van de vorticititeitsplots en -doorsnedes in figuren 5.17 en 5.18 kunnen we concluderen dat er inderdaad wervelstrekking optreedt. De vorticititeit van de wervel neemt drastisch toe, van $\omega_c = -10.0$ op $x = 0.0$ tot $\omega_c = -36.4$ op $x = 10.0$. Waarden voor de vorticititeit voor tussenliggende punten x zijn gegeven in tabel 5.2. Tevens is in deze tabel de hoofdstroomsnelheid ter plekke van het centrum van de wervel u_c en de circulatie van het gehele zy -domein Γ gegeven voor enkele waarden van x gegeven. Naast het toenemen van de vorticititeit in het centrum zou in geval van wervelstrekking de straal van de wervel moeten afnemen. Uit de doorsnedes van figuur 5.18 is inderdaad te zien dat de wervel in de loop van de simulatie compacter wordt.

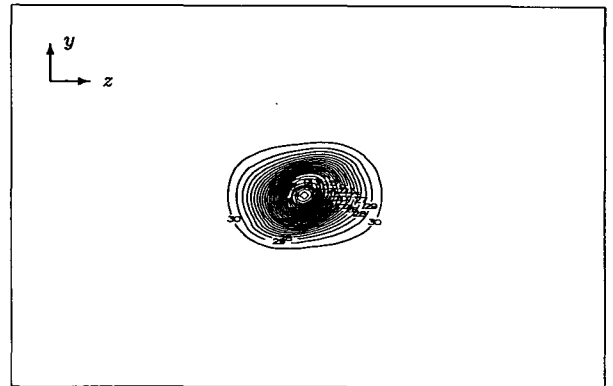
x	ω_c	u_c	Γ
0.0	-10.0	1.0	-1.00
0.5	-14.4	1.5	-1.00
1.0	-18.4	2.0	-1.00
1.5	-21.7	2.5	-1.00
2.0	-24.3	3.0	-1.00
2.5	-26.4	3.5	-1.00
5.0	-32.7	6.0	-1.00
10.0	-36.4	11.0	-0.99
20.0	-37.0	21.0	-0.98

Tabel 5.2: ω_c , u_c en Γ voor verschillende x bij $\psi_z = x(y-1) + y$ en $Re = 1500$.

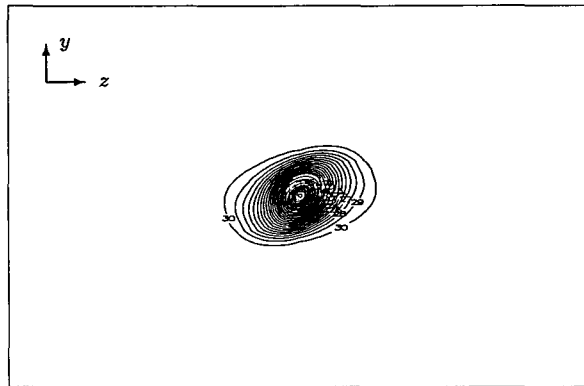
Wanneer we een kwantitatieve beschouwing maken van de waargenomen wervelstrekking stuiten we op enkele aandachtspunten. Aangezien de massa behouden is en het snelheidsprofiel uniform is, verwachten we dat de vorticititeit in het centrum van de wervel rechtevenredig is met de u -snelheid in het centrum van de wervel, dus $\omega_c \sim u_c$. Dit volgt



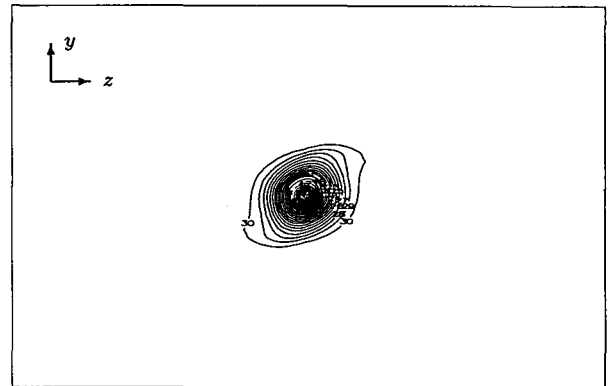
a) $x = 0.0, \omega_c = -10.0, u_c = 1.0$



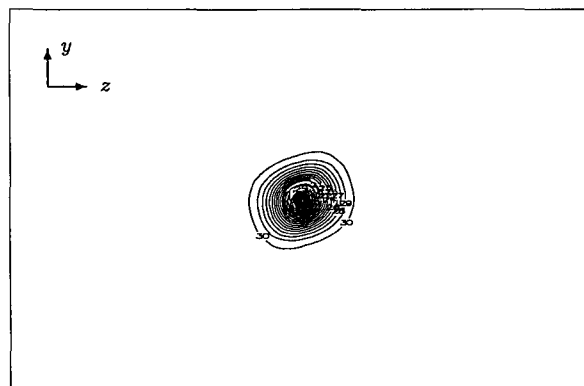
b) $x = 0.5, \omega_c = -14.4, u_c = 1.5$



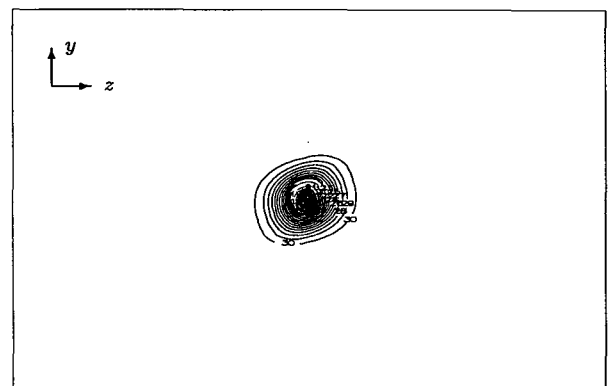
c) $x = 1.0, \omega_c = -18.4, u_c = 2.0$



d) $x = 2.5, \omega_c = -26.4, u_c = 3.5$

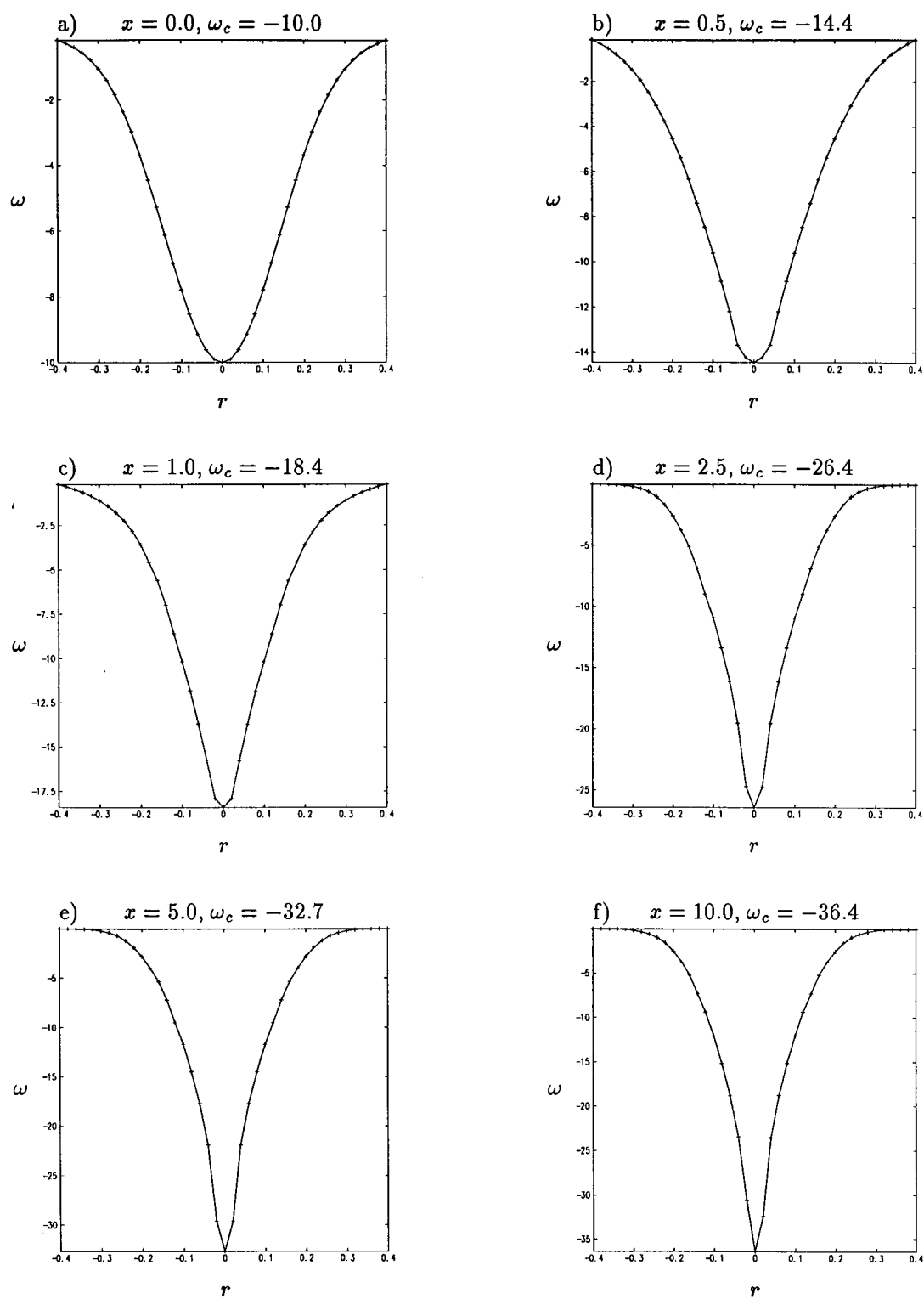


e) $x = 5.0, \omega_c = -32.7, u_c = 6.0$



f) $x = 10.0, \omega_c = -36.4, u_c = 11.0$

Figuur 5.17: Vorticiteitsplots voor $\psi_z = x(y - 1) + y$ bij $Re = 1500$.



Figuur 5.18: Vorticeitsdoorsnedes voor $\psi_z = x(y-1) + y$ bij $Re = 1500$.

uit (5.12) en (5.13) wanneer $U = u_c$, $\omega_x = \omega_c$ en $A = \iint dA \sim r^2$. In de numerieke simulaties met ψ_z gegeven door (5.16) gaat dit niet op. In de alinea hierboven zijn de situaties op $x = 0.0$ en $x = 10.0$ al vergeleken, de vorticititeit in het centrum van de wervel nam toen met een factor 3.64 toe. De snelheid u_c is echter 11.0 maal zo groot; de vorticititeit in het centrum neemt dus *te weinig toe*.

Analoog hieraan neemt de straal van de wervel *te weinig af*. Wanneer er voldaan is aan (5.12) neemt de straal van de wervel af volgens $r^2 \sim \frac{1}{u_c}$. De straal zou dan op $x = 10.0$ met een factor 3.3 afgenomen moeten zijn. Hoewel het moeilijk is een nauwkeurige waarde voor de straal te bepalen uit de afgebeelde doorsnedes, is het duidelijk dat de straal op $x = 10.0$ veel minder is afgenomen dan een factor 3.3.

Het feit dat de vorticititeit in het centrum van de wervel te weinig is gestegen, is deels te wijten aan viskeuze diffusie. In het ideale, theoretische model van wervelstrekking is namelijk geen rekening gehouden met viskeuze diffusie; alle vorticititeit wordt verondersteld in de strekkende wervelbuis te blijven. Het optreden van viskeuze diffusie zou tevens een goede verklaring zijn voor het feit dat de straal van de wervel niet voldoende afneemt: het verspreiden van vorticititeit vergroot de wervel.

Het is echter waarschijnlijker dat de oorzaak van de te geringe toename van de centrumvorticititeit te wijten is aan het feit dat er massa het domein wordt ingebracht uit een richting loodrecht op de wervelbuis. Dit betekent dat er ook een gedeelte van deze ingebrachte massa terecht komt in de wervelbuis zelf. Deze ingebrachte massa heeft echter geen vorticititeit, zodat de toename van de centrumvorticititeit lager is dan we verwachten.

De circulatie is desondanks behouden, de waarden voor de circulatie als functie van x zoals deze gegeven zijn in tabel 5.2, geven aan dat de circulatie zeer constant is: op $x = 20.0$ is Γ slechts 2% gedaald.

Behalve het strekken van de wervel is in de vorticititeitsplots en -doorsnedes nog een aantal interessante dingen te zien.

Om te beginnen is het geruststellend te zien dat de wervel gedurende de simulatie inderdaad niet van positie verandert. Daarnaast zien we dat de vorm van de wervel niet cirkelvormig blijft: voor $x = 0.5$ (figuur 5.17b) heeft de wervel een elliptische vorm, hij is platgedrukt door de instroming van boven- en onderaf. Omdat de wervel blijft roteren, roteert de hoofdas van deze ellips mee (figuur 5.17c) en wordt het lange uitstekende gedeelte van de ellips weer samengedrukt. Zo is de vorm van de wervel uiteindelijk op $x = 10.0$ toch weer ongeveer cirkelvormig.

Voorts kunnen we in de doorsnedes van de wervel zien dat de Gaussische vorticititeitsverdeling van $x = 0.0$ niet Gaussisch meer is op $x = 10.0$. Het is mogelijk dat dit komt doordat de wervel onderhevig is aan wervelstrekking én aan viskeuze diffusie, die de wervel kleiner danwel groter maken. De invloed van deze twee effecten is niet lineair en de Gaussische verdeling verandert diensgevolge. Dit is een effect dat een nauwkeurige bepaling van de straal van de wervel nog eens extra moeilijk maakt.

Daarnaast is het mogelijk dat de vorticititeitsverdeling niet Gaussisch meer is, doordat de resolutie van het rooster te laag is of doordat de wervel wordt platgedrukt door de instroming van onder- en bovenaf.

5.4.2.2 Instroming door de bovenrand, lineair snelheidsprofiel als uitstroming

Er geldt nu dat

$$\begin{aligned}\psi_z &= (xy^2 + y^2)/4 \\ u &= (xy + y)/2 \\ v &= -y/4\end{aligned}\tag{5.17}$$

In de vorige paragraaf hebben we aangetoond dat we in een simpele stromingssituatie een wervel in vorticeiteit toe kunnen laten nemen, wanneer we deze wervel in een versnellende hoofdstroom plaatsen. Om te onderzoeken of wervelstrekking een belangrijk mechanisme zou kunnen zijn in het groeien van de benen van een hairpinwervel, worden in deze paragraaf twee simulaties besproken van stromingssituaties die lijken op die van een hairpinwervel in een turbulente grenslaag. Daartoe wordt ten eerste een enkele wervel in een versnellende stroming met lineair snelheidsprofiel geplaatst. Deze situatie lijkt dus sterk op de algemene stromingssituatie, besproken in § 5.1.1. De resultaten van deze twee simulaties kunnen dan ook vergeleken worden om het netto effect van de versnellende hoofdstroom te kunnen achterhalen.

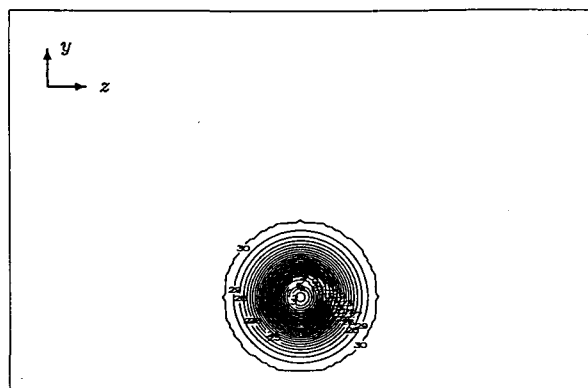
Omdat een hairpinwervel tenslotte uit twee benen bestaat, is het nog interessanter twee wervels te plaatsen in een versnellende stroming met lineair snelheidsprofiel. Dit is de tweede simulatie die in deze paragraaf wordt besproken. Deze simulatie lijkt op zijn beurt weer sterk op de simulatie, beschouwd in § 5.1.2.4, op pagina 57. Ook hier kunnen we dus weer een interessante vergelijking doen.

Eén wervel De resultaten van de simulatie met één strekkende wervel zijn weergegeven in figuur 5.19 en tabel 5.3. In tabel 5.3 zijn de centrumvorticeiteit van de primaire wervel ω_c en de u -snelheid ter plekke van het centrum van de primaire wervel u_c voor een aantal punten x gegeven. Dit is gedaan voor zowel de strekkende stromingssituatie ($\psi_z \neq 0$) als de algemene stromingssituatie ($\psi_z = 0$) van § 5.1.1. De contourplots van de algemene stromingssituatie zijn gegeven in figuur 5.1 op pagina 47.

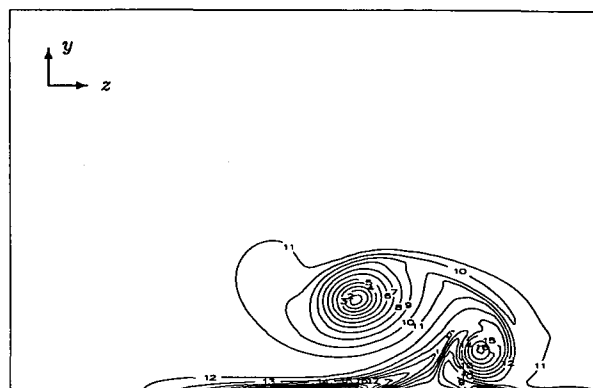
Wanneer we de contourplots van beide simulaties vergelijken zien we dat het algemene beeld van de stroming ongeveer overeenkomt: ook met een versnellende hoofdstroom ontstaat een secundaire wervel en wandvorticeiteit. Het traject van de primaire en secundaire wervel komt ook ongeveer overeen, de strekkende wervels blijven uiteraard dichter bij de wand door de instroming van bovenaf. Verder is de verhouding tussen de vorticeiteit van de primaire en secundaire wervel in beide stromingssituaties ongeveer gelijk.

De instroming veroorzaakt uiteraard ook verschillen tussen figuren 5.1 en 5.19:

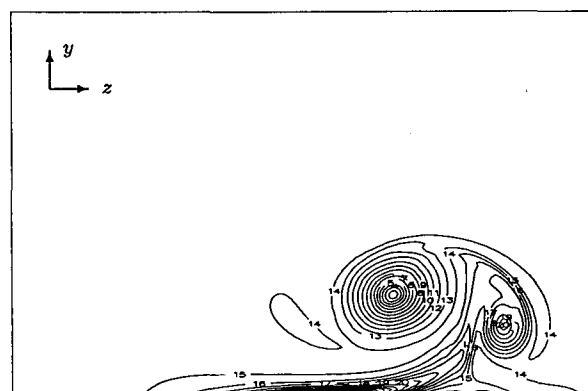
- De straal van de strekkende wervel(s) is duidelijk kleiner, vooral naarmate de simulatie langer duurt. Waar de straal van de primaire wervel in de algemene stromingssituatie door diffusie in de loop van x groter wordt, wordt deze in geval van wervelstrekking juist kleiner. Ook nu vindt er dus duidelijk wervelstrekking plaats.



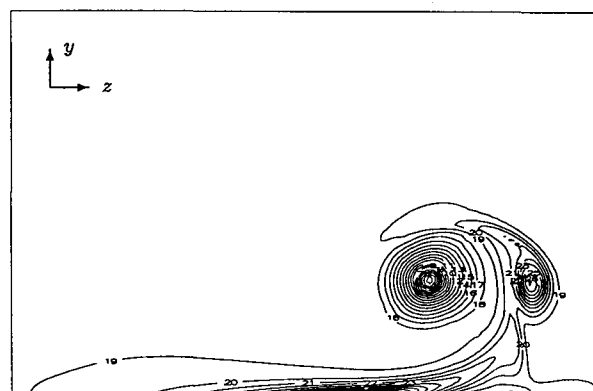
a) $x = 0.0, \omega_c = -10.0, u_c = 0.25$



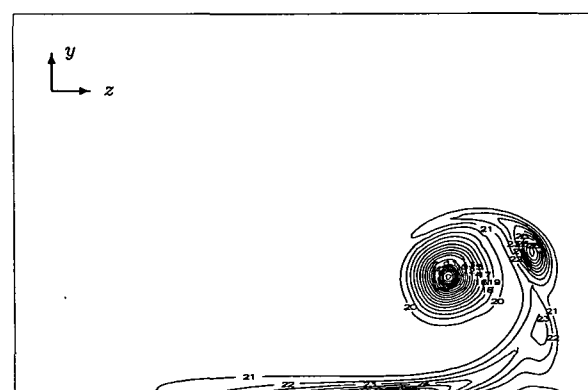
b) $x = 0.5, \omega_c = -12.0, u_c = 0.36$



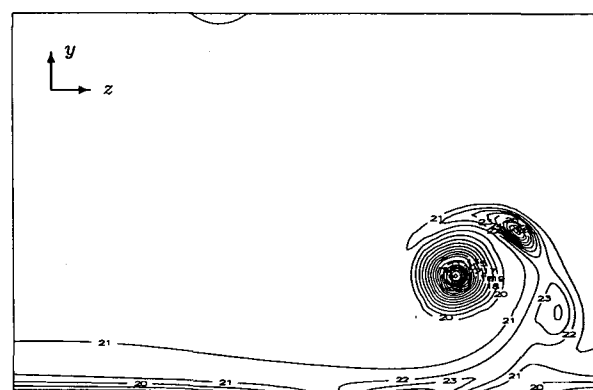
c) $x = 1.0, \omega_c = -12.9, u_c = 0.51$



d) $x = 2.5, \omega_c = -14.7, u_c = 1.03$



e) $x = 5.0, \omega_c = -15.6, u_c = 1.86$



f) $x = 10.0, \omega_c = -16.0, u_c = 3.40$

Figuur 5.19: Vorticiteitsplots voor $\psi_z = (xy^2 + y^2)/4$ bij $Re = 1500$.

- De centrumvorticeit van de primaire wervel is duidelijk hoger bij de strekkende wervel. We kunnen uit tabel 5.3 concluderen dat de centrumvorticeit ω_c van de strekkende primaire wervel op bijvoorbeeld $x = 10.0$ een factor 4.6 groter is dan van de niet-strekkende wervel.
- De wandvorticeit is groter in het geval van wervelstrekking. Dit lijkt op het eerste gezicht vreemd, omdat de grootte van de wandvorticeit wordt bepaald door de circulatie van de wervel(s) in de buurt van de wand, die voor beide stromingssituaties hetzelfde is. In de strekkende situatie worden de primaire en secundaire wervel door de instroming van bovenaf echter naar de wand gedrukt, waardoor de wandvorticeit hoger uitvalt.

x	$\psi_z \neq 0$		$\psi_z = 0$	
	ω_c	u_c	ω_c	u_c
0.0	-10.0	0.25	-10.0	0.50
0.5	-12.0	0.36	-8.7	0.46
1.0	-12.9	0.51	-7.9	0.44
1.5	-13.6	0.65	-7.6	0.47
2.0	-14.3	0.86	-7.1	0.47
2.5	-14.7	1.03	-6.4	0.45
5.0	-15.6	1.86	-4.9	0.46
10.0	-16.0	3.40	-3.5	0.47

Tabel 5.3: ω_c en u_c van één wervel voor verschillende x bij $\psi_z = (xy^2 + y^2)/4$ en $Re = 1500$.

In tabel 5.4 is de totale circulatie ten gevolge van positieve vorticeit Γ^+ , de totale circulatie ten gevolge van negatieve vorticeit Γ^- en de totale circulatie $\Gamma = \Gamma^+ + \Gamma^-$ berekend op verschillende punten x voor de stromingssituatie met de versnellende hoofdstroom. Alle waarden zijn genormeerd op de absolute waarde van de totale circulatie Γ voor $x = 0.0$

Wanneer we de waarden voor de totale circulatie Γ in tabel 5.4 bekijken (we nemen

x	Γ^+	Γ^-	Γ
0.0	0.00	-1.00	-1.00
0.5	1.05	-1.23	-0.17
1.0	0.90	-1.06	-0.16
1.5	0.82	-0.97	-0.15
2.0	0.79	-0.93	-0.14
2.5	0.76	-0.91	-0.14
5.0	0.69	-0.83	-0.14
10.0	0.69	-0.84	-0.16

Tabel 5.4: Circulatie voor verschillende x bij $\psi_z = (xy^2 + y^2)/4$ en $Re = 1500$.

het punt $x = 0.0$ niet mee, dit een fysisch onrealistische situatie), zien we dat de totale circulatie Γ van de strekkende stromingssituatie ongeveer behouden is, ondanks het feit dat Γ^+ en Γ^- niet constant zijn. Hieruit kunnen we concluderen dat er *cancellation* van vorticeit optreedt. Cancellation van vorticeit kan optreden wanneer twee gebieden van hoge, tegengestelde vorticeit zich zeer dicht bij elkaar bevinden. De positieve en negatieve vorticeit gaan elkaar overlappen, waardoor er 'annihilatie' van vorticeit optreedt. In de strekkende stromingssituatie bevindt de positieve en negatieve wandvorticeit zich inderdaad zeer dicht bij elkaar, er zou dus inderdaad cancellation op kunnen treden.

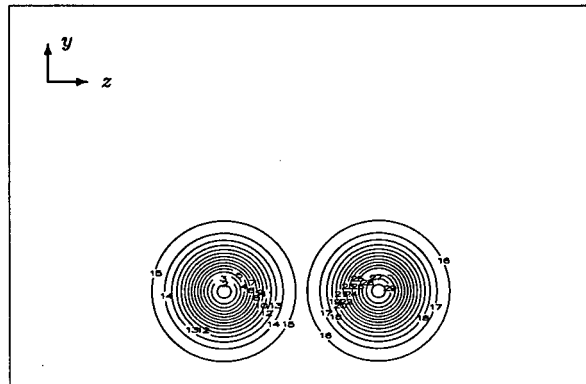
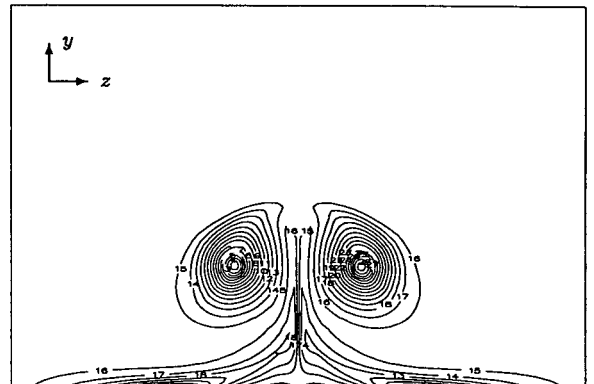
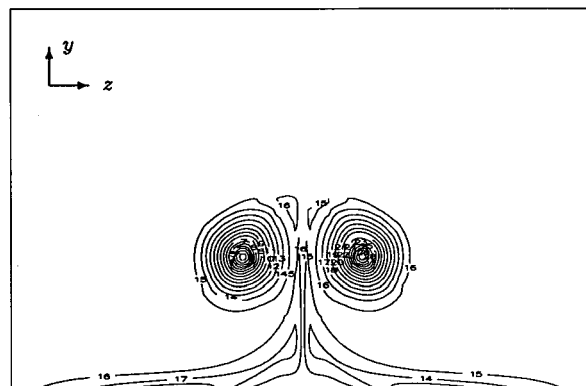
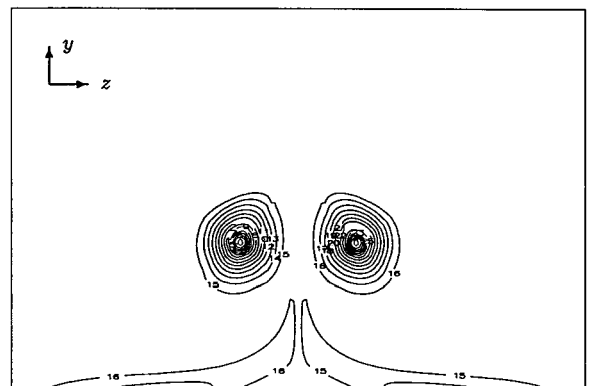
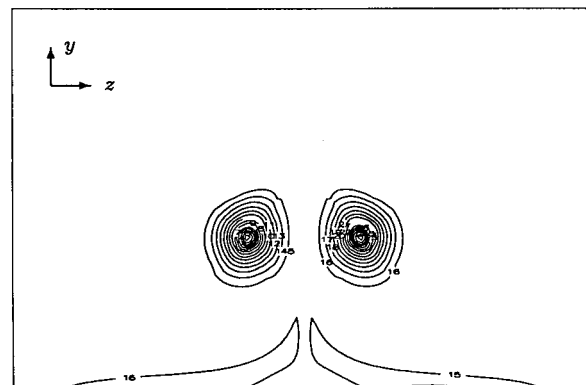
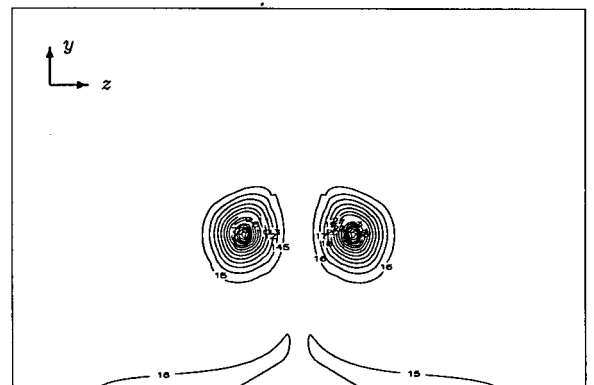
Tenslotte is het nog interessant te vermelden dat in de strekkende stromingssituatie op $x = 5.0$ het ontstaan van een tweede secundaire wervel te zien is. Deze ontstaat vlak onder de reguliere secundaire wervel en is ook van positieve vorticeit. Er zal in dit verslag niet verder ingegaan worden op dit verschijnsel.

Twee wervels De resultaten van deze simulatie zijn gegeven in de vorticeitsplots in figuur 5.20 en worden vergeleken met figuur 5.8 uit § 5.1.2.4. We hadden in § 5.1.2.4 al geconstateerd dat de invloed van een tweede wervel zeer groot was. Met name de ontwikkeling van de wandvorticeit is in het geval met twee wervels geheel anders dan bij één wervel. Ook de verplaatsing van de wervels is geheel verschillend (zie § 5.2). We kunnen dus verwachten dat de resultaten van deze simulatie met twee wervels in een versnellende stroming veel verschilt van de zojuist besproken situatie met slechts één wervel.

x	$\psi_z \neq 0$		$\psi_z = 0$	
	ω_c	u_c	ω_c	u_c
0.0	± 10.0	0.25	± 10.0	0.50
0.5	± 13.9	0.48	± 9.6	0.52
1.0	± 15.8	0.69	± 8.3	0.49
1.5	± 17.0	0.92	± 7.8	0.50
2.0	± 17.7	1.14	± 7.4	0.53
2.5	± 17.9	1.34	± 6.9	0.54
5.0	± 18.6	2.41	± 5.2	0.54
10.0	± 19.0	4.45	± 3.6	0.59

Tabel 5.5: ω_c en u_c van twee wervels voor verschillende x bij $\psi_z = (xy^2 + y^2)$ en $Re = 1500$.

In tabel 5.5 zijn weer ω_c en u_c op verschillende punten x weergegeven voor de stromingssituatie met de versnellende hoofdstroom ($\psi_z \neq 0$) en de algemene stromingssituatie ($\psi_z = 0$). Wanneer we figuur 5.20 en tabel 5.5 bekijken, komen we tot een zeer bevredigende conclusie. De wervels groeien in vorticeit door het effect van wervelstrekking, verplaatsen zich van de wand af door de mutuele interactie en bewegen naar elkaar toe door het effect van de spiegelwervels. Alle drie deze waarnemingen komen overeen met het werkelijke gedrag van de benen van een hairpinwervel. In de algemene stromingssituatie

a) $x = 0.0, \omega_c = \pm 10.0, u_c = 0.25$ b) $x = 0.5, \omega_c = \pm 13.9, u_c = 0.48$ c) $x = 1.0, \omega_c = \pm 15.8, u_c = 0.69$ d) $x = 2.5, \omega_c = \pm 17.9, u_c = 1.34$ e) $x = 5.0, \omega_c = \pm 18.6, u_c = 2.41$ f) $x = 10.0, \omega_c = \pm 19.0, u_c = 4.45$

Figuur 5.20: Vorticiteitsplots voor $\psi_z = (xy^2 + y^2)/4$ voor twee wervels bij $Re = 1500$.

voor twee wervels (figuur 5.8) hadden we al gezien dat de wervels inderdaad als wervelpaar van de wand af bewegen. De vorticititeit in het centrum van de wervels daalde echter continu en daarbij bleken de wervels na enige tijd weer van elkaar af te bewegen (zie figuur 5.8e en f). Het aanleggen van de versnellende hoofdstroom geeft dus duidelijk resultaten die *meer* overeenkomen met de werkelijkheid van de hairpinbenen. Het is dus aannemelijk dat wervelstrekking een mechanisme is dat een belangrijke rol speelt in de ontwikkeling van hairpinwervels.

x	Γ^+	Γ^-	Γ
0.0	0.00	-1.00	-1.00
0.5	0.33	-0.86	-1.19
1.0	0.26	-0.79	-1.05
1.5	0.22	-0.75	-0.97
2.0	0.20	-0.73	-0.93
2.5	0.19	-0.71	-0.90
5.0	0.15	-0.67	-0.83
10.0	0.12	-0.66	-0.79

Tabel 5.6: *Circulatie voor verschillende x bij $\psi_z = (xy^2 + y^2)$ en $Re = 1500$.*

In bovenstaande tabel 5.6 zijn weer Γ^+ , Γ^- en Γ gegeven voor verschillende x . Omdat we nu te maken hebben met twee wervels met tegengestelde circulatie, zijn Γ^+ , Γ^- en Γ alleen bepaald voor de linkerhelft van het domein.

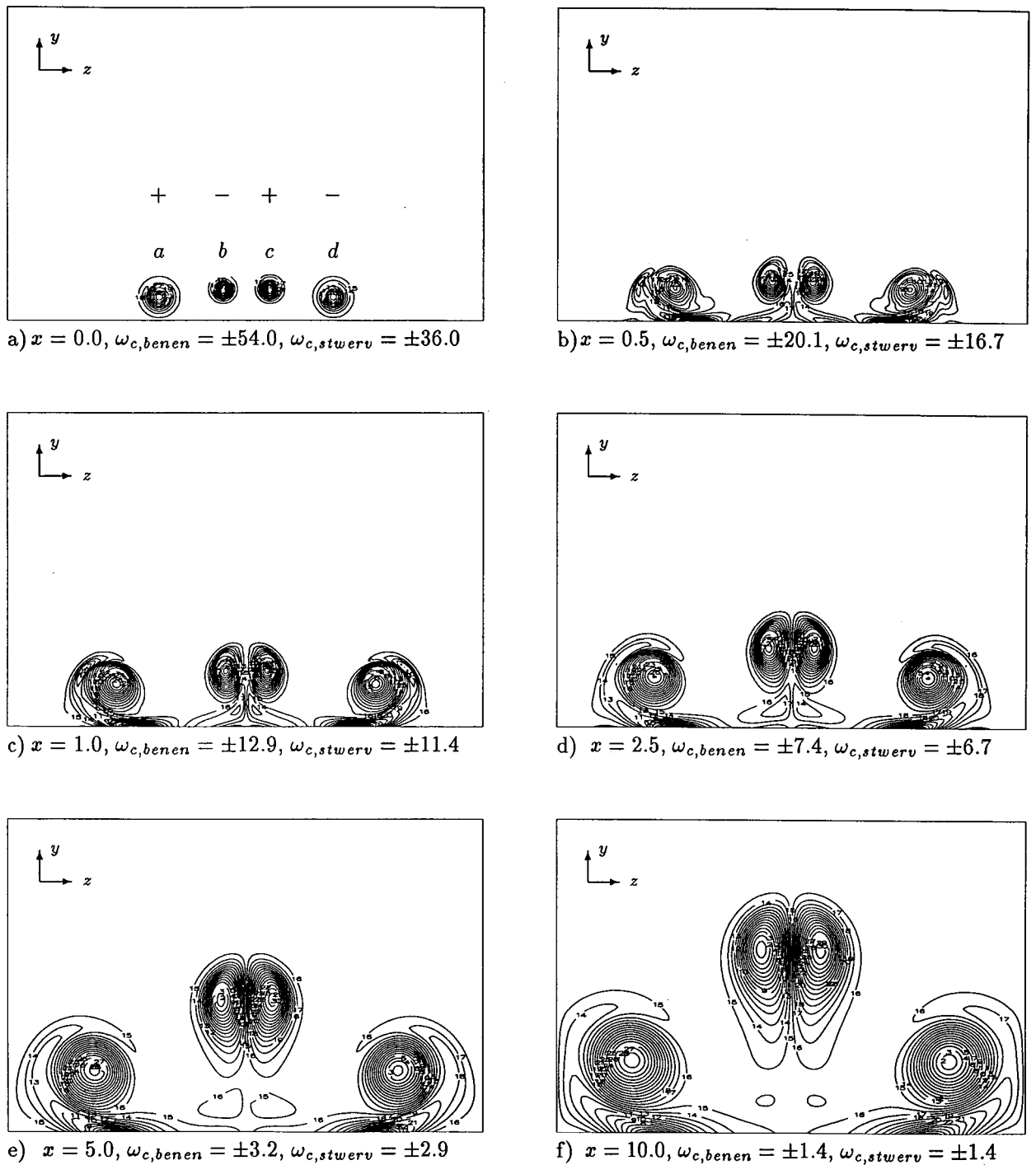
In tegenstelling tot de simulatie met één wervel is de totale circulatie Γ (in de linkerhelft van het domein) niet behouden, maar neemt langzaam in absolute waarde af met toenemende x . Een verklaring hiervoor kan zijn dat er cancellation van vorticititeit optreedt uit de linker- en rechterhelft van het domein. Dit is niet verder onderzocht.

5.5 Simulaties met benen en staande wervels

In de groep Werveldynamica en Turbulentie wordt naast numeriek onderzoek ook experimenteel onderzoek gedaan naar hairpinwervels, uitgevoerd in een windtunnel. De experimentele opstelling is eenvoudig: een half bolletje (diameter 1 cm) wordt op de platte kant op een vlakke plaat gelegd. Bij bepaalde snelheid van de hoofdstroom U , zullen achter het halve bolletje met regelmaat hairpinwervels ontstaan. De meting geschiedt met behulp van enkele hittedraden, men is dus alleen in staat u -snelheidscomponenten te meten.

Nu ontstaan er bij het genereren van hairpinwervels op deze manier naast hairpinwervels ook zogenaamde *staande wervels*. De vorticititeitsvector van deze staande wervels is parallel aan die van de hairpinbenen gericht en is van tegengesteld teken van vorticititeit als het naaste wervelbeen. De staande wervels bevinden zich aan weerskanten van de benen.

Geprobeerd is om in benadering bovenstaande experimentele situatie in een numeriek experiment te simuleren. De parameters die in de simulaties opgegeven dienen te worden,



Figuur 5.21: Vorticietsplots voor een stromingssituatie met staande wervels voor $Re = 996$.

zijn zo goed mogelijk geschat uit de resultaten van de windtunnelexperimenten.

De stromingsituatie op $x = 0.0$ met benen en staande wervels is schematisch weergegeven in figuur 5.21a. In deze contourplot zijn de vier wervels van links naar rechts aangeduid met de letters a , b , c en d ; het teken van vorticeit is daarboven gegeven. Wervels a en d zijn staande wervels met respectievelijk positieve en negatieve vorticeit, de waarde van de vorticeit in het centrum van de staande wervel wordt aangeduid met $\omega_{c,stwerv}$. De benen worden aangeduid door de letters b en c , met analoge notatie voor de respectievelijk negatieve en positieve vorticeit in het centrum: $\omega_{c,benen}$. De waarden voor de centrumvorticeit op $x = 0.0$ van de benen en staande wervels zijn gegeven in (5.18).

$$\begin{aligned} \omega_{c,benen,0} &= \pm 54.0 & \omega_{c,stwerv,0} &= \pm 36.0 \\ y_{benen,0} &= 0.20 & y_{stwerv,0} &= 0.15 \\ r_{benen,0} &= 0.10 & r_{stwerv,0} &= 0.15 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Hierin zijn ook gegeven de beginwaarde van de verticale positie y_0 , alsmede de beginstraal r_0 van zowel benen (superscript b, c) als staande wervels (superscript a, d).

De beginsituatie is symmetrisch rond $z = \frac{1}{2}z_{max}$, dus de horizontale afstand tussen staande wervel a en been b is even groot als de afstand tussen been c en staande wervel d . Beide afstanden worden aangeduid met $\Delta z_{been,stwerv}$, die een waarde van 0.40 heeft. De initiële horizontale afstand tussen twee benen Δz_{benen} bedraagt 0.30. Verder bevindt zich een wand op $y = 0$ en bedraagt het Reynoldsgetal 996.

De wervels bevinden zich in een stroming met Blasius-snelheidsprofiel met maximale snelheid U_{max} van 1.0. De gradiënt van dit Blasius-profiel is echter groter dan de gradiënt van figuur 5.6b: waar het buigpunt van het profiel in figuur 5.6b ongeveer op $y = 1.0$ ligt, ligt dat nu op $y = 0.5$.

Tenslotte is het belangrijk te vermelden dat er in de z -richting periodieke randvoorwaarden zijn toegepast en dat er geen versnelling van de hoofdstroom plaats vindt, dus $\psi_z = 0$.

Voor alle plots van numerieke simulaties in deze paragraaf gelden de gangbare afmetingen van het zy -domein: $z_{max} = 3.0$ en $y_{max} = 2.0$. In figuur 5.21 is te zien dat de benen omhoog bewegen van $y_{benen} = 0.20$ ($x = 0.0$) tot $y_{benen} = 1.17$ ($x = 10.0$). De vorticeit van de benen neemt sterk af: op $x = 0.0$ is deze ± 54.0 , op $x = 10.0$ is deze gedaald tot ± 1.4 . De staande wervels blijven relatief dicht bij de wand en dalen eveneens in vorticeit, tot een waarde die ongeveer gelijk is aan de vorticeit in het centrum van de benen.

Omdat in de windtunnelexperimenten alleen snelheidscomponenten kunnen worden gemeten, zijn in figuur 5.22 de contourplots van dezelfde simulatie gegeven van de u -snelheid. We zien dan dat het originele laminaire snelheidsprofiel verstoord wordt. Aan weerszijden van de benen, dus tussen de benen en de staande wervels, ontstaan gebieden waarin de u -snelheid hoger is dan in de beginsituatie. Naarmate x toeneemt is dit duidelijker te zien. Deze gebieden lijken veel op de *high-speed-streaks* en ontstaan doordat de benen en de staande wervels een zodanige snelheid induceren, dat er vloeistof van hoge snelheid uit de 'bulk' van de stroming naar de wand wordt getransporteerd. Er ontstaan ook *low-speed-streaks*: de vloeistof tussen de benen is van lage snelheid en wordt omhoog

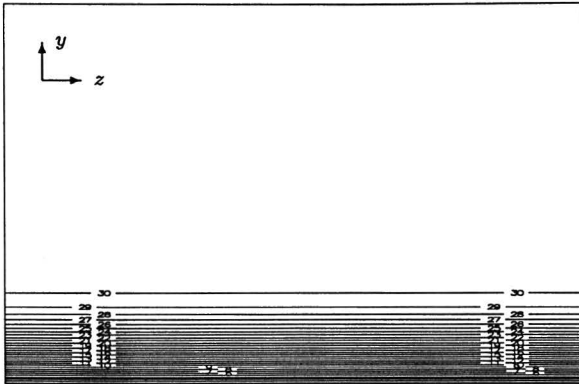
bewogen omdat de benen zelf omhoog bewegen. Ook de staande wervels transporteren lage-snelheidsvloeistof van de wand af, zij het in mindere mate. De staande wervels vormen ook low-speed-streaks (aan de randen van het domein, te zien in de linker- en rechterbenedenhoek van figuur 5.22).

Bovengenoemde resultaten komen kwalitatief enigszins overeen met de plots van de u -snelheid verkregen uit windtunnelexperimenten, uitgevoerd door Zondag. Een voorbeeld van een dergelijk experiment is gegeven in figuur 5.23. In deze figuur zien we de u -snelheid in het yz -vlak afgebeeld achter de kop van de hairpinwervel, we zien dus de ontwikkeling van de benen en de staande wervels. De lichtere gebieden met lage u -snelheid in de linker- en rechterbenedenhoek zijn de staande wervels. De benen zijn ook gebieden van lage snelheid, maar zijn moeilijker zichtbaar. Deze bevinden zich precies tussen de staande wervels in, op $z/D = 0$. We zien in figuur 5.23 het ontstaan van de low- en high-speed-streaks en ook de verplaatsing van de benen en staande wervels komt enigszins overeen met figuur 5.22. In beide gevallen blijven de staande wervels dicht tegen de wand. Dit klopt, want benen zijn immers sterker en bewegen de staande wervels dus naar beneden. Om een goede (kwantitatieve) vergelijking te kunnen doen zijn echter nauwkeuriger resultaten van fysische experimenten nodig.

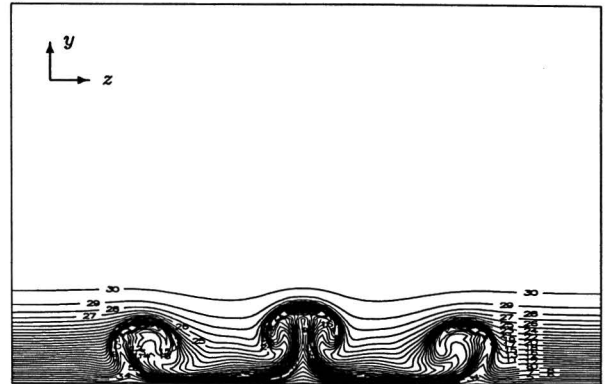
Om het netto effect van de staande wervels op het gedrag van de benen te bekijken is dezelfde simulatie herhaald zonder de staande wervels. De resultaten zien we in een serie contourplots van de vorticititeit (figuur 5.24) en de u -snelheid (figuur 5.25).

Wanneer we figuur 5.21 met figuur 5.24 vergelijken, zien we dat de vorticititeit van de benen nauwelijks verschilt. De verticale positie y_{benen} verschilt veel duidelijker. Kennelijk zorgen de staande wervels ervoor dat de benen dicht bij de wand blijven. Dit is inderdaad logisch: de staande wervels induceren een snelheid in de benen die resulteert in een snelheid in negatieve y -richting.

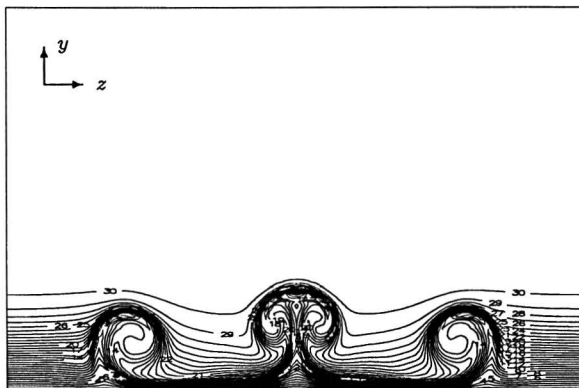
Aangezien de benen zich zonder staande wervels op een grotere hoogte bevinden, zou men verwachten dat de vorticititeit van de benen zonder staande wervels groter is. De longitudinale snelheid is daar immers hoger en er is dan minder tijd voor diffusie. Dit zien we echter niet gebeuren. De vorticititeit van de benen zonder staande wervels is juist iets lager dan de vorticititeit van de benen wanneer de staande wervels wel aanwezig zijn. Een verklaring hiervoor is dat de longitudinale snelheid u juist niet lager is wanneer er staande wervels aanwezig zijn. De staande wervels bewegen mogelijk hoge-snelheidsvloeistof naar boven, waardoor de benen juist sterker blijven.



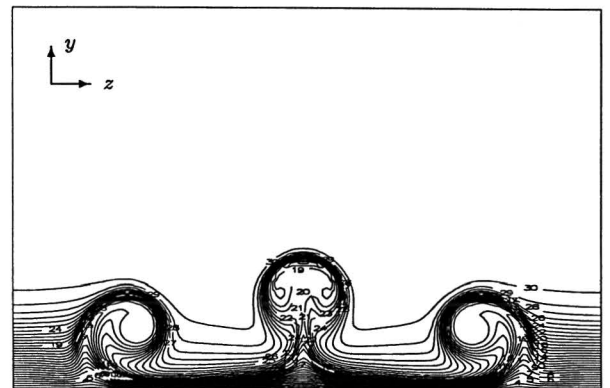
a) $x = 0.0, u_{c,benen} = 0.62, u_{c,stwerv} = 0.45$



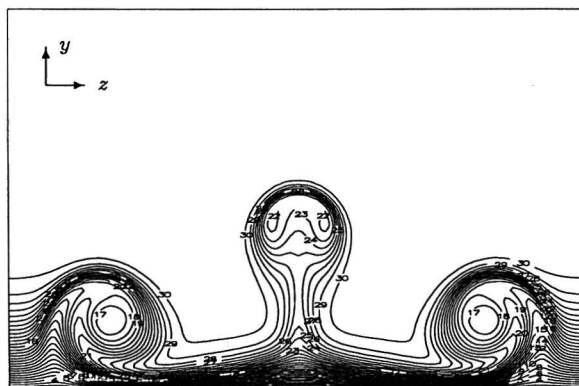
b) $x = 0.5, u_{c,benen} = 0.62, u_{c,stwerv} = 0.44$



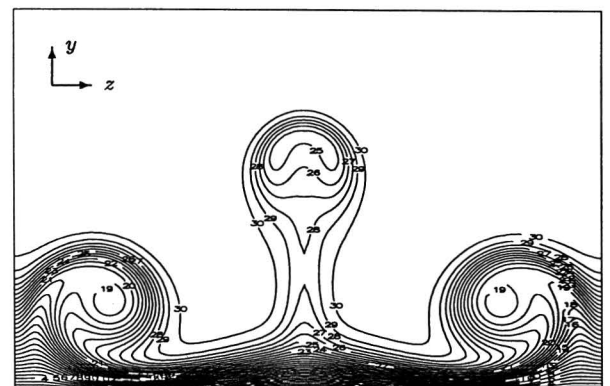
c) $x = 1.0, u_{c,benen} = 0.60, u_{c,stwerv} = 0.46$



d) $x = 2.5, u_{c,benen} = 0.62, u_{c,stwerv} = 0.45$

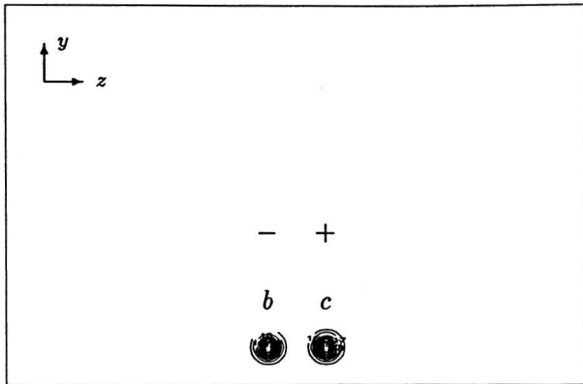


e) $x = 5.0, u_{c,benen} = 0.72, u_{c,stwerv} = 0.53$

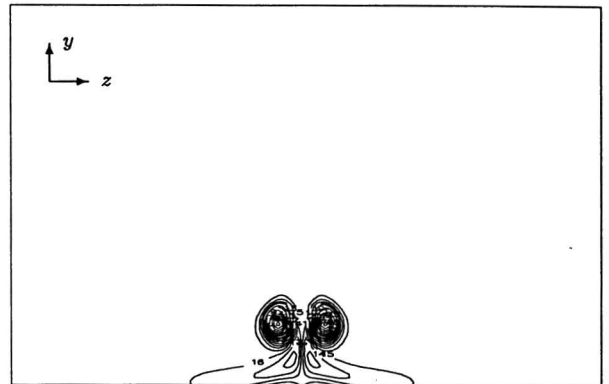


f) $x = 10.0, u_{c,benen} = 0.84, u_{c,stwerv} = 0.60$

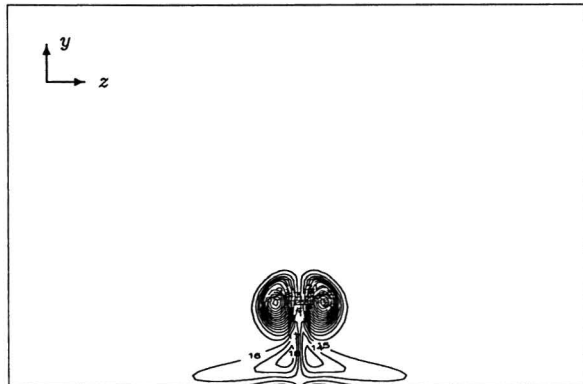
Figuur 5.22: u -snelheidsplots voor een stromingssituatie met staande wervels voor $Re = 996$.



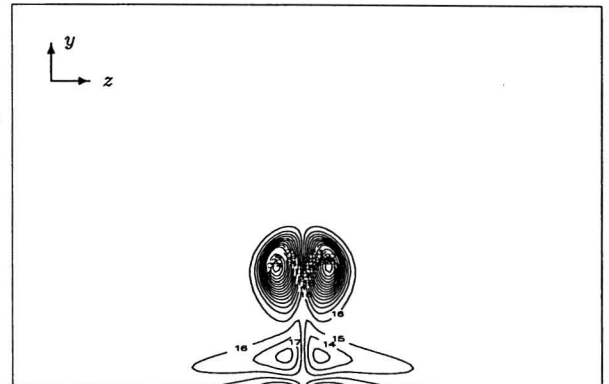
a) $x = 0.0, \omega_{c,benen} = \pm 54.0$



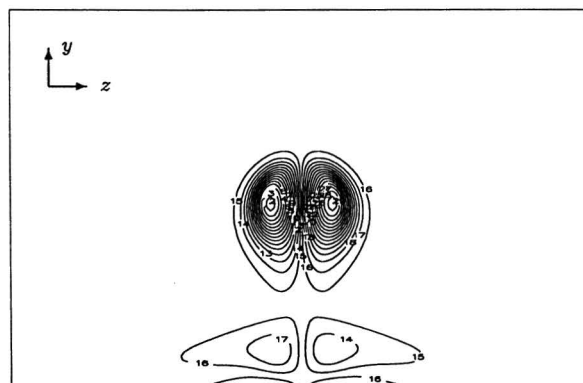
b) $x = 0.5, \omega_{c,benen} = \pm 19.6$



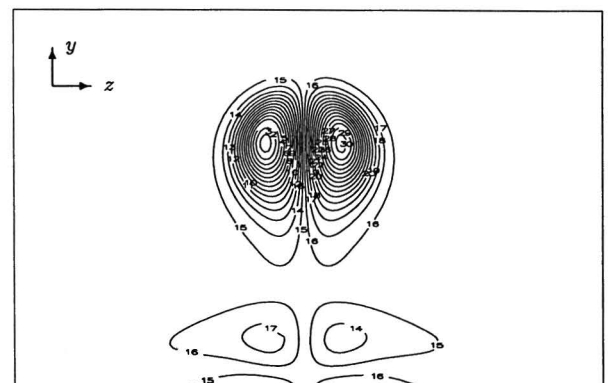
c) $x = 1.0, \omega_{c,benen} = \pm 12.3$



d) $x = 2.5, \omega_{c,benen} = \pm 7.1$

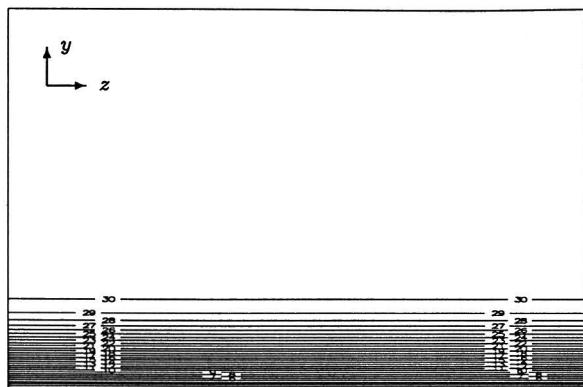
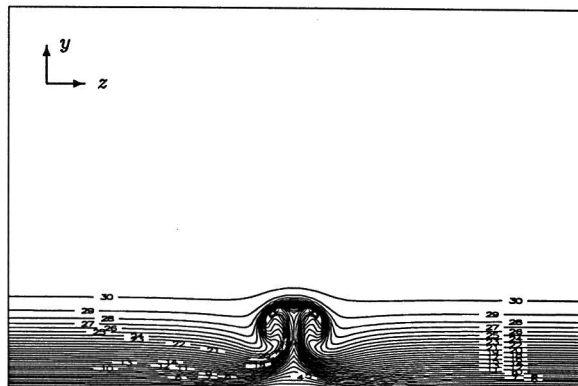
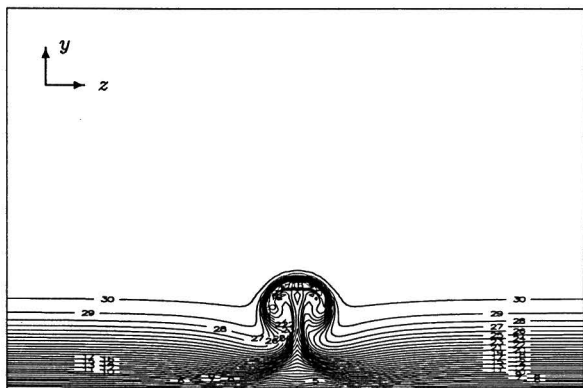
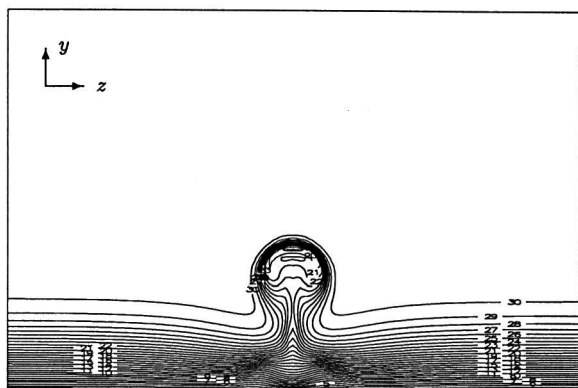
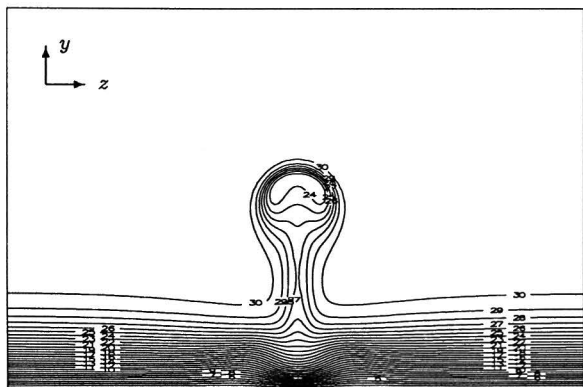
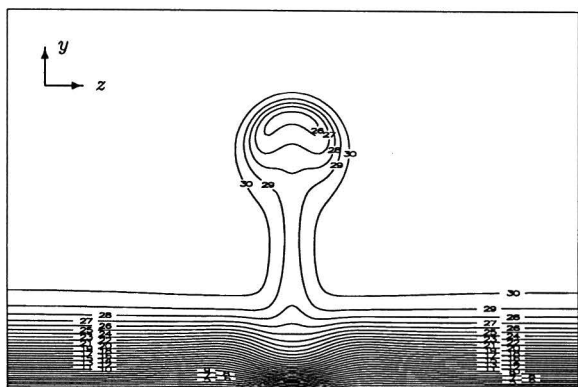


e) $x = 5.0, \omega_{c,benen} = \pm 2.9$



f) $x = 10.0, \omega_{c,benen} = \pm 1.3$

Figuur 5.24: Vorticiteitsplots voor een stromingssituatie zonder staande wervels voor $Re = 996$.

a) $x = 0.0, u_{c,benen} = 0.62$ b) $x = 0.5, u_{c,benen} = 0.60$ c) $x = 1.0, u_{c,benen} = 0.61$ d) $x = 2.5, u_{c,benen} = 0.68$ e) $x = 5.0, u_{c,benen} = 0.81$ f) $x = 10.0, u_{c,benen} = 0.89$

Figuur 5.25: u -snelheidsplots voor een stromingssituatie zonder staande wervels voor $Re = 996$.

Hoofdstuk 6

Conclusies en aanbevelingen

6.1 Conclusies

2D numerieke simulaties Het is mogelijk gebleken de instabiliteit van de schuiflaag met het 2D programma te simuleren. Na zekere tijd ontstaan door een verstoring van de vorticeitsverdeling wervels op de scheidingslijn. Hoe groter deze verstoring, hoe eerder wervels zichtbaar zijn.

Wanneer over de gehele lengte van de scheidingslijn random verstoringen in de vorticeitsverdeling aangebracht worden, zien we ter hoogte van de scheidingslijn een reeks wervels ontstaan, de scheidingslijn krijgt dan een sinusoidale vorm. De amplitude van deze oscillatie neemt - zoals voorspeld - toe met de tijd, de golflengte van de sinus wordt ook groter met de tijd. Deze laatste waarneming verschilt met de voorspellingen uit theorie en andere numerieke experimenten waarin de golflengte constant is. Dit verschil is waarschijnlijk te wijten aan diffusie.

Er bleken geen wervels te ontstaan wanneer een stroming met het Blasius-snelheidsprofiel langs een wand bij verschillende Reynoldsgetallen en maximale hoofdstroomsnelheid werd gesimuleerd. Wanneer een wervel werd aangebracht in de grenslaag ontstond wel wandvorticeit, maar hieruit ontstond geen wervel.

Numerieke experimenten met het zogenaamde 'buigpunt'-snelheidsprofiel waren op dat punt succesvoller. Bij $Re = 667$ en $U_{max} = 2.0$ ontstond nog geen wervel en diffundeerde het buigpunt-profiel tot het Blasius-snelheidsprofiel, maar bij $U_{max} = 4.0$ ontstond er op $t = 3.0$ wel een wervel. Deze wervel is echter waarschijnlijk niet ontstaan uit wandvorticeit, maar uit het buigpunt-snelheidsprofiel zelf, dat lokaal enigszins op het snelheidsprofiel van een schuiflaag lijkt.

Q3D numerieke simulaties Er is gebleken dat het resultaat van simulaties met wervels in de buurt van een wand sterk afhankelijk is van het Reynoldsgetal. Wanneer Re klein is, daalt de centrumvorticeit van de wervel(s) ten gevolge van viskeuze diffusie zeer snel.

Naarmate Re groter wordt neemt de viskeuze diffusie af. Echter, wanneer in de simulaties Re groter wordt dan 1500, is de invloed van numerieke diffusie niet meer te verwaarlozen.

Uit een simulatie van een wervel met bepaalde beginvorticeit in de buurt van een wand is gebleken dat deze wervel wandvorticeit van tegengesteld teken genereert. De wandvorticeit komt door diffusie gedeeltelijk los van wand en evolueert tot een secundaire wervel, die ook weer wandvorticeit genereert. De vorticeit van al deze vier gebieden daalt continu gedurende de simulatie. Dit is het gevolg van diffusie en is al eerder waargenomen door Stoffels (zie [Stoffels 94]).

De primaire wervel blijkt in een cirkelvormig traject (tegen de klok in) te bewegen, te verklaren met behulp van het spiegelwervelprincipe.

Wanneer twee wervels van tegengestelde vorticeit in dezelfde stroming worden geplaatst, zien we nauwelijks wandvorticeit ontstaan. Door de mutuele interactie bewegen de wervels van de wand af en is de wandvorticeit logischerwijs veel kleiner dan in het geval met één wervel. De twee wervels bewegen ook naar elkaar toe; dit is eveneens te verklaren met het spiegelwervelprincipe. Ook nu daalt de vorticeit door diffusie continu in het verloop van de simulatie.

Uit berekening van het u -snelheidsprofiel tussen de twee wervels is gebleken dat het originele lineaire u -snelheidsprofiel door de twee wervels wordt vervormd tot een snelheidsprofiel waarin op bepaalde hoogte een grote gradiënt (danwel schuiflaag) te zien is. Deze bevindt zich dan aan de bovenkant van de twee wervels en is het gevolg van de lage-snelheidsvloei die door de twee wervels naar boven is getransporteerd.

Het apart bekijken van de orde-grootte van de verschillende termen uit de vorticeitsvergelijking voor een representatieve stromingssituatie gaf als resultaat dat de convectieve term dominant is in het gehele stromingsgebied. Alleen aan de wand is ook de viskeuze term van dezelfde orde-grootte als de convectieve term. Dit resultaat komt niet overeen met de eerdere waarnemingen van Brooke en Hanratty (zie [Brooke 92]): zij vonden met een 3D instationaire code een dominante tilting-term, waardoor wervels in staat bleken te groeien in sterkte. We kunnen dus concluderen dat we met onze Q3D benadering niet in staat zijn tilting (en twisting) van wervels te simuleren en dat de wervels in onze simulaties dientengevolge ook niet zullen toenemen in sterkte.

Een ander theoretisch mechanisme om wervels te laten toenemen in sterkte bleek men wel met het Q3D programma te kunnen simuleren, namelijk wervelstrekking. In een simulatie met een wervel in een constant versnellende hoofdstroom ($\frac{\partial u}{\partial x} > 0$) zien we dat de straal van de wervel sterk afneemt en de vorticeit in het centrum toeneemt, wat inderdaad op wervelstrekking duidt. De circulatie is gedurende de hele simulatie behouden gebleken.

In meer gecompliceerde stromingssituaties met een versnellende hoofdstroom is ook gebleken dat wervelstrekking optreedt: uit een simulatie met twee wervels dicht bij een wand in een versnellende hoofdstroom met lineair snelheidsprofiel blijkt dat er grote overeenkomsten zijn met het gedrag van benen van de hairpinwervel: de vorticeit van de benen neemt toe en de benen bewegen naar elkaar toe en van de wand af. De hoofdstroom is in staat te versnellen doordat er door de bovenkant van het domein vloeistof wordt ingebracht. Dit

is fysisch gezien goed verdedigbaar, omdat de kop van de hairpinwervel ook vloeistof uit de bulk naar de wand transporteert. Een instroming vanaf de zijkanten zou ook mogelijk geweest zijn, dan simuleert men de invloed van het zog achter de kop van de hairpinwervel.

Uit de simulaties met de staande wervels aan weerskanten van de benen van de hairpinwervel is gebleken dat het ontstaan van de low- en high-speed-streaks enigszins overeenkomt met hetgeen waargenomen wordt in windtunnelexperimenten. In beide gevallen ontstaan low-speed-streaks tussen de benen en high-speed-streaks tussen de benen en de staande wervels in. Een numerieke simulatie zonder staande wervels bracht aan het licht dat de staande wervels ervoor zorgen dat de benen dichterbij de wand blijven (door de mutuele interactie tussen benen en staande wervels) en relatief sterker blijven (door het stuwen van hoge snelheidsvloeistof naar de benen).

6.2 Aanbevelingen voor verder onderzoek

2D numerieke simulaties

- In Q3D simulaties is het snelheidsprofiel op de vertikaal tussen twee wervels berekend. Dit (instationaire) snelheidsprofiel kan gebruikt worden in simulaties van de kop van de hairpinwervel.
- Bij de simulaties met schuiflagen dient nader onderzoek verricht te worden naar de invloed van diverse parameters als Re , U_{max} en de grootte van de verstoring op het gedrag van de instabiliteit. Dit geldt overigens ook voor de 2D simulaties met het buigpunt-profiel.

Q3D numerieke simulaties

- Het uitsplitsen van de vortcriteitsvergelijking in afzonderlijke termen in § 5.4.1 is niet geheel correct. Het is mogelijk de convectieve term correcter te berekenen. Ook de tilting- twisting- en stretching-term kunnen beter berekend worden.
- Het longitudinale snelheidsprofiel is op dit moment alleen te variëren in de hoogte y . Wanneer het snelheidsprofiel een functie van y en z zou zijn, zullen simulaties uitgevoerd kunnen worden, die beter op de hairpinwervel zijn toegespitst.

Algemeen

- Er is nog steeds geen duidelijkheid over welk differentieschema precies in welke stromingssituatie het beste is. Nader onderzoek op dit punt is noodzakelijk, zodat meer inzicht wordt verkregen in het verschijnsel numerieke diffusie. Misschien verdient het dan aanbeveling een hybride-schema of een hogere orde upwinding-schema te gebruiken.

- Tijdens het afstudeeronderzoek zijn ook programma's geschreven waarmee gemakkelijk een zogenaamde scatterplot (vorticiteit tegen stroomfunctie) gemaakt kan worden. Uit zo'n scatterplot kan men gegevens afleiden over de aard van een wervel. Dit kan in het vervolg van het onderzoek handig zijn.
- De circulatie wordt nu nog achteraf berekend met een speciaal hiervoor geschreven programma. Het is handiger een procedure in het 2D en Q3D programma op te nemen waarmee de circulatie berekend kan worden.
- In simulaties waarin de verschijnselen heel dicht aan de wand van belang zijn, kan een niet-lineair rooster toegepast worden, met een grotere dichtheid van roosterpunten dicht bij de wand.
- Het verschijnsel cancellation van vorticiteit dient nader onderzocht worden. Men kan bijvoorbeeld twee wervels van zeer hoge, tegengestelde vorticiteit vlak naast elkaar leggen.

Bibliografie

- [Andreopoulos 96] J. Andreopoulos en J.H. Agui.
Wall-vorticity flux dynamics in a two-dimensional turbulent boundary layer.
J. Fluid Mech. (1996), vol. 309, pp 45-84.
- [Van den Bosch 97] E. van den Bosch.
Handleiding voor het gebruik van het 2D en Q3D programma.
Technische Universiteit Eindhoven, 1997.
- [Brooke 92] J.W. Brooke en T.J. Hanratty.
Origin of turbulence-producing eddies in a channel flow.
Phys. Fluids A 5 (4), April 1994, 1011-1022.
- [Dankers 93] R.J. Dankers.
Het berekenen van tweedimensionale stromingsproblemen volgens de ADI-methode.
Verslagnr. R-1201-S Technische Universiteit Eindhoven, 1993.
- [Drazin 81] P.G. Drazin en W.H. Reid
Hydrodynamic stability.
Cambridge University Press, 1981.
- [Fletcher 91] C.A.J. Fletcher
Computational techniques for fluid dynamics, volume I en II.
Springer-Verlag, 1991.
- [Van Galen 94] R.A.M.L van Galen
Design of a modular multichannel hot-wire anemometer system.
Technische Universiteit Eindhoven, 1994.
- [Heijmans 96] R.M.H. Heijmans
Effect van turbulators op de stroming door een kanaal.
Rapp. nr. WOC-WET 95.036, Technische Universiteit Eindhoven, 1996.
- [Van Heijst 92] G.J.F. van Heijst
Voortgezette stromingsleer 1.
Collegedictaat 3T100, Technische Universiteit Eindhoven, 1992.

- [Hinze 59] J.O. Hinze
Turbulence.
McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1959.
- [Hoffmann 93] K.A. Hoffmann en S.T. Chiang
Computational fluid dynamics for engineers - volume 1.
Engineering Education System, Wichita, USA, 1993.
- [Joslin 95] R.D. Joslin en C.E. Grosch
Growth characteristics downstream of a shallow bump: computation and experiment.
Phys. Fluids 7 (12), December 1995, 3042-3047.
- [Kundu 90] P.K. Kundu
Fluid Mechanics.
Academic Press, Inc., 1990.
- [Luton 95] A. Luton, S. Ragab and D. Telionis
Interaction of spanwise vortices with a boundary layer.
Phys. Fluids 7 (11), November 1995, 2757-2765.
- [Nieuwstadt 82] F.T.M. Nieuwstadt
Turbulentie.
Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1992.
- [Patankar 80] S.V. Patankar
Numerical heat transfer and fluid flow.
McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1980.
- [Robinson 91] S.K. Robinson
The kinematics of turbulent boundary layer structures.
NASA Technical Memorandum 103859, 1991.
- [Smith 91] C.R. Smith, J.D.A. Walker, A.H. Haidari en U. Sobrun
On the dynamics of near-wall turbulence.
Phil. Trans. R. Soc. Lond. A (1991) **336**, 131-175.
- [Van Steenhoven 84] A.A. van Steenhoven
De toepassing van de eindige elementenmethode bij warmte- en stromingsproblemen.
Collegedictaat 4P630, Technische Universiteit Eindhoven, 1984.
- [Stoffels 94] F.A. Stoffels.
Numerieke analyse van longitudinale wervels in een laminaire grenslaag.
Verslagnr. R-1270-A Technische Universiteit Eindhoven, 1994.
- [Vossers 86] G. Vossers
Fysische transportverschijnselen voor W.
Collegedictaat 3C130, Technische Universiteit Eindhoven, 1986.

[Walker 90] J.D.A. Walker

Models based on dynamical features of the wall layer.
Appl. Mech. Rev. **43** (5) Part 2, May 1990, S232-S239.

[Zondag 97] H.A. Zondag.

The dynamics of hairpin vortices in a laminar boundary layer.
Technische Universiteit Eindhoven, 1997.

Bijlage A

De stelsels basisvergelijkingen

A.1 De basisvergelijkingen in continue vorm

De 2D vergelijkingen

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = -\frac{\partial(u\omega_z)}{\partial x} - \frac{\partial(v\omega_z)}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right]. \quad (\text{A.1})$$

$$\tau \frac{\partial \psi_z}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} \right] + \omega_z. \quad (\text{A.2})$$

De Q3D vergelijkingen

$$u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = -\frac{\partial(v\omega_x)}{\partial y} - \frac{\partial(w\omega_x)}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right]. \quad (\text{A.3})$$

$$2u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{\partial(uw)}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]. \quad (\text{A.4})$$

$$\tau \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \left[\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} \right] + \omega_x. \quad (\text{A.5})$$

A.2 De basisvergelijkingen in discrete vorm

Wanneer de continue basisvergelijkingen gediscrètiseerd worden volgens de Alternating Direction Implicit (ADI) methode, wordt elke tijd- danwel plaatsstap gesplitst in twee halve tijd- of plaatsstappen, waarin telkens in één afzonderlijke coördinaatrichting (x , y of z) wordt geïtereerd.

De 2D vergelijkingen

De twee halve tijdstappen van de gediscretiseerde vortcriteitsvergelijking (A.1) zijn

$$\left[1 - \frac{\Delta t}{Re} L_{xx} + \Delta t L_x u_{j,k}^n\right] \Delta \omega_{j,k}^* = \left[\frac{\Delta t}{Re} (L_{xx} + L_{yy}) - \Delta t (L_x u_{j,k}^n + L_y v_{j,k}^n)\right] \omega_{j,k}^n \quad (\text{A.6})$$

en

$$\left[1 - \frac{\Delta t}{Re} L_{yy} + \Delta t L_y v_{j,k}^n\right] \Delta \omega_{j,k}^{n+1} = \Delta \omega_{j,k}^*. \quad (\text{A.7})$$

Voor de Poissonvergelijking (A.2) zijn dit

$$\left[1 - \frac{\Delta t}{\tau} L_{xx}\right] \Delta \psi_{j,k}^* = \left[\frac{\Delta t}{\tau} (L_{xx} + L_{yy})\right] \psi_{j,k}^n + \frac{\Delta t}{\tau} \omega_{j,k}^n \quad (\text{A.8})$$

en

$$\left[1 - \frac{\Delta t}{\tau} L_{yy}\right] \Delta \psi_{j,k}^{n+1} = \Delta \psi_{j,k}^*. \quad (\text{A.9})$$

In deze set discrete vergelijkingen vindt de iteratie in de eerste tijdstap plaats in de x -richting, in de tweede tijdstap in de y -richting.

De Q3D vergelijkingen

De gesplitste vortcriteitsvergelijking (A.3) ziet er uit als

$$\left[1 - \frac{\Delta x}{Re u_{j,k}^n} L_{zz} + \frac{\Delta x}{u_{j,k}^n} L_z w_{j,k}^n\right] \Delta \omega_{j,k}^* = \left[\frac{\Delta x}{Re u_{j,k}^n} (L_{zz} + L_{yy}) - \frac{\Delta x}{u_{j,k}^n} (L_z w_{j,k}^n + L_y v_{j,k}^n)\right] \omega_{j,k}^n + \frac{\Delta x}{u_{j,k}^n} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad (\text{A.10})$$

en

$$\left[1 - \frac{\Delta x}{Re u_{j,k}^n} L_{yy} + \frac{\Delta x}{u_{j,k}^n} L_y v_{j,k}^n\right] \Delta \omega_{j,k}^{n+1} = \Delta \omega_{j,k}^*. \quad (\text{A.11})$$

De twee halve plaatsstappen voor de snelheidsvergelijking (A.4) geven na splitsing:

$$\left[1 - \frac{\Delta x}{2Re u_{j,k}^n} L_{zz} + \frac{\Delta x}{2u_{j,k}^n} L_z w_{j,k}^n\right] \Delta u_{j,k}^* = \left[\frac{\Delta x}{2Re u_{j,k}^n} (L_{zz} + L_{yy}) - \frac{\Delta x}{2u_{j,k}^n} (L_z w_{j,k}^n + L_y v_{j,k}^n)\right] u_{j,k}^n - \frac{\Delta x}{2u_{j,k}^n} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{A.12})$$

en

$$\left[1 - \frac{\Delta x}{2Re u_{j,k}^n} L_{yy} + \frac{\Delta x}{2u_{j,k}^n} L_y v_{j,k}^n\right] \Delta u_{j,k}^{n+1} = \Delta u_{j,k}^*. \quad (\text{A.13})$$

De discrete stroomfunctie wordt berekend met de volgende twee discrete formules:

$$\left[1 - \frac{\Delta x}{\tau} L_{zz}\right] \Delta \psi_{j,k}^* = \left[\frac{\Delta x}{\tau} (L_{zz} + L_{yy})\right] \psi_{j,k}^n + \frac{\Delta x}{\tau} \omega_{j,k}^n \quad (\text{A.14})$$

en

$$\left[1 - \frac{\Delta x}{\tau} L_{yy}\right] \Delta \psi_{j,k}^{n+1} = \Delta \psi_{j,k}^*. \quad (\text{A.15})$$

In de eerste plaatsstappen vindt de iteratie plaats in de z -richting, daarna in y -richting.

In de discrete basisvergelijkingen in deze bijlage komt een hoeveelheid nieuwe variabelen voor, die kort zullen worden toegelicht.

De variabele τ is reeds toegelicht in § 2.4 op pagina 18. Verder stellen Δt (2D) en Δx (Q3D) de grootte van de tijd- danwel plaatsstap voor. Re is wederom het Reynoldsgetal. De waarden voor vortciteit, stroomfunctie en snelheidscomponenten in een bepaald punt (j, k) in het rooster op tijdstip $t = n\Delta t$ c.q. plaats $x = n\Delta x^1$ worden gegeven door $\omega_{j,k}^n$, $\psi_{j,k}^n$ en $u_{j,k}^n$, $v_{j,k}^n$ en $w_{j,k}^n$. De waarden voor ω , ψ en u op een tijd- of plaatsstap later worden berekend met

$$\begin{aligned} \Delta \omega_{j,k}^{n+1} &= \omega_{j,k}^{n+1} - \omega_{j,k}^n \\ \Delta \psi_{j,k}^{n+1} &= \psi_{j,k}^{n+1} - \psi_{j,k}^n \\ \Delta u_{j,k}^{n+1} &= u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

waarbij $\omega_{j,k}^{n+1}$, $\psi_{j,k}^{n+1}$ en $u_{j,k}^{n+1}$ de waarden voorstellen op $t = (n+1)\Delta t$ danwel $x = (n+1)\Delta x$. De waarden voor $\omega_{j,k}$, $\psi_{j,k}$ en $u_{j,k}$ na de eerste halve tijdstap worden aangegeven met een * als superscript.

Voorts komen veelvuldig afkortingen voor differentialen voor, deze beginnen met L . De index van L geeft de richting aan waarin gedifferentieerd wordt, het aantal indices in de index geeft de orde van differentiatie aan. De volgende twee voorbeelden

$$\begin{aligned} L_{xx}\psi_{j,k}^n &= \frac{\psi_{j-1,k}^n - 2\psi_{j,k}^n + \psi_{j+1,k}^n}{\Delta x^2} \\ L_y v_{j,k}^n \omega_{j,k}^n &= \frac{v_{j,k+1}^n \omega_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n \omega_{j,k-1}^n}{2\Delta y} \end{aligned}$$

stellen achtereenvolgens de tweede afgeleide van $\psi_{j,k}^n$ naar x en de eerste afgeleide van $v_{j,k}^n \omega_{j,k}^n$ naar y voor.

Tenslotte komt in de Q3D vortciteitsvergelijking (A.10) een uitdrukking voor die de bijdrage van tilting en twisting voorstelt (de laatste term aan de rechterkant). In de Q3D snelheidsvergelijking (A.12) komt eveneens een extra term voor (wederom de laatste term aan de rechterkant), deze stelt de drukval in de hoofdstroomrichting voor. We zijn niet in staat deze term goed te berekenen; in het huidige programma wordt deze term voorlopig weggelaten.

¹De definitie van t , x en n is reeds gegeven door (2.31) op pagina 19

Bijlage B

Viskeuze en numerieke diffusie

In numerieke simulaties van viskeuze stromingen hebben we te maken hebben met twee soorten diffusie: viskeuze diffusie en numerieke diffusie. Beide effecten zijn altijd aanwezig, hun invloed hangt af van respectievelijk het Reynoldsgetal en één of enkele roosterparameters. We vermoeden dat het aantal roosterpunten de grootste bepalende factor is voor de invloed van numerieke diffusie, waarbij het resultaat natuurgetrouwer wordt naarmate het aantal roosterpunten groter wordt. Bij een oneindig aantal roosterpunten zou een continue stromingssituatie ontstaan.

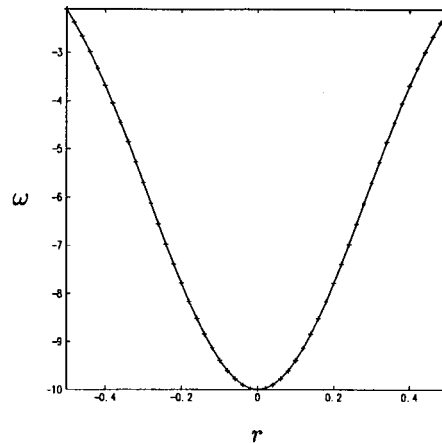
Re	N	ω_c
1500	150×100	-9.16
	300×200	-9.25
15000	150×100	-9.57
	300×200	-9.84
∞	150×100	-9.96
	300×200	-9.97

Tabel B.1: Totale diffusie van ω_c bij verschillende Re en N op $x = 2.5$.

Er zijn met behulp van het Q3D programma zes zeer simpele simulaties uitgevoerd met de volgende configuratie: een Gaussische wervel met maximale vorticeit in het centrum van $\omega_{c,0} = -10.0$ en beginstraal $r_0 = 0.4$ bevindt zich op $x = 0.0$ in het midden van het stromingsdomein, dus op $(z, y) = (1.5, 1.0)$. Er zijn geen wanden aanwezig; er zal dus geen secundaire vorticeit ontstaan. Voorts bevindt de wervel zich in een uniforme hoofdstroming, waarbij $U_{max} = 2.0$. Bij het differentiëren van de convectieve term uit de basisvergelijkingen is gebruik gemaakt van het *upwind*-differentieschema. Overige niet vermelde parameterwaarden vindt men in (3.1) en (3.2).

De simulaties zijn uitgevoerd voor drie verschillende Reynoldsgetallen, voor twee verschillende afmetingen van het rooster ($N = nz \times ny$). In tabel B.1 staan de resultaten gerangschikt van deze zes simulaties. In de derde kolom staan gegeven de waarden voor de centrumvorticeit van de wervel op $x = 2.5$, die als representatieve 'moment'opname

wordt verondersteld. Deze waarden zijn berekend uit de figuren van de werveldoorsnedes op $x = 2.5$, afgebeeld in figuur B.2. De doorsnede van de wervel op $x = 0.0$ is afgebeeld in figuur B.1. In deze figuur is de vorticheit ω uitgezet tegen de straal r voor het interval $-0.5 < r < 0.5$. In de zes figuren zijn tevens verschillen in de vorm van de vorticheitsverdeling te zien, waaruit men eveneens conclusies kan trekken over de invloed van viskeuze danwel numerieke diffusie.



Figuur B.1: Doorsnede van de vorticheitsverdeling op $x = 0.0$.

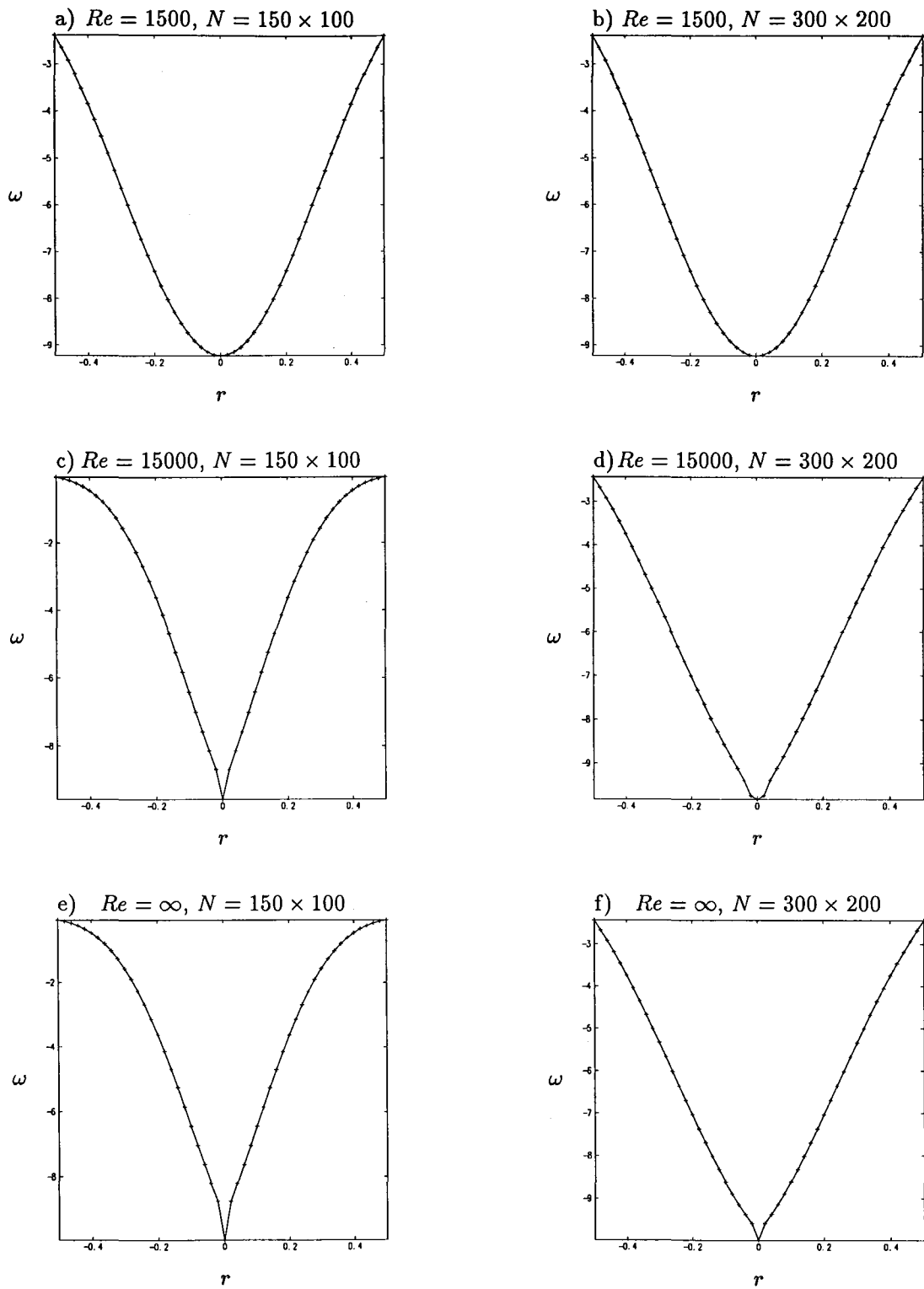
B.1 De invloed van viskeuze diffusie

We bekijken eerst de verschillende waarden voor ω_c bij een gelijk aantal roosterpunten. Wanneer $N = 150 \times 100$, zien we dat de vorticheit van de wervel meer afneemt naarmate het Reynoldsgetal kleiner is. De centrumvorticheit is bij $Re = 15000$ 4.5% hoger dan bij $Re = 1500$, bij een oneindig hoog Reynoldsgetal is deze weer 4.1% hoger dan bij $Re = 15000$. De totale diffusie is dus het grootst bij $Re = 1500$. Wanneer we de waarden voor ω_c op analoge manier vergelijken voor het rooster met vier maal zo veel roosterpunten ($N = 300 \times 200$) zijn deze twee percentages respectievelijk 6.4% en 1.3%. Deze vier genoemde percentages geven een goede kwantitatieve indicatie voor de invloed van *viskeuze diffusie*.

B.2 De invloed van numerieke diffusie

Wanneer we de procentuele verschillen tussen de waarden voor ω_c bij verschillend aantal roosterpunten (Re is constant) berekenen, hebben we een kwantitatieve benadering van de invloed van *numerieke diffusie*.

Voor elk Reynoldsgetal geldt dat de totale diffusie het kleinst is wanneer het aantal roosterpunten het grootst is. Voor $Re = 1500$ is dit een verschil in ω_c van 1.0%, voor $Re = 15000$



Figuur B.2: Doorsnedes van de vorticitetsverdeling op $x = 2.5$.

2.8% en voor een oneindig groot Reynoldsgetal is dit 0.1%. Bij dit laatste percentage dient aangetekend te worden dat een waarde van $\omega_c = -9.96$ nauwelijks nog kan toenemen (ω_c kan niet groter worden dan -10.0).

De verlaagde totale diffusie bij een groter aantal roosterpunten kan alleen het gevolg zijn van een verandering van de numerieke diffusie. De percentages van 1.0%, 2.8% en 0.1% zijn duidelijk lager dan de berekende percentages voor de viskeuze diffusie.

B.3 Conclusies

Samenvattend leidt dit tot een aantal bevredigende conclusies:

- viskeuze diffusie neemt af bij een hoger Reynoldsgetal,
- numerieke diffusie neemt af bij een groter aantal roosterpunten en
- de invloed van numerieke diffusie neemt toe bij een hoger Reynoldsgetal, maar zelfs voor $Re > 1500$ is de invloed van numerieke diffusie kleiner dan de invloed van viskeuze diffusie.

Dit laatste betekent dat voor Reynoldsgetallen van kleiner of ongeveer gelijk aan 1500 viskeuze diffusie zeker dominant is boven numerieke diffusie.

Uit de figuren van de werveldoorsnedes kunnen we ook nog concluderen dat de vorticitetsverdeling puntiger wordt naarmate het Reynoldsgetal hoger wordt. Vergelijk hiervoor figuren B.1a, c en e of figuren B.1b, d en f. Ook het aantal roosterpunten heeft duidelijk invloed op de vorm van de vorticitetsverdeling: deze is puntiger wanneer het aantal roosterpunten lager is.

Het niet-Gaussisch worden van de vorticitetsverdeling is een ongewenst effect, hoewel de puntiger vorticitetsverdeling bij hogere Reynoldsgetallen wel logisch is. Viskeuze diffusie is dan immers kleiner; de vorticitet blijft dientengevolge meer in het centrum geconcentreerd. Deze redenering gaat volgens deze numerieke simulaties niet op voor numerieke diffusie. De vorticitetsverdeling zou dan bij een groter aantal roosterpunten puntiger moeten zijn, wat deze niet is. Een verklaring hiervoor is nog niet gevonden, nader onderzoek naar numerieke diffusie zou hierover opheldering kunnen geven.

Hoe dan ook is het geruststellend om te zien dat de vorticitetsverdeling voor *beide* roosters Gaussisch blijft bij $Re = 1500$. Dit is voorspeld in [Van Heijst 92].

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Technische Natuurkunde
Vakgroep Transportfysica

Handleiding voor het gebruik van het 2D en Q3D programma

E. van den Bosch
Supplement bij R-1439-A
Augustus 1997

Werkeenheid: Werveldynamica en Turbulentie
Vakgroep: Transportfysica

Afstudeerhoogleraar: Prof. dr. ir. G.J.F. van Heijst
Begeleider: Ir. J.H Voskamp
Met dank aan: Dr. ir. H.A. Zondag

1 De werking van het programma

Het programma dat gebruikt is voor de Q3D simulaties is geschreven in Fortran en wordt in deze handleiding aan de hand van de volledige listing in detail uitgelegd. De listing die hier is gegeven, is een basisversie waarin ook de procedures zijn opgenomen waarmee in het verslag wervelstrekking gesimuleerd is (§ 5.4.2). Het commentaar bij de verschillende programma-onderdelen is gegeven in de regels boven het betreffende programma-onderdeel en begint telkens met de letter 'c'. In het werkelijke Q3D programma is dit commentaar niet opgenomen.

1.1 De variabelen

Alleen de variabelen die noodzakelijk zijn voor het programma worden nu toegelicht. De meeste hulpvariabelen worden hieruit berekend en worden hier niet toegelicht.

De parameters die in (3.1) en (3.2) van het verslag gegeven zijn, worden in het programma achtereenvolgens voorgesteld door de variabelen `dx`, `eps`, `tau`, `dtau`, `nz`, `ny`, `zmax`, `ymax`, `dz` en `dy`.

Het Reynoldsgetal wordt gegeven door de variabele `Re` en de grootheden vortciteit, stroomfunctie en snelheid worden voorgesteld door de variabelen `vort`, `psi`, `u`, `v` en `w`. Deze worden op de punten `xmax` naar een datafile geschreven met de corresponderende namen `Onaam`, `Pnaam`, `Unaam`, `Vnaam` en `Wnaam`. De snelheidsprofielen worden op dezelfde punten weggeschreven onder de namen `profu`, `profv` en `profw`. De variabele `amount` geeft het aantal punten waar de datafiles naar disk geschreven moeten worden, de variabele `xteller` geeft aan welke reeds zijn weggeschreven.

De volgende variabelen zijn nodig om twee wervels te kunnen plaatsen: `arg1`, `arg2`, `r1`, `r2`, `hoogte1`, `hoogte2`, `breedte1`, `breedte2`, `straal1`, `straal2`, `maxvort1` en `maxvort2`. De eerste vier variabelen geven de relatieve positie aan binnen de wervel, de resterende variabelen stellen achtereenvolgens de y -positie, z -positie, straal en centrumvortciteit van de wervels voor.

De variabelen `knew`, `vastprof`, `initprof`, `kmin`, `kmax`, `nk` en `xprof` worden gebruikt om het ingelezen snelheidsprofiel `profnaam` te kunnen converteren, de minimale en maximale waarden voor de longitudinale snelheid wordt gegeven door de variabelen `unul` en `umax`. Tenslotte is de variabele `Grensl` is de dikte van de grenslaag en zijn de variabelen `progr` en `dprogr` handig om de voortgang van het programma te kunnen controleren.

1.2 De listing

```
c Programma-header.
```

```
PROGRAM BasisQ3DProgramma
```

```
c Declaratie van alle variabelen.
```

```
IMPLICIT none
```

```
REAL*4 gamp, betp, gamv, betv, alfz, alfy, alpsi, Re
```

```

REAL*4 cz, cy, czx, cyx, cczx, ccyx
REAL*4 dz, dy, dzkw, dykw, hidzk, hidyk, zmax, ymax
REAL*4 ccztau, ccytau, cztau, cytau
REAL*4 x, dx, xstap, tau, dtau
INTEGER*4 nz, ny, nzp, nyp, nzs, nys, nzpp, nypp
INTEGER*4 nzi, nyi
PARAMETER (nzi=152, nyi=102)
REAL*4 vort, psi, u, v, w
DIMENSION vort(0:nyi,0:nzi), psi(0:nyi,0:nzi),
.      u(0:nyi,0:nzi), v(0:nyi,0:nzi), w(0:nyi,0:nzi)
REAL*4 dvort, dpsi, du
DIMENSION dvort(0:nyi,0:nzi), dpsi(0:nyi,0:nzi), du(0:nyi,0:nzi)
CHARACTER*14 Onaam, Pnaam, Unaam, Vnaam, Wnaam
DIMENSION Onaam(0:35), Pnaam(0:35), Unaam(0:35),
.      Vnaam(0:35), Wnaam(0:35)
REAL*4 r, b, rrt, ddt
DIMENSION r(0:nyi,0:nzi), b(5,nzi), rrt(nzi), ddt(nzi)
INTEGER*4 i, j, k
REAL*4 uold, vold, wold, taupsi
DIMENSION uold(0:nyi,0:nzi), vold(0:nyi,0:nzi),
.      wold(0:nyi,0:nzi), taupsi(0:nyi)
REAL*4 cr, eps
REAL*4 progr, dprogr
REAL*4 xmax
DIMENSION xmax(0:35)
INTEGER*4 xteller, amount
CHARACTER*1 chr
DIMENSION chr(0:35)
REAL*4 ez, ey, arg1, arg2, r1, r2, hoogte1, hoogte2, breedte1,
.      breedte2, straal1, straal2, maxvort1, maxvort2
REAL*4 umax, unul, Grensl
REAL*4 knew, vastprof, initprof
DIMENSION vastprof(80), initprof(0:nzi)
INTEGER*4 kmin, kmax, nk, xprof
CHARACTER*35 profnaam
CHARACTER*15 profu, profv, profw
DIMENSION profu(0:35), profv(0:35), profw(0:35)
COMMON r, vort, dvort, psi, dpsi, u, du, v, w, vold, wold

```

c Inlezen van de beginwaarde van enkele variabelen.

```

nz = 151
ny = 101
nk = 80

```

```
zmax = 3.0
ymax = 2.0
Re = 1500
Grensl = ymax
```

```
eps = 1.5e-5
xstap = 0.02
tau = 0.25
xteller = 1
```

```
maxvort1 = - 10.0
maxvort2 = 0.0
hoogte1 = 0.5
hoogte2 = 0.5
breedte1 = 1.5
breedte2 = 1.9
straal1 = 0.4
straal2 = 0.4
```

```
xprof = 75
```

```
profnaam = '/tnlu2/elwin/profielen/blasius.fil'
umax = 2.0
unul = 0.001
```

```
progr = 0.0
dprogr = 0.01
```

```
alfz = 1/Re
alfy = 1/Re
```

```
gamv = 0.0
betv = 1.0
gamp = 0.0
betp = 1.0
```

c Berekenen van de beginwaarde van de hulpvariabelen.

```
nzs = nz + 1
nys = ny + 1
nzp = nz - 1
nyp = ny - 1
nzpp = nzp - 1
nypp = nyp - 1
```



```

dz = zmax/nzp
dy = ymax/nyp
cz = 0.5/dz
cy = 0.5/dy
dzkw = dz*dz
dykw = dy*dy
dx = xstap*dz
dtau = dx/tau
hidzk = 0.5/dzkw
hidyk = 0.5/dykw
czx = betv*dx*cz/(1.0+gamv)
cyx = betv*dx*cy/(1.0+gamv)
cztau = betp*dtau*cz/(1.0+gamp)
cytau = betp*dtau*cy/(1.0+gamp)
cczx = betv*alfz*dx/((1.0+gamv)*dzkw)
ccyx = betv*alfy*dx/((1.0+gamv)*dykw)
ccztau = betp*dtau/((1.0+gamp)*dzkw)
ccytau = betp*dtau/((1.0+gamp)*dykw)

```

c Definitie van de X-stappen, de punten waarop vorticiteit, snelheid,
c stroomfunctie en snelheidsprofielen naar disk worden weggeschreven.

```

WRITE(*,*) ' Aantal X-stappen : '
READ(*,*) amount
DO 100 i = 1, amount
  WRITE(*,101) i
  READ(*,*) xmax(i)
100 CONTINUE
101 FORMAT(' X(',i2,') : ')

```

c Creatie van een datafile waarin de X-stappen zijn opgenomen. Deze
c datafile wordt door de plotprogramma's ingelezen.

```

WRITE(*,*) ' Creating datafile of time steps '
OPEN(unit = 10, file = 'data/data.div', status = 'unknown')
WRITE(10,*) dz, dy
WRITE(10,*) amount
DO 110 i = 1, amount
  WRITE(10,*) xmax(i)
110 CONTINUE
CLOSE(10)
WRITE(*,*) ' Done '

```

c Initialisatie van het 'karakterarray', nodig voor de naamgeving van

c datafiles.

```
DO 120 i = 0, 35
  IF (i .LT. 10) THEN
    chr(i) = char(i+48)
  ELSE
    chr(i) = char(i+55)
  ENDIF
120 CONTINUE
```

c Naamgeving van datafiles voor vorticiteit, snelheid en stroomfunctie.

```
DO 130 i = 0, amount
  Onaam(i) = 'data/vort0.dat'
  Pnaam(i) = 'data/psii0.dat'
  Unaam(i) = 'data/uvel0.dat'
  Vnaam(i) = 'data/vvel0.dat'
  Wnaam(i) = 'data/wvel0.dat'
  Onaam(i)(10:10) = chr(i)
  Pnaam(i)(10:10) = chr(i)
  Unaam(i)(10:10) = chr(i)
  Vnaam(i)(10:10) = chr(i)
  Wnaam(i)(10:10) = chr(i)
130 CONTINUE
```

c Naamgeving van datafiles voor snelheidsprofielen.

```
profu(0) = 'prof/profu0.asc'
profv(0) = 'prof/profv0.asc'
profw(0) = 'prof/profw0.asc'
DO 140 i = 1, amount
  profu(i) = 'prof/profu0.asc'
  profv(i) = 'prof/profv0.asc'
  profw(i) = 'prof/profw0.asc'
  profu(i)(11:11) = chr(i)
  profv(i)(11:11) = chr(i)
  profw(i)(11:11) = chr(i)
140 CONTINUE
```

c Inlezen van beginwaarden van diverse variabelen.

```
x = 0.0
DO 160 j = 0, nzs
  DO 161 k = 1, ny
    dvort(k,j) = 0.0
    dpsik(k,j) = 0.0
    duk(k,j) = 0.0
```

```

        r(k,j) = 0.0
161    CONTINUE
160    CONTINUE
        DO 162 j = 1, nzs
            DO 163 k = 1, 5
                b(k,j) = 0.0
163    CONTINUE
162    CONTINUE

```

c Inlezen en converteren van het snelheidsprofiel.

```

        WRITE(*,*) ' Reading datafile of original velocity profile '
        OPEN(unit = 10, file = profnaam, status = 'old')
        DO 170 k = 1, nk
            READ(10,*) vastprof(k)
            vastprof(k) = umax*vastprof(k)
170    CONTINUE
        CLOSE(10)
        WRITE(*,*) ' Done '
        DO 171 k = 1, ny
            knew = 1.0 + 1.0*(k-1)*(nk-1)/ny
            kmin = int(knew)
            kmax = int(knew) + 1
            initprof(k) = vastprof(kmin) +
                (vastprof(kmax) - vastprof(kmin))*(knew-kmin)
171    CONTINUE
        initprof(0) = initprof(1)
        initprof(nys) = initprof(ny)

```

c Inlezen en berekenen van de beginverdeling van vortciteit,
c snelheid en stroomfunctie.

```

        DO 180 j = 0, nzs
            DO 181 k = 0, nys
                ey = (k-1)*dy
                IF (ey .LT. Grensl) THEN
                    u(k,j) = umax*ey/Grensl + unul
                ELSE
                    u(k,j) = umax + unul
                ENDIF
c            u(k,j) = initprof(k)
c            u(k,j) = 0.0
            v(k,j) = 0.0
            w(k,j) = 0.0
            vort(k,j) = 0.0

```

```

        psi(k,j) = 0.0
181    CONTINUE
180    CONTINUE

```

c Plaatsing van Gaussische wervels.

```

    DO 190 k = 1, ny
      DO 191 j = 1, nz
        ez = (j-1)*dz
        ey = (k-1)*dy
        arg1 = (ey - hoogte1)**2 + (ez - breedte1)**2
        arg2 = (ey - hoogte2)**2 + (ez - breedte2)**2
        r1 = sqrt(arg1)/straal1
        r2 = sqrt(arg2)/straal2
        vort(k,j) = 0.0
        IF (r1 .LT. 1.0) THEN
          vort(k,j) = vort(k,j) + maxvort1*exp(-4.0*r1*r1)
        ENDIF
        IF (r2 .LT. 1.0) THEN
          vort(k,j) = vort(k,j) + maxvort2*exp(-4.0*r2*r2)
        ENDIF
191    CONTINUE
190    CONTINUE

```

c Uitvoer van de initiële snelheidsprofielen naar disk.

```

    WRITE(*,*) ' Creating datafiles of initial velocity profile '
    OPEN(unit = 10, file = profu(0), status = 'unknown')
    OPEN(unit = 20, file = profv(0), status = 'unknown')
    OPEN(unit = 30, file = profw(0), status = 'unknown')
    WRITE(10,*) 'u y'
    WRITE(20,*) 'v y'
    WRITE(30,*) 'w y'
    DO 200 k = 1, ny
      WRITE(10,*) u(k,xprof), k
      WRITE(20,*) v(k,xprof), k
      WRITE(30,*) w(k,xprof), k
200    CONTINUE
    CLOSE(10)
    CLOSE(20)
    CLOSE(30)
    WRITE(*,*) ' Done '

```

c Uitvoer van de beginverdelingen van vortciteit, snelheid en
c stroomfunctie naar disk.

```

WRITE(*,*) ' Creating datafiles of initial solution '
OPEN(unit = 10, file = Onaam(0), status = 'unknown')
OPEN(unit = 20, file = Pnaam(0), status = 'unknown')
OPEN(unit = 30, file = Unaam(0), status = 'unknown')
OPEN(unit = 40, file = Vnaam(0), status = 'unknown')
OPEN(unit = 50, file = Wnaam(0), status = 'unknown')
DO 210 j = 0, nzs
  DO 211 k = 1, ny
    WRITE(10,*) vort(k,j)
    WRITE(20,*) psi(k,j)
    WRITE(30,*) u(k,j)
    WRITE(40,*) v(k,j)
    WRITE(50,*) w(k,j)
211  CONTINUE
210  CONTINUE
CLOSE(10)
CLOSE(20)
CLOSE(30)
CLOSE(40)
CLOSE(50)
WRITE(*,*) ' Done '

c Begin van de programmaloop.
OPEN(unit = 15, file = 'data/p', status = 'unknown')
1  CONTINUE

dx = xstap*dz

c Berekenen van de snelheid in het binnengebied.
DO 20 k = 1, ny
  DO 21 j = 1, nz
    uold(k,j) = u(k,j)
    vold(k,j) = v(k,j)
    wold(k,j) = w(k,j)
    v(k,j) = (psi(k,j+1) - psi(k,j-1))*cz
    w(k,j) = - (psi(k+1,j) - psi(k-1,j))*cy
21  CONTINUE
20  CONTINUE

c Toepassen van gewone randvoorwaarden.
c Linkerkant
c DO 30 k = 1, ny
c u(k,0) = 2.0*u(k,1) - u(k,2)

```

```

c      v(k,0) = 2.0*v(k,1) - v(k,2)
c      w(k,0) = 2.0*w(k,1) - w(k,2)
c      vort(k,0) = 2.0*vort(k,1) - vort(k,2)
c      psi(k,0) = 2.0*psi(k,1) - psi(k,2)
c 30  CONTINUE

```

c Rechterkant

```

c      DO 40 k = 1, ny
c      u(k,nzs) = 2.0*u(k,nz) - u(k,nzp)
c      v(k,nzs) = 2.0*v(k,nz) - v(k,nzp)
c      w(k,nzs) = 2.0*w(k,nz) - w(k,nzp)
c      vort(k,nzs) = 2.0*vort(k,nz) - vort(k,nzp)
c      psi(k,nzs) = 2.0*psi(k,nz) - psi(k,nzp)
c 40  CONTINUE

```

c Bovenkant

```

      DO 50 j = 0, nzs
      u(ny,j) = 2.0*u(nyp,j) - u(nypp,j)
      v(ny,j) = 2.0*v(nyp,j) - v(nypp,j)
      w(ny,j) = 2.0*w(nyp,j) - w(nypp,j)
      vort(ny,j) = 2.0*vort(nyp,j) - vort(nypp,j)
      psi(ny,j) = 2.0*psi(nyp,j) - psi(nypp,j)
50  CONTINUE

```

c Onderkant

```

      DO 60 j = 0, nzs
      u(1,j) = unul
      v(1,j) = 0.0
      w(1,j) = 0.0
      vort(1,j) = - hidyk*(8.0*psi(2,j) - 1.0*psi(3,j))
      psi(1,j) = 0.0
60  CONTINUE

```

c Oplossen van het rechterlid van de vortcriteitsvergelijking.

```
CALL rethe(dz, dy, alfz, alfy, gamv, dx, nz, nyp, x)
```

c Oplossen van het stelsel in de Z-richting.

```

      DO 500 k = 2, nyp
      DO 501 j = 1, nz
      b(2,j) = (- cczx - czx*w(k,j-1))/u(k,j)
      b(3,j) = 1.0 + (2.0*cczx)/u(k,j)
      b(4,j) = (- cczx + czx*w(k,j+1))/u(k,j)
      rrt(j) = r(k,j)

```

```

501  CONTINUE
      b(4,1) = b(2,1) + b(4,1)
      b(2,1) = 0.0
      b(2,nz) = b(2,nz) + b(4,nz)
      b(4,nz) = 0.0
      CALL banfac(b, nz)
      CALL bansol(rrt, ddt, b, nz)
      DO 502 j = 1, nz
         r(k,j) = ddt(j)
502  CONTINUE
500  CONTINUE

```

c Oplossen van het stelsel in de Y-richting.

```

      DO 510 j = 1, nz
         DO 511 k = 2, nyp
            b(2,k-1) = (- ccyx - cyx*v(k-1,j))/u(k,j)
            b(3,k-1) = 1.0 + (2.0*ccyx)/u(k,j)
            b(4,k-1) = (- ccyx + cyx*v(k+1,j))/u(k,j)
            rrt(k-1) = r(k,j)
511  CONTINUE
      b(2,1) = 0.0
      b(4,nypp) = 0.0
      CALL banfac(b, nypp)
      CALL bansol(rrt, ddt, b, nypp)
      DO 512 k = 2, nyp
         dvort(k,j) = ddt(k-1)
         vort(k,j) = vort(k,j) + ddt(k-1)
512  CONTINUE
510  CONTINUE

```

c Oplossen van het rechterlid van de snelheidsvergelijking.

```

      CALL retu(dz, dy, alfz, alfy, gamv, dx, nz, nyp)

```

c Oplossen van het stelsel in de Z-richting.

```

      DO 520 k = 2, nyp
         DO 521 j = 1, nz
            b(2,j) = (- cczx - czx*w(k,j-1))/(2.0*u(k,j))
            b(3,j) = 1.0 + (2.0*cczx)/(2.0*u(k,j))
            b(4,j) = (- cczx + czx*w(k,j+1))/(2.0*u(k,j))
            rrt(j) = r(k,j)
521  CONTINUE
      b(4,1) = b(2,1) + b(4,1)
      b(2,1) = 0.0

```

```

    b(2,nz) = b(2,nz) + b(4,nz)
    b(4,nz) = 0.0
    CALL banfac(b, nz)
    CALL bansol(rrt, ddt, b, nz)
    DO 522 j = 1, nz
        r(k,j) = ddt(j)
522    CONTINUE
520    CONTINUE

```

c Oplossen van het stelsel in de Y-richting.

```

    DO 530 j = 1, nz
        DO 531 k = 2, nyp
            b(2,k-1) = (- ccyx - cyx*v(k-1,j))/(2.0*u(k,j))
            b(3,k-1) = 1.0 + (2.0*ccyx)/(2.0*u(k,j))
            b(4,k-1) = (- ccyx + cyx*v(k+1,j))/(2.0*u(k,j))
            rrt(k-1) = r(k,j)
531    CONTINUE
        b(2,1) = 0.0
        b(4,nypp) = 0.0
        CALL banfac(b, nypp)
        CALL bansol(rrt, ddt, b, nypp)
        DO 532 k = 2, nyp
            du(k,j) = ddt(k-1)
            u(k,j) = u(k,j) + ddt(k-1)
            IF (u(k,j) .LT. unul) THEN
                u(k,j) = unul
                du(k,j) = 0.0
            ENDIF
532    CONTINUE
530    CONTINUE

```

c Begin van de Poissonvergelijkingloop.

```

    alpsi = 1.0
2    cr = 0.0

```

c Oplossen van het rechterlid van de Poissonvergelijking.

```

    CALL repssi(dz, dy, alpsi, alpsi, gamv, dtau, nz, nyp)

```

c Oplossen van het stelsel in de Z-richting.

```

    DO 540 k = 2, nyp
        DO 541 j = 1, nz
            b(2,j) = - ccztau
            b(3,j) = 1.0 + 2.0*ccztau

```



```

        b(4,j) = - cczttau
        rrt(j) = r(k,j)
541    CONTINUE
        b(4,1) = b(2,1) + b(4,1)
        b(2,1) = 0.0
        b(2,nz) = b(2,nz) + b(4,nz)
        b(4,nz) = 0.0
        CALL banfac(b, nz)
        CALL bansol(rrt, ddt, b, nz)
        DO 542 j = 1, nz
            r(k,j) = ddt(j)
542    CONTINUE
540    CONTINUE

```

c Oplossen van het stelsel in de Y-richting.

```

        DO 550 j = 1, nz
            DO 551 k = 2, nyp
                b(2,k-1) = - ccytau
                b(3,k-1) = 1.0 + 2.0*ccytau
                b(4,k-1) = - ccytau
                rrt(k-1) = r(k,j)
551    CONTINUE
            b(2,1) = 0.0
            b(4,nypp) = 0.0
            CALL banfac(b, nypp)
            CALL bansol(rrt, ddt, b, nypp)

```

c Oplossen van het stelsel in de X-richting.

```

        DO 552 k = 2, nyp
            dpsi(k,j) = ddt(k-1)
            psi(k,j) = psi(k,j) + ddt(k-1)
            cr = cr + abs(ddt(k-1))
            IF (j .EQ. ny) THEN
                taupsi(k) = tau*ddt(k-1)
            ENDIF
552    CONTINUE
550    CONTINUE

```

c Uitvoer van de convergentievariabele 'cr'.

```

        cr = cr/(nz*ny)
        WRITE(*,*) x, cr

```

c Poissonvergelijking goed opgelost?

```
IF (cr. GT. eps) GOTO 2
```

```
c Toepassen van periodieke randvoorwaarden in de Z-richting.
```

```
DO 70 k = 1,ny  
  u(k,0) = u(k,nzp)  
  v(k,0) = v(k,nzp)  
  w(k,0) = w(k,nzp)  
  vort(k,0) = vort(k,nzp)  
  psi(k,0) = psi(k,nzp)  
  u(k,nzs) = u(k,2)  
  v(k,nzs) = v(k,2)  
  w(k,nzs) = w(k,2)  
  vort(k,nzs) = vort(k,2)  
  psi(k,nzs) = psi(k,2)
```

```
70 CONTINUE
```

```
c Uitvoer voortgangsvariabele 'progr' naar disk.
```

```
IF (x .GE. progr) THEN  
  WRITE(15,*) progr  
  progr = progr + dprogr  
ENDIF
```

```
c Volgende iteratiestap.
```

```
x = x + dx
```

```
c X-stap bereikt?
```

```
IF (x .LE. xmax(xteller)) GOTO 1
```

```
c Uitvoer van de verdelingen van vorticiteit, snelheid en  
c stroomfunctie naar disk.
```

```
WRITE(*,*) ' Creating datafiles '  
WRITE(*,*) ' at X = ', xmax(xteller)  
OPEN(unit = 10, file = Onaam(xteller), status = 'unknown')  
OPEN(unit = 20, file = Pnaam(xteller), status = 'unknown')  
OPEN(unit = 30, file = Unaam(xteller), status = 'unknown')  
OPEN(unit = 40, file = Vnaam(xteller), status = 'unknown')  
OPEN(unit = 50, file = Wnaam(xteller), status = 'unknown')  
DO 620 j = 1, nz  
  DO 621 k = 1, ny  
    WRITE(10,*) vort(k,j)  
    WRITE(20,*) psi(k,j)  
    WRITE(30,*) u(k,j)  
    WRITE(40,*) v(k,j)
```

```

        WRITE(50,*) w(k,j)
621    CONTINUE
620    CONTINUE
        CLOSE(10)
        CLOSE(20)
        CLOSE(30)
        CLOSE(40)
        CLOSE(50)

c Uitvoer van de snelheidsprofielen naar disk.
    WRITE(*,*) ' Creating datafiles of velocity profile '
    WRITE(*,*) ' at X = ', xmax(xteller)
    OPEN(unit = 10, file = profu(xteller), status = 'unknown')
    OPEN(unit = 20, file = profv(xteller), status = 'unknown')
    OPEN(unit = 30, file = profw(xteller), status = 'unknown')
    WRITE(10,*) 'u y'
    WRITE(20,*) 'v y'
    WRITE(30,*) 'w y'
    DO 630 k = 1, ny
        WRITE(10,*) u(k,xprof), k
        WRITE(20,*) v(k,xprof), k
        WRITE(30,*) w(k,xprof), k
630    CONTINUE
        CLOSE(10)
        CLOSE(20)
        CLOSE(30)
        WRITE(*,*) ' Done '

c Laatste X-stap?
    xteller = xteller + 1
    IF (xteller .LT. (amount + 1)) GOTO 1

c Einde programma.
    CLOSE(15)
    STOP
    END

c Subroutine 'banfac' lost samen met subroutine 'bansol' het stelsel
c vergelijkingen met behulp van het Thomas-algorithme op.
    SUBROUTINE banfac(b, n)

    IMPLICIT none
    INTEGER*4 nzi

```

```

PARAMETER (nzi=152)
REAL*4 b
DIMENSION b(5,nzi)
INTEGER*4 j, n

DO 900 j = 1, n-1
  b(2,j+1) = b(2,j+1)/b(3,j)
  b(3,j+1) = b(3,j+1) - b(2,j+1)*b(4,j)
900 CONTINUE

RETURN
END

```

c Subroutine 'bansol' lost samen met subroutine 'banfac' het stelsel c vergelijkingen met behulp van het Thomas-algorithme op.

```

SUBROUTINE bansol(rhs, x, b, n)

IMPLICIT none
INTEGER*4 nzi
PARAMETER (nzi=152)
REAL*4 b, rhs, x
DIMENSION b(5,nzi), rhs(nzi), x(nzi)
INTEGER*4 j, n

DO 910 j = 1, n-1
  rhs(j+1) = rhs(j+1) - b(2,j+1)*rhs(j)
910 CONTINUE
x(n) = rhs(n)/b(3,n)
DO 911 j = 1, n-1
  x(n-j) = (rhs(n-j) - b(4,n-j)*x(n-j+1))/b(3,n-j)
911 CONTINUE

RETURN
END

```

c Bereken het rechterlid van de vorticiteitsvergelijking.

```

SUBROUTINE rethe(dz, dy, alfz, alfy, gam, dx, nz, nyp, x)

IMPLICIT none
REAL*4 alfz, alfy, gam, dx, dxu, x
REAL*4 dz, dy, cz, cy, ccz, ccy, dmz, dmy
DIMENSION dmz(3), dmy(3)
INTEGER*4 nz, nyp

```

```

INTEGER*4 nzi, nyi
PARAMETER (nzi=152, nyi=102)
REAL*4 vort, psi, u, v, w
DIMENSION vort(0:nyi,0:nzi), psi(0:nyi,0:nzi),
.       u(0:nyi,0:nzi), v(0:nyi,0:nzi), w(0:nyi,0:nzi)
REAL*4 dvort, dpsi, du, dudy, dudz, dwdxduy, dvdxduz
DIMENSION dvort(0:nyi,0:nzi), dpsi(0:nyi,0:nzi), du(0:nyi,0:nzi),
.       dwdxduy(0:nyi,0:nzi), dvdxduz(0:nyi,0:nzi)
REAL*4 B, Ucr
REAL*4 wl, wr, vo, vb, rhsw, rhsv
REAL*4 vold, wold
DIMENSION vold(0:nyi,0:nzi), wold(0:nyi,0:nzi)
REAL*4 r, rtd
DIMENSION r(0:nyi,0:nzi)
INTEGER j, k
REAL*4 viscous, tilt, twist, nonlin, zero
DIMENSION viscous(0:nyi,0:nzi), tilt(0:nyi,0:nzi),
.       twist(0:nyi,0:nzi), nonlin(0:nyi,0:nzi)
COMMON r, vort, dvort, psi, dpsi, u, du, v, w, vold, wold

ccz = alfz/dz/dz
ccy = alfy/dy/dy
cz = 0.5/dz
cy = 0.5/dy

dmz(1) = ccz
dmz(2) = - 2.0*ccz
dmz(3) = ccz

dmy(1) = ccy
dmy(2) = - 2.0*ccy
dmy(3) = ccy

B = 10.0
Ucr = B*alfz/dz

DO 920 j = 1, nz
  DO 921 k = 2, nyp
    wl = 0.5*(w(k,j-1) + w(k,j))
    wr = 0.5*(w(k,j) + w(k,j+1))
    vo = 0.5*(v(k-1,j) + v(k,j))
    vb = 0.5*(v(k,j) + v(k+1,j))
    IF (abs(wl) .LE. Ucr) THEN

```

```

      rhsw = 0.5*wl*(vort(k,j-1) + vort(k,j))
ELSE
      rhsw = max(0.0,wl)*vort(k,j-1)
      - max(0.0,-wl)*vort(k,j)
ENDIF
IF (abs(wr) .LE. Ucr) THEN
      rhsw = rhsw - 0.5*wr*(vort(k,j) + vort(k,j+1))
ELSE
      rhsw = rhsw
      - max(0.0,wr)*vort(k,j)
      + max(0.0,-wr)*vort(k,j+1)
ENDIF
IF (abs(vo) .LE. Ucr) THEN
      rhsv = 0.5*vo*(vort(k-1,j) + vort(k,j))
ELSE
      rhsv = max(0.0,vo)*vort(k-1,j)
      - max(0.0,-vo)*vort(k,j)
ENDIF
IF (abs(vb) .LE. Ucr) THEN
      rhsv = rhsv - 0.5*vb*(vort(k,j) + vort(k+1,j))
ELSE
      rhsv = rhsv
      - max(0.0,vb)*vort(k,j)
      + max(0.0,-vb)*vort(k+1,j)
ENDIF
dxu = dx/(u(k,j))
dudy = (u(k+1,j) - u(k-1,j))*cy
dudz = (u(k,j+1) - u(k,j-1))*cz
dwdxudy(k,j) = (w(k,j) - wold(k,j))*dudy
dvdxdudz(k,j) = (v(k,j) - vold(k,j))*dudz
viscous(k,j) = dxu*(dmz(1)*vort(k,j-1)
      + dmz(2)*vort(k,j)
      + dmz(3)*vort(k,j+1)
      + dmy(1)*vort(k-1,j)
      + dmy(2)*vort(k,j)
      + dmy(3)*vort(k+1,j))
tilt(k,j) = - dwdxudy(k,j)/u(k,j)
twist(k,j) = dvdxdudz(k,j)/u(k,j)
nonlin(k,j) = 2.0*dxu*(cz*rhsw + cy*rhsv)
zero = gam*dvort(k,j)
rtd = viscous(k,j) + nonlin(k,j) + zero
IF (x .GE. (2.0*dx)) THEN
      rtd = rtd + tilt(k,j) + twist(k,j)

```

```

          r(k,j) = rtd/(gam+1.0)
        ENDIF
921    CONTINUE
920    CONTINUE

        RETURN
        END

```

c Bereken het rechterlid van de snelheidsvergelijking.

```

SUBROUTINE retu(dz, dy, alfzu, alfyu, gam, dx, nz, nyp)

```

```

IMPLICIT none
REAL*4 alfzu, alfyu, gam, dx, dxu
REAL*4 dz, dy, cz, cy, ccz, ccy, dmz, dmy
DIMENSION dmz(3), dmy(3)
INTEGER*4 nz, nyp
INTEGER*4 nzi, nyi
PARAMETER (nzi=152, nyi=102)
REAL*4 vort, psi, u, v, w
DIMENSION vort(0:nyy,0:nzi), psi(0:nyy,0:nzi),
.      u(0:nyy,0:nzi), v(0:nyy,0:nzi), w(0:nyy,0:nzi)
REAL*4 dvort, dpsu, du
DIMENSION dvort(0:nyy,0:nzi), dpsu(0:nyy,0:nzi), du(0:nyy,0:nzi)
REAL*4 B, Ucr
REAL*4 wl, wr, vo, vb, rhsw, rhsv
REAL*4 r, rtd
DIMENSION r(0:nyy,0:nzi)
INTEGER j, k
REAL*4 viscousu, nonlinu, zerou
DIMENSION viscousu(0:nyy,0:nzi), nonlinu(0:nyy,0:nzi)
COMMON r, vort, dvort, psi, dpsu, u, du, v, w

```

```

ccz = alfzu/dz/dz
ccy = alfyu/dy/dy
cz = 0.5/dz
cy = 0.5/dy

```

```

dmz(1) = ccz
dmz(2) = - 2.0*ccz
dmz(3) = ccz

```

```

dmy(1) = ccy
dmy(2) = - 2.0*ccy

```

dmy(3) = ccy

B = 10.0

Ucr = B*alfzu/dz

DO 930 j = 1, nz

DO 931 k = 2, nyp

wl = 0.5*(w(k,j-1) + w(k,j))

wr = 0.5*(w(k,j) + w(k,j+1))

vo = 0.5*(v(k-1,j) + v(k,j))

vb = 0.5*(v(k,j) + v(k+1,j))

IF (abs(wl) .LE. Ucr) THEN

rhsw = 0.5*wl*(u(k,j-1) + u(k,j))

ELSE

rhsw = max(0.0,wl)*u(k,j-1)

- max(0.0,-wl)*u(k,j)

ENDIF

IF (abs(wr) .LE. Ucr) THEN

rhsw = rhsw - 0.5*wr*(u(k,j) + u(k,j+1))

ELSE

rhsw = rhsw

- max(0.0,wr)*u(k,j)

+ max(0.0,-wr)*u(k,j+1)

ENDIF

IF (abs(vo) .LE. Ucr) THEN

rhsv = 0.5*vo*(u(k-1,j) + u(k,j))

ELSE

rhsv = max(0.0,vo)*u(k-1,j)

- max(0.0,-vo)*u(k,j)

ENDIF

IF (abs(vb) .LE. Ucr) THEN

rhsv = rhsv - 0.5*vb*(u(k,j) + u(k+1,j))

ELSE

rhsv = rhsv

- max(0.0,vb)*u(k,j)

+ max(0.0,-vb)*u(k+1,j)

ENDIF

dxu = dx/u(k,j)

viscousu(k,j) = dxu*(dmz(1)*u(k,j-1)

+ dmz(2)*u(k,j)

+ dmz(3)*u(k,j+1)

+ dmy(1)*u(k-1,j)

+ dmy(2)*u(k,j)


```

          + dmy(3)*u(k+1,j))
    nonlinu(k,j) = 2.0*dxu*(cz*rhsw + cy*rhsv)
    zerou = 2.0*gam*du(k,j)
    rtd = viscosu(k,j) + nonlinu(k,j) + zerou
    r(k,j) = rtd/(2.0*(gam+1.0))
931    CONTINUE
930    CONTINUE

    RETURN
    END

```

c Bereken het rechterlid van de Poissonvergelijking.

```

SUBROUTINE repsi(dz, dy, alfz, alfy, gam, dx, nz, nyp)

```

```

IMPLICIT none
REAL*4 alfz, alfy, gam, dx
REAL*4 dz, dy, ccz, ccy, dmz, dmy
DIMENSION dmz(3), dmy(3)
INTEGER*4 nz, nyp
INTEGER*4 nzi, nyi
PARAMETER (nzi=152, nyi=102)
REAL*4 vort, psi
DIMENSION vort(0:nyy,0:nzi), psi(0:nyy,0:nzi)
REAL*4 dvort, dpsi
DIMENSION dvort(0:nyy,0:nzi), dpsi(0:nyy,0:nzi)
REAL*4 r, rtd
DIMENSION r(0:nyy,0:nzi)
INTEGER j, k
COMMON r, vort, dvort, psi, dpsi

```

```

ccz = alfz/dz/dz
ccy = alfy/dy/dy

```

```

dmz(1) = ccz
dmz(2) = - 2.0*ccz
dmz(3) = ccz

```

```

dmy(1) = ccy
dmy(2) = - 2.0*ccy
dmy(3) = ccy

```

```

DO 940 j = 1, nz
  DO 941 k = 2, nyp

```

```

      rtd = dx*(dmz(1)*psi(k,j-1)
      .      + dmz(2)*psi(k,j)
      .      + dmz(3)*psi(k,j+1)
      .      + dmy(1)*psi(k-1,j)
      .      + dmy(2)*psi(k,j)
      .      + dmy(3)*psi(k+1,j))
      .      + dx*vort(k,j)
      .      + gam*dpsi(k,j)
      r(k,j) = rtd/(gam+1)
941   CONTINUE
940   CONTINUE

      RETURN
      END

```