

MASTER

Tonerstroming in een ontwikkelunit van een kopieerapparaat : Laser-Doppler snelheidsmetingen ter validatie van simulaties met de Distinct Element Method

Dijkzeul, C.W.J.

Award date:
1996

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Technische Natuurkunde
Development
Vakgroep Deeltjesfysica
Werkgroep Evenwichten en
Transport in Plasma's

Océ-Nederland B.V.
Afdeling Research and

Afstudeerverslag

Tonerstroming in een ontwikkelunit van een kopieerapparaat

Laser-Doppler snelheidsmetingen ter validatie
van simulaties met de Distinct Element
Method

Kees-Jan Dijkzeul

VDF/NT 96-22
Juni 1996

Afstudeerhoogleraar: Prof. Dr. Ir. D.C. Schram
Begeleider: Ir. A.N. Abbekerk (Océ)

Samenvatting

Océ houdt zich onder andere bezig met het ontwikkelen en produceren van printers, plotters en kopieerapparaten. In het afgedrukte gedeelte van een kopieerapparaat wordt toner gelocaliseerd op papier gebracht. De plaats waar de toner op papier komt wordt vooral bepaald door de ontwikkelstap. Bij deze stap wordt de toner goed gepositioneerd aangebracht op een tussenmedium. Vaak is dit een fotogeleider. In een latere processtap wordt de toner dan overgebracht op papier.

Om meer begrip te krijgen voor het ontwikkelgedrag van een ontwikkelunit is een model ontwikkeld dat de krachten beschrijft die op de tonerdeeltjes werken. Uitgaande van dit model kunnen met de Distinct Element Method numeriek de bewegingen van individuele tonerdeeltjes berekend worden.

Om deze berekeningen te controleren is een opstelling gebouwd waaraan de snelheid van de toner gemeten kan worden met behulp van het Doppler-effect en het self-mixing effect bij laserdiodes. Het self-mixing effect treedt op als het licht van een diodelaser via een bewegend voorwerp wordt teruggekoppeld in de laser. De intensiteit van de laser gaat dan variëren. De frequentie van deze variatie is precies gelijk aan de frequentieverschuiving die het laserlicht heeft ondergaan als gevolg van het Doppler-effect. Met een fotodiode kan deze intensiteitsvariatie gemeten worden. Wanneer een spectrum-analyser wordt aangesloten op de fotodiode kan uit het spectrum de snelheid van het bewegende voorwerp, bijvoorbeeld toner, bepaald worden.

Het magneetveld dat gebruikt wordt om de (magnetiseerbare) toner bij elkaar te houden is van grote invloed op de bewegingen van de tonerdeeltjes. Er zijn twee verschillende magneetgeometrieën onderzocht. Een bestond uit een metalen plaatje waartegen twee magneten waren aangebracht. Het andere bestond uit een magneet waartegen twee plaatjes waren aangebracht, zodat een soort hoefijzermagneet ontstaat. Er zijn twee verschillende toners onderzocht, in dit verslag toner A en toner B genoemd. Toner A heeft een viermaal zo grote gemiddelde verzadigingsmagnetisatie als toner B.

Er is geprobeerd de simulaties zo goed mogelijk in overeenstemming te brengen met de metingen door de parameters van het model te variëren. Dit is gelukt voor de tonerstroming van zowel toner A als B op de hoefijzergeometrie. De door het model voorspelde snelheden komen binnen 10% overeen met de metingen. Bij de andere geometrie, de stripmagneet, zijn de voor toner A gemeten snelheden 1,5 maal groter dan de gesimuleerde. Dit wordt waarschijnlijk veroorzaakt doordat de gemagnetiseerde tonerdeeltjes elkaar aantrekken. Deze wisselwerking is nog niet in het model opgenomen.

Het is niet gelukt de snelheid te meten van toner B op de stripmagneet. De gevonden spectra wijken sterk af van de spectra die gevonden worden bij

metingen aan bijvoorbeeld toner B op de hoefijzergeometrie. Hiervoor is nog geen verklaring gevonden.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	5
2	De opstelling	7
3	Een model voor tonerstroming op een magneetwals	10
3.1	Inleiding	10
3.2	Het botsingsmodel	10
3.2.1	De normale component	11
3.2.2	De tangentiële component	15
3.2.3	Botsingsmodellen in de literatuur	17
3.3	Het magnetisch model	18
3.3.1	De magnetische kracht op een tonerdeeltje	18
3.3.2	Afschatting van de verstoring van het magnetisch veld door een tonerdeeltje	18
4	Simulatiemethode en numeriek parameteronderzoek	20
4.1	Inleiding	20
4.2	De Distinct Element Method	20
4.3	Numerieke stabiliteit	21
4.4	Verwerking van de simulaties	22
4.5	Numeriek parameteronderzoek	24
4.5.1	De hoeveelheid toner	24
4.5.2	De rotatiesnelheid van de cylinder	25
4.5.3	De veerconstante in normaalrichting	25
4.5.4	Wrijving tussen tonerdeeltjes	25
4.5.5	Wrijving tussen toner en de roterende cylinder	30
4.5.6	Magneetveld	30
5	Laser-Doppler snelheidsmetingen	33
5.1	Inleiding	33
5.2	De werking van een laserdiode	33
5.3	De gevolgen van terugkoppeling	35
5.4	De opstelling: mogelijkheden en beperkingen	37
5.5	Metingen aan de tonerlijn	40
5.5.1	Metingen aan toner A en B op een hoefijzermagneet en toner A op een stripmagneet	41
5.5.2	Metingen aan toner B op een stripmagneet	43

6	Vergelijking van metingen en simulaties	45
6.1	Inleiding	45
6.2	De hoefijzermagneet	45
6.3	De stripmagneet	48
7	Conclusies en aanbevelingen	52
7.1	Metingen op basis van het self-mixing effect	52
7.2	Simulaties aan de tonerlijn	53
A	Afleidingen	57
A.1	Afleiding van de formule voor d_n	57
A.2	Afleiding van de formule $M \leq 3H_0$	58
A.3	Afschatting van de verstoring van de gradiënt van het magnetisch veld door een geïsoleerd tonerdeeltje	59
B	Numeriek oplossen van differentiaalvergelijkingen	60
B.1	Algemene aanpak	60
B.2	Toepassing: Een zwak gedempt massa-veersysteem	61
B.3	Toepassing: Afleiding van de formule voor de kritische tijdstap	62

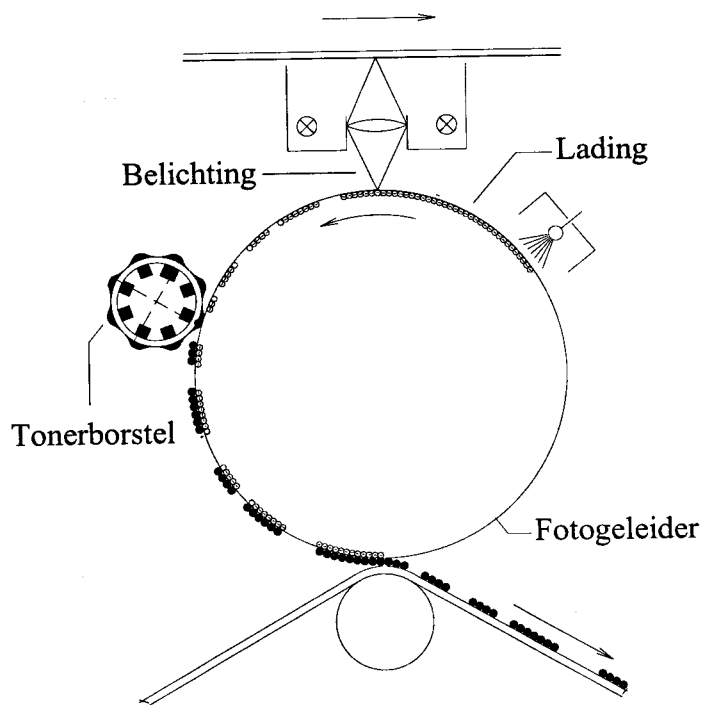
Hoofdstuk 1

Inleiding

Océ houdt zich onder andere bezig met het ontwikkelen en produceren van printers, plotters en kopieerapparaten. De meeste van de huidige kopieerapparaten zijn gebaseerd op een elektrofotografisch afdrukproces. In dit proces wordt toner (inkt in poedervorm) gebruikt. In figuur 1.1 staat een dwarsdoorsnede, die het principe van Océ's elektrofotografische printproces weergeeft. (zie ook [WIL84]) In het midden is een fotogeleidende cylinder getekend. Op deze fotogeleider wordt eerst homogeen lading aangebracht. Daarna wordt de laag belicht, zodanig dat er licht valt, en dus lading verdwijnt, op die plaatsen waar geen toner moet komen. Dit belichten kan bijvoorbeeld gedaan worden door het beeld van een origineel met lenzen op de fotogeleider te projecteren, of met een laserdiode, zoals wel in laserprinters gebeurt. Nadat de fotogeleider is belicht, wordt deze langs een zogenaamde tonerborstel gevoerd. De borstel bestaat uit een aantal magneten waar de magnetiseerbare toner op vastgehouden wordt. Bij deze tonerborstel zal de lading op de fotogeleider tonerdeeltjes aantrekken, terwijl op plaatsen waar geen lading op de fotogeleider zit de magneetkracht voldoende is om de toner vast te houden. Deze stap wordt het ontwikkelen van toner genoemd. De ontwikkelde tonerdeeltjes worden vervolgens door een rubberband van de fotogeleider genomen en overgebracht op papier.

Om meer begrip te krijgen van de ontwikkelstap bij de tonerborstel is een model ontwikkeld dat per tonerdeeltje beschrijft welke krachten er op werken. Daardoor is het mogelijk de plaatsen en snelheden van de tonerdeeltjes te berekenen. Deze (numerieke) berekeningen worden gedaan met behulp van de Distinct Element Method. Om deze berekeningen te kunnen toetsen aan de realiteit is een opstelling gebouwd waarmee, met behulp van het Doppler effect, snelheidsmetingen zijn gedaan, gebruikmakend van het self-mixing effect bij laserdiodes.

In hoofdstuk 2 wordt de opstelling waaraan gemeten is beschreven. In hoofdstuk 3 wordt een model beschreven voor de krachten die op de tonerdeeltjes werken. De Distinct Element Method wordt besproken in hoofdstuk 4. Hier wordt ook de invloed van enkele modelparameters op de uitkomsten van de simulaties besproken. De meetmethode, en in het bijzonder het self-mixing effect, wordt beschreven in hoofdstuk 5. Daar worden ook de resultaten van de metingen besproken. In hoofdstuk 6 worden de resultaten van de metingen vergeleken met de simulaties. In hoofdstuk 7 tenslotte, worden conclusies getrokken en aanbevelingen gedaan voor verder onderzoek.



Figuur 1.1: Doorsnede van een elektrofotografisch printproces. Rechtsboven in de figuur wordt lading aangebracht op de fotogeleider. Vervolgens wordt er belicht, waardoor er lading verdwijnt waar geen toner moet komen. Bij de tonerborstel zal de lading op de fotogeleider de toner aantrekken, het zogenaamde ontwikkelen. Deze tonerdeeltjes worden uiteindelijk op papier overgebracht.

Hoofdstuk 2

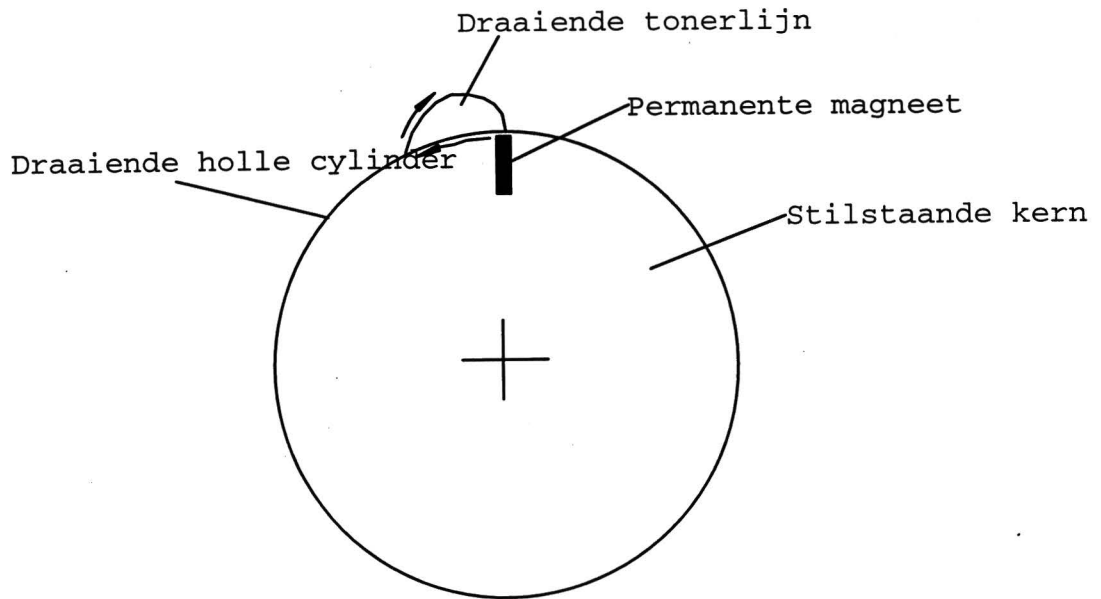
De opstelling

Om simulaties van tonerstroming te kunnen toetsen aan de realiteit is een test-geometrie ontwikkeld waarmee een stromende hoeveelheid toner kan worden onderzocht. Deze is afgeleid van de standaard tonerborstel die gebruikt wordt bij het electrofotografische afdrukproces. De geometrie wordt zowel in de metingen als in de simulaties gebruikt. Een doorsnede van de geometrie staat in figuur 2.1. Centraal staat is een magneetwals, een cylinder met in de lengterichting een permanente magneet. Om de magneetwals draait een holle cylinder. Wanneer nu een hoeveelheid magnetiseerbare toner op de draaiende cylinder wordt aangebracht, zal een om zijn lange as draaiende tonerlijn ontstaan over de lengterichting van de wals (zie figuur 2.2).

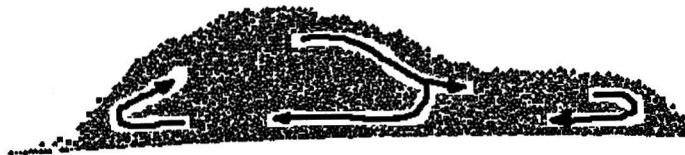
Bij de metingen en de simulaties zijn twee verschillende soorten toners en twee magneetgeometrieën onderzocht. Beide toners bevatten een kleine hoeveelheid ijzer. Door het magneetveld wordt het ijzer in de toner gemagnetiseerd en het tonerdeeltje aangetrokken. Van de beide onderzochte toners, A en B, heeft toner A een viermaal zo grote gemiddelde verzadigingsmagnetisatie als toner B.

De gebruikte magneetgeometrieën zijn schematisch weergegeven in figuur 2.3 en 2.4. In figuur 2.3 is de stripgeometrie getekend. Deze bestaat uit twee sterke permanente magneten tegen een metalen plaatje. De veldlijnen lopen min of meer vertikaal door het metalen plaatje. Wanneer gekeken wordt naar het krachtveld van dit mes blijkt dat de toner zal worden aangetrokken tot de twee hoekpunten aan de bovenkant van het metalen plaatje.

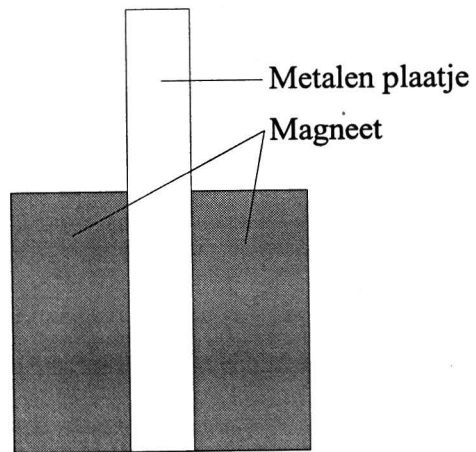
In figuur 2.4 is de hoefijzergeometrie getekend. Deze bestaat uit één permanente magneet waartegen twee metalen plaatjes zijn aangebracht. Het geheel lijkt op een hoefijzermagneet. De veldlijnen boven het boven deze magneetgeometrie staan ongeveer loodrecht op die boven de stripgeometrie. De magneetkracht ongeveer gericht op de luchtspleet tussen de twee metalen plaatjes.



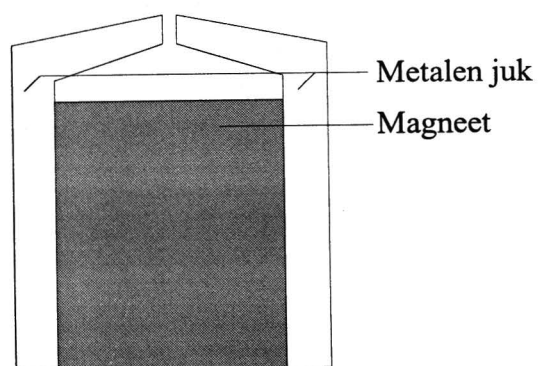
Figuur 2.1: Schematische weergave van de meetopstelling.



Figuur 2.2: Simulatie van een draaiende tonerlijn. De cylinder draait van rechts naar links. De toner draait rechtsom.



Figuur 2.3: Schematische weergave van de stripgeometrie.



Figuur 2.4: Schematische weergave van de hoofijzergeometrie.

Hoofdstuk 3

Een model voor tonerstroming op een magneetwals

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt een microscopisch model beschreven voor het stromingsgedrag van toner. Met microscopisch wordt hier bedoeld dat de beschrijving plaatsvindt op tonerdeeltjes-niveau. Het voordeel van deze aanpak is dat het model relatief eenvoudig kan blijven. Bovendien zou, omdat per tonerdeeltje plaats en snelheid bekend zijn, per tonerdeeltje berekend worden of het wordt ontwikkeld (aan de fotogeleider blijft plakken) of niet. Zodoende kan het printgedrag gesimuleerd worden. Dit is overigens in dit verslag niet gedaan.

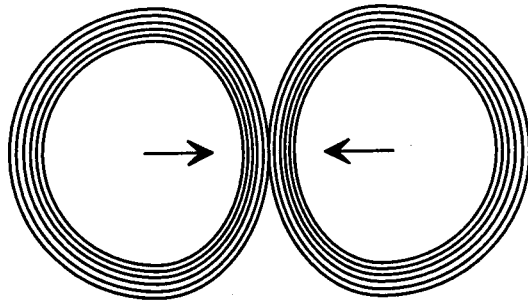
In de gebruikte opstelling werken op een tonerdeeltje alleen contactkrachten (botsing en wrijving) en magnetische krachten. Van alle andere krachten (bijvoorbeeld adhesieve krachten en zwaartekracht) wordt aangenomen dat ze verwaarloosbaar zijn ten opzichte van de genoemde krachten.

In de volgende paragrafen komen achtereenvolgens het botsingsmodel en het magnetisch model aan bod.

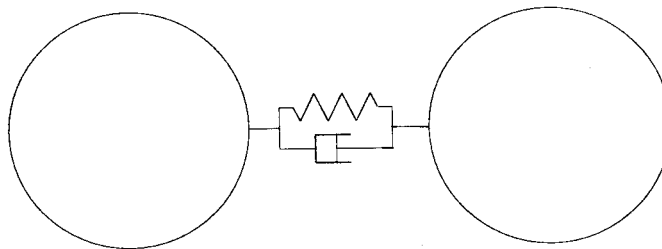
3.2 Het botsingsmodel

De tonerdeeltjes worden benaderd door bollen. In deze paragraaf wordt een model beschreven voor de kracht die twee bollen tijdens een botsing op elkaar uitoefenen. In de simulaties wordt dit model voor elk paar botsende bollen (tonerdeeltjes) toegepast.

De kracht die twee botsende tonerdeeltjes op elkaar uitoefenen kan ontbonden worden in een component loodrecht op het contactvlak (de normale component) en een component in dit vlak (de tangentiële component). In de paragrafen 3.2.1 en 3.2.2 wordt voor beide componenten afzonderlijk een model beschreven. In de paragraaf daarna wordt het door ons gebruikte model kort vergeleken met in de literatuur gevonden modellen.



Figuur 3.1: Een schets van twee bollen die centraal botsen



Figuur 3.2: Het normale deel van een botsingsmodel grafisch weergegeven: een veer met demper.

3.2.1 De normale component

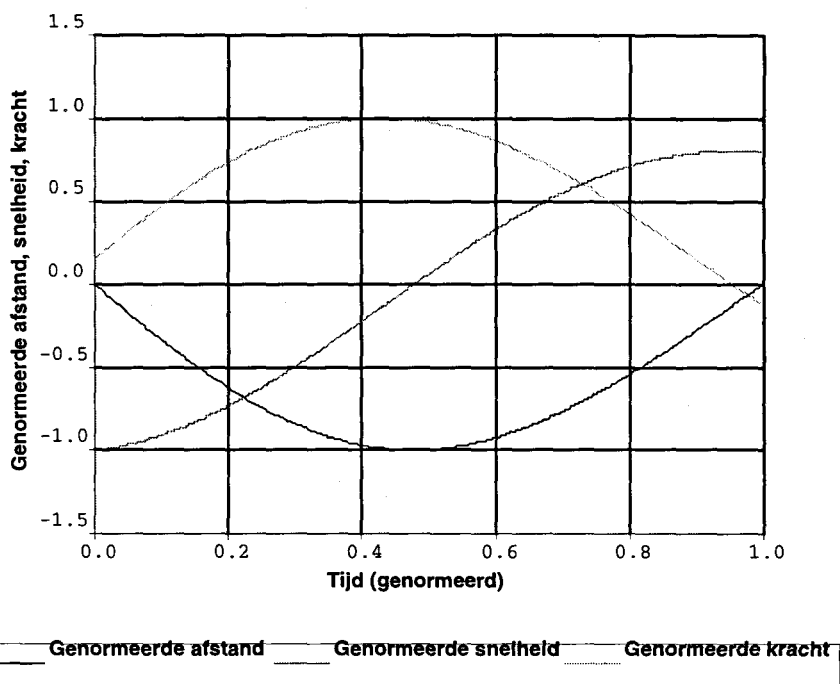
In het geval dat twee bollen centraal botsen oefenen ze alleen een kracht op elkaar uit loodrecht op het botsingsvlak. In dit geval is de relatieve snelheid gericht langs de lijn door de massamiddelpunten. Tijdens een botsing zullen de bollen contact met elkaar maken, inveren en weer uitveren, waarna het contact weer verbroken wordt. In figuur 3.1 staan schematisch twee deels ingeveerde bollen getekend.

Van de kracht, die de beide bollen op elkaar uitoefenen wordt aangenomen dat ze beschreven kan worden met behulp van een gedempte veer, zoals geschetst in figuur 3.2, zodat voor de kracht in normaalrichting F_n geldt dat:

$$F_n = -k_n x - d_n \dot{x} \quad (3.1)$$

Hierin zijn x en \dot{x} respectievelijk de relatieve afstand en -snelheid tussen de twee deeltjes, k_n de veerconstante en d_n de dempingsconstante. Gegeven de massa's van de twee bollen m_1 en m_2 , de veerconstante en de dempingsconstante kan dit probleem eenvoudig opgelost worden. (Het subscript n in k_n , d_n en F_n geeft aan dat de waarden in normaalrichting bedoeld worden, om onderscheid te maken de analoog gedefinieerde waarden in tangentiële richting, die in de volgende paragraaf geïntroduceerd worden.) In figuur 3.3 staan als functie van de tijd de onderlinge afstand, de relatieve snelheid en de uitgeoefende kracht gegeven voor een botsing, berekend met bovenstaand model.

De oplossing van dit botsingsprobleem is een gewone gedempte harmonische oscillatie, waarbij maar naar een halve trilling wordt gekeken. De oplossing



Figuur 3.3: Grafieken van onderlinge afstand, relatieve snelheid en uitgeoefende kracht als functie van tijd bij een twee-deeltjesbotsing volgens het hier beschreven model.

wordt dus gegeven door:

$$x = \exp\left(-\frac{d_n}{2m}t\right) \sin \omega_n t \quad (3.2)$$

met

$$\omega_n = \frac{\sqrt{4mk_n - d_n^2}}{2m} \quad (3.3)$$

Uiteraard moet voor m de gereduceerde massa worden gebruikt:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.4)$$

In dit model duurt een botsing zolang als de afstand tussen de middelpunten van de bollen kleiner is dan de som van hun stralen. Een botsing duurt nu precies een halve trillingstijd, dus

$$t_{bots} = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi m}{\sqrt{4mk_n - d_n^2}} \quad (3.5)$$

De gebruikte dempingsconstante d_n wordt bepaald uit de restitutiecoëfficiënt c_{rest} , welke gedefinieerd wordt door:

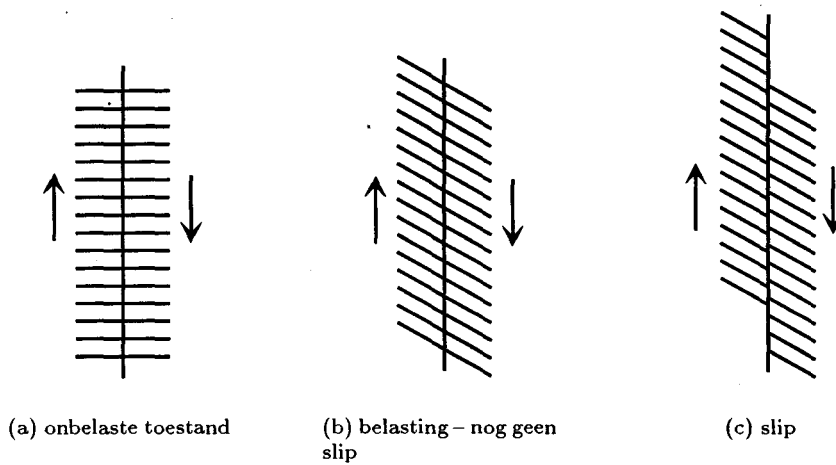
$$c_{rest} = \frac{v_{na}}{v_{voor}} \quad (3.6)$$

met v_{voor} en v_{na} de grootte snelheden voor en na de botsing. De dempingsconstante wordt nu gegeven door:

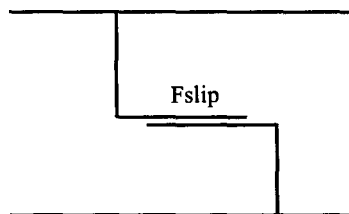
$$d_n = -2 \frac{\ln(c_{rest})\sqrt{mk_n}}{\sqrt{\ln^2(c_{rest}) + \pi^2}} \quad (3.7)$$

Een afleiding van deze formule staat in appendix A.1. Omdat er geen perfect inelastische botsingen voorkomen (v_{na} is altijd groter dan 0) hebben we altijd te maken met een zwak gedempt systeem, ofwel $4mk_n - d_n^2 > 0$.

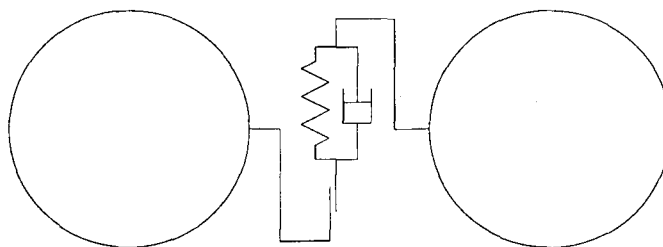
In figuur 3.3 is te zien dat in het hier beschreven model in de laatste fase van de botsing een aantrekkende kracht tussen de botsende tonerdeeltjes voor komt. Deze wordt veroorzaakt door de dempingsterm in vergelijking (3.1). In een model waarin men de botsing laat ophouden op het moment dat de normaalkracht $F_n = 0$, in plaats van de afstand $x_n = 0$ zoals hier gedaan is, zou geen aantrekkende kracht voorkomen. Beide modellen zijn hetzelfde als $d_n = 0$. Er is niet gekozen voor het model waarin de botsing ophoudt als $F_n = 0$ omdat voor dat model geen analytische uitdrukking zoals vergelijking (3.7) af te leiden. In plaats daarvan zou d_n numeriek bepaald moeten worden uit c_{rest} . Verder is volgens [CUN79] de precieze vorm van het botsingsmodel van weinig invloed op de uitkomsten van de simulaties als de vervorming door individuele botsingen klein is ten opzichte van de vervorming van het systeem als geheel. Aan deze voorwaarde is hier vanzelf voldaan vanwege de dynamiek van de draaiende tonerlijn.



Figuur 3.4: Schematische weergave van twee tegen elkaar geperste oppervlakken. In figuur (a) wordt nog geen tangentiële kracht uitgeoefend. In figuur (b) is het oppervlak onder invloed van de uitgeoefende tangentiële kracht vervormd. In figuur (c) is slip opgetreden. (De verticale lijn stelt steeds het grensvlak tussen de twee oppervlakken voor, de horizontale (diagonale) lijnen de vervorming)



Figuur 3.5: Een frictie-element



Figuur 3.6: Het tangentiële deel van een botsingsmodel grafisch weergegeven: een frictie-element in serie met een gedempte veer.

3.2.2 De tangentiële component

Als op twee tegen elkaar geperste oppervlakken een toenemende tangentiële kracht wordt uitgeoefend zullen ze eerst vervormen, en daarna zal slip optreden. Dit is schematisch weergegeven in figuur 3.4. Tijdens de slip zal enige mate van vervorming blijven. Het vervormen van de oppervlakken kan, net als in de normaalrichting, beschreven worden met een (gedempte) veer. Voor het modelleren van slip wordt een frictie-element gebruikt. Dit element, getekend in figuur 3.5, heeft een constante lengte als er een kracht kleiner dan F_{slip} wordt uitgeoefend. Als de uitgeoefende kracht gelijk is aan F_{slip} kunnen de uiteinden ten opzichte van elkaar bewegen. Het is niet mogelijk een kracht groter dan F_{slip} uit te oefenen. Dit gedrag is vergelijkbaar met de Zener-diode uit de elektronica. Deze diode laat geen stroom door beneden een bepaalde spanning, terwijl ze heel goed geleidt als deze spanning wordt overschreden.

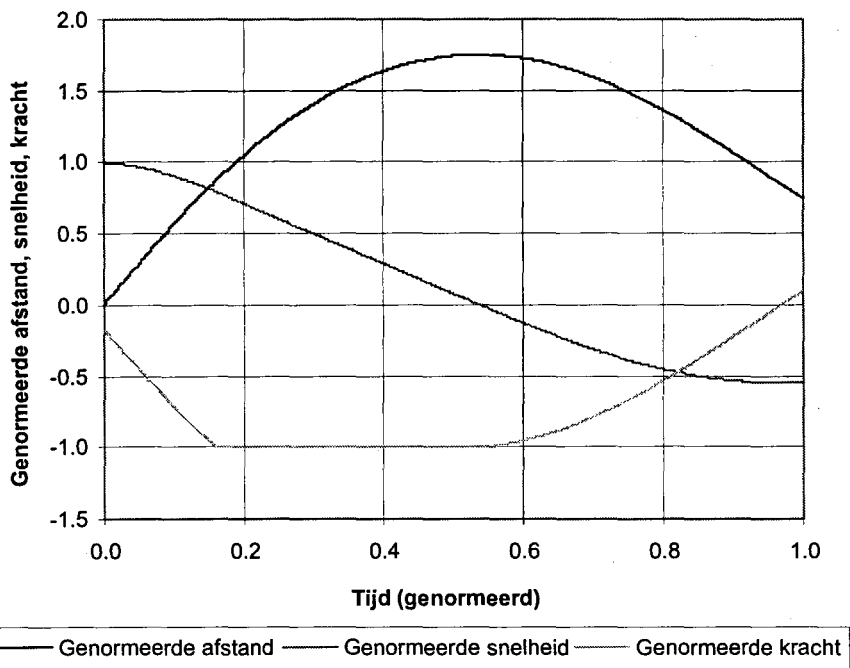
Een mechanisch model voor de tangentiële kracht die de twee oppervlakken op elkaar uitoefenen staat schematisch weergegeven in figuur 3.6: een gedempte veer met dempings- en veerconstanten d_t en k_t in serie met een frictie-element. In figuur 3.7 staat uitgezet de met dit model berekende relatieve verplaatsing, de relatieve snelheid en de uitgeoefende kracht voor twee op elkaar geperste oppervlakken. Duidelijk is te zien hoe eerst de uitgeoefende kracht (in absolute waarde) toeneemt terwijl de veer inverteert. Vervolgens treedt slip op en blijft de kracht constant. De veer ontspant zich op het moment dat de slip ophoudt. In dit model is dat als de uiteinden van het frictie-element niet meer ten opzichte van elkaar bewegen. De grafiek eindigt op het moment dat de veer ontspannen is.

We nemen aan dat als tonerdeeltjes slippen, er Coulombse wrijving optreedt. Dit betekent dat we aannemen dat F_{slip} , de kracht waarbij slip optreedt, evenredig is met F_n , de kracht in normaalrichting, ofwel:

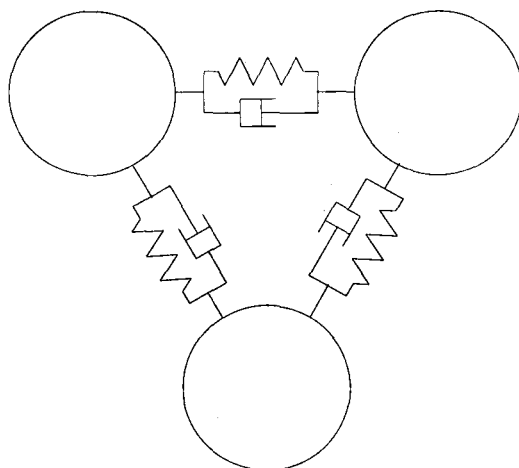
$$F_{slip} = \mu F_n \quad (3.8)$$

met μ de (Coulombse) wrijvingscoëfficiënt.

In paragraaf 3.2.1 kon een analytische uitdrukking gevonden worden voor de normale component van de twee-deeltjesbotsing. Het is niet mogelijk een analytische uitdrukking te vinden voor het tangentiële deel van de botsing, enerzijds vanwege de combinatie van slip en een gedempte veer, anderzijds omdat het tangentiële deel via F_{slip} (zie vergelijking (3.8)) af hangt van de normale component.



Figuur 3.7: Relatieve verplaatsing, -snelheid en uitgeoefende kracht als functie van de tijd voor twee tegen elkaar geperste oppervlakken volgens het hier beschreven model voor de tangetiële component van de contactkracht



Figuur 3.8: Een drie-deeltjesbotsing volgens het door ons gebruikte model: Drie gedempte veren tegelijk. Voor de duidelijkheid is het tangentiële deel in de tekening weggelaten.

Uitgaande van dit model kunnen enkele limietgevallen bekeken worden. Als bijvoorbeeld $k_t \rightarrow 0$ hebben we te maken met een volstrekt inelastisch systeem. Als $k_t \rightarrow \infty$ treedt er alleen nog slip op. Zou $F_{slip} \rightarrow \infty$ dan treedt geen slip meer op en hebben we alleen te maken met de (gedempte) veer. Als daarentegen $F_{slip} \rightarrow 0$ dan kunnen er in tangentiële richting geen krachten meer worden uitgeoefend. Het oppervlak is dan perfect glad. Als tenslotte $d_t \rightarrow 0$ dan treden er alleen nog energieverliezen op als gevolg van slip.

Het is niet bij voorbaat duidelijk of een van deze limietgevallen van toepassing is op ons probleem. In de simulaties wordt dus met het volledige bovenstaande model gerekend.

3.2.3 Botsingsmodellen in de literatuur

In de literatuur zijn een aantal varianten op bovenstaand model te vinden. Zo kiest men meestal d_n constant, in plaats van de afhankelijkheid van de gereduceerde massa m die geïntroduceerd wordt door het gebruik van een constante restitutiecoëfficiënt c_{rest} (zie vgl. (3.7)). Soms ook worden veel geavanceerdere elastische modellen gebruikt. Een voorbeeld daarvan is het model van Herz. Volgens dit model (zie o.a. [WAT95]) is de kracht die twee botsende bollen op elkaar uitoefenen evenredig met $x_n^{(3/2)}$. De evenredigheidsconstante is afhankelijk van de straal, de elasticiteits coëfficiënt en Poisson's ratio van beide bollen. Hier is dit model niet gebruikt omdat de ineringen van de tonerdeeltjes klein zijn. Wanneer bijvoorbeeld toner onder hoge druk wordt samengeperst is het wel nodig het model van Herz te gebruiken.

Over k_t en d_t worden veel minder theoretisch onderbouwde aannames gedaan. Meestal worden ze alleen geïntroduceerd en gebruikt.

Vooraf bij dynamische problemen in ijle systemen worden botsingen doorge-rekend met behulp van de wetten van impuls(moment)- en energiebehoud. De dan benodigde parameters zijn (behalve geometrische) de restitutiecoëfficiënt en

de wrijvingsconstante. Dit model is een vereenvoudiging ten opzichte van het door ons gebruikte, doordat wordt aangenomen dat botsingen kort duren. In ons systeem zijn tonerdeeltjes langdurig in contact met de roterende cylinder en met elkaar, zodat een aanpak op basis van energie- en impulsbehoud niet goed mogelijk is. Bovendien zouden, gezien de hoge dichtheid tonerdeeltjes, meerdeeltjes botsingen expliciet meegenomen moeten worden, wat het model, rekentechnisch gezien, niet vereenvoudigt. Het door ons gebruikte model neemt impliciet meerdeeltjes botsingen mee, zoals voor 3 deeltjes geschetst is in figuur 3.8.

3.3 Het magnetisch model

Het magneetveld voor de simulaties wordt geïmporteerd uit een eindige-elementenpakket (flux2d). Hierin wordt alleen het veld van de permanente magneten en de metalen strips meegenomen. De roterende cylinder is gemaakt van niet magnetisch materiaal, zodat zijn invloed op het magneetveld verwaarloosd mag worden. De invloed van de (magnetiseerbare) toner op het veld wordt ook verwaarloosd. Een afschatting van de invloed van de toner op het magneetveld staat in paragraaf 3.3.2. Eerst wordt in paragraaf 3.3.1 de magnetische kracht op een tonerdeeltje besproken.

3.3.1 De magnetische kracht op een tonerdeeltje

Toner bestaat hoofdzakelijk uit hars en een kleine hoeveelheid ijzer. Als de toner in een magneetveld wordt gebracht wordt een magnetisch dipoolmomentje geïnduceerd. De kracht die door een magneetveld wordt uitgeoefend op een magnetische dipool wordt gegeven door (zie [DUF80]):

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (3.9)$$

met \vec{m} de magnetische dipool, \vec{B} het magneetveld en \vec{F} de kracht. Als \vec{m} en \vec{B} gelijkgericht zijn gaat deze uitdrukking over in

$$\vec{F} = m \vec{\nabla} B \quad (3.10)$$

met $m = |\vec{m}|$ en $B = |\vec{B}|$.

Aangenomen wordt dat toner (beter: het ijzer in de toner) altijd verzadigd is. Het magnetisch moment wordt dan gegeven door:

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{vol\%} M_{sat} \quad (3.11)$$

met r de straal van het tonerdeeltje, *vol%* het volume percentage ijzer en M_{sat} de verzadigingsmagnetisatie van ijzer.

3.3.2 Afschatting van de verstoring van het magnetisch veld door een tonerdeeltje

De verstoring van het magnetisch veld door een magnetische dipool is te schrijven als

$$\vec{H}_v(\vec{r}) - \vec{H}_0 = \frac{1}{4\pi r^3} (2m \cos(\theta) \vec{e}_r - m \sin(\theta) \vec{e}_\theta) \quad (3.12)$$

Hierin is \vec{H}_0 het oorspronkelijke magneetveld en $\vec{H}_v(\vec{r})$ het verstoorde veld, als functie van plaats. Verder is $m = |\vec{m}|$ de grootte van het dipoolmoment, dat langs de z-as ($\theta = 0$) van het coördinatenstelsel is gericht. \vec{e}_r en \vec{e}_θ zijn de eenheidsvectoren in bolcoördinaten. $\vec{H}_v(\vec{r}) - \vec{H}_0$ is precies het veld van een magnetische dipool.

Voor de grootte orde van de verstoring geldt (zie ook vergelijking (3.12)):

$$|\vec{H}_v(\vec{r}) - \vec{H}_0| = \frac{m}{4\pi r^3} \sqrt{4 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \leq \frac{m}{2\pi r^3} \quad (3.13)$$

Wanneer hierin wordt ingevuld dat $m = MV$, met M de magnetisatie van het ijzer in de toner en V het volume ijzer in het tonerdeeltje, en dat $M \leq 3H_0$, vergelijking (A.12) uit appendix A.2 dan wordt voor de relatieve verstoring van het magneetveld gevonden dat:

$$\frac{|\vec{H}_v(\vec{r}) - \vec{H}_0|}{|\vec{H}_0|} \leq \frac{M}{2\pi r^3 |\vec{H}_0|} V \leq \frac{3|\vec{H}_0|}{2\pi r^3 |\vec{H}_0|} V = 2 \frac{V}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad (3.14)$$

De verhouding $V/(4/3 \pi r^3)$ in vergelijking (3.14) is in ieder geval kleiner dan het volumepercentage ijzer in toner. Voor toner B is dit ongeveer 1%, zodat gevonden wordt dat de verstoring van één tonerdeeltje ter plaatse van een ander deeltje kleiner is dan 2%. Aannemende dat de bijdragen van verschillende burens opgeteld mogen worden wordt, uitgaande van 8 burens een verstoring van maximaal 16% gevonden.

In appendix A.3 wordt op bovenstaande manier de verstoring op de gradiënt van het magneetveld afgeschat. Er wordt gevonden dat de verstoring als gevolg van één tonerdeeltje kleiner moet zijn dan 4000 T/m. Dit is nauwelijks een zinvol resultaat, aangezien de gradiënt van het oorspronkelijke veld ook van deze grootte orde is. Het vermoeden bestaat dat de verstoringen van individuele tonerdeeltjes elkaar min of meer zullen opheffen. Om dit na te gaan is met een eindige-elementenpakket kort gekeken naar de verstoring van het magneetveld door een lijn toner A. De verstoring van het magneetveld bleek maximaal ongeveer 20% te zijn. De vorm van het veld bleef echter overal ongeveer hetzelfde, zodat het redelijk lijkt aan te nemen dat de verstoring van de gradiënt van het magneetveld in ieder veel kleiner is dan 4000 T/m

Hoofdstuk 4

Simulatiemethode en numeriek parameteronderzoek

4.1 Inleiding

Om op grond van het in het vorige hoofdstuk gepresenteerde model voorspellingen te kunnen doen over het stromingsgedrag van toner op de magneetwals zijn numerieke simulaties noodzakelijk. Er is voor gekozen deze simulaties te doen met behulp van de zogenaamde Distinct Element Method (DEM). Deze methode bestaat eruit dat voor (veel) discrete elementen wordt berekend welke krachten erop werken, waarna met behulp van de 2^e wet van Newton de plaats en de snelheid van die elementen berekend kunnen worden. Daarbij wordt de aanname gedaan dat de tijdstap waarmee gerekend wordt zo klein is dat de gevolgen van interacties met naburige elementen (botsingen) binnen een tijdstap beperkt blijven tot die naaste burens. Daarnaast wordt, zoals bij veel methodes voor het integreren van differentiaalvergelijkingen, aangenomen dat de (hoek-)snelheid en (hoek-)versnelling constant zijn binnen een tijdstap.

In de nu volgende paragraaf komt de Distinct Element method wat uitgebreider aan bod. Daarna wordt ingegaan op de numerieke stabiliteit van de berekeningen. Tenslotte worden de resultaten van het parameteronderzoek besproken.

4.2 De Distinct Element Method

De Distinct Element Method, kortweg DEM en ook wel Discrete Element Method genoemd is voor het eerst beschreven door Cundall en Strack, onder andere in [STR78]. Ze kan gebruikt worden voor het oplossen van veel-deeltjes problemen. Elk deeltje (in ons geval alle tonerdeeltjes én de draaiende cylinder) is een discreet element dat kan botsen met andere elementen. Deze elementen kunnen ten opzichte van elkaar verplaatsingen en rotaties ondergaan.

DEM wordt veel gebruikt voor het oplossen van veel-deeltjes problemen, zowel (quasi-) statische als dynamische. Voorbeelden hiervan zijn het voorspellen

wanneer een rotsformatie (of een berg zand) begint in te storten, het stroomgedrag in een leeglopende silo of, zoals in dit verslag, het stroomgedrag van toner.

De methode neemt aan dat alle eigenschappen van een element constant zijn over het element. Dit betekent onder andere dat elementen niet kunnen vervormen. Als verschillende elementen overlappen betekent dit dat ze aan het botsen zijn.

Daarnaast wordt aangenomen dat als een deeltje botst met zijn burens, de gevolgen van deze botsing zich binnen een tijdstap niet verder voortplanten dan die burens. De tijdstap waarmee gerekend wordt moet hiervoor natuurlijk voldoende klein worden gekozen.

Deze laatste aanname is eenvoudig aannemelijk te maken. We beschouwen een deeltje A dat in botsing is met zowel deeltje B als C. Deeltje B zal pas iets merken van de botsing tussen A en C als A zich ten gevolge van die botsing verplaatst (dan wel van snelheid verandert). Door nu de tijdstap voldoende klein te nemen zijn die verplaatsingen ook klein. De fout die aldus gemaakt wordt is bij voldoende kleine tijdstappen kleiner dan de discretisatiefout (zie appendix B.1) die inherent is aan het numeriek oplossen van differentiaalvergelijkingen.

Een simulatie bestaat nu uit een continue herhaling van de volgende drie stappen:

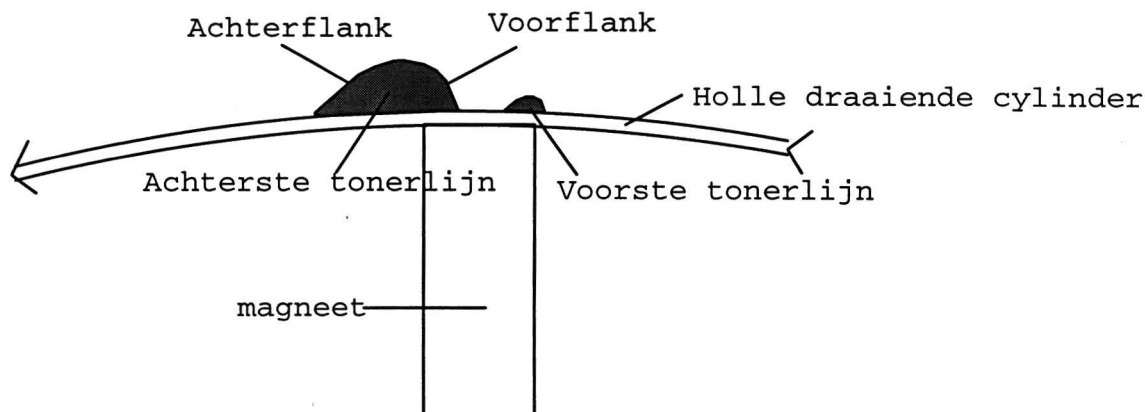
- Bepalen welke deeltjes aan het botsen zijn
- Berekenen van de krachten die op ieder deeltje werken (inclusief contactkrachten bij botsende deeltjes)
- Berekenen van de nieuwe plaats en snelheid van alle deeltjes op de volgende tijdstap.

Doordat in elke tijdstap uitgezocht moet worden welke deeltjes met elkaar botsen is dit een rekenintensief proces. Om de rekestijd beperkt te houden is het nodig de simulaties te beperken tot twee dimensies. Bovendien zijn de veerconstanten k_n en k_t lager gekozen dan in werkelijkheid, zodat de kritische tijdstap t_{crit} (zie paragraaf 4.3) groter wordt, en er dus sneller gesimuleerd kan worden. Aangenomen wordt dat dit geen grote invloed heeft op de uitkomsten van de simulaties. Voor de veerconstante k_n wordt aannemelijk gemaakt in paragraaf 4.5.3. Ondanks deze twee beperkingen kost het nog altijd een dag rekenen op een Sun SparcStation 10 om een tijdsduur van 0.02 s te simuleren.

4.3 Numerieke stabiliteit

Het algoritme dat gebruikt wordt voor de numerieke integratie van de differentiaalvergelijkingen (het bepalen van plaats en snelheid van de deeltjes op een volgende tijdstap) is een expliciete een-stapsmethode (zie [MAT92]). Meerstapsmethodes zijn weliswaar nauwkeuriger, maar ook trager. Een impliciete methode is niet praktisch vanwege de botsingen tussen deeltjes, die discreet in de tijd zijn: twee deeltjes botsen of wel of niet, daar is geen vloeiende overgang tussen.

De eis dat numerieke fouten worden uitgedempt heeft tot gevolg dat de tijdstap waarmee geïntegreerd wordt kleiner moet zijn dan de zogenaamde kritische



Figuur 4.1: Namen voor enkele delen de roterende tonerlijn



Figuur 4.2: Simulatie van een draaiende tonerlijn. De cylinder draait van rechts naar links. De toner draait rechtsom.

tijdstap voor een twee-deeltjes botsing:

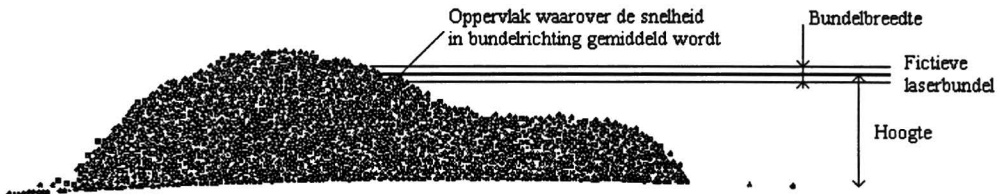
$$t_{crit} = 2\sqrt{\frac{m}{k_n} - \frac{d_n}{k_n}} \quad (4.1)$$

met m de gereduceerde massa en k_n en d_n respectievelijk de veer- en dempingsconstante in normaalrichting. (Zie appendix B.3 voor een afleiding van deze formule.) Het bepalen van de tijdstap waarmee veilig gerekend kan worden moet min of meer experimenteel gebeuren. Als de uitkomsten van de simulaties niet veranderen als de tijdstap een factor 2 wordt verhoogd, geven beide een voldoende nauwkeurig resultaat. De hierboven gegeven kritische tijdstap moet dan ook gezien worden als een eerste afschatting op de grootte-orde te bepalen. Een tijdstap van $0.1t_{crit}$ blijkt een stabiele oplossing te geven.

In de literatuur over quasi-statische problemen (zie bijvoorbeeld [STR78]) stelt men meestal dat $t_{crit} = 2\sqrt{m/k}$, waarna ook met een tijdstap van $0.1t_{crit}$ wordt gerekend.

4.4 Verwerking van de simulaties

In figuur 4.1 staat een tonerlijn op een stripmagneet getekend. De cylinder draait van rechts naar links. Er blijken zich twee afzonderlijke lijnen te vormen, één op



Figuur 4.3: Weergegeven is een tonerlijn en een fictieve laserbundel. Uit de simulaties wordt de snelheid in bundelrichting bepaald, gemiddeld over de breedte van de bundel, als functie van de hoogte van de bundel.

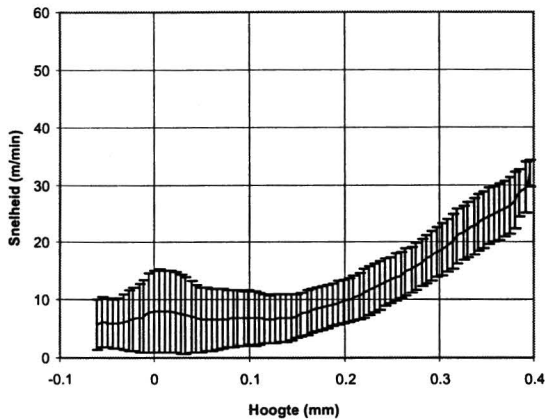
elke hoekpunt van de metalen strip. De rechtse, kleine tonerlijn wordt de voorste genoemd, de linkse, grote de achterste. De achterkant (links in de figuur) van een tonerlijn wordt de achterflank genoemd, de voorkant de voorflank. Bij de hoefijzergeometrie vormt zich maar één tonerlijn.

Na het doen van een simulatie zijn voor alle tonerdeeltjes als functie van tijd hun plaats en snelheid bekend. Van deze gegevens kan een plaatje getekend worden, zoals figuur 4.2. Ook kan een grafiek gemaakt worden van de snelheden, zoals verderop veel zal gebeuren. In vergelijking met figuur 4.1 is in figuur 4.2 de voorste lijn veel groter. Zo groot zelfs dat het overloopt in de achterste tonerlijn. de doorsnede van de tonerlijn in figuur 4.2 is ongeveer 2 mm lang en 0.4 mm hoog.

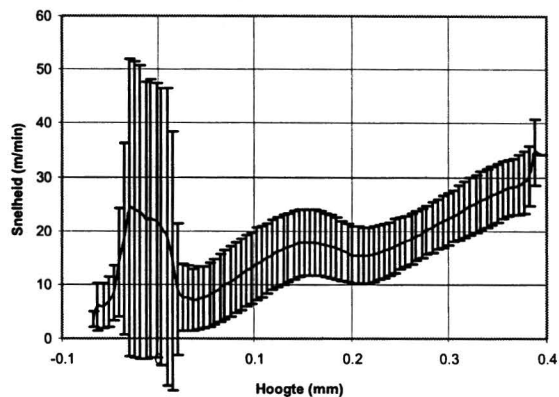
Bij de metingen (zie hoofdstuk 5) is een in hoogte verstelbare laserdiode op de toner gericht. Op deze manier is het mogelijk lokaal de snelheidscomponent van de toner in de richting van de laserbundel te meten. Het resultaat van de metingen is dan ook een snelheid (in bundelrichting) als functie van de hoogte van de laser. Om hierbij zo goed mogelijk aan te sluiten is uit de simulaties, uitgaande van een fictieve laserbundel, ook steeds de (absolute waarde van de) snelheidscomponent in de richting van de bundel bepaald, als functie van de hoogte van de laser. Om precies te zijn: bepaald wordt het gemiddelde van de absolute waarde van de snelheid in bundelrichting, waarbij wordt gemiddeld over de breedte van de fictieve laserbundel en de tijd. Dit is nog eens schematisch weergegeven in figuur 4.3. In dit hoofdstuk wordt steeds gemiddeld over een bundel van $50 \mu\text{m}$ en een interval van 0.01 s .

In figuur 4.4(a) staat weergegeven de x-component van de snelheid van de toner in de achterflank van de tonerlijn uit figuur 4.2. Te zien is dat (volgens de simulatie) de x-component van de tonersnelheid toe neemt als functie van hoogte, terwijl de standaardafwijking ongeveer constant is. Helemaal bovenin (uiterst rechts in de grafiek) wordt een snelheid voorspeld die twee keer zo groot is als de snelheid van de roterende cylinder, die draaide met een snelheid van 15 m/min .

Figuur 4.4(b) geeft op soortgelijke wijze de snelheden in de voorflank van de tonerlijn (de rechterkant in figuur 4.2). De hoge snelheden rond 0 mm komen van de tonerdeeltjes die aan de rechterkant van figuur 4.2 de simulatie binnenkomen en met hoge snelheid naar links bewegen. Het minimum bij 0.2 mm valt samen met de overgang tussen de voorste, kleine tonerlijn en de achterste, grote lijn. De absolute waarde van de snelheid is daar vergelijkbaar, maar omdat de snelheid



(a) achterflank



(b) voorflank

Figuur 4.4: Gemiddelde snelheid in x-richting als functie van hoogte voor de simulatie uit figuur 4.2. De foutenbalken geven de standaardafwijking weer.

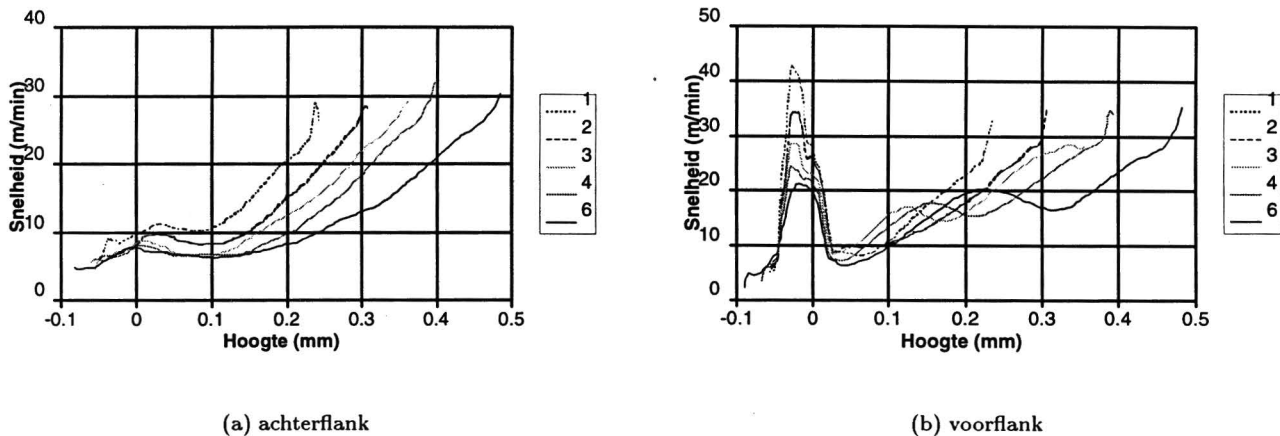
in de achterste lijn daar niet horizontaal gericht is, is de x-component kleiner.

4.5 Numeriek parameteronderzoek

Op basis van eerdere metingen aan toners was een redelijke schatting van de parameters van het model bekend. Enkele van deze parameters zijn gevarieerd rond hun standaardwaarden. Alleen variatie van de rotatiesnelheid van de cylinder, het magneetveld en de wrijvingscoëfficiënt tussen tonerdeeltjes onderling blijken een redelijk grote invloed op de tonersnelheid te hebben. De invloed van de wrijving tussen toner en de roterende cylinder, de hoeveelheid toner en de veerconstante in normaalrichting is veel kleiner. Deze worden in de volgende paragrafen besproken.

4.5.1 De hoeveelheid toner

In figuur 4.5 staat uitgezet de gemiddelde snelheid als functie van hoogte in de tonerlijn, voor zowel voor- als achterflank bij verschillende tonerhoeveelheden. De rotatiesnelheid van de cylinder was 15 m/min. In figuur 4.5(a) is te zien dat bij toenemende tonerhoeveelheid de grootte van de tonerlijn toeneemt, maar dat de vorm van het snelheidsprofiel in de achterflank of de snelheid boven in de tonerlijn verder niet veel verandert. Figuur 4.5(b) geeft hetzelfde beeld voor de voorflank. Wel is te zien in figuur 4.6 dat bij kleine tonerhoeveelheden de voorste lijn relatief kleiner wordt, terwijl bij veel toner de voorste lijn relatief groter wordt.



Figuur 4.5: Gemiddelde snelheid in x-richting als functie van hoogte bij 1, 2, 3, 4 en 6 maal een hoeveelheid toner.

4.5.2 De rotatiesnelheid van de cylinder

In figuur 4.7 staat uitgezet de gemiddelde snelheid als functie van hoogte, voor zowel voor- als achterflank bij verschillende rotatiesnelheden. Bij groter wordende rotatiesnelheid voorspelt het model een groter wordende tonersnelheid. In figuur 4.8 zijn de tonersnelheden gedeeld door de betreffende rotatiesnelheid. Uit deze grafiek blijkt dat voor hogere rotatiesnelheden de toner relatief langzamer gaat (volgens de simulaties). Een mogelijke verklaring hiervoor is dat er bij hogere snelheden meer slip optreedt met de roterende cylinder.

4.5.3 De veerconstante in normaalrichting

In figuur 4.9 staat uitgezet de gemiddelde snelheid als functie van hoogte in de tonerlijn, voor zowel voor- als achterflank bij verschillende waarden voor de veerconstante in normaalrichting k_n . De rotatiesnelheid van de cylinder was 15 m/min. Te zien is dat de snelheden nauwelijks veranderen als k_n tot een factor 100 maal de normale waarde heeft. Dit toont aan dat het waarschijnlijk is toegestaan de veerconstante in normaalrichting te verlagen zodat er sneller gerekend kan worden, zoals gedaan is in paragraaf 4.2. Tevens is het een bevestiging voor de aanname uit paragraaf 3.2.1 dat de precieze vorm van het botsingsmodel nauwelijks van invloed is op de uitkomsten van de simulaties.

4.5.4 Wrijving tussen tonerdeeltjes

In grafiek 4.10 is de wrijvingsconstante tussen toner onderling, μ_{toner} , gevarieerd van honderd maal minder dan de normale waarde tot honderd maal meer. Zoals uit grafiek 4.10(a) blijkt maakt dit weinig uit voor de achterflank. In de voorflank wordt wel een grote verandering voorspeld. Daarnaast verandert ook de vorm van de tonerlijn, zoals blijkt uit figuur 4.11: bij afnemende wrijving



(a) Tonerhoeveelheid 2

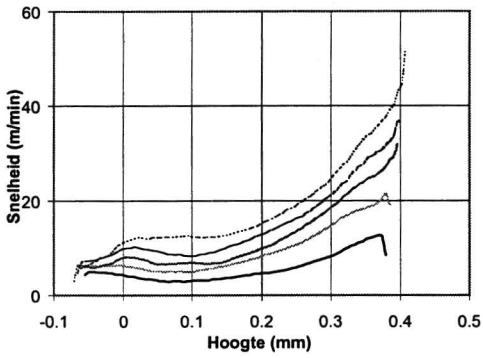


(b) Normale situatie (Tonerhoeveelheid 4)

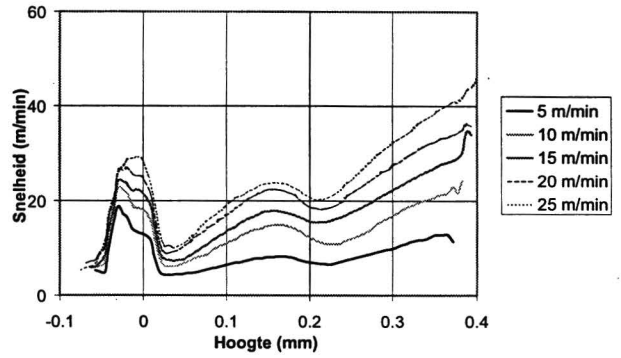


(c) Tonerhoeveelheid 6

Figuur 4.6: Vorm van de tonerlijn bij verschillende hoeveelheden toner.

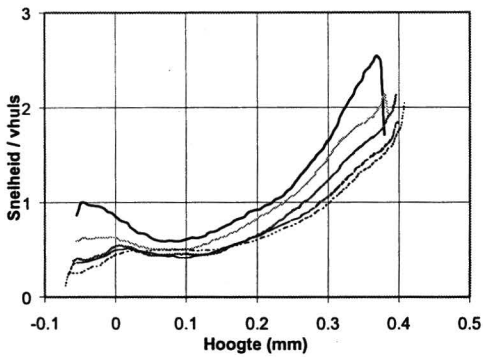


(a) achterflank

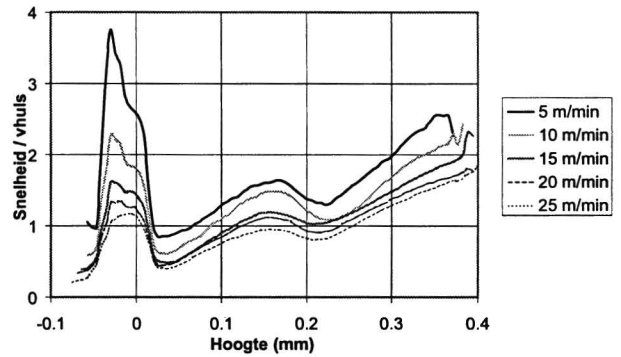


(b) voorflank

Figuur 4.7: Gemiddelde snelheid in x-richting als functie van hoogte bij verschillende rotatiesnelheden.

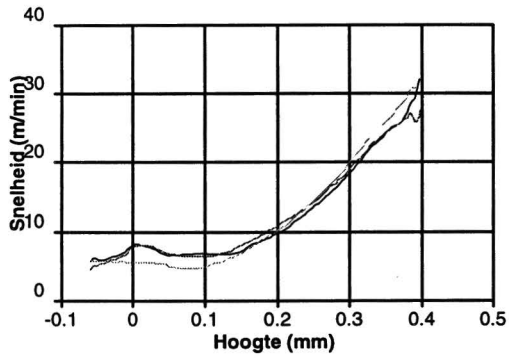


(a) achterflank

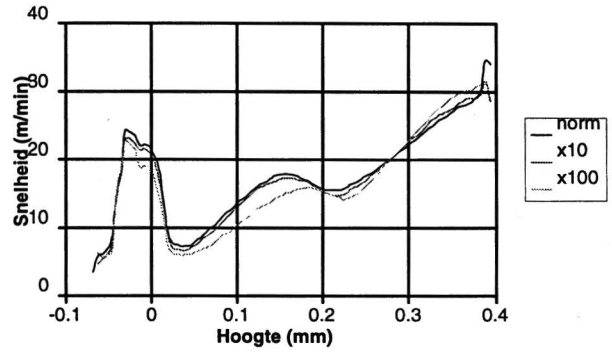


(b) voorflank

Figuur 4.8: Gemiddelde snelheid in x-richting, in verhouding tot de rotatiesnelheid, als functie van hoogte bij verschillende rotatiesnelheden.

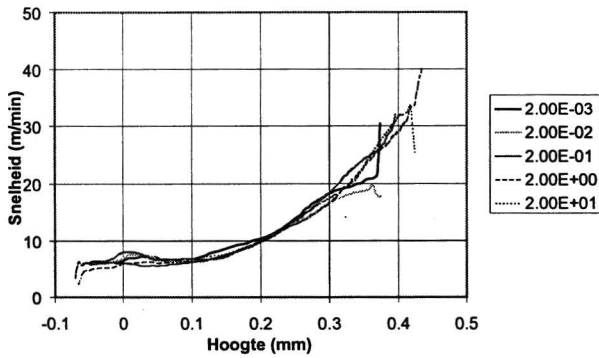


(a) achterflank

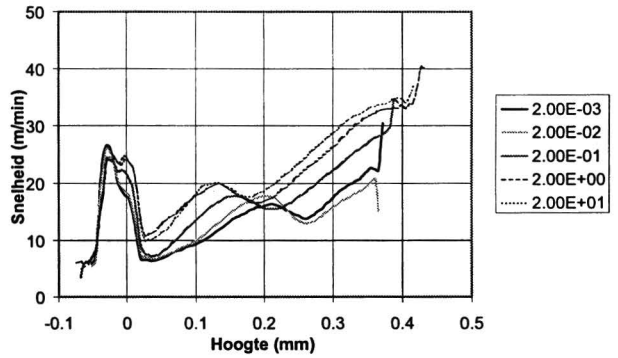


(b) voorflank

Figuur 4.9: Gemiddelde snelheid in x-richting als functie van hoogte bij verschillende waarden voor de veerconstante in normaalrichting k_n .

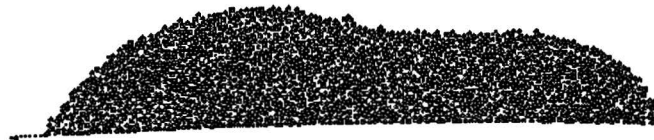


(a) achterflank



(b) voorflank

Figuur 4.10: Gemiddelde snelheid in x-richting, als functie van hoogte bij verschillende waarden van μ_{toner} .



(a) Wrijving tussen toner 100 maal kleiner

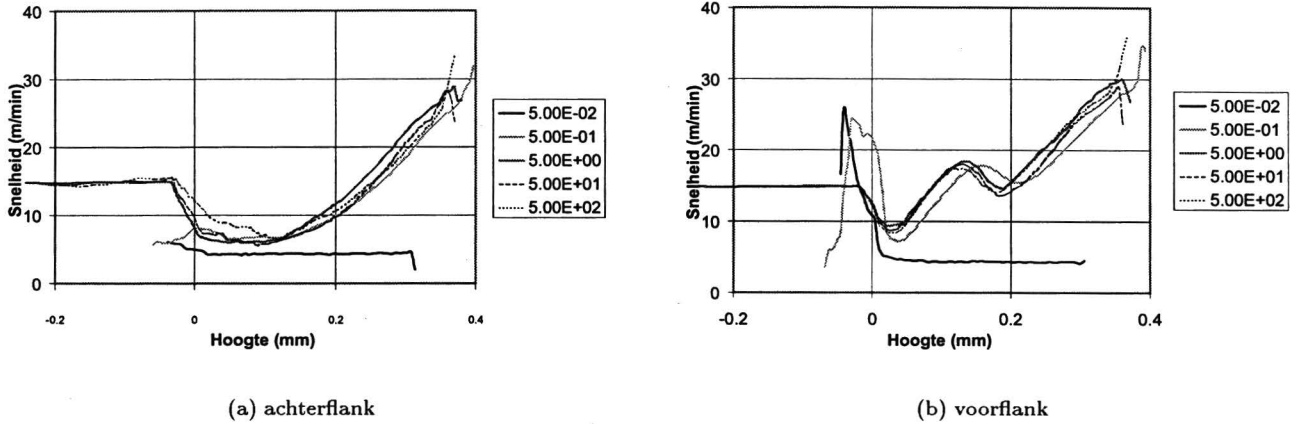


(b) Normale situatie



(c) Wrijving tussen toner 100 maal groter

Figuur 4.11: Vorm van de tonerlijn bij verschillende waarden van de wrijvingscoëfficiënt tussen tonerdeeltjes.



Figuur 4.12: Gemiddelde snelheid in x-richting, als functie van hoogte bij verschillende waarden voor de wrijving tussen toner en de roterende cylinder.

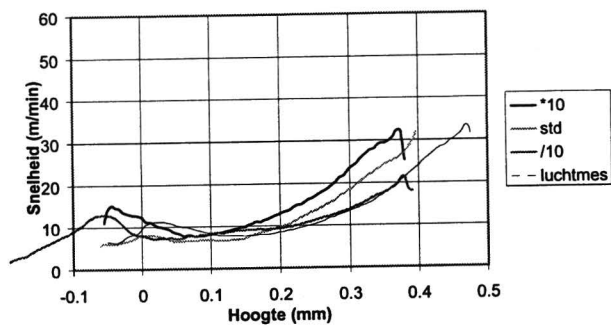
wordt het hoogteverschil tussen de twee (overlappende) tonerlijnen kleiner. In figuur 4.10(b) is dit ook te zien, enerzijds aan het feit dat het minimum in de grafiek naar rechts schuift, wat aangeeft dat de overgang tussen de rechtse en het linkse lijn hoger komt te liggen, en de rechtse tonerlijn dus groter wordt, en anderzijds de grafiek eerder, dus bij lagere hoogte, ophoudt, wat betekent dat de linkse tonerlijn kleiner wordt.

4.5.5 Wrijving tussen toner en de roterende cylinder

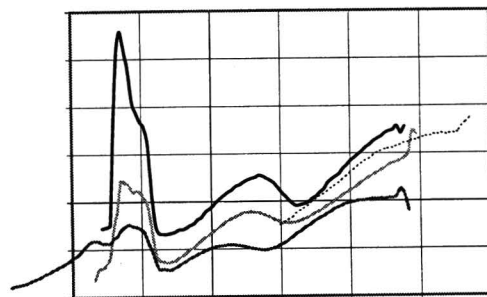
In grafiek 4.12 is de wrijvingsconstante tussen toner en de cylinder gevarieerd. Uit de grafieken blijkt dat de snelheden in de tonerlijn maar weinig veranderen. Het enige verschil is dat bij grote waarden voor de wrijvingsconstante (geen slip) er toner langs de cylinder naar links de simulatie uit loopt, wat blijkt uit de horizontale lijn links in grafiek 4.12(a) op 15 m/min, de rotatiesnelheid van de cylinder. Daarnaast blijkt er voor heel lage waarden voor de wrijvingsconstante zoveel slip op te treden tussen de cylinder en de toner dat de tonerlijn niet meer in beweging wordt gebracht. Dit blijkt uit de horizontale lijn op ongeveer 5 m/min in grafiek 4.12. De waarde van ongeveer 5 m/min wordt veroorzaakt door het feit dat de tonerbulks als geheel op en neer over de huls gaat.

4.5.6 Magneetveld

In grafiek 4.13 staat weergegeven de snelheid van de toner de stripmagneet, voor een tienmaal versterkte en verzwakte stripmagneet, en voor een hoefijzermagneet. De rotatiesnelheid van de cylinder was bij al deze simulaties 15 m/min. Duidelijk is te zien dat bij een toenemend magneetveld de snelheden toenemen. In figuur 4.14 staat voor enkele magneetvelden de vorm van de tonerlijn. Er wordt een groot verschil in vorm voorspeld tussen een tonerlijn op een stripmagneet en op een hoefijzermagneet. Bij een 10 maal verzwakte hoefijzermagneet



(a) achterflank



(b) voorflank

Figuur 4.13: Gemiddelde snelheid in x-richting, als functie van hoogte bij verschillende magneetvelden.

begint de lijn zijn vorm te verliezen. Op een 10 maal versterkte hoefijzermagneet ziet de tonerlijn er vrijwel hetzelfde uit als op een gewone hoefijzermagneet.



(a) Normale situatie (Stripmagneet)



(b) 10 maal verzwakte stripmagneet



(c) hoefijzermagneet

Figuur 4.14: Vorm van de tonerlijn bij verschillende magneetvelden.

Hoofdstuk 5

Laser-Doppler snelheidsmetingen

5.1 Inleiding

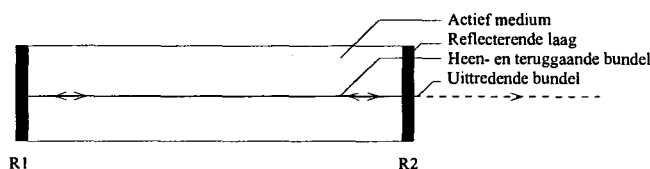
Om de resultaten van de numerieke simulaties te kunnen toetsen is de snelheid gemeten van de toner aan het oppervlak van de tonerlijn. Hierbij is gebruik gemaakt van het self-mixing effect (ook wel backscatter modulation genoemd) bij laserdiodes. Dit effect treedt op als het licht van de laser wordt teruggekoppeld in de laserdiode, nadat het een Dopplerverschuiving heeft ondergaan. Als gevolg van dit effect gaat de intensiteit van de laserbundel variëren met een frequentie die gelijk is aan de frequentieverschuiving van het teruggekoppelde licht. Deze frequentieverschuiving is evenredig met de snelheid van het voorwerp waarop de laser gericht is. De vorm van de intensiteitsvariatie benadert die van een zaagtand. De richting van de zaagtand blijkt af te hangen van de bewegingsrichting van het voorwerp waaraan het laserlicht verstrooid.

Door een fotodiode achter de laserdiode te plaatsen en het signaal van de fotodiode weer te geven op een spectrum-analyser, kan de frequentie van de intensiteitsvariatie bepaald worden, en daaruit de snelheid van het voorwerp waaraan verstrooid wordt. Als binnen de bundel van de laser meerdere snelheden voorkomen, kan uit het door de fotodiode gemeten frequentiespectrum de snelheidsverdeling ter plaatse van de laserbundel bepaald worden.

In dit hoofdstuk wordt eerst de werking van een laserdiode besproken. Aan de hand hiervan wordt het self-mixing effect kwalitatief besproken. Een uitgebreide beschrijving staat onder andere in [SLO90] en [PET91, hoofdstuk 2 en 9]. Daarna worden de mogelijkheden en problemen besproken van deze manier om de snelheid van toner te meten. In paragraaf 5.5 worden enkele snelheidsmetingen besproken. Deze worden in hoofdstuk 6 vergeleken met de uitkomsten van de simulaties.

5.2 De werking van een laserdiode

Een laser bestaat uit een trilholt die begrensd wordt door twee spiegels, zoals schematisch weergegeven in figuur 5.1. In de holte wordt het licht versterkt als



Figuur 5.1: Schematische weergave van een laser

gevolg van gestimuleerde emissie. Bij de spiegels wordt een deel doorgelaten en een deel gereflecteerd. Het gereflecteerde deel wordt vervolgens weer versterkt. Het doorgelaten deel vormt de laserbundel.

Gestimuleerde emissie is een wisselwerking tussen een aangeslagen atoom en een foton. Na deze wisselwerking is het aangeslagen atoom vervallen naar een energetisch lagere toestand, en is er een extra foton uitgezonden. Dit tweede foton heeft dezelfde energie, fase en bewegingsrichting als het eerste. Wel moet de energie van het oorspronkelijke foton gelijk zijn aan het verschil tussen de energieniveaus van het aangeslagen atoom.

In de trilholve zal het aantal fotonen toenemen, zodanig dat de toename evenredig is met het aantal al aanwezige fotonen. In formulevorm:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = gP \quad (5.1)$$

met P het vermogen van bijvoorbeeld de heengaande bundel ter plaatse x en g de versterkingsfactor, de zogenaamde gain. De gain hangt o.a. af van n , de ladingsdragersdichtheid (zie [SLO90]), en de frequentie van het laserlicht ν . Als het licht dus één keer door de trilholve gaat zal de intensiteit een factor e^{gL} toenemen, met L de lengte van de holte.

Een spiegel zal een fractie R van het opvallende vermogen reflecteren, en een fractie $T = 1 - R$ doorlaten. Bij laserdiodes worden de spiegels gevormd door de overgang tussen het diodemateriaal en de lucht daarbuiten. Het verschil in brekingsindex is zo groot dat er voldoende vermogen gereflecteerd wordt (ongeveer 32%, zie [SLO90]) voor laserwerking.

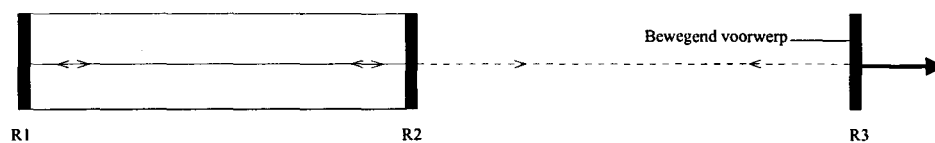
Om stationaire laserwerking te kunnen hebben, moet aan twee voorwaarden voldaan zijn: de amplitude- en de fasevoorwaarde. De amplitudevoorwaarde eist dat de intensiteit van de laser niet verandert. Dat wil zeggen dat als het licht een keer op en neer is gegaan door de laserholte, de intensiteit hetzelfde moet zijn. In formulevorm:

$$R_1 R_2 e^{2gL} = 1 \quad (5.2)$$

Hierin zijn R_1 en R_2 de fracties die de linker en rechter spiegel reflecteren en e^{2gL} de factor die de intensiteit toeneemt als twee keer de laserholte wordt doorlopen. De fasevoorwaarde eist dat:

$$L = \frac{1}{2} m \frac{\lambda}{\mu} \quad (5.3)$$

ofwel dat er een geheel aantal maal een halve golflengte in de laserholte past. λ is de golflengte van het laserlicht in vacuüm, m een geheel getal, μ de brekingsindex van het diodemateriaal, en λ/μ dus de golflengte van het licht in het diodemateriaal.



Figuur 5.2: Schematische weergave van een laser, waarbij een gedeelte van het uitgezonden licht door een voorwerp terug de laser in wordt verstrooid

De threshold gain g_{th} is die waarde van g waarvoor aan vergelijking (5.2) voldaan is. Als $g > g_{th}$ dan zal de intensiteit van de laser toenemen tot weer geldt dat $g = g_{th}$. Andersom zal de intensiteit van de laser afnemen als $g < g_{th}$.

De gain g hangt af van de ladingsdragersdichtheid n . Er kan een n_{th} gedefinieerd worden waarvoor geldt dat:

$$g(n_{th}) = g_{th} \quad (5.4)$$

Omdat de gain toeneemt bij stijgende n is n_{th} uniek bepaald.

De ladingsdragersdichtheid zal afnemen, als gevolg van gestimuleerde- en spontane emissie. Er is een stroom I door de laserdiode nodig om de voorraad weer aan te vullen. I_{th} is de stroom die nodig is om de ladingdragers aan te vullen die zijn vervallen als gevolg van spontane emissie. Deze waarde zal alleen afhangen van de concentratie ladingdragers n_{th} , en niet van het vermogen van de laser. Het vermogen P van de laserdiode is dan in goede benadering evenredig met verschil $I - I_{th}$.

5.3 De gevolgen van terugkoppeling

In figuur 5.2 staat schematisch een laser weergegeven waarvan een gedeelte van de laserbundel via een voorwerp wordt terugverstrooid de laser in. Daar zal het licht dat weerkaatst wordt door spiegel 2 interfereren met het teruggekoppelde licht, dat verstrooid is door voorwerp 3. Afhankelijk van het faseverschil tussen de twee bundels zullen die elkaar dus versterken of verzwakken.

De frequentie ν van de bundel die door spiegel 2 wordt teruggekaatst is de laserfrequentie. Deze bundel is dus van de vorm:

$$E_2 \sim \sin(2\pi\nu t) \quad (5.5)$$

met E_2 de elektrische component van de lichtbundel op een bepaalde plaats. Voor de magnetische component geldt een soortgelijke uitdrukking. De bundel die door het voorwerp 3 wordt weerkaatst heeft een Dopplerverschuiving ondergaan waarvoor geldt dat:

$$d\nu = \frac{2\nu \cos \alpha}{\lambda} \quad (5.6)$$

mits $v \ll c$, de lichtsnelheid. Hierin is $v \cos \alpha$ de snelheid van het voorwerp in bundelrichting en λ de golflengte van de laser in vacuüm (zie ook [SLO90]). De verschuiving die gegeven wordt door vergelijking (5.6) is tweemaal de bij de snelheid v horende Dopplerverschuiving. De oorzaak hiervan is dat het bewegende

voorwerp 3 een Doppler verschoven laser “ziet” en licht met deze verschoven frequentie reflecteert. Vanuit de laser gezien is deze verschoven reflectie nog eens extra verschoven omdat het voorwerp beweegt t.o.v. de laser. Anders gezegd: De laser ontvangt zijn het Doppler verschoven licht van zijn “spiegelbeeld”, zoals dat gereflecteerd wordt door het voorwerp. Dit “spiegelbeeld” beweegt zich met een snelheid $2v$ ten opzichte van de laser.

De door voorwerp 3 teruggekaatste bundel is nu van de vorm:

$$E_3 \sim \sin(2\pi(\nu + d\nu)t) = \sin(2\pi\nu t + 2\pi d\nu t) \quad (5.7)$$

Omdat $R_3 \ll R_2$ geldt ook dat $E_3 \ll E_2$. Omdat ook $d\nu \ll \nu$ (immers: $d\nu = 2v \cos(\alpha)/\lambda = 2\nu \cos(\alpha)v/c$ en $v \ll c$) mag E_3 geïnterpreteerd worden als een bundel met frequentie ν , waarvan de fase heel langzaam verandert. Als gevolg hiervan zal ook het faseverschil tussen E_2 en E_3 langzaam veranderen, zodat afwisselend versterking en verzwakking optreedt als gevolg van interferentie. De frequentie van deze oscillatie is uiteraard $d\nu$.

De spiegel 2 en het voorwerp 3 mogen vervangen worden door een spiegel ter plaatse van spiegel 2 met een reflectie R_{2eff} . Hiervoor geldt (zie [SLO90]):

$$R_{2eff} \approx R_2 + C \cos(2\pi d\nu t) \quad (5.8)$$

Hierin is C een constante, evenredig met R_3 en veel kleiner dan R_2 .

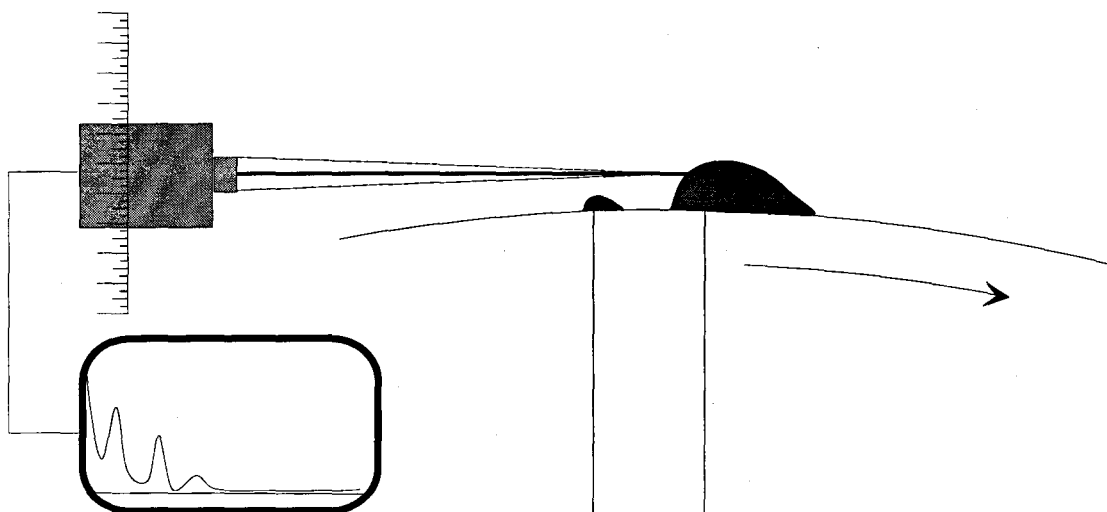
Een nauwkeurige afleiding op basis van amplitudereflectiecoëfficiënten in plaats van intensiteitsreflectiecoëfficiënten, zoals gedaan wordt in [SLO90] en [PET91] toont aan dat $r_{2eff} = \sqrt{R_{2eff}}$ eigenlijk een complexe grootte is als gevolg van het faseverschil tussen bundel 2 en 3. De imaginaire bijdrage is echter verwaarloosbaar omdat $E_3 \ll E_2$, zodat (5.8) in goede benadering geldt.

Om met behulp van het bovenstaande het self-mixing effect te beschrijven moeten nog twee stappen genomen worden. Eerst moet aangetoond worden dat als gevolg van de variërende reflectiecoëfficiënt de intensiteit gaat variëren. Als tweede moet worden aangetoond dat die variatie zaagtandvormig is.

De intensiteit van de laser varieert omdat I_{th} varieert en de stroom door de laser I zo goed mogelijk constant wordt gehouden, zodat het verschil $I - I_{th}$, dat evenredig was met het uitgestraalde vermogen P , varieert. De variatie van I_{th} is eenvoudig te verklaren uit de variatie van R_{2eff} . Als gevolg van deze variatie gaat namelijk de threshold gain g_{th} variëren, zodanig dat aan vergelijking (5.2) voldaan blijft. De gain was afhankelijk van de ladingsdragersdichtheid n , zodat n_{th} mee varieert. I_{th} tenslotte, is afhankelijk van n_{th} .

Het zaagtandvormige karakter van de variatie is aannemelijk te maken door aan te tonen dat $d\nu$, de frequentie van de intensiteitsvariatie, oscilleert. Als gevolg daarvan is namelijk de frequentie van de variatie in R_{2eff} niet meer constant, zodat de variatie in R_{2eff} niet harmonisch is. De oscillatie van $d\nu$ is te verklaren uit de variatie van n_{th} . Als gevolg van die variatie varieert de brekingsindex van het halfgeleidermateriaal, zodat als gevolg van de faserelatie (5.3) de frequentie ν van de laser varieert. En volgens (5.6) is $d\nu$ evenredig met ν .

Om de exacte vorm van de variatie te bepalen moet een niet lineaire vergelijking numeriek opgelost worden. Dit is gedaan in [SLO90]. Wanneer heel weinig licht wordt teruggekoppeld is de variatie harmonisch van vorm. Naarmate er meer licht wordt teruggekoppeld gaat de variatie meer op een zaagtand lijken. Als de hoeveelheid teruggekoppeld licht te groot wordt kunnen er ongewenste



Figuur 5.3: Schematische weergave de meetopstelling.

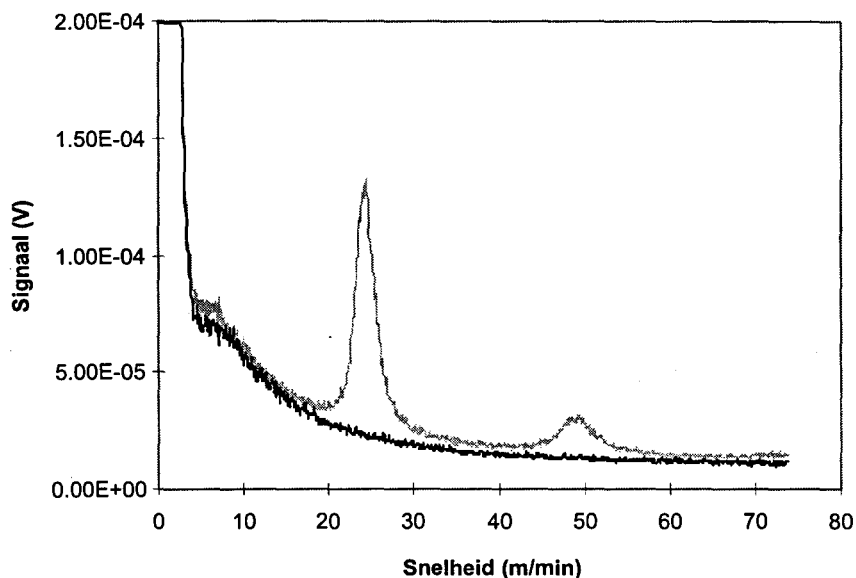
effecten optreden (zie [SLO90]) omdat dan meerdere laserfrequenties mogelijk worden.

5.4 De opstelling: mogelijkheden en beperkingen

In figuur 5.3 staat schematisch de meetopstelling weergegeven. Links is de bovenkant van de stripmagneet getekend, waaromheen de cylinder draait. Rechts staat de in hoogte verstelbare laserdiode. De cylinder wordt aangedreven door een teruggekoppelde elektromotor, zodat de rotatiesnelheid constant is. De stroom door de laser wordt constant gehouden. De laser heeft een golflengte van 820 nm en een vermogen van maximaal 35 mW. Uit veiligheidsoverwegingen wordt positioneren en scherpstellen van de laser met behulp van een CCD camera en een monitor gedaan. Een fotodiode om de intensiteit van de laser te meten is in de laserbehuizing opgenomen. Deze is achter de laser aangebracht. Het signaal van de fotodiode wordt via een stroom-spanningsomzetter naar een spectrum-analyser gestuurd. De spectra kunnen met een PC uit de analyser gelezen worden.

Er is gekozen voor deze manier van meten omdat de meettechniek contactloos en compact is. Bovendien zijn er weinig optische componenten nodig en uitlijnen is dan ook geen probleem. Ook was de techniek eerder (zie [SLO92]) succesvol gebruikt voor het meten van tonersnelheden.

Een van de problemen van de huidige opstelling is de focussering en als gevolg daarvan de bundeldiameter. Focussieren moet met de hand gedaan worden door op de monitor de spot van de laser op de cylinder of de tonerlijn te bekijken. Vanwege het relatief grote vermogen van de laser wordt de CCD camera overstuurd, waardoor de laserspot op de monitor mogelijk groter lijkt dan hij in werkelijkheid is. Daarnaast vergroot de camera de spot onvoldoende, zodat het



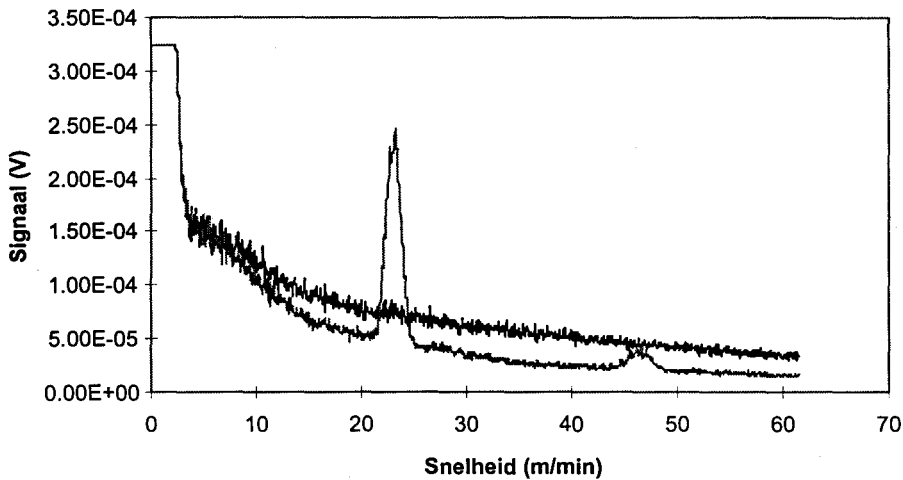
Figuur 5.4: Twee spectra zoals ze uit de analyser worden uitgelezen. De zwarte lijn geeft het spectrum als de laser op een stilstaand voorwerp is gericht, de grijze lijn geeft het signaal van de roterende cylinder.

moelijk is de verandering van de afmetingen van de spot te zien die het gevolg is van het verplaatsen van de lens. Met een bundel profiler is de bundelspot ter plaatse van de tonerlijn (ongeveer 10 cm van de laser vandaan) gemeten. Deze is bepaald door de lens zodanig te plaatsen dat de bundel profiler de kleinste mogelijke waarde aangaf. Dit bleek $38\mu\text{m}$ te zijn. (Dit is de zgn. $1/e^2$ waarde, ongeveer 1.7 FWHM.) Vervolgens is met behulp van de CCD camera en de monitor scherpgesteld. Daarbij bleek de bundeldiameter te variëren tussen 40 en $130\mu\text{m}$. In het vervolg wordt aangenomen dat de bundeldiameter circa $100\mu\text{m}$ is.

De gemeten signaalsterkte blijkt toe te nemen als de stroom door de laser vergroot wordt. Bij hoge laservermogens neemt echter ook de kans toe dat tonerdeeltjes aan elkaar smelten. De aan elkaar gesmolten tonerdeeltjes vormen grote korrels die in de tonerlijn duidelijk te zien zijn. Bij hoge snelheden van de cylinder neemt de kans dat de toner smelt af. Voor lage rotatiesnelheden (kleiner dan 10 m/min) moest, om smelten te voorkomen, het laservermogen worden teruggedraaid tot beneden de 10 mW. Bij deze vermogens is het niet meer mogelijk om snelheidsmetingen te doen.

Volgens [SLO90] wordt de laser instabiel als er te veel licht in de laser wordt teruggekoppeld. Bij hoge vermogens is inderdaad gezien dat het spectrum op de analyser instabiel wordt. Tijdens metingen aan toner vormt dit echter nauwelijks een probleem, omdat het vermogen laag gehouden moet worden om het smelten van de toner te voorkomen.

In figuur 5.4 staan ter illustratie twee spectra uitgezet zoals ze uit de spec-

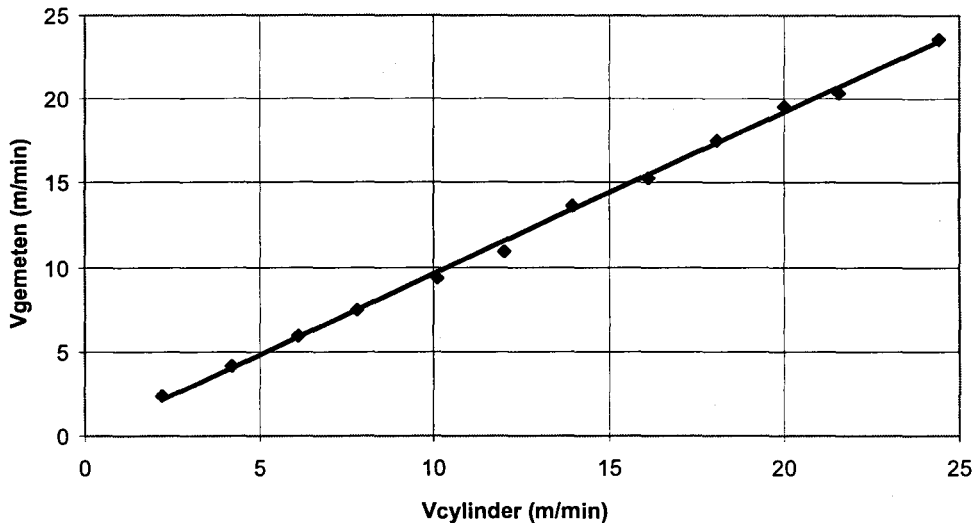


Figuur 5.5: Een nulspectrum en het signaal van de roterende cylinder bij een laservermogen van ongeveer 30 mW.

trum analyser zijn uitgelezen. De zwarte lijn geeft het spectrum dat gevonden wordt als de laser gericht is op een stilstaand voorwerp, het zogenaamde nulspectrum. De grijze lijn is het spectrum wanneer de laser gericht wordt op de cylinder als deze draait. Het verschil tussen een gemeten spectrum en het nulspectrum kan geïnterpreteerd worden als een snelheidsverdeling, die bij iedere snelheid de kans geeft dat deze voorkomt. Dit mag natuurlijk alleen als het nulspectrum voldoende stabiel is (niet tijdsafhankelijk is) en als het niet beïnvloed wordt door de terugkoppeling. Aan deze voorwaarden blijkt niet voldaan te zijn bij hoge uitgangsvermogens van de laser, zoals te zien is in figuur 5.5. Het spectrum dat gemeten wordt bij een roterende cylinder is vrijwel overal lager dan een spectrum dat onder dezelfde omstandigheden wordt gemeten als de cylinder niet roteert. Bovendien blijkt het nulspectrum voor lage frequenties (tot ongeveer 200 kHz of 5 m/min) een kleine variatie in de tijd te vertonen, wat metingen van lage snelheden onnauwkeuriger maakt. In de praktijk vormt dit geen probleem omdat de gemeten snelheden (zie paragraaf 5.5.1) doorgaans hoger liggen dan 5 m/min en er toch al bij lage laservermogens gemeten moet worden om te voorkomen dat de toner aan elkaar smelt.

In de navolgende metingen steeds van het verschil tussen het gemeten spectrum en het nulspectrum de verwachtingswaarde en de standaardafwijking bepaald. Voordeel van deze aanpak is dat hij makkelijk automatiseerbaar is. Het nadeel is dat hij niet toepasbaar is op spectra die niet de hele verdeling bevatten, waarin het signaal klein is ten opzichte van de achtergrondruis of waarin hogere harmonischen nadrukkelijk voorkomen, zoals in figuur 5.4 het geval is. In de metingen is dan ook steeds het frequentiebereik zodanig gekozen dat het spectrum de hele piek bevat. Waar nodig is de hogere harmonische eerst uit het spectrum verwijderd.

Om een schatting te kunnen maken van de nauwkeurigheid van de snelheids-



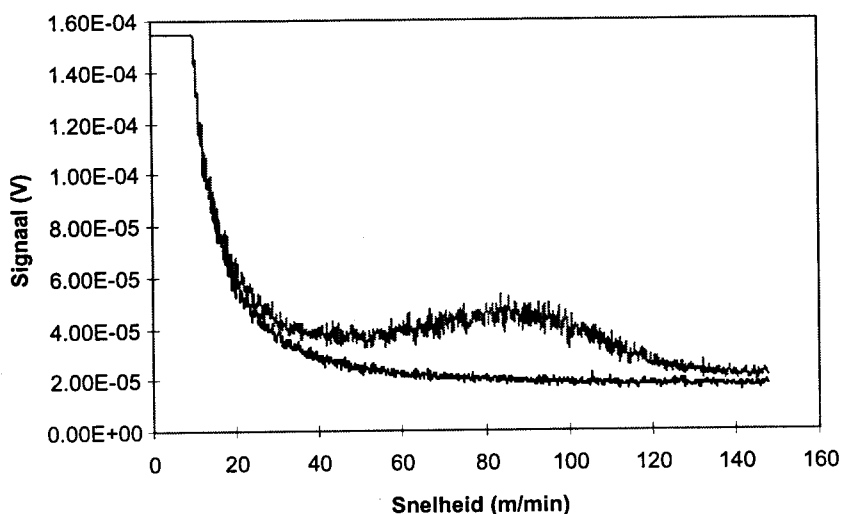
Figuur 5.6: Door de laserdiode gemeten snelheid, als functie van de rotatiesnelheid van de cilinder. De rechte geeft de werkelijke snelheid in bundelrichting ter plaatse van de bundelspot weer.

metingen is de snelheid van de cilinder gemeten voor verschillende rotatiesnelheden. Het resultaat van deze meting staat in figuur 5.6. De hoek tussen de laserbundel en de cilinder was ongeveer 16 graden, zodat (zie vergelijking (5.6)) de gemeten snelheden een factor 0.96 lager zijn dan de werkelijke rotatiesnelheid. Alle meetpunten liggen binnen 1 m/min van de zo voorspelde waarde. De standaardafwijking van de gemeten snelheidsverdelingen tussen 0.3 en 3.5 m/min, met als gemiddelde piekbreedte 1 m/min.

De invloed van het laservermogen op de gemeten spectrum is kort onderzocht. Bij hoge vermogens liggen alle meetpunten binnen 0.5 m/min van de werkelijke waarde. De breedte van de piek neemt bij hogere vermogens af van 1 m/min bij 10 mW tot 0.5 m/min bij 35 mW. Bij lage vermogens (minder dan 10 mW) worden de metingen onnauwkeuriger door de afname van de signaalsterkte. De gemeten snelheid wijkt tot 1 m/min af van de werkelijke waarde en de piekbreedte neemt toe tot 2.5 m/min. Voor vermogens tot 25 mW neemt het oppervlak van de hogere harmonische kwadratisch toe met het vermogen, terwijl het oppervlak onder de hoofdpijk ongeveer lineair toeneemt.

5.5 Metingen aan de tonerlijn

Tijdens de metingen bleek er verschil te zijn tussen de spectra die gevonden worden bij metingen aan toner B op een stripmagneet en de andere metingen: toner B op een stripmagneet en toners A en B op een hoefijzermagneet. Bij de laatstgenoemde groep metingen was steeds in het spectrum een duidelijke piek



Figuur 5.7: Voorbeeld van een spectrum met een duidelijke piek. Deze spectra worden gemeten bij metingen aan toner A en B op een hoefijzermagneet en toner A op een stripmagneet

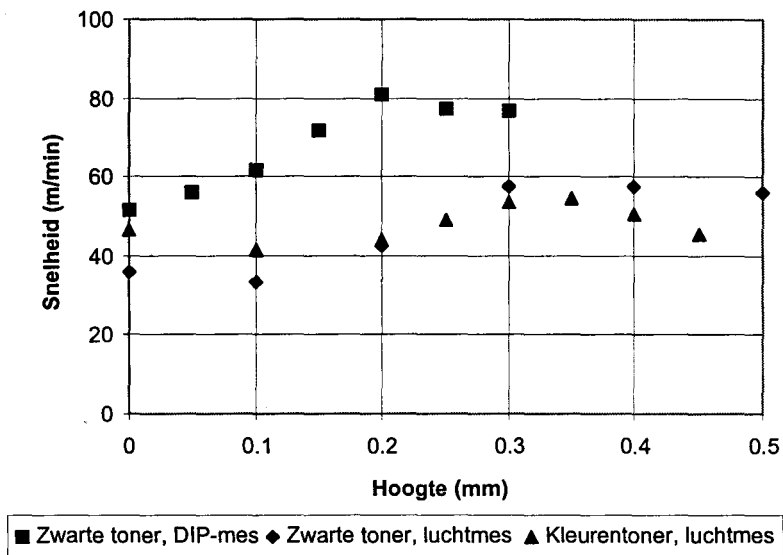
te zien. Bij de metingen aan toner B op de stripmagneet was dat niet het geval. Hieronder worden beide groepen metingen apart besproken.

5.5.1 Metingen aan toner A en B op een hoefijzermagneet en toner A op een stripmagneet

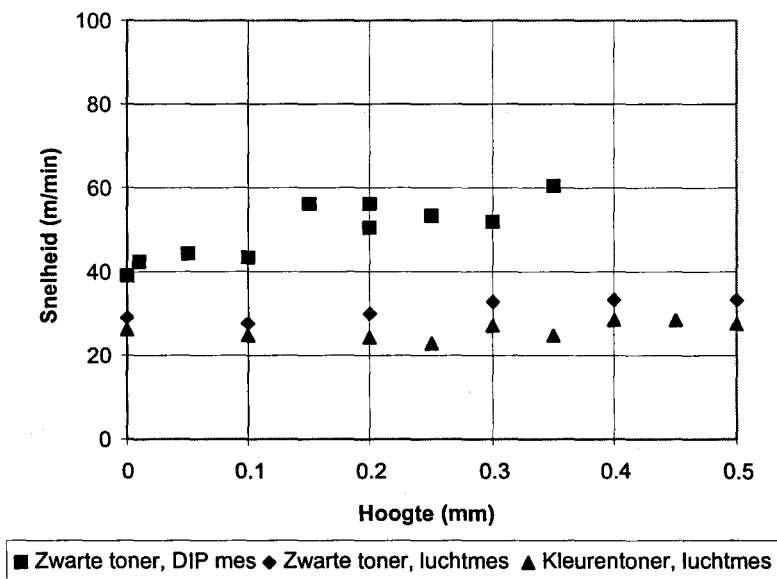
Bij metingen aan toner A op een stripmagneet en aan toner A en B op een hoefijzermagneet wordt steeds een spectrum gevonden zoals dat in figuur 5.7. Steeds is een brede, min of meer Gaussvormige piek te zien, die verschuift als functie van de rotatiesnelheid van de cylinder en, in mindere mate, de hoogte van de laser.

In figuur 5.8 staat uitgezet de gemiddelde gemeten snelheid als functie van de hoogte bij metingen aan de voorflank van toner A en B op een hoefijzermagneet en toner A op een stripmagneet. De standaardafwijking bij de metingen aan toner A op een stripmagneet waren steeds ongeveer 25 m/min. Bij de metingen aan toner A en B op een hoefijzermagneet bedroeg de standaardafwijking steeds ongeveer 10 m/min. De rotatiesnelheid van de cylinder was bij alle metingen 25 m/min. In figuur 5.9 staan de resultaten van dezelfde metingen bij een rotatiesnelheid van 12 m/min. In vergelijking met figuur 5.8 zijn de gemiddelde snelheden duidelijk afgenomen. De standaardafwijkingen zijn wel ongeveer even groot gebleven.

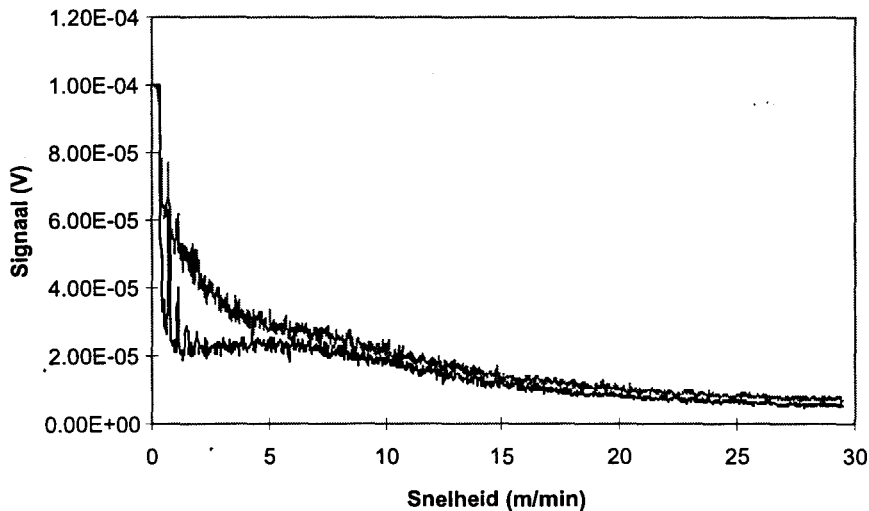
Het blijkt dat de in de voorflank gemeten snelheden maar weinig variëren als functie van de hoogte. Bij metingen aan de achterflank bleek dat daar hetzelfde geldt. Daarom is de achterflank verder niet onderzocht.



Figuur 5.8: Gemiddelde gemeten snelheid als functie van hoogte in de voorflank van enkele tonerlijnen bij een rotatiesnelheid van 25 m/min



Figuur 5.9: Gemiddelde gemeten snelheid als functie van hoogte in de voorflank van enkele tonerlijnen bij een rotatiesnelheid van 12 m/min

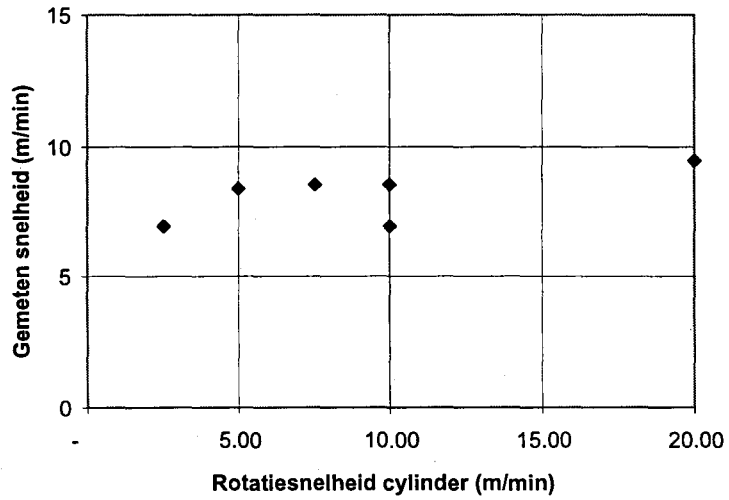


Figuur 5.10: Voorbeeld van een spectrum zonder duidelijke piek. Deze spectra worden gezien bij metingen aan toner B op een stripmagneet.

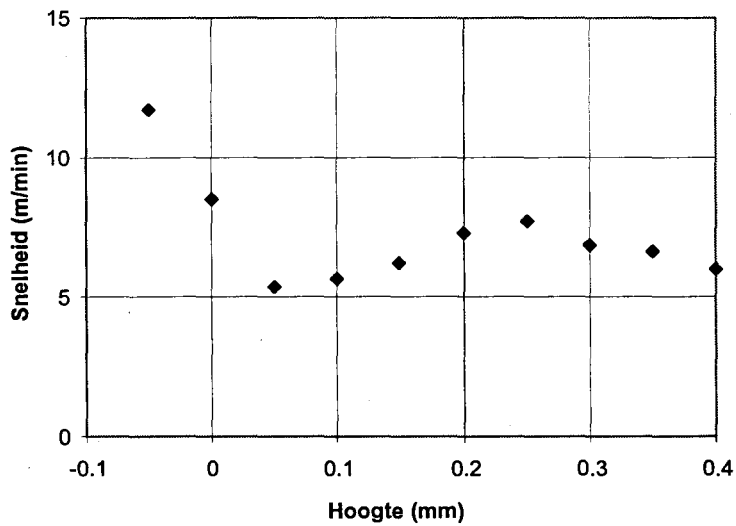
5.5.2 Metingen aan toner B op een stripmagneet

Bij metingen aan toner B op een stripmagneet wordt steeds een spectrum gevonden van een vorm zoals in figuur 5.10. Deze spectra zijn steeds vrijwel overal gelijk aan het nulspectrum, behalve bij de lage snelheden, en bevatten geen duidelijke piek. Omdat in de spectra geen duidelijke piek voorkomt is het de vraag of het zinvol is een gemiddelde waarde te bepalen. Wanneer dit toch gedaan wordt, zoals in de figuren 5.11 en 5.12, blijkt het gemiddelde niet significant af te hangen van de rotatiesnelheid van de cylinder of de hoogte in de tonerlijn. In figuur 5.11 is de "snelheid", het gemiddelde van het gemeten verschilspectrum, boven in de tonerlijn uitgezet als functie van de rotatiesnelheid voor toner B. In figuur 5.12 is voor een even grote tonerlijn de "snelheid" als functie van de hoogte in de voorflank van de lijn uitgezet. De rotatiesnelheid was bij deze meting 25 m/min. De metingen reproduceren slecht. Als de meting onder gelijkblijvende omstandigheden herhaald wordt kunnen de gemeten gemiddelden tot 50% lager liggen.

Om een uitspraak te kunnen doen over de betekenis van deze metingen is de opstelling onder een microscoop geplaatst. De snelheden in de tonerlijn bleken ongeveer evenredig te zijn met de rotatiesnelheid van de cylinder. Het is niet bekend waarom dit niet ook uit de Laser-Doppler metingen volgt. Het lijkt niet mogelijk dit te verklaren met reflectie-eigenschappen van de toner, omdat op een hoefijzermagneet wel goede snelheidsmetingen zijn gedaan (zie paragraaf 5.5.1). Om de mogelijkheid uit te sluiten dat de flank van de tonerlijn vrijwel overal loodrecht op de laserbundel staat (waardoor de gemeten snelheden ongeveer nul zouden zijn) is geprobeerd de laser onder een andere hoek op de tonerlijn te laten schijnen. Ook dit leverde alleen spectra op zoals dat van figuur 5.10.



Figuur 5.11: "Snelheid" boven in een tonerlijn van toner B op een stripmagneet als functie van de rotatiesnelheid.



Figuur 5.12: "Snelheid" in een tonerlijn van toner B op een stripmagneet als functie van de hoogte.

Hoofdstuk 6

Vergelijking van metingen en simulaties

6.1 Inleiding

In dit hoofdstuk worden de in hoofdstuk 5 beschreven metingen vergeleken met de uitkomsten van de simulaties. Eerst komen de metingen op de hoefijzermagneet aan bod. Daarna worden de metingen aan de stripmagneet besproken.

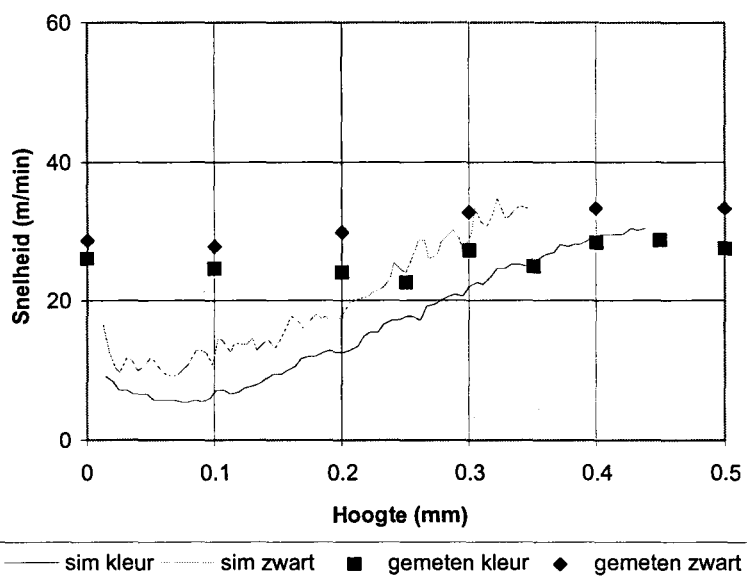
6.2 De hoefijzermagneet

In figuur 6.1 zijn de gemeten en gesimuleerde snelheden als functie van hoogte uitgezet voor zowel toner A als B, bij een rotatiesnelheid van 12 m/min. In figuur 6.2 is hetzelfde gedaan voor een rotatiesnelheid van 25 m/min. In de simulaties is steeds gemiddeld over een bundel van 10 μm . In beide figuren is te zien dat de overeenstemming tussen metingen en simulaties beter wordt naarmate hoger in de tonerlijn gekeken wordt. De snelheden die onder in de tonerlijn gemeten worden zijn ongeveer even groot als boven in de lijn, in tegenstelling tot wat de simulaties voorspellen. Dit is mogelijk te verklaren doordat tijdens de metingen de tonerlijn niet op zijn plaats blijft maar als geheel van positie verandert. Een andere verklaring is dat de simulaties de vorm van de tonerlijn niet goed voorspellen. Dit is verder niet onderzocht.

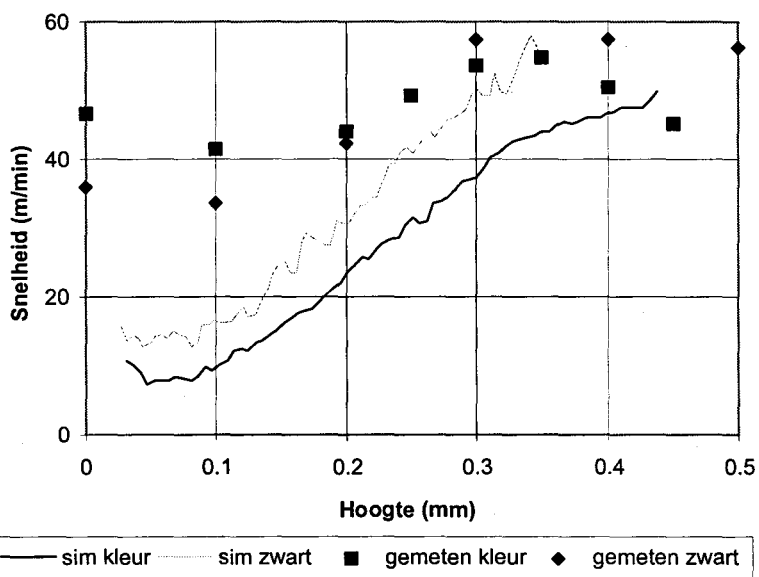
In de simulaties wordt voor toner A een snelheid gevonden die ongeveer 15% groter is dan toner B, veroorzaakt door de hogere magnetisatie van toner A. Dit verschil is ook in de metingen bij een rotatiesnelheid van 12 m/min (figuur 6.1) gevonden. In figuur 6.2 is het verschil tussen toner A en B zo klein dat het de vraag is of dit significant is.

Wanneer figuur 6.1 vergeleken wordt met figuur 6.2 is te zien dat zowel uit de simulaties als uit de metingen volgt dat een verdubbeling van de hulssnelheid niet leidt tot een verdubbeling van de tonersnelheid. In paragraaf 4.5.2 was dit ook al gevonden voor simulaties op een stripmagneet.

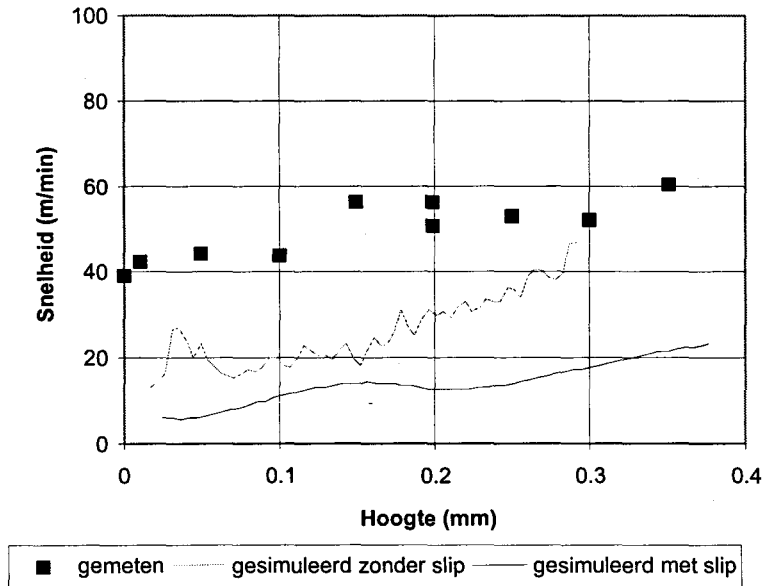
In de simulaties wordt voor de standaardafwijking van de gemiddelde snelheid ongeveer 13 m/min gevonden voor toner A en 6 m/min voor toner B. Deze waarden zijn onafhankelijk van de hoogte in de tonerlijn, de rotatiesnelheid van



Figuur 6.1: Gemiddelde gemeten snelheid als functie van hoogte voor zowel simulaties als metingen aan toner A en B op een hoefijzermagneet. De rotatiesnelheid van de cilinder was 12 m/min



Figuur 6.2: Gemiddelde gemeten snelheid als functie van hoogte voor zowel simulaties als metingen aan toner A en B op een hoefijzermagneet. De rotatiesnelheid van de cylinder was 25 m/min



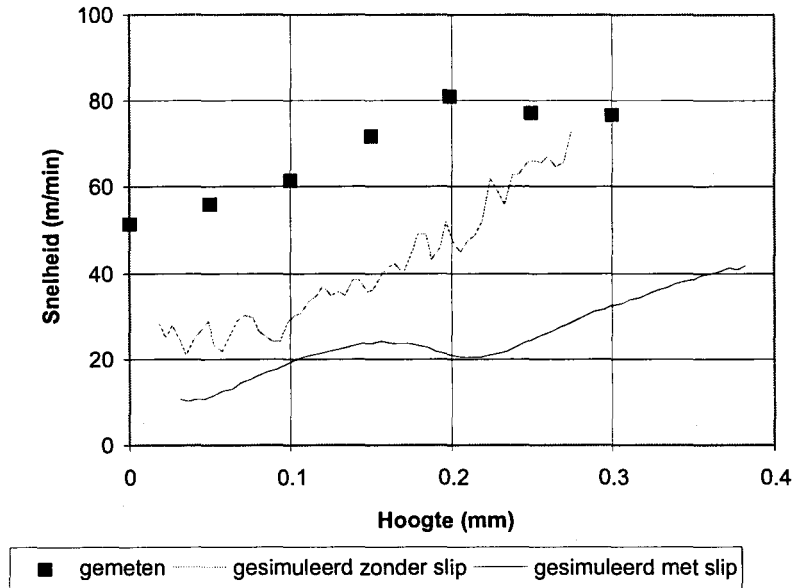
Figuur 6.3: Gemiddelde gemeten snelheid als functie van hoogte voor zowel simulaties als metingen aan toner A op een stripmagneet. De rotatiesnelheid van de cilinder was 12 m/min

de cilinder of de bundelbreedte waarover gemiddeld wordt. Bij de metingen werd steeds een waarde van ongeveer 10 m/min gevonden, onafhankelijk van de soort toner. De simulaties en de metingen komen in dit opzicht dus ongeveer (binnen 50%) overeen.

6.3 De stripmagneet

In figuur 6.3 staan de gemeten en gesimuleerde snelheden als functie van hoogte in de tonerlijn uitgezet voor toner A bij een rotatiesnelheid van 12 m/min. De simulaties en metingen bij een rotatiesnelheid van 25 m/min staan in figuur 6.4. In figuur 6.5 staat een gesimuleerde tonerlijn weergegeven. Te zien is dat zich volgens de simulatie op beide hoekpunten van de stripmagneet een soort tonerlijn vormt: een dikke lijn op de punt links in de figuur, een dunnere ervoor op de rechterpunt. Deze twee lijnen lopen in elkaar over en lijken zo één tonerlijn te vormen. In de metingen blijkt zich geen tonerlijn te vormen op de voorste punt van de strip, rechts in figuur 6.5, zoals weergegeven in figuur 6.6. Bovendien zijn de gemeten snelheden (zie figuur 6.3 en 6.4) een factor 1.6 hoger dan de gesimuleerde.

De simulaties zijn meer in overeenstemming te brengen met de metingen door een botsingsmodel te gebruiken waarin geen slijp optreedt tussen tonerdeeltjes onderling en tussen toner en cilinder. De resultaten van deze laatste simulaties zijn ook uitgezet in figuur 6.3 en 6.4. In figuur 6.7 is de vorm van de tonerlijn



Figuur 6.4: Gemiddelde gemeten snelheid als functie van hoogte voor zowel simulaties als metingen aan toner A op een stripmagneet. De rotatiesnelheid van de cylinder was 25 m/min



Figuur 6.5: Een gesimuleerde tonerlijn waarvoor de resultaten zijn uitgezet in figuur 6.3 en 6.4.



Figuur 6.6: Deze gesimuleerde tonerlijn lijkt goed op de metingen. Bij deze simulatie is gerekend met een gewijzigde stripmagneet en is slip uitgezet.



Figuur 6.7: Plaatje van een gesimuleerde tonerlijn op een stripmagneet waarin slip is uitgezet.

weergegeven. Deze tonerlijn lijkt beter op de metingen. De gesimuleerde snelheden zijn echter nog altijd 20% lager dan de gemeten snelheden. Bovendien zou, omdat zowel de toners als de cylinder hetzelfde zijn als bij de metingen aan de hoefijzermagneet, ook bij simulaties aan de hoefijzermagneet de wrijving moeten worden uitgezet. Dit heeft tot gevolg dat ook daar de gesimuleerde snelheden groter worden, groter dan de gemeten snelheden, zodat de overeenstemming tussen simulaties en metingen (boven in de tonerlijn) daar dan juist minder goed is.

De conclusie die uit het bovenstaande getrokken kan worden is dat in de simulaties het snelheidsverschil tussen toner A op de stripmagneet en op een hoefijzermagneet niet groot genoeg is om de simulaties met beide metingen in overeenstemming te brengen. Aangezien het magnetisch veld het enige verschil is tussen de beide metingen, moet de oorzaak van dit verschil tussen metingen en simulaties in het magnetisch model gezocht worden. Er is kort gekeken naar twee mogelijke verklaringen. De eerste mogelijke verklaring is dat het berekende magneetveld voor de stripmagneet niet overeenkomt met de werkelijkheid. De tweede is dat de invloed van toner op het magneetveld onterecht is verwaarloosd.

Het magneetveld van de stripmagneet is gemeten en vergeleken met het berekende. Het berekende veld bleek maximaal 20% lager te zijn dan het gemeten veld. Volgens onderzoek binnen Océ worden altijd verschillen in deze grootte orde gevonden als in het magneetveld verzadigd materiaal (zoals het plaatje van de stripmagneet) voorkomt. Dit wordt hoogstwaarschijnlijk veroorzaakt doordat de verzadigingscurve niet goed in het eindige-elementenpakket gemodelleerd is. De hoefijzermagneet is niet gemeten, maar het lijkt, gezien het bovenstaande, redelijk een afwijking van dezelfde grootte te verwachten. Daarbij moet worden opgemerkt dat de opstelling die gebruikt is om het magneetveld van de stripmagneet te meten nog niet gecalibreerd is bij de grote veldsterkten die rond de strip heersen.

Er is onder een microscoop gekeken naar toner A in een magneetveld. De toner bleek langwerpige structuren te vormen, ongeveer tienmaal langer dan dik, die in de richting van de veldlijnen staan. Deze langwerpige structuren, binnen Océ tonerharen genoemd, ontstaan doordat de gemagnetiseerde tonerdeeltjes elkaar als kleine magneetjes aantrekken. Deze wisselwerking, die veroorzaakt wordt doordat de tonerdeeltjes lokaal het magneetveld verstoren, is nog niet opgenomen in het model waarmee gesimuleerd wordt. Wanneer zich ook haren vormen in een tonerlijn, zullen die bij de stripmagneet ongeveer loodrecht op het oppervlak van de tonerlijn staan, terwijl ze bij de hoefijzermagneet ongeveer evenwijdig aan het lijnopervlak zullen liggen. Het lijkt daarom redelijk te ver-

onderstellen dat bij een stripmagneet haarvorming een grotere invloed heeft op de vorm en de snelheden van de tonerlijn dan bij de hoefijzermagneet. Verder is bekend uit onderzoek aan tonerborstels (zie hoofdstuk 1 voor een voorbeeld van een tonerborstel) dat als gevolg van haarvorming grote tonersnelheden kunnen voorkomen.

Zoals vermeld in paragraaf 5.5.2 is het op de stripmagneet niet mogelijk met Laser-Doppler snelheidsmetingen te doen aan toner B. Wel bleek de vorm van een tonerlijn van toner B-mes ongeveer hetzelfde te zijn als dat van een lijn toner A, dus zoals getekend in figuur 6.6, terwijl de simulaties een tonerlijn voorspellen van de vorm zoals getekend in figuur 6.5. Daarom is ook toner B onder een microscoop bekeken. Het bleek dat toner B geen haren vormt zoals toner A dat doet, maar zich ordent in min of meer ronde clustertjes van enkele tonerdeeltjes. Dit verschil met toner A is mogelijk te verklaren uit de lagere gemiddelde verzadigingsmagnetisatie van toner B. Als deze clustertjes niet onder invloed van de beweging in de tonerlijn uiteenvallen, zou in de simulaties gerekend moeten worden met deze grotere clustertjes, in plaats van met individuele deeltjes. Mogelijk is hiermee het verschil in vorm tussen de gesimuleerde en de werkelijke tonerlijn te verklaren.

Hoofdstuk 7

Conclusies en aanbevelingen

Het doel van het onderzoek was het ontwikkelen van een model voor de beweging van tonerdeeltjes en na te gaan in hoeverre de simulaties met dit model overeenkomen met de werkelijkheid. Daarvoor was het nodig de tonerstroming te kunnen meten zonder die te verstoren. Uiteindelijk is gekozen voor het doen van snelheidsmetingen met behulp van het self-mixing effect bij laserdiodes, omdat die techniek op basis van de literatuur (zie bijvoorbeeld [SLO92]), zeer geschikt werd geacht.

7.1 Metingen op basis van het self-mixing effect

Er zijn met succes snelheden gemeten aan toner A en B op een hoefijzermagneet en aan toner A op een stripmagneet. Het is nog onbekend waarom het niet is gelukt snelheden te meten aan toner B op een stripmagneet. Enerzijds lijkt dit niet te wijten aan de materiaaleigenschappen van toner B, omdat op de hoefijzermagneet wel met succes snelheidsmetingen zijn gedaan, terwijl anderzijds onder een microscoop duidelijk te zien is dat de toner beweegt.

Snelheidsmetingen met het self-mixing effect lijkt een veelbelovende techniek met name vanwege de eenvoud en compactheid van de opstelling. Op het moment echter is er m.i. (zie bijvoorbeeld ook [HAR96]) nog te weinig zekerheid omtrent de nauwkeurigheid, met name bij het meten van snelheidsverdelingen. Het lijkt mij raadzaam om eerst de nauwkeurigheid van de techniek grondig te onderzoeken, en pas dan verder te gaan met het doen van snelheidsmetingen. Océ is op het moment waarschijnlijk meer gebaat bij een conventioneel laser-Doppler systeem, bijvoorbeeld een kruisende-bundel systeem of een systeem op basis van de Michelson interferometer, omdat er voor die systemen meer gegevens beschikbaar zijn over de mogelijkheden en de nauwkeurigheid.

Een van de problemen van de huidige opstelling was dat de bundeldiameter niet nauwkeurig bekend was en ook niet gemeten kon worden zonder de magneetwals met cylinder en toner uit de opstelling te verwijderen. Zodoende was de grootte van het meetgebied niet nauwkeurig bekend en is onderzoek naar het verband tussen de afmetingen van het meetgebied en de breedte van de gemeten snelheidsverdeling moeilijk. Voor verder onderzoek lijkt het verstandig te proberen een betere bundel (kleiner, bundeldiameter beter bekend) te krijgen met behulp van meer optische componenten.

Bij hoge laservermogens bleek de toner aan elkaar te smelten, terwijl bij lage vermogens de signaalsterkte afnam. Mogelijk geven andere laserdiodes een betere signaal/ruis verhouding. Daarnaast is mogelijk de hoeveelheid teruggekoppeld licht te vergroten door meer reflecterende toner te nemen of de laserdiode dichterbij te zetten. Het gevolg daarvan zou moeten zijn dat bij lagere vermogens gemeten kan worden, zodat de kans dat toner smelt afneemt.

7.2 Simulaties aan de tonerlijn

De invloed van diverse parameters op de snelheden aan de rand van de tonerlijn is onderzocht door, uitgaande van een standaard situatie steeds één parameter te variëren. De gekozen standaard situatie was toner B op een stripmagneet. Belangrijke parameters voor het snelheidsprofiel bleken te zijn de rotatiesnelheid van de cilinder, het magneetveld en de wrijvingscoëfficiënt tussen tonerdeeltjes onderling.

De metingen aan toner A en B op de hoofijzermagneet en de metingen aan toner A op de stripmagneet zijn vergeleken met de simulaties. De simulaties van de snelheden boven in het tonerlijn op de hoofijzermagneet bleken goed in overeenstemming met de metingen. Op lagere hoogtes waren de gemeten snelheden hoger dan de gesimuleerde. De gesimuleerde snelheden van een lijn toner A op een stripmagneet waren lager dan de gemeten snelheden. Ook klopt de vorm van de gesimuleerde tonerlijn niet met wat er in werkelijkheid is gezien. Mogelijk wordt dit veroorzaakt doordat de invloed van de tonerdeeltjes op het magneetveld onterecht is verwaarloosd.

De simulaties voorspellen dat toner A (toner met een hogere gemiddelde verzadigingsmagnetisatie) een grotere snelheid heeft dan toner B. Deze trend is ook zichtbaar in de metingen op de hoofijzermagneet. Verder is bij alle metingen gezien dat als de rotatiesnelheid van de cilinder verdubbeld wordt, de snelheden in de tonerlijn minder dan een factor twee groter worden. Deze trend is ook in de simulaties gevonden.

Het magneetveld van de stripmagneet is gemeten. De berekende veldsterktes bleken soms 20% lager te liggen dan de gemeten waarden.

Tijdens dit afstudeerwerk is een begin gemaakt de uitkomsten van de simulaties te toetsen aan de werkelijkheid. Hoewel de eerste resultaten bemoedigend zijn is er nog veel te doen. Vervolgonderzoek is noodzakelijk om een beter beeld te krijgen van de overeenkomsten en verschillen tussen simulaties en werkelijkheid. Voor toekomstig onderzoek lijkt het aan te raden het magnetisch model te verbeteren. Zo zou m.i. de invloed van toner op het magneetveld nader moeten worden onderzocht. Daarnaast is het wenselijk dat het magneetveld waarmee gesimuleerd wordt zo goed mogelijk lijkt op het werkelijke veld. Dit is te realiseren door ofwel het magneetveld zo goed te meten dat het in het simulatieprogramma kan worden ingevoerd, of door het eindige-elementenpakket waarmee het magneetveld wordt uitgerekend te verbeteren of te vervangen. Verder zouden andere grootheden van de tonerlijn, zoals afmetingen, vorm en plaats ten opzichte van de magneet, kunnen worden vergeleken met de simulaties.

Het simulatieprogramma berekent de plaatsen en snelheden van individuele tonerdeeltjes. Dat is voordelig als men het feitelijke printen van een ontwikkelunit wil simuleren, omdat men dan per tonerdeeltje wil weten waar op papier

het terecht komt. Een ander voordeel is dat een relatief eenvoudig model, zoals dat hier besproken is, al heel redelijke resultaten geeft. Het grootste nadeel van deze aanpak is dat hij erg rekenintensief is. De rekestijd is ongeveer evenredig met het aantal gesimuleerde deeltjes, en het duurt ongeveer een dag om een tijdsverloop van 0.01 seconde te simuleren. Als men wil simuleren over langere tijdsintervallen of in drie dimensies is het niet langer praktisch dat te doen met het huidige programma. Het vermoeden bestaat, zie bijvoorbeeld [CUN92], dat macroscopische modellen, modellen die het gemiddelde gedrag van groepen deeltjes beschrijven, efficiënter gesimuleerd kunnen worden. Mogelijk is het de moeite waard te onderzoeken of een dergelijk model voor tonerlijn of, meer algemeen, een ontwikkelunit mogelijk is.

Bibliografie

- [CUN79] P.A. Cundall and O.D.L. Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique* 29, No. 1, 47-65, 1979.
- [CUN92] P.A. Cundall and R.D. Hart, Numerical modelling of discontinua, *Engineering Computations*, vol 9, 101-113, 1992
- [DUF80] W.J. Duffin, *Electricity and Magnetism*, McGraw-Hill Book Company (UK) limited, London, 1980.
- [HAR96] A. Hartmans, Parameter- & toepasbaarheidsonderzoek van laser-doppler snelheidsmeting, *Afstudeerverslag Hogeschool Eindhoven, Faculteit Natuurkunde*, 1996.
- [JON90a] W.J.M. de Jonge en F.A.P. Blom, *Collegedictaat Electriciteit en Magnetisme 1*, Faculteit Natuurkunde, TU Eindhoven, 1990/1991.
- [JON90b] W.J.M. de Jonge en F.A.P. Blom, *Collegedictaat Elektriciteit en Magnetisme 2*, Faculteit Natuurkunde, TU Eindhoven, 1990/1991.
- [MAT92] R.M.M. Mattheij, *Syllabus bij het college Inleiding Numerieke Methoden*, Collegedictaat TU Eindhoven, Herfsttrimester 92/93.
- [PET91] K. Petermann, *Laser diode modulation and noise*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1991.
- [SLO90] M. Slot, *Bloedsnelheidsmeting door Fibers op basis van het Self-mixing effect in een laserdiode*, *afstudeerverslag Universiteit Twente, Afdeling Technische Natuurkunde, vakgroep optoelektronica biofischische techniek*, 1990.
- [SLO92] M. Slot, *Nieuwe Laser-Doppler sensor voor meting van (toner)snelheden*, *Intern rapport nr 9232.0037, Océ-Nederland B.V., Afdeling Research & Development*, 1992.
- [STR78] O.D.L. Strack and P.A. Cundall, *The Distinct Element Method as a Tool for Research in Granular Media*, *Report to the national science foundation concerning NSF grant ENG75-20711, Univ. of Minnesota*.
- [VERHA] Verhaar en Van Haeringen, *syllabus bij het college Electromagnetische Velden, Vakgroep Theoretische natuurkunde, faculteit N, TU Eindhoven*.

- [WAT95] R. Watanabe, H. Hashimoto and G. Geun Lee, Computer simulation of Milling Ball motion in Mechanical Alloying (overview), Materials Transactions, JIM, Vol. 36, No. 2, 102-109, 1995.
- [WIL84] E.M. Williams, The physics and technology of Xerographic processes, John Wiley & Sons, New York, 1984.

Bijlage A

Afleidingen

A.1 Afleiding van de formule voor d_n

Wanneer een botsing beschreven wordt met een gedempt massa-veersysteem, kan uit een gegeven restitutiecoëfficiënt, massa en veerconstante de bijbehorende demping berekend worden. Er blijkt te gelden dat:

$$d = -2 \frac{\ln(c_{rest})\sqrt{mk}}{\sqrt{\ln^2(c_{rest}) + \pi^2}} \quad (\text{A.1})$$

(Het subscript n in k_n en d_n is hier weggelaten) Deze vergelijking is af te leiden door voor de differentiaalvergelijking $m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0$ een oplossing te postuleren van de vorm:

$$x = e^{ict} \quad (\text{A.2})$$

Na substitutie in de differentiaalvergelijking wordt

$$-c^2m + icd + k = 0 \quad (\text{A.3})$$

gevonden, waaruit volgt (met de randvoorwaarde dat $x(0) = 0$) dat

$$x = e^{-\frac{dt}{2m}} \sin(\omega t) \text{ met } \omega = \frac{\sqrt{4mk - d^2}}{2m} \quad (\text{A.4})$$

Hieruit volgt eenvoudig dat $\dot{x}(0) = \omega$ en $\dot{x}(\pi/\omega) = \omega \exp(-d\pi/2m\omega)$. Hieruit volgt dat

$$c_{rest} \equiv \frac{\dot{x}_{voor}}{\dot{x}_{na}} = e^{-\frac{d\pi}{2m\omega}} \quad (\text{A.5})$$

Dit is te herschrijven tot

$$d^2 (\ln^2(c_{rest}) + \pi^2) - 4mk \ln^2(c_{rest}) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Hieruit is eenvoudig vergelijking (A.1) af te leiden.

A.2 Afleiding van de formule $M \leq 3H_0$

We beschouwen het probleem van een bolvormig (toner-) deeltje in de oorsprong van het coördinatenstelsel. Het magneetveld zonder dit deeltje wordt gegeven door $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$, een homogeen veld. Na het aanbrengen van het deeltje wordt het veld in het deeltje gegeven door $\vec{B}_m = \mu_0 \mu_r \vec{H}_m$ en de magnetisatie door $\vec{M} = \chi_m \vec{H}_m$. Verder geldt dat $\vec{B}_m / \mu_0 = \vec{H}_m + \vec{M}$. Hieruit volgt eenvoudig dat $\mu_r = 1 + \chi_m$. Het veld buiten het deeltje wordt gegeven door $\vec{B}_v = \mu_0 \vec{H}_v$, waarbij \vec{B}_v niet meer homogeen is, en dus niet gelijk aan \vec{B}_0 .

Verder geldt dat

$$\vec{H}_m - \vec{H}_0 = \vec{H}_{ontm} = -\mathcal{N} \vec{M} \quad (\text{A.7})$$

(definitie van H_{ontm} , het ontmagnetiserend veld, en \mathcal{N} , de ontmagnetiserende factor.) Typische waarden voor \mathcal{N} zijn 1/3 voor een bolvormig materiaal, 1 als het magneetveld loodrecht op een vlakke plaat staat, 0 als het magneetveld evenwijdig aan die vlakke plaat staat.

De oplossing van dit probleem wordt gegeven in de meeste literatuur over magnetostatica (bijvoorbeeld [JON90b]) en wordt gegeven door:

\vec{M} is homogeen binnen het deeltje.

$$\vec{H}_m = \vec{H}_0 - \mathcal{N} \vec{M} \quad (\text{A.8})$$

uit (A.7).

$$\vec{H}_m = \frac{\vec{H}_0}{1 + \frac{1}{3}\chi_m} \quad (\text{A.9})$$

uit (A.8) en $\vec{M} = \chi_m \vec{H}_m$ en $\mathcal{N} = \frac{1}{3}$. Verder geldt dat

$$\vec{B}_m = \mu_0 \mu_r \vec{H}_m = \frac{\mu_0 \mu_r \vec{H}_0}{1 + \frac{1}{3}\chi_m} \quad (\text{A.10})$$

met (A.9).

De verstoring $\vec{H}_v - \vec{H}_0$ is nu precies gelijk aan het veld van een dipool \vec{m} in de oorsprong, waarbij geldt dat $\vec{m}/V = \vec{M}$, met V het volume van het deeltje. Het veld van zo'n dipool wordt gegeven (zie o.a. [JON90a]) door:

$$\vec{H}_v(\vec{r}) - \vec{H}_0 = \frac{1}{4\pi r^3} (3\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{m}) - \vec{m}) \quad (\text{A.11})$$

Waarin $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ en $r = |\vec{r}|$.

Voor ons is interessant de vergelijking (A.11) én een uitdrukking voor de magnetisatie. Deze laatste vinden we uit (A.9). Deze levert namelijk met $\vec{M} = \chi_m \vec{H}_m$ dat

$$\vec{M} = \frac{\chi_m \vec{H}_0}{1 + \frac{1}{3}\chi_m} \leq 3\vec{H}_0 \quad (\text{A.12})$$

Hierbij geldt het gelijktteken als $\chi_m \gg 3$.

A.3 Afschatting van de verstoring van de gradiënt van het magnetisch veld door een geïsoleerd tonerdeeltje

We beschouwen de gradiënt van een magnetisch dipoolmoment in de oorsprong van een bolcoördinatenstelsel, waarbij het dipoolmoment langs de z-as is gericht.

Uit (3.13) vinden we na herschrijven voor de verstoring $\delta|\vec{B}|$:

$$\delta|\vec{B}| = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sqrt{3 \cos^2(\theta) + 1} \quad (\text{A.13})$$

zodat

$$\begin{aligned} \delta(\text{grad}|\vec{B}|) &= \text{grad}(\delta|\vec{B}|) \\ &= \frac{\partial(\delta|\vec{B}|)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(\delta|\vec{B}|)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$(\text{A.15})$$

Hieruit volgt dat

$$\left| \delta(\text{grad}|\vec{B}|) \right| = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^4} \sqrt{9 + 27 \cos^2 \theta + \frac{9 \sin^2 2\theta}{4 + 12 \cos^2 \theta}} \quad (\text{A.16})$$

$$\leq 6 \frac{\mu_0 m}{4\pi r^4} \quad (\text{A.17})$$

$$= \frac{2\mu_0 M}{r} \frac{V}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad (\text{A.18})$$

$$(\text{A.19})$$

Voor de verstoring in de gradiënt van het magneetveld door een tonerdeeltje ter plaatse van een naburig tonerdeeltje wordt voor $V/(4/3 \pi r^3)$ het volumepercentage ijzer (1%) ingevuld, voor $\mu_0 M$ de verzadigingsmagnetisatie van ijzer: 2 T, en voor r de afstand tussen twee (kleine) tonerdeeltjes: $10 \cdot 10^{-6}$ m. Zodoende wordt gevonden dat:

$$\left| \delta \text{grad}|\vec{B}| \right| \leq \pm 4000 \text{ T/m} \quad (\text{A.20})$$

Bijlage B

Numeriek oplossen van differentiaalvergelijkingen

B.1 Algemene aanpak

We bespreken de algemene strategie bij het oplossen van lineaire differentiaalvergelijkingen. Hier wordt de aanpak van eerste orde differentiaalvergelijkingen besproken, omdat die gegeneraliseerd kan worden naar hogere orde vergelijkingen.

Een eerste orde differentiaalvergelijking kan gewoonlijk in de vorm

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{B.1}$$

gebracht worden. Nadat de vergelijking in deze vorm is gebracht volgt de discretisatie. \dot{x} wordt uitgedrukt in x_i met $x_i = x(t_i) = x(hi)$ met h de zogenaamde stapgrootte. Het laatste gelijkteken geldt alleen indien de stapgrootte constant wordt genomen. Ten allen tijde geldt $t_{i+1} = t_i + h_i$ met h_i de huidige stapgrootte. Een methode om dit te doen is aan de hand van een Taylor-ontwikkeling:

$$x(t+h) = x(t) + h\dot{x}(t) + \frac{1}{2}h^2\ddot{x}(\tau) \text{ met } t \leq \tau \leq t+h \tag{B.2}$$

Samenvoegen van (B.1) en (B.2) en herschrijven levert:

$$x(t+h) = x(t) + hf(x(t), t) + \frac{1}{2}h^2\ddot{x}(\tau) \tag{B.3}$$

(met nog altijd $t \leq \tau \leq t+h$)

Onder verwaarlozing van de term $h^2\ddot{x}(\tau)/2$ volgt dan:

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i) \tag{B.4}$$

Met deze formule kan, bij gegeven x_i en t_i , x_{i+1} berekend worden, waardoor de hele oplossing (numeriek) bekend is. Deze formule heet een representatie. Er zijn verschillende representaties te bedenken om dezelfde differentiaalvergelijking op te lossen. De keuze van een geschikte representatie houdt in het afwegen van snelheid versus nauwkeurigheid.

Het mag duidelijk zijn dat bij het verwaarlozen van de term $h^2\ddot{x}(\tau)/2$ een fout gemaakt wordt. Wanneer we deze door h delen vinden we de lokale discretisatiefout $d_{i+1} = h\ddot{x}(\tau)/2$, $t_i \leq \tau \leq t_{i+1}$. Het is natuurlijk zaak de stapgrootte h zodanig te kiezen dat de lokale discretisatiefout binnen de perken blijft.

De fout in de uiteindelijke oplossing wordt mede bepaald door de zogenaamde groeifactor. De groeifactor bepaalt de invloed van de fout in x_i op de fout in x_{i+1} . Schrijf de gekozen representatie als

$$x(t+h) = \phi(x(t), t) \quad (\text{B.5})$$

en veronderstel dat $\delta x(t)$ de fout is op tijdstip t en $\delta x(t+h)$ de fout op tijdstip $t+h$, dan geldt

$$\begin{aligned} x(t+h) + \delta x(t+h) &= \phi(x(t) + \delta x(t), t) \approx \phi(x(t), t) + \delta x(t) \frac{\partial \phi}{\partial x} = \\ &= x(t+h) + \delta x(t) \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

waaruit volgt dat

$$\delta x(t+h) \approx g(t) \delta x(t) \text{ met } g(t) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ de groeifactor.} \quad (\text{B.7})$$

Om een stabiele oplossing te krijgen zal tenminste geëist moeten worden dat $|g(t)| < 1$ voor alle t .

Een afchatting voor de zogenaamde globale discretisatiefout vinden we met

$$e_n \approx \sum_{i=1}^{n-1} h d_i \prod_{j=i+1}^n g(t_j) + d_n \quad (\text{B.8})$$

Met $g \geq g(t)$ voor alle t en $C \geq \ddot{x}(t)$ voor alle t vinden we dat

$$e_n \leq \sum_{i=1}^n \frac{h^2 C g^{n-i}}{2} = \frac{h^2 C}{2} \frac{1-g^n}{1-g} \quad (\text{B.9})$$

In het geval van een hogere orde differentiaalvergelijking wordt deze gewoonlijk eerst herschreven tot een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen, waarna bovenstaande aanpak herhaald kan worden met behulp van matrices.

B.2 Toepassing: Een zwak gedempt massa-veer-systeem

Een zwak gedempt massa-veersysteem wordt beschreven door de volgende differentiaalvergelijking:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{B.10})$$

Dit wordt herschreven tot een stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen met behulp van $\dot{x} = v$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -v \\ \dot{v} = -\frac{d}{m}v - \frac{k}{m}x \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

In matrixnotatie wordt dit

$$\dot{X} = -KX \text{ met } X = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \text{ en } K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k/m & d/m \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Na discretisatie wordt dit:

$$X_{i+1} = X_i - hKX_i = (I - hK)X_i \quad (\text{B.13})$$

Hierin geldt voor de groefactor $G = I - hK$. De eis dat $|G| < 1$ komt nu neer op de eis dat voor alle eigenwaarden van λ geldt dat $|\lambda| < 1$. De eigenwaarden voor G zijn:

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{dh}{2m} \pm i \frac{h\sqrt{4km - d^2}}{2m} \quad (\text{B.14})$$

Uit $|\lambda| < 1$ volgt dan dat $0 < h < d/k$

B.3 Toepassing: Afleiding van de formule voor de kritische tijdstap

Om te komen tot de afleiding van de formule $t_{crit} = 2\sqrt{m/k} - d/k$ (het subscript n in k_n en d_n is hier weggelaten), wordt uitgegaan van een alternatieve representatie:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + v_{i+1}h \\ v_{i+1} = v_i - h\frac{k}{m}x_i - h\frac{d}{m}v_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i+1} = x_i + hv_i - h^2\frac{k}{m}x_i - h^2\frac{d}{m}v_i \\ v_{i+1} = v_i - h\frac{k}{m}x_i - h\frac{d}{m}v_i \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Of, in matrixnotatie:

$$X_{i+1} = GX_i \text{ met } X = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \text{ en } G = \begin{bmatrix} 1 - h^2\frac{k}{m} & h - h^2\frac{d}{m} \\ -h\frac{k}{m} & 1 - h\frac{d}{m} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

De eigenwaarden van G zijn:

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{h^2k}{2m} - \frac{hd}{2m} \pm i \frac{h\sqrt{4mk - d^2 - h^2k^2 - 2hkd}}{2m} \quad (\text{B.17})$$

De eis dat de term onder het wortelteken positief is leidt tot:

$$0 \leq h \leq \frac{2\sqrt{km} - d}{k} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{d}{k} \quad (\text{B.18})$$

Dit is alleen mogelijk als $d \leq 2\sqrt{km}$, wat neerkomt op de eis dat het systeem zwak gedempt is. Als aan deze eisen voldaan is, geldt dat

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\frac{m - hd}{m}} \quad (\text{B.19})$$

Dit is kleiner dan 1 voor alle toegestane h .

Het is duidelijk dat deze kritische tijdstap niet dezelfde is als die die in de vorige paragraaf is afgeleid. De kritische tijdstap dus af van de gekozen representatie. Het staat dan ook niet bij voorbaat vast dat bovenstaande tijdstap ook

geldig is voor twee-deeltjesproblemen, omdat de benodigde representatie duidelijk een andere is dan bij een een-deeltje probleem. Een oefening in de lineaire algebra leert echter dat bovenstaande formule (met voor $m \mu$, de gereduceerde massa, ingevuld) wel degelijk geldt. Desondanks blijft het zaak te proberen een zo gunstig mogelijke representatie te vinden.

Het is eenvoudig in te zien dat de in deze paragraaf afgeleide kritische tijdstap gelijk is aan die in de vorige paragraaf als geldt dat $d = \sqrt{mk}$. Als d groter wordt dan deze waarde is het dus gunstig de in de vorige paragraaf genoemde representatie te gebruiken. Vooruitlopend op de volgende paragraaf blijkt dit het geval te zijn voor $c_{rest} \leq \exp(-\pi/\sqrt{3}) \approx 0.16$.