

MASTER

Dipolaire wervels in een strain-stroming

van Wesenbeeck, J.M.A.

Award date:
1996

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

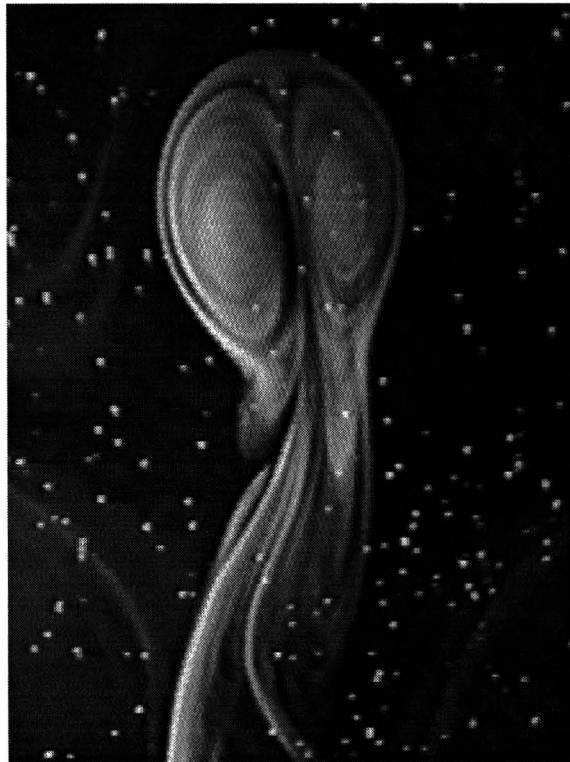
General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Dipolaire wervels in een strain-stroming

J.M.A. van Wesenbeeck



Titel: Dipolaire wervels in
een strain-stroming

Auteur: J.M.A. VAN WESENBEECK

Verslagnummer: R-1386-A

Datum: 4 JUNI 1996

Werkeenheid: Werveldynamica
Begeleider: IR. R.R. TRIELING
Afstudeerprofessor: PROF. DR. IR. G.J.F. VAN HEIJST

Samenvatting

In dit afstudeerverslag is het gedrag van twee-dimensionale dipolaire wervels in een strainstroming experimenteel onderzocht en zijn de experimentele resultaten vergeleken met verschillende numerieke simulaties. De dipolen zijn gegenereerd door een hoeveelheid vloeistof horizontaal in het interface van een stapsgewijze stratificatie te injecteren. De gebruikte achtergrondstroming werd gecreëerd door vier draaiende schijfjes. Deze strain kan de centra van de dipool naar elkaar duwen (positieve strain) of juist uit elkaar trekken (negatieve strain).

In het eerste geval kan de dipool een kop-staart structuur verkrijgen. Dit was numeriek al bewezen, maar is nu ook experimenteel aangetoond met kleurstofexperimenten en met behulp van tracerdeeltjes. Daarnaast is zowel experimenteel als numeriek onderzoek gedaan naar dipolen in een negatieve strain. In dit geval splitst de dipool zich op in twee monopolen, die verrassende overeenkomsten tonen met een Lamb-monopool.

Voor de numerieke simulaties is gebruik gemaakt van programma's gebaseerd op de eindige differentie methode, de contour kinematica en de contour dynamica. In alle modellen is rekening gehouden met de afname van vorticititeit van dipolen door verticale diffusie. De experimenten kwamen het best overeen met de numerieke resultaten die verkregen werden met het eindige differentie methode, omdat hierbij tevens rekening gehouden werd met horizontale diffusie.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
2	Theorie	5
2.1	Algemeen	5
2.2	Dipool modellen	6
2.2.1	Het dipool-puntwervel model	6
2.2.2	Het Lamb-dipool model	7
2.2.3	Afname van vortciteit van dipolen	9
2.3	Strain stroming	9
3	Numerieke modellen	11
3.1	Contour kinematica	11
3.2	Eindige-differentie methode	13
3.3	Contour dynamica	14
4	Simulaties met de contour kinematica methode	15
5	Experimentele opzet	19
5.1	Experimenten in een gestratificeerde vloeistof	19
5.2	Generatie van een strain stroming	20
5.3	Generatie van de dipool	21
5.4	Digitale beeldverwerking	22
6	Bepaling van de strain-sterkte	25
6.1	Strain-stroming	25
7	Resultaten van dipolen in een positieve strain	27
7.1	Kleurstofexperimenten in een positieve strain	27
7.2	Deeltjesexperimenten in een positieve strain	27
7.3	Scatter-plots	37
8	Resultaten van dipolen in een negatieve strain	41
8.1	Kleurstofexperimenten in een negatieve strain	41
8.2	Deeltjesexperimenten in een negatieve strain	41

8.3 Scatter-plots	47
9 Conclusies	53
A Bepaling van het aantal stuwpunten	59
B Bepaling strain sterkte	61
C Experimentele resultaten	63

Hoofdstuk 1

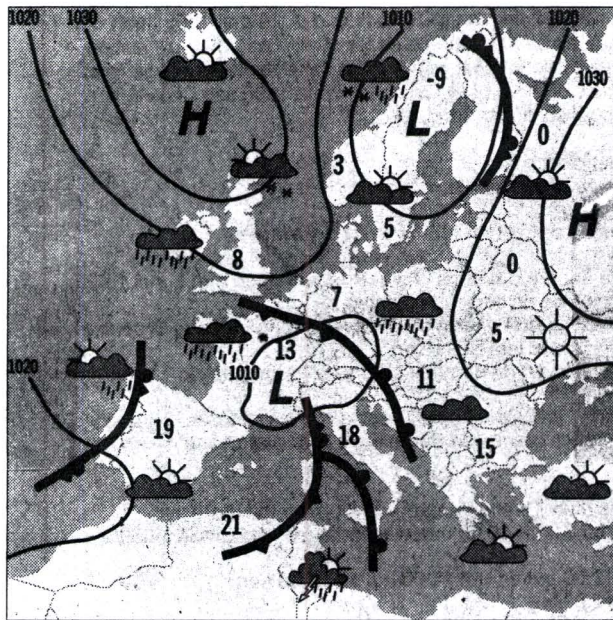
Inleiding

Wervels zijn in te delen in twee categorieën: wervels in een plat vlak, de zgn. twee-dimensionale (2D) wervels, en drie-dimensionale (3D) wervels. Een aantal voorbeelden van 3D wervels zijn: een rookring, een draaikolk in een leeglopende badkuip, een mok koffie waarin net geroerd is, of, als we op grotere schaal denken, een cycloon. Twee-dimensionale wervels zijn te vinden in de oceaan en de atmosfeer: met behulp van satellietbeelden is gebleken dat in de oceaan wervels maandenlang kunnen bestaan, en ook hoge en lage drukgebieden in de atmosfeer zijn voorbeelden van 2D wervels. Er wordt veel onderzoek gedaan naar deze wervels in verband met de weersvoorspelling en omdat ze in de oceaan zorgen voor transport van fysische en chemische grootheden, zoals bijvoorbeeld warmte en zout. Ze worden als twee dimensionaal beschouwd, deels door dichtheid stratificatie (vooral in de oceaan) en deels door het twee-dimensionale karakter van het stromingsdomein: de horizontale lengteschalen (honderd tot duizend kilometer) zijn veel groter dan de verticale dimensies (enkele kilometers).

Een groot verschil tussen een 3D en een 2D stroming is dat er bij een 3D stroming sprake is van een energie cascade, terwijl een 2D stroming gekenmerkt wordt door een inverse energie cascade. In het geval van een energie cascade zal de energie zich verplaatsen van grote naar kleine lengteschalen. Bij een inverse energie cascade zal een turbulente 2D stroming zich gaan organiseren, waardoor coherente wervelstructuren ontstaan.

De meest voorkomende 2D wervel is de monopolaire wervel. Deze wordt gekarakteriseerd door gesloten circelvormige of elliptische stroomlijnen rond een gezamenlijk centrum. Een dipolaire wervel wordt gekenmerkt door twee gebieden van tegengestelde vorticeiteit. Numerieke en experimentele studies hebben ook het bestaan van de zgn. tripool aangetoond, bestaande uit een elliptische kern met twee satellieten van tegengestelde vorticeiteit. De monopool en de tripool hebben beide een netto rotatie en geen translatie snelheid. Dit in tegenstelling tot de dipool: een symmetrische dipool beweegt langs een rechte lijn, terwijl een asymmetrische dipool langs een kromme beweegt.

Omdat wervels in de natuur vaak vervormen onder invloed van omliggende wervels, worden in dit verslag 2D wervels in een achtergrondstroming onderzocht. Voorbeelden van deze situatie in de natuur zijn de Grote Rode Vlek van Jupiter of de Grote Donkere vlek in de atmosfeer van Neptunus. Beide wervels bevinden zich in een shear-stroming. Een



Figuur 1.1: Voorbeeld van een strain in de atmosfeer.

uniforme shear is een achtergrond stroming die opgebouwd gedacht kan worden uit een starre rotatie en een strain stroming.

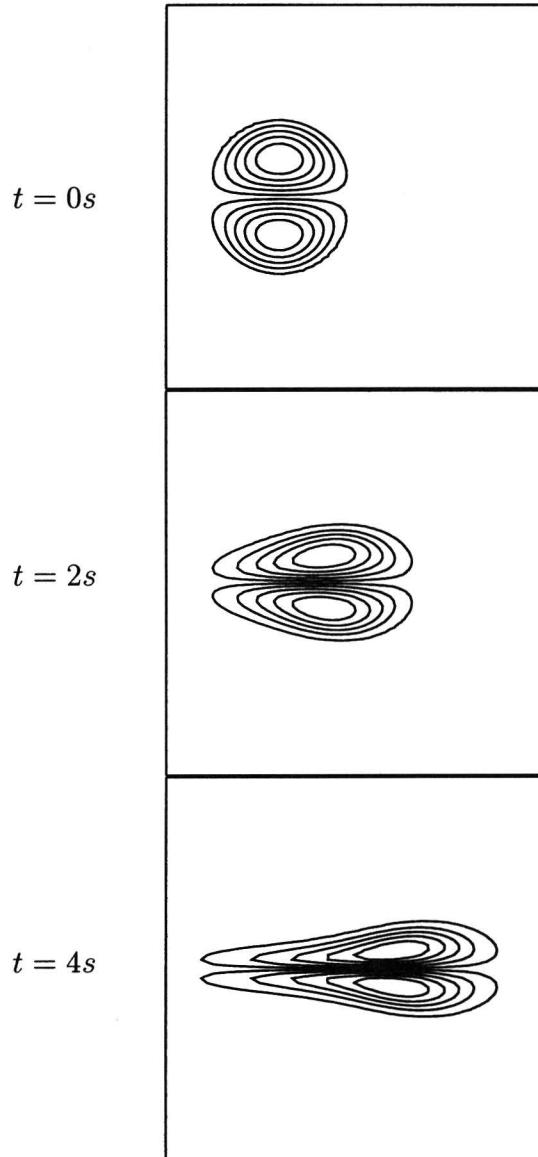
Een strainstroming, ook wel stuwpuntstroming genoemd, kan deformatie van de wervels veroorzaken. In de atmosfeer kan een strain voorkomen indien twee hoge en twee lage drukgebieden in de hoeken van een vierkant gerangschikt zijn (zie figuur 1.1).

Er zijn al veel studies verricht naar wervels in een shear of een strain. Kida [Kida 81] heeft analytisch onderzoek gedaan naar het gedrag van elliptische monopolen in een uniforme shearstroming. Hieruit volgde dat de elliptische vorm behouden bleef en dat, afhankelijk van de eigenschappen van de wervel en de shearstroming, diverse typen bewegingen kunnen ontstaan zoals rotatie, nutatie of een oneindige elongatie. Numerieke studies van monopolen in een achtergrondstroming zijn verricht door Dritschel [Dritschel 89]: zwakke shearstromingen verwijderen de buitenste vorticitetscontouren van de wervel, d.w.z. vorticitetsfilamenten worden ervan afgetrokken en geadvecteed door de stroming. Deze resultaten zijn experimenteel geverifieerd door Beckers [Beckers 94] en Linssen [Linssen 95]. Beckers gebruikte een strain, terwijl Linssen een rotatievrije shear gebruikte als achtergrondstroming.

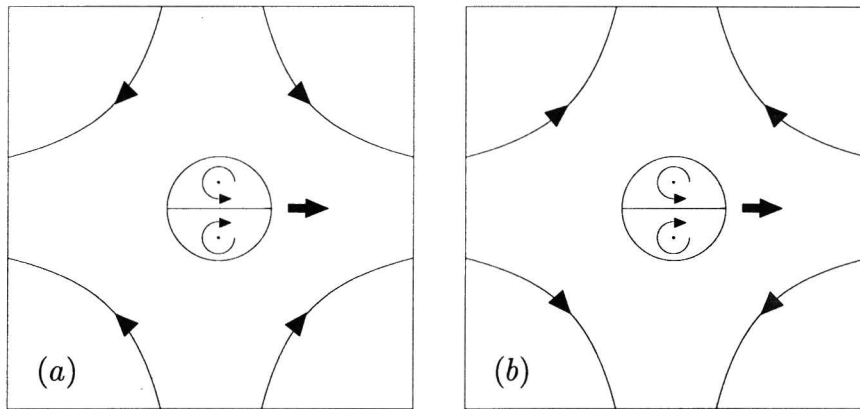
Experimenteel onderzoek naar dipolen zonder achtergrondstroming is uitgebreid beschreven door Flór & van Heijst [Flór 94]. Zij onderzochten algemene aspecten van dipolen in een gestratificeerde vloeistof en ontwikkelden een model dat het visceuze verval van dipolen beschrijft.

Het gedrag van dipolen in een strainstroming is numeriek onderzocht door Kida [Kida 91] met behulp van een spectraal-methode. Uit dit onderzoek bleek dat dipolen die worden samengedrukt door een strainstroming vervormen, zodat een zgn. kop-staart structuur ontstaat. Een voorbeeld hiervan is weergegeven in figuur 1.2.

In dit verslag worden de resultaten gepresenteerd van experimenteel onderzoek naar dipolen in een strain, waarbij de dipool op twee manieren in de strain geplaatst kan worden:



Figuur 1.2: Voorbeeld van het ontstaan van een kop-staart structuur bij een dipool. Beginwaarden: $U_0 = 0.5 \text{ cm/s}$, $a = 2.081 \text{ cm}$, $Re = 100$ en $e = 0.2 \text{ s}^{-1}$.



Figuur 1.3: *Definitie van (a) een dipool in een positieve strain en (b) in een negatieve strain.*

indien de centra van de dipool door de strain naar elkaar geduwd worden zal gerefereerd worden naar een 'positieve strain' (figuur 1.3a) terwijl van een 'negatieve strain' gesproken wordt, indien de centra uit elkaar getrokken worden (figuur 1.3b).

Naast experimenten worden ook numerieke simulaties in dit verslag besproken. Hier-voor is gebruik gemaakt van verschillende analytische modellen om de dipool te simuleren en deze zijn beschreven in hoofdstuk 2.2. Het principe van de verschillende numerieke methoden komt in hoofdstuk 3 aan de orde. In hoofdstuk 4 zal het ontstaan van een kop-staartstructuur verklaard worden en zal blijken dat een strain onmisbaar is voor het ontstaan ervan. Daarna wordt in hoofdstuk 5 beschreven hoe in het laboratorium een 2D stroming gecreëerd wordt met behulp van een gestratificeerde vloeistof. Tevens wordt in dit hoofdstuk de generatie van de dipool en de strainstroming beschreven. In hoofdstuk 6 wordt de sterkte van de strain bepaald. Uiteindelijk worden in hoofdstuk 7 en 8 de verschillende experimentele resultaten getoond van een dipool in respectievelijk een positieve en negatieve strain. Tevens worden in dit hoofdstuk de experimentele resultaten vergeleken met de numerieke resultaten. Tenslotte komen in hoofdstuk 9 de conclusies aan de orde.

Hoofdstuk 2

Theorie

2.1 Algemeen

Indien een drie-dimensionale stroming wordt beschreven door het snelheidsveld $\vec{v}(\vec{x}) = (u, v, w)$, dan wordt het bijbehorende vorticieteitsveld gegeven door

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}. \quad (2.1)$$

De bijbehorende vorticieteitsvergelijking is gedefinieerd door

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} - \vec{\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{\vec{\nabla} \rho \times \vec{\nabla} p}{\rho^2} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{\omega}, \quad (2.2)$$

hierin is $\frac{D\vec{\omega}}{Dt}$ de materiële afgeleide van de vorticieteit, ρ de dichtheid, ν de kinematische viscositeit en p de gereduceerde druk.

In het geval van een 2D stroming in het xy -vlak, staat de vector $\vec{\omega}$ loodrecht op het vlak van beweging, dat wil zeggen $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Voor dit soort stromingen kan een stroomfunctie ψ gedefinieerd worden volgens

$$\vec{v} = (u, v, 0) = -\vec{k} \times \vec{\nabla} \psi, \quad (2.3)$$

waarbij \vec{k} de eenheidsvector loodrecht op het vlak van beweging voorstelt.

Uit (2.3) en (2.1) volgt de Poisson vergelijking voor ψ

$$\omega = -\nabla^2 \psi. \quad (2.4)$$

Dipolen in een gestratificeerde vloeistof hebben de vorm van een platte pannekoek, ze zullen altijd een eindige dikte hebben. De afmetingen en snelheden in verticale richting zijn veel kleiner dan in horizontale richting. Hierdoor mag verondersteld worden dat $\frac{\partial \omega(z=0)}{\partial z}$ nul is. Ook de verticale gradient van de horizontale snelheden zijn verwaarloosd in het vlak $z = 0$. Met deze twee gegevens en uitgaande van een barotrope, incompressibele stroming gaat (2.2) over in een scalaire vergelijking:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) = \nu \nabla_h^2 \omega + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}, \quad (2.5)$$

waarbij geldt $\nabla_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ en J de Jacobiaan is.

$$J(\omega, \psi) = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Uit (2.5) volgt dat de Jacobiaan nul is in het geval van een niet-visceuze, stationaire stroming. Er bestaat dan een functionaal verband tussen de vorticititeit en de stroomfunctie: $\omega = F(\psi)$.

Een nuttige grootte om een stroming te karakteriseren is de circulatie Γ , gedefinieerd door

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}, \quad (2.7)$$

waarbij $d\vec{r}$ een lijnelement voorstelt van de gesloten contour C waarover geïntegreerd wordt. Met het Stokes theorema volgt hieruit de volgende relatie tussen de circulatie Γ en de vorticititeit ω :

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{n} dA = \iint_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA. \quad (2.8)$$

In deze formule is A een willekeurig oppervlak omsloten door de contour C en \vec{n} de normaalvector in de richting van de as waaromheen de kringintegraal genomen wordt met de wijzers van de klok mee, indien iemand van het beginpunt naar het eindpunt van \vec{n} kijkt.

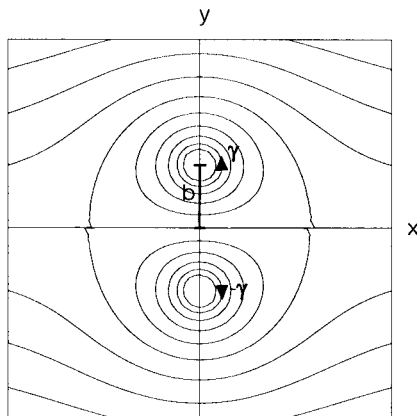
2.2 Dipool modellen

In dit verslag worden verschillende experimenten beschreven van dipolen in een strainstroming. Om de experimenteel gevonden resultaten te vergelijken met numerieke simulaties zijn twee verschillende analytische modellen gebruikt om de begintoestand van de dipool te simuleren: het puntwervel model en het Lamb-dipool model. Omdat uit experimenten volgt dat de vorticititeit van dipolen afneemt door visceuze effecten, is in alle simulaties rekening gehouden met verticale diffusie. Enkel de eindige elementen methode houdt daarnaast ook rekening met horizontale diffusie.

2.2.1 Het dipool-puntwervel model

Het eenvoudigste model van een dipool is de configuratie met twee potentiaalwervels van gelijke, tegengestelde sterktes γ en $-\gamma$. Indien de puntwervels zich bevinden op $(x, y) = (a, \pm b)$, dan heeft de dipool een translatie-snelheid U gegeven door

$$U = \frac{\gamma}{4\pi b}. \quad (2.9)$$



Figuur 2.1: *Stroomlijnen-patroon van een puntwervel dipool in een met de dipool meebewegend stelsel.*

De stroming is stationair in een met de dipool meebewegend stelsel. De dipool staat in dat geval stil in een uniforme stroming met snelheid $-U$. De stroomfunctie van een in positieve x -richting translaterende dipool wordt in een meebewegend stelsel gegeven door [Heijst, van 92]

$$\psi(x, y) = \frac{\gamma}{4\pi} \ln \left[\frac{(x-a)^2 + (y+b)^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right] - Uy + \text{constante}. \quad (2.10)$$

De stroming bevat twee stuwpunten, gelegen op de x -as: $x = \pm b\sqrt{3}$. Deze stuwpunten liggen op de zogenaamde separatrix. Dit is de stroomlijn die het stromingsveld verdeelt in een gebied met gesloten en een gebied met open stroomlijnen. De separatrix van een dipool wordt gegeven door [Thomson 1867]

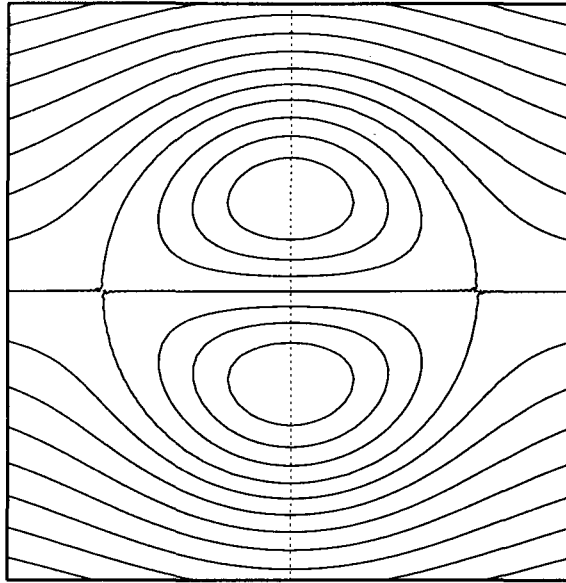
$$x^2 = 2yb \coth \left(\frac{y}{2b} \right) - y^2 - b^2. \quad (2.11)$$

Deze vergelijking wordt goed benaderd door een ellips met een lengte-as van $4.18b$ en een breedte-as van $3.46b$.

Het stroomlijnen-patroon van de hierboven beschreven dipool is weergegeven in figuur 2.1. Het gebied binnen de separatrix wordt de "atmosfeer" van de dipool genoemd. De vloeistofdeeltjes zullen de separatrix nooit passeren, omdat in een stationaire stroming de stroomlijnen en de deeltjesbanen samenvallen.

2.2.2 Het Lamb-dipool model

Bij het punt-wervel model is de vorticietsverdeling binnen een dipool geconcentreerd in twee singuliere punten. Gedetailleerde stromingsmetingen van dipolen in een gestratificeerde vloeistof [Flór 94] laten echter zien dat de vorticietsverdeling continu is. Een realistischer model dat hieraan wel voldoet is het Lamb-Chaplygin model [Flór 94] waarbij binnen een circelvormig gebied met straal $r = a$ een lineair verband tussen ω en ψ verondersteld wordt: $\omega = k^2\psi$ (hierin is k een constante). Buiten dit gebied wordt een potentiaalstroming verondersteld ($\omega=0$). De bijbehorende stroomfunctie in pool-coördinaten



Figuur 2.2: *Stroomlijnenpatroon van een Lamb-dipool.*

in een meebewegend stelsel met snelheid U_0 (gelijk aan de snelheid van de dipool), is

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{2U_0}{kJ_0(ka)}J_1(kr)\sin\theta, \quad \text{voor } r \leq a \\ \psi &= U_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta, \quad \text{voor } r \geq a. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Hierin zijn J_0 en J_1 de nulde en eerste orde Besselfunctie van de eerste soort. Het stroomlijnenpatroon is weergegeven in figuur 2.2. Continuïteit van de snelheid op $r = a$ geeft

$$ka = 3.8317. \tag{2.13}$$

Iedere dipoolhelft wordt gekenmerkt door een maximale (minimale) vorticeit $\pm\omega_m$ en positieve (negatieve) circulatie $\pm\Gamma$. Deze waarden kunnen uitgedrukt worden in termen van U_0 en k :

$$\begin{aligned} \omega_m &= 2.89kU_0 \\ \Gamma &= 26.17U_0/k. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Uit deze relaties volgt een verband tussen ω_m en Γ :

$$\Gamma = 9.06\omega_m/k^2. \tag{2.15}$$

De posities van maximale en minimale vorticeit zijn $(0, 0.48a)$ en $(0, -0.48a)$.

Indien het Lamb-dipool model vergeleken wordt met het puntwervel-model, dan moeten twee belangrijke fysische grootheden gelijk gekozen worden: de totale impuls (respectievelijk $2\pi a^2\rho U_0$ en $2b\gamma\rho$) en de translatie-snelheid (U_0 en $\frac{\gamma}{4\pi b}$) [Melesko 94]. Uit deze twee voorwaarden volgt:

$$a = 2b \quad (2.16)$$

$$\Gamma = 1.09\gamma. \quad (2.17)$$

We zullen hier later in hoofdstuk 7 op terugkomen.

2.2.3 Afname van vorticheit van dipolen

In 1994 hebben Flór, van Heijst & Delfos [Flór 95] het visceuze verval van dipolen in een gestratificeerde vloeistof experimenteel onderzocht. Zij presenteerden een model, gebaseerd op de toenemende verticale dikte van de dipool, waarbij de horizontale stroming beschreven werd door een Lamb-dipool. Dit model bleek goed overeen te komen met de experimentele resultaten. De afname van de vorticheit wordt in dit model gegeven door

$$\omega = \frac{A}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-t}{\tau_{dif}}\right) \exp\left(\frac{-z^2}{4\nu t}\right), \quad (2.18)$$

waarbij A een constante is en τ_{dif} gegeven wordt door

$$\tau_{dif} = (\nu k^2)^{-1}. \quad (2.19)$$

Op hoogte $z = 0$ geldt dus

$$\omega = \frac{A}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-t}{\tau_{dif}}\right). \quad (2.20)$$

Voor de afname van de circulatie volgt met behulp van (2.15) en (2.20):

$$\Gamma = \frac{C}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-t}{\tau_{dif}}\right) \exp\left(\frac{-z^2}{4\nu t}\right). \quad (2.21)$$

waarbij C een constante is. Op $z = 0$ geldt dus

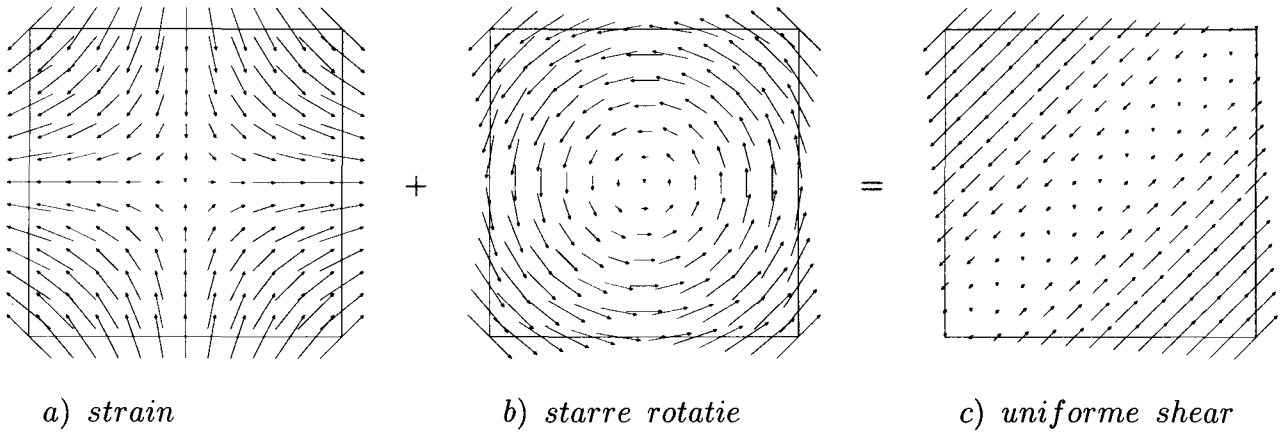
$$\Gamma = \frac{C}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-t}{\tau_{dif}}\right). \quad (2.22)$$

2.3 Strain stroming

Het snelheidsveld van een twee-dimensionale stroming kan lokaal altijd benaderd worden door een shear-stroming, gegeven door [Kundu 90]:

$$\begin{aligned} u &= -\kappa y + ex \\ v &= \kappa x - ey. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Hierin is e de strain-rate constante en κ de rotatie constante. Uit deze formules blijkt dat een shearstroming kan worden opgesplitst in een starre rotatie ($u = -\kappa y$ en $v = \kappa x$) en een strainstroming:



Figuur 2.3: *Snelheidsvelden $\vec{u}(\vec{x})$ van verschillende stromingen.*

$$\begin{aligned} u &= ex \\ v &= -ey. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Dat een shearstroming een combinatie is van een shearstroming en een starre rotatie blijkt ook uit figuur 2.3 waarin de snelheidsvelden van de drie stromingen geschetst zijn.

Hoofdstuk 3

Numerieke modellen

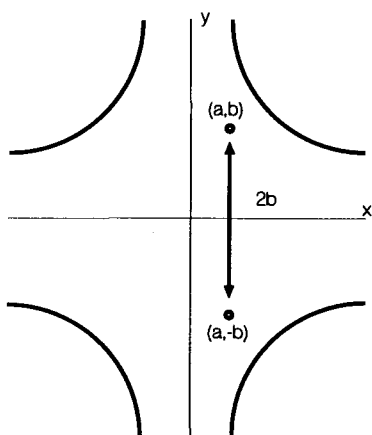
De experimentele resultaten worden in hoofdstuk 7 vergeleken met een aantal numerieke simulaties. Hiervoor zijn verschillende numerieke methodes gebruikt. Kida en van Oijen gebruikten voor hun simulaties respectievelijk een spectraal methode [Kida 91] en een eindige differentie methode [Oijen 94]. In hun berekeningen hebben zij echter geen rekening gehouden met de afname van vortciteit als gevolg van visceuze effecten in verticale richting. In dit hoofdstuk wordt uitgelegd hoe deze afname in de verschillende methodes is verwerkt. Er wordt gebruik gemaakt van de contour dynamica, contour kinematica en de eindige differentie methode.

3.1 Contour kinematica

Bij de contour kinematica methode wordt een snelheidsveld met behulp van het puntwervel-model gedefinieerd met daarbij opgeteld het snelheidsveld van een strain. De contour die in de tijd gevolgd wordt is de oorspronkelijke separatrix van een dipool zonder strain, weergegeven door passieve deeltjes in de vorm van een ellips. De posities van de deeltjes als functie van de tijd worden berekend door het snelheidsveld te integreren over de tijd met behulp van de Runge-Kutta methode. Er worden dus geen dynamische vergelijkingen opgelost, zoals de Navier-Stokes vergelijking, maar kinematische vergelijkingen.

Meleshko en van Heijst [Melesko 94] toonden de kracht van de contour kinematica in combinatie met het puntwervel model aan door experimentele en numerieke resultaten van dipoolbotsingen met elkaar te vergelijken.

In het programma moeten de posities van de passieve punten aan bepaalde criteria voldoen: overschrijdt de afstand tussen twee opeenvolgende punten een bepaalde waarde, dan wordt een extra punt tussengevoegd. Tussenvoeging vindt ook plaats als de hoek tussen twee opeenvolgende stukjes contourlijn te klein wordt. De positie van het tussenliggende punt wordt berekend door op $t = 0$ een punt toe te voegen en vervolgens te berekenen waar het zich op tijdstip t bevindt. Er wordt een punt geëlimineerd als de afstand tussen twee opeenvolgende punten onder een bepaalde waarde komt. Door tijdens de berekening het oppervlak van de blob te berekenen, kan getest worden of er geen grote numerieke



Figuur 3.1: Schematische schets van het puntwervelmodel zoals gebruikt in de contour kinematica simulaties.

fouten gemaakt worden. Door de voorwaarde incompressibiliteit moet de grootte van het oppervlak immers invariant in de tijd zijn.

Het snelheidsveld van een dipool in een strain-stroming in een meebewegend assenstelsel wordt gegeven door:

$$u(x, y, t) = \frac{-\gamma}{2\pi} \frac{y-b}{x^2 + (y-b)^2} + \frac{\gamma}{2\pi} \frac{y+b}{x^2 + (y+b)^2} + ex - \frac{\gamma}{4\pi b} \quad (3.1)$$

$$v(x, y, t) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y-b)^2} - \frac{\gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y+b)^2} - ey.$$

De strain stroming veroorzaakt een verplaatsing van de puntwervels in de y -richting met een snelheid $\dot{b}(t)$:

$$\dot{b}(t) = -eb(t). \quad (3.2)$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking luidt:

$$b(t) = b_0 \exp(-et). \quad (3.3)$$

Hierin is b_0 de oorspronkelijke afstand van de puntwervel tot de symmetrie-as tussen de puntwervels. De oplossing is geldig voor zowel positieve als negatieve strain.

In (2.10) is de stroomfunctie gegeven van een dipool in een meebewegend stelsel. De parameters a en b zijn getekend in figuur 3.1. Om echter de numerieke resultaten van de contour kinematica te vergelijken met de experimentele resultaten is het handiger een

stromingsveld te definiëren in een stilstaand stelsel. De x -coördinaat van de puntwervels a wordt dan tijdafhankelijk volgens de volgende differentiaalvergelijking:

$$\dot{a}(t) = ea(t) + \frac{\gamma(t)}{4\pi b(t)} = ea(t) + \frac{\exp(et) C}{4\pi b_0 \sqrt{t}} \exp\left(\frac{-t}{\tau_{dif}}\right). \quad (3.4)$$

De snelheid in de x -richting is immers afhankelijk van de snelheid die de puntwervels bij elkaar induceren en de strain. In deze formule is voor $\gamma(t)$ vergelijking (2.22) ingevuld op $z = 0$. Deze differentiaalvergelijking heeft de volgende oplossing [Spanier 87]:

$$a(t) = \left(\frac{C \sqrt{\pi \tau_{dif}}}{4\pi b_0} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{t}{\tau_{dif}}} + a_0 \right) \exp(et). \quad (3.5)$$

Hierin is a_0 de plaats op de x -as waar de dipool gestart is.

3.2 Eindige-differentie methode

Bij de eindige-differentie methode [Saffman 79][Moore 71] wordt gebruik gemaakt van het programma NSEVOL, ontwikkeld door P. Orlandi en R. Verzicco en aangepast door J. van Geffen.

Het programma gaat uit van een twee-dimensionaal rechthoekig rooster. Op elk roosterpunt wordt de initiële vortichtheid berekend, waarna met de Poisson vergelijking het bijbehorende stromingsveld berekend kan worden. De horizontale diffusie term in (2.5) wordt berekend met het impliciete Crank-Nicolson schema. Verder wordt de Jacobiaan berekend door discretisatie in de tijd met een derde-orde Runge-Kutta methode, ontwikkeld door A.Wray. Voor het oplossen van de Poisson vergelijking (2.4) wordt gebruik gemaakt van een FACR (Fourier Analysis and Cyclic Reduction) Poisson-solver. Het programma wordt uitvoerig beschreven in [Oijen 94].

In alle berekeningen met NSEVOL is het Lamb-dipool model als beginvoorwaarde gebruikt. Omdat het programma oorspronkelijk geen rekening houdt met de afname van vortichtheid door verticale diffusie (laatste term in formule (2.5)) wordt dit aan het programma toegevoegd. Dit kan niet door middel van discretisatie van $\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}$ aangezien de code 2D is.

Indien aangenomen wordt dat de afname van vortichtheid gegeven wordt door (2.20), dan kan de vortichtheid ω als volgt worden opgesplitst

$$\omega = \omega_{2D}(x, y, t) \phi(z, t), \quad (3.6)$$

waarin $\omega_{2D}(x, y, t)$ de horizontale vortichtheitsverdeling is volgens

$$\frac{\partial \omega_{2D}}{\partial t} + J(\omega_{2D}, \psi) = \nu \nabla_h^2 \omega_{2D} \quad (3.7)$$

en de amplitudefunctie $\phi(z, t)$ voldoet aan

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (3.8)$$

De oplossing van deze laatste differentiaalvergelijking luidt

$$\phi(z, t) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\nu t}} \exp\left(\frac{-z^2}{4\nu t}\right). \quad (3.9)$$

De laatste term in (2.5) kan nu geschreven worden als

$$\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = \nu \omega_{2D} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = \nu \omega_{2D} \frac{-\phi}{2\nu t} \left(1 - \frac{z^2}{2\nu t}\right) \Big|_{z=0} = -\frac{\omega_{2D} \phi(z=0)}{2t} = -\frac{\omega(z=0)}{2t} \quad (3.10)$$

Formule (2.5) kan dus vervangen worden door:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) = \nu \nabla_h^2 \omega - \frac{\omega}{2t}, \quad \text{voor } t > 0 \text{ en } z = 0 \quad (3.11)$$

3.3 Contour dynamica

Bij de contour dynamica worden meerdere vorticijtscontourlijnen gevolgd in de tijd in een twee-dimensionale, niet-visceuze, onsamendrukbare vloeistof.

De vorticijtsverdeling is gediscrctiseerd over 10 contouren, uitgaande van een Lamb-dipool. In het numerieke algoritme worden de contouren beschreven door zogenaamde knooppunten die in de tijd worden gevolgd. Tijdens de berekeningen kunnen knooppunten verwijderd of toegevoegd worden, afhankelijk van de lokale vervorming van de contouren.

De verplaatsing van de knooppunten wordt berekend met het totale snelheidsveld $\vec{v}_{tot} = \vec{v}_\omega + \vec{v}_s$. Hierin is \vec{v}_s het snelheidsveld veroorzaakt door de strain en \vec{v}_ω het snelheidsveld veroorzaakt door de dipool. Dit laatste snelheidsveld wordt berekend met behulp van de stroomfunctie, die op zijn beurt weer berekend kan worden uit de Poisson-vergelijking.

De contour dynamica methode is in essentie niet-visceus. Om toch de experimenteel waargenomen vorticijtsafname te kunnen simuleren, wordt iedere contour een vorticijtsafname opgelegd volgens (2.20).

Hoofdstuk 4

Simulaties met de contour kinematica methode

In figuur 2.1 is het stroomlijnenpatroon van een puntwervel-dipool weergegeven. Indien bij de bijbehorende stroomfunctie de stroomfunctie van een positieve strain wordt opgeteld, kunnen verschillende patronen ontstaan met drie stuwpunten, afhankelijk van de strainsterkte e , de circulatie van de dipool γ en de afstand van de puntwervels tot de symmetrie-as b . Met behulp van deze drie parameters definiëren we de dimensieloze grootheid

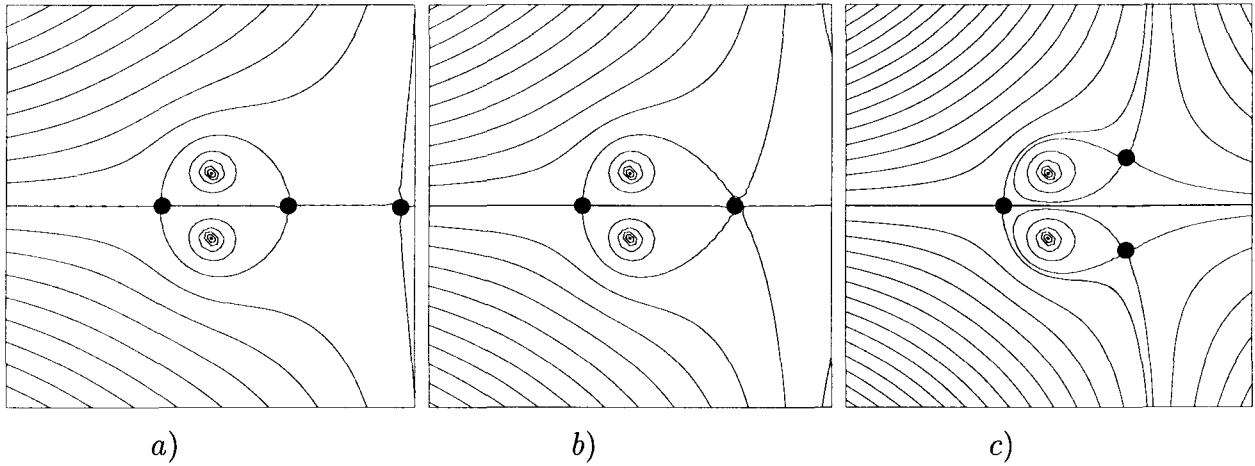
$$B = \frac{\gamma}{ed^2} \quad (4.1)$$

met een kritische waarde $B_c = 62.43$ (zie appendix A). Indien $B > B_c$ (zie figuur 4.1a), dan liggen de drie stuwpunten op de symmetrie-as: één achter de dipool en twee aan de voorkant. Als B echter gelijk is aan B_c , dan vallen de twee stuwpunten aan de voorkant van de dipool samen (figuur 4.1b). Indien $B < B_c$ dan liggen de stuwpunten aan de voorkant van de dipool gespiegeld ten opzichte van de symmetrie-as van elkaar (figuur 4.1c).

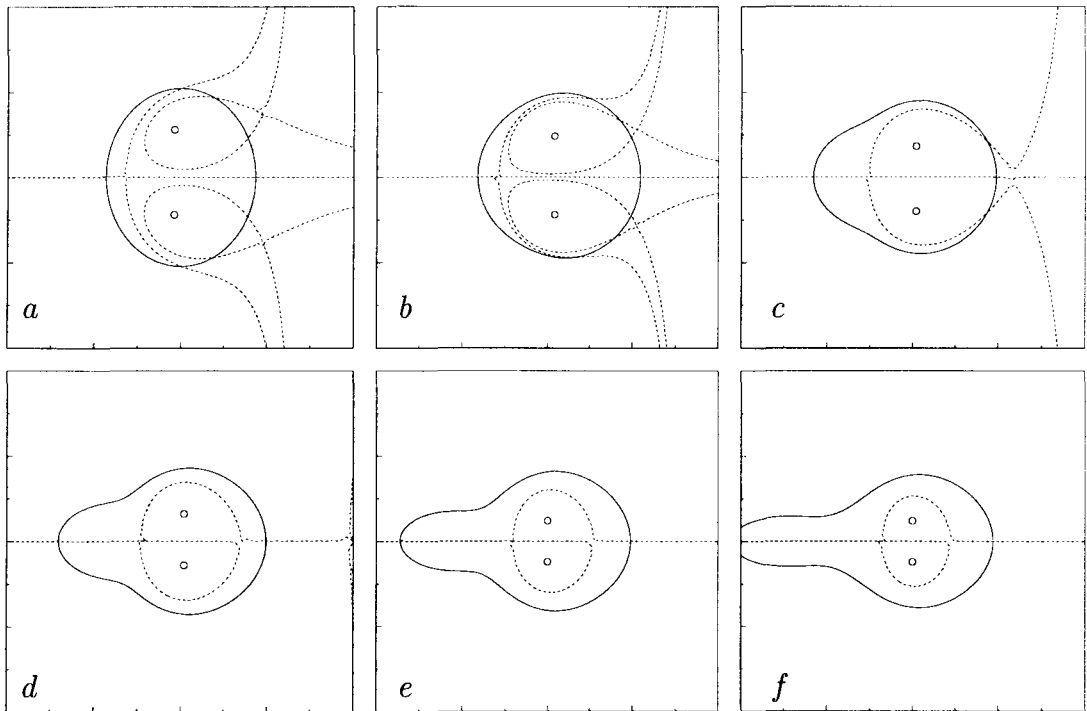
In figuur 4.2(a) is de separatrix van een dipool zonder strain weergegeven met behulp van de doorgetrokken lijn. Dit is een 'blob' deeltjes die met behulp van een contour kinematica programma (zie hoofdstuk 3) in de tijd gevolgd wordt. Indien de dipool zich in een positieve strain bevindt, zal na verloop van tijd een kop-staart structuur ontstaan (zie figuur (d), (e) en (f)). Dit gaan we verklaren met behulp van de separatrices van een dipool in een strainstroming, weergegeven in de figuur met stippellijnen.

In figuur 4.2(a) is te zien dat het achterste deel van de blob buiten de separatrix valt. Dit deel van de blob wordt in figuur (b) tot en met (f) verwijderd van de oorspronkelijke dipool. Omdat de strain de centra van de dipool naar elkaar duwt, zullen de stuwpunten dichterbij elkaar komen te liggen en het gebied binnen de separatrices zal steeds kleiner worden. Dit heeft als gevolg dat een steeds groter gedeelte van de dipool buiten de separatrix valt en de staart van de dipool alsmaar langer wordt.

In [Kida 91] wordt bewezen met behulp van een spectraal methode, dat een strainstroming onmisbaar is voor het ontstaan van een kop-staart structuur: indien de strain-rate



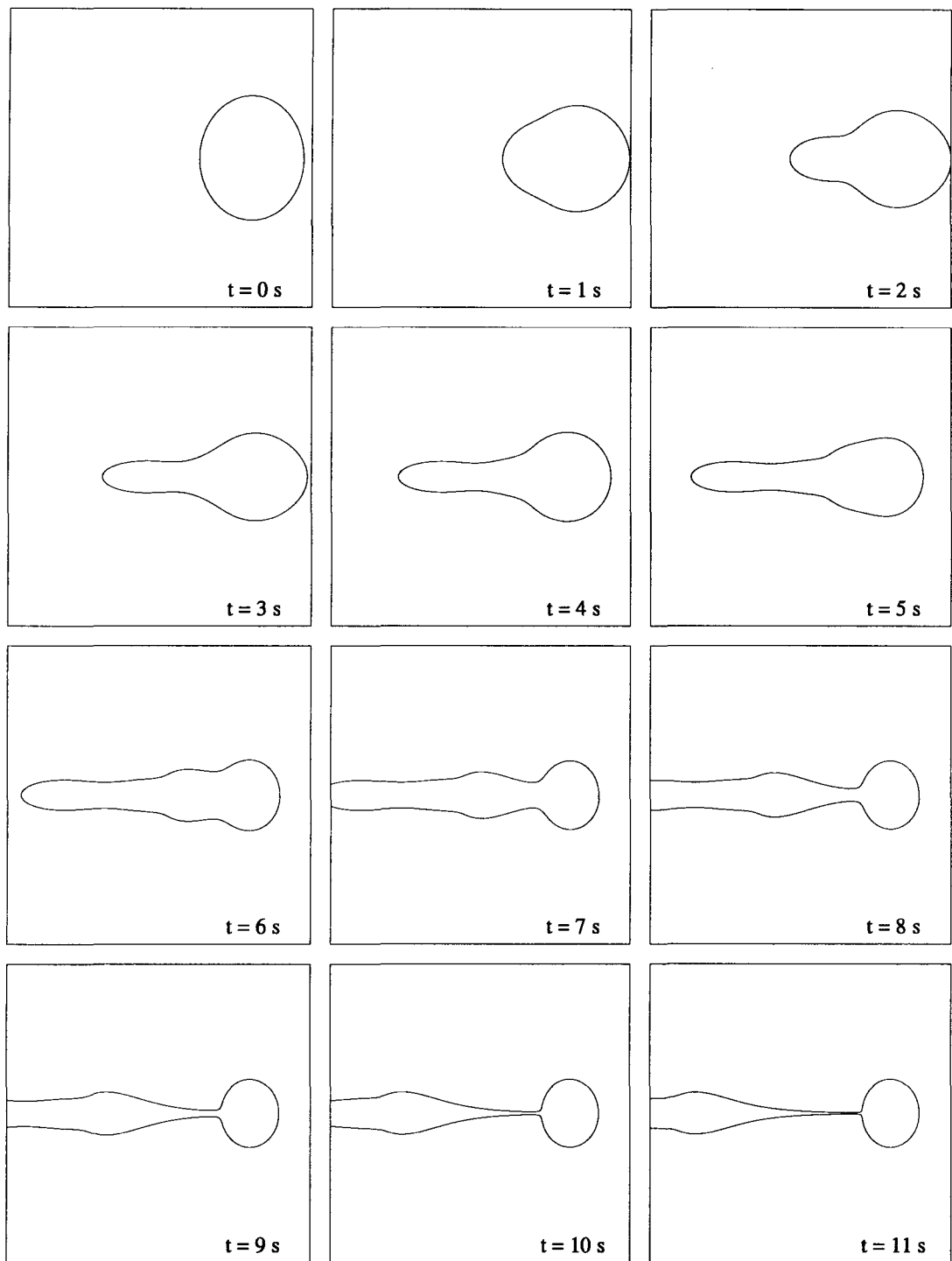
Figuur 4.1: *Stroomlijnen patroon van een dipool in een strain-stroming voor verschillende waarden van B : a) $B = 80$, b) $B = 62.43$, c) $B = 40$. De stuwpunten zijn aangegeven door een punt (\bullet).*



Figuur 4.2: *Ontstaan van een kop-staart structuur. Beginsituatie: $B = 31.4$ ($e=0.2 \text{ s}^{-1}$, $\gamma=2\pi \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ en $d=1 \text{ cm}$). Het tijdsinterval tussen ieder plaatje is 0.5 s . De posities van de puntwervels zijn weergegeven door een circel (\circ).*

constante op een bepaald moment nul wordt, nadat een kop-staart structuur is ontstaan, zal zich weer een dipool vormen met de originele vorm.

Dit is geverifieerd met behulp van een contour kinematica simulatie zoals weergegeven in figuur 4.3. Van $t = 0$ s tot $t = 3$ s bevindt zich een dipool in een positieve strain. Op $t = 3$ s wordt de strain 'uitgezet' en zien we na verloop van tijd inderdaad weer een ellips ontstaan.



Figuur 4.3: Dipool in een positieve strain. Na 3 seconden wordt de strain 'uitgezet' en verkrijgt de dipool weer zijn originele vorm. Beginsituatie: $B=31.4$.

Hoofdstuk 5

Experimentele opzet

Het doel van de experimenten was het genereren van dipolen in een twee-dimensionale strainstroming. Over het stromingsveld is op twee manieren informatie verkregen: kwantitatief met behulp van passieve deeltjes en kwalitatief met behulp van kleurstof. In dit hoofdstuk is beschreven hoe met behulp van een stratificatie een 2D-stromingsveld verkregen werd en hoe de strainstroming en de dipool gegenereerd zijn. Uiteindelijk komt de het digitale beeldverwerkingssysteem *DigImage* aan de orde.

5.1 Experimenten in een gestratificeerde vloeistof

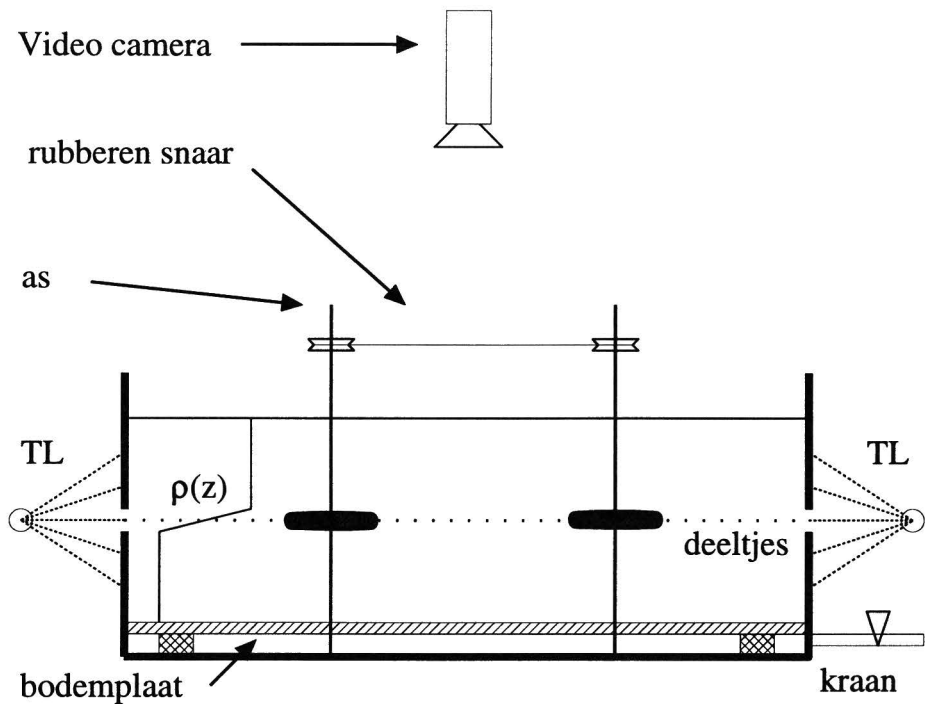
Een vloeistof waarin de dichtheid een functie van de hoogte is, wordt een gestratificeerde vloeistof genoemd. Meestal wordt in experimenten een stapsgewijze of een lineaire stratificatie gebruikt. In het laatste geval is de dichtheid evenredig met de hoogte. Een grootte om de mate van stratificatie aan te geven is de buoyancy-frequentie, gegeven door

$$N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{d\rho}{dz}. \quad (5.1)$$

waarin g de valversnelling is, $\bar{\rho}$ de gemiddelde dichtheid en $\frac{d\rho}{dz}$ de dichtheidsgradient in verticale richting. In het geval van een ideale twee-lagen stratificatie is de buoyancy-frequentie oneindig op het interface en nul daarbuiten. In een lineaire stratificatie is de buoyancy-frequentie overal in de vloeistof constant.

Om praktische redenen is in alle experimenten gewerkt met een stapsgewijze stratificatie: deze is eenvoudiger aan te maken, de hoogte van het interface is beter te positioneren en de dipolen worden sneller gevormd doordat de buoyancy kracht groter is. Een nadeel van een stapsgewijze stratificatie is de vorming van interne golven op het interface.

De experimenten zijn uitgevoerd in een perspex tank met afmetingen van $100 \times 100 \times 30 \text{ cm}^3$ (zie figuur 5.1). De stapsgewijze stratificatie werd verkregen door eerst de bak tot de helft te vullen met kraanwater. Daarna werd via een kraan onderaan de tank een even grote hoeveelheid zout water met een dichtheid van 1.086 g/cm^3 zeer langzaam toegevoegd (dit duurt enkele uren). Deze stapsgewijze stratificatie ging binnen een aantal dagen over



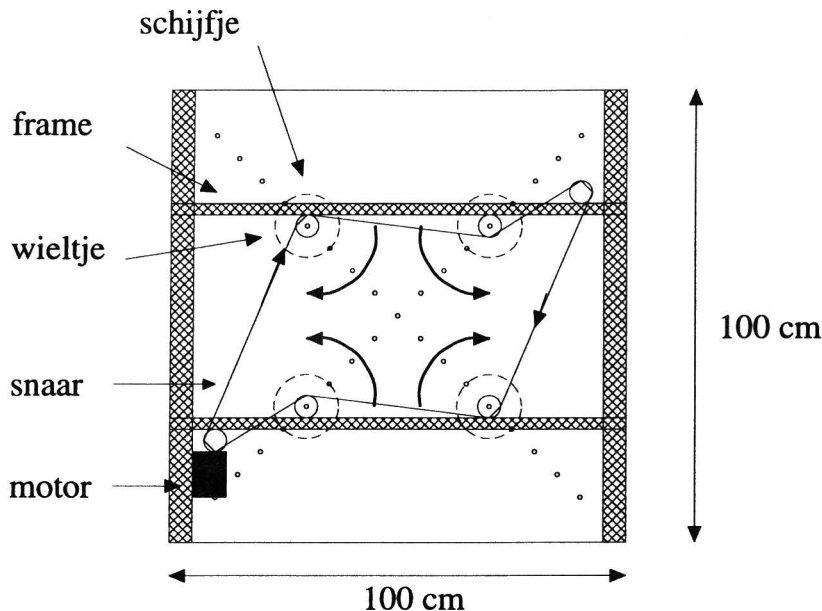
Figuur 5.1: Zijaanzicht van de experimentele opstelling.

in een lineaire stratificatie door diffusie van vloeistof en door menging veroorzaakt door de dipolen en de strain. De dichtheid op verschillende hoogtes werd bepaald met een refractometer.

In het interface werden polystyreenbolletjes aangebracht met een diameter van 0.5 tot 1.5 mm en een dichtheid van ongeveer 1.04 g/cm^3 . Er wordt aangenomen dat deze bolletjes zich gedragen als passieve deeltjes in het twee-dimensionale vlak. Het interface werd belicht door twee TL-lampen aan de zijkant van de bak die een 2 cm brede spleet beschijnen. Hierdoor lichten de witte polystyreen bolletjes op tegen de zwarte bodem. De deeltjesbeweging in het interface werd geregistreerd met een videocamera die ongeveer 70 cm boven de bak hing.

5.2 Generatie van een strain stroming

De strain stroming werd verkregen door middel van vier roterende schijfjes (10 cm diameter en 0.5 cm dik) gepositioneerd in de hoeken van een denkbeeldig vierkant in het interface. De schijfjes zijn bevestigd aan metalen assen, die rechtop in het water staan en boven de bak met een rubberen snaar en wieltjes met elkaar verbonden zijn. Dit mechanisme werd aangedreven door een elektrische motor. Aan de onderkant blijven de assen op hun plaats door gaatjes in de bodemplaat. De gaatjes zijn in een X-vorm geboord (zie figuur 5.1) zodat de afstand tussen de schijfjes gevarieerd kan worden. Tijdens de experimenten is de diagonaal van het vierkant 50 cm lang. Tijdens de experimenten is een typische snelheid van de schijfjes 7 omwentelingen per minuut.



Figuur 5.2: *Bovenaanzicht van de experimentele opstelling.*

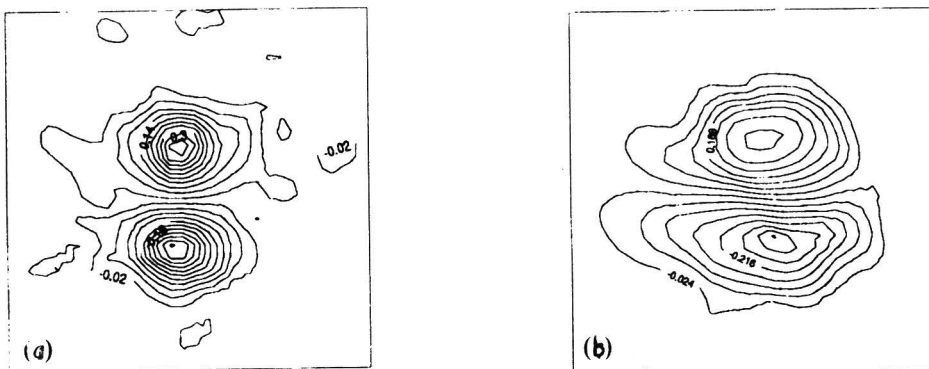
5.3 Generatie van de dipool

De dipolen werden gecreëerd door een kleine hoeveelheid vloeistof met dichtheid van 1.042 g/cm^3 in het interface te injecteren. Deze dichtheid werd gelijk gekozen aan de dichtheid in het interface. In eerste instantie werd een drie-dimensionale turbulente wolk waargenomen, maar door de buoyancy-krachten en de inverse energie cascade vormde zich snel een platte wervelstructuur [Flór 94]. Het volume en de snelheid van de injectie konden nauwkeurig ingesteld worden door gebruik te maken van een computergestuurde traverseerkolom met daarin 4 spuitjes. Het Reynoldsgetal $Re = Ud/\nu$ werd gebaseerd op de nozzle diameter d , de injectie snelheid U en de kinematische viscositeit van de vloeistof ν . De gebruikte nozzle diameter was 3 mm . Tijdens de experimenten bedroeg de temperatuur van het water 19°C . De kinematische viscositeit van de geïnjecteerde zoutoplossing was $1.085 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$ [Physics 59].

Bij een Reynoldsgetal groter dan 2000 is sprake van een volledig turbulente inspuiting [Flór 94]. In dat geval vormt zich na een tijdje een symmetrische dipool (zie figuur 5.3a). Is het Reynoldsgetal lager, dan is er sprake van een laminaire inspuiting en vormt zich een dipool met een kop-staart asymmetrie (zie figuur 5.3b). Omdat het de bedoeling is het ontstaan van een kop-staart structuur in een strainstroming aan te tonen, zijn bij zowel de kleurstofexperimenten als bij de deeltjesexperimenten, de dipolen gegenereerd met een Reynoldsgetal van 2400: in 1.2 s werd 6.7 ml vloeistof geïnjecteerd.

Voor het genereren van een dipool in een strain-stroming was het van groot belang dat de nozzle evenwijdig uitgelijnd was met de symmetrie-as van de strain. Indien dit niet nauwkeurig gebeurde was, ontstond een asymmetrische dipool.

Om de dipool te visualiseren zijn naast experimenten met passieve bolletjes in het interface, ook experimenten uitgevoerd waarbij de geïnjecteerde vloeistof gemengd was



Figuur 5.3: (a) Een turbulent ingespoten dipool, $Q = 12 \text{ ml s}^{-1}$, $\delta t = 0.3 \text{ s}$, $N = 2.2 \text{ rad s}^{-1}$, $t = 90 \text{ s}$. (b) Een laminair ingespoten dipool, $Q = 0.58 \text{ ml s}^{-1}$, $\delta t = 25 \text{ s}$, $N = 3.0 \text{ rad s}^{-1}$, $t = 64 \text{ s}$. De experimenten zijn uitgevoerd door J.B. Flór en G.J.F. van Heijst.

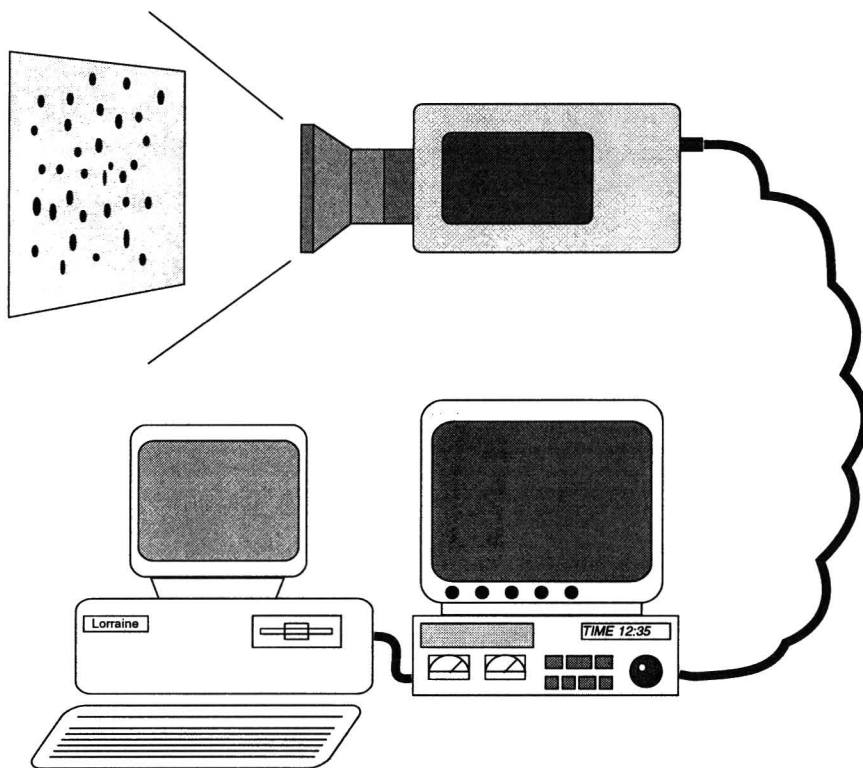
met kleurstof. In dit geval werd het interface met bouwlampen in plaats van TL-balken verlicht.

5.4 Digitale beeldverwerking

Met behulp van de camera werden de bewegingen van de polystyreenbolletjes in het interface vastgelegd op video (zie figuur 5.4). Daarna werden met behulp van het digitaal beeldverwerkingssysteem *DigImage* de videobeelden gedigitaliseerd en kon met behulp van *particle tracking* de snelheid van ieder deeltje berekend worden. Voor meer informatie over *DigImage* zie [Dalziel 92].

De gemeten snelheidsvectoren werden geïnterpoleerd op een rooster van 30×30 punten met behulp van een spline methode [Paihua 78]. Uiteindelijk werd door numerieke differentiatie en integratie van het geïnterpoleerde snelheidveld respectievelijk het vorticitetsveld en het stromingsveld numeriek berekend. Met behulp van het vorticitetsveld was het mogelijk de positieve en negatieve circulatie van de dipool te bepalen:

$$\Gamma^{\pm} = \sum_{ij} \omega^{\pm}_{ij} dx dy. \quad (5.2)$$



Figuur 5.4: Schematische opstelling van het DigImage systeem.

Hoofdstuk 6

Bepaling van de strain-sterkte

6.1 Strain-stroming

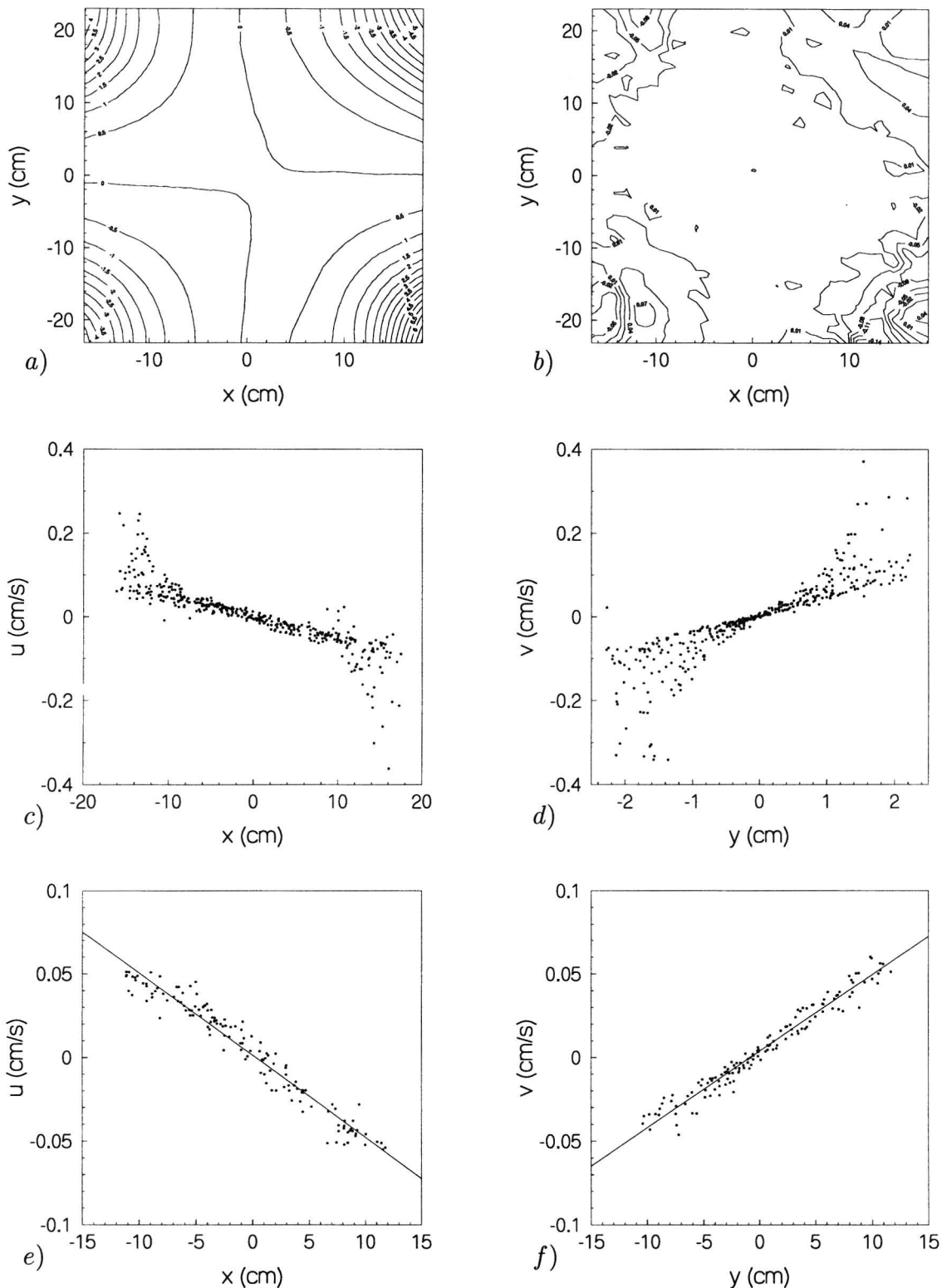
Met de eerder beschreven methode met de vier schijfjes is een strain gegenereerd in het interface van een stapsgewijze stratificatie. Volgens (2.24) is de snelheid in de x (y)-richting van een deeltje in een strain evenredig met de x (y) positie. Dit wordt de lineariteit van de strain genoemd.

Om deze lineariteit en de grootte van de strain-rate te bepalen is het snelheidsveld gemeten van een strain voordat de dipool gegenereerd werd. Deze strain wordt in hoofdstuk 7 gebruikt voor deeltjesexperimenten met dipolen in een positieve strain.

In figuur 6.1(a) is de stroomfunctie ψ weergegeven met het bijbehorende vorticitetsveld (b). Uit formule (2.1) en (2.24) volgt dat een strain-stroming rotatievrij is: $\omega = 0$. Bekijken we echter het vorticitetsveld van de strain-stroming dan zien we dat dit niet het geval is in de buurt van de schijfjes, de strain zal daar dus niet linear zijn. Dit blijkt ook uit figuur (c) en (d) waarin de snelheden van tracers in de x en y -richting (u en v) uitgezet zijn tegen de posities x en y in een rechthoekig domein. Aan de randen van het domein zien we inderdaad dat de snelheid niet evenredig is met de positie.

Kijken we naar het gebied binnen een straal van 12 cm rond het centrum, dan wordt een lineair verband gevonden (zie figuur (e) en (f)). Met behulp van lineaire regressie is de helling van de lijnen bepaald, die gelijk is aan de strain-rate constante (zie paragraaf 2.3): in de x -richting geldt $e = 0.0047 \pm 0.0001 s^{-1}$ en in de y -richting $e = 0.0044 \pm 0.0001 s^{-1}$. Voor de numerieke simulaties werd het gemiddelde van deze twee waarden gebruikt: $e = 0.0045 s^{-1}$.

Voor de deeltjesexperimenten waarbij een dipool in een negatieve strain onderzocht is, werden op dezelfde manier de lineariteit en de strain-rate constante van de strain bepaald (zie appendix B). Met behulp van lineaire regressie is de strain-rate constante van de negatieve strain bepaald: in de x -richting geldt $e = 0.0050 \pm 0.0001 s^{-1}$ en in de y -richting $e = 0.0068 \pm 0.0001 s^{-1}$. Het verschil tussen deze waarden werd veroorzaakt door een dipool die ongeveer 15 minuten voordat het snelheidsveld van de strain werd opgenomen op video, de strain verstoorde.



Figuur 6.1: De stroomfunctie van de positieve strain (a) met het bijbehorende vorticitetsveld (b). In (c) en (d) zijn de snelheden u en v uitgezet tegen de positie x en y in een domein van ongeveer 20 bij 20 cm. In (e) en (f) is het domein circelvormig met een straal van 12 cm. Door de punten is een met lineaire regressie bepaalde lijn getekend met helling $-0.0047 \pm 0.0001 \text{ s}^{-1}$ (e) en $0.0044 \pm 0.0001 \text{ s}^{-1}$ (f). $N=4.9 \text{ rad/s}$.

Hoofdstuk 7

Resultaten van dipolen in een positieve strain

In dit hoofdstuk worden de experimenteel gevonden resultaten getoond van dipolen in een positieve strain-stroming. De dipolen zijn gevisualiseerd met kleurstof of door passieve polystyreenbolletjes. Tevens zijn drie verschillende numerieke simulaties uitgevoerd, volgens de in hoofdstuk 3 beschreven methoden. De numerieke resultaten zijn met de experimentele waarnemingen en onderling vergeleken. Daarna wordt vrij diep ingegaan op de $\omega\psi$ -plaatjes die volgen uit de experimenten en uit de simulatie met het eindige differentie methode programma NSEVOL.

7.1 Kleurstofexperimenten in een positieve strain

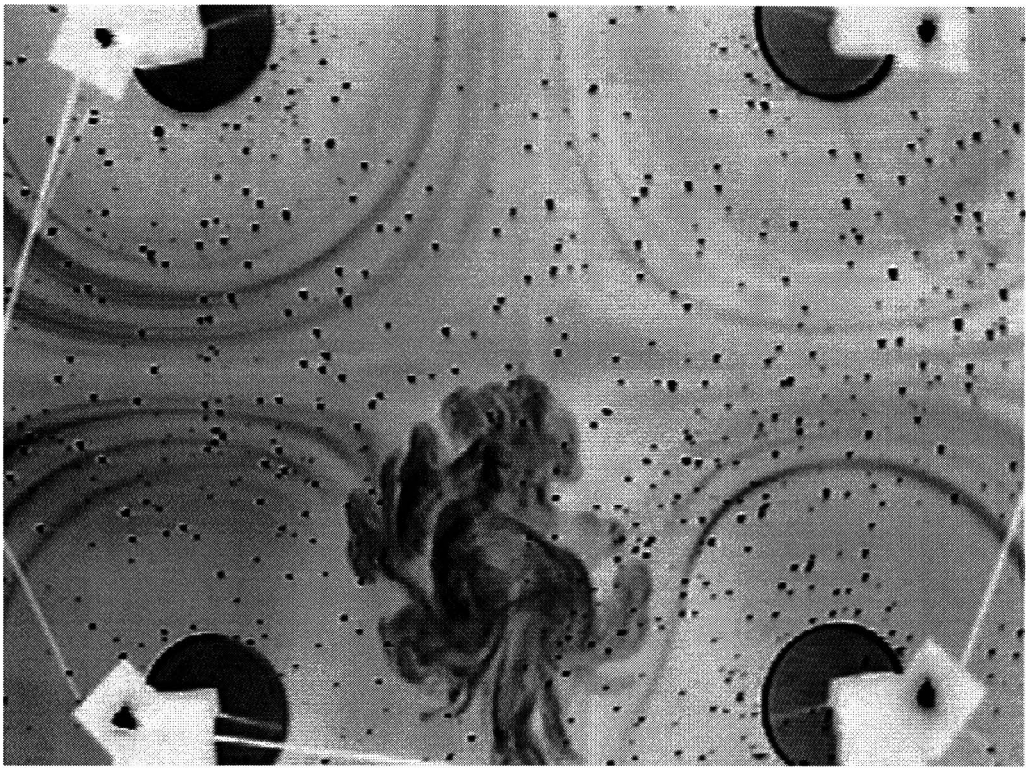
In figuur 7.1 zijn de resultaten weergegeven van een dipool in een positieve strain. De geïnjecteerde vloeistof waarmee de dipool gegenereerd werd, was gemengd met fluorescine, zodat kwalitatieve informatie over de dipolen werd verkregen.

Op $t = 10$ s is de turbulente wolk te zien, die na dertig seconden is overgegaan in een twee-dimensionale dipool. Op $t = 50$ s en $t = 70$ s is duidelijk de gevormde staart waarneembaar. Doordat de dipool niet symmetrisch is, is de staart van de rechter dipoolhelft langer dan de staart van de linker dipoolhelft.

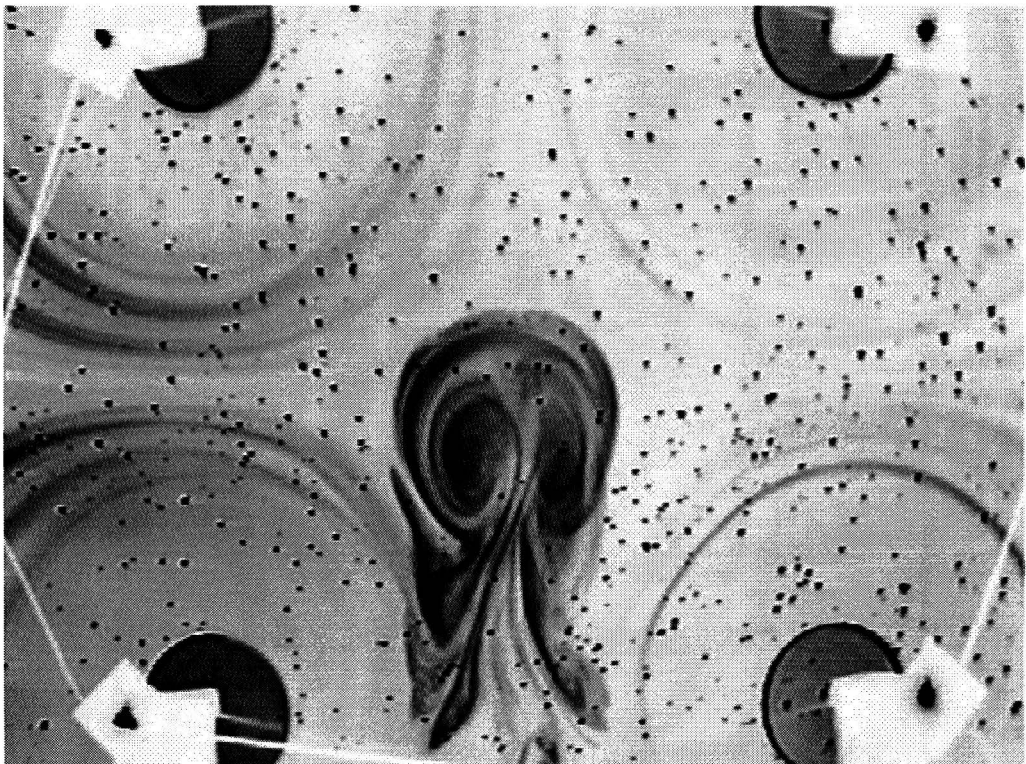
7.2 Deeltjesexperimenten in een positieve strain

In figuur 7.2 (a) t/m (d) zijn de experimenteel gevonden vortcriteitsvelden weergegeven van een dipool in een positieve strain (zie appendix B voor meerdere tijdstippen). Op $t = 40$ s heeft zich een dipool ontwikkeld waarbij, evenals bij de kleurstofexperimenten, vanaf $t = 60$ s de vorming van een kop-staart structuur te zien is.

We verwachten dat de centra van de dipool door de strain naar elkaar geduwd worden. Dat dit echter niet het geval is, is goed te zien in figuur 7.3 (i) t/m (l), waarin de vortcriteitsdoorsnedes door de centra van de dipool weergegeven zijn. Indien de centra van de

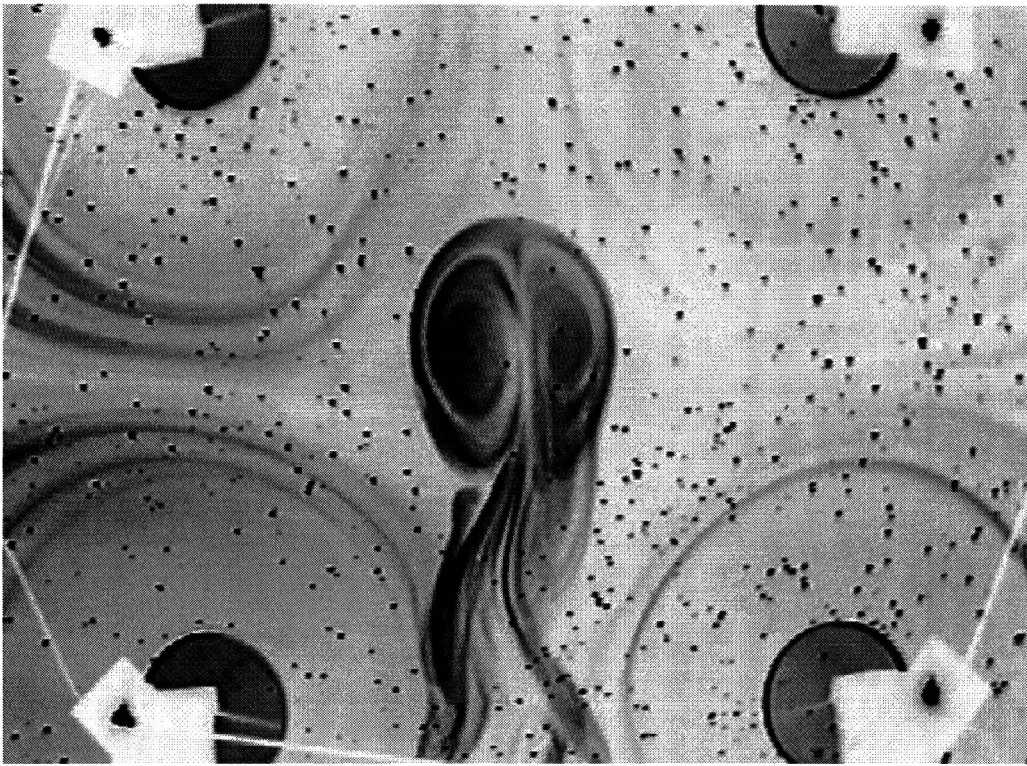


$t = 10 \text{ s}$

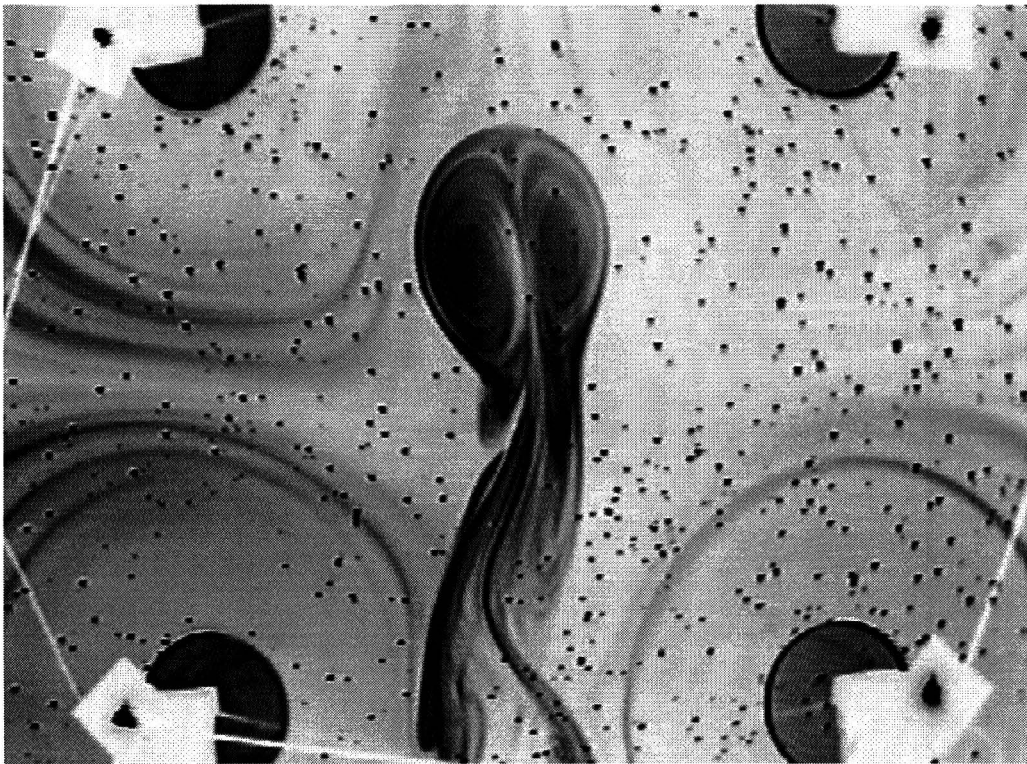


$t = 30 \text{ s}$

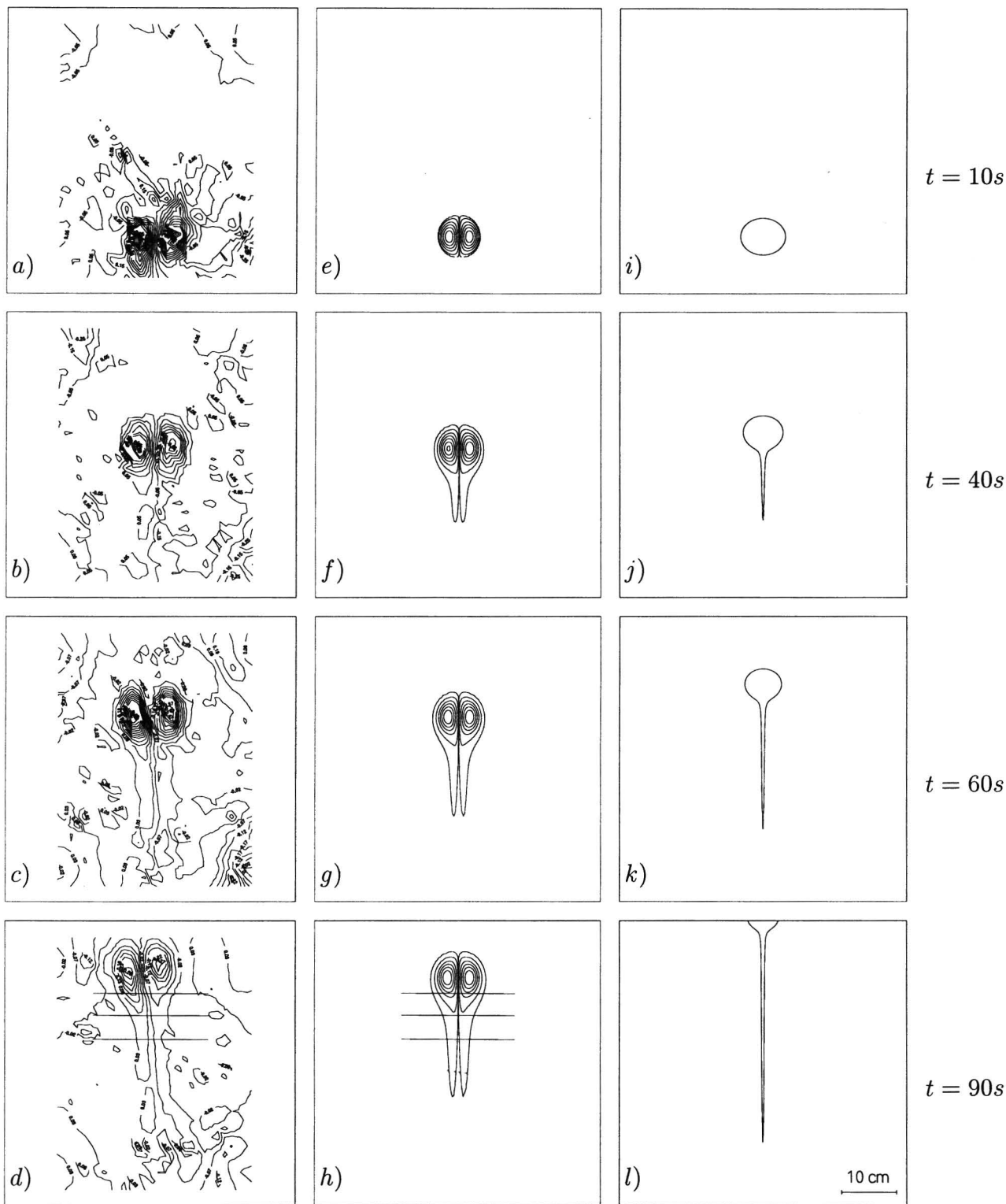
Figuur 7.1: *Plaatjes van kleurstofexperimenten van een dipool in een positieve strain.*



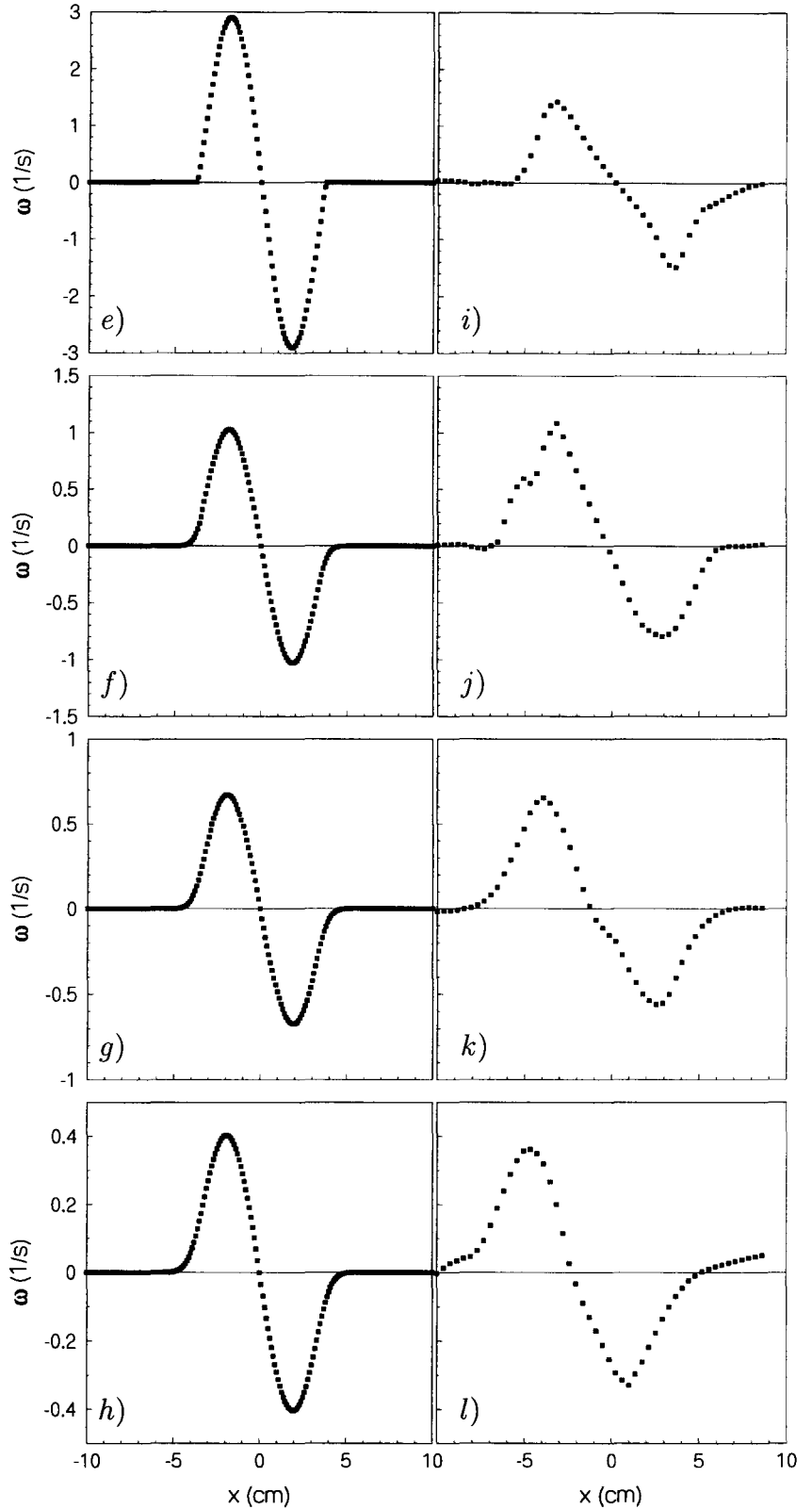
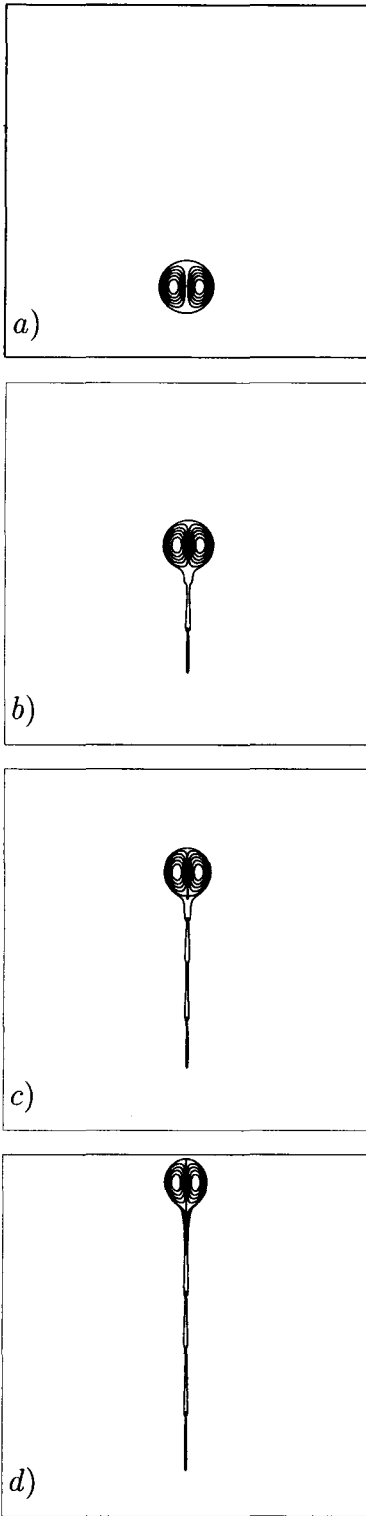
$t = 50 \text{ s}$



$t = 70 \text{ s}$



Figuur 7.2: Resultaten van een dipool in een positieve strain. (a) t/m (d) tonen de experimenteel gevonden vorticitteitsvelden. (e) t/m (h) tonen de vorticitteitsvelden zoals berekend met NSEVOL met beginwaarden: $a = 3.729$ cm en $U_0 = 0.9825$ cm/s. In (i) t/m (l) zijn de resultaten van de contour kinematica simulatie weergegeven.



Figuur 7.3: In (a) t/m (d) zijn de resultaten van de simulatie met de contour dynamica weergegeven. In (e) t/m (h) is de vorticeit uitgezet tegen de x -as, genomen van een doorsnede door de centra van de dipool, gesimuleerd met NSEVOL. De experimenteel bepaalde vorticeit is uitgezet in figuur (i) t/m (l).

dipool elkaar wel zouden naderen, dan zou de vortcriteitsgradient tussen de centra groter worden. Dit wordt tegengewerkt door horizontale diffusie.

Het bleek dat de afname van ω_m in de tijd goed beschreven werd door (2.20) ondanks de aanwezigheid van de strain. Dit is te zien in figuur 7.4, waarin de experimenteel bepaalde waarden met de bijbehorende fit zijn weergegeven. De maximale vortcriteit is berekend met

$$\omega = \frac{|\omega^+| + |\omega^-|}{2}. \quad (7.1)$$

Voor de bepaling van de fit is niet-lineaire regressie gebruikt, gebaseerd op (2.20). Bij de regressie is de vortcriteitwaarde op $t = 10$ s niet gebruikt, omdat toen de dipool nog niet helemaal gevormd was. Uit deze fit zijn τ_{dif} en de constante A bepaald, waarmee met behulp van (2.19) en (2.13), k en a zijn berekend. Met behulp van de fit kan tevens de maximale vortcriteit worden uitgerekend op $t = 10$ s, zodat met (2.14) de snelheid van de dipool op $t = 10$ s berekend kan worden. Deze drie karakteristieke parameters van een Lamb-dipool (a, k en U_0), worden later gebruikt om de dipool te simuleren.

$$\begin{aligned} \tau_{dif} &= 87 \pm 7 \text{ s} \\ A &= 10.3 \pm 0.4 \text{ s}^{-\frac{1}{2}} \\ k &= 1.03 \pm 0.08 \text{ cm}^{-1} \\ a &= 3.7 \pm 0.3 \text{ cm} \\ U_0 &= 0.98 \pm 0.04 \text{ cm/s}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

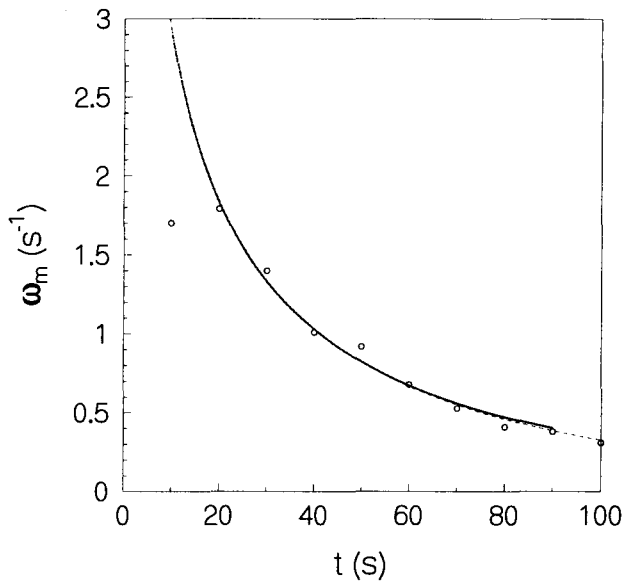
In figuur 7.4 is tevens het verloop van de maximale vortcriteit weergegeven, zoals bepaald met het eindige differentie methode programma NSEVOL (stippellijn), waarbij als beginvoorwaarde de straal a en de translatiesnelheid U_0 uit (7.2) genomen zijn. Deze simulatie is, evenals de simulaties met de contour kinematica en de contour dynamica, gestart op $t = 10$ s, omdat tijdens de experimenten op dat tijdstip pas een dipool gevormd was. De plaats van de dipool op dit tijdstip is gekozen op $(x, y) = (0, -19)$.

Uit het feit dat beide lijnen over elkaar heen vallen concluderen we dat de verticale en horizontale diffusie term in het programma NSEVOL de werkelijkheid goed weergeeft.

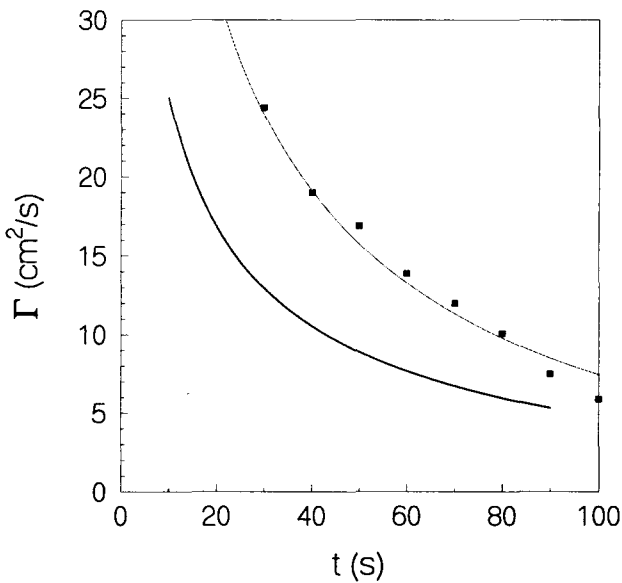
Met behulp van NSEVOL wordt op iedere tijdstap, naast de maximale vortcriteit ook de circulatie van de dipool berekend. De absolute waarden van de circulatie in de linker- en rechterdipoolhelft zijn natuurlijk evengroot. Omdat dit bij de experimenten niet het geval is, wordt hier de circulatie berekend met:

$$\Gamma = \frac{|\Gamma^+| + |\Gamma^-|}{2} \quad (7.3)$$

De numeriek bepaalde waarden zijn uitgezet tegen de tijd in figuur 7.5 met daar doorheen een fit. Deze fit is bepaald met niet-lineaire regressie, gebaseerd op (2.22) (doorgetrokken-lijn). In deze figuur staan ook de experimenteel bepaalde waarden met bijbehorende fit (stippellijn). De experimenteel bepaalde circulatie ligt over het hele tijdsdomein hoger dan



Figuur 7.4: De maximale vorticeit (berekend met (7.1)) als functie van de tijd: experimenteel bepaald (o), 'gefit' met behulp van (2.20) door de experimentele waarden met $\tau_{dif} = 87 \pm 7 \text{ s}$ en $A = 10.3 \pm 0.4 \text{ s}^{-0.5}$ (stippellijn), en numeriek berekend met NSEVOL (doorgetrokken lijn).



Figuur 7.5: Experimenteel bepaalde circulatie (berekend met (7.3)) als functie van de tijd (o) met daar doorheen de bijbehorende fit volgens (2.22) met $\tau_{dif} = 124 \pm 12 \text{ s}^{-1}$ en $C = 167 \pm 6 \text{ cm}^2/\text{s}^{-0.5}$ (stippellijn), en berekend met NSEVOL $\tau_{dif} = 172.91 \pm 0.01 \text{ s}$ en $C = 84.47 \pm 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}^{-0.5}$ (doorgetrokken lijn).

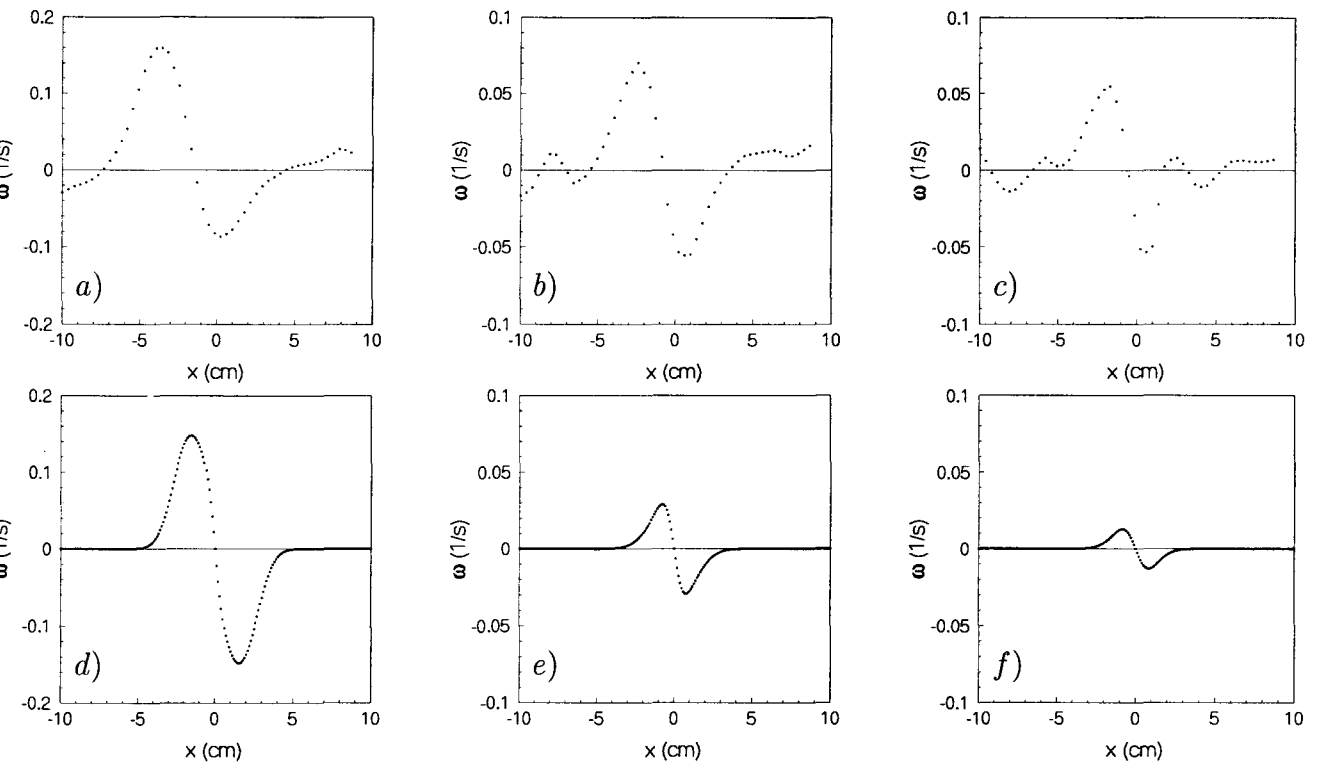
de numeriek bepaalde circulatie. Dit komt door de onnauwkeurigheid in de experimentele bepaling van de circulatie. Bij de bepaling van de positieve en negatieve circulatie wordt namelijk in een vierkant domein waarbinnen de dipool zich bevindt (zonder staart), op ieder roosterpunt de vorticititeit bepaald, waardoor met behulp van (5.2) de positieve en negatieve circulatie berekend wordt. Is de vorticititeit negatief, dan wordt Γ^- dus groter en indien de vorticititeit positief is, dan wordt Γ^+ groter. Omdat de vorticititeit per roosterpunt bekend is, zal de vorticititeit als functie van de plaats een grillig verloop tonen. Indien de circulatie in een bepaald gebied ongeveer nul is, zal door het grillig verloop toch de positieve en negatieve circulatie toenemen.

In figuur 7.2 (e) t/m (h) zijn de vorticititeitsvelden gegeven, bepaald met NSEVOL. De buitenste contour geeft 1% van de maximale (minimale) vorticititeit weer, daarbinnen respectievelijk 10, 30, 50, 70, en 90%. Vergelijken we de experimenten met deze simulatie, dan blijkt dat de posities van beide dipolen goed overeenkomen. Echter op $t = 90$ s is de y -positie van de experimenteel bepaalde dipool groter dan bij de gesimuleerde dipool. Dit komt doordat de strain in het experimentele geval niet meer lineair is, waardoor de snelheid van de achtergrondstroming in de y -richting groter is dan bij het gesimuleerde geval. Hierdoor heeft de experimenteel bepaalde dipool een hogere translatiesnelheid en uiteindelijk een grotere y -positie.

Een tweede verschil is het breder zijn van de experimenteel gevonden dipool in vergelijking met de gesimuleerde dipool. Dit komt waarschijnlijk door de drie-dimensionaliteit van het experiment die in de simulatie niet is ingebouwd: op tijdstip $t = 0$ s wordt een wolk vloeistof in het interface gespoten die door de buoyancy-kracht wordt ingedrukt tot een eindige dikte. De dikte van de dipool zal door deze kracht nog verder afnemen in de tijd, waardoor de horizontale afmeting van de dipool groter wordt.

Het breder zijn van de experimenteel bepaalde dipool ten opzichte van de gesimuleerde volgt ook uit figuur 7.3. In (e) t/m (h) en (i) t/m (l) zijn de vorticititeitsdoorsnedes door de centra van de dipool gegeven van respectievelijk de simulatie met NSEVOL en de experimenten. We verwachten dat de maximale vorticititeit van beide dipolen op ieder tijdstip hetzelfde is, dit hebben we in figuur 7.4 al laten zien. Dat de waargenomen maximale vorticititeit in figuur 7.3 altijd $\pm 10\%$ lager ligt dan bij NSEVOL komt, omdat de doorsnedes door de experimenteel bepaalde dipool niet precies door de centra gaan, omdat de centra niet precies op dezelfde y -hoogte liggen. Op $t = 10$ s komen beide vorticititeitsdoorsnedes niet overeen, omdat de experimenteel bepaalde dipool toen nog niet helemaal gevormd was.

Op $t = 90$ s lijken de vorm en de lengte van de gevormde staarten goed overeen te komen. Echter bij de experimentele resultaten geeft de buitenste contour 10% van de maximale vorticititeit weer, terwijl bij de simulatie de buitenste contour 1% van de maximale vorticititeit voorstelt. Bij de experimentele resultaten heeft het geen zin om de 1%-vorticititeits-contourlijn weer te geven in verband met de achtergrondruis die op dit tijdstip $\pm 8\%$ van de maximale vorticititeit is. Deze achtergrondruis wordt veroorzaakt door de onnauwkeurigheid in de bepaling van het snelheidsveld. Dit is te wijten aan bijvoorbeeld deeltjes die niet precies in het interface liggen of interne golven.



Figuur 7.6: Figuur (a) t/m (c) geven vorticitetsdoorsnedes weer van de experimenteel bepaalde dipool op $t=90$ s (figuur 7.2(g)). (d) t/m (f) zijn vorticitetsdoorsnedes van de simulatie met NSEVOL (figuur 7.2(h)). (a) en (d) op een hoogte $y=12$ cm, (b) en (e) op een hoogte $y=8$ cm en (c) en (f) op een hoogte $y=4$ cm.

Om de staarten beter met elkaar te kunnen vergelijken zijn in figuur 7.6 vortcitedoor-snedes getekend van zowel de numerieke als de experimentele resultaten op verschillende hoogtes y aangegeven in figuur 7.2(h). Op alle drie de hoogtes is de vortciteit van de linker helft van de experimenteel gevonden dipool groter dan de rechter helft. Dit wordt veroorzaakt door de asymmetrie van de dipool, die al op $t = 10$ s waarneembaar is.

We zien dat de maximale vortciteit in de staart hoger is in het experiment dan in de simulatie. Tevens blijkt de experimenteel gevonden staart breder te zijn dan in de simulaties. Dit laatste is het gevolg van het kleiner zijn van de gesimuleerde dipool. Daarnaast bevindt de dipool uit het experiment zich, zoals eerder opgemerkt, in het niet-lineaire deel van de strain. De achtergrondstroming is hier sterker, waardoor de snelheid aan de rand van de dipool groter is. Als gevolg hiervan zal meer vortciteit naar de staart geadvecteerd worden, waardoor de staart breder zal zijn en een grotere vortciteit zal hebben.

Voor de simulaties met behulp van de contour kinematica methode is de beginafstand tussen de puntwervels gelijk aan $2b = a = 3.7$ cm ((zie 2.16)). De tijdafhankelijke circulatie van de puntwervels wordt gegeven door (2.22), waarbij C en τ_{dif} bepaald zijn met een fit door de met NSEVOL berekende waarden (zie figuur 7.5). Om echter het puntwervelmodel te vergelijken met de experimenten en de simulaties met NSEVOL is deze circulatie vermenigvuldigd met een factor $\frac{1}{1.09}$ (zie (2.17)).

In figuur 7.2 (i) t/m (l) zijn de resultaten weergegeven van de simulaties met de contour kinematica methode. Een blob tracers wordt op de separatrix van een dipool zonder strain gelegd. Vervolgens wordt de blob in de tijd gevolgd in een positieve strain. Deze dipool heeft een grotere snelheid en een kleiner oppervlak dan de zojuist besproken dipolen. Dit komt doordat dit model geen rekening houdt met horizontale diffusie: in het experiment en in NSEVOL worden de centra van de dipool naar elkaar geduwd door de strain, echter de horizontale diffusie werkt deze beweging tegen, waardoor de centra op ongeveer gelijke afstand van elkaar blijven. Dit is waargenomen bij zowel het experiment als bij de simulaties met NSEVOL. Echter bij de contour kinematica methode naderen de puntwervels elkaar volgens (3.3). Hierdoor is de snelheid van deze dipool groter (zie (2.9)) en de straal kleiner (2.11) vergeleken met experimenten en met NSEVOL. Hetzelfde geldt voor de staart: de resultaten van de contour kinematica tonen een smallere staart dan bij NSEVOL door de afwezigheid van de horizontale diffusie-term.

Waarschijnlijk zou deze simulatie meer overeenkomsten met het experiment hebben, indien de afstand tussen de centra constant gehouden werd. Ondanks de slechte kwantitatieve resultaten zien we dat we met dit zeer simpele model van een dipool in een strain toch het ontstaan van een kop-staart structuur waarneembaar is.

Voor de simulaties met de contour dynamica methode is als beginvoorwaarde (op $t = 10$ s) een Lamb-dipool gedefinieerd met een straal en translatiesnelheid zoals gegeven in (7.2). Voor de afname van de vortciteit is (2.20) gebruikt, waarbij A en τ_{dif} bepaald zijn uit de fit door de experimenteel bepaalde waarden (zie figuur 7.4).

In figuur 7.3 (a) t/m (d) zijn de resultaten weergegeven, verkregen uit de simulaties met deze methode. Vergeleken met de experimentele resultaten en de simulaties met NSEVOL

zien we ook hier, evenals bij de contour kinematica methode, een kleinere dipool met hogere snelheid als gevolg van de afwezigheid van de horizontale diffusie term. Indien we de contour dynamica resultaten vergelijken met de contour kinematica resultaten, dan blijkt dat bij de laatstgenoemde simulatie de dipool een hogere snelheid heeft. Dit komt waarschijnlijk, omdat bij de contour dynamica simulatie vorticititeit naar de staart geadvecteerd wordt, terwijl dit bij de contour kinematica simulatie niet het geval is.

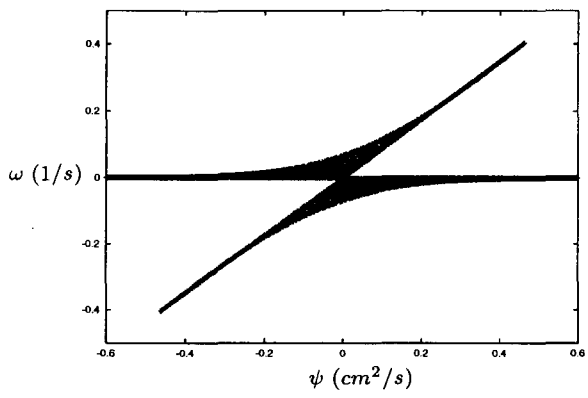
7.3 Scatter-plots

In figuur 7.7(a) is de scatter-plot weergegeven van de dipool, bepaald met de eindige elementen methode op $t = 90$ s (zie figuur 7.2(h)). Hierbij is gecorrigeerd voor de translatiesnelheid van de dipool in de y -richting. Ondanks dat de dipool vervormd is door de strain zien we toch een lineair verband met een helling gelijk aan 0.8722 ± 0.0009 cm^{-2} (bepaald uit figuur (c)). Deze waarde komt niet overeen met de experimenteel bepaalde waarde uit het verloop van de maximale vorticititeit in de tijd: $k^2 = 1.1 \pm 0.2$ cm^{-2} (zie figuur 2.20). Dit is logisch, omdat de dipool in de tijd groter geworden is en k dus kleiner (zie (2.13)), terwijl bij de experimenteel bepaalde waarde uitgegaan is van een gemiddelde constante k .

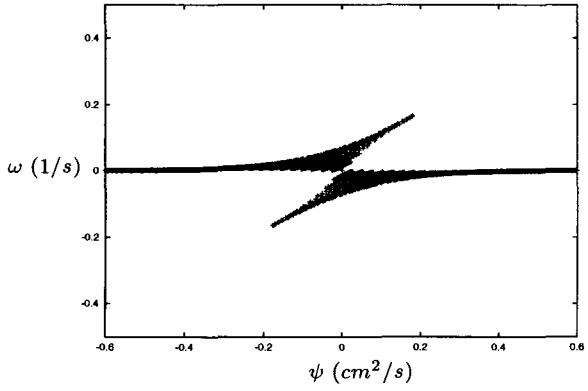
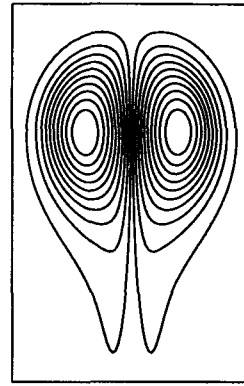
Dit lineair verband is afkomstig van het middelste gedeelte van de dipool, zoals blijkt in figuur (c). De meeste scatter is afkomstig van de kop en de staart van de dipool (figuur (b) en (d)), de dipool is hier dus niet stationair, maar vervormt nog steeds.

De vorm van de scatter-plots is te verklaren met behulp van figuur 7.8, waarin de vorticititeitslijnen van de dipool zijn weergegeven (doorgetrokken lijnen), evenals de Jacobiaan-contourlijnen (stippellijnen). De linkerhelft van de dipool heeft positieve vorticititeit, de rechterhelft negatieve. De Jacobiaan is links-boven en rechts-onder positief en links-onder en rechts-boven negatief. Aangezien de Jacobiaan in een stationaire, niet-visceuze vloeistof gelijk is aan $-\frac{\partial \omega}{\partial t}$, wordt de dipool dus aan de bovenkant ingedrukt door de strain, terwijl de onderkant wordt uitgerekt: de generatie van een kop-staart structuur. In het midden van de dipool is de waarde van de Jacobiaan klein, de dipool vervormt hier dus weinig, waardoor figuur 7.7(b) weinig scatter vertoont.

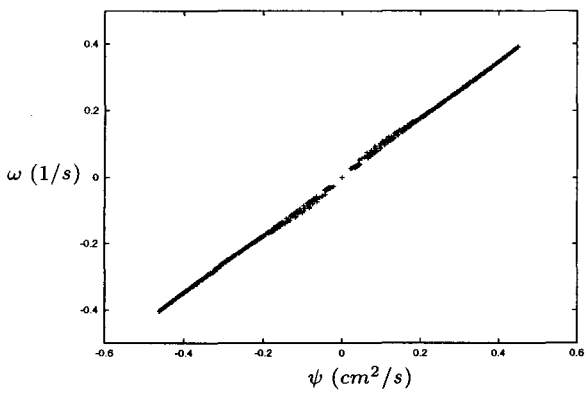
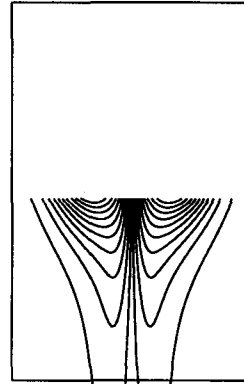
In figuur 7.9 zijn de scatter-plots van de experimenteel bepaalde dipool op tijdstip $t = 90$ s (zie figuur 7.2(d)) weergegeven. In figuur 7.9(a) is de hele dipool gebruikt voor de scatter-plot. In (b) en (c) is enkel het deel in respectievelijk het midden en in de staart van de dipool gebruikt. Evenals bij de dipool, bepaald met de eindige differentie methode, zorgt het midden van de dipool voor de lineariteit van de scatter-plot, terwijl de staart scatter veroorzaakt. Toch liggen de punten van de scatter-plot van het middelste deel van de dipool niet perfect op één lijn. Dit is als volgt te verklaren: om de scatter-plot te verkrijgen is gecorrigeerd voor de snelheid van de dipool. Voor de bepaling van deze snelheid is gekeken naar de verplaatsing van het centrum van de dipool. Doordat de dipool echter uitgerekt is en de achtergrondstroming op deze plaats grote verschillen in grootte laat zien, zou voor ieder deel van de dipool met een andere snelheid gecorrigeerd moeten worden.



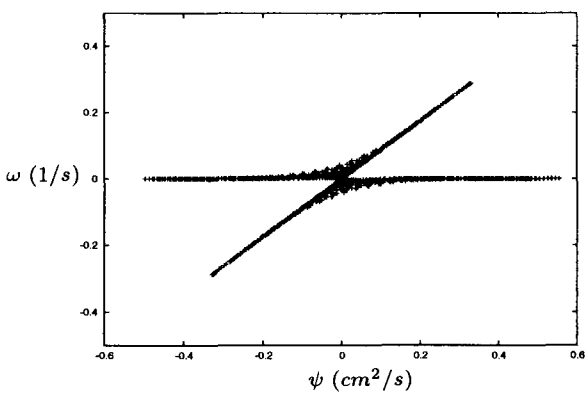
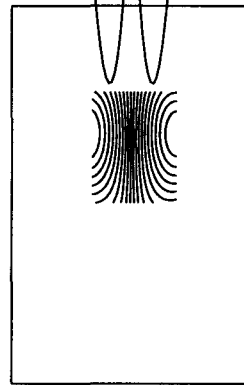
(a)



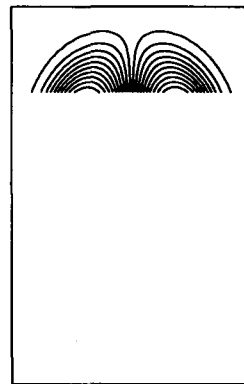
(b)



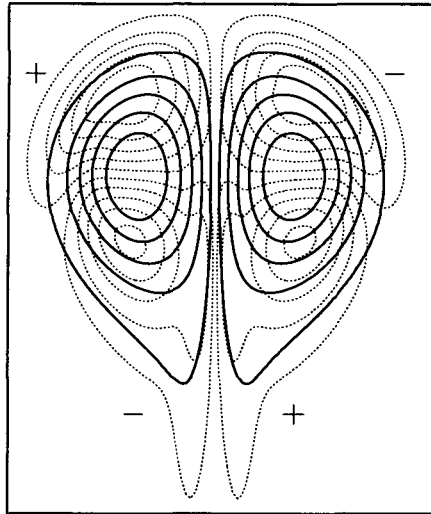
(c)



(d)

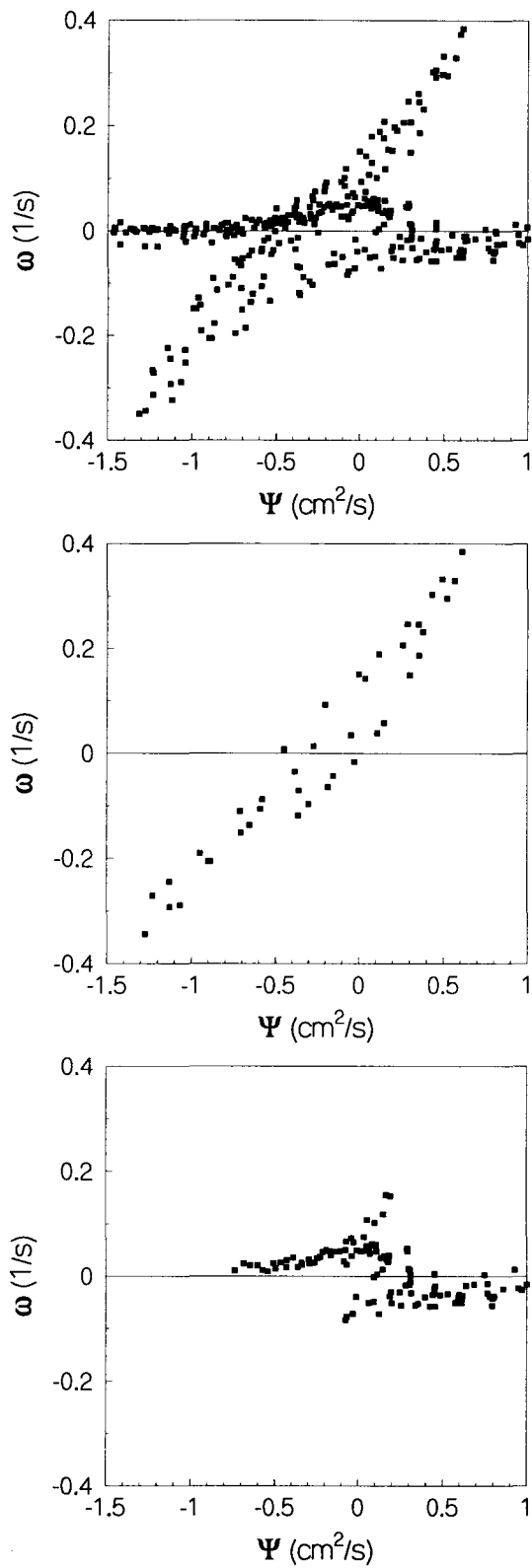


Figuur 7.7: De linker figuren tonen de scatter-plots van het gedeelte van de dipool dat in de rechterfiguren is weergegeven. De dipool is dezelfde als weergegeven in figuur 7.2(d). De correctiesnelheid is $(0,0.235)$ cm/s en $t = 90$ s.



Figuur 7.8: *Lijnen van constante vorticeit van de dipool uit figuur 7.2(h) (doorgetrokken lijnen) en de bijbehorende Jacobiaancontourlijnen (stippellijnen).*

Een ander gevolg hiervan is dat de met behulp van lineaire regressie bepaalde helling van de lijn uit figuur 7.9(b) niet overeenkomt met k^2 van de dipool bepaald met NSEVOL: $k^2 = 0.4 \pm 0.1 \text{ cm}^{-2}$.



Figuur 7.9: Scatter-plots van de experimenteel bepaalde dipool op $t = 90$ s (zie figuur 7.2(d)). In (a) de scatter-plot van de totale dipool; in (b) van het midden van de dipool en in (c) van de staart. De correctiesnelheid is $(0,0.32)$ cm/s.

Hoofdstuk 8

Resultaten van dipolen in een negatieve strain

In dit hoofdstuk zullen de experimentele resultaten worden getoond van een dipool in een negatieve strain, gevisualiseerd met kleurstof en met passieve deeltjes. Daarna worden de experimenten vergeleken met verschillende numerieke simulaties.

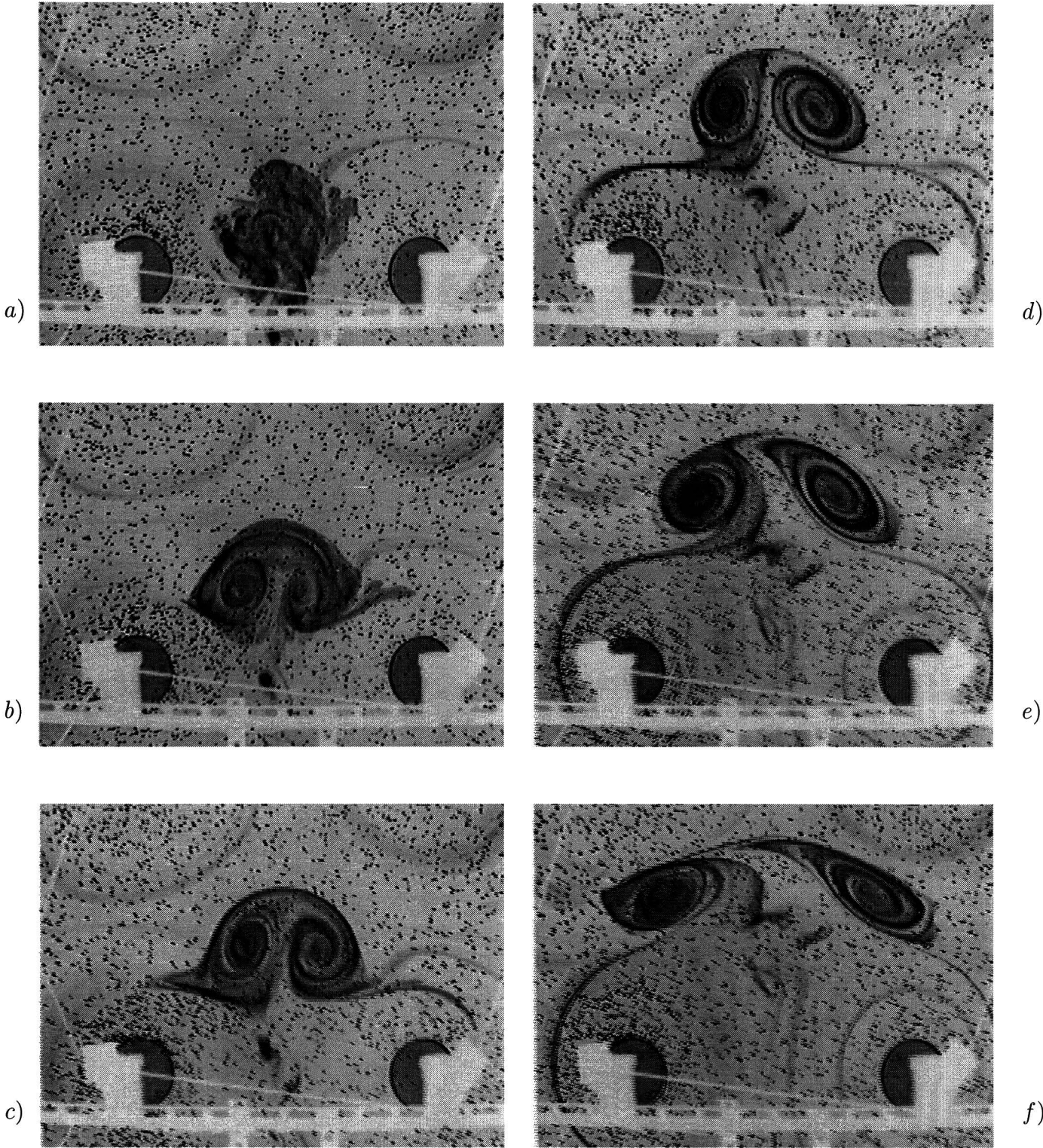
8.1 Kleurstofexperimenten in een negatieve strain

In figuur 8.1 zijn de resultaten weergegeven van een dipool in een negatieve strain gevisualiseerd met kleurstof. Op $t = 0$ s wordt een hoeveelheid vloeistof geïnjecteerd, waaruit na ongeveer 50 s een dipool is ontstaan (zie figuur 8.1(a) t/m (c)). Beide dipoolhelften worden door de strain gescheiden van elkaar, zoals te zien is op $t = 90$ s (d). Omdat de dipool niet symmetrisch is, wordt het rechter gedeelte sneller geadvecteerd door de strain. In figuur (e) en (f) is te zien dat de ontstane monopolen een elliptische vorm verkrijgen. Dit is in overeenstemming met het onderzoek van Beckers [Beckers 94], waarin monopolen in een strain onderzocht werden.

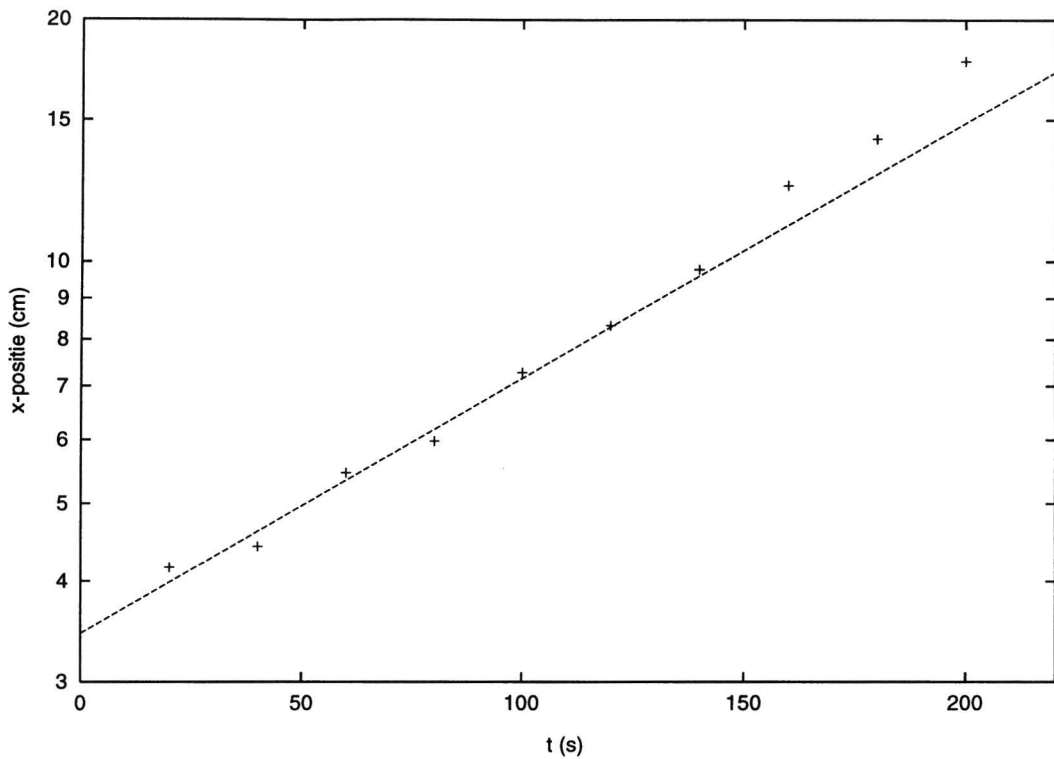
8.2 Deeltjesexperimenten in een negatieve strain

Naast kleurstof zijn ook passieve deeltjes gebruikt om het gedrag van dipolen in een negatieve strain bestuderen. De experimenteel bepaalde vorticitteitsvelden op tijdstippen $t = 20, 80, 140$ en 200 s zijn weergegeven in figuur 8.3(a) t/m (d) (voor meerdere tijdstippen zie appendix C). Evenals bij de kleurstofexperimenten heeft zich na een tijdje een dipool ontwikkeld, die langzaam uit elkaar wordt getrokken door de negatieve strain, zodat twee aparte monopolen gevormd worden.

In figuur 8.2 is de gemiddelde absolute x -positie van de centra van de dipool uitgezet tegen de tijd. Tevens is in deze figuur de bijbehorende fit getekend, bepaald met behulp van niet-lineaire regressie gebaseerd op (3.3). Voor de regressie zijn enkel de meetpunten tot 120 seconden meegenomen, daarna bevinden de centra van de dipool zich namelijk



Figuur 8.1: *Kleurstofexperimenten van een dipool in een negatieve strain. (a) $t = 10$ s (b) $t = 30$ s (c) $t = 50$ s (d) $t = 90$ s (e) $t = 130$ s (f) $t = 170$ s*



Figuur 8.2: De gemiddelde absolute waarde van de x -positie van de centra van de dipool logaritmisch uitgezet tegen de tijd (+) met de bijbehorende fit.

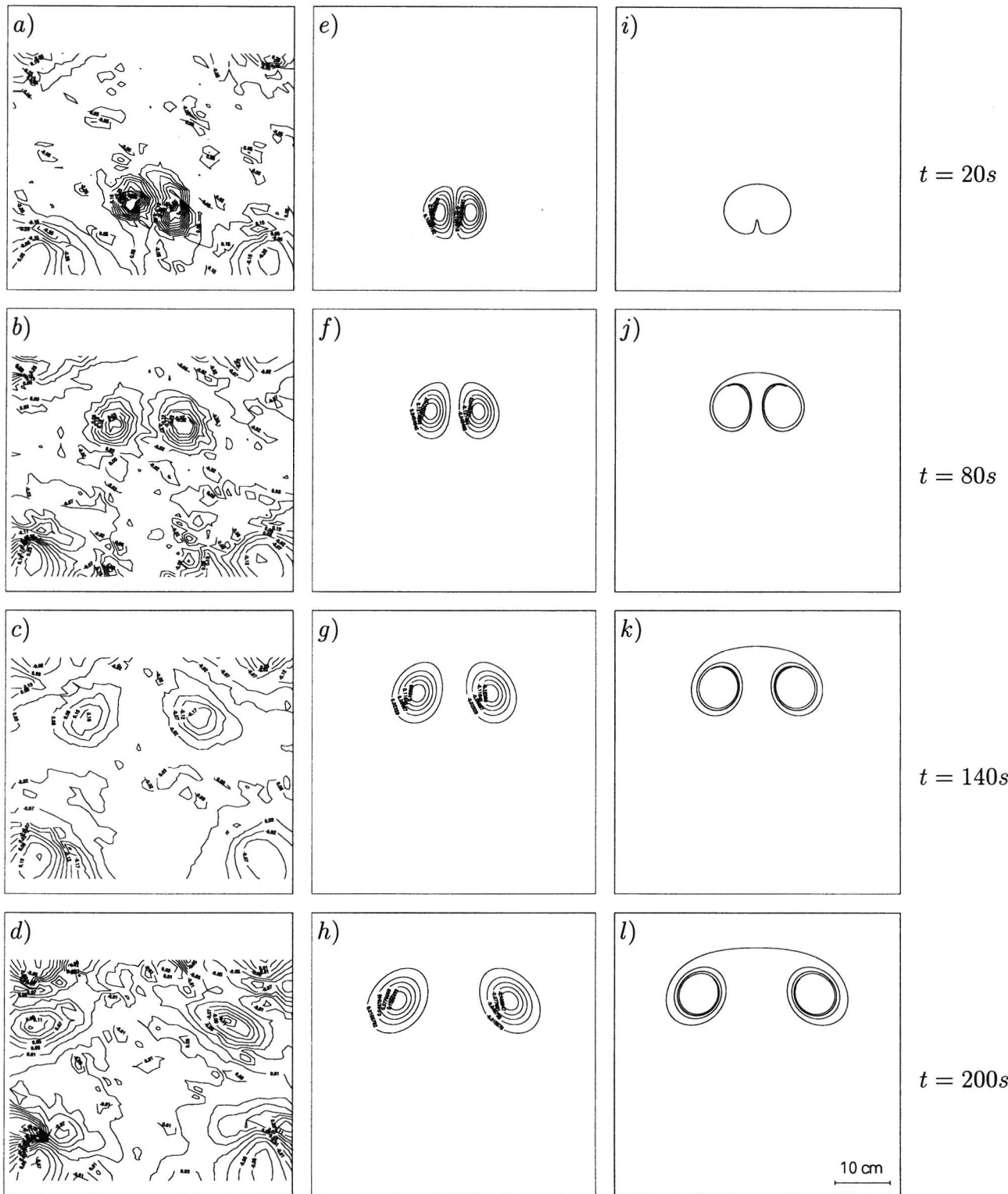
niet meer in het lineaire deel van de strain, waardoor de gevormde monopolen sneller uit elkaar bewegen dan verwacht. Uit het gevonden verband volgt de strain-rate constante: $e = 0.0073 \pm 0.0005 \text{ s}^{-1}$. Deze waarde komt beter overeen met de eerder gevonden waarde van de strain in de y -richting dan in de x -richting (zie hoofdstuk 6). Voor de simulaties werd $e = 0.007 \text{ s}^{-1}$ gebruikt.

In figuur 8.5 is de maximale vortciteit van de dipool uitgezet tegen de tijd. De maximale vortciteit is bepaald met (7.1). Ondanks de aanwezigheid van de strain neemt de vortciteit af volgens (2.20). Met behulp van niet-lineaire regressie zijn τ_{dif} en A bepaald, waardoor op dezelfde manier als in hoofdstuk 7 k , a en U_0 berekend zijn:

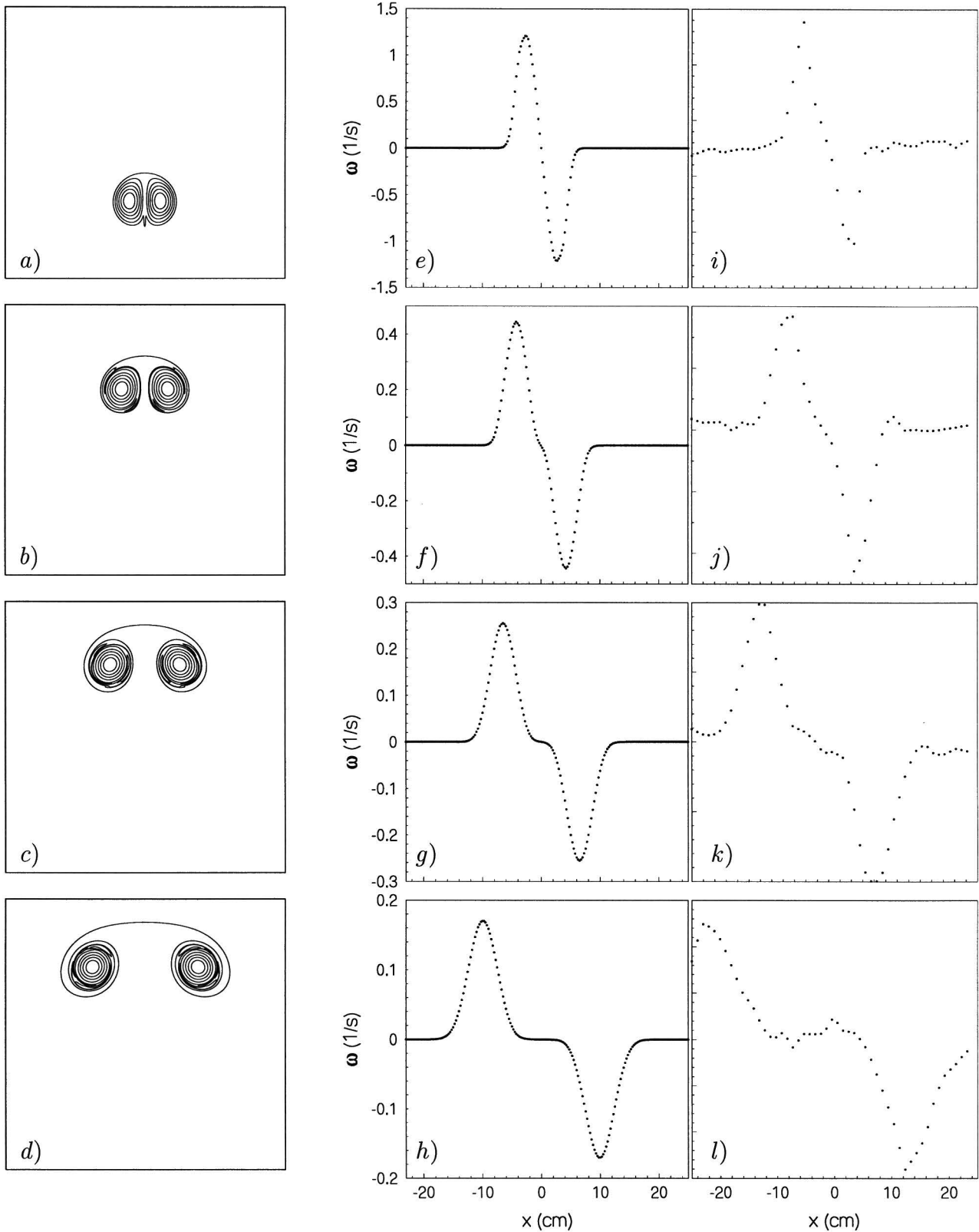
$$\begin{aligned}
 \tau_{dif} &= 179 \pm 13 \text{ s} \\
 A &= 10.3 \pm 0.4 \text{ s}^{-\frac{1}{2}} \\
 k &= 1.03 \pm 0.07 \text{ cm}^{-1} \\
 a &= 5.3 \pm 0.4 \text{ cm} \\
 U_0 &= 0.88 \pm 0.03 \text{ cm/s}
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Deze waarden zijn gebruikt voor de verschillende simulaties. Alle numerieke experimenten zijn begonnen op $t = 10 \text{ s}$, omdat tijdens de experimenten op dat tijdstip pas een dipool gevormd is (U_0 is dus de snelheid van de dipool op $t = 10 \text{ s}$).

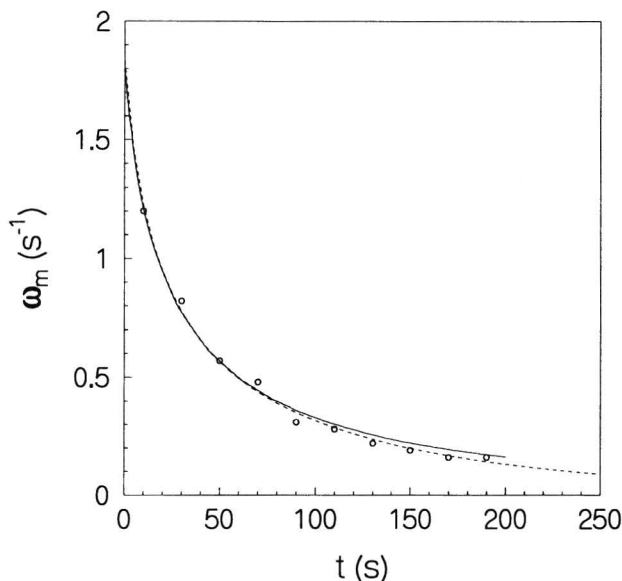
Tevens is in figuur 8.5 de maximale vortciteit, zoals berekend met de simulatie volgens de eindige differentie methode, uitgezet tegen de tijd. Tot $t = 80 \text{ s}$ komen de experimentele



Figuur 8.3: Resultaten van een dipool in een negatieve strain. (a) t/m (d) tonen de experimenteel gevonden vorticeitsvelden. In (e) t/m (h) zijn de contourlijnen van 10, 30, 50, 70 en 90% van de maximale vorticeit weergegeven zoals berekend met NSEVOL. In (i) t/m (l) worden de resultaten van de contour kinematica simulaties getoond.



Figuur 8.4: In (a) t/m (d) zijn de resultaten van de simulatie met de contour dynamica weergegeven. In (e) t/m (h) is de vorticeit uitgezet tegen de x -as, genomen van een doorsnede door de centra van de dipool, gesimuleerd met NSEVOL. De experimentele waarden zijn uitgezet in figuur (i) t/m (l).



Figuur 8.5: De maximale vorticeit als functie van de tijd (bepaald met (7.1)): experimenteel bepaald (\circ), 'gefit' door de experimentele waarden (stippellijn) en numeriek berekend met NSEVOL (doorgetrokken lijn).

waarden goed overeen met de numerieke waarden. Daarna liggen de numerieke waarden hoger dan de experimentele. Dit komt waarschijnlijk doordat in het experiment de gevormde monopolen zich vanaf $t = 80$ s niet meer in het lineaire gedeelte van de strain bevinden. Hierdoor zal de achtergrond stroming groter zijn dan verwacht, waardoor meer vorticeit aan de rand van de dipool geadvecteed wordt. Dit heeft tot gevolg dat de maximale vorticeit in het experiment lager is dan bij de simulaties.

Voor de simulatie volgens de contour kinematica methode, moet het verloop van de circulatie in de tijd vooraf bekend zijn. Deze waarden van de circulatie worden gelijk genomen aan de waarden zoals berekend met NSEVOL, omdat de waarden die volgen uit de experimenten onbetrouwbaar zijn (zie hoofdstuk 7). Uit de simulatie met behulp van NSEVOL volgde een verband als in (2.22) met $\tau_{dif} = 2083$ s en $A = 102.2$ s^{-1/2}.

Voor de contour dynamica simulaties is het nodig het verloop van de vorticeit in de tijd te weten. Hiervoor is (2.20) gebruikt met de parameters uit (8.1).

In figuur 8.3 (e) t/m (h) zijn de resultaten weergegeven, bepaald met de eindige differentie methode en in (i) t/m (l) zoals bepaald met de contour kinematica methode. Bovendien staan in figuur 8.4 (a) t/m (d) de resultaten, bepaald met de contour dynamica methode. Al deze simulaties komen onderling goed met elkaar overeen: de x - en y -posities van de twee dipoolhelften komen goed overeen, evenals de hoeken die de lengte-as van de gevormde ellipsen op $t = 200$ s met de horizontale as maken.

De afmetingen van de gevormde monopolen zoals volgt uit de simulatie met NSEVOL, zijn echter groter dan bij de contour kinematica en bij de contour dynamica methode. Dit is net als bij de positieve strain het gevolg van de horizontale diffusie term die wel bij NSEVOL

Vergelijken we de experimentele resultaten met de simulaties, dan zien we dat de y -posities van de experimenteel gevonden dipool vanaf $t = 80$ s lager liggen dan bij de simulaties. Dit komt doordat de dipool dan gedeeltelijk buiten het gebied van de lineaire strain ligt. Door dezelfde reden zien we op $t = 200$ s dat de twee dipoolhelften verder uit elkaar liggen dan bij de simulaties en dat de hoek van de gevormde ellips met de x -as veel kleiner is.

In figuur 8.4 is de vorticitetsverdeling weergegeven over een lijn door de twee centra van de dipool, bepaald met behulp van NSEVOL ((e) t/m (h)) en uit het experiment ((i) t/m (l)). Ook hieruit volgt dat bij de experimenteel gevonden dipool de centra na $t = 140$ s seconden sneller uit elkaar bewegen. De maximale vorticitet en de afmetingen van de wervels komen goed overeen.

8.3 Scatter-plots

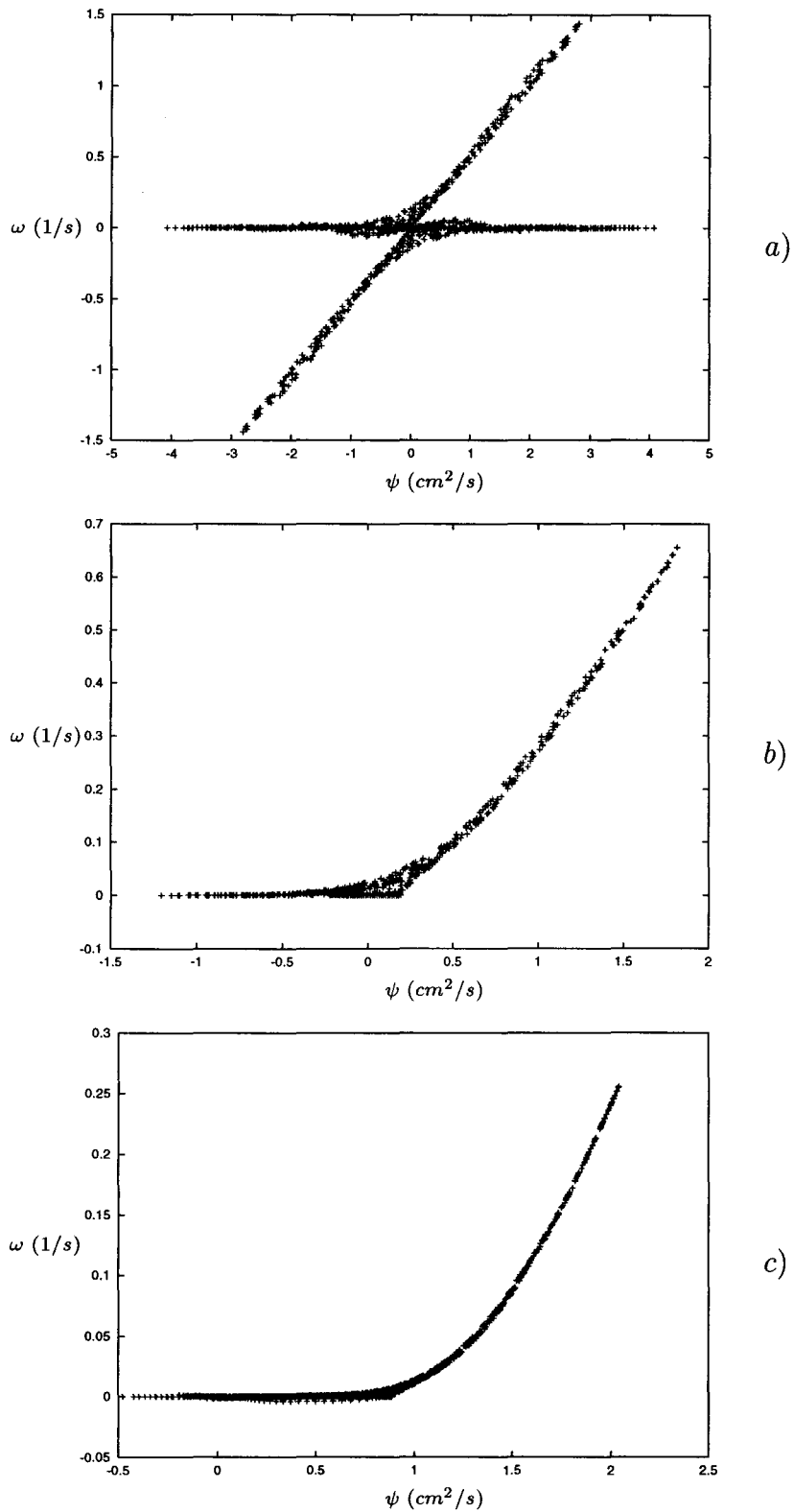
In figuur 8.6 zijn de scatter-plots gegeven van de dipool, bepaald met NSEVOL op verschillende tijdstippen. In (a) is de totale dipool weergegeven, terwijl in (b) en (c) enkel de dipoolhelft met positieve vorticitet is weergegeven. Dit is gedaan, omdat voor de scatter-plots naast de correctie voor de snelheid van de monopool in de y -richting, in figuur (b) en (c) ook gecorrigeerd moet worden voor de snelheid van de monopool in de x -richting. Omdat figuur (c) weinig scatter vertoont, kan geconcludeerd worden dat de monopool nagenoeg stationair is in een meebewegend assenstelsel.

Een monopool die zich in een strain bevindt, zal aan twee kanten worden ingedrukt en aan de andere twee uiteengetrokken worden. Dit is goed te zien in figuur 8.7. Hierin zijn de vorticitetslijnen van de monopool getekend, met daar doorheen de Jacobiaancontourlijnen. De monopool heeft positieve vorticitet. De Jacobiaan in het linker- en rechtergedeelte is negatief, boven en onder is deze positief. De monopool wordt dus horizontaal uit elkaar getrokken.

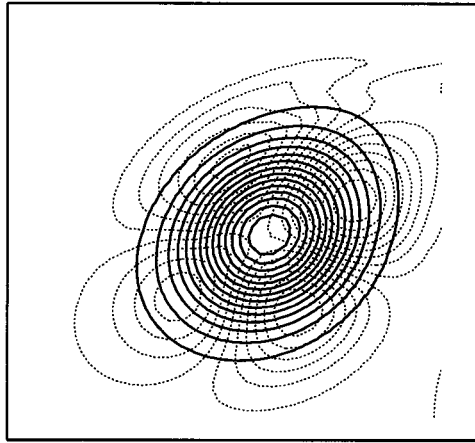
In figuur 8.8(a) is de scatter-plot weergegeven van de ontstane monopool uit de experimenten op tijdstip $t = 140$ s. Dat in deze figuur veel scatter te zien is, heeft dezelfde reden als bij de dipool in een positieve strain: voor de bepaling van de correctiesnelheid is gekeken naar de verplaatsing van het centrum van de monopool. Doordat de dipool echter een elliptisch vorm heeft en de achtergrond stroming op de plaats waar de monopool zich bevindt grote verschillen laat zien, zou voor ieder deel van de dipool met een andere snelheid gecorrigeerd moeten worden.

De scatter-plot uit figuur 8.8(b) toont overeenkomsten met de scatter-plots van een Lamb-monopool. De vorticitet en snelheid van deze monopool als functie van de straal zijn als volgt gedefinieerd:

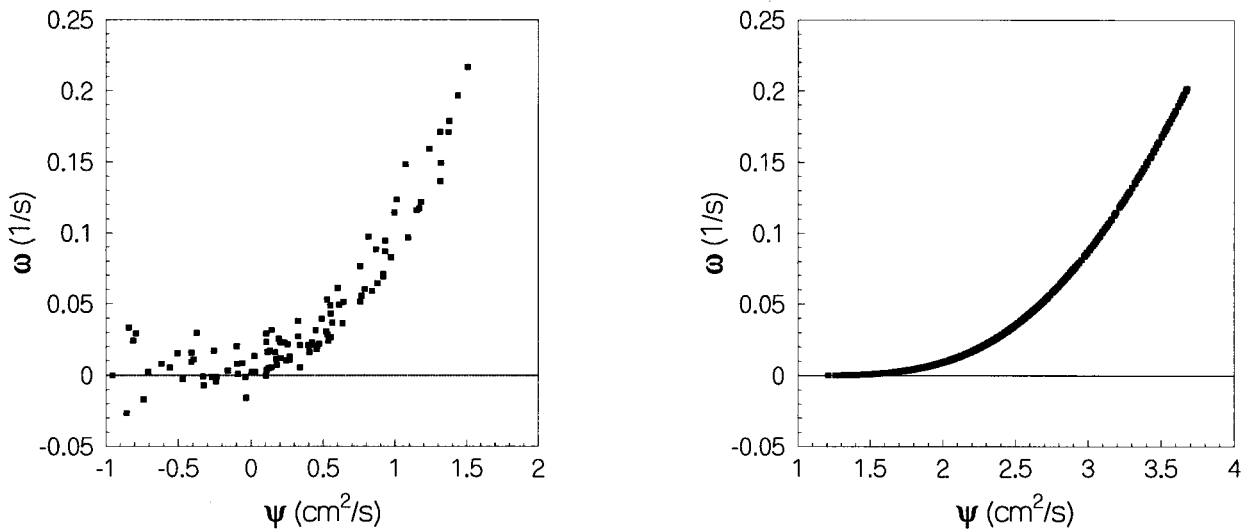
$$\omega(r) = \frac{\gamma}{\pi R^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \quad (8.2)$$



Figuur 8.6: Scatter-plots van de dipool, bepaald met NSEVOL. (a) $t = 15$ s, de correctiesnelheid is $(0,0.8)$ cm/s. (b) $t = 50$ s, de correctiesnelheid is $(-0.025,0.29)$ cm/s. (c) $t = 140$ s, de correctiesnelheid is $(-0.047,0.009)$ cm/s.



Figuur 8.7: Vorticiteitscontouren van de monopool met bijbehorende Jacobiaancontourlijnen op tijdstip $t = 170$ s in een domein van 20×20 cm. De oorsprong bevindt zich rechtsonder in de hoek. De correctiesnelheid is $(-0.025, -0.075)$ cm/s.



Figuur 8.8: (a) Scatter-plot van de linker dipoolhelft weergegeven in figuur 8.3(c). (b) Scatter-plot van een Lamb-monopool met $\gamma = 12.3$ cm²/s en $R = 4.4$ cm.

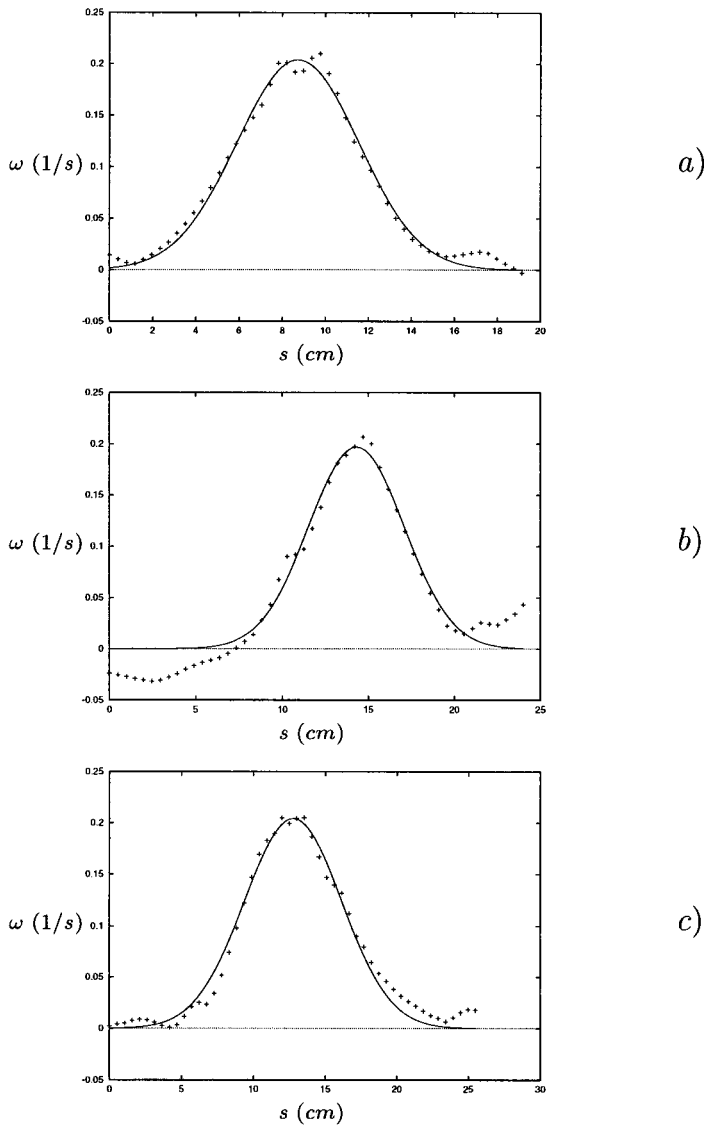
Tabel 8.1: *In deze tabel staan de lengteschaal R en de circulatie γ , zoals bepaald met niet-lineaire regressie gebaseerd op 8.2 door de punten van de verschillende vorticitheidsdoorsnedes uit figuur 8.9.*

	γ (cm^2/s)	R (cm)
x -doorsnede	10.3 ± 0.6	4.0 ± 0.2
y -doorsnede	9.4 ± 0.6	3.9 ± 0.2
xy -doorsnede	14.8 ± 0.9	4.8 ± 0.2

$$v_{\theta}(r) = \frac{\gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right) \quad (8.3)$$

In deze formules is R gedefinieerd als de lengteschaal van de monopool. Om de overeenkomsten met deze monopool te onderzoeken zijn vorticitheidsdoorsnedes gemaakt door de experimentele monopool, zowel in de x en y richting als diagonaal. Met behulp van niet-lineaire regressie gebaseerd op (8.2) zijn deze vorticitheidsdoorsnedes gefit. De resultaten zijn weergegeven in figuur 8.9 en tabel 8.1.

Met behulp van de gemiddelde waarden uit tabel 8.1 voor de lengteschaal en de circulatie, is met NSEVOL een scatter-plot gemaakt van een Lamb-monopool (zie figuur 8.8(b)). Uit het feit dat beide scatter-plots goed overeenkomen, kan geconcludeerd worden dat indien een Lamb-dipool door een strain uit elkaar getrokken wordt, beide dipoolhelften overgaan in twee aparte Lamb-monopolen. Dit blijkt ook als we de scatter-plot van de simulatie met NSEVOL (figuur 8.6(c)) vergelijken met de scatterplots uit figuur 8.8. Dat de vorticititeit in figuur 8.6(c) lager is dan in de scatter-plots uit figuur 8.8 volgde al uit figuur 8.5.



Figuur 8.9: Vorticiteitsdoorsneden door de experimenteel gevonden (linker) monopool uit figuur 8.3(c) in de x -richting (a), de y -richting (b) en diagonaal (van links-onder naar rechts-boven) (c).

Hoofdstuk 9

Conclusies

In dit verslag werd de studie naar dipolaire wervels in een strain-stroming beschreven. Hiervoor zijn experimenten gedaan in een stapsgewijze stratificatie, waarbij de dipolen gegenereerd werden door vloeistof te injecteren in het interface. De achtergrondstroming is verkregen met behulp van vier ronde schijfjes in een vierkant ter hoogte van het interface.

Indien de centra van de dipool door de strain naar elkaar geduwd worden (positieve strain), dan verkrijgt de dipool een kop-staart structuur. Dit was in het verleden met numerieke studies al aangetoond, maar is nu dus ook experimenteel waargenomen. De dipool is in deze experimenten gevisualiseerd met zowel kleurstof als met passieve deeltjes.

Indien de centra van de dipool door de strain uit elkaar getrokken worden (negatieve strain), dan vormen zich twee aparte monopolen die goed beschreven worden door een Lamb-monopool. Ook deze experimenten zijn zowel met kleurstof als met deeltjes uitgevoerd.

De experimentele resultaten zijn daarna vergeleken met verschillende numerieke simulaties. De gebruikte programma's zijn gebaseerd op de eindige differentie methode (NSEVOL), de contour dynamica methode en de contour kinematica methode. In al deze modellen is rekening gehouden met de afname van vorticeit van dipolen door verticale diffusie. Echter enkel in het eindige differentie programma is tevens een horizontale diffusie term ingebouwd, waardoor deze simulaties het beste overeenkomen met de experimentele resultaten.

Verschillen tussen de experimenten en de eindige differentie simulaties werden vooral veroorzaakt door de niet-lineairiteit zijn van de strain in de buurt van de schijfjes. In de contour kinematica simulaties werd de dipool voorgesteld door twee puntwervels. Deze simulaties toonden grote afwijkingen in vergelijking met de experimenten en de eindige differentie simulaties in het geval van een positieve strain. Toch werd met dit zeer simpele model de vorming van een kop-staart structuur waargenomen.

Bibliografie

- [Abramowitz 65] M. Abramowitz & I. Stegun (1954)
Handbook of mathematical functions.
Dover, New York .
- [Beckers 94] M. Beckers (1994)
Monopolar vortices in a strain flow.
R-1296-A, Technische Universiteit Eindhoven.
- [Dalziel 92] S. Dalziel (1992)
Digimage Manual.
Cambridge Environmental Research Consultants Ltd.
- [Dritschel 89] D.G. Dritschel (1989)
Strain-induced vortex stripping.
Mathematical aspects of vortex dynamics (SAIM 1989).
R.E. Caffisch ed., pp. 107-119.
- [Flór 94] J.B. Flór & G.J.F. van Heijst (1994)
An Experimental study of dipolar vortex structures in a stratified fluid.
J. Fluid Mech., vol. 279, pp. 101-133.
- [Flór 95] J.B. Flór, G.J.F. van Heijst & R. Delfos (1995)
Decay of dipolar vortex structures in a stratified fluid.
Phys. Fluids, vol. 7, pp. 374-383.
- [Heijst, van 92] G.J.F. van Heijst (1992)
Voortgezette stromingsleer 1.
Syllabus, Technische Universiteit Eindhoven.
- [Kida 81] S. Kida (1981)
Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow.
J. Phys. Soc. Jpn., vol. 50, pp. 3517-3520.
- [Kida 91] S. Kida, M. Takaoka & F. Hussain (1991)
Formation of head-tail structure in a two-dimensional uniform straining flow.
Phys. Fluids, vol. A3, pp. 2688-2697.

- [Kundu 90] P.K. Kundu (1990)
Fluid mechanics.
Academic Press Inc., San Diego.
- [Linssen 95] A. Linssen (1995)
Monopolaire wervels in een rotatievrije shearstroming.
R-1359-A, Technische Universiteit Eindhoven.
- [Melesko 94] V.V. Meleshko & G.J.F. van Heijst (1994)
Interacting two-dimensional vortex structures: point vortices, contour kinematics and stirring properties.
Chaos, Solitons & Fractals, vol. 4, pp. 977-1010.
- [Paihua 78] L. Paihua Montes (1978)
Methodes numériques pour le calcul de fonctions-spline á une ou plusieurs variables.
Thèse de 3^e cycle, Université de Grenoble, France.
- [Moore 71] D.W. Moore & P.G. Saffman (1971)
Structure of a line vortex in an imposed strain
In *Aircraft Wake Turbulence and its Detection.*
(ed. J.H. Olsen, A. Goldburg, M. Rogers), p.339.
Plenum Press, New York.
- [Oijen 94] J.A. van Oijen (1994)
Numerieke simulaties van wervels in achtergrondstroming.
R-1295-s, Technische Universiteit Eindhoven.
- [Saffman 79] P.G. Saffman & G.R. Baker (1979)
Vortex interactions.
Ann. Rev. Fluid Mech., vol 11, pp. 95-122.
- [Spanier 87] J. Spanier & K.B. Oldham (1987)
An atlas of functions.
Hemisphere publishing corporation.
- [Thomson 1867] W. Thomson (1867)
On vortex atoms.
Phil. Mag., ser. 4, pp. 34.
- [Verzicco 95] R. Verzicco, J.B. Flór & P. Orlandi (1995)
Numerical and experimental study of the interaction between a vortex dipole and a circular cylinder.
Exp. Fluids, vol 18, pp. 153-163.

[Physics 59]

Handbook of Chemistry and Physics, 41st edition (1959)
Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio.

Bijlage A

Bepaling van het aantal stuwpunten

Indien een dipool zich in een strain bevindt, dan heeft de totale stroomfunctie drie stuwpunten. Het aantal stuwpunten op de x -as kan bepaald worden door het snelheidsveld in de x -richting (3.2) gelijk aan nul te stellen. In een met de dipool meebewegend assenstelsel, wordt het snelheidsveld in de x -richting gegeven door:

$$u = \frac{\gamma}{\pi} \frac{b}{x^2 + b^2} - \frac{\gamma}{4\pi b} + ex = 0. \quad (\text{A.1})$$

Dit is een derde-graads vergelijking in x :

$$x^3 - \frac{\gamma}{4\pi eb} x^2 + b^2 x + \frac{\gamma b}{2\pi e} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Een derde-graads vergelijking van de vorm:

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (\text{A.3})$$

heeft drie oplossingen, waarvan er tenminste twee aan elkaar gelijk zijn, indien geldt [Abramowitz 65]:

$$\left(\frac{a_1}{3} - \frac{a_2^2}{9}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}(a_1 a_2 - 3a_0) - \frac{a_2^3}{27}\right)^2 = 0. \quad (\text{A.4})$$

Indien het linker-lid van deze vergelijking positief is, heeft (A.3) één reële oplossing en als deze term negatief is zijn er drie oplossingen. Na substitutie van $\tilde{B} = B/\pi = \gamma/\pi eb^2$ in (A.4) volgt:

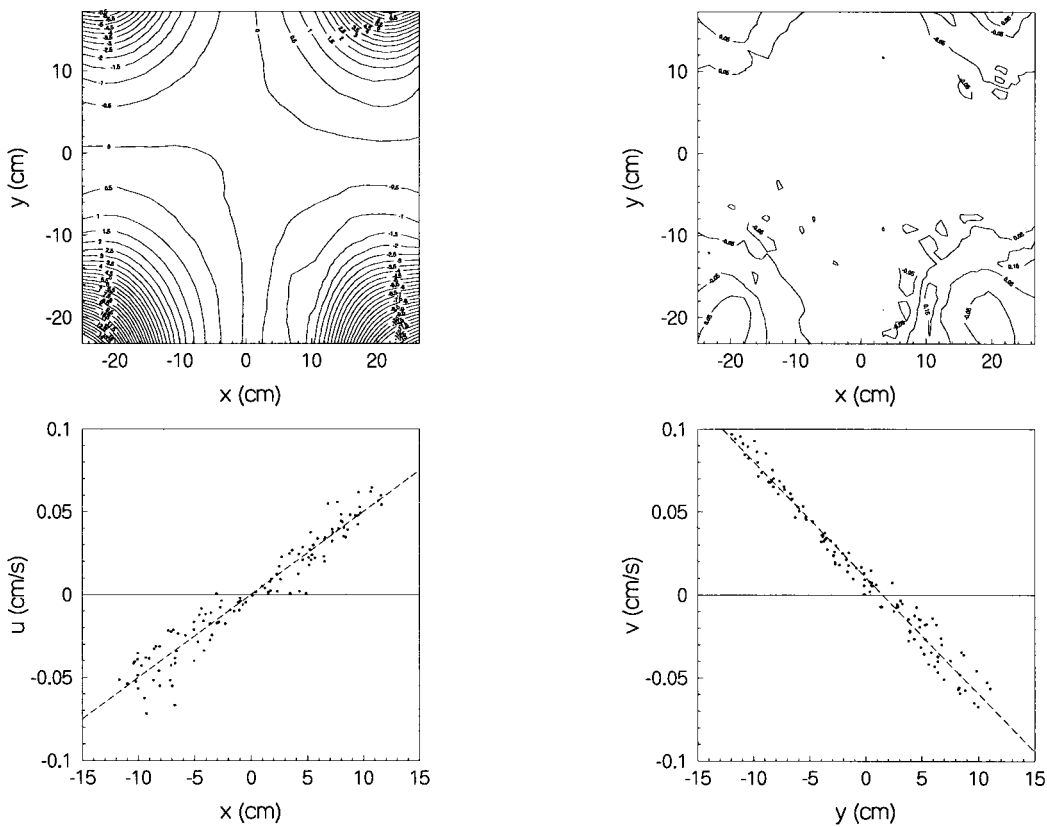
$$\tilde{B}^4 - \frac{1184}{3}\tilde{B}^2 - \frac{256}{3} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Na substitutie van $\tilde{B}^2 = A$ gaat deze vergelijking over in een eenvoudige tweede-graads vergelijking. De oplossing hiervan luidt

$$B = \pi \sqrt{\frac{592}{3} + \frac{32}{3}\sqrt{343}} \approx 62.43. \quad (\text{A.6})$$

Bijlage B

Bepaling strain sterkte

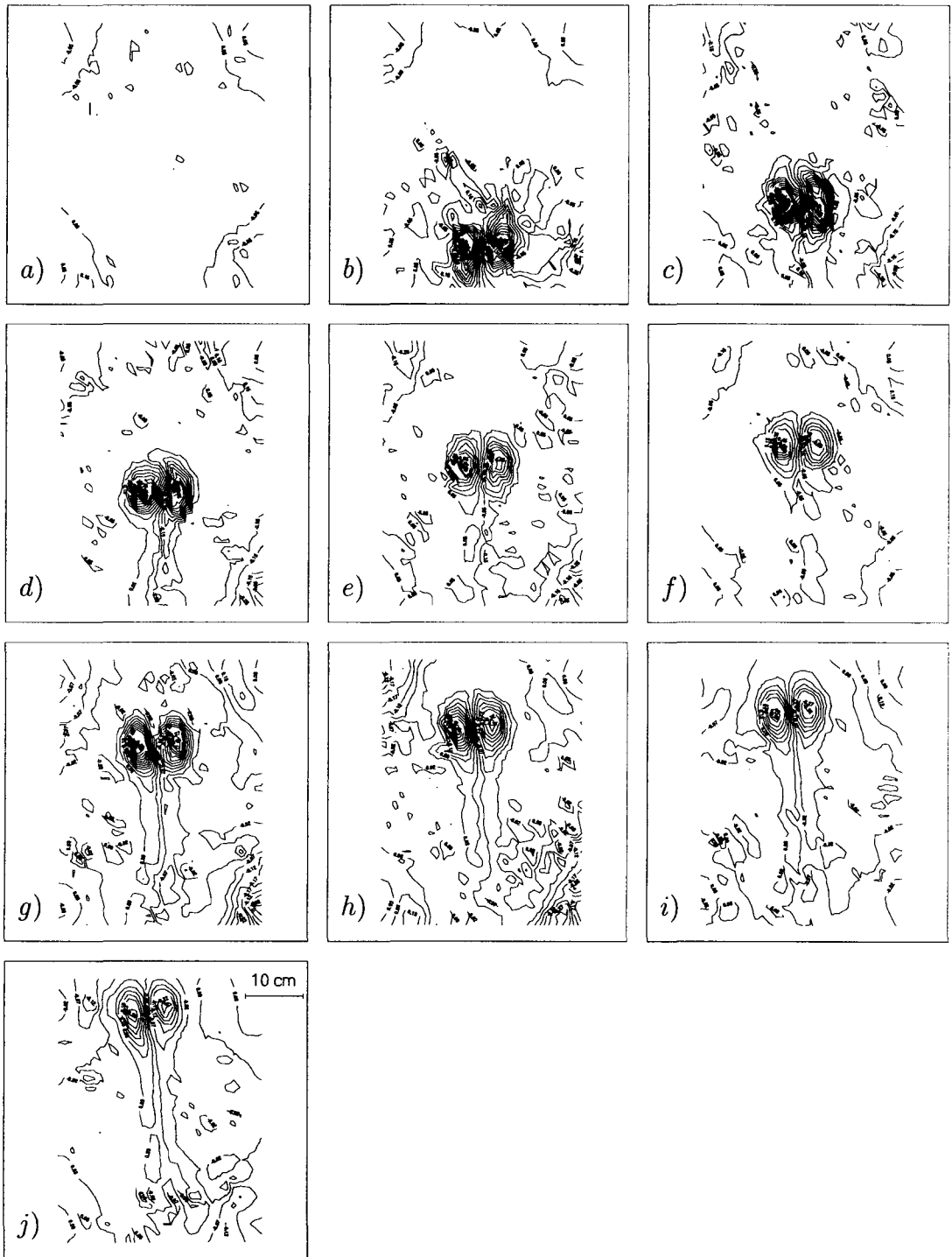


Figuur B.1: (a) De stroomfunctie van de strain gebruikt bij deeltjesexperimenten met dipolen in een negatieve strain (b) met bijbehorend vorticitteitsveld. In (c) en (d) zijn de snelheden u en v uitgezet tegen de positie x en y , binnen een circelvormig domein met een straal van 12 cm. Voor (c) geldt $e = 0.0050 \pm 0.0001 \text{ s}^{-1}$ en voor (d) $e = 0.0068 \pm 0.0001 \text{ s}^{-1}$. $N = 4.9 \text{ rad s}^{-1}$.

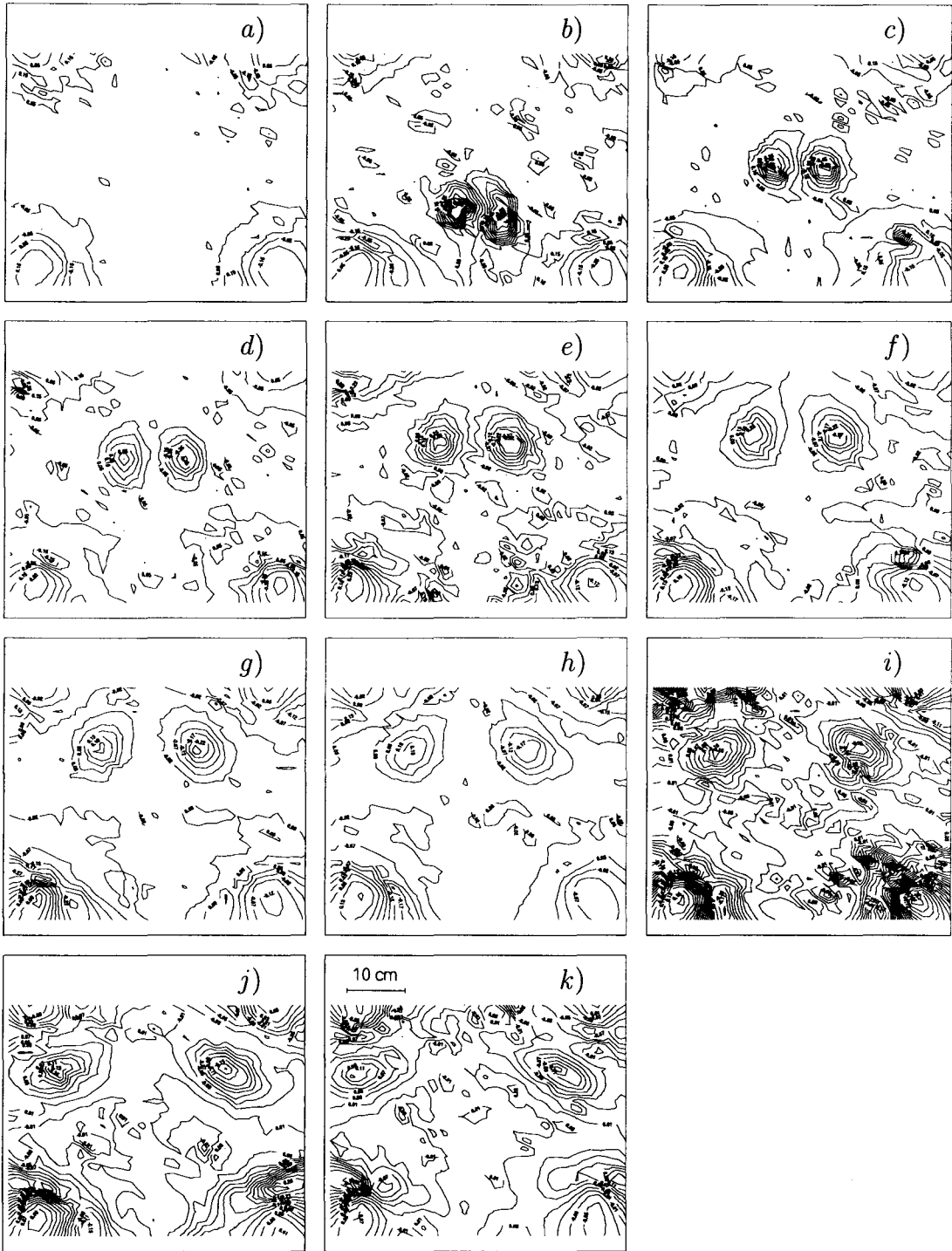
Bijlage C

Experimentele resultaten

In figuur 7.2 (a) t/m (d) en 8.3 (a) t/m (d) zijn voor een aantal tijdstippen de vorticeitscontouren van experimentele dipolen in een strainstroming weergegeven. In deze appendix staan in figuur C.1 en C.2 de resultaten op meerdere tijdstippen van de dipool in respectievelijk de positieve en de negatieve strain.



Figuur C.1: Experimentele resultaten van een dipool in een positieve strain-stroming. Het tijdsinterval tussen ieder plaatje is 10 s, (a) $t=0$ s. $N = 4.9 \text{ rad s}^{-1}$.



Figuur C.2: Experimentele resultaten van een dipool in een negatieve strain-stroming. a) $t = 0 \text{ s}$, het tijdsinterval tussen ieder plaatje is 20 s . $N = 4.9 \text{ rad s}^{-1}$.