

MASTER

Generalisaties van tijddiscrete Laguerre functies

Doveren, A.L.R.

Award date:
1994

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

7239

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK

VAKGROEP Signaalverwerking



**Generalisaties van tijddiscrete
Laguerre functies**

door

A.L.R. Doveren

ESP-11-94

**Verslag van een afstudeeronderzoek,
verricht in de vakgroep ESP, onder
leiding van dr.ir. A.C. den Brinker, in
de periode augustus 1992 - oktober 1994.**

Eindhoven, 20 oktober 1994.

**De faculteit Elektrotechniek van de Technische Universiteit Eindhoven aanvaardt
geen aansprakelijkheid voor de inhoud van stage- en afstudeerverslagen.**

Samenvatting

Tapped-delay-line adaptieve filters worden veelvuldig toegepast in de digitale signaalbewerking. Er zijn situaties waarvoor een tapped-delay-line filter niet goed functioneert. Structuren met een infinite-impulse-response kunnen dan de oplossing zijn. Een bekende generalisatie van de tapped-delay-line filter is het tijddiscrete Laguerre filter. In dit verslag worden generalisaties van tijddiscrete Laguerre functies beschouwd.

Heeft een lineair overdrachtssysteem een sterk laagfrequent karakter, dan is een benaderende realisatie daarvan door middel van een tapped-delay-line of een Laguerre filter niet altijd mogelijk met een lage dimensie van het te benaderen systeem. In analogie van de bekende generalisaties van continue Laguerre functies zoeken we naar generalisaties van discrete Laguerre functies. Hierdoor moet het mogelijk zijn benaderende realisaties van lineaire laagfrequente overdrachtssystemen te maken met een relatief kleine dimensie. Dit is dan bijvoorbeeld bruikbaar in adaptieve filters om de complexiteit van het adaptieve regelalgoritme klein te houden. Een eis aan de gezochte realisaties is natuurlijk dat deze leiden tot causale, stabiele en liefst eenvoudig implementeerbare filterstructuren.

In totaal zijn er 3 soorten functies bekeken:

- Meixner functies
- Tijd-discrete functies verkregen via een bilineaire transformatie van de tijd-continue gegeneraliseerde Laguerre functies
- Functies verkregen via orthogonale transformatie toegepast op discrete Laguerre functies

De Meixner functies hebben geen rationale z-getransformeerde en zijn dus niet genereerbaar als impulsresponsie van lineaire tijdinvariante filters. De, via een bilineaire transformatie van de continue gegeneraliseerde Laguerre verkregen, discrete gegeneraliseerde Laguerre functies vormen een nieuwe klasse van functies. Deze functies vertonen het gewenste gedrag en voldoen aan de eerder gestelde eisen. Ze zijn echter geen generalisaties van het Laguerre concept in de zin dat er geen samenhang is met een stelsel van orthogonale polynomen.

Via een orthogonale matrix transformatie toegepast op de discrete Laguerre functies aangevuld met eisen voor de getransformeerde functies, determineren functies welke eenvoudig te realiseren zijn, eenvoudig te bepalen zijn (numeriek) en een sterk laagfrequent karakter hebben. Dit is waarschijnlijk de meest aantrekkelijke oplossing om te realiseren. Applicaties liggen op het gebied van benaderende filtersynthese en adaptieve filters.

Inhoudsopgave

Samenvatting

1 Inleiding	1
2 Tracking bij lineaire regressie modellen	2
2.1 Lineaire regressie modellen	2
2.2 Een algemeen tracking algoritme	3
2.3 Toegepaste tracking algoritmes	5
3 Orthogonale functies	6
3.1 Orthogonaliteit	6
3.2 Gewichtsfunctie	7
3.3 Kenmerken polynoomsystemen	7
4 Laguerre functies	9
5 Meixner functies	11
5.1 Kenmerken Meixner polynomen	12
6 Discrete generaliseerde Laguerre functies	13
6.1 Definitie gegeneraliseerde Laguerre functies	13
6.2 De bilineaire transformatie	14
6.3 Onderzoek naar de weegfunctie	15
6.4 Voorbeelden van de DGL	16
7 Orthogonale transformaties op het Laguerre domein	19
7.1 Algemene oplossing $A^{(n)}$	20
7.1.1 Bepaling eerste rij van de transformatie matrix	20
7.1.2 Bepaling tweede rij van de matrix	21
7.1.3 Bepaling van de l^{de} rij van de matrix $B^{(n)}$	22
7.1.4 Normering transformatie matrix	23
7.2 Een expliciete oplossing voor $A^{(2)}$	23
7.3 Numerieke oplossing	26
7.3.1 Bepaling van de matrix $L^{(n)}$	27
7.4 Oplossing $G_m^{(n)}$ in het tijddomein	29
7.4.1 Bepaling van de matrix $C^{(n)}$	29
7.5 Voorbeelden	31
7.6 Kenmerken	33
8 Conclusies	35
Referenties	36
Bijlage: Matlab-software	37

1 Inleiding

Adaptieve filters worden veelvuldig toegepast in de digitale signaalbewerking. Veelal wordt dan gebruik gemaakt van een tapped-delay-line. Zolang de signalen aangeboden aan een adaptieve filter een kleine correlatie lengte hebben zal dit goed functioneren. Voor signalen met een grotere correlatielengte zal de tapped-delay-line langer worden en meer gewichten krijgen. Naast een hogere complexiteit zal ook de ruis ten gevolge van de fluctuerende gewichten de werking van het adaptief transversaal filter negatief beïnvloeden en zal het filter minder goed functioneren en moeilijker te implementeren zijn.

In [1] wordt ingegaan op adaptieve filters met een IIR-filterbank gebaseerd op discrete Laguerre functies. In dit verslag bekijken we generalisaties van de discrete Laguerre functies. Van deze generalisaties verwachten we ze een sterk begrensd laagfrequent karakter hebben. Hierdoor wordt het mogelijk lineaire laagfrequente overdrachtssystemen goed te benaderen met slechts een gering aantal vrijheidsgraden.

Allereerst bekijken we in hoofdstuk 2 waarom we de algoritmes RLS en LMS, bekend van het transversale adaptieve filter, ook bij filterbanken gebaseerd op orthogonale functies mogen toepassen. Daarop volgend bekijken we in hoofdstuk 3 kort de theorie van orthogonale functies. In hoofdstuk 4 komen de Laguerre functies aan de orde. In hoofdstuk 5 komt daarna een mogelijke generalisatie van discrete Laguerre functies namelijk Meixner functies aan de orde. In hoofdstuk 6 transformeren we via een gemodificeerde biliniaire transformatie de gegeneraliseerde continue Laguerre functies naar discrete gegeneraliseerde Laguerre functies. Tot slotte in hoofdstuk 7 passen we de al reeds bekende Laguerre filterbank aan via een orthogonale matrix transformatie.

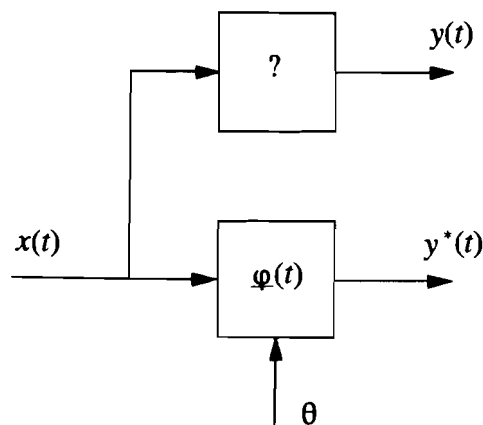
Van de gevonden structuren bekijken we voor zover mogelijk de eigenschappen en wordt aangegeven of ze eenvoudig implementeerbaar.

2 Tracking bij lineaire regressie modellen

De functies welke in de volgende hoofdstukken aan de orde komen, worden met behulp van een algoritme in de tijd gezien naar een bepaald optimum geregeld. De algoritmes LMS en RLS zijn algemeen bekend voor een tapped-delay-line. In dit hoofdstuk zullen we bekijken hoe we de tracking van systemen welke binnen de klasse van lineaire regressie modellen vallen kunnen oplossen.

2.1 Lineaire regressie modellen

In Afbeelding 1 is een algemeen model afgebeeld voor een systeem dat tijd-variërend is. De vector $\underline{\theta}$ is de parameter waarmee het systeem bijgesteld kan worden. We kiezen $\underline{\theta}$ zo dat y^* een goede voorspelling is voor y .

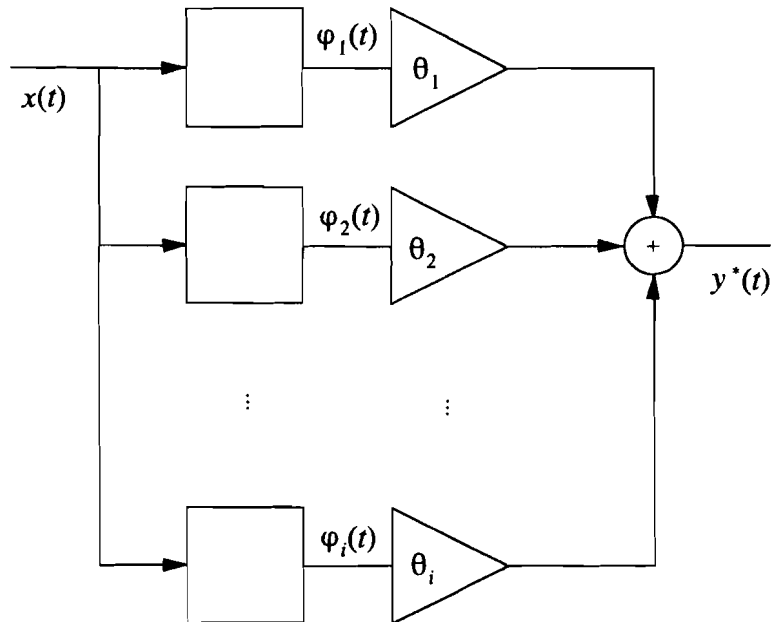


Afbeelding 1: Algemeen model voor een tijd-variërend systeem.

Dit model is wel zeer algemeen en van dit model kunnen maar weinig eigenschappen afgeleid worden. Vandaar dat we overgaan naar het model zoals weergegeven in Afbeelding 2. Dit model staat bekend als een lineair regressie model (LRM). Voor dit model geldt

$$y^*(t|\underline{\theta}) = \underline{\theta}^T \underline{\varphi}(t) \quad (1)$$

De uitgang y^* is dan een lineaire functie van $\underline{\theta}$. De vector $\underline{\varphi}$ wordt gerealiseerd door het filteren van het ingangssignaal met een filterbank bestaande uit lineaire tijd-invariante systemen welke stabiel en causaal zijn. We zoeken nu optimale tracking algoritmes voor dit lineair regressie model. Hierbij kunnen we denken aan: het minimaliseren van een foutencriterium, bijvoorbeeld ruis aan de uitgang minimaliseren of een ander criterium.



Afbeelding 2: Lineair regressie model van een tijd-varierend systeem

2.2 Een algemeen tracking algoritme

We zoeken nu een algoritme dat $\underline{\theta}$ zodanig instelt dat y^* een zo goed mogelijke voorspelling is van y . Dit is de oplossing van de vergelijking

$$E[\epsilon(t)\varphi(t)] = 0 \quad (2)$$

met $x(t)$ het ingangssignaal en waarbij het foutsignaal $\epsilon(t)$ gedefinieerd is als

$$\epsilon(t) = y(t) - y^*(t|\underline{\theta}) \quad (3)$$

Het gezochte algoritme zal op ieder tijdstip t de vector $\underline{\theta}$ moeten aanpassen. Dit gebeurt recursief. Dat wil zeggen we passen op tijdstip t de vector $\underline{\theta}(t-1)$ aan zodanig dat (2) weer geminimaliseerd is. In [2] wordt aangetoond dat het algoritme

$$\underline{\theta}(t) = \underline{\theta}(t-1) + \mu(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\varphi(t)\epsilon(t) \quad (4)$$

convergeert naar de oplossing van vergelijking (2). Hierbij zijn de matrix $\mathbf{R}(t)$ en de scalar $\mu(t)$ variabelen welke bij een algoritme gekozen kunnen worden. Het is duidelijk dat de keuze van deze variabelen een grote invloed heeft op het effect van het algoritme. Globaal kunnen we opmerken dat $\mathbf{R}(t)$ de richting van de stap bepaalt terwijl $\mu(t)$ de grootte van de stap bepaalt. In het verloop van dit hoofdstuk zal worden aangetoond dat LMS en RLS speciale gevallen van dit algoritme genoemd in (4) zijn.

Om $\mu(t)$ en $\mathbf{R}(t)$ geschikt te kunnen kiezen zullen we eerst het lineaire regressie model nader bekijken. We nemen aan dat $\underline{\theta}_0(t)$ de optimale parameter is voor het model op tijdstip t . Dit kan de juiste vector zijn of de best mogelijke binnen de modelstructuur. We veronderstellen voor $\underline{\theta}$

$$\underline{\theta}(t) = \underline{\theta}(t-1) + \mathbf{w}(t) \quad (5)$$

met de ruis $\underline{\mathbf{w}}(t)$ een wit-gaussisch stochastisch proces, met

$$E[\underline{\mathbf{w}}(t_1)\underline{\mathbf{w}}^T(t_2)] = \begin{cases} \mathbf{R}_1(t_1), & t_1 = t_2 \\ 0, & t_1 \neq t_2 \end{cases} \quad (6)$$

De variatie van \mathbf{R}_1 in de tijd maakt het mogelijk om te reageren op dynamische systemen. We stellen nu dat

$$y(t) = \underline{\theta}_0^T(t)\varphi(t) + e(t) \quad (7)$$

met $e(t)$ een ruissignaal welke gaussisch verdeeld is met variantie $\mathbf{R}_2(t)$. Volgens [2] geldt dat voor de schatting van $\underline{\theta}(t)$, $\underline{\mathbf{v}}(t)$ welke de verwachting

$$E[(\underline{\mathbf{v}}(t) - \underline{\theta}_0(t))(\underline{\mathbf{v}}(t) - \underline{\theta}_0(t))^T] \quad (8)$$

minimaliseert, wordt gegeven door het Kalman filter volgens

$$\underline{\mathbf{v}}(t) = \underline{\mathbf{v}}(t-1) + \mathbf{L}(t)\varepsilon(t), \quad \underline{\mathbf{v}}(0) = \underline{\mathbf{v}}_0 \quad (9)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t)\underline{\mathbf{v}}(t-1) \quad (10)$$

waarbij de gainvector $\mathbf{L}(t)$ gegeven wordt door

$$\mathbf{L}(t) = \frac{\mathbf{P}(t-1)\varphi(t)}{\mathbf{R}_2(t) + \varphi^T(t)\mathbf{P}(t-1)\varphi(t)} \quad (11)$$

en de matrix $\mathbf{P}(t)$ recursief wordt aangepast op de wijze

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)\mathbf{P}(t-1)}{\mathbf{R}_2(t) + \varphi^T(t)\mathbf{P}(t-1)\varphi(t)} + \mathbf{R}_1(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0 \quad (12)$$

De notaties $\mathbf{R}'_1(t)$ en $\mathbf{R}'_2(t)$ worden gebruikt om aan te duiden dat in het algoritme kunnen verschillen (normaliter zijn dit schattingen) van de echte waardes $\mathbf{R}_1(t)$ en $\mathbf{R}_2(t)$.

2.3 Toegepaste tracking algoritmes

Het algoritme (9)-(12) met het lineaire regressie model is optimaal. Het kan zowel langzaam variërende als stapvormige veranderingen volgen mits we de juiste waardes kiezen voor $\mathbf{R}'_1(t)$ en $\mathbf{R}'_2(t)$. Deze zijn echter nooit exact bekend. Soms een schatting en anders kiezen we een vaste waarde. Het RLS en het LMS algoritme zijn speciale keuze's voor $\mathbf{R}'_1(t)$ en $\mathbf{R}'_2(t)$ en gelden dus ook voor het lineaire regressie model, hoewel ze oorspronkelijk ontworpen zijn voor een tapped-delay-line.

Het RLS-algoritme minimaliseert een gewogen foutcriterium

$$\delta_t(\Theta) = \sum_{k=1}^t \beta(t,k) (y(k) - \Theta^T \varphi(k))^2, \quad (13)$$

met de weegfactor

$$\beta(t,k) = \prod_{j=k+1}^t \lambda(j), \quad |\lambda(j)| \leq 1. \quad (14)$$

Het RLS-algoritme is een speciaal geval van het algoritme (9)-(12) als we kiezen

$$\mathbf{R}'_1(t) = \left(\frac{1}{\lambda(t)} - 1 \right) \left[\mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)\mathbf{P}(t-1)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)\mathbf{P}(t-1)\varphi(t)} \right] \quad (15)$$

en

$$\mathbf{R}'_2(t) = \lambda(t). \quad (16)$$

Het LMS-algoritme is het meest gebruikte algoritme in adaptieve systemen. Dit komt mede door de eenvoud van het algoritme. Het LMS-algoritme is een speciaal geval van het algoritme (9)-(12) als we kiezen

$$\mathbf{R}'_1(t) = \mu^2 \frac{\varphi(t)\varphi^T(t)}{1 + \mu |\varphi(t)|^2} \quad (17)$$

en

$$\mathbf{R}'_2(t) = 1, \quad \mathbf{P}(0) = \mu \cdot \mathbf{I} \quad (18)$$

met $\mu = \mu(t)$. De algoritmes RLS en LMS zijn geschikt om te gebruiken in een lineair regressie model. Modellen gebaseerd op discrete orthogonale polynomen vallen binnen de klasse van lineaire regressie modellen. We mogen dus de algoritmes RLS en LMS gebruiken in deze systemen.

3 Orthogonale functies

Orthogonale polynomen worden in de discrete signaalbewerking gebruikt bij filtering en identificatie. In dit hoofdstuk zullen we alleen kijken naar discrete polynomen, dat wil zeggen polynomen als functie van een discrete variabele. Voor uitgebreide informatie van de kenmerken behandelt in dit hoofdstuk zie [3].

3.1 Orthogonaliteit

Laat $\{f_1(k), f_2(k), f_3(k), \dots\}$ een opsombare verzameling van functies zijn waarvoor bovendien geldt

$$\sum_{k=a}^b f_m(k)f_n(k) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ h_n & m = n \end{cases} \quad (19)$$

dan noemen we dit een systeem van orthogonale tijddiscrete functies op het interval van a tot b . Om verschillende redenen is zo een systeem interessant, maar de belangrijkste reden is dat een gegeven functie $g(k)$ geschreven kan worden als een uniforme reeks van orthogonale functies f indien we een volledige verzameling van functies f_m hebben.

$$g(k) = C_0 f_0(k) + C_1 f_1(k) + C_2 f_2(k) + \dots \quad (20)$$

Natuurlijk kan dit ook vaak met niet orthogonale functies (bv. Taylor-reeks), maar bij orthogonale reeksen is ieder coefficient eenvoudig bepaald door

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} \langle f_1 f_1 \rangle & & 0 \\ & \langle f_2 f_2 \rangle & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle f_1 g \rangle \\ \langle f_2 g \rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (21)$$

waarbij het inproduct $\langle f_i, f_j \rangle$ en $\langle f_i, g \rangle$ wordt bepaald door

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=a}^b f(k)g(k) \quad (22)$$

en dus geldt

$$C_n = \frac{1}{h_n^2} \sum_{k=a}^b g(k)f_n(k) \quad (23)$$

3.2 Gewichtsfunctie

We generaliseren de orthogonaliteit als volgt. Een systeem van functies $\{f_n\}$ is orthogonaal op het interval (a,b) met gewicht $w(k)$ als voor alle combinaties van functies geldt

$$\sum_{k=a}^b w(k)f_m(k)f_n(k) = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ h_n^2 & n = m \end{cases} \quad (24)$$

met de restricties

$$w(k) \geq 0 \quad \text{en} \quad a \leq k \leq b \quad (25)$$

en indien de a en of b oneindig zijn

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} w(k) = 0 \quad (26)$$

Voor de coëfficiënten C_n geldt nu

$$C_n = \frac{1}{h_n^2} \sum_{k=a}^b w(k)g(k)f_n(k) \quad (27)$$

indien de sommatie in (27) voor alle n bestaat.

3.3 Kenmerken polynoomsystemen

Discrete polynoomsystemen onderscheiden we drie belangrijke kenmerken. Als eerste de recurrente betrekking. Van ieder polynoomsysteem bestaat deze betrekking. De recurrente betrekking is het verband tussen de polynomen f_{n+1} , f_n en f_{n-1} . Er geldt

$$f_{n+1}(k) = a_n(k)f_n(k) + b_n f_{n-1}(k) \quad (28)$$

met

$$a_n(k) = A_{n1}k + A_{n0} \quad (29)$$

waarbij geldt dat A_{n1} , A_{n0} en b_n onafhankelijk van k zijn.

Het tweede belangrijke kenmerk is de genererende functie. Deze is gedefinieerd als

$$F(k,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(k)z^n}{n!} \quad (30)$$

Voor de klassieke discrete polynomen zijn deze bekend.

Als laatste bekijken we de differentievergelijking. Voor klassieke polynomen geldt voor de weegfunctie

$$\frac{\Delta w(k)}{w(k)} = \frac{\gamma(k)}{\beta(k)} = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 k}{\beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2} \quad (31)$$

waarbij $\beta(k)$ van de graad 0, 1 of 2 kan zijn.

Voor de differentievergelijking van deze klassieke systemen geldt dan

$$\beta \Delta^2 f_n(k) + (\gamma + \Delta \beta) \Delta f_n(k) - n[\gamma_1 + (n+1)\beta_2] f_n(k) = 0 \quad (32)$$

Samenvattend concluderen we dat voor klassieke polynoomsystemen de kenmerken bekend zijn. Voor niet klassieke systemen zullen deze kenmerken afgeleid moeten worden. Daarbij is een expliciete uitdrukking van het polynoom en weegfunctie nodig.

4 Laguerre functies

Van discrete Laguerre functies zijn vele artikelen verschenen over toepassingen in de discrete signaalbewerking [1] [8]. In dit overzicht geven we een kort overzicht van de Laguerre functies. We definiëren [5] achtereenvolgens het Laguerre polynoom,

$$L_n(k) = \theta^{-k} \Delta^k \left[\binom{k}{n} \theta^k \right] \quad (33)$$

weegfunctie

$$w(k) = \theta^k \quad (34)$$

en de orthogonaliteitsfactor

$$v_n = \frac{(1-\theta)}{\theta^n} \quad (35)$$

De Laguerre functie in expliciete vorm is dan

$$f_n(k) = \sqrt{1-\theta} \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{k+n-j}{n} \theta^{\frac{k+n}{2}-j} \quad (36)$$

Van deze functie is de z-getransformeerde

$$F_n(z) = \sqrt{1-\xi^2} \frac{z}{z-\xi} \left(\frac{1-\xi z}{z-\xi} \right)^n, \quad \text{met } \xi^2 = \theta \quad (37)$$

Deze functie is eenvoudig te realiseren en waarover vele publicaties getuigen.

Ook de kenmerken van de Laguerre polynomen zijn bekend en hieronder weergegeven. De genererende functie [5] is

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(k) \frac{z^n}{n!} = \left(1 - \frac{z}{\theta} \right)^k (1-z)^{-k-1}, \quad \text{met } |z| < \min(1, |\theta|) \quad (38)$$

De recurrente betrekking [5] is

$$(n+1)L_{n+1}(k) - \{(n+1)\theta + n + (\theta-1)k\}L_n(k) + n\theta L_{n-1}(k) = 0 \quad (39)$$

en tenslotte is de differentievergelijking [5]

$$\theta(k+2)\Delta^2 L_n(k) - \{(1-\theta)k + (n-2)\theta - (n-1)\}\Delta L_n(k) + n(1-\theta)L_n(k) = 0 \quad (40)$$

Voor de Laguerre functies $f_n(k)$ is een recurrente betrekking af te leiden uit (41) rekening houdend met de weegfunctie en de orthogonaliteitsfactor

$$(n+1)\xi f_{n+1}(k) + \{(n+1)\xi^2 + n + (\xi^2 - 1)k\}f_n(k) + n\xi f_{n-1}(k) = 0 \quad (41)$$

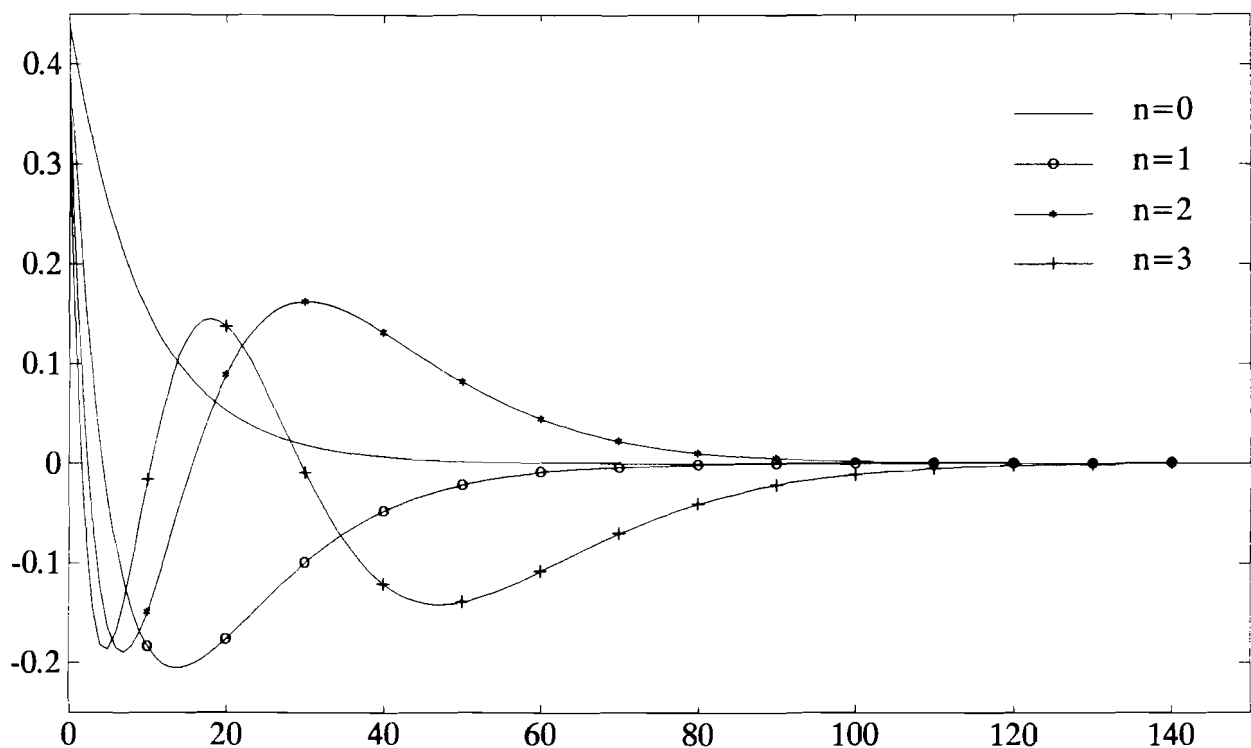
Ook kunnen we een differentie vergelijking afleiden via de symmetrie eigenschap

$$\theta^k L_n(k) = \theta^n L_k(n) \quad (42)$$

hiervoor verwijzen we naar [4] welke echter andere definities gebruikt.

$$\begin{aligned} \xi(k+2)\Delta^2 f_n(k) + \{(1+\xi^2)(k+1) + \xi^2 + n(\xi^2 - 1) + 2\xi(k+2)\}\Delta f_n(k) \\ + \{\xi(k+1) + \xi(k+2) + (1+\xi^2)(k+1) + \xi^2 + n(\xi^2 - 1)\}f_n(k) = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

In Afbeelding 3 zijn de Laguerre functies $f_n(k)$ weergegeven met $\xi = 0.9$.



Afbeelding 3: $f_n(k)$ voor $\xi = 0,9$ en $n=0,1,2$ en 3 .

5 Meixner functies

Een mogelijke generalisatie van discrete Laguerre functies [5] is de set van Meixner functies. Door de al reeds aangeduide beperkingen van Laguerre functies bij gebruik in filterbanken zoeken we nieuwe filterstructuren. Een voor de hand liggende mogelijkheid zijn de Meixner functies [6]. De definitie van het polynoom in een expliciete beschrijving (44) met de gewichtsfunctie (45) en de orthogonaliteitsfactor (46) is

$$M_n(k) = \sum_{j=0}^n j! (\beta + j)_{n-j} \binom{n}{j} \binom{k}{j} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^j \quad (44)$$

$$w(k) = \frac{\alpha^k (\beta)_k}{k!}, \quad (45)$$

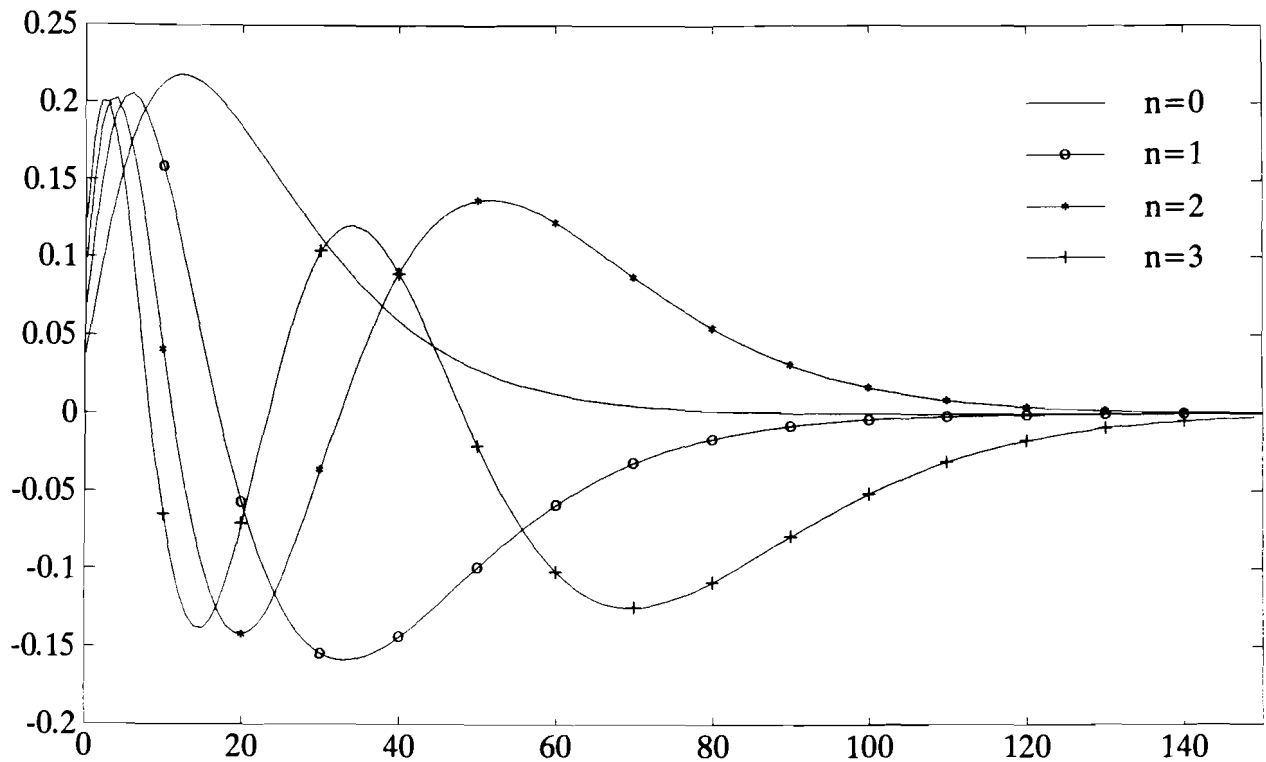
$$\sum_{k=0}^{\infty} w(k) M_n(k) M_l(k) = \frac{n! (\beta)_n}{\alpha^n (1-\alpha)^\beta} \delta_{nl} \quad (46)$$

De Meixner functie wordt dan

$$f_n(k) = \sqrt{\frac{\alpha^n \alpha^k (1-\alpha)^\beta (\beta)_k}{(\beta)_n n! k!}} \sum_{j=0}^n j! (\beta + j)_{n-j} \binom{n}{j} \binom{k}{j} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^j \quad (47)$$

Ten gevolge van de macht $\frac{1}{2}$ over een polynoom in k zijn deze functies niet herschrijfbaar als een polynoom in k (behalve voor $\beta=1$). Bij het transformeren van de Meixner functies (47) naar het z -domein verkrijgen we dan ook geen rationale functies. Aangezien de functie implementeerbaar moet zijn, zijn rationale functies noodzaak in het z -domein. Natuurlijk levert ook een state-space beschrijving [7] geen lineair-tijdinvariant-systeem op. Indien $\beta=1$ zijn de Meixner functies gelijk aan de Laguerre functies en is de implementatie bekend [8].

De Meixner-functies hebben de eigenschap voor grotere β dat de maximale waarde van de functie niet bij nul ligt maar afhankelijk van β later op de tijd-as. Dit is duidelijk te zien in Afbeelding 4 waar enkele Meixner functies zijn weergegeven als functie van k . Dit voor $\beta=4$, $\alpha=0,81$ waarbij voor de graad van het polynoom n de waardes 0 tot en met 4 genomen is.



Afbeelding 4: $f_n(k)$ met $\beta=4$, $\alpha=0,81$ en $n=0..3$.

5.1 Kenmerken Meixner polynomen

De genererende functie voor het Meixnerpolynoom is

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n(k; \beta; \alpha) \frac{z^n}{n!} = \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)^k (1-z)^{-k-\beta}, \quad \text{met } |z| < \min(1, |\alpha|) \quad (48)$$

Voor de symmetrie geldt volgens [9]

$$(\beta)_k M_n(k; \beta; \alpha) = (\beta)_n M_k(n; \beta; \alpha) \quad (49)$$

Een recurrente betrekking

$$\alpha M_{n+1}(k) = [(\alpha-1)k + (\alpha+1)n + \alpha\beta] M_n(k) - n(n+\beta-1) M_{n-1}(k) \quad (50)$$

en de differentie vergelijking

$$\alpha(k+\beta+1)\Delta^2 M_n(k) + [(\alpha-1)(k-n+1) + \beta\alpha]\Delta M_n(k) - n(\alpha-1)M_n(k) = 0 \quad (51)$$

zijn afgeleid in [3]

6 Discrete generaliseerde Laguerre functies

In dit hoofdstuk transformeren we de Laplace getransformeerde van de continue gegeneraliseerde Laguerre functies met behulp van een gemodificeerde bilineaire transformatie naar het z-domein. Via de inverse z-transformatie verkrijgen we een soort discrete orthogonale functies, welke waarschijnlijk veel lijken op de Meixner functies.

6.1 Definitie gegeneraliseerde Laguerre functies

Achtereenvolgens definiëren we volgens [9] het gegeneraliseerde Laguerre polynoom in een expliciete beschrijving (52) met de bijbehorende weegfunctie (53) en de orthogonaliteitsrelatie (54):

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{x^m}{m!}, \quad n \geq 0, \alpha > -1 \quad (52)$$

$$w(x; \alpha) = e^{-x} x^\alpha \quad (53)$$

$$\int_0^\infty w(x; \alpha) L_n^{(\alpha)}(x) L_l^{(\alpha)}(x) dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \delta_{nl} \quad (54)$$

We introduceren de set van functies

$$f_n^{(\alpha)}(x) = \sqrt{\frac{e^{-x} x^\alpha n!}{\Gamma(\alpha+n+1)}} L_n^{(\alpha)}(x) \quad (55)$$

De functie (55) heet de n-de gegeneraliseerde Laguerre functie. In [9] staat de Laplace transformatie van:

$$n! \Gamma(\alpha+1) \mathcal{L}\{x^\beta L_n^{(\alpha)}(x)\} = \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+1) s^{-\beta-1} F(-n, \beta+1; \alpha+1; s^{-1}) \quad (56)$$

met F de hypergeometrische functie. Door (47), (56) nu toe te passen op (55) samen met een verschuiving van 0.5 in het s-domein tgv $\downarrow (e^{-x})$ krijgen we:

$$F_n^{(\alpha)}(s) = \mathcal{L}\{f_n^{(\alpha)}(x)\} = \frac{\Gamma(\alpha/2+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}} (s+0.5)^{-\frac{\alpha}{2}-1} F(-n, \frac{\alpha}{2}+1; \alpha+1; (s+0.5)^{-1}) \quad (57)$$

We beperken $\alpha > 0$ en even, waardoor we een rationale functie in het s-domein krijgen en dus een rationale functie in het z-domein.

6.2 De bilineaire tranformatie

Op (57) passen we nu de bilineaire transformatie [10] toe. We substituëren dan

$$s = \frac{2}{D} \frac{z-1}{z+1}, \quad \text{met } D \in (0, \infty) \quad (58)$$

en vermenigvuldigen met de correctie term om de set van functies orthonormaal (behoud van inwendig product) te houden

$$C(z) = \frac{2}{\sqrt{D}} \frac{z}{z+1} \quad (59)$$

en we krijgen dan

$$G_n^{(\alpha)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha/2+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}} \frac{2}{\sqrt{D}} \frac{z}{z+1} \left(\frac{2}{D} \frac{z-1}{z+1} + 0.5 \right)^{-\frac{\alpha}{2}-1} F(-n, \alpha/2+1; \alpha+1; (2(z-1)/D(z+1)+0.5)^{-1}) \quad (60)$$

We herschrijven

$$\frac{2(z-1)}{D(z+1)} + 0.5 = \frac{D+4}{2D} \left(\frac{z + \frac{D-4}{D+4}}{z+1} \right) = \frac{1}{1-\xi} \left(\frac{z-\xi}{z+1} \right) \quad (61)$$

met

$$\xi = \frac{4-D}{4+D}, \quad \xi \in (-1, 1) \quad \text{en} \quad D = \frac{4(1-\xi)}{1+\xi} \quad (62)$$

Vullen we (61) en (62) in (60) dan krijgen we

$$G_n^{(\alpha)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha/2+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)(1+\xi)}{n!(1-\xi)}} (1-\xi)^{\frac{\alpha}{2}+1} \frac{z}{z+1} \left(\frac{z+1}{z-\xi} \right)^{\frac{\alpha}{2}+1} F(-n, \alpha/2+1; \alpha+1; (1-\xi)(z+1)/(z-\xi)) \quad (63)$$

We schrijven nu in (63) de hypergeometrische functie uit [11]

$$G_n^{(\alpha)}(z) = \psi_n(\alpha; \xi) \frac{z}{z+1} \left(\frac{z+1}{z-\xi} \right)^{\frac{\alpha}{2}+1} \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (\alpha/2+1)_m (1-\xi)^m}{(\alpha+1)_m m!} \left(\frac{z+1}{z-\xi} \right)^m \quad (64)$$

waarbij $(n)_m$ de Pochhammer functie is en met

$$\psi_n(\alpha; \xi) = \frac{\Gamma(\alpha/2+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)(1+\xi)}{n!(1-\xi)}} (1-\xi)^{\frac{\alpha}{2}+1} \quad (65)$$

We herschrijven nu (64) volgens

$$G_n^{(\alpha)}(z) = \Psi_n(\alpha; \xi) \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (\alpha/2+1)_m (1-\xi)^m}{(\alpha+1)_m m!} \frac{z}{z-\xi} \left(1 + \frac{1+\xi}{z-\xi}\right)^{\frac{\alpha}{2}+m} \quad (66)$$

en we splitsen nu (66) in machten van $(z-\xi)^{-1}$

$$G_n^{(\alpha)}(z) = \Psi_n(\alpha; \xi) \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (\alpha/2+1)_m (1-\xi)^m}{(\alpha+1)_m m!} \sum_{l=0}^{\frac{\alpha}{2}+m} \binom{\alpha/2+m}{l} (1+\xi)^l \frac{z}{(z-\xi)^{l+1}} \quad (67)$$

Na herschrijven krijgen we

$$G_n^{(\alpha)}(z) = \Psi_n(\alpha; \xi) \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (\alpha/2+1)_m (1-\xi)^m}{(\alpha+1)_m m!} \sum_{l=1}^{\frac{\alpha}{2}+m+1} \binom{\alpha/2+m}{l-1} (1+\xi)^{l-1} \frac{z}{(z-\xi)^l} \quad (68)$$

Dit kunnen we terugtransformeren naar het tijddiscrete domein

$$g_n^{(\alpha)}(k) = \Psi_n(\alpha; \xi) \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (\alpha/2+1)_m (1-\xi)^m}{(\alpha+1)_m m!} \sum_{l=1}^{\frac{\alpha}{2}+m+1} \binom{\alpha/2+m}{l-1} (1+\xi)^{l-1} \binom{k}{l-1} \xi^{k-l+1} \quad (69)$$

We herschrijven dit

$$g_n^{(\alpha)}(k) = \xi^k \Psi_n(\alpha; \xi) \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (\alpha/2+1)_m (1-\xi)^m}{(\alpha+1)_m m!} \sum_{l=1}^{\frac{\alpha}{2}+m+1} \binom{\alpha/2+m}{l-1} \binom{k}{l-1} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^{l-1} \quad (70)$$

Het is ons niet gelukt om dit te vereenvoudigen. In de volgende paragraaf zullen we bewijzen dat (70) in het algemeen niet te schrijven valt als het product van een weegfunctie en een polynoom.

6.3 Onderzoek naar de weegfunctie

Om te kunnen bewijzen dat (70) niet te schrijven valt als een weegfunctie en een polynoom, laten we zien dat dit in ieder geval niet altijd kan voor $g_1(k)$. Er geldt

$$g_0^{(\alpha)}(k) = \xi^k \Psi_0(\alpha; \xi) \sum_{l=0}^{\frac{\alpha}{2}} \binom{\alpha/2}{l} \binom{k}{l} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^l \quad (71)$$

en

$$g_1^{(\alpha)}(k) = \xi^k \psi_1(\alpha; \xi) \left\{ \sum_{l=0}^{\frac{\alpha}{2}} \binom{\alpha/2+m}{l} \binom{k}{l} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^l \right\} - \frac{(\alpha/2+1)(1-\xi)}{\alpha+1} \left\{ \sum_{l=0}^{\frac{\alpha}{2}+1} \binom{\alpha/2+1}{l} \binom{k}{l} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^l \right\} \quad (72)$$

Indien nu (70) een weegfunctie bevat zal het quotient van $g_1(k)/g_0(k)$ een eerste graads polynoom opleveren. We kiezen $\alpha=2$ en berekenen het quotient

$$\frac{g_1^{(2)}(k)}{g_0^{(2)}(k)} = \sqrt{\frac{4}{3}} \left\{ 1 + \frac{2}{3}(1-\xi) \frac{1+2k(1+1/\xi)+k(k-1)(1-1/\xi)^2}{1+k(1-1/\xi)} \right\} \quad (73)$$

We vereenvoudigen dit tot

$$\frac{g_1^{(2)}(k)}{g_0^{(2)}(k)} = \sqrt{\frac{4}{3}} \left\{ 1 + \frac{2}{3}(1-\xi) \left(k(1+1/\xi) - \frac{1}{\xi} + \frac{\xi+1}{k(\xi+1)+\xi} \right) \right\} \quad (74)$$

Dit is geen eerste graad polynoom voor geen enkele waarde van ξ . Dus bevat (70) in het algemeen geen weegfunctie.

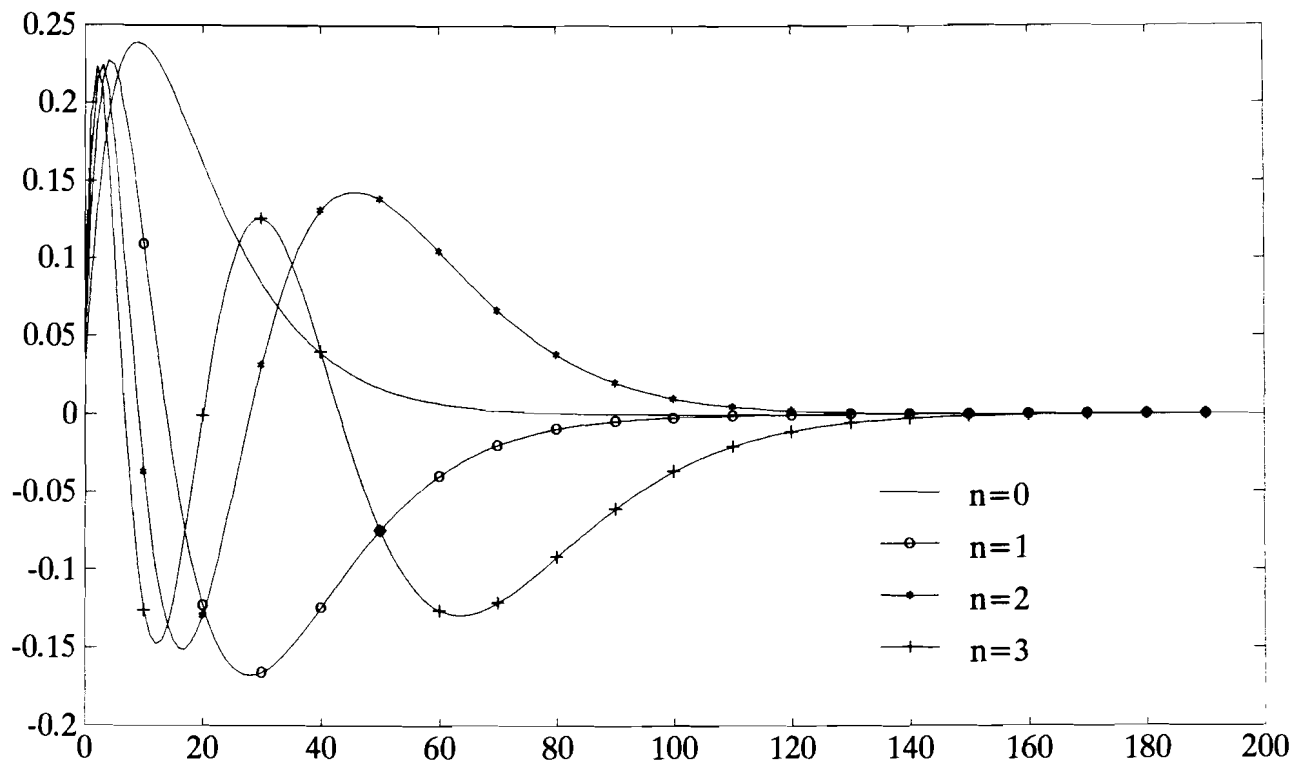
Aangezien het geen polynoomstelsel betreft, heeft het ook geen zin om te praten over eigenschappen zoals die bekend zijn bij orthogonale polynoomstelsels.

6.4 Voorbeelden van de DGL

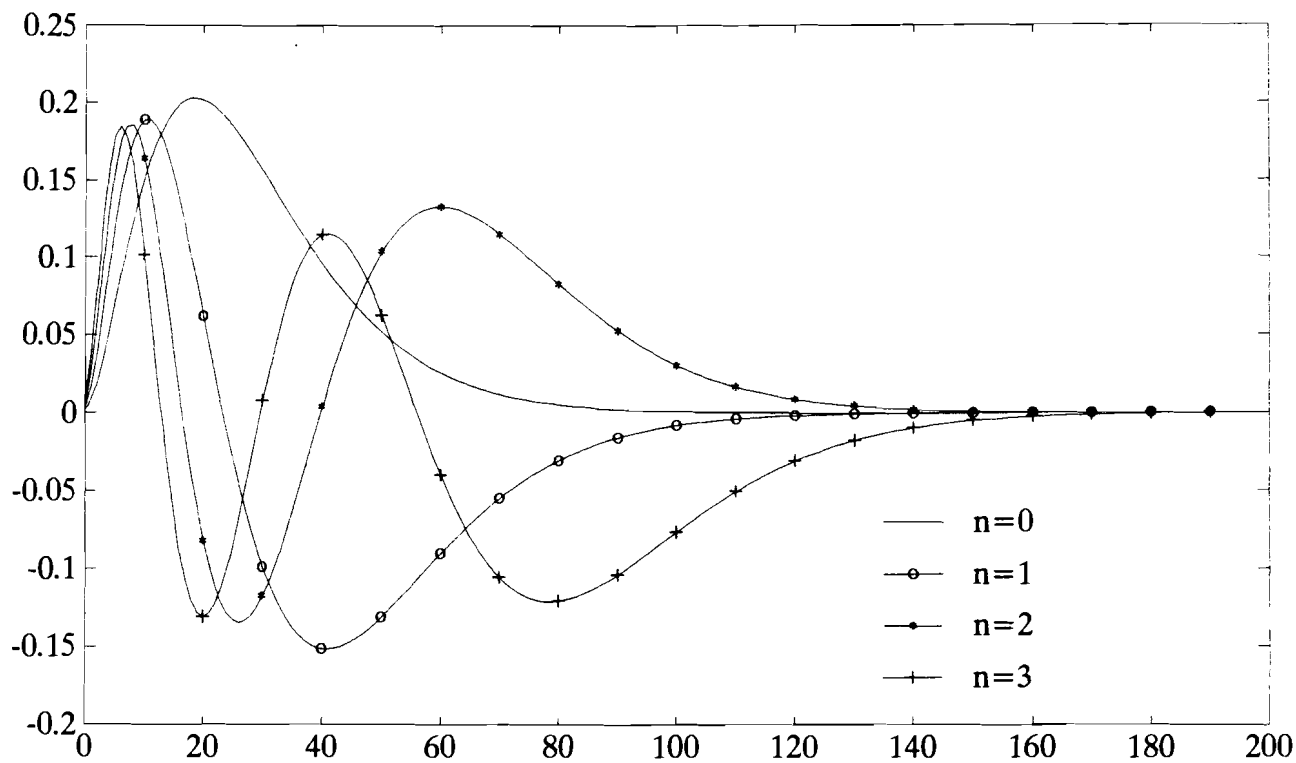
Deze functies $g_n^{(\alpha)}(k)$ (70) grafisch weergegeven. Achtereenvolgens geven we weer:

- $g_n^{(\alpha)}(k)$ voor $\xi=0,9$, $\alpha=2$ en $n=0,1,2$ en 3 in Afbeelding 5
- $g_n^{(\alpha)}(k)$ voor $\xi=0,9$, $\alpha=4$ en $n=0,1,2$ en 3 in Afbeelding 6
- $g_n^{(\alpha)}(k)$ voor $\xi=0,9$, $\alpha=10$ en $n=0,1,2$ en 3 in Afbeelding 7
- $g_n^{(\alpha)}(k)$ voor $\xi=0,9$, $\alpha=18$ en $n=0,1,2$ en 3 in Afbeelding 8

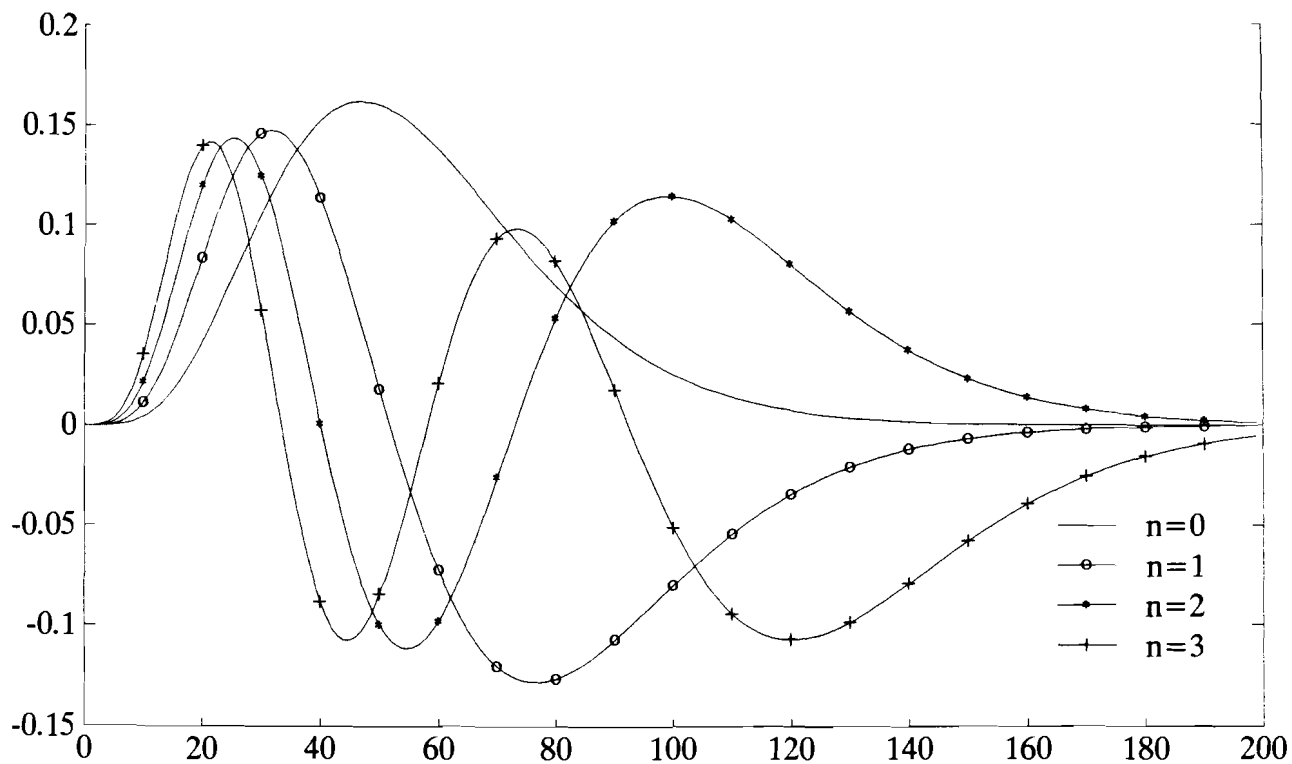
Duidelijk is dat de voor grotere α de functie vlakker aanloopt en dichter bij nul begint. Precies wat we dus verwachten.



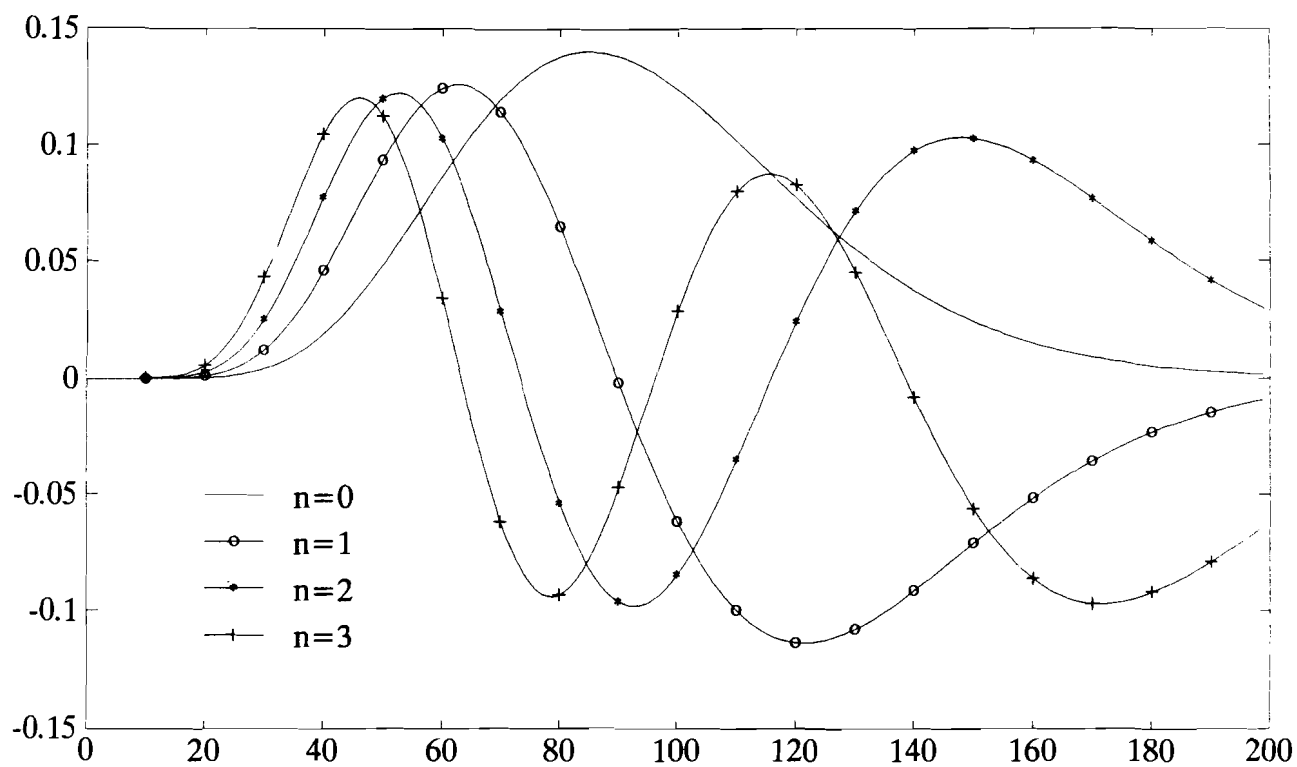
Afbeelding 5: $g_n^{(\alpha)}(k)$ voor $\xi=0,9$, $\alpha=2$ en $n=0,1,2$ en 3.



Afbeelding 6: $g_n^{(\alpha)}(k)$ voor $\xi=0,9$, $\alpha=4$ en $n=0,1,2$ en 3.



Afbeelding 7: $g_n^{(\alpha)}(k)$ voor $\xi=0,9$, $\alpha=10$ en $n=0,1,2$ en 3 .



Afbeelding 8: $g_n^{(\alpha)}(k)$ voor $\xi=0,9$, $\alpha=18$ en $n=0,1,2$ en 3 .

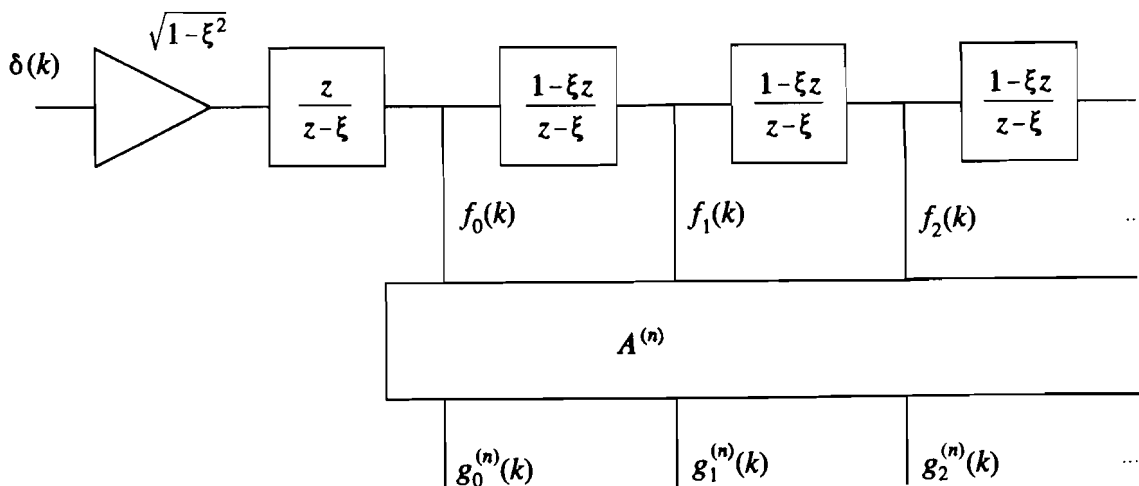
7 Orthogonale transformaties op het Laguerre domein

In Afbeelding 9 wordt met behulp van de filterbank de Laguerre functies $f_i(k)$ gerealiseerd. Deze Laguerre functies $f_i(k)$ vermenigvuldigen we met de orthogonale matrix $A^{(n)}$ waardoor we de nieuwe functies $g_m^{(n)}(k)$ krijgen. Deze functies $g_m^{(n)}(k)$ zijn orthonormaal. We noemen de z-getransformeerde $G_m^{(n)}(z) = Z\{g_m^{(n)}(k)\}$. Aan deze nieuwe functies $g_m^{(n)}(k)$ stellen we de volgende eisen.

Eisen:

- orde van $G_m^{(n)}(z)$ is $m+n$
- $G_m^{(n)}(z)$ heeft een $(m+n)$ meervoudige pool is ξ
- $G_0^{(n)}(z)$ heeft een n -voudig nulpunt is $z=0$. Dit naar analogie van de Laplace getransformeerde gegeneraliseerde Laguerre functies.

N.B. als $n=1$ geldt dat $A^{(1)}=I$ en $g_m^{(1)}(k)=f_m(k)$. Hieruit volgt dat $g_m^{(n)}(k)$ een generalisatie is van de discrete Laguerre functies.



Afbeelding 9: Laguerre filterbank gevolgd door een orthogonale transformatie $A^{(n)}$

Dit hoofdstuk is onderverdeeld in vier onderdelen. In paragraaf 7.1 bepalen we een algemene recursieve oplossing voor de matrix $A^{(n)}$. Voor realisering in de praktijk is een expliciete uitdrukking makkelijk. In de tweede paragraaf bepalen we voor het specifieke geval $A^{(2)}$ een expliciete uitdrukking. In de derde paragraaf bepalen we een numerieke oplossing voor $A^{(n)}$ in het algemeen. In de vierde paragraaf laten we tenslotte nog enkele voorbeelden zien, verkregen door de numerieke oplossing.

7.1 Algemene oplossing $A^{(n)}$

De algemene oplossing voor de matrix $A^{(n)}$ is recursief te bepalen. Allereerst bepalen we de eerste rij van de matrix, waarvoor een expliciete uitdrukking wordt afgeleid. Recursief is het dan mogelijk om de volgende rijen te bepalen.

7.1.1 Bepaling eerste rij van de transformatie matrix

We definiëren

$$A^{(n)} = Q^{(n)} B^{(n)} \quad (75)$$

met $Q^{(n)}$ een diagonaal matrix (zie 7.1.4, normering) en $B^{(n)}$ een matrix met orthogonale rijen. Op deze wijze blijft de notatie eenvoudig. We kunnen nu de eerste rij van matrix $B^{(n)}$ bepalen. Voor deze overdrachtsfunctie $G_0^{(n)}(z)$ geldt

$$G_0^{(n)}(z) = C \frac{z^n}{(z-\xi)^n} = \sum_{i=1}^n B_{1i}^{(n)} \frac{z}{z-\xi} \left(\frac{1-z\xi}{z-\xi} \right)^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} B_{1,i+1}^{(n)} \frac{z}{z-\xi} \left(\frac{1-z\xi}{z-\xi} \right)^i \quad (76)$$

Hieruit volgt

$$C z^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} B_{1,i+1}^{(n)} (1-z\xi)^i (z-\xi)^{n-1-i} \quad (77)$$

Noem $n-1 = m$, dan moet gelden dat

$$C z^m = \sum_{i=0}^m B_{1,i+1}^{(n)} (1-z\xi)^i (z-\xi)^{m-i} \quad (78)$$

Neem nu

$$B_{1,i+1}^{(n)} = \binom{m}{i} \frac{\xi^i}{(1-\xi^2)^m}, \quad (79)$$

en uitgaande van (78), dan volgt

$$C z^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{\xi^i}{(1-\xi^2)^m} (1-z\xi)^i (z-\xi)^{m-i} = \frac{1}{(1-\xi^2)^m} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (\xi - z\xi^2)^i (z-\xi)^{m-i} \quad (80)$$

$$= \frac{1}{(1-\xi^2)^m} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (\xi - z\xi^2)^i (z-\xi)^{m-i} = \frac{1}{(1-\xi^2)^m} z^m (1-\xi^2)^m = z^m, \quad \text{dus } C=1 \quad (81)$$

Met de keuze van (79) geldt

$$\mathbf{B}_{1,i+1}^{(n)} = \left. \begin{aligned} & \binom{n-1}{i} \frac{\xi^i}{(1-\xi^2)^{n-1}}, \\ & n-1 \geq i \geq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & n \geq 2 \\ & \end{aligned} \quad (82)$$

ofwel

$$\mathbf{B}_{ii}^{(n)} = \left. \begin{aligned} & \binom{n-1}{i-1} \frac{\xi^{i-1}}{(1-\xi^2)^{n-1}} \\ & 1 \leq i \leq n \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & n \geq 2 \\ & \end{aligned} \quad (83)$$

$$\mathbf{B}_{ii}^{(n)} = 0 \quad \left. \begin{aligned} & n \geq 2 \\ & i > n \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Hiermee is de eerste rij van de matrix $\mathbf{B}^{(n)}$ bepaald en voldoet de eerste rij aan de gewenste overdracht voor $G_{0(n)}(z)$. De normering voeren we uit in paragraaf 7.1.4.

7.1.2 Bepaling tweede rij van de matrix

De tweede rij wordt bepaald door de overdrachtsfunctie $G_1^{(n)}(z)$. Hiervoor geldt enerzijds

$$G_1^{(n)}(z) = C_1 \frac{z^{n+1}}{(z-\xi)^{n+1}} + C_2 \frac{z^n}{(z-\xi)^n} = \frac{z^n}{(z-\xi)^n} \left\{ \frac{C_1 z}{z-\xi} + C_2 \right\} \quad (85)$$

en anderzijds

$$G_1^{(n)}(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{B}_{2i}^{(n)} \frac{z}{z-\xi} \left(\frac{1-z\xi}{z-\xi} \right)^{i-1} = \sum_{i=0}^n \mathbf{B}_{2,i+1}^{(n)} \frac{z}{z-\xi} \left(\frac{1-z\xi}{z-\xi} \right)^i \quad (86)$$

We splitsen nu de voorgaande vergelijking in twee termen volgens

$$G_1^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^n \mathbf{B}_{2,i+1}^{(n(1))} \frac{z}{z-\xi} \left(\frac{1-z\xi}{z-\xi} \right)^i + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}_{2,i+1}^{(n(2))} \frac{z}{z-\xi} \left(\frac{1-z\xi}{z-\xi} \right)^i, \quad (87)$$

Vervolgens stellen we deze twee termen gelijk aan de twee termen in (85). De oplossing van $\mathbf{B}^{(n(1))}$ en $\mathbf{B}^{(n(2))}$ is bepaald in paragraaf 7.1. Bovendien geldt

$$\mathbf{B}_{2,i+1}^{(n)} = \mathbf{B}_{2,i+1}^{(n(1))} + \lambda_1 \mathbf{B}_{2,i+1}^{(n(2))}, \quad \text{met definitie } \mathbf{B}_{2,n+1}^{(n(2))} = 0. \quad (88)$$

Aangezien matrix $\mathbf{B}^{(n)}$ orthogonale rijen heeft, kan λ_1 bepaald worden. We introduceren vector $\underline{\mathbf{B}}_m^{(n)}$. Deze bevat de m^{de} rij van elementen van de matrix $\mathbf{B}^{(n)}$. Uit de oplossing in paragraaf 7.1 van (88) volgt

$$\underline{\mathbf{B}}_2^{(n)} = \underline{\mathbf{B}}_1^{(n)} + \lambda_1 \underline{\mathbf{B}}_1^{(n+1)}, \quad (89)$$

we passen λ_1 zodanig aan dat (orthogonaliteit)

$$\mathbf{E}_1^{(n)T} \mathbf{E}_2^{(n)} = 0 \quad (90)$$

$$\mathbf{E}_1^{(n)T} \mathbf{E}_2^{(n)} = \mathbf{E}_1^{(n)T} \mathbf{E}_1^{(n)} + \lambda_1 \mathbf{E}_1^{(n)T} \mathbf{E}_1^{(n+1)} = 0 \quad (91)$$

ofwel

$$\lambda_1 = -\frac{\mathbf{E}_1^{(n)T} \mathbf{E}_1^{(n)}}{\mathbf{E}_1^{(n)T} \mathbf{E}_1^{(n+1)}}. \quad (92)$$

Waarmee dus ook rij 2 eenvoudig te bepalen valt. We merken op dat, gezien (83), de noemer nooit nul wordt aangezien alle termen positief zijn omdat alle machten van ξ even zijn.

7.1.3 Bepaling van de l^{de} rij van de matrix $\mathbf{B}^{(n)}$

Op identieke wijze als in paragraaf 7.1.2 bepalen we de l^{de} rij van matrix $\mathbf{B}^{(n)}$. Voor het l^{de} filter $G_{l-1}^{(n)}(z)$ geldt enerzijds

$$G_{l-1}^{(n)}(z) = \sum_{i=1}^l C_i \frac{z^{n+i-1}}{(z-\xi)^{n+i-1}} = \frac{z^n}{(z-\xi)^n} \sum_{i=1}^l \frac{C_i z^{i-1}}{(z-\xi)^{i-1}}, \quad (93)$$

en anderzijds

$$G_{l-1}^{(n)}(z) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^{n+j-2} \mathbf{B}_{l,i+1}^{(n)(j)} \frac{z}{z-\xi} \left(\frac{1-z\xi}{z-\xi} \right)^i. \quad (94)$$

Nemen we nu

$$\mathbf{B}_{l,i+1}^{(n)(j)} = \binom{n+j-2}{i} \frac{\xi^i}{(1-\xi^2)^{n+j-2}} \quad (95)$$

dan geldt

$$\mathbf{B}_{l,i+1} = \sum_{j=1}^l \lambda_j \mathbf{B}_{l,i+1}^{(n)(j)}, \quad \text{we definiëren } \mathbf{B}_{l,i+1}^{(n)(j)} = 0 \text{ als } i+1 > n+l-j+1. \quad (96)$$

We krijgen nu de vergelijking

$$\mathbf{E}_l^{(n)} = \sum_{j=1}^l \lambda_j \mathbf{E}_1^{(n+j-1)}. \quad (97)$$

Passen we op (97) l-1 keer het orthogonaliteits criterium toe, dan krijgen we het stelsel

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1^{(n)T} \mathbf{E}_1^{(n)} = \lambda_1 \mathbf{E}_1^{(n)T} \mathbf{E}_1^{(n)} + \lambda_2 \mathbf{E}_1^{(n)T} \mathbf{E}_1^{(n+1)} + \dots + \lambda_l \mathbf{E}_1^{(n)T} \mathbf{E}_1^{(n+l-1)} = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{l-1}^{(n)T} \mathbf{E}_l^{(n)} = \lambda_1 \mathbf{E}_{l-1}^{(n)T} \mathbf{E}_1^{(n)} + \lambda_2 \mathbf{E}_{l-1}^{(n)T} \mathbf{E}_1^{(n+1)} + \dots + \lambda_l \mathbf{E}_{l-1}^{(n)T} \mathbf{E}_1^{(n+l-1)} = 0 \end{cases} \quad (98)$$

Dit is een stelsel van l-1 lineaire vergelijkingen met l onbekenden. Kiezen we $\lambda_1=1$, dan kunnen we dit stelsel oplossen en daarmee ook de l^{de} rij bepalen. In de volgende paragraaf kunnen nu via een normering matrix $A^{(n)}$ bepalen.

7.1.4 Normering transformatie matrix

We kiezen k_1 zo dat geldt

$$k_1^2 \mathbf{E}_l^{(n)T} \mathbf{E}_l^{(n)} = 1 \quad (99)$$

Voor de matrix $Q^{(n)}$ geldt dan

$$Q^{(n)} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & k_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & k_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (100)$$

De k_j kunnen we numeriek oplossen. Door (100) en de oplossing van (98) in te vullen in (75) is matrix $A^{(n)}$ in principe bepaald.

7.2 Een expliciete oplossing voor $A^{(2)}$

De voorgaande paragrafen geven een oplossing voor een willekeurige n, doch geen expliciete oplossing. Voor n=2 wordt in deze paragraaf een expliciete oplossing afgeleid met een andere strategie. Het bleek echter niet mogelijk om deze strategie voor een willekeurige n toe te passen. Voor het gemak wordt in de rest van deze paragraaf gewerkt met A, Q en B in plaats van $A^{(2)}$, $Q^{(2)}$ en $B^{(2)}$.

De matrix A heeft de vorm

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \dots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (101)$$

We schrijven $A=QB$ met Q een diagonaal matrix en

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ B_{21} & B_{22} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (102)$$

en

$$Q_{ii} = \left\{ 1 + \sum_{l=1}^i B_{il}^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (103)$$

De eerste rij van matrix A is bepaald door (83) en is

$$A_{11} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad A_{12} = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \quad (104)$$

Voor de eerste rij van B en Q geldt dan

$$B_{11} = \frac{1}{\xi}, \quad Q_{11} = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \quad (105)$$

Met inductie kunnen we de volgende rijen van B en Q bepalen. Stel de matrixelementen van Q en B zijn bepaald tot en met $i-1$ de regel. We bepalen nu de i de regel van de matrix Q en B. We kiezen nu

$$B_{ik} = K_i B_{i-1,k}, \quad \text{voor } k=1,2,\dots,i-1. \quad (106)$$

dan geldt in ieder geval dat de i de rij orthogonaal is met de rijen 1 tot en met $i-1$. Ook moet de i de regel orthogonaal zijn op de $i-1$ de regel. Dus

$$\left\{ \sum_{k=1}^{i-1} B_{ik} B_{i-1,k} \right\} + B_{ii} = 0 \quad (107)$$

met behulp van (106) volgt dan

$$K_i \left\{ \frac{1}{Q_{i-1,i-1}^2} - 1 \right\} + B_{ii} = 0 \quad (108)$$

Voor de functie na transformatie geldt

$$G_{i-1}^{(2)} = \sqrt{1-\xi^2} \frac{z}{(z-\xi)^{2+i-1}} \left[\left(\sum_{k=1}^i B_{ik} (z-\xi)^{i-k+1} (1-z\xi)^{i-1} \right) + (1-z\xi)^i \right] Q_{ii} \quad (109)$$

Om nu het tweede nulpunt af te splitsen (in $z=0$) moet gelden dat alle termen met z^0 gelijk opgeteld gelijk aan nul moet zijn en dus moet gelden dat

$$\left\{ \sum_{k=1}^i B_{ik} (-\xi)^{i-k+1} \right\} + 1 = 0 \quad (110)$$

ofwel

$$K_i(-\xi)(-1) + B_{ii}(-\xi) + 1 = 0 \quad (111)$$

We lossen het stelsel (108) en (111) op

$$K_i = \frac{Q_{i-1,i-1}^2}{-\xi} \quad (112)$$

$$B_{ii} = \frac{1 - Q_{i-1,i-1}^2}{\xi} \quad (113)$$

Uit (103), (112) en (113) volgt

$$Q_{ii}^2 = \frac{\xi^2}{1 + \xi^2 - Q_{i-1,i-1}^2} \quad (114)$$

Nu kunnen we ook de expliciete uitdrukkingen bepalen

$$Q_{ii}^2 = \frac{\xi^2 \sum_{k=0}^{i-1} \xi^{2k}}{\sum_{k=0}^i \xi^{2k}} = \frac{\xi^2(1-\xi^{2i})}{1-\xi^{2i+2}} \quad (115)$$

$$K_i = \frac{-\xi \sum_{k=0}^{i-2} \xi^{2k}}{\sum_{k=0}^{i-1} \xi^{2k}} = \frac{-\xi(1-\xi^{2i-2})}{1-\xi^{2i}} \quad (116)$$

$$B_{ii} = \frac{1}{\xi} \left[1 - \frac{\xi^2 \sum_{k=0}^{i-2} \xi^{2k}}{\sum_{k=0}^{i-1} \xi^{2k}} \right] = \frac{1}{\xi} \frac{1 - \xi^2}{1 - \xi^{2i}} \quad (117)$$

$$B_{il} = K_i B_{i-1,l} = \left\{ \prod_{r=l+1}^i K_r \right\} B_{il} = (-\xi)^{i-l} \frac{\sum_{k=0}^{l-1} \xi^{2k}}{\sum_{k=0}^{i-1} \xi^{2k}} B_{il} \quad (118)$$

$$= \frac{-(-\xi)^{i-l-1}(1-\xi^2)}{1-\xi^{2i}}, \quad l \leq i, i \geq 1 \quad (119)$$

Vervolgens bepalen we de expliciete uitdrukking voor $A^{(2)}$.

$$A_{il}^{(2)} = Q_{ii}^{(2)} B_{il}^{(2)} = \frac{(-\xi)^{i-l}(1-\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^{2i}}\sqrt{1-\xi^{2i+2}}}, \quad l \leq i \text{ en } i \geq 1. \quad (120)$$

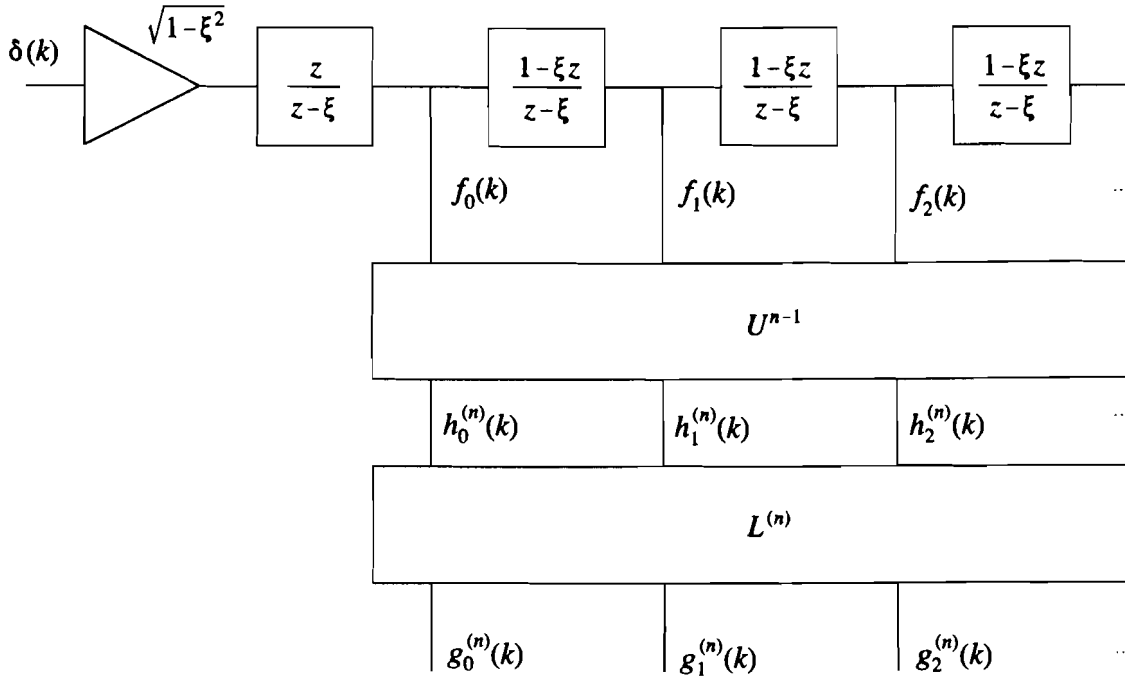
$$A_{ii+1}^{(2)} = Q_{ii}^{(2)} = \frac{\xi\sqrt{1-\xi^{2i}}}{\sqrt{1-\xi^{2i+2}}} \quad (121)$$

Voor ordes groter dan 2 is het tot nu toe niet mogelijk gebleken een expliciete uitdrukking voor $A^{(n)}$ te bepalen. Dit komt omdat door recursie vergelijking (106) niet meer gebruikt kan worden. Door de eis dat $G_n^{(n)}(z)$ een n -voudig nulpunt heeft, krijgen we weer een stelsel vergelijkingen welke niet expliciet opgelost kunnen worden. De matrix $A^{(n)}$ kan wel goed numeriek te bepaald worden. Bovendien zullen we in de volgende paragraaf de filterbank aanpassen waardoor we een eenvoudigere matrix-structuur krijgen.

7.3 Numerieke oplossing

In deze paragraaf zoeken we een numerieke oplossing voor alle waarden van n , welke numeriek stabiel is en eenvoudig te bepalen. De eerste stap is het splitsen van de matrix $A^{(n)}$ in $L^{(n)}$ en U^{n-1} en de factor $(1-\xi)^{n+1/2}$. We definiëren U nu als

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \xi & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \xi & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \xi \end{pmatrix} \quad (122)$$



Afbeelding 10: De aangepaste filterbank

In Afbeelding 10 is dit nogmaals weergegeven. De matrix U^{n-1} is dan eenvoudig op te nemen in de filterbank. Dit is weergegeven in Afbeelding 11. We merken op dat $L^{(n)}$ een onderdriehoeksmatrix is.

7.3.1 Bepaling van de matrix $L^{(n)}$

Voor matrix $A^{(n)}$ geldt

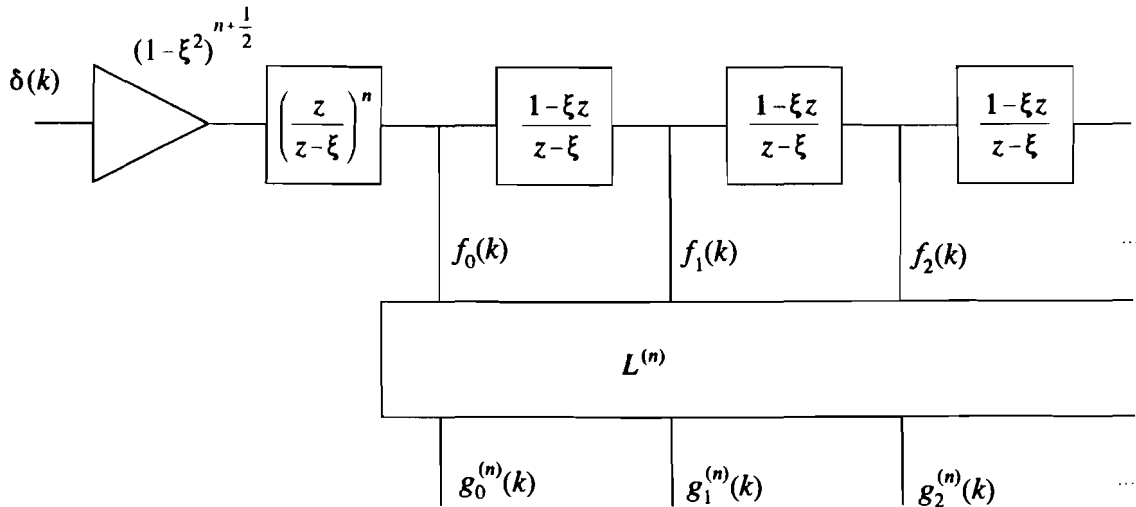
$$A^{(n)} = L^{(n)} U^{n-1} \quad (123)$$

Met deze uitdrukking kunnen we numerieke oplossing voor de matrix $L^{(n)}$ bepalen. Door orthogonaliteit geldt

$$A^{(n)} \{A^{(n)}\}^T = L^{(n)} U^{n-1} \{U^{n-1}\}^T \{L^{(n)}\}^T = I \quad (124)$$

$$\{L^{(n)}\}^{-1} \{L^{(n)}\}^{-T} = U^{n-1} \{U^{n-1}\}^T \quad (125)$$

en dus geldt dat de inverse van $L^{(n)}$ de Cholesky decompositie van $U^{n-1} \{U^{n-1}\}^T$ is:



Afbeelding 11: Vereenvoudigde filterbank

$$\{L^{(n)}\}^{-1} = \text{Chol. Decomp.} \{U^{n-1} \{U^{n-1}\}^T\} \quad (126)$$

Voor de positief definitieve bandmatrix $U^{n-1} \{U^{n-1}\}^T$ bestaat een expliciete uitdrukking. Deze uitdrukking kan afgeleid worden met inductie. Voor een element uit de i^{de} kolom en de j^{de} rij geldt

$$U^{n-1} \{U^{n-1}\}^T |_{i,j} = \sum_{t=0}^{n-|i-j|} \binom{n}{t} \binom{n}{t+|i-j|} \xi^{2n-2t-|i-j|} \quad (127)$$

Concluderend vermelden we dat (127) een expliciete uitdrukking is voor $U^{n-1} \{U^{n-1}\}^T$. Via de Cholesky decompositie bepalen we numeriek $L^{(n)}$ (126). De matrix $A^{(n)}$ is dan eenvoudig te bepalen met uitdrukking (123). Op deze wijze kunnen we op eenvoudige en stabiele wijze numeriek een orthogonale transformatie uitvoeren.

7.4 Oplossing $G_m^{(n)}$ in het tijddomein

In deze paragraaf transformeren we de gevonden orthogonale transformatie terug naar het tijddomein om zodoende enkele eigenschappen van het gevonden stelsel vast te stellen. De uitdrukking voor $G_m^{(n)}(z)$ volgt uit Afbeelding 10 en is

$$G_m^{(n)}(z) = (1 - \xi^2)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{z}{z - \xi} \right)^n \sum_{j=0}^m L_{m+1, j+1}^{(n)} \left(\frac{1 - z\xi}{z - \xi} \right)^j \quad (128)$$

Dit herschrijven we als

$$G_m^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^m C_{m+1, j+1}^{(n)} \left(\frac{z}{z - \xi} \right)^{n+j} \quad (129)$$

met C een onderdriehoeks-matrix. We transformeren (129) terug en vinden

$$g_m^{(n)}(k) = \sum_{l=0}^m C_{m+1, l+1}^{(n)} \binom{k+l+n-1}{l+n-1} \xi^k u(k) \quad (130)$$

met $u(k)$ de eenheidsstapfunctie. We splitsen het binomiaalcoefficient

$$g_m^{(n)}(k) = \sum_{l=0}^m C_{m+1, l+1}^{(n)} \frac{(k+n)_l (k+1)_{n-1}}{(l+n-1)!} \xi^k u(k) = (k+1)_{n-1} \xi^k u(k) \sum_{l=0}^m C_{m+1, l+1}^{(n)} \frac{(k+n)_l}{(l+n-1)!} \quad (131)$$

De uitdrukking (131) kunnen we herschrijven in het produkt van polynoom en een wortel uit een weegfunctie. De wortel uit de weegfunctie schrijven we

$$\sqrt{w^{(n)}(k)} = (k+1)_{n-1} \xi^k u(k) \quad (132)$$

en het polynoom

$$p_m^{(n)}(k) = \sum_{l=0}^m C_{m+1, l+1}^{(n)} \frac{(k+n)_l}{(l+n-1)!} \quad (133)$$

Rest ons nog om een uitdrukking voor C te bepalen.

7.4.1 Bepaling van de matrix $C^{(n)}$

Om $C^{(n)}$ te bepalen maken we gebruik van de splitsing

$$(1 - z\xi)^j = \left(\frac{1}{\xi} \right)^j \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (1 - \xi^2)^l z^l (-1)^{j-l} (z - \xi)^{j-l} \quad (134)$$

Indien we nu (134) substitueren in (128) krijgen we

$$G_m^{(n)}(z) = (1-\xi^2)^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{z-\xi}\right)^n \sum_{j=0}^m L_{m+1,j+1}^{(n)} \left(\frac{1}{\xi}\right)^j \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (1-\xi^2)^l z^l (-1)^{j-l} \frac{(z-\xi)^{j-l}}{(z-\xi)^j} \quad (135)$$

Dit herschrijven we

$$G_m^{(n)}(z) = (1-\xi^2)^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{z-\xi}\right)^n \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^j L_{m+1,j+1}^{(n)} \left(\frac{1}{\xi}\right)^j \binom{j}{l} (1-\xi^2)^l z^l \frac{(-1)^{j-l}}{(z-\xi)^l} \quad (136)$$

We wisselen nu de sommatie volgorde om

$$G_m^{(n)}(z) = (1-\xi^2)^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{z-\xi}\right)^n \sum_{l=0}^m \left\{ \sum_{j=l}^m L_{m+1,j+1}^{(n)} \left(\frac{1}{\xi}\right)^j \binom{j}{l} (-1)^{j-l} \right\} (1-\xi^2)^l \left(\frac{z}{z-\xi}\right)^l \quad (137)$$

Vergelijking met (129) levert

$$C_{m+1,j+1}^{(n)} = (1-\xi^2)^{n+\frac{1}{2}} \sum_{j=l}^m L_{m+1,j+1}^{(n)} \left(\frac{1}{\xi}\right)^j \binom{j}{l} (-1)^{j-l} \quad (138)$$

Daar de structuur van deze matrix nog niet erg doorzichtig is, splitsen we deze matrix als

$$C^{(n)} = (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} L^{(n)} \Lambda_1 Q \Lambda_2 \quad (139)$$

met Λ_1 een diagonaalmatrix, Q een onderdriehoeksmatrix en Λ_2 een diagonaalmatrix. Deze matrices zien er als volgt uit

$$\Lambda_{1_u} = \left(\frac{-1}{\xi}\right)^{i-1} \quad (140)$$

$$\Lambda_{2_u} = (1-\xi^2)^{i-1} (-1)^{i-1} \quad (141)$$

$$Q_{ij} = \binom{j-1}{i-1} \quad (142)$$

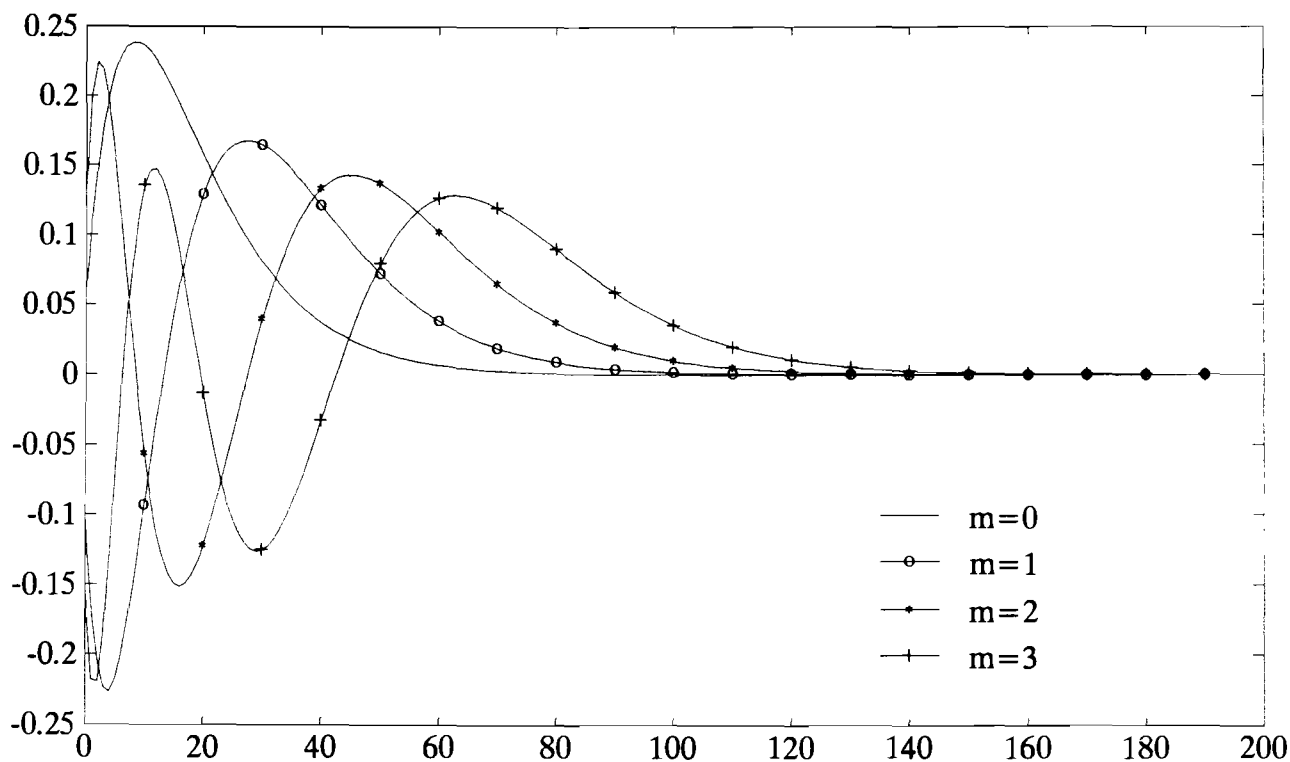
Omdat $L^{(n)}$, Λ_1 , Q en Λ_2 eenvoudig numeriek te bepalen zijn kunnen we dus ook $C^{(n)}$ en de polynomen $p_m^{(n)}(k)$ (133) eenvoudig bepalen.

7.5 Voorbeelden

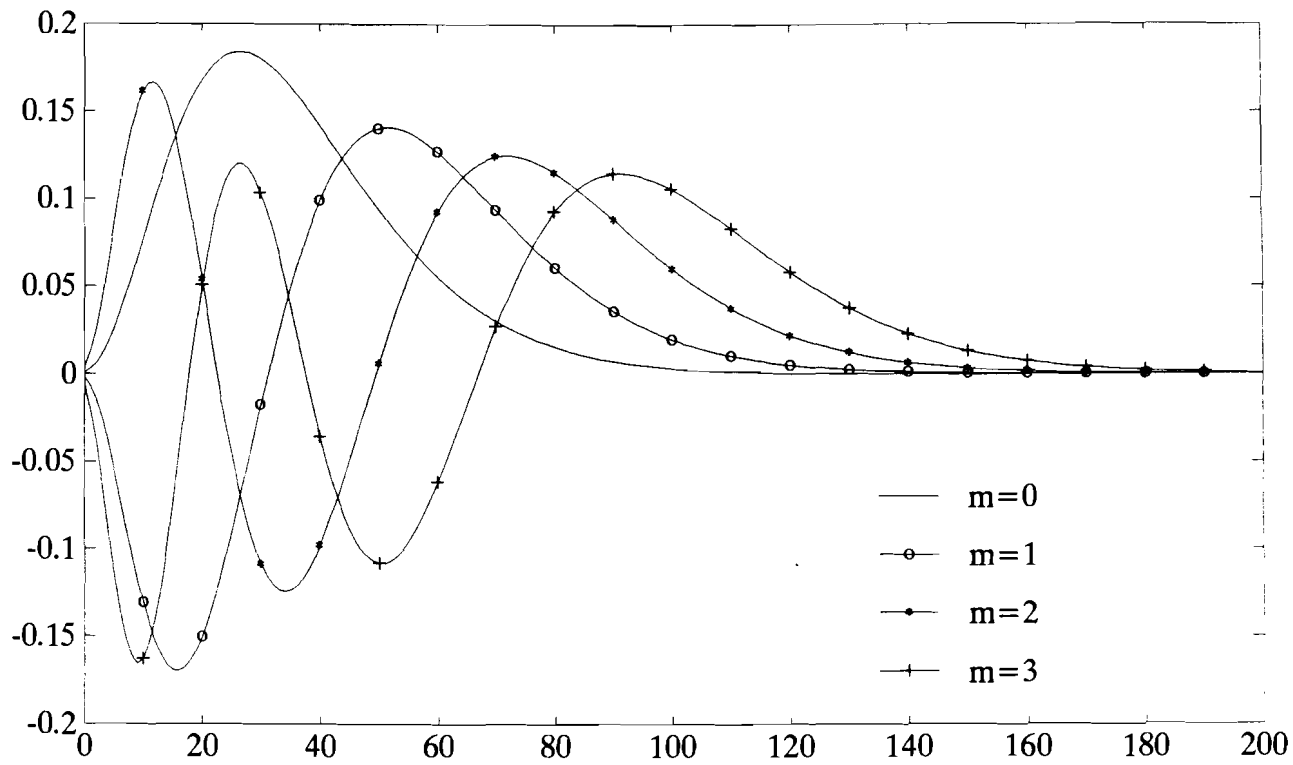
Tot slot laten we grafische voorstelling van de functies (129) zien. Deze zijn numeriek bepaald. Achtereenvolgens geven we weer:

- $g_m^{(n)}(k)$ voor $\xi=0.9$, $n=2$ en $m=0,1,2$ en 3 in Afbeelding 12
- $g_m^{(n)}(k)$ voor $\xi=0.9$, $n=4$ en $m=0,1,2$ en 3 in Afbeelding 13
- $g_m^{(n)}(k)$ voor $\xi=0.9$, $n=9$ en $m=0,1,2$ en 3 in Afbeelding 14

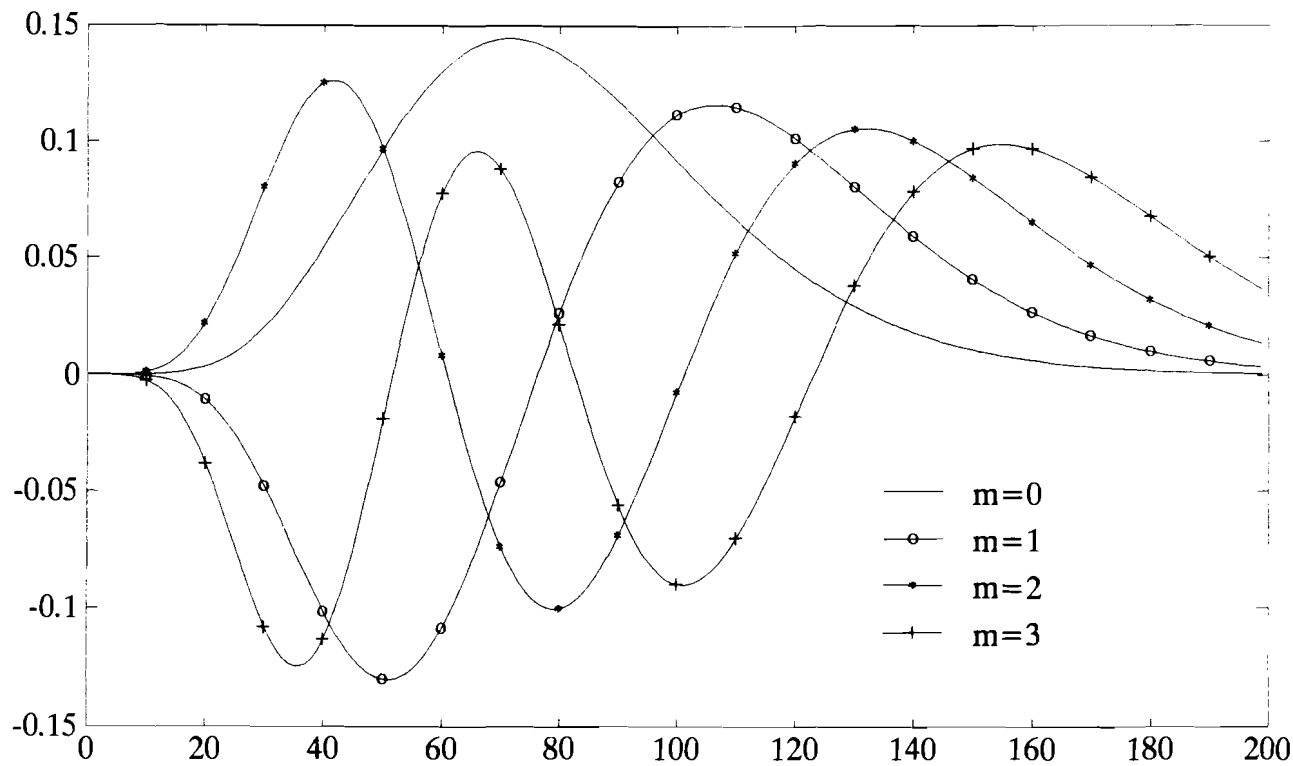
We zien dat naarmate de orde van het eerste filter (n) groter wordt, dat de top van het venster verder weg ligt van de nul.



Afbeelding 12: $g_m^{(n)}(k)$ voor $\xi=0.9$, $n=2$, $m=0, 1, 2$ en 3 .



Afbeelding 13: $g_m^{(n)}(k)$ voor $\xi=0.9$, $n=4$, $m=0, 1, 2$ en 3 .



Afbeelding 14: $g_m^{(n)}(k)$ voor $\xi=0.9$, $n=9$, $m=0, 1, 2$ en 3 .

7.6 Kenmerken

Voor de genererende functie geldt

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m^{(n)}(k) \frac{z^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m C_{m+1,i+1}^{(n)} \frac{(k+n)_i}{(i+n-1)!} \frac{z^m}{m!} \quad (143)$$

Omdat van matrix $C^{(n)}$ geen expliciete uitdrukking bestaat valt in het algemeen geen expliciete uitdrukking voor de genererende functie af te leiden. Dit geldt natuurlijk evenzo voor de recurrente betrekking en de differentie vergelijking.

Er bestaat wel een expliciete uitdrukking voor $L^{(2)}$. Hiertoe combineren we (123) met (120), (121) en (122)

$$L_{ij}^{(2)} = \frac{(-\xi)^{i-j}(1-\xi^{2j})}{\sqrt{1-\xi^{2i}}\sqrt{1-\xi^{2i+2}}}, \quad \text{met } j \leq i \quad (144)$$

Invullen in (138)

$$C_{m+1,i+1}^{(2)} = \frac{(-\xi)^m (1-\xi^{\frac{5}{2}+i})}{\sqrt{1-\xi^{2m+2}}\sqrt{1-\xi^{2m+4}}} (-1)^i \sum_{j=i}^m \binom{j}{i} \left(\frac{1}{\xi^2}\right)^j (1-\xi^{2j+2}) \quad (145)$$

Het is ons niet gelukt dit verder te vereenvoudigen. Ook hiermee is het bepalen van een expliciete uitdrukking voor de genererende functie, recurrente betrekking en differentie vergelijking niet mogelijk.

Tot slot bekijken we nog een algemene methode voor het afleiden van de recurrente betrekking uit de differentie vergelijking. We gaan uit van de differentie vergelijking van de discrete Laguerre functies (43)

$$-k\xi f_n(\xi; k-1) + (k+(k+1)\xi^2) f_n(\xi; k) - \xi(k+1) f_n(\xi; k+1) = n(1-\xi^2) f_n(\xi; k) \quad (146)$$

Deze vergelijking is zodanig gerangschikt dat het linkerdeel afhankelijk is van k en het rechterdeel afhankelijk van m . We schrijven (146) in matrix notatie

$$\begin{pmatrix} f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & \dots \\ f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & \dots \\ f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^2 & -\xi & 0 \\ -\xi & 1+2\xi^2 & -2\xi \\ 0 & -2\xi & 2+3\xi^2 & -3\xi \\ 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (1-\xi^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \\ 2 & \\ 0 & \dots \end{pmatrix} f_n(\xi; k) \quad (147)$$

ofwel

$$\Phi(\xi)R(\xi) = (1-\xi^2)K\Phi(\xi) \quad (148)$$

met R en K symmetrische matrices.

Uit de symmetrie (42) volgt

$$f_m(\xi; k) = f_k(-\xi; m) \quad (149)$$

en dus

$$\phi(\xi) = \phi^T(-\xi) \quad (150)$$

Door invullen in (148) krijgen we

$$R(\xi)\phi(-\xi) = (1-\xi)\phi(-\xi)K \quad (151)$$

We passen

$$A^{(n)}\phi(\xi) = \begin{pmatrix} g_0^{(n)}(0) & g_0^{(n)}(1) & g_0^{(n)}(2) & \dots \\ g_1^{(n)}(0) & g_1^{(n)}(1) & g_1^{(n)}(2) & \dots \\ g_2^{(n)}(0) & g_2^{(n)}(1) & g_2^{(n)}(2) & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} = G^{(n)}(\xi) \quad (152)$$

toe op (151) en krijgen de vergelijking

$$A^{(n)}(\xi)R(\xi)A^{(n)T}(-\xi)G^{(n)}(-\xi) = (1-\xi^2)G^{(n)}(-\xi)K \quad (153)$$

Dit kunnen we herschrijven tot een recurrente betrekking

$$P^{(n)}(\xi)G^{(n)}(\xi) = G^{(n)}(\xi)K \quad (154)$$

met

$$P^{(n)}(\xi) = \frac{A^{(n)}(-\xi)R(\xi)A^{(n)T}(-\xi)}{(1-\xi^2)} \quad (155)$$

Doordat we nu een recurrente betrekking hebben voor de functies volgt hieruit ook een betrekking voor de polynomen. Deze zijn echter vooralsnog alleen numeriek te bepalen.

8 Conclusies

Allereerst is aangetoond dat indien we als filterbank een lineair regressie model gebruiken in een adaptief filter, de algoritmes RLS en LMS toegepast mogen worden. Filterbanken gebaseerd op discrete orthogonale polynomen vallen binnen deze klasse van lineaire regressie modellen. We mogen dus de algoritmes RLS en LMS gebruiken in deze systemen.

Een bekende generalisatie van discrete Laguerre functies zijn de Meixner functies. De Meixner functies zijn niet herschrijfbaar als polynomen in k (behalve voor $\beta=1$) en hebben dus geen rationale z -getransformeerden en zijn dus niet implementeerbaar als impulsresponsie van lineaire tijdinvariante filters. Voor $\beta=1$ zijn de Meixner functies gelijk aan de Laguerre functies en is de implementatie bekend.

Door op de tijdcontinue gegeneraliseerde Laguerre functies een gemodificeerde bilineaire transformatie toe te passen ontstaan discrete gegeneraliseerde Laguerre functies. Ook deze set van functies is orthonormaal. Van deze functies is bewezen dat ze in het algemeen niet geschreven kunnen worden als een weegfunctie en een polynoom. De functies vertonen wel het juiste gedrag maar vallen niet in het polynoom concept. Verder onderzoek is hiervoor aan te bevelen.

Als laatste is de mogelijkheid van een orthogonale transformatie bekeken. Hierbij passen we op de Laguerre filterbank een orthogonale matrix transformatie toe. Door aan de getransformeerde enkele eisen te stellen wordt de transformatie matrix bepaald. Dit komt neer op het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen. Voor de graad 2 is er een expliciete oplossing afgeleid.

Door de orthogonale transformatie matrix te splitsen in twee matrices kan via een Cholesky decompositie de transformatie matrix numeriek bepaald worden voor order groter of gelijk aan 2. Dit is een numeriek stabiele en eenvoudige oplossing. Het blijkt dat, deze door transformatie ontstane functies, geschreven kan worden als een weegfunctie en een polynoom. Ook deze functies vertonen het gewenste gedrag en zijn dus een echte uitbreiding van het Laguerre concept.

Referenties

1. Brinker, A.C. den, "Adaptive modified Laguerre filters", *Signal Processing*, Vol. 31, pp. 69-79, 1993.
2. Ljung, L. en Svante G., "Adaption and Tracking in System Identification - A Survey", *Automatica*, Vol. 26, No. 1, pp. 7-21, 1990
3. Chihara T., *An introduction to orthogonal polynomials*, New York: Gordon and Breach, 1978
4. Fu Y. en Dumont A., "An optimum time scale for discrete Laguerre network", *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 38, No. 6, pp. 934-938, 1993
5. Gottlieb M.J., "Concerning some polynomials orthogonal on a finite or enumerable set of points", *Am. J. Math.*, Vol. 60, pp. 453-458, 1938
6. Meixner J., "Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion", *J. London Math. Soc.*, Vol 9. No. 1, pp. 6-13, 1934
7. Nurges Y.A., "Meixner models of linear discrete systems", *Automat. Remote Control*, Vol. 49, pp. 1638-1644, 1988.
8. King R.E. en Paraskevopoulos P.N., "Digital Laguerre filters", *Circuit theory and applications*, Vol. 5, pp. 81-91, 1977.
9. Bateman, H., *Higher transcendental functions*, Volume II, New York: McGraw-Hill, 1953.
10. Brinker A.C. den, "Relations between Laguerre spectra at different scales", in voorbereiding.
11. Abramowitz M., *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, New York: Dover Publications, 1965

Bijlage: Matlab-software

```
function f=fac(n)

% Deze functie berekend de faculteit van het getal n
% Aanroep:
%     fac(n)
%     n: integer, >0

tmp=1;
while n>1
    tmp=tmp*n;
    n=n-1;
end;
f=tmp;

function b=binomial(n,k)

% Deze functie berekent het binomiaal coefficient
% Aanroep BINOM(n,k)
%     n: integer
%     k: integer

b=1;
if n>k
    b=GAMMA(n+1)/(GAMMA(k+1)*GAMMA(n-k+1));
end

function g=ma (n,k,o)

% functie voor het genereren van de matrix A
%     function ma (n,k,o)
%         n:dimensie
%         k:ksi factor
%         o:orde matrix A
%         de dimensie is altijd n,n

hgh=makee(n+o-2,k)*makee(n+o-2,k)';
for m=3:o,
    hgh=makee(n+o-m,k)*hgh*makee(n+o-m,k)';
end;
hg2=inv(chol(hgh)');
hgh=makee(n+o-2,k);
for m=3:o,
    hgh=makee(n+o-m,k)*hgh;
end;
g=hg2*hgh;

function g=makee(n,ksi)

% functie voor het genereren van de matrix e
%     function makee(n,ksi)
%         n:dimensie
%         ksi:ksi factor
%         de dimensie is altijd n,n+1

d=ones(1,n);
g=diag(ksi*d,1);
g=g(1:n,1:n+1) + [eye(n),zeros(n,1)];
%g=g*(1-ksi^2);
```

```

function g=me(n,ksi,o)

% function g=me(n,ksi,o)
% functie voor het genereren van de matrix E
% function me (n,k,o)
%     n :dimensie
%     ksi:ksi factor
%     o :orde matrix A
%     de dimensie is altijd n,n

hgh=makee(n+o-2,ksi)*makee(n+o-2,ksi)';
for m=3:o,
    hgh=makee(n+o-m,ksi)*hgh*makee(n+o-m,ksi)';
end;
g=inv(chol(hgh)');

function C=mtrxc(ksi,o,m)

% function C=mtrxc(ksi,o,m)
%
% C= matrix C
%
% ksi = discount factor
% o   = orde van de nieuwe orthogonale set (eerste filter)
% m   = dimensie van C matrix

% opbouw diagonaal matrices
v=0:m-1;
D1=diag((-1/ksi) .^ v);
D2=diag((ksi^2-1) .^ v);

% matrix met binomiaalcoefficienten
B=[1,zeros(1,m-1)];
for i=2:m,
    dum=[0,B(i-1,1:m-1)];
    B(i,1:m)=B(i-1,1:m)+dum;
end;

% volledige matrix C
C=(1-ksi^2)^(o-0.5)*D1*B*D2;

function P=mtrxp(xi,o,m,kmax)

% function P=mtrxp(ksi,o,m,kmax)
%
% matrix met de polynomen
% ksi = discount factor
% o   = orde nieuwe set orthonormale functies (orde prefilter)
% m   = aantal te bepalen polynomen
% kmax = aantal discrete tijdstippen

P      =ones(1,kmax);
df(1,1)=1/fac(o-1);
df(2,2)=df(1,1)/o;
rij=0:kmax-1+m-2;
rij=o+rij;
P(2,:)=rij(1:kmax);

for l=3:m,
    df(1,1)=df(l-1,1-1)/(o+l-2);
    P(l,:)=P(l-1,:) .* rij(l-1:kmax+l-2);

```

```

end;

P=df*P;

% function P=mtrxp2(ksi,n,m,kmax)
%
% matrix met de polynomen
% ksi = discount factor
% n   = orde nieuwe set orthonormale functies (orde prefilter)
% m   = aantal te bepalen polynomen
% kmax = aantal discrete tijdstippen

function P=mtrxp2(xi,n,m,kmax)

P      =ones(1,kmax);
df(1,1)=1/fac(n-1);
df(2,2)=df(1,1)/n;
rij=0:kmax-1+m-2;
rij=n+rij;
P(2,:)=rij(1:kmax);

for l=3:m,
    df(1,1)=df(1-1,1-1)/(n+1-2);
    P(1,:)=P(1-1,:) .* rij(1-1:kmax+1-2);
end;
P
P=df*P;

function g=t1 (n,ksi,o,z)
% functie voor het genereren van de functie g_n(z)
% function t1 (n,ksi,o,z)
%     n:dimensie
%     ksi:ksi factor
%     o:orde eerste filter
%     z:functie is in het z-domein
tla=ma(n,ksi,o);
g=0;
for m=1:n+o-1,
    g=g+tla(n,m)*L(m,1,ksi,z);
end;

function g= zdgl (n,a,ksi,z)
% functie z-domein discrete gegeneraliseerde laguerre
%     zdgl(n,a,ksi,k)
dglf2=0;
for m=0:n
    dglf2 = dglf2 + (-1).^m .* binomial (n,m) .* GAMMA(a/2+m+1) .* (1+ksi)-
.^m/GAMMA(a+m+1)
    .* (z .* (z+1).^(a/2+m) / (z+ ksi).^(a/2+m+1) );
end;
dglf3 = sqrt ( GAMMA (a+n+1) * (1-ksi) * (1+ksi)^(a+1) / fac(n) );
g=dglf2 * dglf3;
end;

```