

MASTER

De waardedelingshypotheek : risicoanalyse

Lord, R.

Award date:
2001

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

Doctoraalscriptie

De Waardedelingshypotheek
Risicoanalyse

Roger Lord

Afstudeerdocent: Dr. J.H.J. Einmahl
Externe begeleider: Dr. D. Salomé

September 2000, Limbricht

Voorwoord

Deze scriptie is het resultaat van mijn afstudeerproject voor de studie technische wiskunde, afstudeerrichting statistiek, aan de Technische Universiteit Eindhoven. De aanzet voor het afstudeerproject was een stage van zes maanden bij het voormalige Centrum voor Toegepaste Wiskunde van de Rabobank Groep. Het doel van deze stage was het uitvoeren van een risicoanalyse voor een potentieel nieuw hypothecair product van de Rabobank: de Waardedelingshypothek. Na afloop van deze stage heb ik mij in de resterende drie maanden van mijn afstuderen verdiept in de methode van het waarderen van een dergelijk product, en hier een eigen idee over uitgewerkt.

Allereerst wil ik mijn afstudeerbegeleider op de Technische Universiteit Eindhoven, dr. J.H.J. Einmahl, hartelijk bedanken voor de begeleiding tijdens mijn afstuderen. Hij las alle stukken die ik inleverde altijd nauwgezet door, en leverde altijd nuttig commentaar. Bovendien ben ik hem veel dank verschuldigd vanwege het feit dat hij bereid was om mij te begeleiden bij een financieel wiskundig onderwerp, hetgeen in Eindhoven niet tot de gebruikelijke afstudeeronderwerpen behoort. Mijn dank gaat uit naar drs. H. van Capelleveen voor het creëren van de ruimte voor een stage. Dr. D. Salomé, mijn begeleider tijdens mijn stage bij de Rabobank, wil ik hartelijk bedanken voor de professionele begeleiding tijdens mijn stage. Tevens ben ik dr. T. Mikosch van de Rijksuniversiteit Groningen dank verschuldigd voor het aanspreken van zijn contacten bij het zoeken naar een stageplaats. Alle overige medewerkers van het Centrum voor Toegepaste Wiskunde worden vriendelijk bedankt voor de zeer prettige werksfeer op de afdeling.

Op een persoonlijk niveau zou ik allereerst mijn ouders willen bedanken voor de steun die zij mij tijdens mijn studie gegeven hebben. Tevens zou ik mijn twee goede vrienden Walter Foppen en Olivier Laseroms willen bedanken voor de interesse die zij toonden in mijn project en de bereidheid om mee te denken als er zich problemen voordeden.

Eindhoven, 's-Hertogenbosch, Limbricht, september 2000
Roger Lord

Samenvatting

Het product waarover het grootste deel van deze scriptie handelt, is de vaste waardedelingshypotheek. Het principe van waardedeling houdt hierbij in dat de huiseigenaar een deel van de toekomstige waardeinstijging van zijn huis afstaat om een eenmalige of maandelijkse uitkering te ontvangen. Het product is index-gebaseerd, dit wil zeggen dat de waardeinstijging van het huis wordt bepaald aan de hand van de waardeinstijging van de index. We zullen de samenvatting hier uitsplitsen in drie delen: de huizenprijsindex, het optiewaarderingsmodel en de risicoanalyse. Alvorens overgegaan kon worden tot het uiteindelijke doel van de scriptie, de risicoanalyse van het product, zijn twee bouwstenen van het product bekeken. Allereerst was dit de huizenprijsindex, welke ten grondslag ligt aan het product. Ten tweede is de methode van waardering van het product natuurlijk zeer belangrijk voor de uiteindelijke risicoanalyse.

Huizenprijsindex

Aangezien de huizenprijsindex een wezenlijk onderdeel is van het product, is in eerste instantie onderzocht hoe deze gemodelleerd kan worden (zie § 3.6). Hierbij zijn twee aanpakken gebruikt:

- het doortrekken van de stijgende lijn in de huizenprijsindex die vanaf 1986 duidelijk zichtbaar is; dit leidt tot een ARMA model voor de rendementen op de huizenprijsindex, en is min of meer vergelijkbaar met de aanpak uit Meulenberg en Vondenbusch [1999];
- het modelleren van een niet nader gespecificeerde economische variabele, die weergeeft of de huizenmarkt zich in een opgaande of neerwaartse toestand bevindt; dit leidt tot een zogenaamd *changes in regime* tijdreeksmodel, naar Hamilton [1994].

Het nadeel van de eerste aanpak is dat je alle data voor 1986 niet gebruikt, waardoor de huizenprijsindex in dit model bijna geen dalingen kan vertonen. Deze eigenschap bezit de tweede methode wel; een groot nadeel van deze methode is echter dat er in de aanwezige datareeksen slechts één à twee wisselingen van toestand aanwezig zijn. Dit maakt de schattingen zeer onnauwkeurig.

Beide modellen leiden uiteraard tot zeer verschillende verwachtingen omtrent de ontwikkeling van de huizenprijsindex. Een gevolg hiervan is dat de beide modellen meer als verschillende scenario's gezien moeten worden, die bij de risicoanalyse gebruikt kunnen worden. Een uiteindelijk model zal de economische determinanten van de huizenprijsindex moeten bevatten, iets waartoe in Brons [2000] een aanzet is gegeven.

Optiewaarderingsmodel

Illiquiditeit en grote transactiekosten in de huizenmarkt maken het onmogelijk om een representatief aandeel in de huizenmarkt te nemen en hier in willekeurige hoeveelheden in te handelen, waardoor de opties niet gewaardeerd kunnen worden met behulp van de Black-Scholes formule. Er zijn vervolgens twee methoden bekeken om opties te waarderen op goederen die niet verhandelbaar zijn: *expectation pricing* of *partial pricing*. Bij deze laatste techniek gaan we er van uit dat er verhandelbare aandelen bestaan, die gecorreleerd zijn met het goed waarop we een optie willen prijzen. Het risico van de huizenprijsindex gaan partieel worden afgedekt door te handelen in deze aandelen. In het geval van de waardedelingshypotheek zijn deze verhandelbare aandelen bijvoorbeeld beursgenoteerde vastgoedfondsen. De correlatie van de rendementen op deze fondsen met de bekeken huizenprijsindices bleek vrij laag te zijn, zodat de risicoreductie in vergelijking

met expectation pricing miniem is. Er is dan ook voor deze laatste eenvoudigere variant gekozen. De waarde wordt nu berekend als verdisconteerde verwachting van de uitbetaling, in het geval van de waardedelingshypotheek het deel van de waardeinstijging dat de particulier terug moet betalen aan de bank.

De parameters welke in het optiewaarderingsmodel worden ingevuld, zijn geschat aan de hand van de beschikbare data. Er zit een zekere statistische onzekerheid in deze schattingen, welke derhalve doorwerkt in de schatting voor de optieprijs. Voor het bekeken probleem blijken de autocorrelaties in de rendementen en de volatiliteit van de rendementen vrijwel onbelangrijke parameters te zijn. Het verwachte rendement op de huizenprijsindex blijkt de belangrijkste determinant van de optieprijs te zijn. De grote onzekerheid omtrent deze schatting, waarschijnlijk door een gering aantal waarnemingen, is er debet aan dat een eenduidige optieprijs in deze setting vrijwel onmogelijk is.

Risicoanalyse

Na het bekijken van deze twee bouwstenen van het product, is overgegaan tot een risicoanalyse. In hoofdstuk 5 worden diverse risico's op een kwalitatieve manier besproken. Twee van deze risico's zijn in de laatste twee hoofdstukken gekwantificeerd, te weten:

- Het risico van de particulier (hoofdstuk 6);
- Het risico van de bank (hoofdstuk 7).

Risico Particulier

Eén van de risico's van de particulier bestaat hierin, dat er een zekere mismatch is tussen de waardeontwikkeling van het huis zelf, en de waardeontwikkeling van de index waarop dit product afgesloten wordt. Het zou bijvoorbeeld voor kunnen komen dat hoewel de index gestegen is, en de particulier derhalve een percentage van deze stijging moet afstaan, de waarde van de woning van deze persoon gedaald is. Er is onderzocht hoeveel procent van de klanten tevreden is, d.w.z. hoeveel procent van de klanten niet meer dan het afgesproken percentage van de echte waardeinstijging van hun woning af moeten dragen, of in het geheel niets hoeven terug te betalen. Op grond van modellen en historische data is gebleken dat dit *tevredenheidspercentage* tussen de 60 en 70% ligt.

Een tweede aandachtspunt bij de particulier bedroeg het bepalen van de mate van diversificatie bij het nemen van een waardedelingshypotheek. Hieruit is gebleken dat er voor de meeste regionale indices geldt dat er sprake is van diversificatie bij de aantrekkelijk lijkende waardedelingspercentages van 25 en 50%. Met andere woorden, het nemen van een waardedelingshypotheek reduceert de volatiliteit in de portefeuille van de particulier, zij het in geringe mate. De oorzaak hiervan is de vrij geringe correlatie tussen de waardeontwikkeling van een individuele woning en de betreffende regionale index. Bij de NVM indices ligt deze correlatie hoger, zodat het wellicht aan te bevelen is naast de Kadaster indices ook indices voor NVM woningen te ontwikkelen. Dit zou ook de eerder genoemde mismatch verkleinen.

Risico Bank

Een van de risico's waaraan de bank is blootgesteld, is de ontwikkeling van de verscheidene huizenprijsindices. Daar de beleggers opties kopen op een nationale index, en de waardedelingshypotheek op regionale indices afgesloten worden, neemt de bank een positie in op de huizenmarkt. Zonder een aanname te maken over het gedrag van de beleggers, is onderzocht in welke orde van grootte dit risico ligt. Indien het niet mogelijk is om maandelijks een even groot optievolume uit te zetten bij de beleggers als dat er aan

de kant van de particulieren gegenereerd wordt door de vraag naar waardedelingshypotheken, blijkt de volatiliteit in het netto resultaat van de bank vele malen hoger te liggen dan wanneer dit wel mogelijk is. Een te grote vraag van de zijde van de beleggers heeft eenzelfde effect tot gevolg. Deze verhoogde volatiliteit betekent dat het risicodragende bedrag van de bank groter wordt. Hierdoor kunnen niet geringe verliezen opgelopen worden, welke niet geheel ongedaan gemaakt kunnen worden door het optellen van een redelijke risicopremie bij de prijs van de optie.

Een maat voor het risicodragende deel van de portefeuille is de value at risk (VaR¹). Indien we de VaR op de portefeuille met waardedelingshypotheken vergelijken met de VaR op de investeringsboeken en de handelsboeken van Rabobank International, vinden we dat deze hier respectievelijk 5% en 1 à 2% van is. Dit zijn slechts ruwe schattingen, maar geven wel een indicatie is dat het risico van de bank met een niet geringe factor verhoogd wordt ten gevolge van het handelen in waardedelingshypotheken.

Conclusies

Met betrekking tot de waardedelingshypothek zijn de belangrijkste bevindingen uit deze scriptie de volgende:

1. Het blijkt moeilijk te zijn om met de huidige beschikbare data een eenduidige prijs te bepalen voor de waardedelingshypothek.
2. Het risico dat de particulier loopt doordat de waardedelingshypothek op een index wordt afgesloten, is niet gering. Dit risico kan verkleind worden door naast de Kadaster indices ook NVM indices te gebruiken. Het risico zal echter altijd aanwezig blijven; dit is eigen aan een index-gebaseerd product.
3. Het risico dat de bank loopt door het handelen in index-gebaseerde producten zoals de waardedelingshypothek is niet te verwaarlozen. Er kunnen niet geringe verliezen worden opgelopen, die niet geheel ongedaan gemaakt kunnen worden door een bepaalde risicopremie in te houden bij de uitkeringen van de waardedelingshypotheken.

¹ Zie paragraaf 7.2 voor een uitleg van value at risk.

Inhoudsopgave

| | |
|--|-----------|
| Voorwoord | 3 |
| Samenvatting | 5 |
| | |
| Deel I - Algemeen | |
| 1. Inleiding | 15 |
| 2. De Waardedelingshypotheek | 17 |
| 2.1. De particulier | 17 |
| 2.1.1. Event-triggered waardedelingshypotheek | 18 |
| 2.1.2. Doelgroepen voor de waardedelingshypotheek | 18 |
| 2.1.3. Vroegere experimenten met de waardedelingshypotheek | 19 |
| 2.2. De belegger | 20 |
| 2.2.1. Call opties voor de belegger | 20 |
| 2.2.2. Aantrekkingskracht vastgoedderivaten voor beleggers | 20 |
| 3. De huizenprijsindex | 21 |
| 3.1. Transacties of taxaties? | 21 |
| 3.2. Transactiebestanden | 21 |
| 3.2.1. Duurdere woningen NVM | 22 |
| 3.2.2. Langere historie NVM | 23 |
| 3.2.3. Keuze tussen NVM en Kadaster | 23 |
| 3.3. Index type | 24 |
| 3.4. Clustering | 24 |
| 3.4.1. Clustering naar woningtype | 25 |
| 3.4.2. Clustering naar regio | 25 |
| 3.5. Eigenschappen van de huizenprijsindex | 27 |
| 3.5.1. De huizenprijsindex door de tijd | 27 |
| 3.5.2. Indexcijfer en aantal transacties | 28 |
| 3.5.3. Volatiliteit van de tijdreeks | 28 |
| 3.5.4. Gemiddeld rendement op de index | 29 |
| 3.6. Modellering huizenprijsindex | 31 |
| 3.6.1. ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986 | 31 |
| 3.6.2. Tijdreeksmodel met veranderende regimes | 33 |
| Samenvatting | 35 |
| 4. Optiewaarderingsmodel | 37 |
| 4.1. Inleiding tot opties | 38 |
| 4.2. Waarderingsmethoden voor opties | 41 |
| 4.2.1. Black-Scholes pricing | 41 |
| 4.2.2. Expectation pricing | 42 |
| 4.2.3. Partial pricing | 43 |
| 4.2.4. Discreet hedgen | 43 |
| 4.3. Derivaten op de huizenprijsindex | 44 |
| 4.3.1. Verschillen met de traditionele aannamen | 44 |
| 4.3.2. Optiewaarderingsmodel | 45 |
| 4.3.2.1. ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986 | 45 |

| | |
|--|----|
| 4.3.2.2. Tijdreeksmodel met veranderende regimes | 47 |
| 4.4. Vaste waardedelingshypotheek | 48 |
| 4.5. Gevoeligheden optiewaarderingsmodel | 50 |
| 4.5.1. Autocorrelaties | 50 |
| 4.5.2. Volatiliteit | 51 |
| 4.5.2.1. ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986 | 51 |
| 4.5.2.2. Tijdreeksmodel met veranderende regimes | 52 |
| 4.5.3. Gemiddeld rendement | 53 |
| 4.5.4. Overgangskansen | 55 |
| Samenvatting | 56 |

Deel II - Risicoanalyse

| | |
|---|-----------|
| 5. Risico Inventarisatie | 59 |
| 5.1. Marktrisico | 60 |
| 5.2. Debiteurenrisico | 61 |
| 5.3. Liquiditeitsrisico | 61 |
| 5.4. Productrisico | 62 |
| 5.5. Regelgevingsrisico | 64 |
| 5.6. Overige risico's | 66 |
| 6. Risico Particulier | 69 |
| 6.1. Modellerings waardeontwikkeling woning | 70 |
| 6.2. Mean-variance analyse | 71 |
| 6.2.1. Optimale waardedelingspercentage | 72 |
| 6.2.2. Variantie reductie percentage | 73 |
| 6.3. Mismatch Particulier - Historische voorbeelden | 75 |
| 6.4. Mismatch Particulier - Kwantificering | 77 |
| Samenvatting | 78 |
| 7. Risico Bank | 79 |
| 7.1. De portefeuille van de bank | 80 |
| 7.1.1. Maandelijks verandering van de optieportefeuille | 80 |
| 7.1.2. Maandelijks vraag naar waardedelingshypotheek | 81 |
| 7.2. Value at Risk | 84 |
| 7.3. Risico Bank - Resultaten | 85 |
| 7.3.1. Netto resultaat | 85 |
| 7.3.2. Value at Risk | 87 |
| Samenvatting | 88 |
| 8. Conclusies | 89 |

Appendices

| | |
|---|-----------|
| Appendix - Multilognormale verdeling | 93 |
| Appendix 3 - De huizenprijsindex | 97 |
| 3.A. Huizenprijsindices | 97 |
| 3.B. Repeat sales bestanden | 99 |
| 3.C. ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986 | 100 |
| 3.C.1. Modellerings | 100 |

| | |
|--|------------|
| 3.C.2. Model voor alle indices | 102 |
| 3.C.3. Modelschattingen | 103 |
| 3.D. Tijdreeksen onder veranderende regimes | 105 |
| 3.D.1. Modelling | 105 |
| 3.D.2. Resultaten | 108 |
| 3.D.3. Model voor alle indices | 109 |
| 3.D.4. Modelschattingen | 110 |
| Appendix 4 - Optiewaarderingsmodel | 111 |
| 4.A. Het waarderen van Europese derivaten in continue tijd | 111 |
| 4.A.1. Expectation pricing | 112 |
| 4.A.2. Arbitrage pricing | 113 |
| 4.A.3. Partial pricing | 115 |
| 4.A.4. Hedging error | 118 |
| 4.A.4.1. Een stochastische integraal voor de hedging error | 118 |
| 4.A.4.2. Variantie van de hedging error | 118 |
| 4.A.5. Vergelijking van de waarderingsmethoden | 120 |
| 4.A.5.1. De data | 120 |
| 4.A.5.2. Voorbeeld van partial pricing | 121 |
| 4.B. Het waarderen van Europese derivaten in discrete tijd | 123 |
| 4.B.1. Wilmotts model voor discreet hedgen | 124 |
| 4.B.2. Een intermezzo in conditionele verwachtingen | 125 |
| 4.B.3. Een exacte formule voor de optieprijs | 127 |
| 4.B.4. Toepassingen van de waarderingstechnieken | 131 |
| 4.C. Stochastische calculus | 134 |
| Appendix 6 - Risico Particulier | 137 |
| 6.A. Modelling waardeontwikkeling woning | 137 |
| 6.A.1. Model validatie | 139 |
| 6.A.2. Modelschattingen | 140 |
| 6.B. Mean-variance analyse | 141 |
| 6.B.1. Optimale waardedelingspercentage | 142 |
| 6.B.2. Variantie reductie percentage | 143 |
| 6.C. Modelresultaten mismatch particulier | 145 |
| Appendix 7 - Risico Bank | 147 |
| 7.A. Modelling vraag naar waardedelingshypotheken | 147 |
| 7.A.1. Transactieaantallen per woningtype per regio | 148 |
| 7.A.2. Marktaandeel Rabobank | 150 |
| 7.A.3. Index-gecorrigeerde transactiepreizen | 151 |
| 7.A.3.1. NVM transactiebestand | 151 |
| 7.A.3.2. Kadaster transactiebestand | 153 |
| 7.B. Value at Risk | 155 |
| 7.B.1. Delta-Normal VaR | 155 |
| 7.B.2. Portfolio Delta-Normal VaR | 156 |
| 7.B.3. De eerste twee momenten van een call-optie | 159 |
| Bibliografie | 160 |

Deel I - Algemeen

1. Inleiding

Ondanks dat de marktomvang van de particuliere vastgoedsector in Nederland alleen al groter is dan de omvang van het totale aandelenbezit op de Amsterdamse effectenbeurs, is er toch nog geen markt ontwikkeld voor vastgoedderivaten. Naast een speculatieve functie, hebben derivaten voornamelijk een verzekerende functie: ze kunnen gebruikt worden om bepaalde risico's waaraan men onderhevig is af te dekken. Om risico's op aandelen- en obligatiebeleggingen af te dekken, bestaan er inmiddels vele derivatenproducten; markten voor vastgoedderivaten bestaan evenwel nog nergens. Gezien het feit dat het risico van een eigen huis vergelijkbaar is met het risico van een belegging in aandelen (Eichholtz [1997]), mag het duidelijk zijn dat de invoering van vastgoedderivaten zeker niet overbodig is.

Hoe zouden dit soort markten opgezet kunnen worden? In Case, Shiller en Weiss [1993] wordt beredeneerd dat het opzetten van een markt voor vastgoedderivaten op een huizenprijsindex, en niet op individuele woningen, de beste kans van slagen heeft. De redenen hiervoor zijn de problemen die zouden ontstaan in het geval dat de vastgoedderivaten direct gekoppeld zouden worden aan individuele woningen: *moral hazard* en *adverse selection*.

Met *moral hazard* wordt het gevaar bedoeld dat mensen na het sluiten van een contract verkeerd gedrag gaan vertonen. Een voorbeeld toegespitst op de markt voor vastgoedderivaten kan dit verhelderen. Stel dat iemand een waardedalingsverzekering neemt op zijn huis. Er bestaat een mogelijkheid dat hij na het sluiten van deze verzekering zijn huis minder goed gaat onderhouden dan vantevoren. Hij is immers direct verzekerd tegen een waardedaling van zijn huis. Een polis gebaseerd op een index heeft hier vrijwel geen last van; de index zal in de regel niet beïnvloed worden door het gedrag van één individu.

Adverse selection is het gevaar dat uit het potentiële aanbod van klanten de verkeerde selectie wordt gemaakt. Met betrekking tot de waardedalingsverzekering kan men dit het beste begrijpen aan de hand van het volgende voorbeeld: personen die vantevoren weten dat de waarde van hun huis gaat dalen zullen bereid zijn om meer geld te betalen voor hun waardedalingsverzekering dan anderen. Indien de aanbieder van de verzekering niet de beschikking heeft over deze informatie, zou hij geneigd kunnen zijn om het product juist aan deze klanten te verkopen.

Deze problemen kunnen het best omzeild worden door de derivaten te baseren op een huizenprijsindex. Een nadeel dat aan deze aanpak kleeft is dat er altijd een verschil blijft bestaan tussen de waardeontwikkeling van de index en de waardeontwikkeling van het huis. Als gevolg hiervan zal het specifieke risico waaraan de eigenaar van het huis blootgesteld staat nooit volledig afgedekt kunnen worden. De mate waarin dit wel gebeurt zal afhangen van de correlatie van de index met de prijsveranderingen van een individueel huis.

Wat zijn de potentiële voordelen van de introductie van vastgoedderivaten? Zoals eerder vermeld kunnen particulieren en investeerders die investeringen hebben in vastgoed met behulp van bijvoorbeeld put opties het risico op waardedalingen in deze sector afdekken. Er zijn tal van andere producten denkbaar die met behulp van vastgoedderivaten tot stand kunnen komen. Een voorbeeld hiervan is de waardedelingshypotheek; in ruil voor lagere maandelijkse hypotheeklasten verplicht de persoon die deze hypotheekvorm aangaat zich tot het in de toekomst afstaan van een bepaald percentage van de waardevermindering van zijn huis.

Iets dat de introductie van vastgoedderivaten eveneens zou kunnen bewerkstelligen, is het efficiënter en transparanter maken van de huizenmarkt. Op dit moment is de huizenmarkt ten

gevolge van hoge transactiekosten, overdrachtskosten en belastingen is deze markt zeer illiquide. In sommige markten, zoals de markt voor koopwoningen, is het voor institutionele beleggers zelfs vrijwel onmogelijk om te investeren; vanuit het oogpunt van diversificatie² zou dit echter een gewenste beleggingsvorm zijn. Vastgoedderivaten zouden ervoor kunnen zorgen dat de huizenmarkt meer liquide zal worden, zo beargumenteert Shiller [1993].

Als de voordelen van vastgoedderivaten zo overduidelijk zijn, waarom bestaan er dan nog geen markten voor? Er zijn in de Verenigde Staten en het Verenigd Koninkrijk al een aantal producten waarmee risico's met betrekking tot vastgoed kunnen worden afgedekt. Geen van deze producten is echter index-gebaseerd. De eerste echte poging die gedaan werd om een markt voor index-gebaseerde vastgoedderivaten te ontwikkelen, was in het Verenigd Koninkrijk in 1991. De London Futures and Options Exchange (London Fox) lanceerde een aantal futures, zowel op commercieel als op residentieel onroerend goed, die gebaseerd waren op een nationale huizenprijsindex. Na een zeer korte periode werd het handelen in deze producten echter gestaakt, toen bleek dat de London Fox het handelsvolume kunstmatig hoog had gehouden. Een belangrijke reden voor het mislukken van dit project is de slechte marketing. Het beoogde publiek was niet goed voorgelicht over de voordelen van de producten. Een tweede en eveneens zeer belangrijke reden is de homogeniteit van de index. De gebruikte index gold voor het hele Verenigde Koninkrijk, waardoor de contracten alleen geschikt waren om brede portefeuilles af te dekken.

Verdere opzet van deze rapportage

Hopelijk heeft deze korte inleiding u van de voordelen van vastgoedderivaten overtuigd. De rest van deze rapportage zal grotendeels handelen over een op vastgoedderivaten gebaseerd product waarmee de Rabobank op de markt wil komen: de waardedelingshypotheek. In deze inleiding is dit product al eerder aan bod gekomen. De achterliggende gedachte van dit product is dat de koper in ruil voor lagere maandelijkse hypotheeklasten zich verplicht tot het in de toekomst afstaan van een bepaald percentage van de waardestijging van zijn huis. De ins en outs van dit product zullen in het volgende hoofdstuk beschreven worden.

De huizenprijsindex waarop dit product, en mogelijk ook andere vastgoedderivaten waarmee de Rabobank in de toekomst zal willen komen, zal het onderwerp zijn van het derde hoofdstuk. Het eerste deel van dit verslag wordt afgesloten met een hoofdstuk over het waarderingsmodel voor derivaten op de huizenprijsindex. Aan de hand van dit waarderingsmodel kan een indicatie voor de waarde van een waardedelingshypotheek gegeven worden.

Het tweede deel van dit verslag, met de titel Risicoanalyse, zal beginnen met een kwalitatieve beschrijving van potentiële risico's die verbonden zijn aan het introduceren van een nieuw financieel product als de waardedelingshypotheek. Vervolgens zal in het zesde hoofdstuk het risico van een particulier welke een waardedelingshypotheek aanschaf geanalyseerd worden. Het risico van de bank zal centraal staan in het zevende en laatste hoofdstuk.

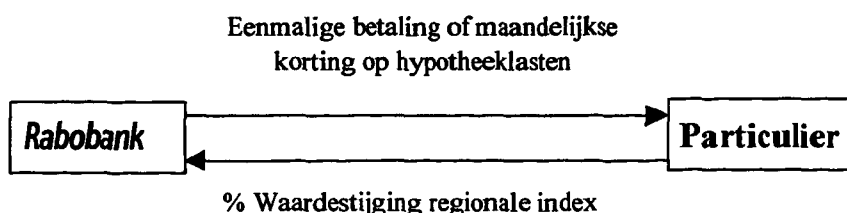
² In Mahieu en Van Bussel [1996] is gebleken dat de correlatie tussen de rendementen van koopwoningen, aandelen en obligaties in Nederland in de periode 1971-1995 vrij laag is.

2. De Waardedelingshypotheek

De waardedelingshypotheek is een product waarmee de Rabobank op de markt wil komen. Het berust op het volgende principe: de huiseigenaar verkoopt een deel van de toekomstige waardeinstijging van zijn huis en ontvangt in ruil hiervoor van de Rabobank een bepaalde premie. In dit hoofdstuk zullen we allereerst de concepten van de waardedelingshypotheek behandelen, vanuit het oogpunt van de particulier. Aangezien de bank zelf geen positie in zal willen nemen op de vastgoedmarkt, zal er voor het product een tegenpartij gezocht moeten worden. Hierbij kan men denken aan institutionele beleggers. In de tweede paragraaf zal hierop worden ingegaan.

2.1. De particulier

Zoals al eerder gezegd is, gaat de waardedelingshypotheek uit van het volgende principe: de huiseigenaar verkoopt een deel van de toekomstige waardeinstijging van zijn huis en ontvangt in ruil hiervoor een bepaalde premie. Op deze manier kan de huiseigenaar in het heden profiteren van een mogelijke toekomstige waardeinstijging van zijn huis. Hij zou het ontvangen bedrag bijvoorbeeld aan kunnen wenden om zijn maandelijkse hypotheeklasten te verlagen. Gezien de in het vorige hoofdstuk genoemde voordelen van index-gebaseerde vastgoedderivaten, zal dit product gebaseerd worden op een huizenprijsindex. Waar dit op neerkomt is dat de huiseigenaar bij het aflopen van het contract niet afgerekend zal worden op de waardeinstijging van zijn huis, maar op de waardeinstijging van de huizenprijsindex voor de regio waarin de huiseigenaar woont. Indien bij het aflopen van het contract de waarde van de index niet is gestegen, hoeft er niets betaald te worden. Schematisch kunnen we de waardedelingshypotheek als volgt weergeven:



Figuur 2.1: Schematische weergave van de waardedelingshypotheek

Een groot nadeel van deze methode is dat het mogelijk is dat de waarde van de index gestegen is, terwijl de waarde van het huis in mindere mate gestegen, of zelfs gedaald kan zijn. Dit risico kan enigszins verkleind worden door er voor te zorgen dat er een aantal indices komen, voor verschillende typen woningen en regio's; hiermee wordt de mismatch tussen de waardeontwikkeling van de index en een individuele woning verkleind. Helemaal zal dit probleem echter nooit verdwijnen. Dit risico en andere risico's waaraan de particulier blootgesteld staat bij het aangaan van een waardedelingshypotheek worden in het hoofdstuk Risico Inventarisatie besproken.

Hoe is dit product gerelateerd aan vastgoedderivaten op de huizenprijsindex? In feite is de zojuist beschreven variant van de waardedelingshypotheek niets anders dan een geschreven Europese call positie op de huizenprijsindex. Dit kan het makkelijkst ingezien worden aan de hand van het bedrag dat de huiseigenaar op het einde van de looptijd van het contract af moet staan.

We voeren eerst de volgende symbolen in:

| | |
|-----------|--|
| S | <i>Huidige waarde van de index</i> |
| P | <i>Huidige waarde van het huis</i> |
| $100-k\%$ | <i>Waardedelingspercentage</i> |
| $100-r\%$ | <i>Procentuele stijging van de index</i> |

De particulier moet nu bij het verstrijken van de looptijd het volgende bedrag afstaan:

$$k \cdot \max \{r \cdot P, 0\}$$

Inderdaad is de waardestijging van het huis volgens de index gelijk aan $r \cdot P$, en hiervan moet $100-k\%$ worden afgestaan indien dit bedrag groter is dan nul. De vorige uitdrukking kan eenvoudig herschreven worden naar de volgende:

$$\frac{k \cdot P}{S} \max \{(1+r) \cdot S - S, 0\}$$

Hieruit blijkt direct dat de waardedelingshypotheek gelijk is aan een aantal Europese call opties op de huizenprijsindex met uitoefenprijs gelijk aan de huidige waarde van de index. Het aantal van deze opties is gelijk aan $\frac{k \cdot P}{S}$, ofwel het waardedelingspercentage vermenigvuldigd met de huidige waarde van het huis, gedeeld door de huidige stand van de index.

In eerste instantie lijken uit het oogpunt van marketing voor de waardedelingshypotheek looptijden van 5 en 10 jaar, en waardedelingspercentages van $k = 25\%$ en $k = 50\%$ het meest voor de hand te liggen. In het hoofdstuk Risico Particulier zal worden stilgestaan bij de vraag welk waardedelingspercentage voor de particulier het aantrekkelijkst is.

2.1.1. Event-triggered waardedelingshypotheek

De *event-triggered* waardedelingshypotheek is een waardedelingshypotheek waarbij de huiseigenaar de flexibiliteit wordt geboden om de onderliggende opties uit te oefenen bij een bepaalde vooraf gedefinieerde gebeurtenis, zoals een verhuizing. In optieterminologie is dit soort productvorm een event-triggered³ call optie op de huizenprijsindex, waarbij de schrijver de optie mag uitoefenen. De momenten waarop de optie uitgeoefend mag worden liggen niet vantevoren vast, maar worden min of meer door het toeval bepaald. Indien we in het vervolg de event-triggered waardedelingshypotheek bekijken, zullen we dit expliciet vermelden om verwarring te voorkomen. In de overige gevallen kunt u er van uitgaan dat we het hebben over de vaste waardedelingshypotheek.

2.1.2. Doelgroepen voor de waardedelingshypotheek

Zoals al eerder genoemd kan de huiseigenaar de eventuele toekomstige waardestijging van zijn huis omzetten in geld dat hij nu kan besteden. Wat zijn de mogelijke doelgroepen voor dit product? Deze kunnen gevonden worden in Meulenberg en Vondenbusch [1999]. Hier bespreken we elk van deze groepen kort.

³ Indien de lezer niet bekend is met dit soort optieterminologie, wordt hij verwezen naar paragraaf 4.1, waarin een inleiding tot de in dit verslag gebruikte optieterminologie wordt gegeven.

Instappers

Onder de *instappers* vallen de zwaardere huurders, die zonder waardedeling niet voor een hypotheek zouden kiezen. Met een korting op de maandelijkse hypotheeklasten is het voor deze groep aantrekkelijker een huis te kopen in plaats van te huren. Dit is ook geheel in overeenstemming met een van de doelstellingen van de overheid om het huizenbezit te bevorderen, de overheid hoeft in dit geval echter geen subsidie te betalen aan de huiseigenaar.

55-plussers

Onder de groep *55-plussers* verstaan Meulenberg en Vondenbusch diegene, die hun hypothecaire lening al hebben afgelost. Indien dezen geen al te groot pensioen hebben opgebouwd, biedt de waardedelingshypotheek een goed alternatief om, zonder te moeten verhuizen naar een kleiner huis, nu leuke dingen te gaan doen of de ontvangen premie onder de kinderen te verdelen. Zo hoeven zij niet te verhuizen naar een kleiner huis.

DINKies

DINKies (Double Income, No Kids), zijn kinderloze tweeverdieners. Indien zij reeds een redelijk hoge hypotheek hebben opgenomen, vormen zij eveneens een mogelijke afzetmarkt voor de waardedelingshypotheek. Indien namelijk na verloop van tijd besloten wordt om kinderen te krijgen, kunnen deze *DINKies* in de problemen komen: het resterende inkomen is niet meer voldoende om de maandelijkse lasten op te brengen. Met behulp van een waardedelingshypotheek kan besloten worden om op elk door de huiseigenaar gewenst tijdstip een deel van de toekomstige waardevermeerdering om te zetten in een korting op de premie, kunnen zij eveneens in het huis blijven wonen, echter op een flexibelere manier dan met een persoonlijk hypotheekplan.

Accelerators

De laatste groep die onderscheiden wordt, zijn de *accelerators*. Dit zijn mensen die nu nog weinig verdienen maar binnen niet al te lange tijd waarschijnlijk veel meer gaan verdienen, zoals bijvoorbeeld pas afgestudeerde academici. Een waardedelingshypotheek zou deze personen de mogelijkheid kunnen bieden om nu alvast in een wat groter huis te gaan wonen, zonder telkens te hoeven verhuizen naar een duurder huis. Buiten het feit dat meermaals verhuizen vervelend is, is het ook nog eens prijzig.

2.1.3. Vroegere experimenten met de waardedelingshypotheek

De waardedelingshypotheek is als dusdanig geen nieuw concept. Het is wel zo dat er tot nu toe nog geen index-gebaseerde waardedelingshypotheken op de markt zijn gebracht. We zullen hier de opzet van twee van deze waardedelingshypotheken bekijken.

The Bank of Scotland introduceerde in 1996 de *Shared Appreciation Mortgage*, een waardedelingshypotheek. In de opzet van The Bank of Scotland heeft de huiseigenaar de keuze tussen een rente van 0% of 5.75% in ruil voor het afstaan van een deel van de waardevermeerdering van het huis op moment van aflossing, verkoop of sterfte. Het product is niet gebaseerd op een index, maar op de werkelijke waardevermeerdering van het huis. Bij de rentevrije variant kan de huiseigenaar maximaal 25% van de waarde lenen en staat hij drie keer het geleende percentage af. Indien gekozen wordt voor de variant waarbij men 5.75% rente betaalt, staat de huiseigenaar hetzelfde percentage af dat hij leent. Indien bij aflossing, verkoop of sterfte het huis niet in waarde is gestegen, hoeft er geen geld te worden afgestaan. Alle hypotheekleningen werden samen gesecuritiseerd door SBC Warburg (nu Warburg Dillon Read) en doorgegeven

aan institutionele beleggers. Het is niet geheel duidelijk of The Bank of Scotland dit product nog steeds voert; het kan in ieder geval niet op de website teruggevonden worden.

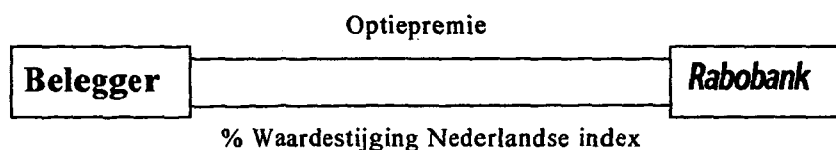
De University of California at Berkeley levert aan facultaire medewerkers tevens een waardedelingshypotheek. De lening wordt aan het eind van de looptijd afgelost en draagt een variabele rente. Het af te geven percentage van de waardestijging is gelijk aan het percentage dat beleend wordt. De waardestijging is gedefinieerd als de waardestijging exclusief investeringen en kosten bij aan- en verkoop.

2.2. De belegger

Aangezien de Rabobank geen positie in wil nemen op de vastgoedmarkt, zal het, om redenen die in hoofdstuk 4 nader worden uitgelegd, nodig zijn om een tegenpartij te vinden voor de waardelingshypotheeken die verkocht worden. Een aantal alternatieven hiervoor worden in Meulenberg en Vondenbusch [1999] opgenoemd; hiervan bespreken we de eenvoudigste. Tenslotte wordt bekeken waarom vastgoedderivaten aantrekkelijk zijn voor beleggers.

2.2.1. Call opties voor de belegger

Gezien het feit dat de waardelingshypotheek een pakket call opties is op een regionale huizenprijsindex, ligt het voor de hand om aan beleggerszijde pakketten call opties uit te zetten. Er zal geïnventariseerd moeten worden naar welke varianten er van beleggerszijde het meeste vraag is. We zullen er in deze rapportage van uit gaan dat de beleggers geïnteresseerd zijn in call opties op de Nederlandse huizenprijsindex. Dit brengt een mismatch met zich mee, daar er aan particuliere zijde opties worden ingekocht op regionale huizenprijsindices, en er opties worden verkocht op de nationale huizenprijsindex. Wat deze mismatch betekent voor het risico van de bank, zal grotendeels het onderwerp zijn van het hoofdstuk Risico Bank.



Figuur 2.2: Schematische weergave van de call optie voor de belegger

2.2.2. Aantrekkingskracht vastgoedderivaten voor beleggers

Beleggen in vastgoed kan voor institutionele beleggers om een aantal redenen interessant zijn. Allereerst kan vastgoed een goede *hedge* tegen inflatie bieden en ten tweede hebben vastgoedrendementen een lage correlatie met onder andere aandelenrendementen of vastrentende waarden, zie bijvoorbeeld Mahieu en Van Bussel [1996]. Dit laatste biedt aantrekkelijke diversificatiemogelijkheden voor portefeuilles. Een verhoging van het aandeel vastgoed kan leiden tot een lagere standaarddeviatie van het rendement op de portefeuille.

Zoals in de inleiding al is opgemerkt, is beleggen in vastgoed erg moeilijk vanwege de illiquiditeit van de vastgoedmarkt. In sommige sectoren, zoals residentieel vastgoed, is het voor institutionele beleggers vrijwel onmogelijk om te beleggen. Een mogelijk alternatief om in vastgoed te beleggen, is het beleggen in beursgenoteerde vastgoedfondsen, welke in hoofdstuk 4 kort aan bod komen. Deze fondsen beleggen echter alleen in commercieel vastgoed. Een goed alternatief is het beleggen in vastgoedderivaten, zoals de eerder genoemde call opties op de huizenprijsindex.

3. De huizenprijsindex

In de inleiding is al uitgebreid aan de orde gekomen in welk opzicht het baseren van vastgoedderivaten op een huizenprijsindex kan bijdragen aan het voorkomen van de moral hazard en adverse selection problematiek die inherent is aan het baseren van vastgoedproducten op de individuele waardeontwikkeling van huizen.

Naast het feit dat de huizenprijsindex gebruikt kan worden voor vastgoedderivaten, heeft de index voor de Rabobank nog een aantal gebruiksmogelijkheden. De index zou bijvoorbeeld gebruikt kunnen worden om het kredietrisico van de hypotheekportefeuille te inventariseren, waaruit het economische kapitaal bepaald kan worden dat voor deze portefeuille aangehouden dient te worden. Een andere gebruiksmogelijkheid is het verkrijgen van inzicht in de verhouding van de overwaarde van alle uitstaande hypotheeken ten opzichte van de restschuld.

Aangezien de huizenprijsindex een wezenlijk onderdeel is van de waardedelingshypotheek, is het belangrijk om de constructie van de index en de hieruit volgende eigenschappen van de index te bespreken. Dit zal in dit hoofdstuk gebeuren.

3.1. Transacties of taxaties?

Voor de constructie van een huizenprijsindex kan er gebruik worden gemaakt van enerzijds getaxeerde waarden van woningen, anderzijds van gerealiseerde prijzen van verkochte woningen, die geacht worden een representatieve afspiegeling van de gehele woningvoorraad te zijn. In onderzoeken zoals die van Geltner [1991] is gebleken dat taxateurs zich bij het vaststellen van de waarde van een woning laten leiden door de vorige taxatie van die woning. Een index op basis van taxaties zal aldus een veel vlakker verloop hebben dan een index die gebaseerd is op werkelijk gerealiseerde verkoopprijzen. Deze beweeglijkheid is echter van groot belang voor het waarderingsmodel van de vastgoedderivaten op deze index.

Afgezien van dit nadeel, zijn taxaties bovendien kostbaar en subjectief. Dit pleit derhalve voor gebruik van werkelijk gerealiseerde verkoopprijzen bij de constructie van een huizenprijsindex. De in een periode verkochte woningen worden dan geacht een representatieve steekproef uit de gehele woningvoorraad te zijn, aangezien de bijbehorende transactiepreizen worden gebruikt om de waarde van de gehele woningvoorraad te schatten.

3.2. Transactiebestanden

Voor het onderzoek zijn zowel de gegevens van de Nederlandse Vereniging van Makelaars (NVM) als van het Kadaster beschikbaar geweest. De NVM heeft vanaf 1973 gegevens van alle woningen die door de bij deze vereniging aangesloten makelaars zijn verkocht. Naast prijsgegevens en verkoopdata bevatten de bestanden van de NVM ook gedetailleerde informatie van de verkochte woningen. De NVM beslaat circa 60% van de totale particuliere woningmarkt. Uit vooronderzoek van Geerlings [1999a] naar de provincie Gelderland is gebleken dat de NVM meer vertegenwoordigd is in de dichter bevolkte gebieden en de duurdere woonhuizen; deze conclusies kunnen ook doorgetrokken worden voor geheel Nederland, zie Groenevelt, Westerop et al. [2000]. De data uit het kadaster bevat gegevens van alle verkopen die vanaf 1993 hebben plaatsgevonden. Het bestand van het kadaster is derhalve representatief voor alle verkopen die hebben plaatsgevonden. Naast prijsgegevens en verkoopdata bevat het bestand ook een beperkt aantal gegevens van verkochte woningen. Van deze gegevens is slechts een beperkt aantal velden bruikbaar. We zullen in deze paragraaf in

het kort een aantal eigenschappen van de transactiebestanden met elkaar vergelijken, en tenslotte bekijken welk bestand voor welk doeleinde gebruikt zal worden.

In onderstaand overzicht worden de belangrijkste verschillen tussen beide bestanden schematisch weergegeven:

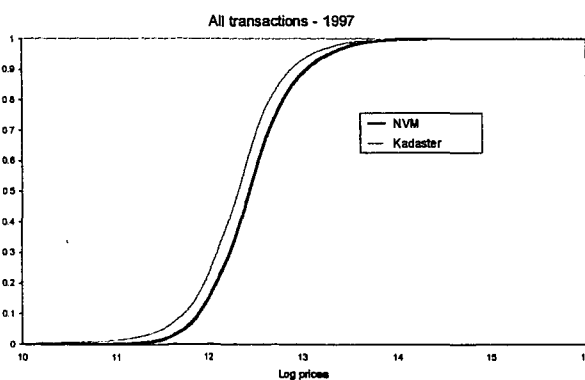
| | Kadaster | NVM |
|-----------------------------|--|--|
| Historie | maart 1993 t/m september 1999 | januari 1974 t/m december 1997 |
| Variabelen | Beperkt aantal bruikbare variabelen | Uitgebreide set variabelen |
| Dekking | 100% van alle verkochte woningen | Circa 60% van alle particuliere verkopen |
| Geregistreerde prijs | Koopsom exclusief roerende zaken | Koopsom |
| Representativiteit | Alle verkopen, dus representatief voor het totaal aantal verkochte woningen. | Niet representatief voor het totaal aan verkochte woningen. NVM heeft duurdere woningen. |
| Nieuwbouw-woningen | Bevat wel nieuwbouwwoningen. | Bevat vrijwel geen nieuwbouwwoningen. |
| Datering prijs | Bij inschrijving transportakte bij het kadaster (circa 4 maanden na sluiten koopcontract). | Bij sluiten voorlopig koopcontract. |

Tabel 3.1: Verschillen gegevens NVM en Kadaster

Bij een tweetal van deze verschillen zullen we in de komende paragrafen kort stil blijven staan, waarna geconcludeerd wordt welke bestanden we waarvoor zullen gebruiken.

3.2.1. Duurdere woningen NVM

Dat de woningen van de NVM gemiddeld duurder zijn dan de woningen uit het Kadaster bestand, zien we bijvoorbeeld terug in onderstaande grafiek. Voor beide transactiebestanden worden de geschatte cumulatieve verdelingsfuncties weergegeven van de logaritme van de transactieprijzen uit het jaar 1997. Aangezien de grafiek behorende bij het Kadaster bestand links ligt van die behorende bij de NVM, concluderen we dat de transactieprijzen uit het Kadaster bestand gemiddeld lager liggen in 1997.



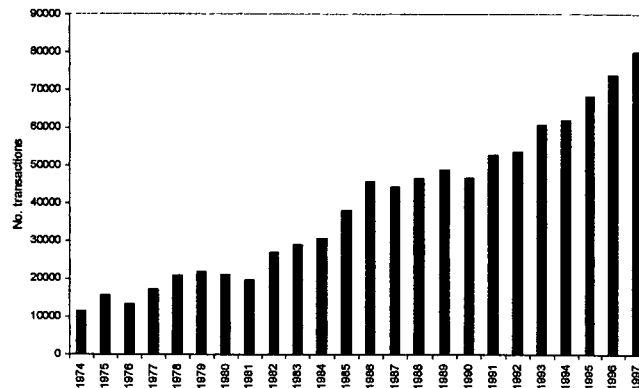
Grafiek 3.1: Cumulatieve verdelingsfunctie logaritme transactieprijz

De gemiddelde transactieprijz voor het NVM bestand bleek in 1997 f 289.000,- te bedragen, tegenover f 252.000,- voor het Kadaster. Dit verschil kan niet verklaard worden uit het weglaten van de roerende zaken bij de transactiegegevens in het Kadaster⁴. Kortom: de woningen uit het NVM komen uit een duurder segment van de woningmarkt.

⁴ De prijzen van het Kadaster liggen gemiddeld ca. f 5.000,- lager door aftrek van roerende zaken.

3.2.2. Langere historie NVM

Het transactiebestand van de NVM reikt terug tot 1973. Des te meer waarnemingen er voorhanden zijn, des te meer we kunnen leren over de ontwikkeling van de huizenmarkt in de tijd. Maar hoe bruikbaar is de historie van het NVM? De landelijke dekking van de NVM transacties is volgens Groenevelt, Westerop et al. [2000] namelijk 60%; dit getal is echter gebaseerd op gegevens uit de jaren 1993-1997. In het verleden was dit dekkingspercentage lager, voor sommige perioden zelfs aanzienlijk lager. Onderstaande grafiek geeft het aantal door de NVM geregistreerde transacties weer over de periode 1974 tot en met 1997.



Grafiek 3.2: Aantal door de NVM geregistreerde transacties

We merken dat het aantal transacties over de jaren heen flink is gestegen. Hoe weinig transacties er in de beginperiode waren, wordt duidelijk indien we bekijken hoeveel transacties dit op maandbasis worden. Voor het jaar 1973 worden dit ongeveer 1000 verkopen per maand. Indien we deze aantallen nog verder gaan uitsplitsen naar verschillende woningtypen en regio's zal blijken dat we in een aantal gevallen te weinig gegevens overhouden om een stabiele index te creëren. Dit hangt echter af van de precieze indeling die gekozen gaat worden, een onderwerp waarop we in paragraaf 3.4 terugkomen.

3.2.3. Keuze tussen NVM en Kadaster

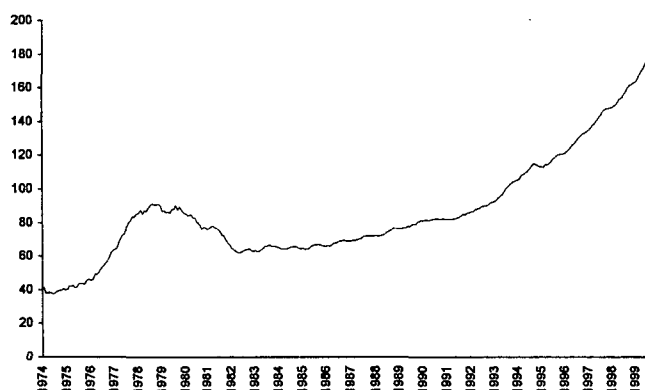
Aangezien het Kadaster bestand alle verkochte woningen registreert, zullen de indices in de toekomst aan de hand van dit bestand ontwikkeld worden. Het NVM bestand zal echter eveneens gebruikt worden in deze rapportage: vanwege zijn grotere historie en uitgebreidere informatie per transactie bevat dit bestand zeer nuttige informatie.

3.3. Index type

In het vooronderzoek van Geerlings [1999b] zijn een aantal verschillende indexconstructies met elkaar vergeleken, onder andere op basis van de voorspellende waarde van deze indices met betrekking tot de individuele waardeontwikkeling van individuele huizen.

Een verfijnde index waarbij de waardeontwikkeling van een huis voorspeld wordt aan de hand van kwaliteitsbepalende factoren van het huis bleek slechts een marginale verbetering op te leveren wat betreft de voorspellende waarde van de index.

Uiteindelijk is er gekozen voor een 20-80% getrimd gemiddelde index. Hierbij worden 20% van de goedkoopste en duurste verkopen in een maand niet meegenomen bij de berekening van de gemiddelde verkoopprijs in een maand. Dit soort index blijkt de waardeontwikkeling van een huis gemiddeld te onderschatten. Een overschatting is in het geval van de waardedelingshypotheek niet wenselijk, daar de huiseigenaar in dat geval een hoger bedrag af zou moeten staan dan zijn woning werkelijk gestegen is.



Grafiek 3.3: 20-80% getrimd gemiddelde Nederlandse index
(vanaf 1993 gebaseerd op het Kadaster bestand)

Om een voldoende betrouwbare index samen te kunnen stellen voor ieder segment van de woningmarkt zijn er onvoldoende transacties gedurende de periode van één maand. Er is dan ook gekozen voor een voortschrijdend kwartaalcijfer, hetgeen betekent dat het indexcijfer wordt gebaseerd op transactiegegevens van de huidige maand plus de twee voorgaande maanden. De keuze voor drie maanden is het gevolg van een afweging tussen aan de ene kant de actualiteit van de index (de periode het liefst zo kort mogelijk), en aan de andere kant betrouwbaarheid (de periode lang genoeg om voldoende transacties per segment te verzamelen).

Voor welke regio's en woningtypen de indices uiteindelijk ontwikkeld zijn, is het onderwerp van de volgende paragraaf.

3.4. Clustering

Tussen de regionale index, waarop de particulier die een waardedelingshypotheek gaat worden afgerekend, en de echte waardeontwikkeling van een huis binnen die regio zullen discrepanties bestaan. Dit is onoverkomelijk. Het is wel mogelijk, en derhalve wenselijk om indices te construeren voor homogene groepen woningen, zodanig dat de individuele waardeontwikkeling van woningen binnen deze groep zo weinig mogelijk verschilt van de waardeontwikkeling van de index. Een te fijne indeling zal echter problemen opleveren, daar het aantal transacties per gebied te klein wordt.

Er zullen dus indices ontwikkeld moeten worden voor verschillende segmenten van de woningmarkt. Hierbij is het niet alleen belangrijk om te letten op verschillen tussen typen woningen, maar ook op regionale verschillen. Het is namelijk een gegeven dat woningen in de Randstad duurder zijn dan in andere streken van Nederland, al worden de woningen elders in het land geleidelijk ook duurder. Behalve dat woningen in verschillende regio's qua absoluut prijsniveau verschillen, kunnen zij ook verschillen in de wijze waarop deze waarde zich gedurende de tijd ontwikkelt.

In deze paragraaf zullen we de clustering bespreken waarvoor uiteindelijk gekozen is in Groenevelt, Westerop et al. [2000]; dit omvat de clustering naar woningtype, en de clustering naar regio.

3.4.1. Clustering naar woningtype

Zoals in paragraaf 2 al opgemerkt was, zijn de transacties uit het NVM bestand zeer nauwgezet gespecificeerd. Er kan een goed onderscheid gemaakt worden naar verschillende woningtypes.

Uit het Kadaster bestand kan daarentegen alleen opgemaakt worden of de transactie een eengezinswoning of een appartement betrof. Naast dit veld wordt er weliswaar een veld bijgehouden waarin een omschrijving van de woning gegeven wordt, maar dit heeft tot gevolg dat er hierin duizenden verschillende waarden opgenomen zijn, zodat er niet eenvoudig verschil gemaakt kan worden tussen andere typen woningen. Bij het Kadaster wordt momenteel gewerkt aan het opschonen en betrouwbaarder maken van de omschrijving van de woning.

Op grond van het vorige is besloten om de indices verder te ontwikkelen voor appartementen en eengezinswoningen. Grofweg vallen de volgende woningtypen onder deze indeling:

| <i>Eengezinswoningen</i> | <i>Appartementen</i> |
|---------------------------|----------------------------|
| <i>Bungalow</i> | <i>Appartement</i> |
| <i>Drive-in woning</i> | <i>Benedenwoning</i> |
| <i>Eenvoudige woning</i> | <i>Bovenwoning</i> |
| <i>Herenhuis</i> | <i>Boven/benedenwoning</i> |
| <i>Landhuis</i> | <i>Flat met lift</i> |
| <i>Middenstandswoning</i> | <i>Flat zonder lift</i> |
| <i>Patio-bungalow</i> | <i>Maisonnette</i> |
| <i>Semi-bungalow</i> | |
| <i>Villa</i> | |

Tabel 3.2: Indeling naar woningtypen

Bij het ontwikkelen van de indices is gebleken dat eengezinswoningen en appartementen inderdaad verschillen wat betreft de waardeontwikkeling, zodat de opsplitsing naar deze twee typen gerechtvaardigd is.

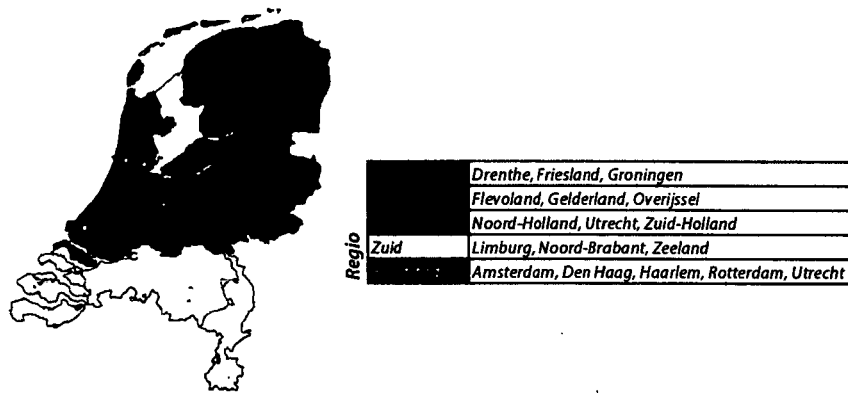
3.4.2. Clustering naar regio

Uiteindelijk zijn er zo voor de twaalf provinciën van Nederland en de steden Amsterdam, Den Haag, Groningen, Haarlem, Rotterdam en Utrecht indices ontwikkeld voor zowel eengezinswoningen als appartementen. Voor een aantal provinciën en steden bleken er nog te weinig transacties voorhanden om een stabiele index te creëren; het clusteren van een aantal van deze steden en provinciën zou de mate waarin de index de waardeontwikkeling

van individuele huizen binnen deze cluster voorspelt, verhogen. Deze zogenaamde *performance* van de index is bepaald aan de hand van een bestand met herhaalde verkopen⁵. Er is met name gekeken naar het percentage transacties waarvoor de voorspelde verkoopprijs binnen een bandbreedte van 5%, 10%, 15%, 20%, 25% en 30% van de werkelijke verkoopprijs valt. Voor het bepalen van het aantal waarnemingen binnen een bandbreedte van 5% is de volgende formule gebruikt:

$$\# \text{ waarnemingen binnen bandbreedte } 5\% = \# \text{ waarnemingen waarvoor geldt:} \\ \text{voorspelde verkoopprijs} \leq 105\% \times \text{werkelijke verkoopprijs en} \\ \text{voorspelde verkoopprijs} \geq 95\% \times \text{werkelijke verkoopprijs}$$

De andere percentages worden analoog bepaald. Uiteindelijk is in Groenevelt, Westerop et al. [2000] op grond van performance de volgende indeling als beste uit de bus gekomen:



Figuur 3.1: Indeling van Nederland in vijf regio's

De performance bij deze indeling is in onderstaande tabel vermeld:

| | tot 5% | tot 10% | tot 15% | tot 20% | tot 25% | tot 30% |
|--------------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Eengezinswoningen | 33% | 59% | 75% | 84% | 90% | 93% |
| Appartementen | 30% | 54% | 70% | 81% | 89% | 93% |

Tabel 3.3: Performance indices (validatiebestand: repeat sales van Kadaster, 1993-1998)

Merk op dat een afwijking van 5% op een verkoopprijs van f 300.000,- al f 15.000,- bedraagt. Uit de tabel blijkt dat voor 7% van de woningen zelfs geldt dat de door de index aangegeven verkoopprijs zelfs meer dan 30% afwijkt van de gerealiseerde verkoopprijs. Deze mismatch tussen de index en de werkelijke waardeontwikkeling van de waarde van het huis zal het onderwerp zijn van het hoofdstuk Risico Particulier.

De uiteindelijke indices kunt u terugvinden in de Appendix: Data. De volgende paragraaf zal de statistische eigenschappen behandelen van deze indices die we nodig zullen hebben voor het ontwikkelen van een waarderingsmodel voor de waardedelingshypotheek.

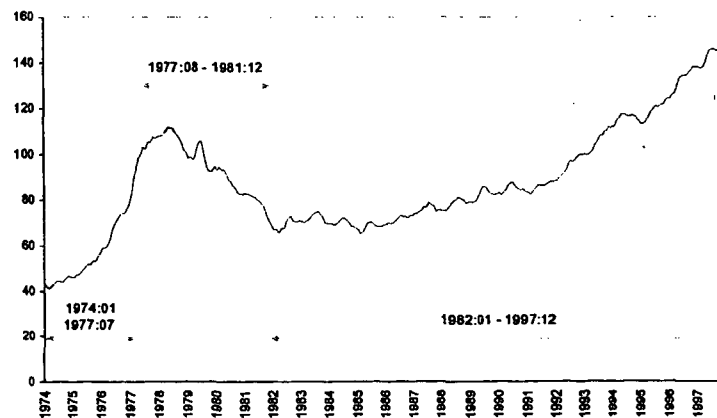
⁵ Zie de Appendix: Data voor uitleg over bestanden met herhaalde verkopen.

3.5. Eigenschappen van de huizenprijsindex

In deze paragraaf bekijken we een aantal eigenschappen van de huizenprijsindex, zoals deze geconstrueerd is door het Centrum van Toegepaste Wiskunde. Deze eigenschappen zullen in de volgende paragraaf gebruikt worden om tot een wiskundig model te komen dat de logaritmische rendementen op de huizenprijsindex beschrijft. De voorbeeldindex die we gebruiken om de eigenschappen te laten zien, is de index voor NMV eengezinswoningen uit de Regio West.

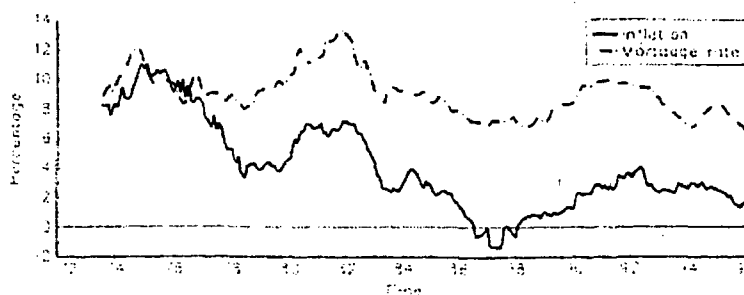
3.5.1. De huizenprijsindex door de tijd

Allereerst staan we stil bij het gedrag van de huizenprijsindex door de tijd. We zien dat we in de beschikbare data drie perioden kunnen signaleren, waarin het gedrag van de index verschillend is geweest: de sterke stijging van 1974-1978, het inzakken van de huizenmarkt van ca. 1978-1981, en aansluitend de stijging van de huizenprijzen die zich nu nog voortzet.



Grafiek 3.4: Index voor NVM eengezinswoningen in de Regio West

Aan de hand van economische argumenten kunnen we verklaren waarom de huizenprijsindex zich in deze drie perioden verschillend heeft gedragen. De sterke groei van de huizenprijsindex tussen 1974 en 1978 kan verklaard worden aan de hand van het verschil tussen de inflatie en de hypotheekrente. In onderstaande grafiek zien we dat dit verschil tussen 1974 en 1976 overwegend positief was. Aangezien de hypotheekrente in Nederland fiscaal aftrekbaar is, betekent dit dat een huiseigenaar die zijn huis met een hypotheek financierde eigenlijk op papier winst maakte. Dit zorgde voor een sterk stijgende vraag op de huizenmarkt, waardoor de prijzen stegen.



Grafiek 3.5: Inflatie en hypotheekrente in Nederland

Bron: Van Bussel [1998]

Toen de inflatie zakte, zodat het verschil tussen de hypotheekrente en de inflatie een normaal niveau bereikte, zakten de huizenprijzen, temeer daar er geen economische gronden waren voor zulke hoge prijzen. Door de economische recessie in het begin van de jaren tachtig bleven de prijzen min of meer op een constant niveau. Vanaf 1986 is er weer een duidelijke stijging in de huizenprijzen merkbaar.

De rendementen op de huizenprijsindex worden dus bepaald door economische factoren zoals de hypotheekrente, de inflatie, maar ook door demografische factoren en het overheidsbeleid. In Brons [2000] is gelet op de samenhang tussen de rendementen op de huizenprijsindex en deze factoren; wij zullen ons voornamelijk richten op de statistische eigenschappen.

3.5.2. Indexcijfer en aantal transacties

Zoals in grafiek 3.2 teruggezien kan worden, is het aantal maandelijks transacties, en dus ook het aantal transacties waarop het indexcijfer gebaseerd is, in de loop der tijd gestegen. Van het aantal waarnemingen waarop het indexcijfer gebaseerd is, hangt ook de volatiliteit van het indexcijfer af. Gezien het feit dat het aantal geregistreerde verkopen in het Kadaster bestand een veel minder gestage groei kent, en we in Brons [2000] de verwachting terugvinden dat het totale woningaanbod de komende jaren vrijwel gelijk zal blijven, lijkt het verstandig om indien de index vanaf 1974 gebruikt wordt bij het schatten van parameters, deze te corrigeren voor het verschillende aantal transacties. Aangezien het gemiddelde niveau van de tijdreeks eveneens niet constant is, zouden we deze correctie aan de hand van de volgende methode kunnen laten plaatsvinden:

1. Bereken een n-maandelijks voortschrijdend gemiddelde van de reeks en trek dit van de reeks af, waardoor er als het ware *residuen* overblijven;
2. Vermenigvuldig het residu in een bepaalde maand met de wortel van het aantal transacties waarop de index in die maand gebaseerd is;
3. Deel alle residuen door de wortel van een representatief aantal transacties, bijvoorbeeld het gemiddelde aantal maandelijks transacties over de laatste paar jaren.
4. Tel het eerder berekend n-maandelijks voortschrijdend gemiddelde weer bij deze residuen op, waardoor de gecorrigeerde reeks verkregen wordt.

3.5.3. Volatiliteit van de tijdreeks

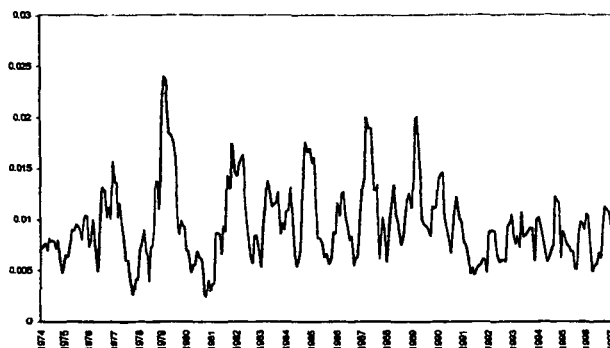
Een vrij algemeen model voor de logaritmische rendementen op de index is het volgende:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

Het gemiddelde rendement mag in de tijd veranderen, de foutterm wordt echter verondersteld een constante variantie te hebben. Er wordt niets opgelegd over de autocorrelatiestructuur van de fouttermen; hier komen we in de volgende paragraaf op terug. De aanname van homoskedasticiteit is er een die in de praktijk zeker niet wordt teruggevonden bij bijvoorbeeld rendementen op aandelenkoersen; indien deze hier geldig is, kan dit het model aanzienlijk versimpelen.

Zoals in de vorige paragraaf werd opgemerkt, dienen we de tijdreeks van de logaritmische rendementen eerst te corrigeren voor het aantal waarnemingen waarop elk indexcijfer gebaseerd is, met behulp van de in de vorige paragraaf aangeduide procedure. Na uitvoering van de eerste drie stappen, verkrijgen we een tijdreeks met de fouttermen ε_t . Uiteraard verschilt deze tijdreeks voor elke keuze van n ; we kiezen hier $n = 6$.

Opdat de autocorrelaties de uiteindelijke volatiliteit niet beïnvloeden, is er vervolgens een ARMA tijdreeksmodel gefit op deze gecorrigeerde residuen. Van de residuen van dit model is in onderstaande grafiek een 6-maandelijks voortschrijdend gemiddelde van de volatiliteit weergegeven:



Grafiek 3.6: 6-maandelijks voortschrijdende volatiliteit

Een mogelijke manier om te onderzoeken of de volatiliteit constant is, is te toetsen of er een GARCH effect is, oftewel of de variantie een ARMA proces volgt. Een GARCH(p,q) proces voor de foutterm ε_t , zoals geïntroduceerd door Bollerslev, heeft de volgende specificatie:

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

waarbij $E(v_t) = 0$, $E(v_t^2) = 1$ en v_t onafhankelijk is van ε_{t-i} voor $i > 0$. Dit houdt het volgende in voor de foutterm ε_t :

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \dots) = 0 \quad E(\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1}, \dots) = h_t$$

oftewel, de reeks vertoont conditionele heteroskedasticiteit. Een mogelijke toets voor een GARCH effect kan nu geconstrueerd worden met behulp van de Box-Ljung Q-statistic. Indien we willen toetsen of de eerste m autocorrelaties $\rho(i)$ ($i = 1, \dots, m$) gelijk zijn aan nul, kan deze statistic gebruikt worden:

$$Q_m = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\rho^2(k)}{T-k} \xrightarrow{d} \chi_m^2$$

Door de kwadraten van de autocorrelaties bij elkaar op te tellen, kan de statistic zowel positieve als negatieve autocorrelaties detecteren. Het kiezen van het getal m moet zorgvuldig gebeuren; als men m te groot kiest, kan de power van de toets afnemen. Indien m te klein wordt gekozen, zou men de aanwezigheid van een significante hogere orde autocorrelatie kunnen missen.

Het is nu duidelijk hoe er getoetst kan worden voor een GARCH effect. Na het fitten van een model voor het gemiddelde niveau van de tijdreeks, kan de Box-Ljung statistic toegepast worden op de gekwadrateerde residuen van een tijdreeks. Deze toetsingsgrootte heeft dan een χ_{m-p}^2 limietverdeling, waarbij m het aantal autocorrelaties

is waarop getoetst wordt, en p het aantal parameters is dat geschat is bij het modelleren van het gemiddelde niveau van de tijdreeks.

Wanneer we toetsen of de eerste zes autocorrelaties van de gekwadrateerde residuen gelijk zijn aan nul, is de overschrijdingskans van deze statistiek gelijk aan 0.759. Er is duidelijk geen reden om aan te nemen dat er een GARCH effect is. Concluderend lijkt het redelijk om aan te nemen dat de volatiliteit van de rendementen op de huizenprijsindex constant zal zijn, mits het aantal transacties per maand niet al te veel zal variëren. Een goede schatting voor de volatiliteit zou bijvoorbeeld de gemiddelde 6-maandelijks voortschrijdende volatiliteit zijn.

3.5.4. Gemiddeld rendement op de index

Zoals in grafiek 3.4 teruggezien kan worden, verschilt het gemiddelde rendement op de huizenprijsindex per periode. We zullen in deze paragraaf onderzoeken of er sprake is van lineair stijgende rendementen op de huizenprijsindex. Er zou dan sprake kunnen zijn van een volgend model, zoals in Meulenberg en Vondenbusch [1999] al is voorgesteld:

$$r_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

We nemen hier aan dat de fouten normaal verdeeld zijn, een assumptie die a priori redelijk lijkt. De index geeft namelijk de gemiddelde huizenprijsstijging weer, waar bij de berekening van het gemiddelde de 20% hoogste en laagste waarnemingen niet mee zijn genomen. De schattingen voor elk van de drie perioden volgen in onderstaande tabel:

| Parameter | 1974:01- | 1977:08- | 1982:01- |
|-----------|------------|------------|------------|
| | 1977:07 | 1981:12 | 1997:12 |
| α | 0.03649 | 0.005749 | 0.0000179 |
| β | 0.000801 * | -0.00049 * | 0.0000404* |

Tabel 3.4: Parameterschattingen voor lineaire model

In de tabel staat er een * achter een coëfficiënt indien deze bij een onbetrouwbaarheidsniveau van 5% statistisch significant wordt bevonden. De groei van de rendementen blijkt inderdaad niet constant te zijn. Uit nader onderzoek van de originele 20-80% getrimd gemiddelde huizenprijsindex blijkt dat dit niet komt doordat de huizenmarkt in die periode lineair stijgende rendementen vertoonde, maar dat dit een direct gevolg is van het nemen van een 3-maandelijks voortschrijdend gemiddelde. Indien hetzelfde model aangepast wordt op deze index blijkt er namelijk in geen van de drie perioden sprake te zijn van een lineaire groei van de rendementen. We zullen dan ook in het vervolg uitgaan van een constant rendement op de huizenprijsindex, dat eventueel kan veranderen door het ingaan van een andere economische toestand.

3.6. Modelling huizenprijsindex

In deze paragraaf zullen we een tweetal modellen voorstellen voor de logaritmische rendementen op de huizenprijsindex. Het is in de literatuur veelal gebruikelijk om de logaritmische rendementen te modelleren in plaats van de gebruikelijke rendementen, en deze normaal verdeeld te veronderstellen. De belangrijkste reden hiervoor is het feit dat er eenvoudig met de normale verdeling gewerkt kan worden; indien we aannemen dat de logaritmische rendementen normaal verdeeld zijn, is de oorspronkelijke index lognormaal verdeeld, en kan ook hier eenvoudig mee gerekend worden. We laten in Appendix 3.C zien dat het gebruik van de normale verdeling hier op statistische gronden gerechtvaardigd is. Vanaf nu zullen we het gewoon over rendementen hebben, als we de logaritmische variant bedoelen.

Aangezien de waardedelingshypotheek grotendeels steunt op de huizenprijsindex, zullen de twee modellen die in deze paragraaf behandeld worden veelvuldig terugkomen in de rest van deze scriptie. Ze zullen bijvoorbeeld zowel terugkomen bij het waarderingsmodel voor derivaten op de huizenprijsindex, als bij de risicoanalyses voor de particulier en de bank.

Alvorens we overgaan tot het behandelen van de modellen, herhalen we hier de belangrijkste eigenschappen van de huizenprijsindex, die in de vorige paragraaf aan de orde kwamen:

- de volatiliteit van de logaritmische rendementen mag constant worden verondersteld;
- het gemiddelde rendement op de huizenprijsindex mag constant worden verondersteld; het gemiddelde rendement kan echter wel verschillen ten gevolge van de economische toestand, die bepalend is voor de ontwikkelingen op de huizenmarkt.

Deze eigenschappen zullen in beide modellen teruggevonden worden.

3.6.1. ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986

Eén van de gebruikte modellen is een tijdreeksmodel voor de rendementen op de huizenprijsindex vanaf 1986; een reden voor het feit dat we slechts de periode vanaf 1986 bekeken hebben, is dat er voorafgaand aan 1986 te weinig transacties voorhanden zijn om een stabiele index te creëren, zie bijvoorbeeld Geerlings [1999b]. Een nadeel van deze aanpak is dat vanaf 1986 de index slechts gestegen is; sterke dalingen zoals die zich in de periode 1978-1981 voordeden zullen derhalve door dit model niet voorspeld worden.

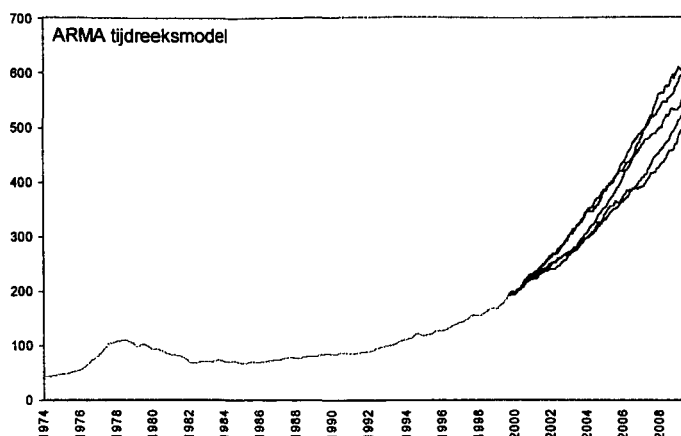
In Appendix 3.C is gebleken dat een ARIMA (0,0,3)(0,0,1)₁₂ de logaritmische rendementen op de huizenprijsindex goed beschrijft. Het gedrag van alle indices samen wordt tenslotte verkregen door te veronderstellen dat de fouttermen in alle indices onderling gecorreleerd zijn. Formeel worden de rendementen r_{it} op index i op tijdstip t beschreven door:

$$\begin{aligned} r_{it} &= \mu_i + \varepsilon_{it} \\ \varepsilon_{it} &= (1 + \theta_{i1}L + \theta_{i2}L^2 + \theta_{i3}L^3)(1 + \theta_{i12}L^{12})u_{it} \\ u_{it} &\sim N(0, \sigma_i^2) \\ \text{Cov}(u_{it}, u_{jt}) &= \sigma_{ij} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Hierbij is L de lag-operator, namelijk $Lu_t = u_{t-1}$.

Schattingen voor dit model kunnen in Appendix 3.C worden teruggevonden. De fouttermen en de autocorrelatiestructuur zorgen ervoor dat door exogene schokken het rendement tijdelijk

kan afwijken van het gemiddelde rendement. Een schok in de huidige maand heeft in het bekeken model een effect op het rendement voor de komende 15 maanden.



Grafiek 3.7: Een aantal mogelijke realisaties van het ARMA tijdreeksmodel

In bovenstaande grafiek zien we, naast de index voor de eengezinswoningen van 1974-1999 (vanaf 1993 gebaseerd op het Kadaster transactiebestand), een aantal realisaties van het ARMA tijdreeksmodel, indien we het gedrag vanaf 1986 doortrekken. Als we het model statistisch extrapoleren naar de toekomst, verkrijgen we de resultaten die in de volgende tabel vermeld staan. Aangezien de toekomstige huizenprijsindices op grond van het Kadaster transactiebestand vervaardigd zullen worden, hebben we deze gegevens alleen berekend aan de hand van de schattingen voor de Kadaster indices. In de tabel zijn naast de verwachte stijging van de verscheidene indices voor de komende tien jaar, eveneens het 5% en 95% quantiel gegeven van de verdeling hiervan.

| | | 5% quantiel | Verwacht | 95% quantiel |
|----------------------|--------------|-------------|----------|--------------|
| Appartementen | Noord | 85% | 99% | 113% |
| | Oost | 187% | 212% | 238% |
| | Rand | 142% | 226% | 326% |
| | West | 132% | 165% | 200% |
| | Zuid | 165% | 200% | 237% |
| Woningen | Noord | 85% | 156% | 242% |
| | Oost | 126% | 182% | 246% |
| | Rand | 139% | 231% | 342% |
| | West | 132% | 198% | 276% |
| | Zuid | 128% | 181% | 241% |
| Nederland | App. | 159% | 186% | 216% |
| | Won. | 132% | 186% | 248% |

Tabel 3.5: Implicaties van het model voor de Kadaster indices

De Nederlandse index voor eengezinswoningen bijvoorbeeld zal op basis van dit model over tien jaar naar verwachting met 186.2 procent gestegen zijn. Zoals eerder opgemerkt zijn dalingen in dit model vrijwel onmogelijk, zeker over langere perioden.

3.6.2. Tijdreeksmodel met veranderende regimes

Het nadeel van het model uit de vorige paragraaf is al eerder opgemerkt: het toekomstscenario voor de huizenprijsindex is hierbij erg rooskleurig, de huizenprijsindex blijft immers stijgen. Het behoeft geen uitleg dat dit tot hoogst onwaarschijnlijke prijsontwikkelingen leidt. Een verandering in de toestand van de economie zou er echter eenvoudig toe kunnen leiden dat de huizenprijsindex een aantal jaren achter elkaar gaat dalen. We gaan er hier niet op in welke economische variabelen voor deze kentering zouden kunnen zorgen, maar nemen wel een variabele X_t op die de toestand op de huizenmarkt op tijdstip t weergeeft. Het model dat we bekijken, beschrijft als volgt het rendement op huizenprijsindex i op tijdstip t :

$$\begin{aligned}r_{it} &= \mu_{X_t} + \varepsilon_{it} \\ \varepsilon_{it} &\sim N(0, \sigma_i^2) \text{ i.i.d. in time} \\ \text{Cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) &= \sigma_{ij}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Dit is een speciaal geval van een zogenaamd *changes in regime* model, welk door Hamilton [1994] uitgebreid bekeken is. Het gemiddelde rendement wordt bepaald door de toestand X_t waarin het proces zich op tijdstip t bevindt; dit proces is onafhankelijk van de fouttermen. Tevens kunnen we specificeren of deze toestandsvariabele al dan niet observeerbaar is; zie voor meer informatie hierover Appendix 3.D. Er wordt hier aangenomen dat X_t observeerbaar is. Het proces X_t volgt een Markov keten, waarvan de elementen van de overgangsmatrix P aan de volgende vergelijking voldoen:

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i, X_{t-2} = k, \dots) = P(X_t = j | X_{t-1} = i) = p_{ij}$$

We zullen in deze paragraaf aannemen dat het proces in twee toestanden kan verkeren, een down-state (0) en een up-state (1), welke respectievelijk een recessie en een opwaartse toestand van de huizenmarkt weergeven. De overgangsmatrix heeft dus de volgende vorm:

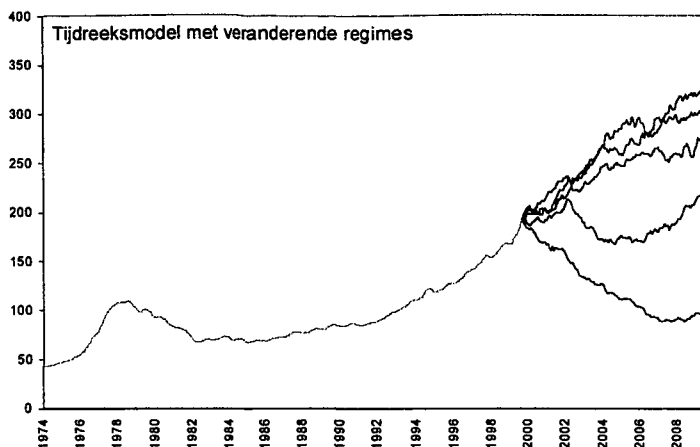
$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

De standaarddeviatie van de fouttermen wordt aangenomen constant te zijn, gezien de bevindingen in de vorige paragraaf. Eén van de grote verschillen met het vorige model is de autocorrelatiestructuur: er wordt hier van uitgegaan dat er geen significante autocorrelaties zijn, hetgeen zeker wel in de data wordt gevonden. Het model zou eenvoudig uitgebreid kunnen worden om deze autocorrelaties mee te nemen; er zal echter in een later stadium blijken dat de variantie- en autocorrelatiestructuur bij de bekeken indices vrijwel irrelevant is voor één van de belangrijkste gebruiken van de index in deze scriptie: het afleiden van een waarderingsmodel voor derivaten op de huizenprijsindex. Om deze reden kiezen we voor dit eenvoudiger model.

De samenhang tussen de verscheidene regionale indices tenslotte wordt wederom beschreven door middel van gecorreleerde fouttermen.

Voor de schattingsprocedure en de schattingen wordt u verwezen naar Appendix 3.D. Indien we grafiek 3.4 bekijken wordt echter direct één van de grote problemen van dit model duidelijk: in de data die voorhanden is, is slechts één periode van economische teruggang

zichtbaar. Het is derhalve onmogelijk om te bepalen hoe goed de schattingen voor de duur van respectievelijk de up- en de down-state zijn. Er is gekozen voor een gemiddelde duur van 12 jaar voor de up-state en 4.5 jaar voor de down-state. In een volgend onderzoek kan wellicht naar de cycliciteit van economische processen gekeken worden, om te kijken of hierdoor betere schattingen voor de duur van deze toestanden verkregen kunnen worden.



Grafiek 3.8: Een aantal mogelijke realisaties van het ARMA tijdreeksmodel

In bovenstaande grafiek zien we, naast de index voor de eengezinswoningen van 1974-1999 (vanaf 1993 gebaseerd op het Kadaster transactiebestand), een aantal realisaties van dit tweede tijdreeksmodel. Zeer duidelijk is dat dalingen nu ook mogelijk zijn, hetgeen een wenselijke eigenschap is als we in een later stadium het risico van de particulier en bank gaan analyseren. Als we het model statistisch extrapoleren naar de toekomst, krijgen we de resultaten die in onderstaande tabel vermeld staan.

| | | 5% quantiel | Verwacht | 95% quantiel |
|----------------------|--------------|-------------|----------|--------------|
| Appartementen | Noord | 15% | 70% | 141% |
| | Oost | 7% | 57% | 120% |
| | Rand | 12% | 46% | 86% |
| | West | 2% | 38% | 81% |
| | Zuid | 11% | 56% | 111% |
| Woningen | Noord | 12% | 36% | 64% |
| | Oost | 13% | 31% | 51% |
| | Rand | -5% | 41% | 99% |
| | West | 2% | 27% | 55% |
| | Zuid | 19% | 35% | 52% |
| Nederland | App. | 24% | 48% | 75% |
| | Won. | 15% | 31% | 48% |

Tabel 3.6: Implicaties van het model

De implicaties van dit model voor de toekomstige ontwikkeling van de huizenprijsindices is zeer verschillend van het model uit de eerste paragraaf. Dit verschil wordt veroorzaakt door het feit dat er in dit model ook dalingen worden meegenomen. Op de lange termijn zal de index weer stijgen; de Nederlandse appartementenindex zal naar verwachting 48.0% in waarde stijgen, de Nederlandse eengezinswoningenindex 30.8%.

Ondanks het feit dat beide modellen sterk verschillen in het gedrag dat ze impliceren voor de huizenprijsindex, zullen we beide modellen in het vervolg gebruiken.

Samenvatting

Voor het ontwikkelen van de huizenprijsindex, welke zal fungeren als onderliggende voor optieconstructies zoals de waardedelingshypotheek, zijn twee databestanden beschikbaar. Het bestand van de Nederlandse Vereniging voor Makelaars gaat weliswaar terug tot 1973, maar beslaat slechts 60% van de verkochte woningen. Het bestand van het Kadaster bevat gegevens over alle verkochte woningen, de historie begint echter vanaf 1993. Beide bestanden zullen derhalve een rol spelen in het onderzoek; de uiteindelijke indices zullen echter ontwikkeld worden aan de hand van het Kadaster bestand.

Opdat de waardeontwikkeling van een individuele woning zo goed mogelijk voorspeld wordt door de index, is na een vooronderzoek gekozen voor een 20-80% getrimd gemiddelde index, waarbij een voortschrijdend gemiddelde wordt genomen over de afgelopen drie maanden. De indices zijn ontwikkeld voor twee typen residentiële woningen, te weten eengezinswoningen en appartementen. Welke woningen onder deze typering vallen, kan in tabel 3.2 worden teruggevonden. De indices zijn tevens voor verschillende regio's ontwikkeld.

Wat betreft de modellering van de huizenprijsindex is er in deze rapportage gekozen voor twee modellen: een tijdreeksmodel waarbij het gedrag van de huizenprijsindex vanaf 1986 wordt doorgetrokken, en een tijdreeksmodel waarbij getracht is het gedrag van de huizenprijsindex vanaf 1973 na te bootsen. Het moge duidelijk zijn dat er in het eerste model vrijwel geen dalingen in het niveau kunnen ontstaan, getuige de ontwikkeling van de huizenprijsindex vanaf 1986. Het tweede model neemt dalingen zeer zeker wel mee, waardoor de toekomstverwachtingen minder rooskleurig zijn dan bij het eerste model. Omdat de toekomstverwachtingen onder beide modellen sterk verschillen, moeten de modellen als mogelijk toekomstscenario gezien worden, dat bij de risicoanalyse gebruikt kan worden.

4. Optiewaarderingsmodel

Alle producten die in dit verslag bekeken worden, zijn gebaseerd op een optieconstructie. Het onderwerp van dit hoofdstuk is een waarderingsmodel voor dergelijke optieconstructies. We beginnen met een korte inleiding tot opties, met het doel om de lezer in de gebruikte terminologie in de optiewereld te introduceren. De tweede paragraaf behandelt een drietal waarderingsmethoden voor opties, waaronder het befaamde waarderingsmodel voor opties op verhandelde aandelen, het Black-Scholes model. In de hierna volgende paragraaf wordt duidelijk gemaakt waarom de aannamen van het Black-Scholes model bij het waarden van optieconstructies op de huizenprijsindex niet opgaan, waarna het te gebruiken optiemodel wordt afgeleid.

In paragraaf vier worden de uit dit model volgende prijzen voor de vaste waardedelingshypotheek gepresenteerd. Er wordt besloten met een gevoeligheidsanalyse van het optiewaarderingsmodel.

4.1. Inleiding tot opties

Opties bestaan al vele jaren, maar zijn pas in 1973 voor het eerst op een beurs verhandeld. Dit gebeurde destijds op de Chicago Board Options Exchange. Deze late ontwikkeling hangt samen met het feit dat men tot deze datum niet begreep hoe men zich in moest dekken tegen de risico's van het handelen in opties. Dankzij baanbrekend werk van Fischer Black, Myron Scholes en Robert Merton, die de befaamde Black-Scholes formule afleidden, werd dit inzicht in 1973 verkregen. Sinds de publicatie van hun artikel werd duidelijk hoe banken zich afdoende konden indekken tegen de risico's, met als gevolg de explosieve ontwikkeling van de optiemarkten. Scholes en Merton (Black overleed in 1995) ontvingen in 1997 de Nobelprijs in de Economie voor hun werk.

Definitie van een optie

Alvorens we uitleggen waarvoor opties gebruikt kunnen worden, zullen we de definitie van een optie geven. Een optie is een afgeleid product van een onderliggende waarde. Deze onderliggende waarde kan een verhandelbaar product zijn, zoals een aandeel, een aandelenindex, goud of zilver. Ook niet verhandelbare grootheden kunnen als onderliggende waarde fungeren, zoals rente, een meteorologische index⁶, of, zoals het geval is bij de producten in dit verslag, een huizenprijsindex. Een optie is niets anders dan een contract tussen twee partijen, een koper en een verkoper, waarin onder meer vastgelegd wordt welk recht de koper verwerft met betrekking tot de onderliggende waarde, en tot welke datum dit recht geldig is. Het recht van de koper wordt vastgelegd in een uitbetalingspatroon; de datum tot welke het recht van de koper uitgeoefend mag worden, wordt de *expiratedatum* genoemd.

Calls vs. puts

We onderscheiden twee soorten opties: *call opties* en *put opties*. Bij opties op een verhandelde onderliggende waarde geeft een call optie het recht om de onderliggende tegen een bepaalde uitoefenprijs of *strike* te kopen; een put optie geeft het recht om de onderliggende tegen de strike te verkopen. Indien de onderliggende niet verhandeld wordt, zal een equivalent bedrag in geld worden uitgekeerd. Een koper van een call optie speculeert eigenlijk op een stijging van de onderliggende waarde, in tegenstelling tot een koper van een put optie, die op een daling hoopt.

European, American and Bermudan

Met betrekking tot de tijdstippen waarop de optie uitgeoefend mag worden, kunnen we drie soorten opties onderscheiden. Een optie die alleen op de expiratedatum mag worden uitgeoefend, wordt een Europese⁷ optie genoemd. Een Amerikaanse optie kan gedurende de gehele looptijd worden uitgeoefend. Een tussenvorm tenslotte is een Bermudaanse⁸ optie; deze kan alleen op vooraf vastgestelde data uitgeoefend worden.

⁶ Sinds september 1999 worden op de Chicago Mercantile Exchange weerderivaten verhandeld, welke als onderliggende waarde een meteorologische index hebben.

⁷ Merk op dat de naamgeving van deze opties niets zegt over waar de opties verhandeld worden.

⁸ Bermudaanse opties worden zo genoemd, daar Bermuda tussen Amerika en Europa in ligt.

De werking van standaardopties

Aan de hand van een beschrijving van de uitbetalingsfunctie zullen we nu proberen duidelijk te maken hoe de meest standaard (*plain vanilla*⁹) Europese calls en puts in zijn werk gaan.

We zullen eerst een aantal afspraken maken wat betreft de notatie. De waarde van een onderliggende op tijdstip t geven we aan met S_t . De waarde van een optie op deze onderliggende zal aangegeven worden met $V_t(S_t)$, kortweg V_t indien duidelijk is van welke onderliggende de optie afhangt. Een expiratedatum zullen we aangeven met de letter T , de uitoefenprijs van een optie met de letter K .

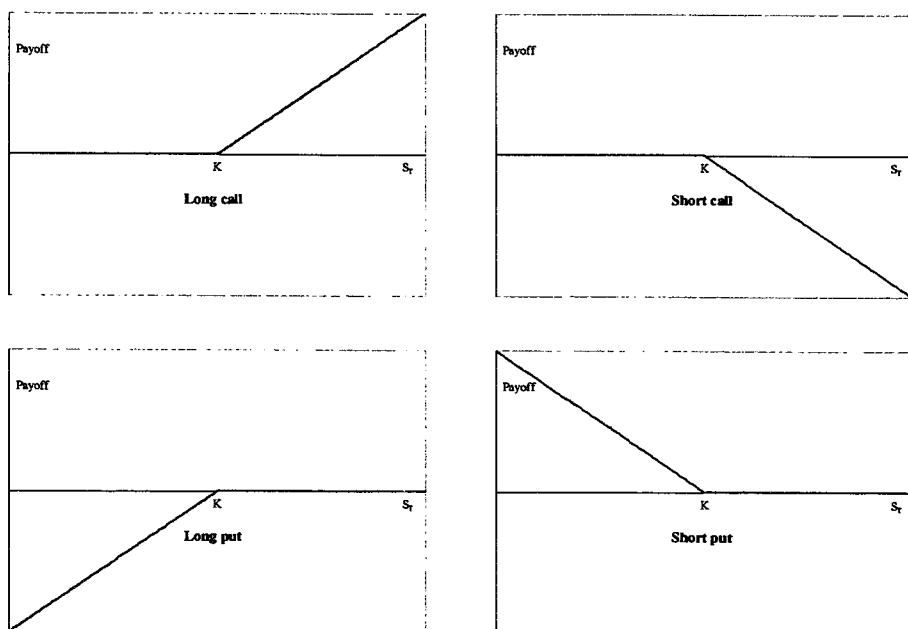
Uitgaande van een verhandelde onderliggende waarde wordt de uitbetalingsfunctie van een standaard Europese call gelijk duidelijk. De koper verkrijgt het recht om op de expiratedatum T een aandeel tegen de uitoefenprijs K te kopen. Indien hij het gekochte aandeel onmiddellijk verkoopt maakt hij een winst van $S_T - K$. Als de koers van het aandeel lager is dan de uitoefenprijs, zal hij de optie niet uitoefenen. De uitbetalingsfunctie is dus gelijk aan:

$$V_T = \max(S_T - K, 0)$$

Bij een put kunnen we de omgekeerde redenering toepassen. De koper zal de put uitoefenen indien de koers van het aandeel lager is dan de uitoefenprijs, en de functie wordt dus:

$$V_T = \max(K - S_T, 0)$$

In onderstaande grafiek worden deze uitbetalingsfuncties grafisch weergegeven, voor een viertal mogelijke posities. Ter verduidelijking: iemand heeft een long positie indien hij iets koopt, en een short positie indien hij iets verkoopt.



Figuur 4.1: Uitbetalingsfuncties voor call en put opties

⁹ Standaard puts en calls worden *plain vanilla* genoemd, omdat de smaak vanille veelvuldig voorkomt.

Het gebruik van opties

De oplettende lezer zal in de vorige grafieken gebruiksmogelijkheden van opties hebben gezien. Opties kunnen worden gebruikt voor speculatieve doeleinden of voor verzekeringsdoeleinden. Speculatief gebruik van opties wordt direct duidelijk aan de hand van een voorbeeld. Stel dat een speculant verwacht dat een aandeel gaat stijgen. De huidige koers van het aandeel is f 100,-. Hij koopt een call optie op dit aandeel met een uitoefenprijs gelijk aan de huidige prijs van het aandeel; hiervoor betaalt hij de prijs van de optie, de *optiepremie*, welke gelijk is aan f 2,50. Indien het aandeel op de expiratedatum gelijk is aan f 110,-, heeft de persoon in kwestie f 7,50 winst gemaakt op deze optie, een rendement van 300%. Als hij in eerste instantie een aandeel gekocht had i.p.v. een optie, had hij slechts een rendement van 10% gehad op zijn oorspronkelijke investering.

Het gebruik van opties als verzekeringsinstrumenten wordt duidelijk aan de hand van de uitbetalingsfunctie van een put optie. De koper van deze optie ontvangt op de expiratedatum geld, als de onderliggende in waarde gedaald is. Een bezitter van deze onderliggende kan zich dus indekken tegen een waardedaling door een long positie te nemen in put opties.

Na deze korte inleiding in de terminologie uit de optiewereld zou de lezer genoeg kennis moeten hebben opgebouwd om de rest van dit hoofdstuk te begrijpen. Uiteraard zijn er vele facetten uit de optiewereld die hier niet aan bod zijn gekomen. Er bestaan vele verschillende soorten opties, elk ontwikkeld door financiële instellingen om aan specifieke wensen van hun klanten te voldoen. Een voorbeeld hier van zijn *barrier opties*, die gelijk worden aan een call of een put (afhankelijk van het type barrier optie) indien de onderliggende een bepaalde drempelwaarde bereikt. Dit soort niet-standaard opties worden *exotische opties* of ook wel *exoten* genoemd. Voor meer informatie over dit soort opties en opties in het algemeen wordt u verwezen naar een standaardwerk over derivaten, Hull [2000]. In het volgende hoofdstuk zullen we ingaan op de waardering van opties.

4.2. Waarderingsmethoden voor opties

Zoals al in de vorige paragraaf aangegeven werd, is in 1973 de Black-Scholes formule gepubliceerd, waarmee men (uiteraard onder bepaalde aannamen) de waarde van een optie kan bepalen. De Black-Scholes formule kan echter niet voor alle soorten opties gebruikt worden, en zoals in de volgende paragraaf zal blijken, zeker niet voor opties op een vastgoedindex. In de appendices 4.A en 4.B zijn derhalve naast het Black-Scholes model, een tweetal andere waarderingsmethoden bekeken. Deze paragraaf is een zeer korte samenvatting van deze appendices. De geïnteresseerde lezer wordt aangeraden deze appendices door te lezen, aangezien niet alle resultaten uit de appendix in deze paragraaf gepresenteerd worden.

In de eerste drie subparagrafen worden achtereenvolgens Black-Scholes pricing, expectation pricing en partial pricing behandeld. In de vierde subparagraaf wordt kort stilgestaan bij het waarderen van opties indien de onderliggende slechts op discrete tijdstippen wordt verhandeld. Tenslotte merken we op dat in het vervolg gebruik zal worden gemaakt van stochastische differentiaalvergelijkingen. Indien de lezer hier niet mee bekend is, wordt hij of zij verwezen naar appendix 4.C.

4.2.1. Black-Scholes pricing

Het Black-Scholes model bestaat uit een obligatie, waarover een risicovrije voet wordt vergoed, en een onderliggende S , welke een geometrische Brownse beweging volgt:

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt \\ dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t \end{aligned} \quad (4.1)$$

Indien $\tau = T - t$, en \mathcal{F}_t alle informatie weergeeft over de onderliggende waarde S tot en met tijdstip t , impliceert dit voor de rendementen:

$$\ln \frac{S_T}{S_t} | \mathcal{F}_t \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau, \sigma^2\tau\right) \quad (4.2)$$

We bekijken slechts niet-padafhankelijke Europese opties, waarvan de waarde op de expiratedatum T wordt gegeven door $F(T, S_T)$.

Tevens worden de volgende aannamen gemaakt:

1. Er zijn geen transactiekosten of belastingen.
2. Onderliggenden en obligaties kunnen in alle mogelijke hoeveelheden, en tevens continu, verhandeld worden.
3. Er bestaan geen arbitragemogelijkheden.

Al deze aannamen kunnen in het geval van een aandeel bekritiseerd worden. In de praktijk blijkt het uit deze aannamen volgende waarderingsmodel echter vrij goed te functioneren.

De prijs van een optie wordt in het Black-Scholes model afgeleid door het gedrag van de optie exact te repliceren met behulp van een continu veranderende portefeuille, welke op tijdstip t bestaat uit ϕ_t eenheden van de onderliggende, en ψ_t risicovrije obligaties. Deze strategie blijkt *self-financing* te zijn, m.a.w. er is slechts een initiële hoeveelheid geld nodig. Tijdens de looptijd van de optie is er geen additionele hoeveelheid geld nodig om ervoor te zorgen dat op de expiratedatum van de optie er precies genoeg geld is om aan de uitbetaling van de optie te

voldoen. De uit deze strategie volgende prijs V_t voor de optie op tijdstip t , is dan eveneens de enige juiste prijs, indien aan de eerder genoemde aannamen voldaan is:

$$V_t = e^{-r\tau} E_Q [F(T, S_T) | \mathcal{F}_t]$$

Hierbij is $\tau = T - t$, en is Q een kansmaat, onder welke S aan de volgende SDV voldoet:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dw_t$$

Deze kansmaat wordt slechts voor de berekening gebruikt. De optie kan dus gewaardeerd worden, door de verdisconteerde verwachting van de uitbetaling te nemen, en aanname (4.2) te gebruiken, waarbij μ vervangen wordt door de risicovrije voet r .

4.2.2. Expectation pricing

Indien de onderliggende waarde van het derivaat niet verhandeld wordt, en er geen verhandelde producten zijn die op enigerlei wijze hiervan afhangen, kan de Black-Scholes formule zeker niet gebruikt worden. Een manier om toch een prijs te berekenen voor dit soort producten, is door de netto contante waarde te berekenen van de toekomstige verwachte uitbetaling van de opties. Voordat de Black-Scholes formule ontdekt werd, was dit ook de manier waarop opties geprijsd werden. Verschillende optiewaarderingsmodellen uit die tijd zijn bijvoorbeeld die van Sprenkle [1964], Boness [1964] en Samuelson [1965]. Een goed overzicht van deze prijsingsmethoden wordt gegeven in Smithson [1998]. Deze manier van prijzen is gelijk aan een statische hedge: er wordt zoveel geld belegd in een obligatie, dat op de expiratiedatum van de optie gemiddeld genomen precies genoeg geld aanwezig is om te voldoen aan de uitbetaling van de optie.

Hiermee wordt ook direct duidelijk dat het niet mogelijk is om een eenduidige prijs te bepalen voor dit soort opties: aangezien er geen perfecte hedge mogelijk, kan iemand die een lagere prijs rekent voor dit soort producten bij bepaalde marktontwikkelingen toch een gunstige prijs hebben berekend. Naar verwachting zal hij echter verlies maken.

Indien we wederom van het bestaan van een risicovrije obligatie uitgaan, krijgen we:

$$V_t = e^{-r\tau} E [F(T, S_T) | \mathcal{F}_t]$$

Bij het berekenen van de verwachting kan nu wel gewoon (4.2) worden gebruikt.

Een nadeel van expectation pricing is dat er op de expiratiedatum slechts naar verwachting genoeg geld is om aan de uitbetaling van de optie te voldoen. Het kan dus zo zijn dat er te veel of te weinig geld aanwezig is op deze datum. Als we met Π_T het uit de replicatiestrategie volgende bedrag weergeven, definiëren we de hedging error als:

$$\varepsilon_T = \Pi_T - F(T, S_T)$$

De hedging error is een naar de expiratiedatum verdisconteerd bedrag, dat weergeeft hoeveel geld er bij het uit de replicatiestrategie volgende bedrag bijgevoegd moet worden, om aan de uitbetaling van de optie te voldoen.

4.2.3. Partial pricing

Bij partial pricing wordt er van de volgende markt uitgegaan:

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt \\ d\underline{Z}_t &= \text{diag}(\underline{Z}_t) \underline{\mu} dt + \text{diag}(\underline{Z}_t) L d\underline{w}_t \end{aligned} \quad (4.3)$$

waarbij $\underline{Z}_t = (Z_t^1, \dots, Z_t^n)^T$ n verschillende aandelen weergeeft; de eerste n-1 kunnen continu en in willekeurige hoeveelheden verhandeld worden. Het n^e aandeel, ook wel aangeduid met S, is de onderliggende waarde van het derivaat, en wordt niet verhandeld. Op eenzelfde wijze is $\underline{w}_t = (w_t^1, \dots, w_t^n)^T$, een vector van n onafhankelijke Wiener processen, en is $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$. Tenslotte is L een onderdriehoeksmatrix, welke voldoet aan $\Sigma = LL^T$, waarbij Σ de covariantiematrix van de rendementen op de aandelen is. In deze markt zijn er tevens geen transactiekosten of belastingen.

Het verschil met expectation pricing is dat hier weliswaar de onderliggende waarde niet wordt verhandeld, maar er wel verhandelbare aandelen beschikbaar zijn, welke gecorreleerd zijn met de onderliggende waarde. Het moet dus mogelijk zijn om een betere prijs af te leiden voor een derivaat op deze onderliggende, door een portefeuille samen te stellen bestaande uit de n-1 verhandelbare aandelen en de risicovrije obligatie. Deze zal niet, zoals bij Black-Scholes pricing, self-financing zijn; er kan echter wel voor gezorgd worden dat deze naar verwachting self-financing is. De hedging error, zoals gezegd de hoeveelheid geld welke op de expiratedatum bijgevoegd moet worden aan de hoeveelheid geld welke uit de replicatie strategie volgt, blijkt gereduceerd te kunnen worden door in plaats van expectation pricing hier deze zogenaamde *partial pricing* techniek toe te passen.

De prijs onder partial pricing kan als volgt geschreven worden:

$$V_t = e^{-r(T-t)} E_Q \left(E_P [F(T, S_T) | Z_T^1, \dots, Z_T^{n-1}] | \mathcal{F}_t \right)$$

Onder de oorspronkelijke kansmaat P voldoet S aan de bijbehorende vergelijking uit (4.3). Bij de berekening moet voor de n-1 verhandelbare aandelen een kansmaat Q gebruikt worden, onder welke de volgende SDV geldt, waarbij $L_{i\cdot}$ de i^e rij van L weergeeft:

$$dZ_{it} = rZ_{it} dt + L_{i\cdot} Z_{it} d\underline{w}_t \quad i = 1, \dots, n-1$$

4.2.4. Discreet hedgen

Met uitzondering van expectation pricing, kunnen de voorgaande waarderingmethoden niet gebruikt worden als de verhandelbare aandelen niet continu, maar slechts op discrete tijdstippen kunnen worden verhandeld. Dit is echter wel een betere weergave van de werkelijkheid. Indien we van deze situatie uitgaan, kan er zeker een prijs afgeleid worden voor de optie. In appendix 4.B wordt dit gedaan voor de volgende markt:

$$B_{t+1} = e^r B_t \quad S_{t+1} = e^{r_{t+1}^S} S_t \quad Z_{t+1} = e^{r_{t+1}^Z} Z_t$$

Hierbij is r de risicovrije voet, en volgt de vector (r_t^S, r_t^Z) een binormale verdeling. De grootheid S is wederom de niet verhandelbare onderliggende waarde van het derivaat, Z is een verhandelbaar aandeel. Aangezien de exacte waarderingsformule voor dit geval geen prettige en inzichtelijke uitdrukking oplevert, zullen we deze hier niet weergeven.

4.3. Derivaten op de huizenprijsindex

Nu in de vorige paragraaf in het kort enkele waarderingsmethoden voor opties zijn besproken, zullen we in deze paragraaf onderzoeken welke van deze methoden het meest geschikt is voor het waarderen van opties op de huizenprijsindex, en de optieprijsen hiervoor afleiden.

4.3.1. Verschillen met de traditionele aannamen

We beginnen met het herhalen van een drietal aannamen die in het Black-Scholes model gemaakt worden. We laten zien waarom deze in het geval van opties op een huizenprijsindex niet opgaan.

- 1. Er zijn geen transactiekosten of belastingen.*
- 2. Aandelen en obligaties kunnen in alle mogelijke hoeveelheden, en tevens continu, verhandeld worden.*
- 3. Er bestaan geen arbitragemogelijkheden.*

Het belangrijkste verschil tussen een huizenprijsindex en een aandeel uit de Black-Scholes wereld is het volgende: de huizenprijsindex zal niet als dusdanig verhandeld worden. Het is niet mogelijk om continu een aandeel in de huizenprijsindex te bezitten. In principe zou een grote marktpeler, door een goed gespreide portefeuille van huizen te kopen zodanig dat deze selectie van huizen de huizenmarkt goed representeert, als het ware een aandeel in de huizenprijsindex kunnen kopen. Zoals Case en Shiller [1999] al opmerkten, zal het door transactiekosten die vele malen hoger liggen dan in de aandelenmarkt, overdrachtskosten en belastingen vrijwel onmogelijk zijn om continu te handelen in de huizenmarkt. De illiquiditeit van deze markt maakt dat de prijs van een optie op de huizenprijsindex niet gewaardeerd kan worden met behulp van de Black-Scholes formule. Deze formule gaat er immers vanuit (zie de vorige paragraaf) dat de optie nagebouwd kan worden met behulp van de onderliggende en een obligatie. Door het invoeren van derivaten op de huizenmarkt zou de huizenmarkt zelf efficiënter kunnen worden, zoals Shiller [1993] al aangeeft. Op het moment is dit echter nog zeker niet het geval.

Het Black-Scholes model kan dus zeker niet gebruikt worden om opties op de huizenprijsindex te waarderen. Shiller en Weiss [1999] concluderen hieruit dat dit soort aandelen derhalve met expectation pricing geprijsd moeten worden. Zoals in de vorige paragraaf is besproken, kunnen we echter ook de optie discreet hedgen door gebruik te maken van verhandelde aandelen, mits deze met de huizenprijsindex gecorreleerd zijn. Hiervoor zouden een drietal aan de AEX genoteerde vastgoedfondsen gebruikt kunnen worden, zoals Rodamco Retail Nederland, VastNed Retail en VastNed Offices/Industrial. In appendix 4.B wordt in paragraaf 4.B.4 onderzocht met hoeveel procent de standaarddeviatie van de hedging error voor een 3-maands Europese call optie op de huizenprijsindex verkleind kan worden door de optie op discrete tijdstippen te repliceren met behulp van elk van deze vastgoedfondsen. Gezien de geringe winst die hier wordt behaald (de grootste winst is een daling van ca. 5%), lijkt het verstandig om de opties met behulp van expectation pricing te waarderen. Aangezien rendementen op vastgoed in het algemeen gecorreleerd zijn met rentevoeten, is het een aanbeveling om te onderzoeken welke invloed dit heeft op het optiewaarderingsmodel. Wegens tijdsgebrek is deze uitbreiding echter niet onderzocht.

4.3.2. Optiewaarderingsmodel

In de vorige paragraaf is geconcludeerd dat we expectation pricing zullen gebruiken om de opties op de huizenprijsindex te waarderen. De huizenprijsindex wordt derhalve als een niet verhandelbare onderliggende waarde beschouwd. De situatie die we bekijken is:

$$B_{t+1} = e^r B_t \quad S_{t+1} = e^i S_t$$

We gaan dus uit van het bestaan van een obligatie, waarover een constante rente wordt vergoed. De rendementen op de huizenprijsindex kunnen nu beschreven worden door één van de twee modellen uit paragraaf 3.6. De optieprijs is nu gewoonweg:

$$V_t = e^{-r\tau} E[F(T, S_T) | \mathcal{F}_t] \quad (4.4)$$

Hierbij is \mathcal{F}_t gelijk aan de informatie die door het proces van rendementen r op het interval $[0, t]$ wordt gecreëerd, oftewel aan de verzameling $\{r_i: 0 \leq i \leq t\}$, en is $\tau = T - t$. Voordat we overgaan tot het afleiden van de optiewaarderingsmodellen, staan we stil bij de volgende vraag: is expectation pricing goed genoeg? De bank zal in de regel geen positie in willen nemen bij het verkopen van deze derivaten. Het risico kan afgedekt worden door een tegenovergestelde transactie aan te gaan met een andere klant, maar wat als deze klant niet direct gevonden kan worden? De hedging error bij expectation pricing is uiteraard gelijk aan:

$$\varepsilon_T = \Pi_T - F(T, S_T) = E[F(T, S_T) | \mathcal{F}_0] - F(T, S_T)$$

De verwachting van de hedging error is uiteraard gelijk aan nul; de bank zou echter bij de prijs een risicopremie kunnen optellen, zodanig dat ze er zeker van is dat ze met een vooraf vastgestelde kans geen extra geld zal hoeven bij te leggen. Indien deze kans gelijk gekozen wordt aan $100\alpha\%$, komt dit overeen met de volgende prijs:

$$V_t = E(e^{-r\tau} V_T | \mathcal{F}_t) + R_t^\alpha,$$

waarbij R_t zodanig wordt gekozen dat voldaan wordt aan:

$$P(e^{-r\tau}(V_T - E(V_T)) \leq R_t^\alpha | \mathcal{F}_t) = \alpha$$

4.3.2.1. ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986

We brengen het ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986 uit 3.6.1 in herinnering:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \theta_3 L^3)(1 + \theta_{12} L^{12}) u_t \\ &= u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \theta_3 u_{t-3} + \theta_{12} u_{t-12} + \theta_1 \theta_{12} u_{t-13} + \theta_2 \theta_{12} u_{t-14} + \theta_3 \theta_{12} u_{t-15} \\ u_t &\sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d. in time} \end{aligned}$$

waarbij wederom $Lu_t = u_{t-1}$.

Om (4.4) uit te kunnen rekenen, willen we de verdeling van $\ln S_T - \ln S_t$ gegeven \mathcal{F}_t weten. Er geldt uiteraard het volgende resultaat:

$$\ln \frac{S_T}{S_t} \Big| \mathcal{F}_t = \sum_{i=t+1}^T r_i \Big| \mathcal{F}_t \sim N(\mu(\tau), \sigma^2(\tau)) \quad (4.5)$$

Om de notatie te vergemakkelijken, gaan we ervan uit dat de fouttermen een MA(q) model volgen (het bekeken model is een speciaal geval van een MA(15) model), oftewel:

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i}$$

Hierbij is $\theta_0 = 1$. Omdat op tijdstip t de fouttermen u_t, \dots, u_{t-q} bekend zijn geldt:

$$\mu(\tau) = E\left(\sum_{i=t+1}^T r_i \Big| \mathcal{F}_t\right) = \mu\tau + \eta(\tau)$$

$$\eta(\tau) = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{\min(q-j, \tau)} \theta_{i+j} u_{t-j}$$

Voor de berekening van $\sigma^2(\tau)$ hebben we de autocovariantiefunctie nodig:

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \sum_{i=0, j=0}^q \theta_i \theta_j \text{Cov}(u_{t-i}, u_{t-k-j}) = \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0, j=0}^q \theta_i \theta_j 1_{[i=k+j]} = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} \theta_{k+j} \theta_j \end{aligned}$$

Voor $\sigma^2(\tau)$ geldt dan:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) &= \text{Var}\left(\ln \frac{S_T}{S_t} \Big| \mathcal{F}_t\right) = \text{Var}\left(\sum_{i=t+1}^T \varepsilon_i \Big| \mathcal{F}_t\right) = \sum_{i=t+1, j=t+1}^T \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) - \text{Var}(\eta(\tau)) = \\ &= \sum_{i=1, j=1}^{\tau} \gamma(|i-j|) - \text{Var}(\eta(\tau)) = \tau \cdot \gamma(0) + 2 \sum_{i=1}^{\tau} (\tau-i) \cdot \gamma(i) - \text{Var}(\eta(\tau)) \\ \text{Var}(\eta(\tau)) &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-1} \left(\sum_{i=1}^{\min(q-j, \tau)} \theta_{i+j} \right)^2 \end{aligned}$$

Met behulp van (4.5) en een aantal resultaten uit de appendix voor de multilognormale verdeling, wordt de prijs van een Europese call optie op de huizenprijsindex bijvoorbeeld:

$$c(\tau, S_t, K) = e^{-\pi} E[(S_T - K)^+ \Big| \mathcal{F}_t] = e^{-\pi} \left(S_t e^{\mu(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)} N(d_1) - KN(d_2) \right) \quad (4.6)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \mu(\tau) + \sigma^2(\tau)}{\sigma(\tau)} \quad d_2 = d_1 - \sigma(\tau)$$

De prijzen die uit dit model voor de vaste waardedelingshypotheek volgen, kunnen in de laatste paragraaf gevonden worden. In de volgende subparagraaf wordt eerst het optiewaarderingsmodel afgeleid indien de huizenprijsindex een tijdreeksmodel met veranderende regimes volgt.

4.3.2.2. Tijdreeksmodel met veranderende regimes

We brengen het tijdreeksmodel uit paragraaf 3.6.2 in herinnering:

$$r_t = \mu_{X_t} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad \text{i.i.d. in time}$$

Hierbij geeft $X_t = 0$ een neerwaartse periode van de huizenmarkt weer en $X_t = 1$ een opwaartse periode. De Markov-keten X_t is onafhankelijk en heeft als overgangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

We nemen aan dat de Markov-keten in evenwicht is; de evenwichtsverdeling is gelijk aan $(p_0, p_1) = \frac{1}{1-\pi} (1-p_{11}, 1-p_{00})$, waarbij $\pi = p_{00} + p_{11} - 1 < 1$. Net als in de vorige paragraaf willen we de verdeling afleiden van $\ln S_T - \ln S_t$ gegeven \mathcal{F}_t . Omdat we aannemen dat de Markov-keten in evenwicht is, is de verdeling van $\ln S_T - \ln S_t$ gegeven \mathcal{F}_t gelijk aan de verdeling van $\ln S_T - \ln S_t$. We kunnen nu schrijven:

$$\ln S_T - \ln S_t = \sum_{i=t+1}^T r_i = \mu_0 \tau + (\mu_1 - \mu_0) \cdot \sum_{i=t+1}^T X_i + \sum_{i=t+1}^T \varepsilon_i$$

Als we deze grootheid conditioneren naar $N(\tau)$, het aantal perioden dat de huizenprijsindex zich in de komende τ tijdseenheden in een opwaartse toestand bevond, is hij normaal verdeeld. De verwachting en variantie zijn gelijk aan:

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=t+1}^T r_i \mid N(\tau) = n\right) &= \mu_0 \tau + n(\mu_1 - \mu_0) \\ \text{Var}\left(\sum_{i=t+1}^T r_i \mid N(\tau) = n\right) &= \text{Var}\left(\sum_{i=t+1}^T \varepsilon_i\right) = \tau \sigma^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

De optieprijs kan nu in de volgende vorm geschreven worden:

$$V_t = e^{-\pi} \sum_{n=0}^{\tau} P(N(\tau) = n) \cdot E(V_T \mid \mathcal{F}_t, N(\tau) = n) \quad (4.8)$$

De verwachting onder het sommatieteken kan eenvoudig uitgerekend worden. De verwachting voor een call volgt direct uit (4.6), indien we voor $\mu(\tau)$ en $\sigma^2(\tau)$ (4.7) substitueren. Rest ons $P(N(\tau) = k)$ te bepalen. We leiden af voor $p_{ijk} = P(N(j) = k, X_j = i)$:

$$\begin{aligned} p_{0jk} &= p_{00} \cdot p_{0,j-1,k} + p_{10} \cdot p_{1,j-1,k} \\ p_{1jk} &= p_{11} \cdot p_{1,j-1,k-1} + p_{01} \cdot p_{0,j-1,k-1} \end{aligned} \quad 0 \leq k \leq j$$

Voor p_{ijk} waarbij niet voldaan is aan $0 \leq k \leq j$ geldt uiteraard dat deze kans gelijk is aan nul. Aangezien we aannemen dat het proces in evenwicht is, geldt er tenslotte dat $p_{000} = p_0$ en $p_{100} = p_1$. Na bepaling van deze kansen kunnen we $P(N(\tau) = j)$ bepalen, namelijk:

$$P(N(\tau) = k) = P(N(\tau) = k, X_\tau = 0) + P(N(\tau) = k, X_\tau = 1) = p_{0\tau k} + p_{1\tau k}$$

4.4. Vaste waardedelingshypotheek

In deze paragraaf presenteren we in het kort het uit de vorige paragraaf vloeiende optiewaarderingsmodel voor de vaste waardedelingshypotheek, en de hieruit volgende prijzen voor representatieve waarden van de parameters. Allereerst brengen we de definitie van een vaste waardedelingshypotheek in herinnering:

$$w(\tau, S_t, S_0) = \frac{kP}{S_0} c(\tau, S_t, S_0)$$

Hierbij is τ de tijd tot de expiratiedatum van het contract, k het waardedelingspercentage, P de prijs van het huis op het moment van het afsluiten van de waardedelingshypotheek, en geeft S_t de stand van de huizenprijsindex op tijdstip t weer. Aangezien de waardedelingshypotheek een at-the-money call optie is, is de strike van deze optie gelijk aan S_0 . Met behulp van respectievelijk vergelijking (4.6) en (4.8) uit de vorige paragraaf, volgt de prijs van de vaste waardedelingshypotheek nu direct voor de beide tijdreeksmodellen.

In onderstaande tabel worden de prijzen voor de vaste waardedelingshypotheek gepresenteerd bij de volgende specificaties:

- Waarde van de appartementen gelijk aan f 150.000,-;
- Waarde van de eengezinswoningen gelijk aan f 300.000,-;
- Risicovrije rentevoet¹⁰ van 4%;
- 25% waardedeling;
- Looptijd 10 jaar;
- Maandelijkse uitkering is een annuïteit, gebaseerd op de verwachte fiscale behandeling van het product onder het Belastingstelsel 2001.

| | | Model 1 | | Model 2 | |
|---------------|-------|------------|------------|------------|------------|
| | | Optieprijs | Mnd. uitk. | Optieprijs | Mnd. uitk. |
| Appartementen | Noord | 25.065 | 252 | 17.941 | 178 |
| | Oost | 53.593 | 539 | 14.997 | 149 |
| | Rand | 57.134 | 575 | 12.282 | 122 |
| | West | 41.664 | 419 | 11.290 | 112 |
| | Zuid | 50.535 | 508 | 14.239 | 141 |
| Woningen | Noord | 78.875 | 793 | 19.063 | 189 |
| | Oost | 92.182 | 927 | 18.763 | 186 |
| | Rand | 117.030 | 1.177 | 24.025 | 239 |
| | West | 100.476 | 1.011 | 18.034 | 179 |
| Nederland | Zuid | 91.672 | 922 | 19.489 | 194 |
| | App. | 47.225 | 475 | 12.700 | 126 |
| | Won. | 94.321 | 949 | 18.551 | 184 |

Tabel 4.1: Prijzen vaste waardedelingshypotheek

Met model 1 wordt in de tabel het ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986 bedoeld; model 2 is dan automatisch het tijdreeksmodel met veranderende regimes. De prijzen voor andere waardedelingspercentages kunnen eenvoudig worden verkregen: voor de prijzen bij een waardedelingspercentage van 50% dienen de prijzen bijvoorbeeld met twee vermenigvuldigd te worden. Naast de prijs van de vaste waardedelingshypotheek is tevens de maandelijkse uitkering berekend onder de verwachte fiscale behandeling van het product onder het Belastingstelsel 2001. Deze zal in hoofdstuk 5 aan de orde komen. We

¹⁰ Robeco hanteert momenteel ook een risicovrije voet van 4% om geldstromen te verdisconteren. Wij zullen dit in de rest van het verslag ook doen.

gaan er hier van uit dat de uitkering alleen het vermogen in Box III zal beïnvloeden. Tevens gaan we er van uit dat de betreffende particulier meer netto vermogen in Box III heeft dan het van belasting vrijgestelde vermogen. Dit komt er op neer dat de uitkering met een belastingtarief van 1.2% belast zal worden.

De optiepreizen beijkend, merken we dat de optiepreizen sterk fluctueren per regio. Dit is a priori te verwachten: de waardeontwikkeling van de woningtypen verschilt immers ook sterk per regio. Ten tweede merken we dat de optiepreizen voor model 2 vele malen lager liggen dan voor model 1. Dit komt doordat beide modellen voor de huizenprijsindex verschillen qua toekomstverwachting: onder model 2 zijn dalingen van de index vele malen waarschijnlijker dan in model 1.

4.5. Gevoeligheden optiewaarderingsmodel

Om een model goed te begrijpen, is het noodzakelijk te onderzoeken hoe de waarde van de optie verandert als de parameters veranderen. Daar een aantal van de parameters uit de prijsingsformule slechts gebaseerd zijn op schattingen, zijn zij behept met een bepaalde onzekerheid. In de optieliteratuur wordt de invloed van de parameters onderzocht aan de hand van de zogenaamde *Grieken*, de afgeleiden van de optieprijs naar de verschillende parameters. Het is echter beter om de exacte invloed t.g.v. de statistische onzekerheid te bepalen, hetgeen we hier zullen doen voor respectievelijk de autocorrelaties, volatiliteiten, verwachte rendementen en de overgangskansen.

4.5.1. Autocorrelaties

In deze subparagraaf zullen we analyseren hoe de vertragingen in de logaritmische rendementen op de huizenprijsindex de optieprijs op deze onderliggende kunnen beïnvloeden. We zullen een stationair homoskedastisch Gaussisch proces aannemen voor de rendementen op de huizenprijsindex (het ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986 is hier een speciaal geval van) en bekijken hoe de optieprijzen veranderen indien we deze autocorrelaties wel modelleren.

Zoals gezegd, zullen we de volgende twee modellen vergelijken voor de rendementen op de onderliggende waarde van de optie:

$$\begin{aligned} (1) \quad r_t^{(1)} &= \mu + \varepsilon_t^{(1)} & \varepsilon_t^{(1)} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{i.i.d. through time} \\ (2) \quad r_t^{(2)} &= \mu + \varepsilon_t^{(2)} & \varepsilon_t^{(2)} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{Cov}(\varepsilon_t^{(1)}, \varepsilon_{t-k}^{(2)}) = \gamma(k) \end{aligned}$$

Model (2) is hier het echte proces dat de rendementen volgen, model (1) impliceert dat de rendementen een discrete random walk volgen. Autocorrelaties in de rendementen zullen alleen de variantiestructuur van de rendementen veranderen, niet het gemiddelde niveau ervan. We nemen aan dat de optieprijs afhangt van de waarde van de huizenprijsindex op een gegeven tijdstip in de toekomst, zeg T . De waarde van de huizenprijsindex op dit tijdstip kan als volgt worden weergegeven:

$$S_T = S_0 e^{\sum_{t=1}^T r_t}$$

De verhouding van de variantie van de som der rendementen in model 2 met die uit model 1 is:

$$\frac{\text{Var} \sum_{t=1}^T r_t^2}{\text{Var} \sum_{t=1}^T r_t^1} = \frac{\sum_{i,j=1}^T \gamma(|i-j|)}{T\sigma^2} = \frac{T\gamma(0) + 2\sum_{j=1}^{T-1} (T-j) \cdot \gamma(j)}{T\sigma^2} = 1 + 2\sum_{i=1}^{T-1} \frac{T-i}{T} \rho(i),$$

waarbij $\rho(i) = \frac{\gamma(i)}{\gamma(0)}$ de i^e autocorrelatie van model (2) weergeeft. We observeren dat als het echte proces van de rendementen kleine autocorrelaties heeft, het effect van deze vertragingen op de variantie van de som der rendementen niet al te groot zal zijn. Eveneens zal het effect vrij gering zijn indien de autocorrelaties snel naar nul gaan, en als bovendien hun som klein is.

We zullen deze uitkomsten nu toepassen op de prijzen voor de waardedelingshypotheken op de verscheidene huizenprijsindices. In onderstaande tabel staat weergegeven hoeveel de variantie van de som der rendementen procentueel verschilt indien de autocorrelaties wel

gemodelleerd worden samen met het procentuele verschil van de optiepreizen indien de autocorrelaties wel gemodelleerd worden. De gebruikte indices zijn hier op basis van de transactiegegevens van het Kadaster.

| | Appartementen | | | | | Woningen | | | | | Nederland | |
|-----------------------------|---------------|--------|-------|--------|--------|----------|-------|-------|-------|-------|-----------|--------|
| | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | App. | Won. |
| Vershil varianties (%) | -48.81 | -46.11 | 38.88 | -27.29 | -36.33 | 56.78 | 53.27 | 26.68 | 93.97 | 76.30 | -18.22 | 133.59 |
| Vershil in optiepreizen (%) | -6.88 | -2.01 | 0.88 | -0.56 | -0.99 | 1.44 | 0.64 | 0.82 | 0.99 | 0.67 | -0.15 | 0.79 |

Tabel 4.2: Hoeveel invloed heeft het modelleren van autocorrelaties?

Alhoewel de variantie van de som der rendementen drastisch verandert door het modelleren van de autocorrelaties, de invloed op de optieprijs eigenlijk vrij gering is, met uitzondering van de optiepreizen op de appartementenindex voor de Regio Noord. In appendix 3.C.3 kunnen we een mogelijke reden hiervoor terugvinden: de volatiliteit van deze index is het hoogste van alle indices. Dat de autocorrelaties slechts een geringe invloed op de optieprijs uitoefenen, komt doordat de variantie van de rendementen in dit model van geringe invloed is op de optieprijs; dit zal ten dele het onderwerp van de volgende paragraaf zijn.

4.5.2. Volatiliteit

In deze subparagraaf onderzoeken we de invloed van de volatiliteit van de rendementen op de optieprijs; we zullen dit uitsplitsen naar beide modellen voor de huizenprijsindex.

4.5.2.1. ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986

We herhalen in het kort de optieprijs voor een Europese call uit vergelijking (4.6):

$$c(\tau, S_t, K) = e^{-r\tau} E[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] = e^{-r\tau} \left(S_t e^{\mu(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)} N(d_1) - KN(d_2) \right)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \mu(\tau) + \sigma^2(\tau)}{\sigma(\tau)} \quad d_2 = d_1 - \sigma(\tau)$$

De eerste term die we bekijken is $N(d_2)$. Deze geeft de kans weer dat de index over een periode van τ maanden gedaald is ten opzichte van de huidige stand. Aangezien de schattingen voor dit model gebaseerd zijn op de periode vanaf 1986, is het niet verwonderlijk dat voor alle indices de kans dat de index over één jaar gedaald is, groter of gelijk is aan 0.966. Uit de definitie volgt dat $N(d_1) \geq N(d_2)$, zodat voor grote waarden van τ het volgende gerechtvaardigd zal zijn: $N(d_1) \approx N(d_2) \approx 1$.

De volatiliteit komt nu alleen nog voor in de term $e^{\frac{1}{2}\sigma^2(\tau)}$. Indien we de autocorrelaties van de fouttermen buiten beschouwing laten, is $\sigma^2(\tau) = \sigma^2\tau$. De hoogste volatiliteit (op maandbasis) die we onder de indices tegenkomen, is ongeveer 2%. Voor een looptijd van 10 jaar betekent dit dat $e^{\frac{1}{2}\sigma^2(\tau)}$ ongeveer gelijk is aan 1.025. De optieprijs kan voor grote waarden van τ dan ook benaderd worden door:

$$c(\tau, S_t, K) \approx e^{-r\tau} (S_t e^{r\tau} - K)$$

Deze benadering is gelijk aan de prijs van een at-the-money future op de huizenprijsindex, indien het rendement op de huizenprijsindex constant is. In onderstaande tabel staat voor de

verscheidene indices weergegeven hoeveel een echte at-the-money optieprijs met een looptijd van 10 jaar relatief verschilt van deze benadering:

| | Appartementen | | | | Woningen | | | | Nederland | | | |
|-----------------------------|---------------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|
| | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | App. | Won. |
| Verskil in optieprijsen (%) | 0.176 | 2.738 | 0.172 | 1.245 | 2.022 | 2.371 | 0.469 | 1.528 | 0.375 | 1.110 | 0.263 | 1.094 |

Tabel 4.3: Relatief verschil echte optieprijs en benadering

De echte optieprijs ligt tussen de 0 en 3% hoger dan de benadering. We concluderen dat de volatiliteit in dit optiewaarderingsmodel van zeer marginale invloed is op de optieprijs.

4.5.2.2. Tijdreeksmodel met veranderende regimes

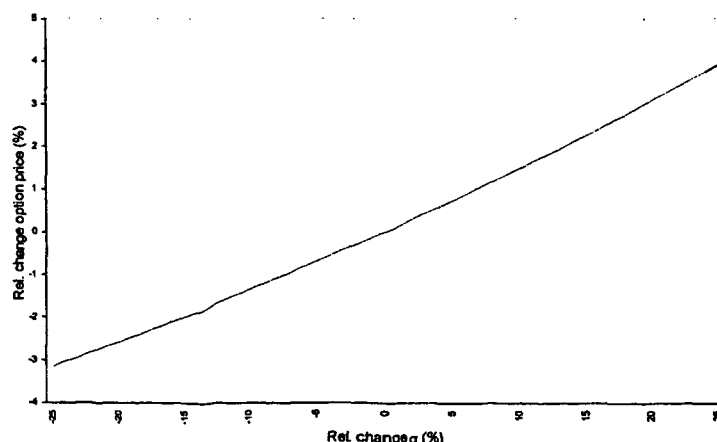
In dit tijdreeksmodel is de invloed van de volatiliteit op de optieprijsen analytisch moeilijker te bepalen. Voor een steekproef X_1, \dots, X_n uit een normale verdeling is het volgende een $100(1-\alpha)\%$ betrouwbaarheidsinterval voor de variantie σ^2 :

$$\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})}, \frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})} \right)$$

Hierbij is $\chi_{n-1}^2(z)$ het $100z\%$ quantiel van een χ_{n-1}^2 stochast. Voor de volatiliteit betekent dit dat de absolute relatieve fout hierin hooguit gelijk is aan:

$$\max\left\{ \left| \sqrt{\frac{n}{\chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})}} - 1 \right|, \left| 1 - \sqrt{\frac{n}{\chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})}} \right| \right\}.$$

Aangezien de volatiliteit geschat is op basis van 244 waarnemingen, levert dit bij een betrouwbaarheid van 95% een maximale relatieve fout op van ca. 10% op in de volatiliteit. We bekijken nu direct hoeveel de optieprijs relatief verandert bij een bepaalde relatieve verandering van de volatiliteit. In onderstaande grafiek staat dit uitgezet voor de index met de hoogste volatiliteit, de appartementenindex van de Regio Noord:



Grafiek 4.1: Invloed volatiliteit op optieprijs

We merken op dat zelfs een relatieve verandering van 25% in de volatiliteit op de optieprijs slechts een relatieve verandering van ca. 4% veroorzaakt. We concluderen dat de onzekerheid in de volatiliteit ook in dit optiewaarderingsmodel van geringe invloed is op de optieprijs.

4.5.3. Gemiddeld rendement

Aangezien de parameters die ingevuld worden in de optieformule gebaseerd zijn op schattingen, zit er een bepaalde onzekerheid in deze parameters. Zoals er ook betrouwbaarheidsintervallen gegeven kunnen worden voor deze parameters, kunnen we eveneens betrouwbaarheidsintervallen geven voor de optieprijs waarin deze parameters worden ingevuld. We zullen ons hier beperken tot het analyseren van de invloed van de schatting van het gemiddelde rendement op de optieprijs; daar uit de vorige paragrafen gebleken is dat de onzekerheid in de andere parameters een marginale invloed heeft op de optieprijs, veronderstellen we deze als bekend.

ARMA-tijdreeksmodel

Aangezien de marginale verdeling van de logaritmische rendementen normaal is, is de schatter voor het verwachte rendement dit ook en geldt het volgende:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right) \sim N \left(0, \frac{1}{n} \sigma^2(n) \right) \quad (4.9)$$

Hierbij is X_i een normale stochast die het i^e rendement representeert, het verwachte rendement gelijk aan μ en de variantie van de som van n opeenvolgende rendementen gelijk aan $\sigma^2(n)$. Hoewel de opeenvolgende rendementen niet onafhankelijk zijn, kunnen we voor het gekozen model eenvoudig nagaan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sigma^2(n) < \infty$.

Aan de hand van (4.9) kunnen nu eenvoudig betrouwbaarheidsintervallen voor μ worden afgeleid. Hoe kunnen deze nu gebruikt worden om tot een betrouwbaarheidsinterval voor de optieprijs te komen? Indien we de optieprijs uit (4.6) bekijken, is het duidelijk dat de optieprijs een strikt stijgende functie is van het verwachte rendement μ . Dit is ook intuïtief duidelijk: een hoger verwacht rendement leidt tot een hogere verwachting voor de stand van de index en dus ook tot een hogere optieprijs (de optieprijs is immers een verwachting, welke positief afhangt van de verwachte stand van de index). De optieprijs, als functie van μ beschouwd, is derhalve inverteerbaar. Aangezien we in het vervolg alleen geïnteresseerd zijn in de parameter μ , geven we de optieprijs weer als $c(\mu)$, en zijn inverse als $c^{-1}(x)$. Indien we nu met q_α het $100 \cdot \alpha\%$ percentiel weergeven, geldt hiervoor:

$$P(c(\hat{\mu}) \leq q_\alpha) = P(\hat{\mu} \leq c^{-1}(q_\alpha)) = \Phi \left(\frac{n(c^{-1}(q_\alpha) - \mu)}{\sigma(n)} \right) = \alpha$$

Hieruit volgt direct de volgende schatter voor het $100 \cdot \alpha\%$ percentiel:

$$\hat{q}_\alpha = c \left(\hat{\mu} + \frac{1}{n} \sigma(n) \Phi^{-1}(\alpha) \right)$$

De linker- en rechtergrens van een betrouwbaarheidsinterval voor de optieprijs zijn eenvoudig uit te rekenen door respectievelijk de linker- en rechtergrens uit het betrouwbaarheidsinterval voor μ in de optieprijs in te vullen.

Tijdreeksmodel met veranderende regimes

Voor dit model hebben we schattingen voor het gemiddelde rendement van zowel de opwaartse als de neerwaartse toestand. Bij het schatten hebben we verondersteld dat we achteraf met redelijke zekerheid konden bepalen wanneer de huizenmarkt zich in welke

toestand bevond. Hierdoor zijn de schatters voor beide verwachte rendementen onafhankelijk. Ook hier kunnen we aangeven hoe de waarde van het $100 \cdot \alpha\%$ percentiel van de optieprijs gezocht kan worden. We zullen de optieprijs aangeven met $c(\mu_0, \mu_1)$. De optieprijs is strikt stijgend in beide parameters. We onderscheiden hier de inverse van de optieprijs x naar μ_0 , gegeven de waarde van μ_1 , welke we aanduiden met $c_{\mu_0}^{-1}(x, \mu_1)$. Er geldt nu:

$$\begin{aligned} P(c(\hat{\mu}_0, \hat{\mu}_1) \leq q_\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(c(\hat{\mu}_0, \hat{\mu}_1) \leq q_\alpha \mid \hat{\mu}_1 = y) dP(\hat{\mu}_1 \leq y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\hat{\mu}_0 \leq c_{\mu_0}^{-1}(q_\alpha, y)) dP(\hat{\mu}_1 \leq y) = \alpha \end{aligned} \quad (4.10)$$

Aangezien beide schatters marginaal normaal verdeeld zijn, kennen we de verdelingsfuncties in vergelijking (4.10), en kan met een zoekalgoritme gezocht worden naar de waarde van q_α . Een andere mogelijkheid is een simulatie; men kan N trekkingen maken uit de verdeling van respectievelijk $\hat{\mu}_0$ en $\hat{\mu}_1$, en deze invullen in de optieprijs. Uit deze N trekkingen voor de optieprijs kan nu het $100 \cdot \alpha\%$ percentiel geschat worden. Door deze procedure M keer te herhalen, kan men uit de verscheidene schattingen voor q_α een indruk krijgen van de spreiding in de resultaten, en een betrouwbaarheidsinterval voor q_α opstellen.

In onderstaande tabel hebben we 95% betrouwbaarheidsintervallen berekend voor de optieprijs onder beide tijdreeksmodellen voor de huizenprijsindex. Voor model 2 is het betrouwbaarheidsinterval m.b.v. een simulatie bepaald; er is net zo lang doorgesimuleerd totdat de grenzen op honderdtallen significant waren bij een betrouwbaarheidsniveau van 95%. De specificaties van het contract zijn net als in paragraaf 4.4 gelijk aan:

- Waarde van de appartementen gelijk aan f 150.000,-;
- Waarde van de eengezinswoningen gelijk aan f 300.000,-;
- Risicovrije rentevoet van 4%;
- 25% waardedeling;
- Looptijd 10 jaar;

| | | <i>Model 1</i> | | | <i>Model 2</i> | | |
|----------------------|--------------|----------------|----------|------------|----------------|----------|------------|
| | | Ondergrens | Verwacht | Bovengrens | Ondergrens | Verwacht | Bovengrens |
| Appartementen | Noord | 1.998 | 25.065 | 67.663 | 6.300 | 17.941 | 39.900 |
| | Oost | 28.083 | 53.593 | 91.285 | 3.200 | 14.997 | 47.200 |
| | Rand | 36.934 | 57.134 | 83.887 | 3.500 | 12.282 | 27.800 |
| | West | 26.123 | 41.664 | 61.899 | 4.800 | 11.290 | 22.700 |
| | Zuid | 28.694 | 50.535 | 81.205 | 800 | 14.239 | 67.200 |
| Woningen | Noord | 46.808 | 78.875 | 121.494 | 9.300 | 19.063 | 33.700 |
| | Oost | 66.597 | 92.182 | 123.348 | 11.500 | 18.763 | 28.000 |
| | Rand | 68.784 | 117.030 | 184.764 | 9.400 | 24.025 | 47.300 |
| | West | 71.371 | 100.476 | 136.522 | 9.600 | 18.034 | 29.100 |
| | Zuid | 67.987 | 91.672 | 120.085 | 10.800 | 19.489 | 30.900 |
| Nederland | App. | 35.773 | 47.225 | 60.823 | 6.800 | 12.700 | 22.000 |
| | Won. | 70.757 | 94.321 | 122.457 | 12.000 | 18.551 | 26.500 |

Tabel 4.4: Betrouwbaarheidsintervallen voor de optieprijzen

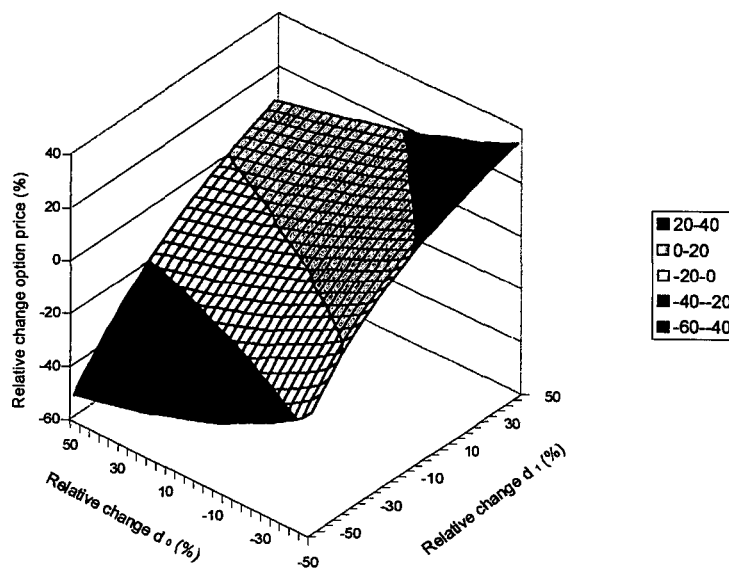
De indruk wordt gewekt dat de spreiding in de schatting van het gemiddelde voor veel onzekerheid zorgt omtrent de exacte optieprijs. Een betere schatting van het verwachte rendement is zeer wenselijk om een betere schatting te kunnen geven van de exacte optieprijs.

4.5.4. Overgangskansen

Indien we het tijdreeksmodel met veranderende regimes aannemen voor de huizenprijsindex, hebben we in het optiewaarderingsmodel nog twee parameters om rekening mee te houden: de gemiddelde duur d_0 en d_1 van respectievelijk een neerwaartse en een opwaartse periode. Deze zijn direct gerelateerd aan de overgangskansen, immers: $p_{01} = 1/d_0$ en $p_{10} = 1/d_1$.

Aangezien de huizenprijsindex in de bekeken periode slechts één overgang heeft gemaakt van een neerwaartse naar en opwaartse periode, en we onze schattingen voor de duur van een opwaartse periode baseren op een opwaartse periode die wellicht nog een aantal jaren zal voortduren, is het statistisch onmogelijk om iets te zeggen over de betrouwbaarheid van de schattingen.

Iets dat we wel kunnen doen, is te analyseren hoe een relatieve verandering van deze parameters de optieprijs verandert. In onderstaande grafiek is dit gedaan voor relatieve veranderingen van maximaal vijftig procent voor de beide parameters d_0 en d_1 . De bekeken optie is een Europese at-the-money call op de eengezinswoningenindex voor de Regio West.



Grafiek 4.2: Relatieve verandering optieprijs t.g.v. relatieve verandering d_0 en d_1

Uiteraard vindt de ergste negatieve relatieve verandering van de optieprijs plaats indien de gemiddelde duur van een neerwaartse periode groter wordt, terwijl de gemiddelde duur van een opwaartse periode kleiner wordt. De kans dat de index dan boven de strike zal eindigen wordt dan kleiner, waardoor de optieprijs daalt. Het omgekeerde geldt voor de grootste positieve relatieve verandering van de optieprijs. We constateren dat de absolute relatieve verandering van de optieprijs bijna nergens groter is dan de absolute relatieve verandering van een van de beide gemiddelde verblijven in elk van de toestanden.

Het moge duidelijk zijn dat voor het bepalen van een optieprijs goede schattingen voor de duur van elk van deze toestanden een vereiste is.

Samenvatting

Na een korte inleiding in het optiejargon, is duidelijk gemaakt wat de verschillen zijn tussen het waarderen van opties op aandelen en opties op een huizenprijsindex. Illiquiditeit en grote transactiekosten in de huizenmarkt maken het onmogelijk om een representatief aandeel in de huizenmarkt te nemen en hier in willekeurige hoeveelheden in te handelen, waardoor de opties niet gewaardeerd kunnen worden met behulp van de Black-Scholes formule. In plaats van de Black-Scholes methode om opties te prijzen, zijn er voor de hier bekeken situatie twee methoden mogelijk: discreet hedgen of expectation pricing. Bij het eerste wordt het risico van de huizenprijsindex afgedekt door te handelen in bijvoorbeeld beursgenoteerde vastgoedfondsen. De correlatie van de rendementen op deze fondsen met de bekeken huizenprijsindices bleek vrij laag te zijn, zodat de risicoreductie in vergelijking met expectation pricing miniem is. Er is dan ook voor deze laatste eenvoudiger variant gekozen. De waarde wordt nu berekend als verdisconteerde verwachting van de uitbetaling. Deze illiquiditeit en transactiekosten hebben wel als gevolg dat de bank een zeker risico zal lijden bij het handelen in dergelijke optieconstructies. Idealiter zal er dus voor elke transactie een tegengestelde transactie uitgevoerd moeten worden.

Voor de vaste waardedelingshypotheek zijn er prijzen berekend, gebruikmakend van beide modellen voor de huizenprijsindex. In een gevoeligheidsanalyse naar de verschillende parameters van de aandelen is gebleken dat het, door de geringe hoeveelheid beschikbare data, vrijwel onmogelijk is om een eenduidige optieprijs te bepalen. De verwachte stijging van de huizenprijsindex blijkt de invloedrijkste parameter van het model te zijn.

Deel II – Risicoanalyse

5. Risico Inventarisatie

Een essentiële voorwaarde voor het succesvol introduceren van een product is dat de risico's welke verbonden zijn aan dit product, goed gemeten en gemanaged kunnen worden. Het risicomanagement voor een product bestaat in essentie uit de volgende drie fasen:

- het herkennen van de risico's;
- het meten van de risico's;
- het managen van de risico's.

In dit hoofdstuk zullen we de risico's inventariseren, en aangeven welke risico's we in de komende hoofdstukken zullen kwantificeren.

Zoals in het vorige hoofdstuk al aan bod is gekomen, hebben we bij optieconstructies op de huizenprijsindex naast de gebruikelijke risico's tevens te maken met het probleem dat het risico op dit soort opties, in tegenstelling tot het risico op opties op aandelen, niet perfect afgedekt kan worden. Aangezien de bank geen positie in wil nemen, leidt dit probleem tot de constructie die in het eerste hoofdstuk al is aangegeven. In het geval van de waardedelingshypotheek betekent dit dat de Rabobank call-opties op regionale huizenprijsindices van particulieren koopt, en aan beleggers call-opties op de Nederlandse huizenprijsindex verkoopt. Bij elk risico zal daarom stilgestaan worden bij de vraag welke consequentie het heeft voor de particulieren, de Rabobank en tenslotte de beleggers.

We gaan nu over tot het inventariseren van de risico's. Hierbij maken we gebruik van de volgende indeling, welke vrijwel overeenkomt met die van Kocken [1997]:

- Marktrisico;
- Debiteurenrisico;
- Liquiditeitsrisico;
- Productrisico;
- Regelgevingsrisico;
- Overige risico's.

5.1. Marktrisiko

Onder marktrisiko wordt het risico verstaan dat veroorzaakt wordt door veranderingen in de marktvariabelen, hier met name de verschillende indices en de rentestanden.

Koersrisico ten opzichte van de huizenprijsindices

Wat de huiseigenaren betreft ziet het marktrisiko er als volgt uit. Het feit dat er gebruik gemaakt wordt van een index kan tot over- dan wel onderschattingsproblemen leiden van de werkelijke waardeverandering van het huis ten opzichte van de gehanteerde index. Voor de huiseigenaar kan dit nadelig zijn, in het geval dat de waarde van zijn huis minder gestegen (of zelfs gedaald) is in vergelijking met de huizenprijsindex. In dit geval zal hij toch de waardestijging moeten afstaan welke door de huizenprijsindex wordt weergegeven. Deze mismatch zal in het vervolg aangeduid worden met de mismatch van de particulier. In het volgende hoofdstuk wordt hier dieper op ingegaan.

De belegger koopt in de constructie van de waardedelingshypotheek een call-optie op de huizenprijsindex en heeft dan ook een beperkt risico; het maximale verlies van de belegger is de premie die hij moet betalen voor de optie. Over de invloed die deze optie heeft op het marktrisiko van de belegger valt weinig te zeggen; dit hangt sterk af van de portefeuille van de desbetreffende belegger.

De Rabobank tenslotte koopt call-opties van huiseigenaren, en verkoopt call-opties aan beleggers. In het geval dat de uitzetting aan de kant van de huiseigenaren exact gelijk zou zijn aan de uitzetting aan de kant van de beleggers zou de bank geen koersrisico op de index lopen. We hebben hier echter te maken met verschillende mismatches, en wel de volgende:

- mismatch in index;
- mismatch in tijd en omvang;
- mismatch in strike en looptijd.

De mismatch in index wordt veroorzaakt doordat er opties worden ingekocht op de regionale huizenprijsindices, terwijl de uitzettingen gebeuren op de Nederlandse huizenprijsindex. De mismatch in tijd en omvang heeft te maken met het feit dat de netto omvang van de uitstaande contracten in de tijd zal veranderen, en dat de betalingen op verschillende tijdstippen binnenkomen. De mismatch in strike en looptijd tenslotte wordt veroorzaakt doordat de call-opties in de portefeuille van de bank op verschillende tijdstippen zijn afgesloten, met als gevolg dat ze een verschillende strike en resterende looptijd hebben. In hoofdstuk 6 zal dieper op de mismatch van de bank worden ingegaan.

Renterisiko

Buiten het koersrisico t.o.v. de index zal de financiering van de producten ook bloot staan aan renterisiko. Dit risico is voor de bank goed af te dekken met behulp van rentederivaten.

5.2. Debiteurenrisico

Het debiteurenrisico is het risico dat een tegenpartij failliet gaat of dat om andere redenen de contractuele verplichtingen niet worden nagekomen. Dit risico wordt veelal gesplitst in *settlement risico* en *pre-settlement risico*.

Het settlement risico is het risico dat op het contractuele moment van betaling van de tegenpartij, deze de betaling niet nakomt. Het pre-settlement risico, het gebruikelijke *kredietrisico*, is het risico dat een tegenpartij voor de settlementdatum failliet gaat en ophoudt aan haar verplichtingen te voldoen.

In het geval van de particulier is het mogelijk dat zijn financiële situatie zó verandert, dat hij niet aan zijn verplichtingen kan voldoen. Voor het verstrijken van de looptijd zijn dit zijn maandelijkse hypotheeklasten - indien de waardedelingshypotheek direct gekoppeld wordt aan een hypotheek - en bij expiratie dient de particulier een percentage van de door de index aangegeven waardeinstijging af te staan. In beide gevallen geldt dat de Rabobank toch een substantieel deel van de geleden schade kan terughalen, indien de optieconstructie via de hypotheek het huis als onderpand heeft. Bij settlement problemen kan er gedacht worden aan het afsluiten van een hypotheek op de overwaarde van het huis.

Wat de belegger betreft, deze koopt een call-optie van de Rabobank, en betaalt hiervoor vooraf een optiepremie. Om deze reden zal de Rabobank wat de belegger betreft geen last hebben van debiteurenrisico.

5.3. Liquiditeitsrisico

Onder liquiditeitsrisico kunnen we twee verschillende risicosoorten scharen, te weten de volgende:

- het marktliquiditeitsrisico;
- het fundingrisico.

Marktliquiditeitsrisico

Dit is het risico dat een bepaalde positie in een financieel instrument door gebrekkige liquiditeit of door enorme handelsvolumes niet tegen de geldende marktprijzen kan worden gesloten. Eigenlijk is deze vorm van risico een onderdeel van marktrisico. Wat de optieconstructies op de huizenprijsindex betreft, geldt zeker dat markt niet liquide is, waardoor de producten moeilijk of niet zijn door te verkopen. De enige mogelijkheid, zeker tijdens de opstartfase, is een buy-and-hold strategie. Er kan dus niet worden bijgestuurd op mogelijke marktontwikkelingen.

Fundingrisico

Het fundingrisico is het risico dat een onderneming voor het voldoen van haar directe financiële verplichtingen niet meer voldoende geld kan aantrekken voor de korte of lange termijn, en daardoor betalingsachterstanden krijgt, hetgeen kan leiden tot surséance of faillissement.

In het geval van de hier bekeken producten kan dit zich voordoen doordat de Rabobank op de expiratedata van de opties een zekere hoeveelheid geld nodig heeft om te kunnen voorzien in de eventuele uitbetalingen aan de beleggers. De inkomsten van de huiseigenaren daarentegen vinden zowel op maandelijkse basis plaats, als op de expiratedatum. De looptijd van de waardedelingshypotheek hoeft echter niet gelijk te zijn aan de looptijd van de opties die verkocht worden aan de beleggers. Er is dus sprake van een zekere tijds mismatch.

5.4. Productrisico

Hieronder verstaan we die risico's die direct samenhangen met tekortkomingen van het contract dat wordt afgesloten. We onderscheiden de productspecificatie, de risico's omtrent de bouwsteen van het product: de huizenprijsindex, de juridische consequenties en de prijszetting.

Productspecificatie

De waardedelingshypotheek is een nieuw product op de Nederlandse markt. Er zal daarom goed moeten worden nagedacht over de exacte productspecificaties. Deze zullen een belangrijke rol spelen bij de acceptatie van het product door de verschillende consumentenorganisaties zoals bijvoorbeeld de Vereniging Eigen Huis. Indien de voorwaarden voor de consument door dergelijke organisaties als nadelig worden beschouwd, kan het product negatieve publiciteit verwachten. Dit heeft natuurlijk negatieve gevolgen voor de afzet van het product.

Problemen die verwacht kunnen worden bij de settlement van de optie dienen zo goed mogelijk vantevoren voorkomen te worden door een goede productspecificatie. Het is vanuit dit oogpunt gezien van groot belang dat de productspecificatie ook goed te begrijpen is voor de consument. Onduidelijkheid kan leiden tot negatieve publiciteit met alle gevolgen van dien.

Huizenprijsindex

De basis van alle in dit verslag besproken producten is de huizenprijsindex. De opties die op deze index worden afgesloten hebben een lange looptijd. Essentiële randvoorwaarden waaraan voldaan moet worden, zijn dan ook dat:

- het voortbestaan van de index gewaarborgd moet zijn;
- de kwaliteit van de index gewaarborgd moet zijn;
- de index voldoende bekendheid en status moet hebben.

Voor het waarborgen van het voortbestaan van de index is het noodzakelijk dat gedurende de looptijd van het product zowel de aanlevering van data is gegarandeerd als dat de publicerende instantie verplicht is de index te blijven publiceren. Indien één van deze partijen in gebreke blijft waardoor de index niet gepubliceerd kan worden, dan zal de Rabobank de gevolgen ondervinden van het niet af kunnen handelen van de contracten. Naar alle waarschijnlijkheid zullen de contracten in een dergelijk geval afgekocht moeten worden. Voor beleggers en particulieren kan dit ondanks een schikking een zogenaamde *opportunity loss* geven.

Voor het waarborgen van de kwaliteit van de index zal de Rabobank sterk afhankelijk zijn van de publicerende instantie. Punten die hier van belang zijn, zijn kwaliteit van de aangeleverde transactie data, en de actualiteit van de wegingen. Indien de kwaliteit van de index niet voldoende is, dan loopt de Rabobank het risico dat klachten van benadeelde partijen door onafhankelijke partijen worden gesteund, wat kan leiden tot zware kritiek en een slecht imago van het product. De afnemers van het product zullen in dit geval ook altijd het risico lopen onnodig benadeeld te worden.

De kwaliteit van de index zal tevens zijn weerslag hebben op het imago van de index. Het imago van de index is van belang omdat het onwaarschijnlijk is dat beleggers of particulieren het product zullen kopen, als ze de index niet vertrouwen. De Rabobank loopt hier dus het risico dat zij niet voldoende afzet van het product kan halen.

Juridische consequenties

De bank loopt bij de uitgifte van een nieuw product als de waardedelingshypotheek een aantal juridische risico's. Een voorbeeld van een probleem dat afgevangen dient te worden is het bezwaar dat een huiseigenaar kan maken tegen de door de index aangegeven waarde van zijn huis.

Ook moet gekeken worden naar de juridische consequenties van het in gebreke blijven van één van de partijen die de huizenprijsindex publiceren.

Prijszetting

Het probleem van de prijszetting van een nieuw product is dat er geen referentiekader is voor de prijszetting. D.w.z. de prijs die gerekend wordt door de Rabobank kan niet worden vergeleken met de *marktprijs* van het product.

De prijs zal in eerste instantie dan ook bepaald worden met behulp van het waarderingsmodel dat ontwikkeld is voor de waardedelingshypotheek. Een dergelijk model kan echter alleen een indicatie geven van de waarde van de optie gegeven een aantal aannames over de toekomstige rente- en prijsontwikkelingen. In de praktijk zal de prijszetting een middenweg moeten vinden tussen de volgende twee krachten.

- De huiseigenaar wil voor het afstaan van een percentage van de waardevermindering van zijn huis een zo hoog mogelijke uitkering krijgen, waarmee zijn hypotheeklasten verlaagd worden; indien de uitkering hem vanuit zijn optiek niet afdoende compenseert tegen het verlies van de eventuele toekomstige waardevermindering, zal hij niet overgaan tot het afsluiten van een waardedelingshypotheek;
- De belegger, welke een call-optie op de huizenprijsindex koopt, wil uiteraard een zo laag mogelijke premie betalen voor de optie.

Met een verkeerde prijszetting loopt de bank het risico dat het product voor één van bovengenoemde partijen niet aantrekkelijk is. Ook vanuit eventueel toekomstig concurrentieoogpunt is het belangrijk dat de optie scherp geprijsd is; het is niet ondenkbaar dat in de nabije toekomst ook andere banken met een vergelijkbaar product op de markt komen. De premie dient echter wel zó hoog te zijn, dat de Rabobank zich afdoende kan indekken tegen de risico's die het innemen van een positie op de huizenprijsindex met zich meebrengt, en bovendien nog een winstmarge overhoudt.

5.5. Regelgevingsrisico

Onder het kopje regelgeving kan onderscheid worden gemaakt tussen interne regelgeving, en externe regelgeving. Onder interne regelgeving wordt de regelgeving van de Rabobank zelf verstaan. Aangezien het product nieuw is voor de Rabobank, en er geen ervaring is met het managen van de risico's die met het product samenhangen zal het management toestemming moeten geven om het product te mogen verhandelen.

Onder externe regelgeving wordt de regelgeving buiten de Rabobank bedoeld. Hierbij kan bijvoorbeeld gedacht worden aan de fiscale behandeling van het product, maar ook aan richtlijnen van de overheid. Punten die hierbij van belang zijn, zijn de volgende:

- reactie van de overheid op het product;
- fiscale behandeling van het product.
- eisen aan voorlichting aan afnemers in verband met de zorgplicht;

Als een grote marktpartij zoals de Rabobank met een nieuw product komt dat verstrekkinge gevolgen heeft voor de verhoudingen op de koopwoningmarkt, dan zal dit tot een reactie van de overheid leiden. Eén van de middelen die de overheid ter beschikking heeft is de fiscale behandeling van het product.

Fiscale behandeling van het product

De aantrekkelijkheid van de waardedelingshypotheek voor particulieren is juist sterk afhankelijk van de fiscale behandeling van het product. Indien de hypotheekrente niet volledig afgetrokken kan worden, dan zal het moeilijk zijn het product te verkopen.

Het hier nu volgende zijn verwachtingen voor de manier waarop het product fiscaal behandeld zal worden. Hoewel de verwachtingen gebaseerd zijn op een gesprek met een medewerker van de afdeling Fiscale Zaken van Rabobank Nederland, merken wij op dat de ingenomen standpunten voorlopig en globaal zijn. Van belang is de wijze waarop het e.e.a. contractueel wordt vastgelegd. Daarnaast is het gebruikelijk dat Fiscale Zaken voor de invoering van een nieuw product overeenstemming heeft met de Belastingdienst.

We gaan hier uit van de Belastingregeling 2001, zoals deze waarschijnlijk ingevoerd zal worden. Voor de fiscale behandeling van het product blijkt het noodzakelijk om een aantal mogelijke constructies voor de waardedelingshypotheek te onderscheiden.

We kunnen de waardedelingshypotheek als los contract bekijken, of als onderdeel van een hypotheekconstructie. Tevens zullen we een onderscheid maken naar de manier waarop de optiepremie aan de huiseigenaar wordt uitgekeerd, namelijk in een keer, of uitgesmeerd over een aantal perioden.

De waardedelingshypotheek als los contract

Als de waardedelingshypotheek als los contract van de hypotheek wordt afgesloten, wordt dit gezien als belegging. Voor de fiscale behandeling zullen we tevens nog een onderscheid moeten maken tussen de manieren waarop de uitkering plaatsvindt. Indien bij het aangaan van het contract de optiepremie bekend is, zal de ontvangst onbelast zijn en alleen het vermogen in Box III beïnvloeden. Hierbij maakt het niet uit of de optiepremie eenmalig wordt uitgekeerd, of uitgesmeerd over een aantal perioden. Indien de optiepremie periodiek wordt uitgekeerd, waarbij de hoogte van de premie niet vantevoren vaststaat, zal het product fiscaal minder gunstig behandeld worden.

De waardedelingshypothec als onderdeel van een hypotheekconstructie

Indien de waardedelingshypothec als onderdeel van een hypotheekconstructie wordt ingevoerd, is het waarschijnlijk dat de rentebetalingen van de hypotheek van het inkomen afgetrokken kunnen worden in Box I.

Eisen aan voorlichting aan afnemers i.v.m. de zorgplicht

Tevens zal er gekeken moeten worden welke eisen aan de voorlichting gesteld worden in het kader van de zorgplicht voor banken. De bank loopt het risico dat klachten van de huiseigenaar gehonoreerd zullen worden indien hij of zij aan kan tonen dat de bank de risico's die aan het product zijn verbonden niet voldoende heeft uitgelegd.

5.6. Overige risico's

We behandelen hier de volgende risico's:

- Marketing particulieren;
- Marketing beleggers;
- Operationele risico's;
- Imago risico.

Begonnen wordt met twee risico's geassocieerd met marketing. De marketing van het product is een zeer belangrijke factor bij de introductie van een nieuw product. Een reden waarom het eerste vastgoedderivatenproduct, dat gelanceerd werd op de *London Futures and Options Exchange (London Fox)*, mislukte, is juist de slechte marketing van het product. Het beoogde publiek was niet voldoende voorgelicht over de voordelen van het product.

Marketing particulieren

Huiseigenaren zullen waarschijnlijk terughoudend zijn om een deel van de waardeverhoging van hun huis op te geven. Particulieren zijn in de regel al vrij terughoudend om nieuwe producten te kopen, ook al kunnen deze producten hun eigen belang dienen. Een aanzienlijke fractie van de bevolking zal, gezien de ontwikkeling van de huizenmarkt in de laatste vijftien jaar, ook niet beseffen dat de waarde van hun huis kan dalen.

Met het oog op deze feiten is het belangrijk dat de potentiële afnemers van de waardedelingshypothek goed voorgelicht worden over wat dit nieuwe product voor hun kan betekenen, uiteraard met een uitwerking van een aantal mogelijke scenario's voor de huizenmarkt in de komende tijd. Een reclamecampagne voor het nieuwe product is niet ondenkbaar; aangezien het product nieuw is op de Nederlandse markt, zal het alleen maar positief bijdragen aan het imago van de Rabobank.

Het risico dat slechts een klein deel van de potentiële doelgroep geïnteresseerd raakt in het nieuwe product blijft uiteraard altijd bestaan. Verder is het natuurlijk altijd zo dat indien de eerste experimenten met het nieuwe product succesvol verlopen, er vanzelf meer mensen in het product geïnteresseerd zullen raken. Maar ook met het omgekeerde scenario dient rekening gehouden te worden.

Marketing beleggers

De informatiebehoefte van de verschillende marktpartijen voor derivaten op de huizenprijsindex dient in kaart gebracht te worden. Over het algemeen wordt aangenomen dat het rendement en het risico van het beleggen in vastgoed zich tussen aandelen en obligaties bevindt en dat er een lage correlatie met andere beleggingsproducten bestaat. Beleggen in vastgoed zou dus een goede mogelijkheid voor diversificatie moeten zijn.

Het risico is dat veel beleggers, ondanks de informatie die zij ontvangen hebben, in het begin een afwachtende houding hebben tegenover de nieuwe producten. Er moet onder andere rekening gehouden worden met het feit dat vastgoedbeleggers in het algemeen onbekend zijn met derivaten. Dit kan leiden tot de situatie waarbij iedereen eerst de kat uit de boom kijkt. Het gebrek aan liquiditeit van het product in de opstartfase maakt de drempel nog hoger. De Rabobank loopt het risico dat geen van de beleggers als eerste in wil stappen waardoor zij zelf gedurende de opstartfase een grote positie in zal moeten nemen. Dit brengt een groot marktrisico met zich mee.

Operationele risico's

De waardedelingshypotheek is voor zowel de Rabobank als voor de Nederlandse markt een geheel nieuw product. Voor de Rabobank dit betekent aan de ene kant dat het product niet geadmistreerd kan worden in reeds bestaande systemen, en aan de andere kant dat de mensen die het product moeten verkopen of administreren geen ervaring hebben met het product.

Met name voor particulieren betekent de onbekendheid van het product dat het moeilijk is de consequenties van het afsluiten van een waardedelingshypotheek is te overzien. Een goede voorlichting is dan ook wezenlijk; een slechte voorlichting kan tot klachten leiden, en zal het imago van de bank niet ten goede komen. Voor institutionele beleggers geldt dat zij over het algemeen goed weten wat ze doen voordat ze een dergelijk product aanschaffen.

De operationele risico's die voor de Rabobank gepaard gaan met het invoeren van het nieuwe product, zijn de gevolgen van de volgende fouten die gemaakt kunnen worden:

- fouten in het nieuwe systeem;
- fouten in de communicatie tussen het nieuwe systeem en de reeds bestaande infrastructuur;
- fouten bij het verwerken van de externe datatoevoer, bijvoorbeeld het maandelijkse invoeren van het indexcijfer;
- fouten bij het invoeren van een transactie;
- fouten bij de voorlichting van afnemers van het product.

Imago risico

De term imago risico spreekt voor zich zelf. Er zijn diverse punten waardoor de waardedelingshypotheek tot negatieve publiciteit kan leiden, en in het voorgaande zijn er al enkele aan bod gekomen. Deze publiciteit kan het imago van de waardedelingshypotheek of de Rabobank als geheel schaden.

Zoals eerder genoemd is, kan het gebruiken van een index tot discrepanties leiden tussen de door de index voorspelde huisprijsstijging en de daadwerkelijke huisprijsstijging. Het zou dus voor kunnen komen dat aan het einde van de looptijd van de hypotheek, hoewel de werkelijke waarde van het huis niet of nauwelijks gestegen is, de waarde van de index wel gestegen is, met als gevolg dat de huiseigenaar een percentage van de waarde van de index aan de bank moet afstaan, uiteraard tot ontevredenheid van de huiseigenaar. Indien dit soort verschillen vaak voorkomen, zal dit gesignaleerd worden en kan dit nadelige gevolgen hebben voor het imago van de bank. De mate waarin de ontwikkeling van individuele huizenprijzen afwijkt van de gekozen index beïnvloedt dus indirect ook het imago van de bank.

Voortvloeiend uit de eerder gesignaleerde risico's aan de marketing kant van het product, kunnen we vaststellen dat als er op de particuliere markt niet voldoende waardedelingshypotheken worden afgezet om aan de vraag van de beleggers te kunnen voldoen, de Rabobank vaak nee zal moeten verkopen aan deze beleggers. Dit komt natuurlijk niet ten goede aan het imago van de Rabobank.

6. Risico Particulier

In het vorige hoofdstuk is al aangeduid waar de grootste risico's voor de particulier liggen. Het feit dat er gebruik gemaakt wordt van een index kan tot over- dan wel onderschattingproblemen leiden van de werkelijke waardeverandering van het huis ten opzichte van de gehanteerde index. Voor de huiseigenaar kan dit nadelig zijn, in het geval dat de waarde van zijn huis minder gestegen (of zelfs gedaald) is in vergelijking met de huizenprijsindex. In dit geval zal hij toch de waarde stijging moeten afstaan welke door de huizenprijsindex wordt weergegeven. In de derde paragraaf van dit hoofdstuk zullen we voor een aantal woningen uit het repeat sales bestand bekijken wat er gebeurd was indien zij een waardedelingshypotheek hadden genomen. De vierde paragraaf zal aan de hand van een model de mismatch kwantificeren.

Allereerst beginnen we het hoofdstuk echter met een korte omschrijving van het model voor de waardeontwikkeling van een woning die in dit hoofdstuk gebruikt zal worden om een aantal resultaten af te leiden. De tweede paragraaf tenslotte zal een mean-variance analyse uitvoeren voor de particulier, waaruit we een optimaal waardedelingspercentage kunnen afleiden, en laten zien in welke mate de spreiding in de portefeuille van de particulier gereduceerd kan worden door het nemen van een waardedelingshypotheek.

6.1. Modelling waardeontwikkeling woning

In deze paragraaf zullen we kort ingaan op het gebruikte model voor de waardeontwikkeling van een woning. Gedetailleerde informatie over dit model kan worden teruggevonden in de appendix 6.A. Modelling waardeontwikkeling woning. Een groot deel van het risico van een particulier komt voort uit de mismatch tussen de index en de echte waardeontwikkeling van een individueel huis. In hoofdstuk 3 is het model voor de huizenprijsindex behandeld, we zullen hier kort ingaan op het model voor de waardeontwikkeling van een individueel huis en hoe deze waardeontwikkeling samenvalt met de ontwikkeling van de index.

Uit het vooronderzoek naar de huizenprijsindex is gebleken dat deze de waardeontwikkeling van een individuele woning gemiddeld onderschat. Dit duidt er op dat het gemiddelde rendement op een woning hoger ligt dan het gemiddelde rendement op de index, hetgeen ook uit de data blijkt te gelden. Aangezien de bevindingen uit het vooronderzoek slechts gebaseerd waren op de data vanaf 1986, is tevens onderzocht of de index de waardeontwikkeling van een woning ook onderschat in een dalende periode van de huizenprijsindex. Dit blijkt inderdaad het geval te zijn.

Vervolgens is gekeken naar de volatiliteit van de rendementen op een huis; deze blijkt hoger te liggen dan de volatiliteit van de rendementen op de index: de volatiliteit van het rendement op een woning is gemiddeld ca. 13% op jaarbasis. Eichholtz [1997] becijfert de volatiliteit op Nederlandse aandelen op gemiddeld 13.1% voor de periode 1971 tot en met 1995.

Tenslotte is gekeken naar de afhankelijkheid tussen de rendementen op de index en op een individuele woning. Voor een representatief huis geldt dat als de index een stijging vertoont, de prijs van het huis dit ook zal doen. Een positieve correlatie ligt dus voor de hand, en wordt ook in de data aangetroffen. Hierbij dient opgemerkt te worden dat de correlatie voor de waardeontwikkeling van een woning uit het NVM bestand met de rendementen op de bijbehorende NVM index tot drie keer hoger ligt dan de correlatie van een huis uit het Kadaster bestand met de bijbehorende Kadaster index. Een NVM index kan de waardeontwikkeling van een NVM woning beter voorspellen, waardoor de mismatch kleiner wordt. Het is derhalve een aanbeveling om naast de Kadaster indices ook NVM indices te ontwikkelen, zodat deze naast elkaar gebruikt kunnen worden.

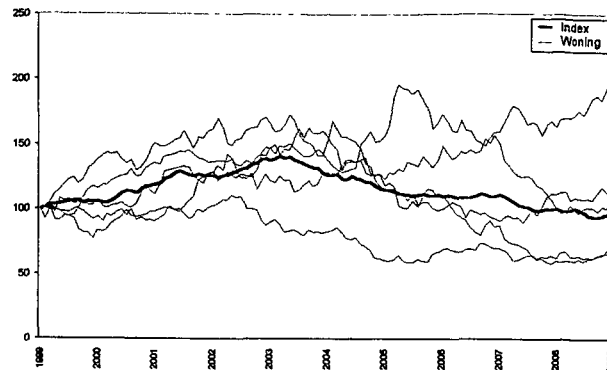
Het wiskundige model dat in appendix 6.A bekeken wordt en aan bovenstaande bevindingen voldoet, is het volgende:

$$\sum_{t=1}^T \begin{pmatrix} r_{1,t} \\ r_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(T) \\ \mu(T) + \Delta T \end{pmatrix} + \sum_{t=1}^T \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$
$$\sum_{t=1}^T \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} \sim N \left(0, \sigma^2(T) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho\delta \\ \rho\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \right)$$

De functies $\mu(T)$ en $\sigma^2(T)$ geven respectievelijk het verwachte rendement en de variantie van de rendementen over een periode van T maanden weer. In de paragrafen 4.3.2.1 en 4.3.2.2 kunnen voor beide tijdreeksmodellen die we hanteren voor de huizenprijsindex, de specificaties voor deze functies worden teruggevonden.

We geven het model in deze vorm weer, daar de maandelijkse rendementen van de waardeontwikkeling van een woning niet normaal verdeeld verondersteld kunnen worden. De rendementen over een langere periode zijn echter wel bij benadering normaal verdeeld.

In onderstaande grafiek kunnen naast een mogelijke realisatie van de index voor eengezinswoningen in de Regio West, mogelijke realisaties gevonden worden voor



Grafiek 6.1: Een aantal mogelijke huisprijsontwikkelingen met index

waardeontwikkeling van individuele eengezinswoningen in deze regio, alle op basis van het tijdreeksmodel met veranderende regimes. Het hier behandelde model zal in de komende paragrafen gebruikt worden om het risico van de particulier te kwantificeren.

6.2. Mean-Variance Analyse

In deze paragraaf zal een mean-variance analyse worden uitgevoerd op de portefeuille van een particulier, hier bestaande uit een woning en een waardedelingshypotheek. De focus zal liggen op de papieren winst (of verlies) die een huiseigenaar maakt gedurende de looptijd van een waardedelingshypotheek. Dit is het volgende bedrag:

Waardestijging huis
 + *Premie t.g.v. het afsluiten van de waardedelingshypotheek*
 – *k-waardestijging volgens de index*

Alle bedragen worden naar de expiratiedatum van de waardedelingshypotheek verdisconteerd. In formulevorm is dit bedrag gelijk aan:

$$\Pi_{k,T} = P \cdot (S_{2,T} - e^{rT} - k(S_{1,T} - 1)^+ + ke^{rT} c(T,1,1)) \quad (6.1)$$

Hierbij geeft $S_{i,t}$ de stand van index i op tijdstip t aan; index 1 is de huizenprijsindex, terwijl index 2 de echte waardeontwikkeling van het huis weergeeft. Zonder beperking der algemeenheid gaan we er van uit dat deze indices op tijdstip 0 een waarde gelijk aan 1 hebben. Tenslotte is P de waarde van de woning bij aanschaf, en r het risicovrije rendement dat op een obligatie behaald kan worden.

Bij beleggingen wordt vaak op twee criteria gelet met betrekking tot de waardeontwikkeling van de belegging: het gemiddelde rendement en de spreiding op het rendement van deze belegging. Hoe meer spreiding er in het waardeverloop zit, hoe onzekerder het rendement op de belegging is. Aangezien de premie zó bepaald is, dat de verwachting van de papieren winst gelijk is aan de verwachting van de waardestijging van het huis, zullen we hier alleen letten op de spreiding in de winst. De variantie van (6.1) is:

$$\text{Var}(\Pi_{k,T}) = P^2 \cdot (\text{Var}(S_{2,T}) - 2k\text{Cov}(S_{2,T}, (S_{1,T} - 1)^+) + k^2\text{Var}(S_{1,T} - 1)^+) \quad (6.2)$$

In appendix 6.B zijn nu de volgende grootheden bekeken:

- Het optimale waardedelingspercentage, dit is het waardedelingspercentage dat de spreiding in het eerder genoemde bedrag minimaliseert;
- Het *variantie reductie percentage*; dit laatste geeft weer met hoeveel procent de variantie van de papieren winst is gedaald t.o.v. de situatie dat men geen waardedelingshypotheek heeft afgesloten.

Alvorens we overgaan tot een weergave van de resultaten, merken we op dat de hier gepresenteerde resultaten gelden voor een looptijd van 10 jaar. In appendix 6.B is echter gebleken dat de resultaten vrijwel niet van de looptijd afhangen, zodat ze ook een goede indicatie geven voor een looptijd van 5 jaar.

6.2.1. Optimale Waardedelingspercentage

Vanuit het oogpunt van marketing lijken waardedelingspercentages van 25% en 50% aantrekkelijk. Het is derhalve interessant om te kijken welke waardedelingspercentages optimaal zijn met betrekking tot het reduceren van de spreiding in het eerder genoemde bedrag. Het optimale waardedelingspercentage k^* dat (6.2) minimaliseert, is gelijk aan:

$$k^* = \frac{\text{Cov}(S_{2,T}, (S_{1,T} - 1)^+)}{\text{Var}(S_{1,T} - 1)^+}$$

In appendix 6.B wordt deze uitdrukking nader onderzocht voor beide tijdreeksmodellen voor de huizenprijsindex. De verschillen tussen beide modellen kunnen echter vooraf beredeneerd worden. Wanneer een particulier als enige weet dat er een neerwaartse periode van de huizenmarkt aan gaat komen, is het verstandig een waardedelingshypotheek te nemen. Hij kan dan een premie incasseren terwijl hij bij het verstrijken van de looptijd niks hoeft terug te betalen, aangezien de index niet gestegen is. Het ligt derhalve voor de hand dat de optimale waardedelingspercentages voor het model dat ook neerwaartse perioden van de huizenmarkt meeneemt, hoger liggen dan voor het model dat de stijgende lijn vanaf 1986 doortrekt.

In onderstaande tabel kunnen de optimale waardedelingspercentages voor de verscheidene woningtypen en regio's teruggevonden worden. Met Model 1 bedoelen we het ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986, Model 2 is het tijdreeksmodel dat veranderende regimes meeneemt.

| | | Model 1 | Model 2 |
|----------------------|--------------|----------------|----------------|
| Appartementen | Noord | 41% | 37% |
| | Oost | 9% | 47% |
| | Rand | 27% | 84% |
| | West | 39% | 95% |
| | Zuid | 33% | 16% |
| Woningen | Noord | 6% | 75% |
| | Oost | 20% | 144% |
| | Rand | 28% | 80% |
| | West | 31% | 141% |
| | Zuid | 20% | 135% |

Tabel 6.1: Optimale Waardedelingspercentages (%)

Over het algemeen zijn de optimale waardedelingspercentages onder het tweede model inderdaad hoger; waar dit niet het geval is, komt dit doordat de desbetreffende index in

tegenstelling tot de andere indices in de neerwaartse periode van de huizenmarkt gemiddeld gestegen is.

Beide modellen geven voor de verscheidene regio's en woningtypen verschillende optimale waardedelingspercentages. We kunnen echter al uit de resultaten concluderen dat het vanuit een diversificatieoogpunt aan te raden is een waardedelingshypotheek te nemen. In hoeverre dit het geval is bij de waardedelingspercentages van 25% en 50%, zal in de volgende paragraaf blijken.

6.2.2. Variantie reductie percentage

In deze sectie bekijken we welke reductie in variantie in de portefeuille van een particulier wordt gerealiseerd als er een waardedelingshypotheek wordt afgesloten, ten opzichte van de situatie waarin dit niet wordt gedaan. Dit percentage zullen we aanduiden met de term variantie reductie percentage, kortweg VRP. In formulevorm is dit percentage:

$$VRP_{k,T} = 1 - \frac{\text{Var}(\Pi_{k,T})}{\text{Var}(\Pi_{0,T})}$$

In appendix 6.B wordt deze formule wederom uitgewerkt en geanalyseerd voor beide tijdreeksmodellen voor de huizenprijsindex. Een belangrijke determinant van dit percentage blijkt de correlatiecoëfficiënt tussen de waardeontwikkeling van de individuele huisprijs en de index te zijn. Aangezien deze bij de NVM indices vele malen hoger bleek te liggen, kan het een aanbeveling zijn om ook deze indices te ontwikkelen naast de Kadaster indices. We zullen ons hier beperken tot de resultaten voor de Kadaster indices. Naast de hoogst haalbare variantie reductie, geven we hier de variantie reductie weer die bewerkstelligd wordt bij de waardedelingspercentages 25% en 50%. We vinden dan:

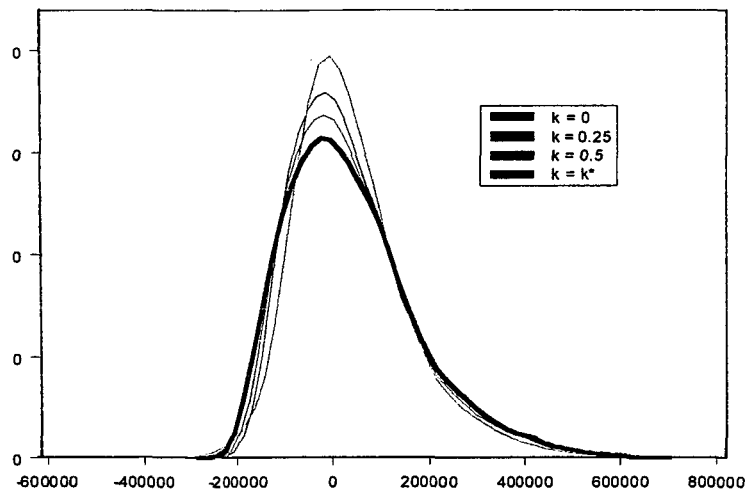
| | | Max. VRP | VRP, k=25% | VRP, k=50% |
|----------------------|--------------|----------|------------|------------|
| Appartementen | Noord | 0.68% | 0.57% | 0.65% |
| | Oost | 0.02% | -0.04% | -0.39% |
| | Rand | 0.55% | 0.55% | 0.15% |
| | West | 0.48% | 0.42% | 0.45% |
| | Zuid | 0.24% | 0.23% | 0.18% |
| Woningen | Noord | 0.04% | -0.36% | -2.04% |
| | Oost | 0.16% | 0.15% | -0.23% |
| | Rand | 0.38% | 0.38% | 0.16% |
| | West | 0.44% | 0.42% | 0.29% |
| | Zuid | 0.16% | 0.15% | -0.18% |

Tabel 6.2: Variantie reductie percentages (in %) voor het tijdreeksmodel vanaf 1986

| | | Max. VRP | VRP, k=25% | VRP, k=50% |
|----------------------|--------------|----------|------------|------------|
| Appartementen | Noord | 4.35% | 3.91% | 3.76% |
| | Oost | 6.05% | 4.71% | 6.02% |
| | Rand | 11.02% | 5.58% | 9.21% |
| | West | 21.05% | 9.65% | 16.36% |
| | Zuid | 0.48% | 0.33% | -1.68% |
| Woningen | Noord | 6.21% | 3.47% | 5.54% |
| | Oost | 24.65% | 7.83% | 14.16% |
| | Rand | 11.43% | 6.05% | 9.85% |
| | West | 28.25% | 9.12% | 16.47% |
| | Zuid | 18.18% | 6.11% | 10.98% |

Tabel 6.3: Variantie reductie percentages (in %) voor het tijdreeksmodel dat veranderende regimes meeneemt

We zien dat de variantie reductie in het geval van het eerste tijdreeksmodel vrij gering is, en voor sommige regio's en woningtypen zelfs negatief is bij de waardedelingspercentages 25% en 50%. Het meer realistische model voor de huizenprijsindex laat echter zien dat ook bij deze waardedelingspercentages de variantie reductie enkele procenten bedraagt. Dit kan voor de appartementen in de Regio Oost in onderstaande grafiek teruggezien worden. Hierin staat voor een looptijd van tien jaar de verdelingsfunctie van de papieren winst afgebeeld die de particulier maakt boven de risicovrije voet. Er wordt uitgegaan van een prijs van f 150.000,- voor een appartement. Het is in deze situatie evident dat het nemen van een waardedelingshypotheek met een waardedelingspercentage van 25% of 50% al een reductie in de spreiding van de portefeuille kan betekenen. Het nemen van het optimale waardedelingspercentage k^* heeft uiteraard de grootste reductie van de spreiding als gevolg.



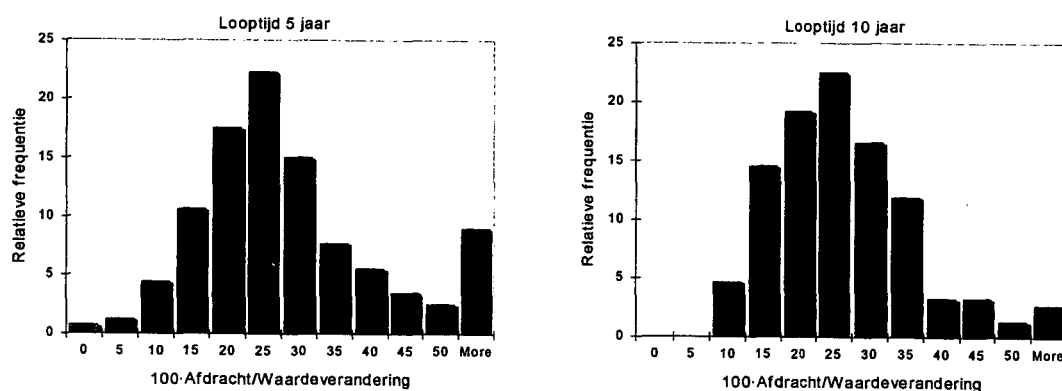
Grafiek 6.2: Verdelingsfunctie papieren winst bij verschillende waardedelingspercentages

We concluderen dat de meeste consumenten er bij de beoogde waardedelingspercentages wat betreft fluctuaties in het vermogen niet op achteruit gaan indien zij een waardedelingshypotheek zouden nemen.

6.3. Mismatch Particulier – Historische voorbeelden

In deze paragraaf zullen we de aandacht concentreren op het bedrag dat de huiseigenaar bij het verstrijken van de looptijd van de waardedelingshypothek af moet staan. Dit bedrag komt overeen met een vantevoren afgesproken percentage van de indexgebaseerde waardestijging. Idealiter ligt de door de index aangegeven waardestijging van het huis dicht bij de echte waardestijging van het huis, maar het gebruik van de index kan er toe leiden dat de index de waardestijging van het huis over- dan wel onderschat. Indien de gehanteerde index de waardestijging van het huis overschat, is dit nadelig voor de eigenaar. In deze paragraaf zullen we aan de hand van enkele historische voorbeelden uit het repeat sales bestand voor de eengezinswoningen in de Regio West deze settlement problematiek toelichten. De volgende paragraaf zal aan de hand van de verscheidene modellen voor de huizenprijsindex de mismatch kwantificeren.

Zoals gezegd zullen we aan de hand van historische voorbeelden uit het NVM repeat sales bestand voor eengezinswoningen in de Regio West de settlement problematiek toelichten. Indien de huiseigenaren een waardedelingshypothek hadden afgesloten, zouden ze bij het verstrijken van de looptijd een bepaald bedrag moeten afstaan; we zullen hier bekijken welk percentage dit bedrag van de werkelijke waardestijging van het huis was geweest. Idealiter zou dit percentage dicht bij het waardedelingspercentage liggen. Bij het presenteren van de voorbeelden beperken we ons tot looptijden van vijf en tien jaar¹¹ en een waardedelingspercentage van 25%. Dit laatste is geen beperking: de relatieve uitspraken zijn voor alle waardedelingspercentages geldig en indien we het hebben over bedragen, dienen deze met een factor vermenigvuldigd te worden welke aangeeft hoeveel het waardedelingspercentage verschilt van 25%. In onderstaande grafiek vinden we de afdracht als percentage van de waardeverandering van het huis bij looptijden van vijf en tien jaar:



Grafiek 6.2: Afdracht waardedelingshypothek als percentage van de gerealiseerde waardeverandering

We brengen in herinnering dat het hier bekeken repeat sales bestand gebaseerd is op de jaren 1986-1997¹², en dat de index in deze periode vrijwel alleen gestegen is.

¹¹ Om precies te zijn bekijken we hier die huizen uit het repeat sales bestand, waarvoor geldt dat de tijd tussen twee verkopen respectievelijk tussen de 59 en 61 maanden (voor een looptijd van vijf jaar) of 119 en 121 maanden ligt. Dit hebben we gedaan daar er anders te weinig waarnemingen overbleven om een betrouwbaar beeld te geven.

¹² Zie voor de exacte selectiecriteria op grond waarvan het repeat sales bestand vervaardigd is appendix 6.B Repeat sales bestanden.

Hoewel de grafiek voor de looptijd gelijk aan tien jaar op veel minder waarnemingen is gebaseerd, tonen beide grafieken een aantal overeenkomstige patronen.

We zullen hier de term *tevredenheidspercentage* introduceren. We beschouwen een klant als tevreden als hij ofwel niets hoeft terug te betalen bij het verstrijken van de looptijd, ofwel als het bedrag dat hij moet terugbetalen niet meer is dan het vantevoren afgesproken percentage van de waardestijging van zijn woning. Klanten wiens woning in waarde gedaald is, en die toch geld moeten terugbetalen, of klanten die een hoger percentage van de echte waardestijging van hun woning moeten betalen dan het waardedelingspercentage zijn dan automatisch niet tevreden. Voor beide looptijden ligt het tevredenheidspercentage rond 60%.

Uit het repeat sales bestand lichten we nu vijf voorbeelden eruit, en wel de woningen waarbij de tijd tussen beide verkopen gelijk is aan tien jaar, en de afdracht als percentage van de waardeverandering:

1. Het laagste is (*Best case*);
2. In 5% van de gevallen lager is dan bij deze woning (*Ondergrens*);
3. In 50% van de gevallen lager is dan bij deze woning (*Mediaan*);
4. In 95% van de gevallen lager is dan bij deze woning (*Bovengrens*);
5. Het hoogste is (*Worst case*).

In onderstaande tabel hebben we van deze vijf woningen een aantal statistieken weergegeven:

| | <i>Aankoop prijs</i> | <i>Verkoop prijs</i> | <i>Waardeverandering</i> | <i>Afdracht</i> |
|-------------------|----------------------|----------------------|--------------------------|-----------------|
| <i>Best case</i> | 132.500 | 515.000 | 382.500 | 7.000 (8%) |
| <i>Ondergrens</i> | 75.000 | 236.000 | 161.000 | 17.000 (11%) |
| <i>Mediaan</i> | 153.500 | 295.000 | 141.500 | 32.000 (23%) |
| <i>Bovengrens</i> | 352.500 | 525.000 | 172.500 | 77.000 (45%) |
| <i>Worst case</i> | 245.000 | 252.000 | 7.000 | 51.000 (729%) |

Tabel 6.4: Vijf historische voorbeelden

Achter de afdracht is vermeld welk percentage dit is van de echte waardestijging van het huis. We merken op dat in 95% van de gevallen in deze dataset er blijkbaar niet meer dan 45% van de echte waardestijging moet worden afgestaan. Er zijn echter wel gevallen mogelijk waarbij dit percentage vele malen hoger ligt, zoals bij het minst gunstige voorbeeld duidelijk wordt. De waardeontwikkeling van dit huis is duidelijk achtergebleven bij de gemiddelde trend, hetgeen tot gevolg heeft dat de huiseigenaar opgezadeld wordt met een schuld die hij niet volledig uit de overwaarde van zijn huis kan financieren.

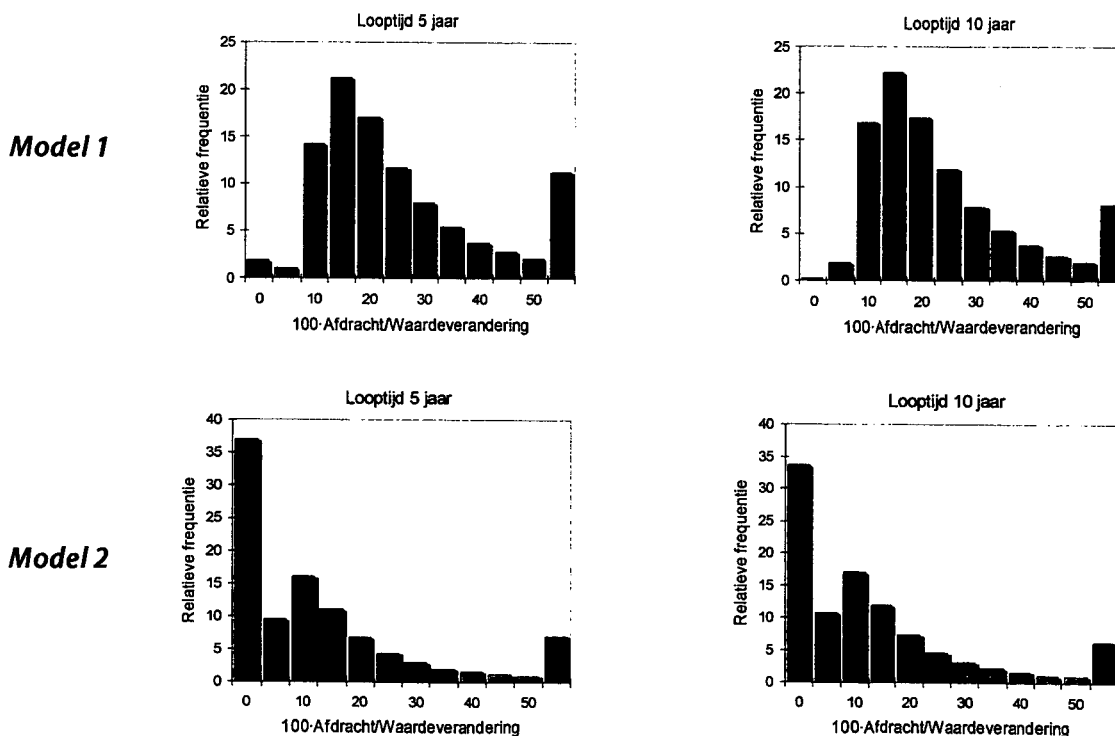
In de volgende paragraaf zullen we de mismatch van de particulier kwantificeren aan de hand van de beide modellen voor de huizenprijsindex, die in paragraaf 3.6 behandeld zijn.

6.4. Mismatch Particulier – Kwantificering

Aan de hand van het model voor de waardeontwikkeling van de woning en de beide modellen voor de huizenprijsindex kunnen we de mismatch van de particulier kwantificeren. De resultaten in deze paragraaf zijn met behulp van simulatie bepaald. We beperken ons hier tot het weergeven van de volgende resultaten:

- Het tevredenheidspercentage, zoals in de vorige paragraaf gedefinieerd. Een klant wordt als tevreden beschouwd, indien de afdracht bij het verstrijken van de looptijd als percentage van de waardeverandering van de woning niet groter is dan het vantevoren afgesproken waardedelingspercentage.
- De kans dat de waarde van de woning daalt, terwijl de index in waarde gestegen is. Tevens wordt in dit geval het percentage weergegeven dat de afdracht in dit geval naar verwachting is van de nieuwe waarde van de woning.
- De mediaan van de verdeling van de afdracht als percentage van de waardeverandering van de woning van de particulier.
- Een bovengrens voor de vorige verdeling; dit wil zeggen dat voor 95% van de klanten niet meer dan dit percentage van de waardeverandering van de woning moet worden afgestaan bij het verstrijken van de looptijd.

Alvorens we deze grootheden weergeven voor de verscheidene modellen, regio's en woningtypes, zullen we eerst de verdeling bekijken van de afdracht als percentage van de waardeverandering van de woning, voor de eengezinswoningen in de Regio West. De bovenste twee grafieken kunnen vergeleken worden met de twee grafieken uit de vorige paragraaf. De onderste twee zijn op grond van het tijdreeksmodel met veranderende regimes samengesteld.



Grafiek 6.3: Afdracht waardedelingshypotheek als percentage van de gerealiseerde waardeverandering

Hoewel de verdeling voor het tijdreeksmodel vanaf 1986 iets naar links lijkt te zijn verschoven ten opzichte van de historische resultaten in de vorige paragraaf, is het tevredenheidspercentage ongeveer gelijk aan het op grond van het repeat sales bestand bepaalde tevredenheidspercentage; dit blijkt voor een looptijd van tien jaar gelijk te zijn aan 65%, voor een looptijd van tien jaar is dit 77%. Het tijdreeksmodel met veranderende regimes geeft uiteraard geheel andere resultaten wat betreft de verdeling. Hierbij is de kans dat de waarde van een woning of de index daalt niet verwaarloosbaar, hetgeen de piek bij 0% verklaart. In deze piek zitten klanten waarvan de waarde van de woning gedaald is, terwijl zij toch een bedrag moeten afstaan, of klanten die geen bedrag moeten afstaan, omdat de index gedaald is. In de Appendix - Modelresultaten Mismatch Particulier staan de eerder genoemde grootheden voor alle regio's, woningtypen en looptijden van 5 en 10 jaar vermeld. We vatten deze resultaten hier samen:

| <i>Looptijd (jaar)</i> | <i>Model 1</i> | | <i>Model 2</i> | |
|--|----------------|-----------|----------------|-----------|
| | <i>5</i> | <i>10</i> | <i>5</i> | <i>10</i> |
| <i>Tevredenheidspercentage</i> | 61% | 67% | 67% | 69% |
| <i>Mediaan afdracht/waardeverandering</i> | 20% | 19% | 8% | 10% |
| <i>Bovengrens afdracht/waardeverandering</i> | 93% | 68% | 90% | 89% |
| <i>Kans index stijgt en woning daalt</i> | 2.3% | 0.3% | 12.9% | 8.4% |
| <i>- Gem. afdracht/waardeverandering</i> | 19% | 43% | 7% | 7% |

Tabel 6.5: Samenvatting resultaten risico particulier

Met model 1 wordt in de tabel het ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986 bedoeld; model 2 is dan automatisch het tijdreeksmodel met veranderende regimes. We merken dat het percentage tevreden klanten tussen de 60 en 70% schommelt. Hoewel zoveel klanten als tevreden mogen gelden, is tenminste 5% van de klanten dit in het geheel niet. Zij moeten tussen de 70 en 90% van hun waardestijging afstaan, om aan de afdracht te kunnen voldoen.

Bij kortere looptijden is het aantal keren dat de waarde van de woning gedaald is, terwijl de index gestegen is, niet verwaarloosbaar. De klanten waarbij dit het geval is, moeten een flink percentage van hun nieuw huis te gelde maken om aan de afdracht te kunnen voldoen.

Samenvatting

Wat betreft het risico van de particulier is er in dit hoofdstuk allereerst bepaald in hoeverre er sprake is van diversificatie bij het nemen van een waardedelingshypotheek. Er blijkt voor de meeste regionale indices sprake te zijn van diversificatie bij de aantrekkelijk lijkende waardedelingspercentages van 25 en 50%, zij het in geringe mate. De oorzaak hiervan is de vrij geringe correlatie tussen de waardeontwikkeling van een individuele woning en de betreffende regionale index. Bij de NVM indices ligt deze correlatie hoger, zodat het wellicht aan te bevelen is naast de Kadaster indices ook indices voor NVM woningen te ontwikkelen. Dit zou ook de mismatch van de particulier kunnen verkleinen.

Deze mismatch is het tweede onderwerp dat onderzocht is in dit hoofdstuk. De mismatch kan er voor zorgen dat hoewel de index gestegen is, en de particulier derhalve een percentage van deze stijging moet afstaan, de waarde van de woning van deze persoon gedaald is. Dit zal uiteraard tot ontevredenheid van de klant geschieden. Er is onderzocht hoeveel procent van de klanten tevreden is, d.w.z. hoeveel procent van de klanten niet meer dan het afgesproken percentage van de echte waardestijging van hun woning af moeten dragen, of in het geheel niets hoeven terug te betalen. Op grond van modellen en historische data is gebleken dat dit *tevredenheidspercentage* tussen de 60 en 70% ligt. Een niet gering percentage van de klanten zijn dus niet tevreden, sommigen zelfs zeer ontevreden.

7. Risico Bank

In het hoofdstuk Risico Inventarisatie is uitgebreid beschreven welke mogelijke risico's de bank loopt bij het verhandelen van de waardedelingshypotheek. De focus in dit hoofdstuk zal liggen op het koersrisico dat de bank loopt ten opzichte van de verscheidene huizenprijsindices. Indien de huiseigenaren op dezelfde index een waardedelingshypotheek af zouden sluiten als de index waarop de opties van de beleggers geschreven zijn, zou de bank geen risico lopen indien zij tegenover een transactie van de particulieren een evengrote transactie bij de beleggers uit zou zetten. Er is echter voor gekozen om de opties voor de beleggers op een nationale index te schrijven, terwijl de particulieren hun waardedelingshypotheeken op regionale indices afsluiten.

De eerste paragraaf zal beschrijven uit welke delen de portefeuille van de bank zal bestaan als zij de waardedelingshypotheek op de markt gaat brengen. De tweede paragraaf beschrijft een maatstaf aan de hand waarvan het risico van de bank gemeten zal worden: Value at Risk. Aan de hand hiervan worden in de laatste paragraaf resultaten afgeleid voor het risico dat de bank op een gegeven moment loopt door een netto positie op de huizenmarkt in te nemen.

7.1. De portefeuille van de bank

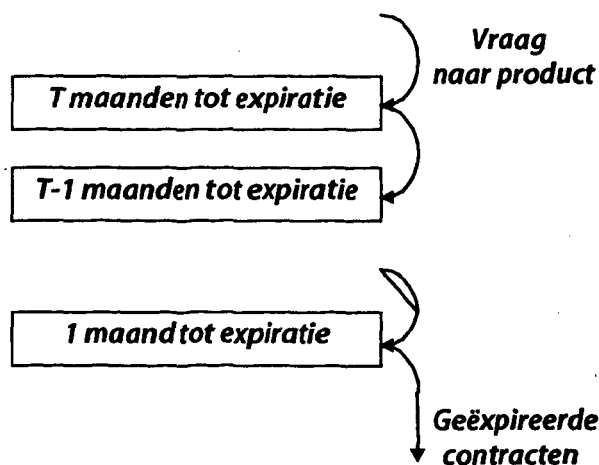
Zoals al eerder uitgelegd is, koopt de bank bij het verhandelen van de waardedelingshypotheek in feite call opties op de verschillende regionale huizenprijsindices. Het risico dat de bank op deze portefeuille loopt kan pas geanalyseerd worden indien we de samenstelling van deze portefeuille in de tijd weten. Het beschrijven van dit proces zal het onderwerp van deze paragraaf zijn.

We zullen aannemen dat de waardedelingshypotheek slechts in één vorm verhandeld zal worden: er is slechts één waardedelingspercentage $100 \cdot k\%$ en één looptijd van T maanden verkrijgbaar. In de praktijk hoeft dit uiteraard niet het geval te zijn; dit eenvoudige geval geeft echter genoeg inzicht in het risico van de bank. De vraag aan de kant van de beleggers wordt in eerste instantie niet meegenomen. In de beschrijving van het proces gaan we er voor het gemak van uit dat de waardedelingshypotheken slechts op één index verkocht worden.

De opbouw van deze paragraaf is als volgt: als eerste zullen we beschrijven hoe de optieportefeuille elke maand verandert. Vervolgens ligt de focus op een onderdeel van deze verandering: de maandelijkse vraag naar waardedelingshypotheken.

7.1.1. Maandelijkse verandering van de optieportefeuille

Zoals in hoofdstuk 4 werd beschreven, is een waardedelingshypotheek op een huis met aanschafprijs P gelijk aan $\frac{k \cdot P}{S}$ call opties op de huizenprijsindex. Deze opties hebben alle een looptijd van T maanden en een uitoefenprijs gelijk aan S , de stand van de index op het moment van aanschaf. Dit betekent dat alle waardedelingshypotheken die in dezelfde maand worden verkocht, alle opgebouwd zijn uit één en dezelfde optie; het enige waarin elk contract verschilt is het aantal van deze opties. De maandelijkse verandering in samenstelling van de optieportefeuille kan dan ook als volgt schematisch weer worden gegeven:



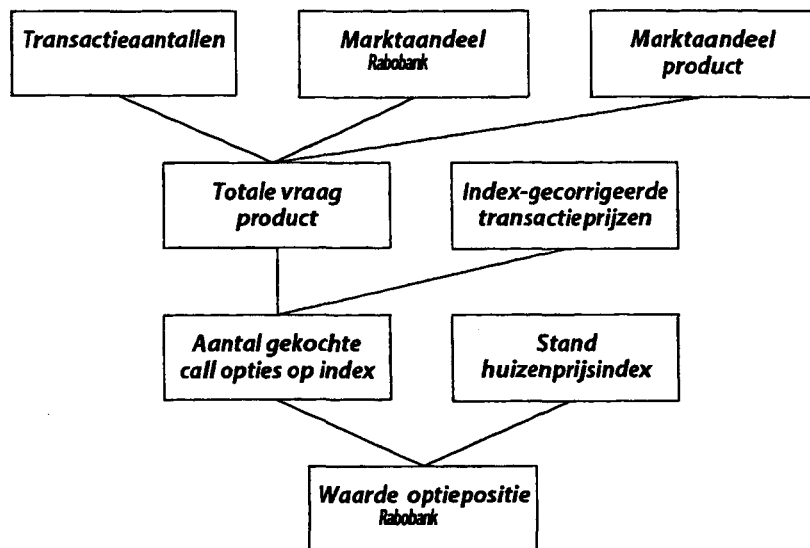
Figuur 7.1: Maandelijkse verandering van de portefeuille

Elke maand koopt de bank een aantal call opties in op de particuliere markt; het exacte aantal van deze opties zal afhankelijk zijn van de vraag naar waardedelingshypotheken in die maand. Ten gevolge van een nieuwe stand van de index verandert de waarde van de opties die de bank al in haar bezit heeft. Dit is niet het enige dat aan deze opties verandert: ook de tijd tot expiratie daalt met één maand. De opties die nog slechts één maand tot

expiratie hadden, zullen door de bank worden uitgeoefend, met als gevolg een cashflow van de particulieren naar de bank.

7.1.2. Maandelijks vraag naar waardedelingshypotheken

Alvorens de maandelijks vraag gemodelleerd wordt, zullen we een overzicht geven van hoe elke maand de waarde van de die maand nieuw verkochte waardedelingshypotheken bepaald wordt.

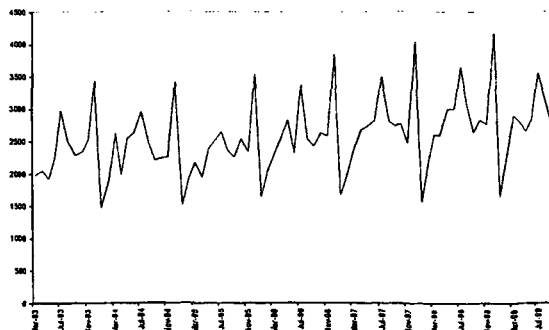


Figuur 7.2: Bepaling waarde optiepositie van de bank

Als eerste zullen we hier de drie componenten behandelen waaruit het aantal waardedelingshypotheken dat in een maand verkocht wordt, is opgebouwd. De modellering van deze componenten wordt in appendix 7.A beschreven.

Transactieaantallen

We gaan er hier van uit dat de waardedelingshypothek slechts verkocht zal worden aan klanten die een woning aanschaffen. Het is derhalve belangrijk om te weten hoeveel eengezinswoningen en appartementen er in een maand verkocht worden. In onderstaande grafiek wordt het totale aantal verkochte appartementen in de Regio Zuid weergegeven voor de periode 1993-1999.



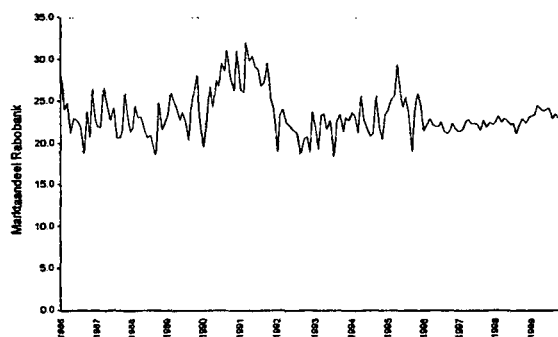
Grafiek 7.1: Aantal transacties voor appartementen in de Regio Zuid

In appendix 7.A.1 wordt het aantal transacties per maand voor alle indices gemodelleerd. Zoals ook uit de grafiek opgemerkt kan worden, werd er een duidelijk seizoenspatroon gevonden in het aantal transacties per maand. In december bijvoorbeeld werden er het meeste aantal transacties geregistreerd, tegenover het minste aantal in januari.

Naast het seizoenspatroon kan in de grafiek ook gemerkt worden dat er een stijgende trend is in het aantal verkochte woningen. Het is nog maar de vraag of het aantal verkochte eengezinswoningen en appartementen in de toekomst net zo zal stijgen als de afgelopen jaren het geval is geweest. In de drie mogelijke toekomstscenario's die Brons [2000] schetst, eindigt het totale aanbod op de woningmarkt over tien jaar op ongeveer hetzelfde niveau als het huidige aanbod. Voor de berekeningen van het risico van de bank lijkt het daarom aannemelijk om het gemiddelde woningaanbod gelijk te nemen aan het laatst waargenomen woningaanbod en de tijdsafhankelijkheid te negeren.

Marktaandeel Rabobank

Van de afdeling Marktanalyse en Productontwikkeling van het segment Huis en Hypotheekadvies hebben we voor de periode 1986-1999 de beschikking gekregen over maandelijkse cijfers van het marktaandeel van de Rabobank op het gebied van afgesloten hypotheekleningen voor de aanschaf van een huis. In onderstaande grafiek wordt dit weergegeven:



Grafiek 7.2: Marktaandeel Rabobank voor hypotheekleningen

In appendix 7.B.2 wordt geconcludeerd dat het marktaandeel van de Rabobank constant gelijk verondersteld mag worden aan 22.6%. Bij gebrek aan gegevens over het marktaandeel van de Rabobank in de afzonderlijke regio's en voor de verschillende woningtypen, nemen we aan dat dit marktaandeel overal gelijk is.

Marktaandeel product

Het percentage klanten dat interesse zal hebben in de waardedelingshypotheek is vooraf moeilijk te bepalen; er zal hoogstwaarschijnlijk een aanlooperperiode zijn waarin er minder vraag is. Indien het product een goede naambekendheid verwerft, zal deze vraag in de loop der tijd kunnen stijgen. We zullen bij de daadwerkelijke berekeningen voor het risico van de bank aangeven welke aanname we maken omtrent deze factor.

Nu elk van de factoren die het aantal waardedelingshypotheekleningen bepalen dat in een maand verkocht zal worden, beschreven zijn, kunnen we de totale vraag d_t als volgt schrijven:

$$d_t = m_R m_t n_t$$

Het aantal waardedelingshypotheken dat in maand t verkocht zal worden is gelijk aan het marktaandeel van de Rabobank, m_R , vermenigvuldigd met het marktaandeel van het product, m_t , vermenigvuldigd met het aantal woningen dat in maand t verkocht is, n_t . Zoals eerder al vermeld werd, wordt het aantal call opties waarmee de waardedelingshypothek equivalent is, bepaald door de factor $\frac{kP}{S}$. Indien we de factor $\frac{P}{S}$, de voor de index gecorrigeerde verkoopprijs, voor klant j weergeven met Y_j , geldt het volgende voor het totale aantal call opties dat de bank in maand t inkoopt:

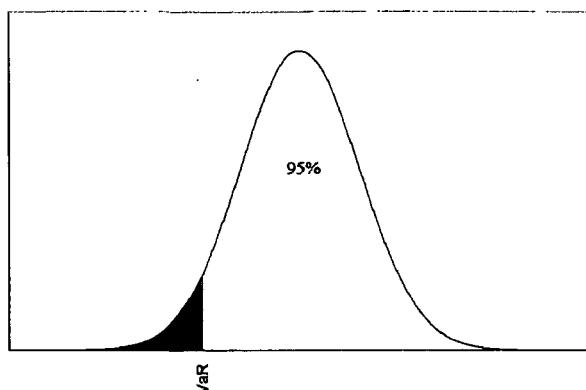
$$D_t = \sum_{j=1}^{d_t} kY_j$$

In appendix 7.B.3 wordt beschreven hoe de verdeling van deze index-gecorrigeerde transactieprijs nagebootst kan worden om het risico van de bank te bepalen. Een aanname die hierbij gemaakt wordt is dat elk jaar uit elk prijssegment van de woningmarkt ongeveer evenveel woningen verkocht worden.

In het schema van figuur 7.2 zien we dat de waarde van de nieuw binnengekomen opties nu aan de hand van het waarderingsmodel uit hoofdstuk 4 bepaald kan worden.

7.2. Value at Risk

Naast het netto resultaat dat de bank behaalt uit het verhandelen van derivaten op de verscheidene huizenprijnsindices, zullen we ook de zogenaamde value at risk (kortweg VaR) van de portefeuille van de bank bekijken. In deze paragraaf zullen we in het kort uitleggen wat er met dit concept precies bedoeld wordt.



Grafiek 7.3: 95% VaR van een portefeuille

De VaR van een portefeuille is een schatting van het maximale verlies op een portefeuille over een bepaalde periode, dat met een bepaalde kans geëvenaard of overschreden kan worden. In bovenstaande grafiek wordt de betekenis van een 95% VaR duidelijk gemaakt in de grafiek van de verdeling van de waardeverandering van de portefeuille. Indien de 95% 1-maands VaR van de portefeuille gelijk is aan één miljoen gulden, is in 95 van de 100 gevallen het verlies over de komende dag niet groter dan één miljoen gulden.

In oktober 1994 introduceerde de Amerikaanse bank JP Morgan via RiskMetrics een methode om de VaR van een portefeuille te benaderen. Voor meer informatie omtrent RiskMetrics wordt u verwezen naar de RiskMetrics Technical Manual [1996].

In het kader van het bedrijfseconomische toezicht op banken zijn er bepaalde solvabiliteitseisen vastgesteld, die voorgesteld zijn door de Bank for International Settlements (BIS). De toezichthouders van de Europese Unie hebben deze ideeën omarmd en in de nationale wetgeving ingebracht. Deze eisen stellen dat een instelling tegenover bepaalde risicodragende activiteiten een bepaalde hoeveelheid eigen vermogen (aandelenkapitaal, vrije reserves) moet aanhouden. Vanaf 1997 zijn deze eisen op voorstel van de *Basle Committee on Banking Supervision* uitgebreid met solvabiliteitseisen omtrent het marktrisico van beleggingen. Voor de exacte eisen wordt u verwezen naar het stuk Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks [1996]; het komt er op neer dat het risico van een belegging gemeten wordt aan de hand van de VaR van deze belegging. Het ligt dan ook zeker voor de hand om de VaR van de portefeuille van de bank te berekenen indien zij de waardedelingshypotheek gaat verhandelen, en deze te vergelijken met de VaR van de Rabobank inzake de handelsportefeuille op dit moment. Dit zal ten dele het onderwerp van de volgende paragraaf zijn.

De manier waarop de benadering van de VaR berekend wordt, staat uitgelegd in de bijbehorende appendix 7.B - Value at Risk.

7.3. Risico Bank – Resultaten

Aan de hand van de eerder geformuleerde modellen zullen we in deze paragraaf een aantal resultaten presenteren voor het risico dat de bank loopt indien zij de waardedelingshypothek op de markt brengt. Het gehanteerde model voor de index is het meer realistisch geachte model waarin de huizenprijsindex ook toegestaan wordt te dalen. Op welke aannamen de vraag naar waardedelingshypotheken steunt, is eerder in § 7.1 besproken. We herhalen hier de belangrijkste aannamen omtrent de vraag naar waardedelingshypotheken:

- De Rabobank heeft in elke regio een vast marktaandeel van 22.6% op het gebied van afgesloten hypotheken voor de aanschaf van een huis;
- 5% van alle nieuwe hypotheken wordt een waardedelingshypothek;

De resultaten kunnen uiteraard naar believen geschaald worden om de resultaten voor andere percentages te verkrijgen. De contractspecificaties worden als volgt verondersteld:

- Looptijd van tien jaar;
- Waardedelingspercentage van 25%;
- Risicovrije voet van 4%;

Zoals eerder beschreven moet het risico van de bank bij het verhandelen van dit product beperkt worden door aan beleggerszijde opties te verkopen op een nationale index. Deze nationale index nemen we hier gelijk aan een gewogen gemiddelde van de eerder gepresenteerde Nederlandse appartementen- en eengezinswoningenindex. We nemen hierbij aan dat alleen at-the-money calls met een looptijd van tien jaar op de nationale index verkocht worden. Indien voor elke waardedelingshypothek een even grote transactie aan beleggerszijde werd uitgezet op dezelfde index, zou de bank geen risico lopen. Omdat de beleggers echter alleen opties op de nationale index kunnen kopen, zal de bank een zeker risico lopen. We beschouwen de vraag van de beleggers hier niet als beperkende factor, maar bekijken drie mogelijke strategieën voor de bank:

- 75%, 100% of 125% van het in een maand nieuw binnengekomen optievolume wordt uitgezet aan beleggerszijde.

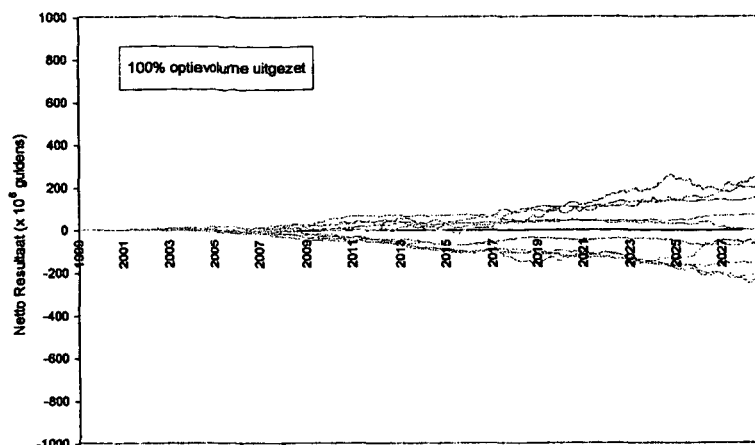
Onder deze voorwaarden zijn voor elk van deze strategieën een tiental simulaties gedraaid, waarin voor een periode van 30 jaar (vanaf oktober 1999¹³) bekeken wordt hoe de portefeuille van de bank zich gedraagt. Hierbij is het tweede model voor de huizenprijsindex gebruikt, waarbij dalingen wel zijn toegestaan. We zullen hier de resultaten bespreken voor het netto resultaat van de bank en de value at risk, welke in de vorige paragraaf geïntroduceerd is.

7.3.1. Netto Resultaat

Met het netto resultaat van de bank op een gegeven moment bedoelen we hier dat bedrag dat de bank gedurende de periode dat het product verhandeld is, verdiend heeft. Eventuele kasoverschotten of kastekorten worden belegd in een obligatie, waarover jaarlijks een risicovrij rendement van 4% wordt uitbetaald. De marktwaarde van de portefeuille van opties die de bank op dat moment in haar bezit heeft is bij dit netto resultaat inbegrepen.

¹³ De laatste datum waarvoor de indices beschikbaar waren, is september 1999.

In onderstaande grafiek staan een aantal realisaties grafisch weergegeven voor de strategie waarin een even groot optievolume wordt uitgezet, als dat er maandelijks nieuw binnenkomt:



Grafiek 7.4: Netto resultaat bij de strategie waarin 100% van de vraag wordt uitgezet

In onderstaande tabel geven we het gemiddelde en de standaarddeviatie weer van het netto resultaat op augustus 2029, op grond van deze simulaties:

| Strategie | 75% | 100% | 125% |
|-------------------|-----|------|------|
| Gemiddelde | 85 | -7 | 117 |
| Standaarddeviatie | 329 | 173 | 432 |

Tabel 7.1: Netto resultaat op augustus 2029 (in miljoenen gulden)

Zij opgemerkt dat deze resultaten slechts een weergave zijn van de tien simulaties die voor elk van de strategieën gedraaid zijn; de verwachting van het netto resultaat voor elk van de strategieën is op grond van de waarderingmethode immers gelijk aan 0 gulden.

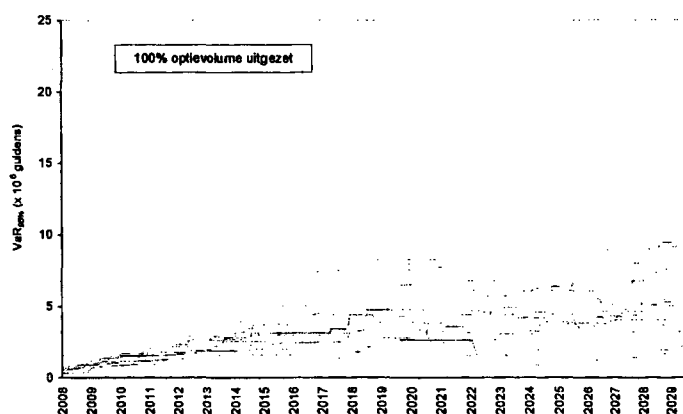
Van de bekeken strategieën blijkt de strategie waarin maandelijks 100% van het nieuw binnengekomen optievolume uitgezet wordt aan beleggerszijde, de kleinste spreiding op te leveren in het netto resultaat. Indien er aan beleggerszijde echter niet genoeg vraag is, zodat bijvoorbeeld slechts 75% van het optievolume uitgezet kan worden, zal de uiteindelijke spreiding veel groter zijn.

Een tweede constatering is dat de bank bij een aantal realisaties in de simulatie zelfs forse verliezen maakt op het product. Deze verliezen zouden gecompenseerd kunnen worden door aan particulieren die een waardedelingshypotheek afgesloten hebben, niet het gehele bedrag uit te keren, maar hier een bepaald percentage van in te houden als premie. Er is onderzocht hoe hoog dit percentage moet zijn, opdat voor alle bekeken realisaties geen verlies wordt gemaakt. In het geval dat 75% of 125% van het nieuw binnengekomen optievolume uitgezet wordt aan beleggerszijde, liggen deze percentages rond 17%. Indien het optievolume dat aan de beleggers wordt verkocht gelijk is aan het optievolume van de particulieren, is dit percentage ca. 6%¹⁴.

¹⁴ Ter illustratie: bij het hier gebruikte model voor de index lagen de optiepreizen voor een woning t.w.v. f 300.000,- rond de f 20.000,-. Een korting van 6% à 17% op de uitkering betekent dus respectievelijk een korting van f 1.200,- of f 3.400,-.

7.3.2. Value at Risk

In bovenstaande grafieken met het netto resultaat kan gezien worden dat de spreiding in de resultaten voor de strategieën waarbij niet het gelijke optievolume voor de beleggers werd uitgezet als dat binnenkomt, groter is dan wanneer dit wel gebeurt. We verwachten dan ook dat de Value at Risk voor deze strategieën hoger ligt. Daar gebleken is dat de gebruikelijke VaR benadering niet altijd even goed werkt, hebben we op grond van de gerealiseerde waardeveranderingen in elke maand het 5% quantiel hiervan berekend. Dit betekent dat 95% van de waardeveranderingen een kleiner verlies opleverden dan deze waarde. In onderstaande grafiek wordt dit quantiel weergegeven voor de strategie waarin een even groot optievolume wordt uitgezet, als dat er maandelijks nieuw binnenkomt:



Grafiek 7.5: Historische 1-maands 95% VaR voor de strategie waarin 100% van de vraag wordt uitgezet

Voor de duidelijkheid herhalen we hier wat een 1-maands 95% VaR van 10 miljoen betekent: in 95 van de 100 maanden is het verlies op de portefeuille niet groter dan 10 miljoen gulden. Het gemiddelde en de standaarddeviatie van de 1-maands 95% VaR op augustus 2029 uit deze simulatie staan in onderstaande tabel afgebeeld:

| Strategie | 75% | 100% | 125% |
|-------------------|-----|------|------|
| Gemiddelde | 9.5 | 4.8 | 9.7 |
| Standaarddeviatie | 8.6 | 2.9 | 4.1 |

Tabel 7.2: 95%-VaR op augustus 2029 (in miljoenen gulden)

De 95% 1-maands VaR blijkt inderdaad hoger te zijn voor de beide strategieën waarbij niet 100% van het nieuwe optievolume uitgezet wordt. De 99% dagelijkse VaR op de investeringsboeken van Rabobank International is momenteel gelijk aan 18 miljoen gulden, een schatting voor de 99% dagelijkse VaR op de handelsboeken is 50 miljoen. Deze laatste VaR is echter een grove schatting en zal waarschijnlijk lager liggen, daar Rabobank International momenteel deze positie af aan het bouwen is.

Deze VaR's zijn niet direct met elkaar te vergelijken; om een snelle indruk te krijgen van de 95% maandelijkse VaR van Rabobank International op deze twee portefeuilles, kunnen we een regel toepassen die in de praktijk ook vaak gebruikt wordt. Hierbij wordt ervan uitgegaan dat de waardeverandering in de portefeuille normaal verdeeld is met verwachting gelijk aan nul. Voor een normale verdeling met een verwachting gelijk aan nul en standaarddeviatie σ is een $100\alpha\%$ quantiel gelijk aan $N^{-1}(\alpha) \cdot \sigma$. In de praktijk wordt er nu van uitgegaan dat de variantie van de rendementen op een portefeuille proportioneel is

met de periode waarover deze rendementen behaald zijn. Indien we dus bijvoorbeeld een dagelijkse VaR willen schalen naar een wekelijkse VaR, dienen we te schalen met $\sqrt{7}$. Uiteraard zorgen autocorrelaties tussen rendementen ervoor dat deze regel niet correct is; hij wordt echter vaak in de praktijk toegepast, zodat we dit hier ook doen om een snelle indruk te krijgen. Aangezien we eveneens een 99% VaR in een 95% VaR willen converteren, wordt de correctiefactor uiteindelijk gelijk aan:

$$\frac{N^{-1}(0,975)}{N^{-1}(0,995)} \cdot \sqrt{\frac{365,1}{12}} \approx 4,20$$

Schattingen voor de 95% 1-maands VaR op de investeringsboeken en de handelsboeken van Rabobank International zijn derhalve respectievelijk 75 en 210 miljoen gulden. Tenslotte moeten we de getallen uit tabel 19 nog corrigeren voor het feit dat dit de VaR's zijn op augustus 2029. Hiervoor verdisconteren we met de risicovrije voet van 4%. Vergelijkend vinden we nu dat de VaR van de portefeuille die ontstaat door het handelen in waardedelingshypotheken ruwweg 5% is van de VaR op de investeringsboeken van Rabobank International, en ruwweg 1 à 2% van de VaR op de handelsboeken van Rabobank International. Het risico van de bank zou dus wel degelijk groter worden ten gevolge van het handelen in de waardedelingshypothek.

Samenvatting

Een van de risico's waaraan de bank is blootgesteld, is de ontwikkeling van de verscheidene huizenprijsindices. Daar de beleggers opties kopen op een nationale index, en de waardedelingshypotheken op regionale indices afgesloten worden, neemt de bank een positie in op de huizenmarkt. Zonder een aanname te maken over het gedrag van de beleggers, is onderzocht in welke orde van grootte dit risico ligt. Er blijkt dat indien het niet mogelijk is om maandelijks een even groot optievolume uit te zetten bij de beleggers als dat er aan de kant van de particulieren gegenereerd wordt door de vraag naar waardedelingshypotheken, de volatiliteit in het netto resultaat van de bank hoger ligt dan wanneer dit wel mogelijk is. Een te grote vraag van de zijde van de beleggers heeft eenzelfde effect tot gevolg. Deze verhoogde volatiliteit heeft tot gevolg dat het risicodragende bedrag van de bank groter wordt. Hierdoor kunnen niet geringe verliezen opgelopen worden. Tevens is gebleken dat deze verliezen niet geheel ongedaan gemaakt kunnen worden door het optellen van een redelijke risicopremie bij de prijs van de optie. Een maat voor het risicodragende deel van de portefeuille is de value at risk (VaR). Indien we de VaR op de portefeuille met waardedelingshypotheken vergelijken met de VaR op de investeringsboeken en de handelsboeken van Rabobank International, vinden we dat deze hier respectievelijk 5% en 1 à 2% van is. Dit zijn slechts ruwe schattingen, maar geven wel een indicatie dat het risico van de bank met een niet geringe factor verhoogd wordt indien de bank waardedelingshypotheken op de markt gaat brengen.

8. Conclusies

Het voornaamste doel van dit onderzoek was het analyseren van de risico's die er ontstaan bij het op de markt brengen en verhandelen van een nieuw hypothecair product: de waardedelingshypotheek. Hierbij was het eerst noodzakelijk om een wiskundige modellering te vinden voor één van de bouwstenen van het product: de huizenprijsindex. Hiervoor zijn twee mogelijke tijdreeksmodellen bekeken, welke sterk uiteenlopen qua voorspellingen voor de toekomst. Ze moeten in eerste instantie dan ook worden gezien als mogelijke scenario's, welke later in de risicoanalyse gebruikt kunnen worden.

Een ander belangrijk item dat nader bekeken is, is de methode van waardering van opties op de huizenprijsindex, waaruit de waardedelingshypotheek is opgebouwd. Er is een nieuwe methode voorgesteld, die met behulp van op de beurs verhandelde vastgoedfondsen het risico van het handelen in de opties enigszins kan afdekken. De lage correlatie van de rendementen van deze fondsen met de rendementen op de huizenprijsindex zorgt er echter voor dat de risicoreductie miniem is, zodat een eenvoudigere prijsingsmethode gebruikt kan worden: expectation pricing. Na gekozen te hebben voor dit model, is de gevoeligheid van dit optiewaarderingsmodel onderzocht met betrekking tot de parameters van de huizenprijsindex. De onzekerheid omtrent de locatie van de parameters van de huizenprijsindex werkt door in de optieprijs, waardoor het moeilijk blijkt een eenduidige optieprijs vast te stellen. Met name de verwachte stijging van de huizenprijsindex blijkt hierbij een bepalende parameter te zijn.

Nadat de bouwstenen van het model gelegd waren, kon overgegaan worden tot de risicoanalyse. Er is kwantitatief gekeken naar het risico dat de particulier loopt bij het nemen van een waardedelingshypotheek, en het risico dat de bank loopt bij het verhandelen hiervan.

Eén van de risico's van de particulier bestaat hierin, dat er een zekere mismatch is tussen de waardeontwikkeling van het huis zelf, en de waardeontwikkeling van de index waarop dit product afgesloten wordt. Het zou bijvoorbeeld voor kunnen komen dat hoewel de index gestegen is, en de particulier derhalve een percentage van deze stijging moet afstaan, de waarde van de woning van deze persoon gedaald is. Er is onderzocht hoeveel procent van de klanten tevreden is, d.w.z. hoeveel procent van de klanten niet meer dan het afgesproken percentage van de echte waardestijging van hun woning af moeten dragen, of in het geheel niets hoeven terug te betalen. Op grond van modellen en historische data is gebleken dat dit *tevredenheidspercentage* tussen de 60 en 70% ligt.

Een tweede aandachtspunt bij de particulier bedroeg het bepalen van de mate van diversificatie bij het nemen van een waardedelingshypotheek. Hieruit is gebleken dat er voor de meeste regionale indices geldt dat er sprake is van diversificatie bij de aantrekkelijk lijkende waardedelingspercentages van 25 en 50%. Met andere woorden, het nemen van een waardedelingshypotheek reduceert de volatiliteit in de portefeuille van de particulier, zij het in geringe mate. De oorzaak hiervan is de vrij geringe correlatie tussen de waardeontwikkeling van een individuele woning en de betreffende regionale index. Bij de NVM indices ligt deze correlatie hoger, zodat het wellicht aan te bevelen is naast de Kadaster indices ook indices voor NVM woningen te ontwikkelen. Dit zou ook de eerder genoemde mismatch verkleinen.

Een van de risico's waaraan de bank is blootgesteld, is de ontwikkeling van de verscheidene huizenprijsindices. Daar de beleggers opties kopen op een nationale index, en de waardedelingshypotheek op regionale indices afgesloten worden, neemt de bank een positie in op de huizenmarkt. Zonder een aanname te maken over het gedrag van de beleggers, is onderzocht in welke orde van grootte dit risico ligt. Indien het niet mogelijk

is om maandelijks een even groot optievolume uit te zetten bij de beleggers als dat er aan de kant van de particulieren gegenereerd wordt door de vraag naar waardedelingshypotheken, blijkt de volatiliteit in het netto resultaat van de bank vele malen hoger te liggen dan wanneer dit wel mogelijk is. Een te grote vraag van de zijde van de beleggers heeft eenzelfde effect tot gevolg. Deze verhoogde volatiliteit betekent dat het risicodragende bedrag van de bank groter wordt. Hierdoor kunnen niet geringe verliezen opgelopen worden, welke niet geheel ongedaan gemaakt kunnen worden door het optellen van een redelijke risicopremie bij de prijs van de optie.

Een maat voor het risicodragende deel van de portefeuille is de value at risk (VaR). Indien we de VaR op de portefeuille met waardedelingshypotheken vergelijken met de VaR op de investeringsboeken en de handelsboeken van Rabobank International, vinden we dat deze hier respectievelijk 5% en 1 à 2% van is. Dit zijn slechts ruwe schattingen, maar geven wel een indicatie is dat het risico van de bank met een niet geringe factor verhoogd wordt ten gevolge van het handelen in waardedelingshypotheken.

Al met al lijkt het handelen in de waardedelingshypotheek een riskante onderneming, zowel voor de particulier als voor de bank. Voor de particulier komt dit voornamelijk door het feit dat deze op een later tijdstip een bepaald bedrag aan de bank moet terugbetalen, een bedrag dat afhankelijk is van de ontwikkeling van de huizenprijsindex. Dit is inherent aan de constructie van het product. De bank loopt een risico doordat het risico van de ontwikkeling van de huizenprijsindex vooralsnog niet afdoende afgedekt kan worden. Mocht de vastgoedmarkt ooit meer liquide worden, dan zal dit in betere mate kunnen geschieden.

Appendices

Appendix - Multilognormale verdeling

In deze appendix zullen we een aantal eigenschappen van de multilognormale verdeling weergeven, welke we in de loop van het verslag zullen gebruiken. Een stochastische vector \underline{X} is multilognormaal verdeeld met parameters μ en Σ , als $\ln \underline{X}$ multinormaal verdeeld is met dezelfde parameters. We kunnen laten zien dat voor de multilognormale verdeling dezelfde prettige eigenschap geldt als voor de multinormale eigenschap, namelijk dat de marginale en de conditionele verdelingen wederom multilognormaal zijn. Zonder verlies der algemeenheid kunnen we ons dus beperken tot het bivariate geval.

We bekijken het volgende geval:

$$\underline{X} = (X, Y)^T \sim LN(\mu, \Sigma) = LN\left((\mu_X, \mu_Y)^T, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right)$$

De verwachting en variantie van X zijn gelijk aan:

$$E(X) = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}$$

$$\text{Var}(X) = e^{2\mu_X + \sigma_X^2} (e^{\sigma_X^2} - 1)$$

Voor de covariantie tussen X en Y geldt het volgende:

$$\text{Cov}(X, Y) = (e^{\rho\sigma_X\sigma_Y} - 1) \cdot E(X) \cdot E(Y)$$

Het is interessant om de correlatiecoëfficiënt van X en Y te bekijken in relatie tot ρ :

$$\rho_{XY} := \text{Corr}(X, Y) = \frac{e^{\rho\sigma_X\sigma_Y} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_X^2} - 1)(e^{\sigma_Y^2} - 1)}}$$

De minimale en maximale correlatie die bij gegeven σ_X en σ_Y gemodelleerd kunnen worden, ρ_{\min} en ρ_{\max} , zijn gelijk aan:

$$\rho_{\min} = \frac{e^{-\sigma_X\sigma_Y} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_X^2} - 1)(e^{\sigma_Y^2} - 1)}} \quad \rho_{\max} = \frac{e^{\sigma_X\sigma_Y} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_X^2} - 1)(e^{\sigma_Y^2} - 1)}}$$

Niet alle correlaties kunnen dus gemodelleerd worden, indien we σ_X en σ_Y vastleggen. Voor kleine waarden voor σ_X en σ_Y zal het probleem niet beperkend zijn. Er geldt namelijk:

$$\lim_{\sigma_X, \sigma_Y \downarrow 0} \rho_{\max} = \lim_{\sigma_X, \sigma_Y \downarrow 0} -\rho_{\min} = 1$$

Tevens kunnen we laten zien dat er geldt: $\lim_{\sigma_X, \sigma_Y \downarrow 0} \rho_{XY} = \rho$.

Een aantal andere eigenschappen die we nodig zullen hebben zijn de volgende verwachtingen:

1. $E(\max(X, \gamma)^m)$
2. $E(\min(X, \gamma)^m)$
3. $E(\max(X, \gamma)^m \cdot Y)$
4. $E(e^{cX+dY} N(a + bX) \cdot N(d + eY))$

Bij de eerste drie verwachtingen gaan we van het volgende uit voor de stochasten X en Y:

$$(X, Y)^T \sim LN((\mu_X, \mu_Y)^T, \Sigma) \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

Bij de vierde verwachting wordt er van uitgegaan dat X en Y binormaal verdeeld zijn, waarbij geldt dat $\mu_X = \mu_Y = 0$ en $\sigma_X = \sigma_Y = 1$. We spreken af dat we in het vervolg met $\varphi_{\mu, \sigma}$ en $N_{\mu, \sigma}$ respectievelijk de verdelingsfunctie en de cumulatieve verdelingsfunctie bedoelen van een normaal verdeelde stochast met parameters μ en σ . Indien deze parameters worden weggelaten, wordt van een standaardnormale stochast uitgegaan.

1. $E(\max(X, \gamma)^m)$

Om de berekening te vergemakkelijken substitueren we γ tijdelijk door $e^{\sigma_X \gamma + \mu_X}$. We krijgen:

$$\begin{aligned} E(\max(X, e^{\sigma_X \gamma + \mu_X})^m) &= \int_{-\infty}^{\sigma_X \gamma + \mu_X} e^{m(\sigma_X t + \mu_X)} \varphi_{\mu_X, \sigma_X}(t) dt + \int_{\sigma_X \gamma + \mu_X}^{\infty} e^{m t} \varphi_{\mu_X, \sigma_X}(t) dt \\ &= e^{m(\sigma_X \gamma + \mu_X)} N(\gamma) + \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{m(\sigma_X t + \mu_X) - \frac{1}{2} t^2} dt \end{aligned}$$

De laatste integraal kunnen we makkelijk berekenen door een kwadraat af te splitsen. We herkennen dan in de integraal een eenvoudige uitdrukking:

$$\int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{m(\sigma_X t + \mu_X) - \frac{1}{2} t^2} dt = \frac{e^{m\mu_X}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t - m\sigma_X)^2 + \frac{1}{2} m^2 \sigma_X^2} dt = e^{m\mu_X + \frac{1}{2} m^2 \sigma_X^2} (1 - N(\gamma - m\sigma_X))$$

Indien we de oorspronkelijke substitutie ongedaan maken, en vereenvoudigen, krijgen we:

$$E(\max(X, \gamma)^m) = \gamma^m N\left(\frac{\ln \gamma - \mu_X}{\sigma_X}\right) + e^{m\mu_X + \frac{1}{2} m^2 \sigma_X^2} N\left(m\sigma_X - \frac{\ln \gamma - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad \square$$

2. $E(\min(X, \gamma)^m)$

Dit volgt eenvoudig uit het vorige, indien we ook nog observeren dat:

$$\max(X, \gamma)^m + \min(X, \gamma)^m = X^m + \gamma^m$$

Deze observatie levert het volgende resultaat:

$$E(\min(X, \gamma)^m) = \gamma^m \left(1 - N\left(\frac{\ln \gamma - \mu_X}{\sigma_X}\right)\right) + e^{m\mu_X + \frac{1}{2}m^2\sigma_X^2} \left(1 - N\left(m\sigma_X - \frac{\ln \gamma - \mu_X}{\sigma_X}\right)\right) \quad \square$$

3. $E(\max(X, \gamma)^m \cdot Y)$

Via een Cholesky decompositie kunnen we Σ als volgt schrijven:

$$\Sigma_{XY} = L^T L$$

$$L = \begin{pmatrix} \sigma_X & \rho\sigma_Y \\ 0 & \sigma_Y\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

We krijgen nu de volgende uitdrukking:

$$E(\max(X, \gamma) \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{\ln \gamma - \mu_X}{\sigma_X}} \gamma e^{\mu_Y + (0,1)L^T(x,y)^T} \varphi(x)\varphi(y) dx dy$$

$$+ \int_{-\infty}^{\frac{\ln \gamma - \mu_X}{\sigma_X}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu_X + \mu_Y + (1,1)L^T(x,y)^T} \varphi(x)\varphi(y) dx dy$$

Na veel soortgelijk rekenwerk als in 1 komt er het volgende uit:

$$E[\max(X, \gamma) \cdot Y] = e^{\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2} \cdot \left(\gamma \cdot \Phi\left(\frac{\ln \gamma - \mu_X - \rho\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X}\right) + e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2 + \rho\sigma_X\sigma_Y} \Phi\left(\frac{\mu_X + \sigma_X^2 + \rho\sigma_X\sigma_Y - \ln \gamma}{\sigma_X}\right) \right) \quad \square$$

4. $E(e^{cX+Y} N(a+bX) \cdot N(d+eY))$

Zoals eerder gezegd gaan we hier voor de stochasten X en Y van het volgende uit:

$$(X, Y)^T \sim N\left((0,0)^T, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$$

We kunnen deze verwachting als volgt uitschrijven:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a+bx} \int_{-\infty}^{d+ey} e^{cx+fy} \cdot \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)} dv du dy dx$$

Deze uitdrukking enigszins herschrijvend, vinden we:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a+bx} \int_{-\infty}^{d+ey} e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\tilde{\mu}_X^2 - 2\rho\tilde{\mu}_X\tilde{\mu}_Y + \tilde{\mu}_Y^2)} \cdot \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2(1-\rho^2)}((x-\tilde{\mu}_X)^2 - 2\rho(x-\tilde{\mu}_X)(y-\tilde{\mu}_Y) + (y-\tilde{\mu}_Y)^2)} dv du dy dx,$$

waarbij $\tilde{\mu}_X = c + f\rho$ en $\tilde{\mu}_Y = c + f\rho$. We herkennen in deze integraal een kans uit de volgende multinormale verdeling, geschaald met een constante:

$$(U, V, X, Y)^T \sim N \left((0, 0, \tilde{\mu}_X, \tilde{\mu}_Y)^T, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & \rho & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Uitgaande van deze verdeling kan de integraal geschreven worden als:

$$e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\tilde{\mu}_X^2 - 2\rho\tilde{\mu}_X\tilde{\mu}_Y + \tilde{\mu}_Y^2)} \cdot P(U \leq a + bX, V \leq d + eY)$$

Indien we nu met $N_2(p, q, \rho)$ tenslotte de volgende functie weergeven:

$$P(Z_1 \leq p, Z_2 \leq q) \\ (Z_1, Z_2)^T \sim N \left((0, 0)^T, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right)$$

kan de verwachting als volgt weergegeven worden:

$$E(e^{eX+fY} N(a + bX) \cdot N(d + eY)) = e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\tilde{\mu}_X^2 - 2\rho\tilde{\mu}_X\tilde{\mu}_Y + \tilde{\mu}_Y^2)} \cdot N_2 \left(\frac{a+b\tilde{\mu}_X}{\sqrt{1+b^2}}, \frac{d+e\tilde{\mu}_Y}{\sqrt{1+e^2}}, \frac{be\rho}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+e^2}} \right)$$

Een speciaal geval waarbij opgelet moet worden, is dat waarbij de stochasten X en Y gelijk zijn, en de correlatiecoëfficiënt dus gelijk is aan 1. Dan geldt ook $\tilde{\mu}_X = \tilde{\mu}_Y$, en dus:

$$\lim_{\rho \uparrow 1} e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\tilde{\mu}_X^2 - 2\rho\tilde{\mu}_X\tilde{\mu}_Y + \tilde{\mu}_Y^2)} = \lim_{\rho \uparrow 1} e^{\frac{1}{(1+\rho)}\tilde{\mu}_X^2} = e^{\frac{1}{2}\tilde{\mu}_X^2}$$

De uitdrukking $N_2(p, q, \rho)$ is niet in standaardpakketten verwerkt, maar een veelgebruikte benadering kan in Drezner [1978] gevonden worden. In een aantal boeken voor het waarderen van opties, zoals Hull [2000], staat deze benadering (met een correctie op het oorspronkelijke artikel) eveneens weergegeven. \square

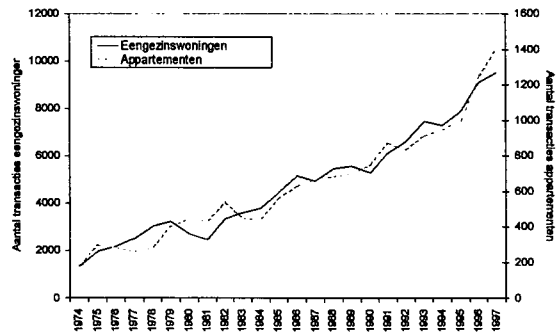
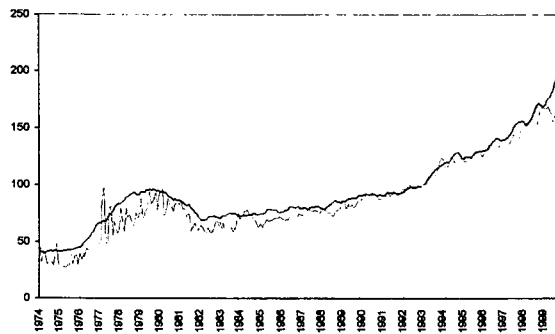
Appendix 3 - De huizenprijindex

Deze appendix bevat de volgende subappendices, alle behorende bij hetzelfde hoofdstuk:

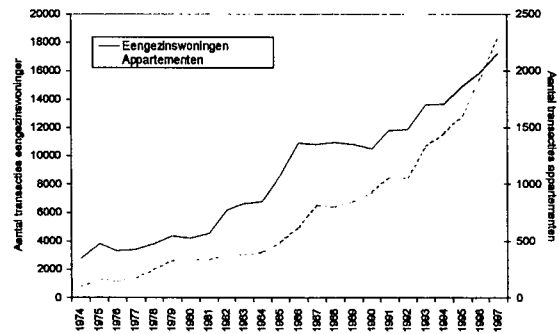
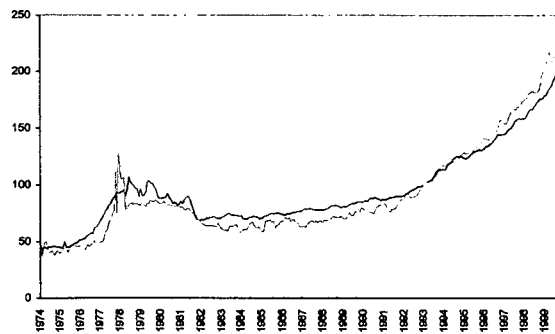
- A – Huizenprijindices
- B – Repeat sales bestanden
- C – ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986
- D – Tijdreeksmodel met veranderende regimes

3.A. Huizenprijindices

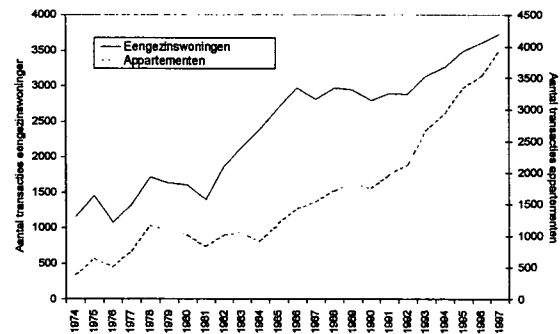
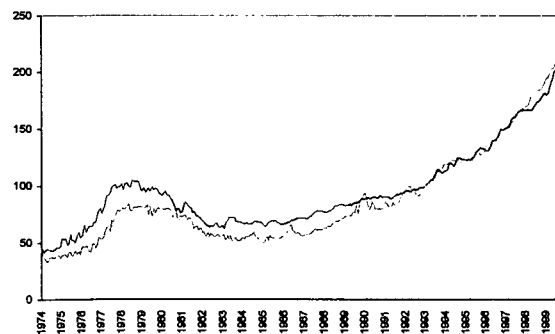
Grafiek 3.A.1: Indices en transactie aantallen Regio Noord



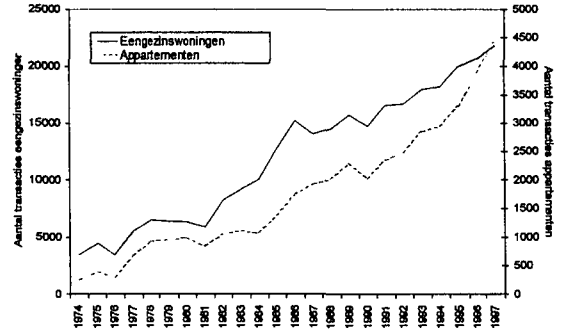
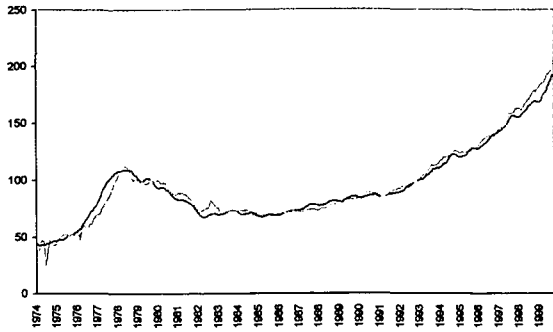
Grafiek 3.A.2: Indices en transactie aantallen Regio Oost



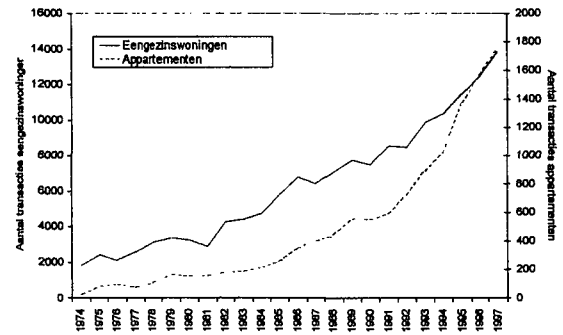
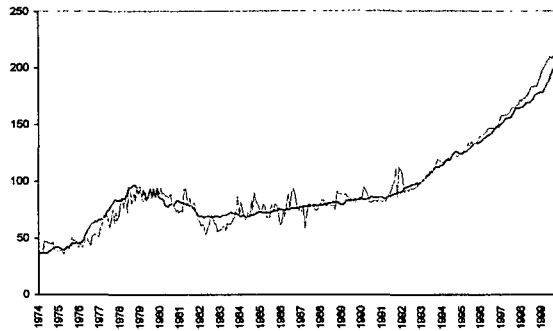
Grafiek 3.A.3: Indices en transactie aantallen Regio Randstad



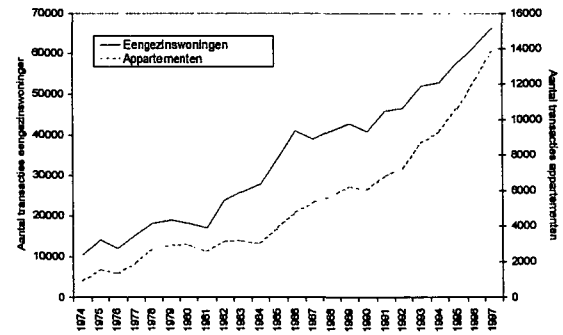
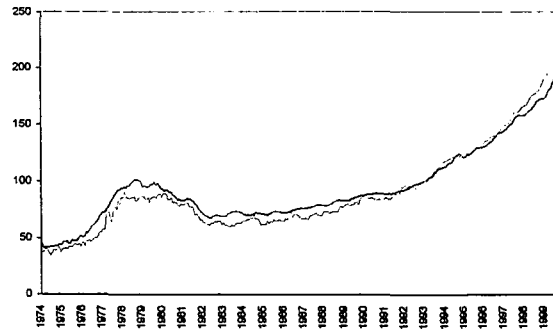
Grafiek 3.A.4: Indices en transactieaantallen Regio West



Grafiek 3.A.5: Indices en transactieaantallen Regio Zuid



Grafiek 3.A.6: Indices en transactieaantallen voor geheel Nederland



3.B. Repeat sales bestanden

Een repeat sales bestand is een bestand waarin alleen herhaalde verkopen worden meegenomen. Huizen die in de bekeken periode dus slechts één keer van eigenaar verwisseld zijn, worden niet meegenomen. Bij het vervaardigen van de repeat sales bestanden die in deze rapportage gebruikt zijn, zijn de volgende huizen verwijderd:

- Huizen die binnen minder dan één jaar van eigenaar verwisseld zijn;
- Huizen met gemiddelde maandelijkse rendementen groter dan 5%;
- Huizen met aanschafprijzen minder dan f 10.000,-;
- Huizen die meer dan zes keer van eigenaar veranderd zijn in de bekeken periode.

Deze criteria zijn alle toegepast om er voor te zorgen dat woningen die voor speculatieve doeleinden ge- en verkocht worden, de resultaten niet vertroebelen. Dit soort woningen zijn niet één van de beoogde doelgroepen voor de waardedelingshypotheek, zodat er met hen ook geen rekening gehouden hoeft te worden. De criteria komen ongeveer overeen met die van Van Bussel [1998].

Het is een open vraagstuk in de empirische literatuur over huizenprijnsindices of vaak verkochte huizen representatief zijn voor eigendommen die minder vaak verkocht worden. Een aantal onderzoekers hebben gesteld dat zogenaamde *starter homes*, kleinere huizen, geschikt voor een bewoner die later een groter huis wil kopen, maar hier momenteel nog geen geld voor heeft, vaker verhandeld worden dan grotere huizen. Een reden hiervoor is dat de bewoners al snel verhuizen naar grotere en betere woningen. Tevens kunnen er huizen zijn die vaker verkocht worden, omdat ze aantrekkelijk zijn voor mensen die huizen kopen als investering, ze opknappen om de marktwaarde te verhogen, en het huis dan weer verkopen om de winst op te strijken. Deze beargumentering is o.a. te vinden in Case, Pollakowski en Wachter [1997]. In hetzelfde artikel wordt geconcludeerd dat het rendement op huizen die vaker verhandeld worden systematisch hoger is.

Clapp, Giacotto en Tirtiroglu [1991] daarentegen beargumenteren dat al deze feiten geen invloed zouden moeten hebben op de rendementen. Alle huizen in een bepaalde omgeving zouden ongeveer dezelfde bewegingen moeten vertonen. Indien bijvoorbeeld starter homes sneller stijgen dan andersoortige huizen, zal de vraag naar dit laatste type woningen stijgen. Als gevolg hiervan zullen de prijzen van deze woningen ook stijgen, en zal het verschil verdwijnen. Al met al is het onduidelijk welke discrepantie er optreedt door het gebruiken van een bestand met herhaalde verkopen.

Enkele beschrijvende statistieken wat betreft de transactiepreisen in 1997 in de ons beschikbaar gestelde bestanden, worden in onderstaande tabel weergegeven:

| | NVM | | Kadaster | |
|--------------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
| | <i>Alle transacties</i> | <i>Repeat sales</i> | <i>Alle transacties</i> | <i>Repeat sales</i> |
| <i>Gemiddelde</i> | 288,601 | 278,018 | 251,961 | 231,788 |
| <i>Standaarddeviatie</i> | 174,802 | 161,742 | 142,124 | 122,723 |

Table 3.B.1: Summary statistics voor transacties in 1997

Uit bovenstaande tabel blijkt dat, in ieder geval voor 1997, de woningen uit het repeat sales bestand voor een gemiddeld lagere prijs verkocht werden dan de woningen uit het volledige transactiebestand.

3.C. ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986

Gezien het feit dat er pas omstreeks 1986 een redelijk aantal transacties geregistreerd worden door de NVM, zullen we in eerste instantie een tijdreeksmodel fitten op de rendementen vanaf 1986. Dit is conform met de aanpak van Geerlings [1999b]. We bekijken hier de tijdreeks na correctie voor het aantal waarnemingen waarop elk indexcijfer gebaseerd is, conform de aangegeven procedure in paragraaf 3.5.2.

3.C.1. Modelling

Uit het haalbaarheidsonderzoek voor de waardedelingshypotheek van Meulenberg en Vondenbusch [1999] is gebleken dat de index van Gelderland een lineaire stijging van de logaritmische rendementen vertoont. Zoals in paragraaf 3.5.4 echter is onderzocht, blijkt deze lineaire stijging niet uit de oorspronkelijke huizenprijsindex, waar nog geen 3-maandelijks voortschrijdend gemiddelde is genomen. Er is dan ook geen reden om aan te nemen dat deze stijging aanwezig is.

We proberen derhalve ten eerste het volgende tijdreeksmodel:

$$r_t = \alpha + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

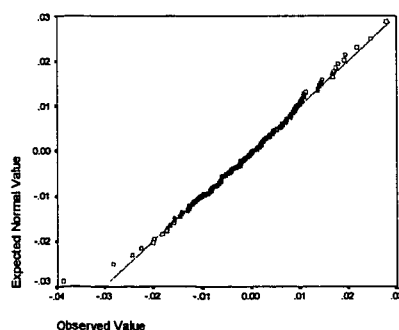
We nemen aan dat de fouten normaal verdeeld zijn. Heteroskedasticiteit is in paragraaf 3.5.3 uitgesloten, zodat dit hier niet verder onderzocht hoeft te worden. Autocorrelatie van de fouten worden op dit moment niet uitgesloten. Aangezien de index een 3-maandelijks voortschrijdend gemiddelde weergeeft, is autocorrelatie te verwachten. We schatten het model consistent met OLS en verkrijgen de volgende resultaten:

| Regression statistics | | | |
|------------------------------|--|----------|--|
| Standard error | | 0.006921 | |
| Observations | | 144 | |

| Coefficient | Estimate | Standard error | P-value |
|--------------------|-----------------|-----------------------|----------------|
| μ | 0.005611 | 0.000577 | 0.0000 |

Tabel 3.C.1: Schattingen voor een regressie op de rendementen en de tijd

We onderzoeken we de aanname dat de fouten normaal verdeeld zijn, d.m.v. een Q-Q plot:



Grafiek 3.C.1: Q-Q plot van de residuen

Op één zichtbare uitschieter na is er geen reden om aan te nemen dat de residuen niet normaal verdeeld zijn. Een mogelijke toets voor normaliteit is de Kolmogorov-Smirnov statistiek. Indien we deze toetsingsgrootte uitrekenen voor de gestandaardiseerde data en toetsen voor standaardnormaliteit, blijkt dat de overschrijdingskans van deze grootte in deze dataset gelijk is aan 0.975. Op grond van deze statistiek is normaliteit zeker gerechtvaardigd.

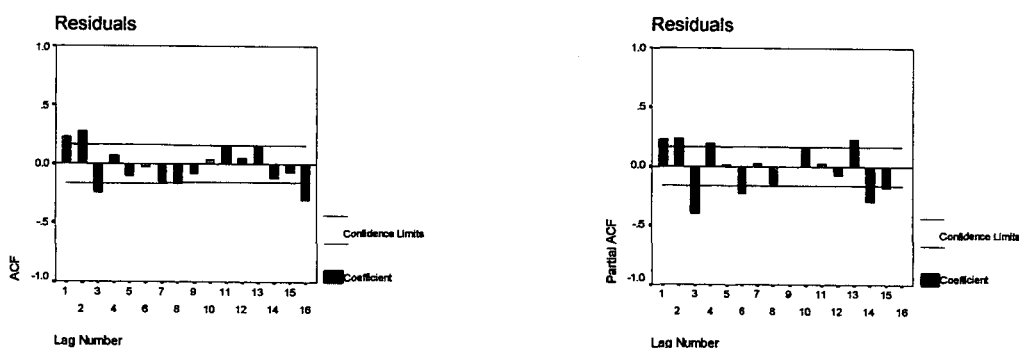
De laatste stap is het onderzoeken van autocorrelaties in de residuen. Onderzoek naar de oorspronkelijke index, waarin nog geen 3-maandelijkse voortschrijdend gemiddelde is genomen, levert dat de eerste autocorrelatie voor de meeste indices negatief is. Een negatieve eerste orde autocorrelatie wordt ook teruggevonden bij rendementen op aandelen, zie bijvoorbeeld Campbell, Lo and McKinlay [1997]. Stel we hebben nu de beschikking over een rij stochasten X_1, \dots, X_n , welke alle uit dezelfde verdeling komen. Er geldt $\text{Corr}(X_t, X_{t-1}) = \rho$, de overige autocorrelaties zijn gelijk aan nul. Indien $\rho < 0$ komt dit overeen met de rendementen op de originele index. In het algemeen zijn de rendementen op een 3-maandelijkse voortschrijdend gemiddelde index niet gelijk aan de 3-maandelijkse voortschrijdende gemiddelde rendementen op de originele index. Voor de onderzochte data liggen deze echter zeer dicht bij elkaar. Derhalve bekijken we de reeks Y :

$$Y_t = \frac{1}{3}(X_{t-2} + X_{t-1} + X_t)$$

We kunnen laten zien dat voor $\rho(t) = \text{Corr}(Y_t, Y_{t-1})$ het volgende geldt:

$$\rho(1) = \frac{2+4\rho}{3+4\rho} \quad \rho(2) = \frac{1+2\rho}{3+4\rho} \quad \rho(3) = \frac{\rho}{3+4\rho}$$

De overige autocorrelaties van deze reeks zijn gelijk aan nul. Daar $3+4\rho$ groter dan nul moet zijn, vanwege een positieve variantie, kunnen we verwachten dat in ieder geval de derde autocorrelatie negatief zal zijn. Na het fitten van een MA(1) model voor het seizoensdeel, zien de geschatte autocorrelaties en partiële autocorrelaties (SACF en SPACF) er als volgt uit:



Grafiek 3.C.2: SACF en SPACF plots voor de residuen

Op grond van deze twee grafieken lijkt een MA(3) model voor deze residuen gerechtvaardigd. De autocorrelaties zijn niet significant na de derde lag (m.u.v. de zestiende), terwijl dit bij de partiële autocorrelaties wel nog het geval is. We veronderstellen derhalve het volgende ARIMA (0,0,3)(0,0,1)₁₂ model voor de residuen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \theta_3 L^3)(1 + \theta_{12} L^{12})u_t \\ &= u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \theta_3 u_{t-3} + \theta_{12} u_{t-12} + \theta_1 \theta_{12} u_{t-13} + \theta_2 \theta_{12} u_{t-14} + \theta_3 \theta_{12} u_{t-15} \\ u_t &\sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d. in time}\end{aligned}$$

Hierbij is L de lag-operator, namelijk $Lu_t = u_{t-1}$.

Na aanpassing van het model worden de volgende resultaten verkregen:

| Model statistics | | | |
|-------------------------|--|----------|--|
| Standard error | | 0.008162 | |
| Observations | | 144 | |

| Coefficient | Estimate | Standard error | P-value |
|--------------------|-----------------|-----------------------|----------------|
| θ_1 | 0.464546 | 0.074657 | 0.00000 |
| θ_2 | 0.402276 | 0.077642 | 0.00001 |
| θ_3 | -0.459433 | 0.076085 | 0.00000 |
| θ_{12} | 0.333282 | 0.084850 | 0.00013 |

Tabel 3.C.2: Schattingen bij aanpassing van een MA(3) model

De rendementen op de huizenprijsindex blijken voor de periode 1986-1997 (en de periode 1993-1999 voor de Kadaster indices) goed beschreven te kunnen worden als een constant rendement met fouttermen welke een ARMA proces volgen.

3.C.2. Model voor alle indices

In de vorige paragraaf is beschreven hoe de rendementen op de huizenprijsindex voor de periode 1986-1997 gemodelleerd kunnen worden. Iets dat niet beschreven is, is de afhankelijkheid tussen de verscheidene indices. Dat de huizenprijsindices inderdaad van elkaar afhangen kan gezien worden in de Appendix - Huizenprijsindices. Hoewel de groeisnelheid van de indices per regio en woningtype verschilt, is het algemene beeld van dalingen en stijgingen wel min of meer hetzelfde.

De rendementen zullen dus in zekere mate van elkaar afhangen. Voor de indices afzonderlijk zal het ARMA model uit de vorige paragraaf gehandhaafd worden; het model wordt verder uitgebreid door toe te staan dat de fouttermen voor de verschillende indices onderling gecorreleerd zijn. Het uiteindelijke VARMA model is dientengevolge:

$$\begin{aligned}r_{it} &= \alpha_i + \varepsilon_{it} \\ \varepsilon_{it} &= (1 + \theta_{i1} L + \theta_{i2} L^2 + \theta_{i3} L^3)(1 + \theta_{i12} L^{12})u_{it} \\ u_{it} &\sim N(0, \sigma_i^2) \\ \text{Corr}(u_{it}, u_{jt}) &= \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}\end{aligned}$$

Modelschattingen voor dit model geven we in de volgende paragraaf.

3.C.3. Modelschattingen

Het VARMA model uit de vorige paragraaf is op zowel de NVM indices als op de Kadaster indices geschat. Voor de NVM indices is de periode 1986-1997 bekeken. Voor de Kadaster indices was data beschikbaar vanaf maart 1993 - september 1999.

NVM Indices

| | | α | θ_1 | θ_2 | θ_3 | θ_{12} | σ |
|----------------------|--------------|----------|------------|------------|------------|---------------|----------|
| Appartementen | Noord | 0.005172 | 0.08 * | 0.11 | -0.80 | 0.15 | 0.0203 |
| | Oost | 0.001883 | 0.11 | 0.13 | -0.74 | 0.26 | 0.0205 |
| | Rand | 0.007264 | 0.18 | 0.25 | -0.76 | 0.19 | 0.0169 |
| | West | 0.003870 | 0.27 | 0.32 | -0.68 | 0.13 * | 0.0124 |
| | Zuid | 0.005719 | 0.17 | -0.02 * | -0.75 | 0.30 | 0.0257 |
| Woningen | Noord | 0.004010 | 0.32 | 0.25 | -0.69 | 0.21 | 0.0100 |
| | Oost | 0.005169 | 0.45 | 0.44 | -0.48 | 0.18 | 0.0074 |
| | Rand | 0.006021 | 0.15 | 0.16 | -0.76 | 0.19 | 0.0157 |
| | West | 0.005265 | 0.47 | 0.41 | -0.48 | 0.40 | 0.0082 |
| | Zuid | 0.004953 | 0.44 | 0.26 | -0.55 | 0.31 | 0.0084 |

* = not significant at a 0.05-level

Correlatiematrix:

| | | Appartementen | | | | | Woningen | | | | |
|----------------------|--------------|---------------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|-------|-------|
| | | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | Noord | Oost | Rand | West | Zuid |
| Appartementen | Noord | 1.00 | -0.05 | 0.01 | 0.19* | 0.20* | 0.19* | 0.02 | 0.06 | -0.03 | -0.06 |
| | Oost | -0.05 | 1.00 | -0.07 | 0.20* | -0.05 | -0.04 | 0.17* | 0.11 | 0.08 | -0.05 |
| | Rand | 0.01 | -0.07 | 1.00 | 0.00 | 0.10 | 0.24* | 0.10 | 0.03 | 0.08 | 0.08 |
| | West | 0.19* | 0.20* | 0.00 | 1.00 | 0.08 | 0.15 | 0.05 | 0.16 | 0.15 | 0.20* |
| | Zuid | 0.20* | -0.05 | 0.10 | 0.08 | 1.00 | 0.07 | -0.01 | -0.04 | -0.12 | 0.06 |
| Woningen | Noord | 0.19* | -0.04 | 0.24* | 0.15 | 0.07 | 1.00 | 0.24* | 0.11 | 0.20* | 0.28* |
| | Oost | 0.02 | 0.17 | 0.10 | 0.05 | -0.01 | 0.24* | 1.00 | 0.18* | 0.11 | 0.3* |
| | Rand | 0.06 | 0.11* | 0.03 | 0.16 | -0.04 | 0.11 | 0.18* | 1.00 | 0.21* | 0.15 |
| | West | -0.03 | 0.08 | 0.08 | 0.15 | -0.12 | 0.20* | 0.11 | 0.21* | 1.00 | 0.24* |
| | Zuid | -0.06 | -0.05 | 0.08 | 0.20* | 0.06 | 0.28* | 0.30* | 0.15 | 0.24* | 1.00 |

* = significant at a 0.05-level

Kadaster Indices

| | | α | θ_1 | θ_2 | θ_3 | θ_{12} | σ |
|----------------------|------------------|----------|------------|------------|------------|---------------|----------|
| Appartementen | Noord | 0.005724 | -0.15 | 0.00 * | -0.82 | 0.17 * | 0.0194 |
| | Oost | 0.009459 | 0.15 | 0.03 * | -0.65 | -0.50 | 0.0122 |
| | Rand | 0.009713 | 0.37 | 0.38 | -0.46 | 0.36 | 0.0091 |
| | West | 0.008079 | 0.25 | 0.40 | -0.56 | -0.25 | 0.0084 |
| | Zuid | 0.009118 | -0.03 | 0.27 | -0.73 | 0.38 | 0.0094 |
| Woningen | Noord | 0.007677 | 0.55 | 0.44 | -0.50 | 0.45 | 0.0080 |
| | Oost | 0.008567 | 0.27 | 0.36 | -0.39 | 0.65 | 0.0060 |
| | Rand | 0.009829 | 0.08 * | 0.13 * | -0.27 | 0.84 | 0.0101 |
| | West | 0.009018 | 0.21 | 0.40 | -0.22 | 0.77 | 0.0056 |
| | Zuid | 0.008545 | 0.32 | 0.43 | -0.31 | 0.45 | 0.0055 |
| Appartementen | Nederland | 0.008754 | 0.58 | 0.39 | -0.52 | -0.28 | 0.0050 |
| Woningen | Nederland | 0.008698 | 0.43 | 0.40 | -0.13 * | 0.51 | 0.0045 |

* = not significant at a 0.05-level

Correlatiematrix:

| | | Appartementen | | | | | Woningen | | | | | Nederland | |
|----------------------|--------------|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------------|-------------|
| | | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | App. | Won. |
| Appartementen | Noord | 1.00 | 0.12 | 0.09 | 0.03 | 0.23 * | -0.13 | -0.10 | 0.15 | -0.11 | -0.15 | 0.22 | -0.13 |
| | Oost | 0.12 | 1.00 | -0.09 | -0.20 | -0.02 | -0.07 | 0.03 | -0.03 | -0.09 | -0.02 | 0.22 | -0.08 |
| | Rand | 0.09 | -0.09 | 1.00 | 0.11 | 0.25 * | 0.00 | 0.06 | 0.13 | 0.02 | 0.17 | 0.55 * | 0.11 |
| | West | 0.03 | -0.20 | 0.11 | 1.00 | 0.11 | 0.48 * | 0.15 | 0.09 | 0.16 | 0.16 | 0.33 * | 0.29 * |
| | Zuid | 0.23 * | -0.02 | 0.25 * | 0.11 | 1.00 | -0.03 | 0.15 | 0.25 * | 0.03 | 0.15 | 0.44 * | 0.11 |
| Woningen | Noord | -0.13 | -0.07 | 0.00 | 0.48 * | -0.03 | 1.00 | 0.29 * | 0.13 | 0.44 * | 0.38 * | 0.11 | 0.56 * |
| | Oost | -0.10 | 0.03 | 0.06 | 0.15 | 0.15 | 0.29 * | 1.00 | 0.30 * | 0.34 * | 0.47 * | 0.07 | 0.61 * |
| | Rand | 0.15 | -0.03 | 0.13 | 0.09 | 0.25 * | 0.13 | 0.30 * | 1.00 | 0.30 * | 0.25 * | 0.12 | 0.36 * |
| | West | -0.11 | -0.09 | 0.02 | 0.16 | 0.03 | 0.44 * | 0.34 * | 0.30 * | 1.00 | 0.43 * | 0.06 | 0.72 * |
| | Zuid | -0.15 | -0.02 | 0.17 | 0.16 | 0.15 | 0.38 * | 0.47 * | 0.25 * | 0.43 * | 1.00 | 0.01 | 0.81 * |
| Nederland | App. | 0.22 | 0.22 | 0.55 * | 0.33 * | 0.44 * | 0.11 | 0.07 | 0.12 | 0.06 | 0.01 | 1.00 | 0.09 |
| | Won. | -0.13 | -0.08 | 0.11 | 0.29 * | 0.11 | 0.56 * | 0.61 * | 0.36 * | 0.72 * | 0.81 * | 0.09 | 1.00 |

* = significant at a 0.05-level

Wat deze schattingen impliceren voor de gemiddelde stijging van de index wordt besproken in paragraaf 3.6.

3.D. Tijdreeksen onder veranderende regimes

Veel tijdreeksen ondergaan perioden waarin het gedrag van de tijdreeksen verandert. Wat betreft de tijdreeksen van de logaritmische rendementen op de huizenprijsindex, zien we dat er in het dalende gedeelte van de huizenprijsindex, ongeveer van augustus 1978 tot en met december 1981, hiervan sprake zou kunnen zijn. Dalingen voor de toekomst zijn ook mogelijk, waardoor het verstandig kan zijn om een dergelijk model te kiezen voor de huizenprijsindex. In deze paragraaf bekijken we hoe een eenvoudige vorm van dit soort tijdreeksen gemodelleerd kan worden. We volgen hierbij de opzet van Hamilton [1994].

3.D.1. Modelling

We gaan uit van het volgende algemene model voor een tijdreeks:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_{X_t} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.} \end{aligned} \tag{3.D.1}$$

Het gemiddelde van de tijdreeks worden bepaald door de toestand X_t waarin het proces zich op tijdstip t bevindt; dit proces wordt onafhankelijk van de fouttermen verondersteld. We nemen aan dat de standaarddeviatie van de fouten constant is, gezien de bevindingen in paragraaf 3.5. Er wordt vanuit gegaan dat het proces X_t een Markov keten volgt, waarvan de elementen van de overgangsmatrix P aan de volgende vergelijking voldoen:

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i, X_{t-2} = k, \dots) = P(X_t = j | X_{t-1} = i) = p_{ij}$$

We zullen in deze paragraaf aannemen dat het proces in twee toestanden kan verkeren, een down-state (0) en een up-state (1). De overgangsmatrix heeft dus de volgende vorm:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

Hierbij is p_{ij} de kans dat de de Markov-keten overgaat van toestand i naar j . We nemen aan dat $p_{01} = 1 - p_{00}$ en $p_{11} = 1 - p_{10}$. Indien we met $\pi = p_{00} + p_{11} - 1$ weergeven en aannemen dat $0 < p_{00} < 1$, $0 < p_{11} < 1$ en $\pi < 1$, kunnen we met inductie laten zien dat de volgende betrekking geldt:

$$P^t = \frac{1}{1-\pi} \begin{pmatrix} 1 - p_{11} + (1 - p_{00})\pi^t & (1 - p_{00})(1 - \pi^t) \\ (1 - p_{11})(1 - \pi^t) & 1 - p_{00} + (1 - p_{11})\pi^t \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt direct:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^t = \frac{1}{1-\pi} \begin{pmatrix} 1 - p_{11} & 1 - p_{00} \\ 1 - p_{11} & 1 - p_{00} \end{pmatrix}$$

De evenwichtsverdeling is gelijk aan $(p_0, p_1) = \frac{1}{1-\pi}(1-p_{11}, 1-p_{00})$. We zullen overal aannemen dat het systeem zich in evenwicht bevindt. Een tweede aanname die gedaan zal moeten worden, is of de toestand waarin het proces zich bevindt observeerbaar is. Aangezien we niet geheel zeker weten wanneer de huizenmarkt zich in welke toestand bevindt, zullen we voor zowel observeerbare als niet-observeerbare toestanden schattingen afleiden.

Parameterschattingen: observeerbare toestand

Indien de toestand waarin het proces verkeert observeerbaar is, kunnen de schattingen voor de parameters eenvoudig verkregen worden. Voor de MLE schatters gelden dan uiteraard de volgende betrekkingen:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_i &= \frac{1}{\#\{t: X_t=i\}} \sum_{t: X_t=i} r_t \\ \hat{\sigma}^2 &= \sum_t (r_t - \hat{\mu}_{X_t})^2 \\ p_{ii} &= 1 - \frac{1}{\#\{t: X_t=i\}} \end{aligned} \tag{3.D.2}$$

Parameterschattingen: onobserveerbare toestand

Dit is de opzet die ook in Hamilton [1994] teruggevonden kan worden. Deze aanpak heeft ook hier zijn voordelen: we kunnen immers achteraf niet voor elk tijdstip met zekerheid vaststellen in welke toestand het proces zich toen bevond. In grafiek 1 wordt dit direct zichtbaar: het lijkt aannemelijk dat het proces zich in de periode augustus 1977 - december 1981 in een down-state bevond. Maar waarom zou het niet kunnen dat deze down-state een maand later begonnen is?

Om een schattingsprocedure te verkrijgen gaan we er in eerste instantie van uit dat de vector met parameters $\theta = (\mu_0, \mu_1, \sigma, p_{00}, p_{11})$ bekend is. Hoewel deze parameters bekend zijn, is de toestand X_t nog altijd niet observeerbaar. Het blijkt wel mogelijk te zijn kansen toe te kennen aan elk van deze toestanden. We definiëren de volgende kansen:

$$\begin{aligned} \xi_{it}^i &= P(X_t = i | \mathcal{F}_t, \theta) \\ \eta_t^i &= f(y_t | X_t = i, \mathcal{F}_t, \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_t - \mu_i)^2} \end{aligned} \tag{3.D.3}$$

Hierbij is θ de vector met de parameters μ , σ en P , en is $\mathcal{F}_t = \{r_i | i \leq t\}$ alle informatie over het proces tot en met tijdstip t . De kansen ξ_{it}^i geven aldus de kans weer dat, gegeven de informatie tot en met tijdstip t , het proces zich in toestand i bevond. De relatie tussen deze kansen volgt uit Hamilton:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{it}^i &= \frac{\hat{\xi}_{it}^i \cdot \eta_t^i}{\sum_j \hat{\xi}_{it}^j \cdot \eta_t^j} \\ \hat{\xi}_{t+1t}^i &= P^T \hat{\xi}_{it}^i \end{aligned} \tag{3.D.4}$$

De kansen $\hat{\xi}_{t+1|t}^i$ geven de kans weer dat het systeem zich op tijdstip $t+1$ in toestand i bevond, gegeven de informatie tot en met tijdstip t . Aangezien we aannemen dat het proces in evenwicht is, kunnen al deze kansen berekend worden door te observeren dat $\hat{\xi}_{1|0} = (p_0, p_1)$.

Hamilton gebruikt zogenaamde *smoothed inferences* voor de schatting der parameters. Een smoothed kans $\hat{\xi}_{t|T}^i$ geeft de kans weer dat het systeem zich op tijdstip t in toestand i bevond, gegeven alle waarnemingen $(r_t, t = 1 \dots T)$ die tot nu toe beschikbaar zijn.

De smoothed inferences voldoen aan de volgende betrekking:

$$\hat{\xi}_{t|T}^i = \hat{\xi}_{t|t}^i \cdot \sum_j p_{ij} \frac{\hat{\xi}_{t+1|T}^j}{\hat{\xi}_{t+1|t}^j} \quad (3.D.5)$$

en kunnen alle berekend worden met behulp van $\hat{\xi}_{1|T}^i$, welke uit (3.D.3) volgt.

We zijn er nu steeds van uitgegaan dat de vector met parameters θ volledig bekend is. Ons doel echter is om schattingen te verkrijgen voor deze parameters. Uit de schatters die Hamilton opgesteld heeft voor een algemener model volgen na enige berekeningen de volgende schatters voor het eerder geformuleerde model:

$$\hat{p}_{ij}^{(n+1)} = \frac{\sum_t P(X_t = j, X_{t-1} = i | \mathcal{F}_t, \theta^{(n)})}{\sum_t P(X_{t-1} = i | \mathcal{F}_t, \theta^{(n)})} = \frac{\sum_t \hat{\xi}_{t|T}^{(n)j} \cdot \hat{p}_{ij}^{(n)} \cdot \frac{\hat{\xi}_{t-1|t-1}^{(n)i}}{\hat{\xi}_{t|t-1}^{(n)j}}}{\sum_t \hat{\xi}_{t-1|T}^{(n)i}} \quad (3.D.6)$$

$$\hat{\mu}_i^{(n+1)} = \frac{\sum_t y_t \hat{\xi}_{t|T}^{(n)i}}{\sum_t \hat{\xi}_{t|T}^{(n)i}}$$

$$\hat{\sigma}_i^{2(n+1)} = \frac{\sum_{i,t} (y_t - \hat{\mu}_i^{(n+1)})^2 \hat{\xi}_{t|T}^{(n)i}}{\sum_{i,t} \hat{\xi}_{t|T}^{(n)i}}$$

Een iteratieve procedure voor het berekenen van de MLE schatters voor dit model is dan ook de volgende:

1. Maak een initiële schatting voor $\theta^{(0)}$, bijv. aan de hand van vergelijking (3.D.2).
2. Bereken met behulp van $\theta^{(n)}$ en vergelijkingen (3.D.4), (3.D.5) en (3.D.6) $\theta^{(n+1)}$.
3. Herhaal stap 2 totdat een bepaald convergentie criterium is bereikt.

Dit algoritme blijkt een speciaal geval van het EM principe te zijn, dat ontwikkeld is door Dempster, Laird en Rubin [1977]. Er blijkt dat de likelihood functie in elke iteratie van het algoritme groter wordt.

3.D.2. Resultaten

Het tijdreeksmodel uit (3.D.1) is onder beide aannamen omtrent de observeerbaarheid van de toestand van het proces aangepast. Aangezien de schattingen voor de gemiddelde stijging van de index over de komende tien jaar niet veel verschilden bij beide aannamen, gebruiken we in de rest van het verhaal dan ook het eenvoudigere model, waarin de toestand achteraf bepaald kan worden.

We zullen voor elk tijdstip van 1974 - 1997 aan moeten geven of de huizenprijsindex zich in een down-state of een up-state bevond. Eerder in deze appendix zijn drie verschillende tijdsvakken geanalyseerd van de huizenprijsindex. De periode augustus 1977 - december 1981 bleek duidelijk een periode te zijn waarin de huizenprijsindex daalde; het ligt dan ook voor de hand om deze periode als down-state te nemen. Gezien het zeer geringe aantal waarnemingen voor deze periode, nemen we de periode januari 1974 - juli 1977 niet in beschouwing. De periode 1982 - 1997 fungeert dan automatisch als up-state.

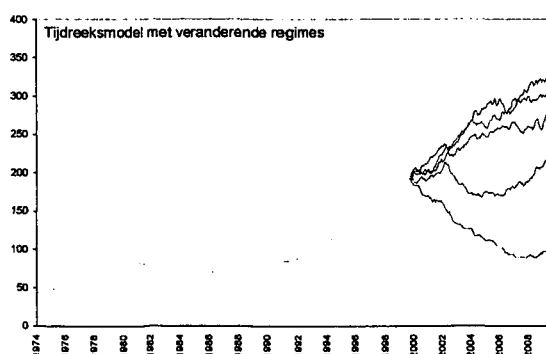
Hieruit blijkt ook direct het grootste probleem van het fitten van dit changes in regime model op deze dataset: in de dataset is er één, hooguit twee keer gewisseld tussen een up- en een down-state, hetgeen de schattingen voor de overgangskansen verre van robuust maakt. De volatiliteit van de rendementen hebben we ook m.b.v. (3.D.2) geschat; na gecorrigeerd te hebben voor het aantal waarnemingen waarop de index gebaseerd is. Hierbij merken we op dat er bij het berekenen van de volatiliteit genormeerd is¹⁵ naar het aantal transacties waarop de Kadaster index gebaseerd zou zijn, daar in de toekomst de indices gebaseerd zullen zijn op het Kadaster transactiebestand. De overige schattingen op basis van vergelijking (3.D.6) zijn nu:

| | <i>down-state (i = 0)</i> | <i>up-state (i = 1)</i> |
|------------|---------------------------|-------------------------|
| μ_i | -0.00811 | 0.00392 |
| σ_i | 0.01157 | 0.01157 |
| p_{ii} | 0.98113 | 0.99480 |

Tabel 3.D.1: Parameterschattingen indien toestand observeerbaar

Concreet betekenen deze schattingen dat de duur van een down-state gemiddeld zo'n 4.5 jaar is, terwijl een up-state gemiddeld 16 jaar duurt. Gemiddeld zal de index over één jaar zo'n 1.83% stijgen, terwijl de index over een periode van 10 jaar gemiddeld 26% zal stijgen.

In onderstaande grafiek staan, samen met de index over de periode 1974-1997, een aantal mogelijke realisaties afgebeeld voor de periode 1998-2007.



Grafiek 3.D.1: Mogelijke realisaties voor de huizenprijsindex voor 1998-2007

¹⁵ Zie de paragraaf 3.5.2. Volatiliteit van de tijdreeks.

3.D.3. Model voor alle indices

Zoals ook bij het ARMA model het geval was, is het nodig om aan te geven hoe de verschillende indices van elkaar afhangen. We zullen ook hier toestaan dat de residuen onderling gecorreleerd zijn. Verder nemen we aan dat de toestand van het proces voor alle indices hetzelfde is; de toestand van de economie beïnvloedt alle huizenprijsindices op gelijke wijze. Het model wordt diensgevolge:

$$r_{it} = \mu_{x_i} + \varepsilon_{it}$$

$$\varepsilon_{it} \sim N(0, \sigma_i^2) \text{ i.i.d. in time}$$

$$\text{Corr}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

Voor het schatten van de correlatie kunnen we de residuen gebruiken die gecorrigeerd zijn volgens de in de paragraaf 3.5.2. *Volatiliteit van de tijdreeks* aangegeven procedure.

3.D.4. Modelschattingen

De duur van de down-state is gemiddeld 53 maanden; de up-state duurt gemiddeld 192 maanden. Dit levert voor $p_{00} = 0.98113$ en $p_{11} = 0.99479$. De schattingen voor het gemiddelde rendement in elke state en de volatiliteit van de fouttermen zijn in onderstaande tabel vermeld:

| | | μ_0 | μ_1 | σ |
|----------------------|--------------|------------|-----------|-----------|
| Appartementen | Noord | 0.0005642 | 0.0051180 | 0.0207079 |
| | Oost | -0.0022205 | 0.0048824 | 0.0202318 |
| | Rand | -0.0032575 | 0.0044528 | 0.0143096 |
| | West | -0.0060222 | 0.0043907 | 0.0164860 |
| | Zuid | 0.0046668 | 0.0032318 | 0.0178150 |
| Woningen | Noord | -0.0019081 | 0.0035612 | 0.0109095 |
| | Oost | -0.0058680 | 0.0039492 | 0.0091765 |
| | Rand | -0.0060821 | 0.0044746 | 0.0210142 |
| | West | -0.0081088 | 0.0039168 | 0.0128680 |
| | Zuid | -0.0042544 | 0.0039464 | 0.0074812 |
| Nederland | App. | -0.0027791 | 0.0045855 | 0.0101626 |
| | Won. | -0.0057170 | 0.0039185 | 0.0081813 |

De correlatiematrix tussen de residuen is de volgende:

| | | Appartementen | | | | | Woningen | | | | | Nederland | |
|----------------------|--------------|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------------|-------------|
| | | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | App. | Won. |
| Appartementen | Noord | 1 | 0.09* | 0.12* | 0.08* | 0.16 | 0.18 | 0.07* | 0.03* | 0.05* | 0.01* | 0.33 | 0.08* |
| | Oost | 0.09* | 1 | 0.05* | 0.16 | -0.01* | 0.14 | 0.21 | 0.14 | 0.13 | 0.01* | 0.41 | 0.16 |
| | Rand | 0.12* | 0.05* | 1 | 0.15 | 0.12* | 0.21 | 0.20 | 0.06* | 0.16 | 0.12* | 0.72 | 0.21 |
| | West | 0.08* | 0.16 | 0.15 | 1 | 0.04* | 0.08* | 0.17 | 0.13* | 0.16 | 0.21 | 0.54 | 0.22 |
| | Zuid | 0.16 | -0.01* | 0.12* | 0.04* | 1 | -0.00* | 0.03* | 0.03* | -0.03* | -0.08* | 0.50 | -0.03* |
| Woningen | Noord | 0.18 | 0.14 | 0.21 | 0.08* | -0.00* | 1 | 0.40 | 0.24 | 0.37 | 0.38 | 0.22 | 0.63 |
| | Oost | 0.07* | 0.21 | 0.20 | 0.17 | 0.03* | 0.40 | 1 | 0.36 | 0.43 | 0.42 | 0.26 | 0.73 |
| | Rand | 0.03* | 0.14 | 0.06* | 0.13* | 0.03* | 0.24 | 0.36 | 1 | 0.32 | 0.17 | 0.14 | 0.47 |
| | West | 0.05* | 0.13 | 0.16 | 0.16 | -0.03* | 0.37 | 0.43 | 0.32 | 1 | 0.40 | 0.18 | 0.81 |
| | Zuid | 0.01* | 0.01* | 0.12* | 0.21 | -0.08* | 0.38 | 0.42 | 0.17 | 0.40 | 1 | 0.11* | 0.75 |
| Nederland | App. | 0.33 | 0.41 | 0.72 | 0.54 | 0.50 | 0.22 | 0.26 | 0.14 | 0.18 | 0.11* | 1 | 0.25 |
| | Won. | 0.08* | 0.16 | 0.21 | 0.22 | -0.03* | 0.63 | 0.73 | 0.47 | 0.81 | 0.75 | 0.25 | 1 |

* = not significant at a 0.95-level (two-tailed)

Wat deze schattingen betekenen voor de gemiddelde stijging van de index over de komende jaren, wordt in paragraaf 3.6. *Modellering Huizenprijsindex* bekeken. Tevens worden daar de twee in deze appendix bekeken modellen met elkaar vergeleken.

Appendix 4 – Optiewaarderingsmodel

Deze appendix bevat de volgende subappendices, alle behorende bij hoofdstuk 4:

A – Het waarderen van Europese derivaten in continue tijd

B – Het waarderen van Europese derivaten in discrete tijd

C – Stochastische calculus

4.A. Het waarderen van Europese derivaten in continue tijd

Deze subappendix heeft als onderwerp het waarderen van Europese derivaten in continue tijd. De markt die we beschouwen bestaat uit een obligatie, die een risicovrije rentevoet uitbetaalt, en verscheidene aandelen. Als de aandelen verhandeld worden, kunnen hun onderlinge prijsprocessen geobserveerd worden. We zullen hier aannemen dat deze prijsprocessen geometrische Brownse bewegingen zijn. Aandelen die niet verhandeld worden zullen ook in beschouwing worden genomen; in dit geval zal een grootheid geobserveerd kunnen worden die de waarde van dit aandeel weergeeft; ook hier nemen we aan dat dit proces een geometrische Brownse beweging is. De eerste twee paragrafen van deze subappendix behandelen twee bekende waarderingsmethoden voor derivaten; de eerste paragraaf behandelt *expectation pricing*, hetgeen gebruikt kan worden als de onderliggende waarde van het derivaat niet verhandeld wordt. In feite is dit de waarderingsmethode die voor derivaten gebruikt werd voordat de techniek uit de tweede paragraaf bekend werd: *Black-Scholes*, of *arbitrage pricing*.

Deze twee technieken dienen als een introductie in de technieken van het waarderen van derivaten. In de derde paragraaf introduceren we *partial pricing*. Hier is het probleem als volgt: we willen een redelijke prijs afleiden voor een derivaat, waarvan de onderliggende waarde niet wordt verhandeld. De Black-Scholes techniek kan hier niet toegepast worden, zodat een toevlucht gezocht kan worden tot *expectation pricing*. We laten zien dat als er aandelen in de markt zijn die gecorreleerd zijn met de niet verhandelde onderliggende waarde, het verstandig kan zijn om deze aandelen te gebruiken, om zich in te dekken tegen het risico waaraan men blootgesteld wordt. Tot onze wetenschap is deze techniek nog niet in de literatuur behandeld. De situatie waar de markt bestaat uit verhandelde en niet verhandelde aandelen is bijvoorbeeld door Björk [1998] bekeken. In dit artikel wordt echter geen prijs afgeleid voor derivaten op zogenaamde *non-tradables*. Uiteraard bestaat er in de situatie die we bekijken niet zoiets als *de* juiste prijs. In sommige situaties zal er echter wel degelijk een vraag naar derivaten op niet verhandelde aandelen bestaan (derivaten op het weer zijn hier een voorbeeld van). Derhalve is het belangrijk om te weten hoe een redelijke prijs voor dit soort derivaten kan worden afgeleid.

De vierde paragraaf beschouwt de *hedging error*, welke veroorzaakt wordt door *partial pricing*. Black-Scholes pricing levert een strategie op om een derivaat te repliceren, welke slechts bij aankoop van het contract een bepaalde hoeveelheid geld nodig heeft; door dit bedrag in de onderliggende waarde en de risicovrije obligatie te investeren, kan het derivaat exact worden gerepliceerd. Er is geen additionele hoeveelheid geld nodig. Bij *partial pricing* is dit niet mogelijk; de *hedging error* nu is die extra hoeveelheid geld, die we tijdens de looptijd van het derivaat nodig hebben om het te repliceren.

We sluiten af met een voorbeeld, waarin we alle drie de prijzings technieken demonstreren. In dit voorbeeld blijkt *partial pricing* een substantiële verbetering te zijn op *expectation pricing*, indien de onderliggende waarde van het derivaat niet wordt verhandeld.

4.A.1. Expectation pricing

Veel boeken over financiële calculus, zoals Baxter en Rennie [1996], beginnen door op te merken hoe een wiskundige zonder enige kennis over de financiële wereld een Europees derivaat zou waarderen. De redenering is erg eenvoudig en zeer plausibel: bekijk de verwachte waarde van de uitbetaling op de expiratedatum, en verdisconteer dit bedrag om te corrigeren voor de tijdwaarde van geld. Als we deze hoeveelheid geld in een obligatie investeren die een risicovrije voet uitbetaalt, levert deze strategie naar verwachting hetzelfde bedrag op als de uitbetaling van het derivaat.

Als de onderliggende waarde echter zonder kosten in willekeurige hoeveelheden verhandeld kan worden, gaat deze redenering hopeloos de mist in. De reden hiervoor wordt in de volgende paragraaf duidelijk. Als echter de onderliggende niet wordt verhandeld, en er geen aandelen zijn die gecorreleerd zijn met de onderliggende, lijkt de verdisconteerde verwachte uitbetaling een redelijke prijs te zijn voor het derivaat. Dit is niet verschillend van de wijze waarop derivaten in de jaren zestig geprijsd werden, voor de afleiding van de Black-Scholes formule. Zie bijvoorbeeld Sprenkle [1964], Boness [1964] en Samuelson [1965]. Een kort overzicht van deze waarderingsmethoden wordt gegeven in Smithson [1998].

In deze subappendix wordt aangenomen dat de onderliggende waarde van het derivaat een geometrische Brownse beweging volgt, met een constante drift en volatiliteit, m.a.w.:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t$$

Wanneer de uitbetaling op de expiratedatum T gelijk is aan $F(T, S_T)$, is de *expectation price* op tijdstip t gelijk aan de volgende uitdrukking:

$$V_t = e^{-\pi} E[F(T, S_T) | \mathcal{F}_t]$$

waarbij τ de tijd tot de expiratedatum weergeeft, $T-t$. Een geometrische Brownse beweging voor de onderliggende waarde impliceert het volgende:

$$\ln \frac{S_T}{S_t} | \mathcal{F}_t \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau, \sigma^2\tau\right)$$

Voorbeeld:

Een formule voor de expectation price van een Europese call optie kan eenvoudig worden bepaald, gebruikmakend van de resultaten in de Appendix – Multilognormale verdeling:

$$c(\tau, S_t, K) = e^{-\pi + \mu\tau} S_t N(d_1) - e^{-\pi} K N(d_2)$$
$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

4.A.2. Arbitrage pricing

Zoals we in de vorige paragraaf aangaven, levert expectation pricing een verkeerde prijs op, indien de onderliggende waarde wordt verhandeld. In deze paragraaf zullen we de Black-Scholes vergelijking afleiden op een manier waarop aangetoond wordt hoe verkeerd de expectation price in dit geval is. Het argument dat we hier gebruiken om de Black-Scholes vergelijking af te leiden is niet het argument dat Black en Scholes [1973] in hun originele afleiding gebruikten. Het geeft echter wel het cruciale inzicht hoe de optie op elk moment gerepliceerd kan worden, hetgeen het mogelijk maakt om zich in te dekken tegen de risico's van dit soort contracten.

Het Black-Scholes model bestaat uit een obligatie B , welke een risicovrije voet r uitbetaalt, en een verhandelbaar aandeel S , welke een geometrische Brownse beweging volgt:

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt \\ dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t \end{aligned}$$

Zoals in de rest van deze subappendix, beschouwen we alleen Europese niet-padafhankelijke derivaten, waarbij de uitbetaling op de expiratedatum gegeven wordt door een functie $F(T, S_T)$. We zullen de waarde van het derivaat bepalen door de optie te repliceren. Het vormen van een portefeuille Π met ϕ aandelen S en ψ obligaties B , zodanig dat de waarde van deze portefeuille op de expiratedatum gelijk is aan de waarde van het derivaat, zal dit bewerkstelligen. Met andere woorden:

$$\begin{aligned} \Pi_t &= \psi_t B_t + \phi_t S_t \\ \Pi_T &= F(T, S_T) \end{aligned} \tag{4.A.1}$$

Uiteraard moeten ϕ_t en ψ_t aangepast zijn aan het Wiener proces w , m.a.w. ze mogen alleen afhangen van het verleden van S . Het zou prettig zijn als deze portefeuille *self-financing* was, m.a.w. dat er slechts bij aankoop van het contract een bepaalde hoeveelheid geld nodig is. In dit geval is deze hoeveelheid geld een goed gefundeerde prijs voor het derivaat. Deze self-financing eigenschap houdt wiskundig gezien het volgende in:

$$d\Pi_t = \psi_t dB_t + \phi_t dS_t = (\psi_t rB_t + \phi_t \mu S_t) dt + \phi_t \sigma S_t dw_t \tag{4.A.2}$$

Aangezien V_t een functie van de tijd t en de prijs van het aandeel S_t is, verkrijgen we door Itô's formule toe te passen de volgende vergelijking voor dV_t :

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dw_t \tag{4.A.3}$$

Om het derivaat te repliceren, moeten de vergelijkingen (4.A.2) and (4.A.3) met kans één gelijk zijn. Door de termen voor dt and dw_t in beide leden aan elkaar gelijk stellen, krijgen we:

$$\begin{aligned} \phi(t, S_t) &= \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) \\ \psi(t, S_t) &= \frac{1}{rB_t} \left[\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) \right] \end{aligned}$$

Door deze oplossingen in de originele definitie van de portefeuille V te substitueren, en de vergelijking enigszins te herschrijven, verkrijgen we het volgende randwaardeprobleem, welke gelijk is aan de Black-Scholes vergelijking:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) = rV(t, S_t)$$

$$V(T, S_T) = F(T, S_T)$$

Als we de corollary bij de Feynman-Kač stelling toepassen, welke in de Appendix – Stochastische Calculus gevonden kan worden, verkrijgen we het volgende voor de prijs van het derivaat op tijdstip t :

$$V_t = e^{-\pi} E_Q [F(T, S_T) | \mathcal{F}_t]$$

In deze uitdrukking is Q een kansmaat, zoals de originele kansmaat, welke we normaliter aangeven met P . Onder deze zogenaamde risico-neutrale kansmaat Q , voldoet de onderliggende waarde aan de volgende vergelijking:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dw_t \quad (4.A.4)$$

Deze kansmaat verschilt slechts hierin met P , dat de term voor dt verandert. Nu zien we waarom de expectation price geheel verkeerd is, als de onderliggende verhandeld wordt. Als de expectation price als prijs voor het derivaat wordt gebruikt, bestaat er direct een arbitrage mogelijkheid: als de expectation prijs groter is dan de Black-Scholes price, kan men het derivaat verkopen voor de expectation price, en tegelijkertijd een self-financing portefeuille opstellen, bestaande uit de obligatie en de onderliggende waarde. Het opzetten van deze portefeuille kost minder dan men ontvangt voor de verkoop van het aandeel, zodat men direct winst maakt. Op de expiratedatum heeft men één derivaat verkocht, en één derivaat gemaakt, zodat er netto niets betaald hoeft te worden. Men heeft dus een arbitrage mogelijkheid gevonden. Een gelijksoortig argument kan gebruikt worden indien de expectation price kleiner is dan de Black-Scholes price.

Voorbeeld:

Het bepalen van de Black-Scholes price is eigenlijk gelijk aan het bepalen van de expectation price. Het enige verschil is dat we doen alsof de dynamiek van de onderliggende nu gegeven wordt door (4.A.4). De Black-Scholes price voor een Europese call optie kan nu direct worden opgeschreven, door uit het voorbeeld van de vorige paragraaf μ in r te veranderen:

$$c(\tau, S_t, K) = e^{-\pi} S_t N(d_1) - KN(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

4.A.3. Partial pricing

In de laatste paragraaf werd de Black-Scholes vergelijking afgeleid, en lieten we zien hoe een Europese optie kan worden gerepliceerd door te handelen in de onderliggende waarde en een obligatie. De replicatiestrategie had alleen een initiële hoeveelheid geld nodig; tijdens de looptijd van het derivaat was geen extra geld nodig.

Eén zeer belangrijke aanname in het Black-Scholes model is het feit dat de onderliggende waarde verhandeld kan worden in willekeurige hoeveelheden. Als de onderliggende in het geheel niet verhandeld wordt, of als er zeer grote kosten verbonden zijn aan het handelen in de onderliggende, is de Black-Scholes vergelijking niet geldig. In de eerste paragraaf zagen we dat een redelijke prijs voor het derivaat dan gegeven wordt door de verdisconteerde verwachte uitbetaling. Expectation pricing levert echter een replicatiestrategie op, die naar verwachting geen additionele geldstromen nodig heeft. Het zou vrij riskant voor een bank zijn om dergelijke producten op de markt te brengen, tenzij ze *over-the-counter* verkocht worden, m.a.w. als ervoor gezorgd wordt dat er voor elke transactie een perfecte tegenpartij bestaat. In dit geval wordt de bank aan geen enkel risico blootgesteld. Er zal echter niet altijd voor elke transactie een tegenpartij gevonden kunnen worden.

Beschouw nu het geval waarin de onderliggende waarde van het derivaat als niet verhandelbaar kan worden beschouwd, maar waarin de mogelijkheid bestaat om in aandelen te handelen die gecorreleerd zijn met de onderliggende waarde. In deze situatie zal er waarschijnlijk een betere prijs bestaan voor het derivaat dan de expectation price. Tenzij één van de verhandelde aandelen perfect gecorreleerd is met de onderliggende, kan het contract niet perfect gerepliceerd worden; vandaar de naam *partial pricing*.

De vergelijkingen waaraan de markt in dit model voldoet, zijn de volgende:

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt \\ d\underline{Z}_t &= \text{diag}(\underline{Z}_t)\underline{\mu} dt + \text{diag}(\underline{Z}_t)L d\underline{w}_t \end{aligned}$$

Hier is $\underline{Z}_t = (Z_t^1, \dots, Z_t^n)^T$, waarbij de eerste n aandelen verhandelbaar zijn, en het n^e aandeel de onderliggende waarde van het derivaat is. We zullen Z_t^n alleen in sommaties gebruiken; uiteindelijk wordt het vervangen door S_t . Op eenzelfde wijze definiëren we $\underline{w}_t = (w_t^1, \dots, w_t^n)^T$, een vector van n onafhankelijke Wiener processen, $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ en L als een beneden-driehoeksmatrix, die voldoet $\Sigma = LL^T$; Σ is de covariantiematrix van de logreturns op de aandelen gedurende één tijdseenheid, en L is een deel van zijn Cholesky decompositie. Zoals in het Black-Scholes model, volgen alle aandelen een geometrische Brownse beweging.

Met het oog op vergelijking (4.A.1) definiëren we nu onze *partially replicating portfolio*:

$$\begin{aligned} \Pi_t &= \psi_t B_t + \sum_{i=1}^{n-1} \phi_t^i Z_t^i \\ E(\Pi_T) &= F(T, S_T) \end{aligned}$$

De strategie die we volgen zal hetzelfde zijn als in het Black-Scholes model: houd de posities in de obligatie en de $n-1$ verhandelbare aandelen aan voor een infinitesimale hoeveelheid tijd, en stel dan een nieuwe portefeuille samen volgens de nieuwe prijs van het derivaat. Het analogon van vergelijking (4.A.2) wordt dan:

$$d\Pi_t = \psi_t dB_t + \sum_{i=1}^{n-1} \phi_t^i dZ_t^i = \left(\psi_t r B_t + \sum_{i=1}^{n-1} \phi_t^i \mu_i Z_t^i \right) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \phi_t^j l_{ji} Z_t^j \right) d w_t^i$$

De prijs van het derivaat op elk tijdstip moet uiteraard afhangen van de tijd, de karakteristieken van alle aandelen en de huidige prijs van de onderliggende. Het zou niet logisch zijn om de prijs van het derivaat te laten afhangen van de huidige prijzen van de verhandelbare aandelen, waarmee het derivaat gerepliceerd wordt. Derhalve levert Itô's formule de volgende bewegingsvergelijking op voor het derivaat:

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial S} l_{ni} S_t dw_t^i \quad (4.A.5)$$

Merk op dat met σ de volatiliteit van de onderliggende waarde S wordt bedoeld. Met het oog op de afleiding van de Black-Scholes vergelijking, zouden we nu willen dat dV_t en $d\Pi_t$ aan elkaar gelijk zijn. Dit kan hier helaas niet bewerkstelligd worden. Er kan echter wel voor gezorgd worden dat beide naar verwachting gelijk zijn, zodat de portefeuille naar verwachting self-financing is. Het enige risico waartegen we ons niet kunnen afdekken is de n° component van de vector \underline{w}_t (het niet verhandelbare risico). We nemen verwachtingen m.b.t. deze factor:

$$d\Pi_t = E(dV_t | dZ_t^1, \dots, dZ_t^{n-1}) \quad (4.A.6)$$

Allereerst stellen we de coëfficiënten van de eerste $n-1$ Wiener termen gelijk om de volgende vergelijkingen te verkrijgen:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \phi_t^j l_{ji} Z_t^j = \frac{\partial V}{\partial S} l_{ni} S_t \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.A.7)$$

We partitioneren L en Σ als volgt:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

waarbij Σ_{22} de covariantiematrix van het aandeel S is, en Σ_{11} de covariantiematrix van de verhandelbare aandelen is. Met deze opdeling, wordt vergelijking (4.A.7):

$$L_{11}^T \text{diag}(\underline{Z}_t') \underline{\phi}_t = \frac{\partial V}{\partial S} L_{21}^T S_t$$

Hierbij is $\text{diag}(\underline{Z}_t') = \text{diag}(Z_t^1, \dots, Z_t^{n-1})$ en $\underline{\phi}_t = (\phi_t^1, \dots, \phi_t^{n-1})^T$. We vinden onmiddellijk:

$$\underline{\phi}_t^i = (L_{11}^{-T} L_{21}^T)_i \frac{S_t}{Z_t^i} \cdot \frac{\partial V}{\partial S} \quad (4.A.8)$$

We observeren dat $L_{21} L_{11}^{-1} = L_{21} L_{11}^T L_{11}^{-T} L_{11}^{-1} = \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1}$. Deze observatie zal later nuttig blijken te zijn. Uit (4.A.6) en (4.A.8) verkrijgen we het volgende voor ψ_t :

$$\psi(t, S_t) = \frac{1}{rB_t} \left[\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + (\mu_s - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \underline{\mu}_z) S_t \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) \right] \quad (4.A.9)$$

waarbij $\underline{\mu}$ gepartitioneerd is als $(\underline{\mu}_z^T, \mu_s)^T$.

Door uiteindelijk vergelijkingen (4.A.8) en (4.A.9) in de definitie van de portefeuille te substitueren, verkrijgen we het volgende randwaardeprobleem voor de *partially replicating portfolio*, en dus voor de waarde van het derivaat:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + \left((\mu_s + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (r - \underline{\mu}_z)) \right) S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) = rV(t, S_t)$$

$$V(T, S_T) = F(T, S_T)$$

Hierbij is \mathbf{v} een vector bestaande uit $n-1$ enen. Gebruikmakend van de corollary bij de Feynman-Kač stelling, verkrijgen we de volgende oplossing:

$$V_t = e^{-\pi} E_Q [F(T, S_T) | \mathcal{F}_t] \quad (4.A.10)$$

Onder de partieel risico-neutrale kansmaat Q , wordt de bewegingsvergelijking voor S :

$$dS_t = \left(\mu_s + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (r - \underline{\mu}_z) \right) S_t dt + \sigma S_t dw_t$$

Net als bij expectation pricing en arbitrage pricing, kan de prijs van het derivaat als een verdisconteerde verwachting geschreven worden. Nu moet echter de drift in de geometrische Brownse beweging veranderd worden in een term die afhangt van de covariantiematrix en het verwachte rendement op de aandelen. Om deze term te begrijpen, kunnen we de volgende stelling opzoeken uit een boek met informatie over conditionele verdelingen van multivariaat normale verdelingen, zoals bijvoorbeeld Greene [1997].

Stelling:

Als $[\underline{x}_1, \underline{x}_2] \sim N(\underline{\mu}_1^T, \underline{\mu}_2^T)^T, \Sigma)$, dan is de conditionele verdeling van \underline{x}_2 gegeven \underline{x}_1 ook normaal verdeeld, en voldoet de verwachting aan de volgende vergelijking:

$$E(\underline{x}_2 | \underline{x}_1) = \underline{\mu}_2 + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1) \quad \square$$

Wat deze stelling impliceert is dat (4.A.10) als volgt herschreven kan worden:

$$V_t = e^{-\pi} E_Q \left(E_P [F(T, S_T) | Z_T^1, \dots, Z_T^{n-1}] | \mathcal{F}_t \right),$$

waarbij onder de originele kansmaat P de bewegingsvergelijking (4.A.4) geldt. Onder Q geldt het volgende voor de $n-1$ verhandelbare aandelen, als L_i de i^e rij van L is:

$$dZ_{it} = rZ_{it} dt + L_{i\bullet} Z_{it} dw_t \quad i = 1, \dots, n-1$$

Voorbeeld.

Als $\mu_Q = \mu_s + \frac{\rho\sigma}{\sigma_z} (r - \mu_z) - \frac{1}{2}\sigma^2$, verkrijgen we de partial price voor een Europese call:

$$c(\tau, S_t, K) = e^{-\pi + \mu_Q \tau} S_t N(d_1) - e^{-\pi} KN(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (\mu_Q + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

4.A.4. Hedging Error

Als een bepaald derivaat niet perfect gehedged kan worden, is het natuurlijk belangrijk om de hedging error te bekijken. Het gedrag van de verdeling van deze grootte geeft aan hoe risicovol het verhandelen van dit derivaat kan zijn. Hier definiëren we de hedging error als de additionele hoeveelheid geld die we op de expiratedatum nodig hebben om aan de uitbetaling te kunnen voldoen. Uiteraard kan dit bedrag verdisconteerd worden naar de datum waarop het contract is verkocht; in dit geval is dit bedrag gelijk aan de fout in de berekende prijs. In deze paragraaf wordt een stochastische integraal afgeleid voor de hedging error. We beschouwen ook een speciaal geval waarin deze integraal expliciet bereken kan worden. De tweede subparagraaf versimpelt de berekeningen voor de variantie van de hedging error.

4.A.4.1. Een stochastische integraal voor de hedging error

In (4.A.5) gebruikten we Itô's formule om de bewegingsvergelijkingen te bepalen voor de prijs V van het derivaat. Bij het bepalen van de partial price van het derivaat, namen we een conditionele verwachting m.b.t. $dZ_t^1, \dots, dZ_t^{n-1}$, waardoor de term met dw_t^n verdween. Deze term is de hedging error over een infinitesimale hoeveelheid tijd. Bij het bepalen van de marginale bijdrage van deze term aan de totale hedging error, moet deze term verdisconteerd worden naar de expiratedatum. We moeten deze term dus vermenigvuldigen met $e^{r(T-t)}$. Deze redenering levert de volgende formule op voor de hedging error:

$$\varepsilon_T = \int_0^T e^{r(T-t)} I_{nm} S_t \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) dw_t^n \quad (4.A.11)$$

Helaas kan de exacte verdeling van de hedging error niet bepaald worden voor een algemeen derivaat. We zullen meestal een simulatie moeten gebruiken om de verdelingsfunctie van de hedging error te schatten, zoals in de volgende paragraaf duidelijk gemaakt zal worden aan de hand van een voorbeeld. Voor een speciaal geval, namelijk dat van expectation pricing, kan de verdeling van de hedging error expliciet bepaald worden. De expectation price van een derivaat op tijdstip 0 is eenvoudigweg gelijk aan de verdisconteerde verwachting van de uitbetaling van het derivaat. Op de expiratedatum beschikken we derhalve over $E(V_T | \mathcal{F}_0)$. De hedging error wordt dan:

$$\varepsilon_T = V_T - E(V_T | \mathcal{F}_0)$$

De volgende subparagraaf beschouwt de variantie van de hedging error.

4.A.4.2. Variantie van de hedging error

Hoewel de verdelingsfunctie van de hedging error niet eenvoudig bepaald kan worden, kunnen de berekeningen voor de variantie van de hedging error sterk versimpeld worden door Itô's formule toe te passen op (4.A.11). Dit levert namelijk de volgende bewegingsvergelijking op voor het kwadraat van de hedging error:

$$d\varepsilon_t^2 = e^{2r(T-t)} I_{nm}^2 S_t^2 \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t)^2 dt \quad (4.A.12)$$

Het voordeel van deze representatie is dat er geen stochastische differentialen meer in de vergelijking zitten. Aangezien we weten dat $E[\varepsilon_T | \mathcal{F}_0] = 0$, is de variantie gelijk aan:

$$\text{Var}(\varepsilon_T | \mathcal{F}_0) = \int_0^T E \left[e^{2r(T-t)} I_m^2 S_t^2 \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t)^2 | \mathcal{F}_0 \right] dt$$

Voor sommige derivaten kan de verwachting onder het integraalteken expliciet berekend worden. De variantie van de hedging error kan dan numeriek bepaald worden, hetgeen sneller en nauwkeuriger is dan het schatten van de variantie d.m.v. een simulatie. We zullen hier geen expliciete resultaten geven. Bij een groot aantal derivaten, zoals forwards, Europese calls en puts en zelfs barrier opties, zal men echter bij het berekenen van de verwachting onder de integraal een bepaalde vorm tegenkomen, waarvan de verwachting niet standaard is. Met behulp van een resultaat uit de Appendix – Multilognormale verdeling kan deze verwachting expliciet uitgerekend worden:

$$E \left[e^{cz} N(a + bZ)^2 \right] = e^{\frac{1}{2}c^2} N_2 \left(\frac{a+bc}{\sqrt{1+b^2}}, \frac{a+bc}{\sqrt{1+b^2}}, \frac{b^2}{1+b^2} \right)$$

Hierbij is Z standaardnormaal verdeeld, en is $N_2(p, q, \rho)$ de kans is dat $Z_1 \leq p$ en $Z_2 \leq q$, als Z_1 en Z_2 standaardnormaal verdeeld zijn met een correlatie gelijk aan ρ . De functie $N_2(p, q, \rho)$ is geen standaardfunctie; een veelgebruikte benadering kan in Drezner [1978] gevonden worden. Verschillende boeken over het waarderen van opties, zoals Hull [2000], bevatten eveneens deze benadering (met een correctie op het originele artikel).

In onderstaand voorbeeld leiden we tenslotte een bovengrens voor $\text{Var}(\varepsilon_t | \mathcal{F}_0)$ af.

Voorbeeld:

We nemen aan dat het derivaat een Europese call optie is. We hebben uit de derde paragraaf het volgende resultaat voor de prijs van een call optie:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) = e^{-rt + \mu_Q t} N(d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (\mu_Q + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad \mu_Q = \mu_S + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(r1 - \underline{\mu}_Z)$$

De variantie van de hedging error kan in de volgende vorm geschreven worden:

$$\text{Var}(\varepsilon_T | \mathcal{F}_0) = \int_0^T e^{-2\mu_Q \tau + 2(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma^2)t} I_m^2 S_0^2 E \left[e^{2\sigma w_t} N(d_1)^2 | \mathcal{F}_0 \right] dt \quad (4.A.13)$$

waarbij w_t wederom een Wiener process is. De verwachting onder het integraalteken is inderdaad van de vorm zoals boven beschreven is. Laten we nu een verschil maken tussen $\varepsilon_T^{\text{part}}$ voor de hedging error onder partial pricing, en $\varepsilon_T^{\text{exp}}$ voor de hedging error onder expectation pricing. Op voorwaarde dat $\mu_Q < \mu_S$, geldt de volgende bovengrens voor de variantie van de hedging error onder partial pricing:

$$\text{Var}(\varepsilon_T^{\text{part}} | \mathcal{F}_0) < e^{-2(\mu_Q - \mu_S)T} \frac{I_m^2}{\sigma^2} \text{Var}(\varepsilon_T^{\text{exp}} | \mathcal{F}_0) \quad \square$$

4.A.5. Vergelijking van de waarderingmethoden

In deze paragraaf vergelijken we de drie eerder genoemde waarderingmethoden en de hedging errors die zij veroorzaken, in een fictief voorbeeld. We beschouwen twee aandelen van financiële conglomeraten, ABN·AMRO en ING. In de eerste subparagraaf beschouwen we de data die gebruikt is om de parameters van het model te schatten.

In de tweede subparagraaf zullen we aannemen dat het ABN·AMRO aandeel niet verhandeld wordt; de waarde van het aandeel kan echter continu geobserveerd worden. ABN·AMRO wil een optieregeling beginnen voor haar werkgevers en wil de kosten hiervan minimaliseren. Met behulp van partial pricing zou zij het ING aandeel kunnen gebruiken om zich af te dekken tegen een deel van het risico in het ABN·AMRO aandeel. We bekijken de hedging error.

4.A.5.1. De data

We beschouwen beide aandelen over een periode van 5 jaar, namelijk 11-05-1995 tot aan 11-05-2000. De data zijn verkregen van Datastream. Enige belangrijke statistieken zijn¹⁶:

| | AAB | ING |
|--------------------------|--------|--------|
| Mean | 0.235 | 0.276 |
| Standard deviation | 0.302 | 0.318 |
| Correlation | 0.728 | |
| 1st autocorrelation | 0.066 | 0.116 |
| 1st autocorr. sq. resid. | 0.150 | 0.186 |
| Skewness | -0.126 | -0.365 |
| Excess kurtosis | 2.968 | 5.598 |

Tabel 4.A.1: Samenvattende statistieken voor beide aandelen, 11-05-1995 tot 11-05-2000

Al deze statistieken werden significant bevonden bij een significantieniveau van 95%. Beide aandelen blijken een vergelijkbaar verwacht rendement en standaarddeviatie te hebben. De rendementen op beide aandelen blijken tevens een hoge mate van correlatie te vertonen. Zoals gebruikelijk voor aandelen, vinden we autocorrelaties in de rendementen, en zijn de skewness en de excess kurtosis beide verschillend van 0 (hetgeen we bij normaal verdeelde rendementen zouden aantreffen). Het feit dat de eerste autocorrelatie van de gekwadrateerde residuen significant van nul verschilt, duidt op een mogelijk GARCH effect. Eveneens werd getoetst of de correlatie tussen beide rendementen in deze twee perioden gelijk was, gebruikmakend van het volgende resultaat over de geschatte correlatiecoëfficiënt R:

$$\sqrt{n}(g(R) - g(\rho)) \xrightarrow{d} N(0,1)$$

waarbij g Fisher's z-transform is, gegeven door $g(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Gebruikmakend van dit resultaat vinden we dat de correlaties in beide perioden statistisch van elkaar verschillen bij een significantieniveau van 95%; de correlatie in de eerste periode was gelijk aan 0.77, in de tweede periode daalde deze naar 0.71.

Hoewel al deze resultaten er op duiden dat de gezamenlijke verdeling van de rendementen op beide aandelen niet binormaal is, is het in de praktijk vrij gebruikelijk om toch opties te waarderen m.b.v. het Black-Scholes model, zij het met enige aanpassingen. Om de dingen niet verder te compliceren, zullen we aannemen dat beide aandelen een geometrische Brownse beweging volgen, met gecorreleerde Wiener processen.

¹⁶ Merk op dat het gemiddelde en de standaard deviatie omgerekend zijn naar hun jaarlijkse equivalenten.

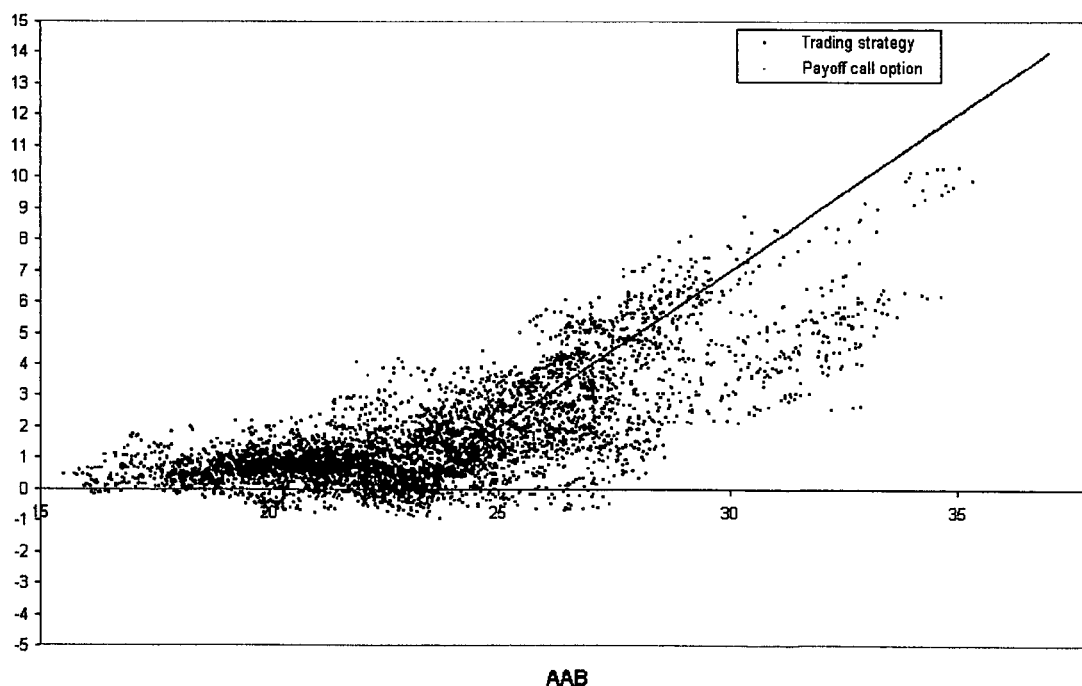
4.A.5.2. Voorbeeld van partial pricing

In deze subparagraaf waarden we een 3-maands Europese call op het ABN·AMRO aandeel. We nemen aan dat dit aandeel niet verhandeld wordt. Het ING aandeel wordt wel verhandeld, en heeft rendementen die een hoge mate van correlatie vertonen met het ABN·AMRO aandeel, zodat we partial pricing kunnen toepassen om een redelijke prijs voor de optie te berekenen. We nemen de risicovrije voet gelijk aan de LIBOR rentevoet op 01-06-2000, welke 4.6625% op jaarbasis was. De prijs van een ABN·AMRO aandeel is gelijk aan € 22.03. In onderstaande tabel presenteren we de prijzen van de drie besproken waarderingsmethoden voor een 3-maands Europese call met een strike gelijk aan € 23:

| | |
|----------------------------|-----------|
| <i>Expectation price</i> | 1.6815044 |
| <i>Black-Scholes price</i> | 1.0084807 |
| <i>Partial price</i> | 1.1079392 |

Tabel 4.A.2: Verschillende prijzen voor een 3-maands call op AAB

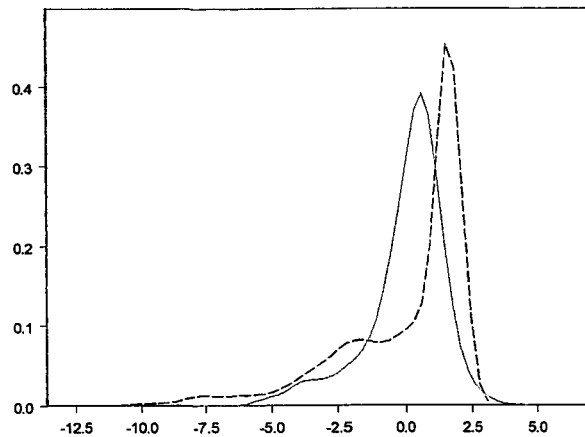
We merken dat de partial price vrij dichtbij de Black-Scholes price ligt, terwijl de expectation price aanmerkelijk hoger ligt. Helaas vertelt de prijs ons niets over de hedging error. Om een indruk van de verdeling van de hedging error te verkrijgen, hebben we 5000 verschillende paden gesimuleerd voor de gezamenlijke rendementen op het ABN·AMRO en ING aandeel, waarbij elke handelsdag in 1000 equidistante intervallen werd opgesplitst. Op elk van deze paden werd de partial hedging strategie uit paragraaf 4.A.3. toegepast, om de hedging error te verkrijgen, zoals gedefinieerd in paragraaf 4.A.4. De hoeveelheid geld die de strategie opleverde voor deze 5000 simulaties, volgt in onderstaande grafiek:



Grafiek 4.A.1: Het resultaat van partial hedging

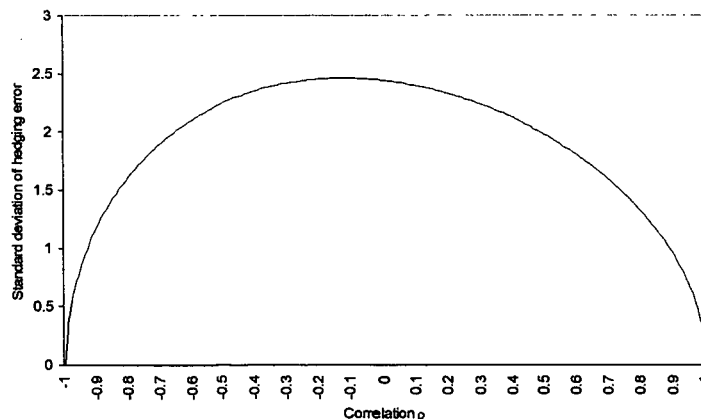
De grafiek geeft aan dat hoewel beide aandelen een hoge mate van correlatie vertonen, de hedging error nog altijd vrij groot is. In dit voorbeeld lijkt het erop dat de partial hedging strategie gemiddeld een winst oplevert als de optie niet uitgeoefend wordt, en een verlies als de optie ver in-the-money eindigt.

De geschatte verdeling van de hedging error wordt in onderstaande grafiek weergegeven. De gestippelde lijn geeft de exacte verdeling van de hedging error bij expectation pricing weer, de rode lijn de geschatte verdeling van de hedging error bij partial pricing:



Grafiek 4.A.2: Geschatte verdelingsfunctie van de hedging error

Bij het vergelijken van beide verdelingen, merken we op dat de linkerstaart van de verdeling dunner is geworden door het gebruiken van de partial hedging techniek: grote verliezen zijn minder waarschijnlijk geworden. Om enig inzicht te krijgen in de standaarddeviatie van de hedging error en de correlatiecoëfficiënt ρ , gebruiken we de representatie die in de vorige paragraaf werd afgeleid voor de variantie van de hedging error. Het numeriek uitrekenen van de integralen levert de volgende relatie op tussen de correlatiecoëfficiënt ρ en de standaarddeviatie van de hedging error:



Grafiek 4.A.3: Relatie tussen de standaarddeviatie van de hedging error en ρ

De bovengrens voor de variantie leert ons dat één van de factoren die de verhouding t.o.v. de standaarddeviatie van de hedging error onder expectation pricing bepaalt, de factor l_{nn}/σ van de Cholesky decompositie van de covariantiematrix is, hetgeen in het bivariate geval gelijk is aan $\sqrt{1-\rho^2}$. Dit geeft aan waarom de hedging error nog steeds vrij groot is bij hoge correlatiecoëfficiënten. Bij dit voorbeeld is de standaarddeviatie van de hedging error met 37% gedaald t.o.v. expectation pricing, hetgeen een belangrijke reductie is.

4.B. Het waarderen van Europese derivaten in discrete tijd

In vergelijking met de vorige subappendix zullen we hier aannemen dat de bekeken aandelen en obligaties niet continu verhandeld worden, maar slechts op equidistante discrete tijdstippen. We zouden dit ook als volgt kunnen interpreteren: we kiezen ervoor om slechts op bepaalde tijdstippen te handelen. Dit is een meer realistische aannamen dan die uit de vorige subappendix, waarin aandelen continu verhandeld mochten worden. Het continue hedgen uit de vorige subappendix is in de praktijk onmogelijk om verschillende redenen, zoals transactiekosten. De periode tussen twee opeenvolgende tijdstippen waarop men de portefeuille afdekt tegen risico's wordt de *hedging period* genoemd. Volgens Wilmott [1998] ligt deze in de praktijk tussen een halve dag en een aantal weken.

In tegenstelling tot de vorige subappendix zullen we slechts het geval bekijken waarin de markt bestaat uit een risicovrije obligatie B en twee aandelen, namelijk het onderliggende aandeel S en het verhandelde aandeel Z . Uiteraard zou S ook verhandeld kunnen zijn, waardoor Z overbodig wordt. Wiskundig gezien worden de rendementen op de aandelen beschreven door:

$$B_{t+1} = e^r B_t \quad S_{t+1} = e^{r_t^S} S_t \quad Z_{t+1} = e^{r_t^Z} Z_t$$

We zullen aannemen dat de vector (r_t^S, r_t^Z) bivariaat normaal verdeeld is, met parameters die we op dit moment nog niet nader specificeren. Wanneer we het symbool r_t voor een rendement gebruiken zonder nader aan te geven op welk aandeel dit rendement verdiend is, zullen we het rendement behorende bij het aandeel Z bedoelen. Een andere afspraak met betrekking tot de notatie in deze subappendix, is dat we $E[\cdot | \mathcal{F}_t]$, $\text{Cov}(\cdot, \cdot | \mathcal{F}_t)$ en $\text{Var}(\cdot | \mathcal{F}_t)$ zullen weergeven met $E_t[\cdot]$, $\text{Cov}_t(\cdot, \cdot)$ and $\text{Var}_t(\cdot)$. De filtratie \mathcal{F}_t geeft hier alle informatie weer over aandeel S en Z , dat tot en met tijdstip t bekend is.

In de eerste paragraaf bekijken we een model van Wilmott voor discreet hedgen, dat we als een startpunt gebruiken om een formule af te leiden voor de optieprijs van een Europees derivaat op het aandeel S . De tweede paragraaf is een intermezzo in conditionele verwachtingen, waarin we de resultaten weergeven die we in de rest van deze subappendix nodig zullen hebben. In de derde paragraaf wordt de exacte vorm van de optieprijs afgeleid. De vierde en laatste paragraaf behandelt een aantal voorbeelden waarin de hedging error wordt onderzocht die ontstaat door discreet hedgen.

4.B.1. Wilmotts model voor discreet hedgen

We zullen in het kort een aantal resultaten bespreken die Wilmott [1998] heeft afgeleid voor discreet hedgen. De onderliggende waarde van dit derivaat is verhandelbaar. Wilmott beschouwt de situatie waarin we één derivaat bezitten en ϕ aandelen S verkocht hebben. Deze positie zal tot het volgende tijdstip aangehouden worden. De grootte van ϕ op tijdstip t kan bepaald worden uit de volgende vergelijking:

$$\phi_t = \arg \min_{\phi} \text{Var}_t((V_{t+1} - \phi S_{t+1}) - (V_t - \phi S_t)) \quad (4.B.1)$$

Tevens wordt het verwachte rendement op de portefeuille gelijk gesteld aan de risicovrije voet:

$$E_t(V_{t+1} - \phi_t S_{t+1}) = e^r (V_t - \phi_t S_t) \quad (4.B.2)$$

Om deze vergelijkingen in het raamwerk van de rest van deze subappendix in te passen, zullen we de risicovrije obligatie toevoegen aan de vergelijking. Allereerst definiëren we de prijs van het derivaat als volgt:

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t \quad (4.B.3)$$

We kunnen nagaan dat (4.B.1) en (4.B.2) als volgt herschreven kunnen worden:

$$\begin{aligned} E_t(V_{t+1} - \phi_t S_{t+1} - \psi_t B_{t+1}) &= 0 \\ \phi_t &= \arg \min_{\phi} \text{Var}_t(V_{t+1} - \phi_t S_{t+1} - \psi_t B_{t+1}) \end{aligned} \quad (4.B.4)$$

In woorden betekent dit dat de gewichten die we in het aandeel S en de obligatie B investeren, zo gekozen worden dat de verwachte waarde van de portefeuille op tijdstip $t+1$ gelijk is aan de verwachte waarde van het derivaat op dat tijdstip. Beide gewichten worden bovendien zó gekozen, dat de variantie van het verschil tussen V_{t+1} en de portefeuille op tijdstip $t+1$ wordt geminimaliseerd. Deze twee criteria lijken redelijk.

Wilmott leidt vervolgens een tweede orde benadering af van $(V_{t+\delta t} - \phi_t S_{t+\delta t}) - (V_t - \phi_t S_t)$ in δt (δt is in Wilmott's relaas de hedging period; wij zullen deze zonder beperking der algemeenheid gelijk nemen aan 1). Gebruikmakend van (4.B.1) en (4.B.2), verkrijgt hij uiteindelijk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + r S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) &= r V(t, S_t) \\ V(T, S) &= F(T, S) \end{aligned}$$

waarbij $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 + \delta t(\mu - r)(r - \mu - \sigma^2)$. De hoeveelheid ϕ_t wordt gegeven door:

$$\phi_t = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) + \delta t(\mu - r + \frac{1}{2} \sigma^2) S_t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t)$$

De prijs volgt dezelfde partiële differentiaalvergelijking als in het Black-Scholes model, met als enig verschil de enigszins gewijzigde variantie. Dit is een bijzonder aantrekkelijk resultaat, dat echter gebaseerd is op een tweede orde benadering, en derhalve niet exact is.

4.B.2. Een intermezzo in conditionele verwachtingen

Alvorens we een exacte formule afleiden voor de optieprijs onder discreet hedgen, zullen we een aantal resultaten nodig hebben m.b.t. conditionele verwachtingen, die we in deze paragraaf afleiden. Alleen de resultaten van de drie lemma's die in deze paragraaf worden afgeleid zijn belangrijk voor de volgende paragraaf. De bewijzen worden slechts voor de volledigheid weergegeven. Voor meer informatie over conditionele verwachtingen, verwijzen we de lezer naar Williams [1991]. We beginnen door de tower law te herhalen:

Tower law

Laat \mathcal{G} en \mathcal{H} σ -algebras zijn, zodanig dat $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. Dan geldt het volgende:

$$E[E[X | \mathcal{H}] | \mathcal{G}] = E[X | \mathcal{G}]$$

In de volgende lemma's zullen dezelfde aannamen gemaakt worden als in de tower law.

Lemma 1:

Als $E[Y | \mathcal{H}] = E[Y | \mathcal{G}]$, dan geldt:

$$E[\text{Cov}(X, Y | \mathcal{H}) | \mathcal{G}] = \text{Cov}(X, Y | \mathcal{G})$$

Bewijs:

Beginnend van de linkerkant, en gebruikmakend van de definitie van een covariantie:

$$\begin{aligned} E[\text{Cov}(X, Y | \mathcal{H}) | \mathcal{G}] &= E[E[XY | \mathcal{H}] | \mathcal{G}] - E[E[X | \mathcal{H}] \cdot E[Y | \mathcal{H}] | \mathcal{G}] \\ &= E[XY | \mathcal{G}] - E[X | \mathcal{G}] \cdot E[Y | \mathcal{G}] = \text{Cov}(X, Y | \mathcal{G}) \end{aligned}$$

Als we de eerder gebruikte aanname dat $E[Y | \mathcal{H}] = E[Y | \mathcal{G}]$ gebruiken, kunnen we $E[Y | \mathcal{H}]$ uit de verwachting halen, aangezien het een element van \mathcal{G} is. Hierna moet slechts de tower law worden toegepast op elk deel, en verkrijgen we het resultaat. \square

Lemma 2:

Als $Y \in \mathcal{H}$, dan geldt:

$$\text{Cov}(E[X | \mathcal{H}], Y | \mathcal{G}) = \text{Cov}(X, Y | \mathcal{G})$$

Bewijs:

Gebruikmakend van de definitie van een covariantie, verkrijgen we:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(E[X | \mathcal{H}], Y | \mathcal{G}) &= E[E[X | \mathcal{H}] \cdot Y | \mathcal{G}] - E[E[X | \mathcal{H}] | \mathcal{G}] \cdot E[Y | \mathcal{G}] \\ &= E[E[XY | \mathcal{H}] | \mathcal{G}] - E[X | \mathcal{G}] \cdot E[Y | \mathcal{G}] = \text{Cov}(X, Y | \mathcal{G}) \end{aligned}$$

Aangezien $Y \in \mathcal{H}$ kan het onder de eerste verwachting worden genomen. De rest van het bewijs is slechts een toepassing van de tower law. \square

Lemma 3:

Als de volgende aannamen gelden:

1. $E[Y | \mathcal{H}] = E[Y | \mathcal{G}]$
2. $Z \in \mathcal{H}$
3. $E[Y | \mathcal{G}] = E[Z | \mathcal{G}]$
4. $E[XY | \mathcal{G}] = E[XZ | \mathcal{G}]$

is het volgende waar:

$$\text{Cov}(\text{Cov}(X, Y | \mathcal{H}), Z | \mathcal{G}) = \text{Cov}(XY, Z | \mathcal{G}) - E[Z | \mathcal{G}] \cdot \text{Cov}(X, Y | \mathcal{G})$$

Proof:

Gebruikmakend van de definitie van een covariantie, verkrijgen we:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\text{Cov}(X, Y | \mathcal{H}), Z | \mathcal{G}) &= E[\text{Cov}(X, Y | \mathcal{H}) \cdot Z | \mathcal{G}] \\ &\quad - E[\text{Cov}(X, Y | \mathcal{H}) | \mathcal{G}] \cdot E[Z | \mathcal{G}] \end{aligned} \quad (4.B.5)$$

We richten de aandacht op het eerste deel in het rechterlid:

$$E[\text{Cov}(X, Y | \mathcal{H}) \cdot Z | \mathcal{G}] = E[E[XY | \mathcal{H}] \cdot Z | \mathcal{G}] - E[E[X | \mathcal{H}] \cdot E[Y | \mathcal{H}] \cdot Z | \mathcal{G}] \quad (4.B.6)$$

Met aanname 1 en 2 kunnen we eenvoudig zien dat de eerste gelijkheid geldt in:

$$E[\text{Cov}(X, Y | \mathcal{H}) \cdot Z | \mathcal{G}] = \text{Cov}(XZ, Y | \mathcal{G}) = \text{Cov}(XY, Z | \mathcal{G})$$

De tweede gelijkheid is geldig dankzij aannamen 3 en 4. We keren terug naar het tweede deel in het rechterlid van (4.B.5). Vanwege aanname 1 kunnen we lemma 1 toepassen:

$$E[\text{Cov}(X, Y | \mathcal{H}) | \mathcal{G}] \cdot E[Z | \mathcal{G}] = \text{Cov}(X, Y | \mathcal{G}) \cdot E[Z | \mathcal{G}] \quad (4.B.7)$$

Door (4.B.6) en (4.B.7) in (4.B.5) in te vullen, hebben we lemma 3 bewezen. \square

In de volgende paragraaf zullen we elk van deze lemma's toepassen om een bepaalde vorm voor de prijs van een Europees derivaat te vinden, in het geval van discreet hedgen.

4.B.3. Een exacte formule voor de optieprijs

We beschouwen nu een algemenere situatie dan in Wilmotts model. We zullen het aandeel Z en de obligatie B gebruiken om het derivaat te repliceren. De rendementen op aandeel Z zijn gecorreleerd met de rendementen op de onderliggende waarde van het derivaat, waarvan we aannemen dat het niet verhandeld kan worden. Op de expiratedatum is de prijs van het derivaat gedefinieerd als de uitbetaling. Daarom voldoet de waarde van het derivaat V aan:

$$\begin{aligned} V_t &= \phi_t Z_t + \psi_t B_t \\ V_T &= F(T, S_T) \end{aligned} \quad (4.B.8)$$

Zoals beredeneerd in 4.B.1, lijkt het redelijk om de volgende restricties op te leggen:

$$\begin{aligned} E_t(V_{t+1} - \phi_t S_{t+1} - \psi_t B_{t+1}) &= 0 \\ \phi_t &= \arg \min_{\phi} \text{Var}_t(V_{t+1} - \phi_t S_{t+1} - \psi_t B_{t+1}) \end{aligned} \quad (4.B.9)$$

Deze twee vergelijkingen leggen de optieprijs volledig vast. Als we de variantie minimaliseren, en ψ_t oplossen, verkrijgen we de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \phi_t Z_t &= \frac{\text{Cov}_t(V_{t+1}, e^{r_{t+1}})}{\text{Var}_t(e^{r_{t+1}})} \\ \psi_t B_{t+1} &= E_t(V_{t+1}) - \phi_t Z_t E_t(e^{r_{t+1}}) \end{aligned}$$

Merk op dat $E_t(e^{r_{t+1}})$ en $\text{Var}_t(e^{r_{t+1}})$ constant zijn in het model dat wij bekijken. Daarom definiëren we de constanten α and β :

$$\alpha = \frac{1 - e^{-r} E_t(e^{r_{t+1}})}{\text{Var}_t(e^{r_{t+1}})} \quad \beta = E_t(e^{r_{t+1}})$$

Gebruikmakend van de definitie van α in de definitie van V_t in (4.B.8), levert:

$$V_t = \phi_t Z_t + \psi_t B_t = e^{-r} E_t(V_{t+1}) + \alpha \cdot \text{Cov}_t(V_{t+1}, e^{r_{t+1}}) \quad (4.B.10)$$

De volgende stelling levert de vorm op waarin de optieprijs geschreven kan worden:

Stelling 4.B.1.:

De optieprijs op tijdstip T-i kan in de volgende vorm geschreven worden:

$$V_{T-i} = e^{-ir} E_{T-i}[V_T] + \sum_{k=1}^i a_{ik} c(i, k) \quad (4.B.11)$$

waarbij

$$c(i, k) = \text{Cov}_{T-i}(V_T e^{\sum_{j=T+2-k}^T r_j}, e^{r_{T+1-k}})$$

en $a_{ik} \in \mathbb{R}$ aan de volgende differentievergelijking voldoet:

$$\begin{aligned} a_{i+1,k} &= (e^{-r} - \alpha\beta) \cdot a_{ik} + \alpha a_{i,k-1} \quad i+1 \geq k \geq 1 \\ a_{i,0} &= e^{-ir} \quad i \geq 0 \\ a_{ik} &= 0 \quad 0 \leq i < k \end{aligned}$$

Bewijs:

We bewijzen (4.B.11) met inductie. Voor $i = 0$ geldt de uitdrukking uiteraard. Laten we nu aannemen dat (4.B.11) voor i geldig is. Gebruikmakend van (4.B.10) levert dit:

$$V_{T-i-1} = e^{-r} E_{T-i-1}[V_{T-i}] + \alpha \cdot \text{Cov}_{T-i-1}(V_{T-i}, e^{r-i})$$

Na (4.B.11) voor V_{T-i} in het rechterlid gesubstitueerd te hebben, verkrijgen we:

$$\begin{aligned} V_{T-i-1} &= e^{-(i+1)r} E_{T-i-1}[E_{T-i}[V_T]] + \sum_{k=1}^i e^{-r} a_{ik} E_{T-i-1}[c(i,k)] \\ &\quad + e^{-r} \alpha \text{Cov}_{T-i-1}(E_{T-i}[V_T], e^{r-i}) + \sum_{k=1}^i \alpha a_{ik} \text{Cov}_{T-i-1}(c(i,k), e^{r-i}) \end{aligned} \quad (4.B.12)$$

Met behulp van de tower law en de drie lemma's, kunnen we laten zien dat:

- A) $E_{T-i-1}[E_{T-i}[V_T]] = E_{T-i-1}[V_T]$
- B) $E_{T-i-1}[c(i,k)] = c(i+1,k)$
- C) $\text{Cov}_{T-i-1}(E_{T-i}[V_T], e^{r-i}) = \text{Cov}_{T-i-1}(V_T, e^{r-i}) = c(i+1,1)$
- D) $\text{Cov}_{T-i-1}(c(i,k), e^{r-i}) = c(i+1, k+1) - \beta c(i+1, k)$

Uitspraak A volgt onmiddellijk uit de tower law. Aangezien $E_{T-i}[e^{r+i+k}] = E_{T-i-1}[e^{r+i+k}] = \beta$ (merk op dat $k = 1, \dots, i$), volgt uitspraak B vrijwel direct uit Lemma 1. De eerste gelijkheid in uitspraak C volgt door Lemma 2 toe te passen. De tweede gelijkheid volgt door in herinnering te brengen dat de uitbetalingsfunctie voldoet aan $V_T = F(T, S_T)$; we hebben m.a.w. te maken met een niet-padafhankelijk derivaat.

Uitspraak D tenslotte vraagt om een toepassing van Lemma 3. We hoeven derhalve alleen na te gaan of er aan de voorwaarden voor dit lemma voldaan is. Zoals gezegd geldt $E_{T-i}[e^{r+i+k}] = E_{T-i-1}[e^{r+i+k}] = \beta$, zodat aan de eerste voorwaarde is voldaan. Uiteraard is $r_{T-i} \in \mathcal{F}_{T-i}$, zodat een willekeurige functie ervan ook een element is van de filtratie \mathcal{F} op tijdstip $T-i$. De derde voorwaarde houdt in dat $E_{T-i-1}[e^{r+i+k}] = E_{T-i-1}[e^{r-i}]$, hetgeen zeker geldt aangezien beide gelijk zijn aan β . De vierde en laatste voorwaarde eist dat:

$$E_{T-i-1}[V_T e^{\sum_{j=T+2-k}^T r_j} e^{r_{T+i+k}}, e^{r_{T-i}}] = E_{T-i-1}[V_T e^{\sum_{j=T+2-k}^T r_j} e^{r_{T-i}}, e^{r_{T+i+k}}]$$

Door wederom in te zien dat $k = 1, \dots, i$ en dat $V_T = F(T, S_T)$, is er aan deze voorwaarde voldaan, zodat uitspraak D bewezen kan worden door Lemma 3 toe te passen. Als we deze uitspraken in (4.B.11) substitueren, en de teller in een van de sommaties aanpassen, verkrijgen we de volgende vergelijking:

$$V_{T-i-1} = e^{-(i+1)r} E_{T-i-1}[V_T] + \sum_{k=1}^i (e^{-r} - \alpha\beta) a_{ik} c(i+1, k) \\ + e^{-r} \alpha c(i+1, 1) + \sum_{k=2}^{i+1} \alpha a_{i, k-1} c(i+1, k)$$

We bekijken nu de coëfficiënten van $c(i+1, k)$ voor alle waarden van k :

$$\begin{aligned} k = 1 & \quad (e^{-r} - \alpha\beta) a_{i1} + e^{-r} \alpha = (e^{-r} - \alpha\beta) a_{i1} + \alpha a_{i0} = a_{i+1,1} \\ k = 2, \dots, i & \quad (e^{-r} - \alpha\beta) a_{ik} + \alpha a_{i, k-1} = a_{i+1, k} \\ k = i+1 & \quad \alpha a_{i, i} = (e^{-r} - \alpha\beta) a_{i, i+1} + \alpha a_{i, i} = a_{i+1, i+1} \end{aligned}$$

Dit levert het gewenste resultaat:

$$V_{T-i-1} = e^{-(i+1)r} E_{T-i-1}[V_T] + \sum_{k=1}^{i+1} a_{i+1, k} c(i+1, k) \quad \square$$

Een gelijksoortig bewijs levert de volgende corollary bij deze stelling.

Corollary 4.B.1.:

$$\phi_{T-i} Z_{T-i} = \frac{1}{1-e^{-r}\beta} \sum_{k=1}^i (a_{ik} - e^{-r} a_{i-1, k}) \cdot c(i, k) \quad \square$$

Nu we de exacte vorm van de optieprijs onder discreet hedgen hebben afgeleid, rest ons nog een expliciete uitdrukking af te leiden voor de coëfficiënten a_{ik} uit deze optieprijs.

Stelling 4.B.2.:

Laat de reeks $a_{ik} \in \mathbb{R}$ vastgelegd worden door de volgende differentievergelijkingen:

$$\begin{aligned} a_{i+1, k} &= (e^{-r} - \alpha\beta) \cdot a_{ik} + \alpha a_{i, k-1} \quad i+1 \geq k \geq 1 \\ a_{i, 0} &= e^{-ir} \quad i \geq 0 \\ a_{ik} &= 0 \quad 0 \leq i < k \end{aligned}$$

Een expliciete oplossing voor deze differentievergelijking voor $i \geq k \geq 0$, is gelijk aan:

$$a_{ik} = \beta^{-k} e^{-ir} - \beta^{-k} (e^{-r} - \alpha\beta)^i \sum_{j=0}^{k-1} \binom{i}{j} \left(\frac{\alpha\beta}{e^{-r} - \alpha\beta} \right)^j$$

Bewijs:

Voor $k = 0$ hebben we uiteraard het gewenste resultaat. We hoeven nu alleen te laten zien dat de oplossing aan de differentievergelijking voldoet. Na enig rekenwerk krijgen we:

$$\beta^k (e^{-r} - \alpha\beta)^{-i-1} (a_{i+1, k} - (e^{-r} - \alpha\beta) a_{i, k} - \alpha a_{i, k-1}) = \sum_{j=1}^{k-1} \left[\binom{i}{j} - \binom{i+1}{j} + \binom{i}{j-1} \right] \cdot \left(\frac{\alpha\beta}{e^{-r} - \alpha\beta} \right)^j + \binom{i}{0} - \binom{i+1}{0}$$

Aangezien uit de definitie volgt dat $\binom{i}{j} + \binom{i}{j-1} = \binom{i+1}{j}$ voor $1 \leq j \leq i$ en $\binom{i}{0} = 1$, is het rechterlid gelijk aan nul. \square

Ondanks dat we een exacte uitdrukking voor de optieprijs hebben afgeleid in deze paragraaf, blijken de coëfficiënten a_{ik} numeriek instabiel te zijn voor grote waarden van i . We kunnen dit eenvoudig inzien door de expliciete uitdrukking voor a_{ik} te bekijken, en $(e^{-r} - \alpha\beta)^i$ voor een aantal representatieve waarden voor r , α en β uit te rekenen. Dit is de reden dat in de voorbeelden in de volgende paragraaf we alleen voorbeelden zullen beschouwen waarin het aantal tijdstippen klein wordt gehouden.

4.B.4. Toepassingen van de waarderingstechnieken

In deze paragraaf bekijken we een drietal voorbeelden waarin de waarderingstechnieken uit de vorige paragrafen worden toegepast. Het eerste voorbeeld vergelijkt de benadering van Wilmott met de exacte prijs. Het tweede voorbeeld vergelijkt de standaarddeviatie van de hedging error onder discreet hedgen en continu hedgen met elkaar. Tenslotte bekijken we een realistischer voorbeeld, dat in het kader van deze scriptie een grote relevantie heeft: het waarderen van derivaten op een vastgoedindex, die elke maand wordt gepubliceerd. Gebruikmakend van op de AEX verhandelde vastgoedfondsen, laten we zien dat de standaarddeviatie van de hedging error verkleind kan worden i.v.m. expectation pricing.

Voorbeeld 1: Wilmott's benadering vs. de exacte optieprijs

We beschouwen net als in de vorige subappendix een 3-maands ABN·AMRO call optie. In alle verdere zullen we de risicovrije voet gelijk nemen aan de LIBOR rentevoet op 1 januari 2000, welke gelijk was aan 4.6625% op jaarbasis. In de volgende tabel presenteren we de Black-Scholes price, Wilmotts benadering en de exacte optieprijs onder discreet hedgen. We gebruiken het ABN·AMRO aandeel om elke maand het contract te hedgen:

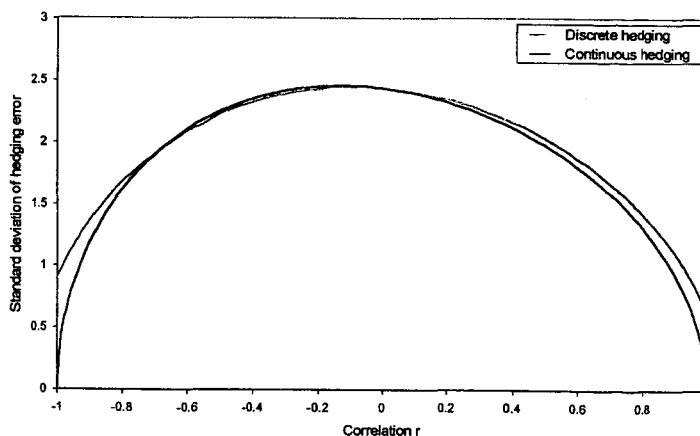
| | |
|----------------------|-----------|
| <i>Black-Scholes</i> | 1.0084807 |
| <i>Wilmott</i> | 0.9640171 |
| <i>Exact price</i> | 0.9635692 |

Tabel 4.B.1: Verschillende prijzen voor de optie op AAB

Wilmotts benadering blijkt vrij dichtbij de exacte prijs te liggen; beide prijzen liggen bovendien dichtbij de Black-Scholes prijs, welke uitgaat van continu hedgen. Door simulatie hebben we schattingen verkregen voor de standaarddeviatie van de hedging error voor zowel Wilmotts strategie als de exacte discrete hedgingstrategie. Wilmotts benadering leverde een standaarddeviatie van ongeveer 0.6373, terwijl deze bij de exacte discrete hedgingstrategie 0.6367 was. In dit voorbeeld blijkt Wilmotts benadering uitzonderlijk goed te functioneren, en kan zelfs op grond van eenvoud geprefereerd worden boven de exacte optieprijs.

Voorbeeld 2: Standaarddeviatie van de hedging error onder partial pricing

Zoals in het vorige hoofdstuk, waarderen we hier een 3-maands ABN·AMRO call optie, waarbij we de optie hedgen met het aandeel ING. Met behulp van simulatie verkrijgen we een schatting van de standaarddeviatie van de hedging error onder discreet hedgen. Onderstaande



Graph 2.1: Relationship between the standard deviation of the hedging error and ρ

grafiek toont de standaarddeviatie van de hedging error in relatie tot de correlatiecoëfficiënt ρ tussen de rendementen op beide aandelen. Tevens is de standaarddeviatie van de hedging error onder continu partieel hedgen uitgezet. Zoals in het continue geval, observeren we dat de standaarddeviatie van de hedging error niet maximaal is bij expectation pricing. De reden hiervoor is hier eenvoudig: we hebben er niet voor gekozen om de standaarddeviatie van de hedging error te minimaliseren; de gewichten die in het aandeel en de risicovrije obligatie geïnvesteerd worden, zijn bepaald aan de hand van vergelijking (4.B.9). Deze twee formuleringen zijn helaas niet equivalent. Een prijs voor het derivaat onder dit criterium kan uiteraard ook afgeleid worden, maar geeft een nog bewerkelijker resultaat dan het huidige, hetgeen de reden is dat we hier niet verder op ingaan in deze scriptie.

We zien dat, in ieder geval in dit voorbeeld, de standaarddeviatie van de hedging error ongeveer gelijk is onder continu of discreet hedgen, mits de correlatiecoëfficiënt tussen beide aandelen niet te dichtbij 1 of -1 ligt. In het continue geval leverde partieel hedgen een reductie in de standaarddeviatie van de hedging error op van 37% (bij $\rho = 0.73$, zoals in de data werd gevonden). Indien we discreet hedgen levert dit een reductie op van ongeveer 34%.

Example 3: Pricing derivatives on a real-estate index

In verscheidene artikelen, zoals Shiller en Weiss [1999] wordt beargumenteerd dat er een markt voor derivaten op vastgoedindices gevormd moet worden. Zonder op de details in te gaan (hiervoor wordt u naar het betreffende artikel verwezen), zorgen grote transactiekosten en de afwezigheid van continue handelsmogelijkheden ervoor dat een vastgoedindex als een niet verhandelbaar aandeel beschouwd kan worden, en derivaten op deze index derhalve via expectation pricing gewaardeerd moeten worden.

We beschouwen hier de in hoofdstuk 3 behandelde vastgoedindices voor de Nederlandse markt. Zoals bekend zijn de indices ontwikkeld voor twee typen woningen, appartementen en eengezinswoningen, alsmede voor vijf regio's: Noord, Oost, West en Zuid. De hier beschouwde indices zijn de indices waarin er nog geen 3-maandelijks voortschrijdend gemiddelde is genomen; dit om het probleem van autocorrelaties te omzeilen. Statistische analyse heeft aangetoond dat de rendementen normaal verdeeld verondersteld mogen worden, en dat de standaarddeviatie van de rendementen constant kan worden verondersteld.

De drie bekeken vastgoedfondsen zijn Rodamco Retail Nederland, VastNed Retail en VastNed Offices/Industrial, welke alle drie op de AEX genoteerd zijn. Gebruikmakend van data uit Datastream van augustus 1994 tot en met december 1997, en aannemend dat de maandelijkse rendementen op de vastgoedfondsen normaal verdeeld zijn met een constante verwachting en standaarddeviatie, hebben we voor elke vastgoedindex de reductie van de standaarddeviatie van de hedging error berekend voor een 3-maands at-the-money call. Hierbij is partieel discreet hedgen vergeleken met expectation pricing. In onderstaande tabel geven we weer welk fonds de grootste reductie leverde, alsmede de betreffende reductie:

| | | Reduction (%) | Real-estate fund |
|----------------------|----------|---------------|------------------|
| Apartments | North | 4.8 | VastNed-R |
| | East | 1.5 | Rodamco |
| | Randstad | 2.1 | VastNed-O |
| | West | 3.0 | Rodamco |
| | South | 4.1 | VastNed-O |
| Single family houses | North | 2.5 | Rodamco |
| | East | 1.6 | VastNed-R |
| | Randstad | 3.2 | VastNed-O |
| | West | 2.7 | VastNed-R |
| | South | 3.9 | VastNed-R |

Tabel 4.B.2: Reductie in de standaarddeviatie van de hedging error

Hoewel de reductie in de standaarddeviatie niet groot is, is hij wel aanwezig, en bestaat er dus wel degelijk een betere manier dan expectation pricing om vastgoedderivaten te waarderen. De verkregen reductie zou bovendien nog groter zijn, als we alle drie de vastgoedfondsen tegelijk zouden gebruiken om te hedgen. We kunnen in dit geval de reductie in de standaarddeviatie berekenen. Voor de appartementenindex in de Regio Noord levert dit bijvoorbeeld een reductie van de standaarddeviatie van 7.2% op. Een andere opmerking is dat rendementen op vastgoed meestal gecorreleerd zijn met rendementen op obligaties. We gaan verder niet in op deze mogelijke uitbreiding.

4.C. Stochastic Calculus

In deze appendix presenteren we verschillende resultaten voor stochastische processen en stochastische calculus die we in deze scriptie nodig zullen hebben. We kunnen de lezer verwijzen naar de volgende twee boeken voor meer informatie over deze onderwerpen; hiervan is het laatste een goed beginpunt voor lezers met weinig tot geen achtergrond in maattheorie:

Øksendal, B. (1995). *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag.

Mikosch, T. (1998). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific.

Filtrations

Laat X een gegeven stochastisch proces zijn. In het vervolg zal het belangrijk zijn om de informatie die door X wordt gegenereerd te definiëren. Om dit wiskundig correct te doen, vereist maattheorie. Voor de doeleinden van deze scriptie hebben we voldoende aan de volgende definitie.

Definition

Het symbool \mathcal{F}_t^X geeft de informatie weer die door X is gegenereerd op het interval $[0, t]$. Als voor elke $t \geq 0$ de waarde van het stochastische proces Z_t bepaald kan worden uit de verzameling $\{X_s \mid 0 \leq s \leq t\}$, zullen we zeggen dat het proces Z aangepast is aan de filtratie \mathcal{F}_t^X filtration (of simpelweg aangepast aan X), en zullen we dit weergeven door:

$$Z_t \in \mathcal{F}_t^X.$$

Als het duidelijk is welk stochastisch proces X we bedoelen, zullen we de afhankelijkheid van X onderdrukken, en simpelweg \mathcal{F}_t schrijven.

Brownse beweging

Een stochastisch proces is een Brownse beweging of een Wiener proces, dan en slechts dan als:

1. w_t continu is, en $w_0 = 0$,
2. $w_t \sim N(0, t)$,
3. $w_{s+t} - w_s \sim N(0, t)$ en onafhankelijk van \mathcal{F}_s .

Itô integraal

Een stochastische variabele S wordt een Itô integraal van een stochastisch proces x_t m.b.t. het Wiener proces w_t op het interval $[0, T]$ genoemd, als aan het volgende voldaan is:

$$E\left[S - \sum_{i=0}^{N-1} x_{t_i} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})\right]^2 \rightarrow 0$$

voor elke rij van partities (t_0, t_1, \dots, t_N) van $[0, T]$, zodanig dat $\max_i (t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$. We zullen dit definiëren als:

$$S = \int_0^T x_t dw_t.$$

Als $x_t \in \mathcal{F}_t$ en $\int_0^T E(x_t^2) dw_t < \infty$ (ook wel $x_t \in \mathcal{L}^2$), is de Itô integraal goed gedefinieerd.

Itô's formule

Beschouw het stochastische proces $x_t \in \mathbb{R}^n$, dat als volgt geschreven kan worden:

$$x_t = x_0 + \int \mu_s ds + \int \sigma_s dw_s$$

De term w_t is een m -dimensionale Brownse beweging. De functies μ_t and σ_t nemen derhalve waarde aan in respectievelijk \mathbb{R}^n and $\mathbb{R}^{n \times m}$. Deze functies mogen zowel van de tijd afhangen als van de grootte van x ; we onderdrukken de afhankelijkheid om de notatie te vereenvoudigen. Het proces x kan ook geschreven worden als een stochastische differentiaalvergelijking:

$$dx_t = \mu_t dt + \sigma_t dw_t$$

Veronderstel nu dat we een process y_t in \mathbb{R} hebben, dat gerelateerd is aan x_t door $y_t = \phi(x_t)$. We nemen aan dat de functie ϕ twee keer continu differentieerbaar is naar elk van zijn componenten. Itô's formule levert nu het volgende resultaat:

$$dy_t = \tilde{\mu}_t dt + \tilde{\sigma}_t dw_t$$

waarbij

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_t &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_t) \cdot \mu_t + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_t^T \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x_t) \cdot \sigma_t) \\ \tilde{\sigma}_t &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_t) \cdot \sigma_t\end{aligned}$$

als de gradiënt van ϕ als een rijvector wordt geschreven.

Feynman-Kac stelling

Beschouw het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + \mu(t, S_t) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, S_t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) &= 0 \\ V(T, S_T) &= F(T, S_T)\end{aligned}$$

We definiëren nu het process S , dat aan de volgende SDV voldoet:

$$dS_t = \mu(t, S_t) dt + \sigma(t, S_t) dw_t$$

Als het process $\sigma^2(t, S_t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t)$ in \mathcal{L}^2 is, is de oplossing V :

$$V(t, S_t) = E[F(T, S_T) | \mathcal{F}_t]$$

Corollary:

Beschouw het volgende randwaardeprobleem:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + \mu(t, S_t) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, S_t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) = rV(t, S_t)$$
$$V(T, S) = F(T, S)$$

Als aan de voorwaarde dat $\sigma^2(t, S) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) \in \mathcal{L}^2$, is voldaan, hebben we:

$$V(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E[F(T, S_T) | \mathcal{F}_t]$$

waarbij S wederom aan de volgende SDV voldoet:

$$dS_t = \mu(t, S_t) dt + \sigma(t, S_t) dw_t$$

Dit kan eenvoudig worden nagegaan door het randwaardeprobleem $G(t, S_t) = e^{-rt} V(t, S_t)$ te bekijken en de Feynman-Kač stelling er op toe te passen.

Appendix 6 – Risico particulier

Deze appendix bevat de volgende subappendices, alle behorende bij hoofdstuk 6:

A – Modelling waardeontwikkeling woning

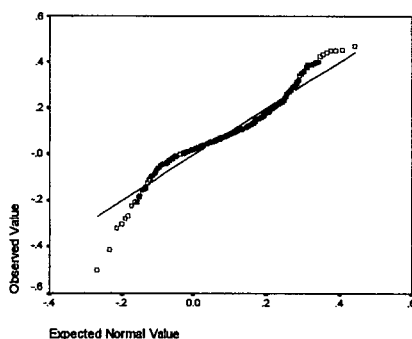
B – Mean-variance analyse

C – Modelresultaten mismatch particulier

6.A. Modelling waardeontwikkeling woning

We zullen in deze appendix de waardeontwikkeling van een huis op de lange termijn modelleren aan de hand van de vervaardigde repeat sales bestanden¹⁷. Idealiter zouden we een bestand hebben waarin voor een groot aantal huizen de prijsontwikkeling van deze huizen maandelijks gevolgd werd. We hebben hier echter alleen de beschikking over een repeat sales bestand. Het is onduidelijk welke discrepantie er optreedt door het gebruiken van een bestand met herhaalde verkopen; enige problemen met betrekking tot deze bestanden komen in appendix 3.B aan de orde.

Aangezien we voor het analyseren van het risico alleen geïnteresseerd zijn in het rendement dat het huis vanaf aanschaf van de waardedelingshypotheek tot en met het verstrijken van de looptijd behaalt, is het proces dat de maandelijkse rendementen beschrijft van minder belang. Een analyse van het repeat sales bestand leert ons dat de rendementen voor kortere periodes, net als de rendementen op aandelen, dikkere staarten hebben dan een normale verdeling. In onderstaande QQ-plot zien we dit terug voor de jaarlijkse rendementen op een huis.



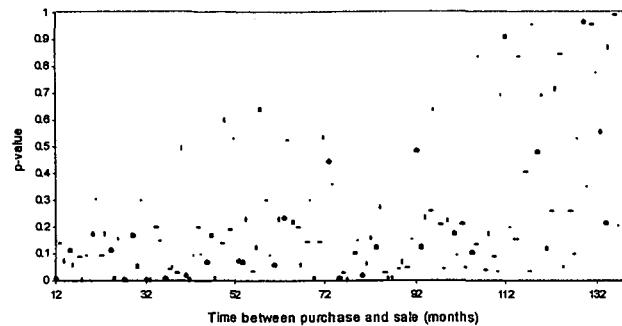
Grafiek 6.A.1: QQ-plot van jaarlijkse rendementen

Indien de maandelijkse rendementen een verdeling zouden volgen met een eindige variantie, mogen we op grond van de centrale limietstelling verwachten dat het rendement over een langere periode, de som van de maandelijkse rendementen, naar een normale verdeling convergeert. Hoe snel deze convergentie plaats vindt, hangt af van het staartgedrag van de verdeling van de maandelijkse rendementen. Er zal onderzocht moeten worden of de verdeling van de rendementen over een langere termijn normaal verdeeld is.

Hiertoe hebben we voor elke mogelijke periodes tussen de aanschaf en verkoop van een huis de Kolmogorov-Smirnov toetsingsgrootte uitgerekend voor het rendement over deze periode. De overschrijdingskansen van deze toetsingsgrootte zijn op de volgende pagina uitgezet tegen de tijd tussen aanschaf en verkoop van het huis. We concluderen dat de aanname van normaliteit voor rendementen over langere periodes geaccepteerd wordt.

¹⁷ Zie voor de exacte selectiecriteria op grond waarvan het repeat sales bestand vervaardigd is de paragraaf Repeat Sales van de Appendix Data.

We zullen nu overgaan tot het modelleren van de waardeontwikkeling van een huis. Het model van de waardeontwikkeling van de huizen moet consistent zijn met het eerder afgeleide model voor de huizenprijsindex, en met de empirische bevindingen omtrent de performance van de index.



Grafiek 6.A.2: Overschrijdingskans Kolmogorov-Smirnov statistic

We brengen in herinnering dat in Groenevelt, Westerop et al. [2000] er gebleken was dat alle indices de waardeontwikkeling van een individuele woning gemiddeld onderschatten. Deze eigenschap zal dan ook in ons model opgenomen moeten worden. Concreet betekent dit dat het gemiddelde rendement op een huis gespecificeerd kan worden als het rendement op de huizenprijsindex, vermeerderd met een correctiefactor.

De variantie van de rendementen op een individueel huis zal uiteraard hoger liggen dan de variantie van de rendementen op de index. Rest ons het laatste ingrediënt te beschrijven, de afhankelijkheid tussen de rendementen op de index en een individuele woning. Voor een representatief huis ligt het voor de hand dat als de index een stijging vertoont, de prijs van het huis dit ook zal doen. Een positieve correlatie ligt dus voor de hand. We zullen de afhankelijkheid modelleren door te veronderstellen dat de fouttermen onderling gecorreleerd zijn. Indien we met $r_{1,t}$ het rendement op de index over maand t , en met $r_{2,t}$ het overeenkomstige rendement op een individueel huis weergeven, is een model voor het gezamenlijke proces van de huizenprijsindex en een individueel huis dat aan deze observaties voldoet, het volgende:

$$\sum_{t=1}^T \begin{pmatrix} r_{1,t} \\ r_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(T) \\ \mu(T) + \Delta T \end{pmatrix} + \sum_{t=1}^T \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{t=1}^T \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} \sim N \left(0, \sigma^2(T) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho\delta \\ \rho\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \right)$$

Net als bij de modellering van de huizenprijsindices geven $\mu(T)$ en $\sigma^2(T)$ respectievelijk het verwachte rendement en de variantie van de rendementen over een periode van T maanden weer. In paragraaf 4.5.2 kunnen de specificaties voor deze functies teruggevonden worden.

6.A.1. Model validatie

We hebben al gecontroleerd of de lange-termijn rendementen op een individueel huis normaal verdeeld verondersteld mogen worden. Wat nog overblijft is te controleren of aan de specificatie (1) is voldaan. Aangezien de eerdere bevindingen dat de gehanteerde indices de waarde van een woning gemiddeld onderschatten alleen gebaseerd zijn op de periode vanaf 1986, ligt het voor de hand om te onderzoeken of dit ook het geval is in een dalende periode van de huizenmarkt. Op basis van het NVM repeat sales bestand voor de eengezinswoningen in de Regio West, hier gebaseerd op waarnemingen vanaf 1974, volgen in onderstaande tabel schattingen voor Δ . Hierbij zijn alleen die woningen meegenomen waarvoor de tijd tussen twee verkopen groter of gelijk is aan 3.5 jaar. We hebben de schatting voor de huizen die binnen de dalende periode van de huizenprijsindex, augustus 1977 tot en met december 1981, gekocht en

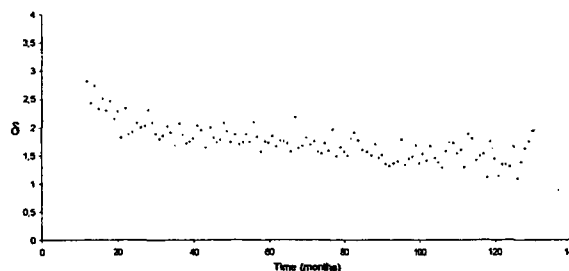
| Aan- en verkoop in | $\hat{\Delta}$ | N |
|--------------------|---------------------|-------|
| Dalende periode | 1.580E-03 (8.3E-04) | 40 |
| Overige perioden | 0.954E-03 (1.5E-05) | 37913 |

Tabel 6.A.1: Schattingen voor Δ

verkocht zijn, vergeleken met de schatting voor woningen die niet aan dit criterium voldoen. Achter de schatting staat de standaarddeviatie van deze schatter vermeld. We kunnen aan de hand van een t-toets onderzoeken of het verschil tussen de beide schattingen statistisch significant van nul verschilt. De overschrijdingskans van de toetsingsgrootte blijkt gelijk te zijn aan 0.46, waarmee we concluderen dat de parameter Δ in zowel een opwaartse als een neerwaartse periode van de huizenmarkt gelijk is.

De reden dat we alleen huizen hebben bekeken waarvoor de tijd tussen twee verkopen groter of gelijk is aan 3.5 jaar, is dat huizen die sneller doorverkocht worden, gemiddeld een hoger rendement blijken te hebben dan huizen die pas na een langere periode verkocht worden. Dit zouden zogenaamde starter homes kunnen zijn, of huizen die voor speculatieve doeleinden gekocht zijn.

Een laatste aanname die we zullen onderzoeken, is of de term δ onafhankelijk van de looptijd kan worden verondersteld. Hiertoe delen we in het repeat sales bestand elk rendement door $\sigma(T)^{18}$ en vervolgens berekenen we voor elke periode tussen aan- en verkoop van een huis de standaarddeviatie van de rendementen uitgerekend. Onderstaande grafiek geeft het resultaat weer:



Grafiek 6.A.3: Standaarddeviatie genormeerde rendementen

Zo op het eerste oog lijkt de δ negatief van de tijd af te hangen. Om te onderzoeken of het resultaat statistisch significant is, is op de puntenwolk een rechte lijn gefit en getoetst of de hellingscoëfficiënt significant is. Dit blijkt inderdaad het geval te zijn. Indien de dataset

¹⁸ In de grafiek staan de bevindingen weergegeven voor het ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986.

echter in twee stukken wordt opgesplitst ($t = 12$ tot en met $t = 71$ en $t = 72$ tot en met $t = 130$), vinden we alleen voor de eerste dataset een significante afhankelijkheid van de tijd. Om deze reden besluiten we om δ toch constant te veronderstellen.

6.A.2. Modelschattingen

De parameters voor alle indices zijn in een eerder stadium al geschat. We schatten δ door voor elke mogelijke periode tussen aanschaf en verkoop van een huis de standaarddeviatie van de rendementen op een huis te berekenen. Vervolgens delen we deze standaarddeviaties door $\sigma(T)$, en middelen we over de mogelijke periodes. Dit levert een schatting op voor δ .

De correlatie ρ schatten we door voor elke mogelijke periode tussen aanschaf en verkoop van een huis de correlatie te berekenen tussen de rendementen op de huizen en de rendementen op de index, en deze correlaties te middelen over de mogelijke periodes.

De term Δ tenslotte is geschat uit het verschil tussen het gemiddelde maandelijkse rendement op een huis en het gemiddelde maandelijkse rendement op de index, voor huizen waarbij de tijd tussen aanschaf en verkoop langer duurde dan 3.5 jaar. Uiteindelijk verkrijgen we voor het Kadaster databestand de volgende schattingen:

| | | Δ | ρ | ARMA δ | Changepoint δ |
|----------------------|--------------|----------|--------|---------------|----------------------|
| Appartementen | Noord | 1.17E-03 | 0.08 | 4.27 | 1.69 |
| | Oost | 1.12E-03 | 0.02 | 5.26 | 1.94 |
| | Rand | 4.17E-04 | 0.08 | 2.93 | 3.01 |
| | West | 1.49E-03 | 0.07 | 4.35 | 2.29 |
| | Zuid | 1.41E-03 | 0.05 | 5.08 | 2.00 |
| Woningen | Noord | 9.21E-04 | 0.02 | 2.42 | 3.52 |
| | Oost | 1.81E-03 | 0.04 | 3.41 | 4.50 |
| | Rand | 1.97E-03 | 0.07 | 2.95 | 2.22 |
| | West | 2.11E-03 | 0.07 | 3.16 | 3.26 |
| | Zuid | 1.38E-03 | 0.04 | 3.74 | 5.51 |

Tabel 6.A.2: Modelschattingen rendementen huizenprijzen

Met Changepoint bedoelen we hier het tijdreeksmodel dat veranderende regimes meeneemt. De implicaties van deze schattingen worden in het hoofdstuk Risico Particulier bekeken.

6.B. Mean-variance analyse

In deze appendix zullen we een mean-variance analyse uitvoeren op de portefeuille van een particulier, hier bestaande uit een woning en een waardedelingshypotheek. De focus zal liggen op de papieren winst die een huiseigenaar maakt gedurende de looptijd van een waardedelingshypotheek. Er zullen afdrukkingen worden afgeleid voor het optimale waardedelingspercentage, het waardedelingspercentage dat de variantie van dit bedrag minimaliseert, en het variantie reductie percentage. Dit laatste geeft weer met hoeveel procent de variantie van de papieren winst is gedaald ten opzichte van de situatie dat men geen waardedelingshypotheek heeft afgesloten.

In een traditionele mean-variance analyse in de trant van Nobelprijswinnaar Markowitz [1959] wordt uitgegaan van een zogenaamde mean-variance investeerder; dit betekent dat de nutsfunctie van deze persoon louter en alleen afhangt van het verwachte rendement op de portefeuille en de variantie van dit rendement. Het doel van de investeerder is zijn verwachte nut te maximaliseren. Indien de verdeling van het rendement op de portefeuille uniek gekarakteriseerd wordt door de verwachting en de variantie van dit rendement, of als de nutsfunctie kwadratisch is, is de aanname van een mean-variance investeerder niet nodig.

We zullen hier uitgaan van een risico-averse mean-variance investeerder. Dit houdt in dat als deze persoon de keuze heeft tussen twee portefeuilles met hetzelfde verwachte rendement, maar als een van de portefeuilles een lagere variantie heeft, hij voor deze laatste kiest. Als hij kan kiezen tussen twee portefeuilles met eenzelfde variantie, maar een verschillend verwacht rendement, dan kiest hij voor die portefeuille waarbij het rendement het hoogste is. Voor een particulier lijkt dit een redelijk criterium. Zoals gezegd bekijken we de portefeuille bestaande uit de woning en een waardedelingshypotheek met een waardedelingspercentage dat gelijk is aan 100k%, en een looptijd gelijk aan T maanden. De aandelen en obligaties die een particulier eventueel kan bezitten, nemen we niet mee in de analyse, daar de rendementen hierop laag gecorreleerd zijn met de rendementen op een woning. De woning beschouwen we als een gegeven: de particulier wil hierin blijven wonen gedurende de looptijd van de waardedelingshypotheek. De enige keuzeparameter die de particulier heeft is derhalve het waardedelingspercentage¹⁹. De winst die de particulier op papier heeft gemaakt gedurende de looptijd van de waardedelingshypotheek, is dan ook:

$$\Pi_{k,T} = P_0 \cdot (S_{2,T} - e^{rT} - k(S_{1,T} - 1)^+ + ke^{rT} c(T, 1, 1))$$

Hierbij geeft $S_{i,t}$ de stand van index i op tijdstip t aan; index 1 is de huizenprijsindex, terwijl index 2 de echte waardeontwikkeling van het huis weergeeft. Zonder beperking der algemeenheid gaan we er van uit dat deze indices op tijdstip 0 een waarde gelijk aan 1 hebben. Tenslotte is P_0 de waarde van de woning bij aanschaf, en r het risicovrije rendement dat op een obligatie behaald kan worden.

We gaan er van uit dat bij de prijs van de call-optie geen risicopremie is opgeteld, zodat de prijs van de call-optie gelijk is aan de verdisconteerde verwachting van de uitbetaling. Dit betekent voor de verwachting en de variantie van $\Pi_{k,T}$:

$$\begin{aligned} E(\Pi_{k,T}) &= P_0 \cdot (E(S_{2,T}) - e^{rT}) \\ \text{Var}(\Pi_{k,T}) &= P_0^2 \cdot (\text{Var}(S_{2,T}) - 2k \text{Cov}(S_{2,T}, (S_{1,T} - 1)^+) + k^2 \text{Var}(S_{1,T} - 1)^+) \end{aligned} \quad (6.B.1)$$

¹⁹ De looptijd kan ook gevarieerd worden, we zullen deze hier echter als vast beschouwen.

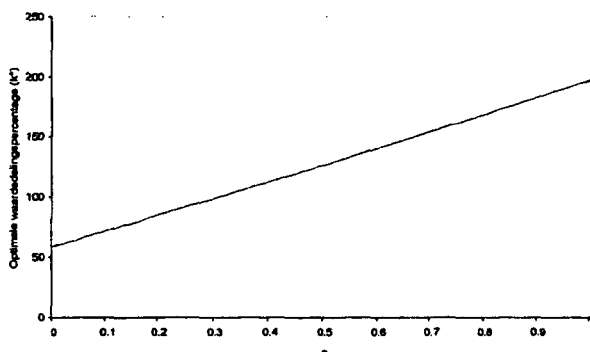
Afhankelijk van het gekozen model voor de huizenprijsindex kunnen deze formules uitgeschreven worden met behulp van een aantal formules uit de appendix voor de multilognormale verdeling. Dit zullen we hier niet doen. Aangezien de verwachting van de portefeuille niet afhangt van het waardedelingspercentage, kunnen we ons bij de mean-variance analyse beperken tot het minimaliseren van de variantie.

6.B.1. Optimale waardedelingspercentage

Voor het optimale waardedelingspercentage k^* , het waardedelingspercentage dat de variantie van $\Pi_{k,T}$ minimaliseert, geldt op grond van (6.B.1) het volgende:

$$k^* = \frac{\text{Cov}(S_{2,T}, (S_{1,T} - 1)^+)}{\text{Var}(S_{1,T} - 1)^+}$$

In de portefeuilletheorie is de beta van een aandeel gelijk aan de covariantie van het rendement op het aandeel met het rendement op de marktportefeuille, gedeeld door de variantie van het rendement op de marktportefeuille. Het optimale waardedelingspercentage is dus gelijk aan de beta van de waardeontwikkeling van het huis ten opzichte van het positieve gedeelte van waardeontwikkeling van de index. Bij een looptijd van 10 jaar ziet k^* er voor de appartementen in de Regio Oost als functie van ρ , als volgt uit:



Grafiek 6.B.1: Optimale waardedelingspercentage als functie van ρ

Hierbij is het tijdreeksmodel met veranderende regimes voor de huizenprijsindex gebruikt. Voor het ARMA tijdreeksmodel voor de huizenprijsindex blijkt het verband tussen het optimale waardedelingspercentage en ρ zelfs lineair te zijn. Dit laatste zullen we hier aantonen. Onder dit model is de kans dat de index daalt vrijwel nihil. We kunnen in (12) dan ook $(S_{1,T} - 1)^+$ benaderen door $S_{1,T} - 1$. Voor de variantie van $\Pi_{k,T}$ geldt dan:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Pi_{k,T}) &\approx P_0^2 \cdot (\text{Var}(S_{2,T}) - 2k \text{Cov}(S_{2,T}, S_{1,T}) + k^2 \text{Var}(S_{1,T})) \\ &= P_0^2 e^{2\mu(T)} \left(e^{\delta^2 \sigma^2(T)} (e^{\delta^2 \sigma^2(T)} - 1) - 2k (e^{\rho \delta \sigma^2(T)} - 1) e^{\frac{1}{2}(1+\delta^2)\sigma^2(T)} + k^2 e^{\sigma^2(T)} (e^{\sigma^2(T)} - 1) \right) \end{aligned}$$

Het optimale waardedelingspercentage k^* kunnen we dan als volgt benaderen:

$$k^* \approx \frac{\text{Cov}(S_{2,T}, S_{1,T})}{\text{Var}(S_{1,T})} = \frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T)(\delta^2-1)} (e^{\rho \delta \sigma^2(T)} - 1)}{e^{\sigma^2(T)} - 1}$$

Een observatie die we al in de Appendix – Gevoeligheden Optiewaarderingsmodel hebben gedaan, is dat de variantie $\sigma^2(T)$ betrekkelijk klein is voor de bekeken looptijden van vijf en tien jaar. Voor een looptijd van 10 jaar geldt bijvoorbeeld dat $\sigma^2(T) = 0.002$ in het geval van de bekeken index. De volgende benadering voor het optimale waardedelingspercentage k^* lijkt aldus gerechtvaardigd:

$$k^* \approx \lim_{\sigma^2(T) \downarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{2}(\delta^2-1)\sigma^2(T)} (e^{\rho\delta\sigma^2(T)} - 1)}{e^{\sigma^2(T)} - 1} = \lim_{\sigma^2(T) \downarrow 0} \frac{\delta\rho\sigma^2(T) + O(\sigma^4(T))}{\sigma^2(T) + O(\sigma^4(T))} = \delta\rho \quad (6.B.2)$$

Op grond van deze benadering is k^* lineair afhankelijk van ρ , hetgeen we ook terugvinden als we k^* voor dit tijdreeksmodel gaan uitzetten tegen ρ .

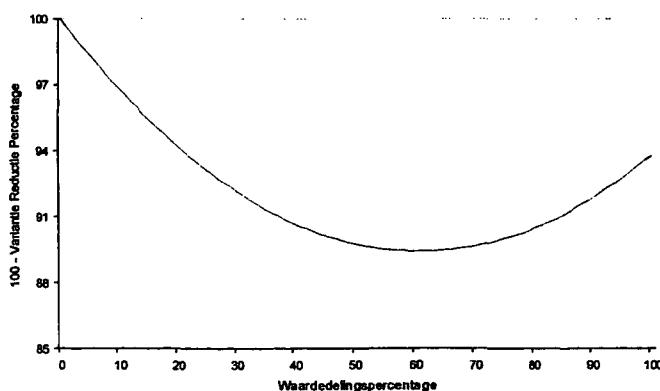
Voor het tijdreeksmodel met veranderende regimes kunnen we de affine afhankelijkheid niet zo eenvoudig aantonen; proefondervindelijk blijkt echter dat dit ook geheel te verklaren is door de kleine waarden voor $\sigma^2(T)$, die hier echter een niet te verwaarlozen effect hebben. De optimale waardedelingspercentages voor de verscheidene indices worden in hoofdstuk 6 besproken.

6.B.2. Variantie reductie percentage

Vervolgens bekijken we het variantie reductie percentage; dit is gelijk aan de procentuele daling van de variantie van $\Pi_{k,T}$ in het geval dat men een waardedelingshypotheek afsluit, ten opzichte van de situatie waarin men geen waardedelingshypotheek afgesloten heeft. In formulevorm is dit:

$$VRP_{k,T} = 1 - \frac{\text{Var}(\Pi_{k,T})}{\text{Var}(\Pi_{0,T})}$$

Voor de eerder gehanteerde index vertoont VRP als functie van het waardedelingspercentage k bij een looptijd van 10 jaar het volgende beeld, indien we het tijdreeksmodel met veranderende regimes voor de index gebruiken:



Grafiek 6.B.2: Variantie reductie percentage als functie van k

Het hanteren van het ARMA tijdreeksmodel voor de index leidt tot een vergelijkbare parabolische vorm van de curve. Voor het ARMA tijdreeksmodel kunnen we dit laten zien aan de hand van de eerdere benaderingen.

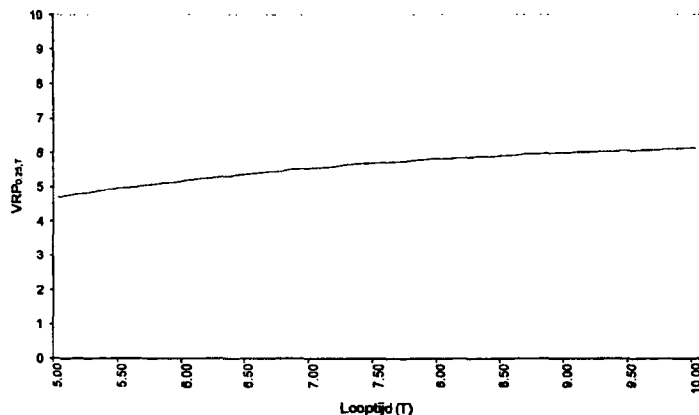
We kunnen weer schrijven:

$$VRP_{k,T} \approx 1 - \frac{\text{Var}(\Pi_{k,T})}{\text{Var}(\Pi_{0,T})} = \frac{2k \text{Cov}(S_{2,T}, S_{1,T}) - k^2 \text{Var}(S_{1,T})}{\text{Var}(S_{2,T})}$$

Net als bij de benadering voor het optimale waardedelingspercentage, zullen we ook hier weer gebruiken dat $\sigma^2(T)$ dicht bij nul ligt:

$$VRP_{k,T} \approx \lim_{\sigma^2(T) \downarrow 0} 2k \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}(1-\delta^2)\sigma^2(T)} (e^{\rho\delta\sigma^2(T)} - 1)}{e^{\delta^2\sigma^2(T)} - 1} - k^2 \cdot \frac{e^{(1-\delta^2)\sigma^2(T)} (e^{\sigma^2(T)} - 1)}{e^{\delta^2\sigma^2(T)} - 1} = 2\rho\frac{k}{\delta} - \left(\frac{k}{\delta}\right)^2$$

De gevonden benadering blijkt niet van de tijd af te hangen, iets dat we voor het echte variantie reductie percentage ook bij benadering terugvinden. Bij het tijdreeksmodel met veranderende regimes voor de index blijkt dit eveneens te gelden, hetgeen voor de eerder gebruikte index in onderstaande grafiek gezien kan worden:



Grafiek 6.B.3: $VRP_{0,25,T}$ als functie van de looptijd T

De uiteindelijke variantiereductiepercentages voor de verscheidene indices en beide gebruikte modellen worden in hoofdstuk 6 besproken.

6.C. Modelresultaten mismatch particulier

In deze appendix worden de relevante modelresultaten behorende bij de paragraaf 6.4. Mismatch particulier - kwantificering in volledige vorm weergegeven.

| | Appartementen | | | | | Woningen | | | | |
|--|---------------|------|------|------|------|----------|------|------|------|------|
| | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | Noord | Oost | Rand | West | Zuid |
| Tevredenheidspercentage | 65% | 61% | 53% | 64% | 62% | 57% | 64% | 62% | 65% | 60% |
| Mediaan afdracht/waardeverandering | 20% | 21% | 22% | 20% | 20% | 19% | 19% | 18% | 18% | 19% |
| Bovengrens afdracht/waardeverandering | 73% | 63% | 130% | 77% | 76% | 124% | 90% | 103% | 85% | 105% |
| Kans index stijgt en woning daalt | 1.2% | 0.2% | 4.1% | 1.2% | 0.9% | 4.9% | 2.2% | 3.1% | 1.8% | 3.0% |
| - gem. afdracht/waardeverandering | 11% | 21% | 22% | 17% | 20% | 17% | 19% | 23% | 20% | 19% |

Tabel 6.C.1: Resultaten ARMA-tijdreeksmodel vanaf 1986, looptijd 5 jaar

| | Appartementen | | | | | Woningen | | | | |
|--|---------------|------|------|------|------|----------|------|------|------|------|
| | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | Noord | Oost | Rand | West | Zuid |
| Tevredenheidspercentage | 77% | 69% | 54% | 70% | 67% | 59% | 68% | 66% | 70% | 64% |
| Mediaan afdracht/waardeverandering | 19% | 21% | 23% | 19% | 20% | 20% | 18% | 18% | 17% | 19% |
| Bovengrens afdracht/waardeverandering | 36% | 41% | 106% | 51% | 54% | 99% | 66% | 81% | 63% | 79% |
| Kans index stijgt en woning daalt | 0.0% | 0.0% | 0.8% | 0.0% | 0.0% | 1.1% | 0.3% | 0.5% | 0.2% | 0.5% |
| - gem. afdracht/waardeverandering | 1% | 0% | 64% | 41% | 54% | 45% | 51% | 66% | 54% | 52% |

Tabel 6.C.2: Resultaten tijdreeksmodel vanaf 1986, looptijd 10 jaar

| | Appartementen | | | | | Woningen | | | | |
|--|---------------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|------|-------|
| | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | Noord | Oost | Rand | West | Zuid |
| Tevredenheidspercentage | 61% | 63% | 61% | 70% | 62% | 63% | 73% | 70% | 75% | 69% |
| Mediaan afdracht/waardeverandering | 13% | 9% | 7% | 8% | 11% | 7% | 7% | 5% | 6% | 7% |
| Bovengrens afdracht/waardeverandering | 113% | 106% | 100% | 85% | 108% | 88% | 72% | 80% | 66% | 80% |
| Kans index stijgt en woning daalt | 10.8% | 13.3% | 18.2% | 10.4% | 13.1% | 18.1% | 10.3% | 12.2% | 9.6% | 13.5% |
| - gem. afdracht/waardeverandering | 8% | 8% | 7% | 7% | 7% | 6% | 6% | 8% | 6% | 6% |

Tabel 6.C.3: Resultaten tijdreeksmodel met veranderende regimes, looptijd 5 jaar

| | Appartementen | | | | | Woningen | | | | |
|--|---------------|------|-------|------|------|----------|------|------|------|------|
| | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | Noord | Oost | Rand | West | Zuid |
| Tevredenheidspercentage | 64% | 64% | 60% | 73% | 66% | 64% | 77% | 74% | 80% | 72% |
| Mediaan afdracht/waardeverandering | 15% | 12% | 10% | 9% | 14% | 9% | 8% | 7% | 7% | 9% |
| Bovengrens afdracht/waardeverandering | 102% | 107% | 116% | 78% | 107% | 100% | 65% | 80% | 60% | 79% |
| Kans index stijgt en woning daalt | 5.3% | 8.6% | 14.5% | 6.7% | 6.3% | 13.2% | 6.4% | 8.2% | 5.5% | 9.1% |
| - gem. afdracht/waardeverandering | 15% | 15% | 14% | 11% | 16% | 11% | 10% | 15% | 10% | 11% |

Tabel 6.C.4: Resultaten tijdreeksmodel met veranderende regimes, looptijd 10 jaar

Appendix 7 – Risico Bank

Deze appendix bevat de volgende subappendices, alle behorende bij hoofdstuk 7:

A – Modellering vraag naar waardedelingshypotheken

B – Value at Risk

7.A. Modellering vraag naar waardedelingshypotheken

In deze appendix zullen een aantal vraagfactoren gemodelleerd worden, die we later gebruiken om de vraag naar waardedelingshypotheken te bepalen. We gaan er van uit dat de waardedelingshypothek alleen bij aanschaf van een huis verkocht wordt. In dit geval hangt het aantal waardedelingshypotheken dat in een maand verkocht zal worden van de volgende factoren af:

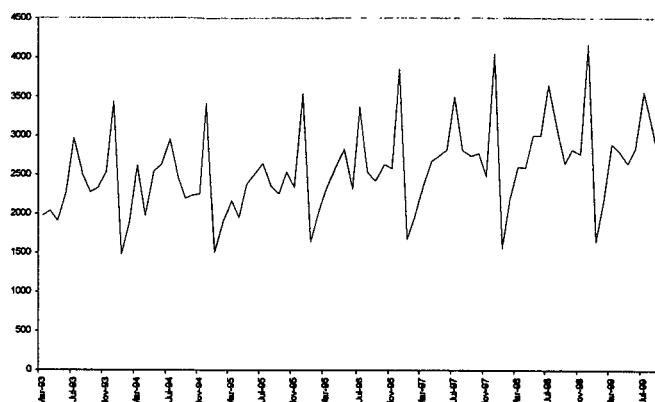
- Aantal verkochte woningen in die maand;
- Marktaandeel Rabobank op het gebied van hypotheken voor de aanschaf van een huis;
- Marktaandeel waardedelingshypothek.

In de eerste twee paragrafen van deze appendix zullen de eerste twee factoren gemodelleerd worden. Aangezien het marktaandeel van de waardedelingshypothek op voorhand slechts geschat kan worden, wordt deze niet gemodelleerd.

Naast het aantal waardedelingshypotheken dat in een maand verkocht wordt, is natuurlijk ook de prijs van de woningen waarop deze hypotheken af worden gesloten belangrijk. We brengen in herinnering dat de aanschaf van een waardedelingshypothek overeenkomt met het verkopen van $\frac{kP}{S}$ call opties op de regionale huizenprijsindex; hierbij is 100k% het waardedelingspercentage, en is de factor $\frac{P}{S}$ gelijk aan de prijs van de woning gedeeld door de stand van de index op dat moment. Deze factor, die we in het vervolg aan zullen duiden met de index-gecorrigeerde verkoopprijs, zal het onderwerp zijn van de laatste paragraaf.

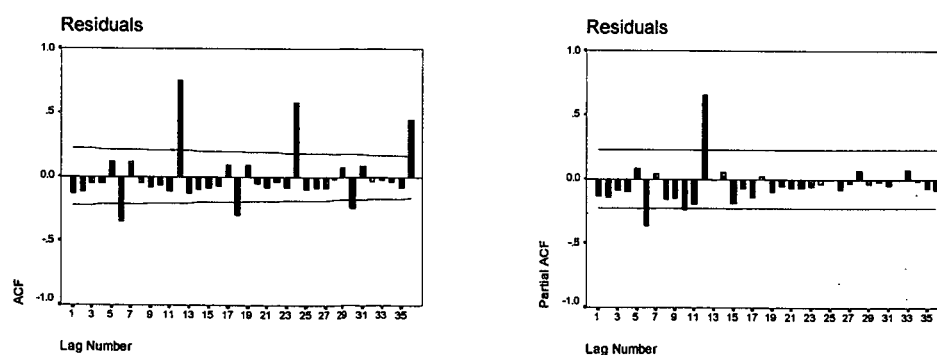
7.A.1. Transactieaantallen per woningtype per regio

Om het risico van de bank te analyseren, is het nodig om de maandelijkse vraag naar waardedelingshypotheken te weten. Deze zal afhangen van het aantal verkochte eengezinswoningen en appartementen in een maand, hetgeen we in deze paragraaf trachten te modelleren. We zullen ons beperken tot de transactieaantallen op basis van het Kadaster transactiebestand. In onderstaande grafiek staat het aantal transacties weergegeven voor woningen uit de Regio Zuid:



Grafiek 7.A.1: Aantallen transacties voor appartementen in de Regio Zuid

Er blijkt een sterk seizoenspatroon te ontstaan in het aantal transacties per maand. In december blijken de meeste transacties geregistreerd te worden, in tegenstelling tot januari, dat het minste aantal transacties heeft. Tevens bemerken we een licht stijgende trend in het aantal transacties per maand. Na het weghalen van deze trend, kunnen we de volgende grafieken maken van de autocorrelaties en de partiële autocorrelaties:



Grafiek 7.A.2: Autocorrelaties en partiële autocorrelaties van de residuen

Het seizoenspatroon is duidelijk terug te vinden in de autocorrelaties; de zesde, twaalfde, achttiende, etc. autocorrelaties en partiële autocorrelaties zijn significant. Na het fitten van een AR(12) model op de residuen, blijkt geen van de autocorrelaties nog significant te zijn: de overschrijdingskans van de Box-Ljung toetsingsgrootte voor de eerste vierentwintig autocorrelaties is gelijk aan 0.204. Aan normaliteit van de residuen blijkt voldaan te zijn, alsmede aan het feit dat geen van de autocorrelaties tussen de gekwadraterde residuen significant is. Deze conclusies kunnen doorgetrokken worden voor de meeste indices.

Het model dat we bekeken hebben voor het aantal transacties per maand voor index i , n_{it} , is in wiskundige termen het volgende (merk op dat de aantallen uit het model afgerond dienen te worden om gehele transactie aantallen te verkrijgen):

$$n_{it} = \alpha + \beta t + \varepsilon_{it}$$

$$\varepsilon_{it} = \rho \varepsilon_{i,t-12} + u_{it}$$

$$u_{it} \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d. in time}$$

Met waarnemingen vanaf maart 1993 tot en met september 1999 ($t = 0$) zijn de schattingen voor alle indices in onderstaande tabel terug te vinden:

| Woningtype | Regio | α | β | ρ | σ |
|---------------|----------|----------|---------|--------|----------|
| Appartementen | Noord | 190.65 | 1.29 | 0.41 | 23.16 |
| | Oost | 318.86 | 1.76 | 0.65 | 32.17 |
| | Randstad | 900.23 | 3.00 | 0.74 | 77.45 |
| | West | 590.31 | 1.84 | 0.72 | 58.31 |
| | Zuid | 324.04 | 1.76 | 0.81 | 29.85 |
| Woningen | Noord | 1294.27 | 3.79 | 0.77 | 132.53 |
| | Oost | 2342.21 | 8.64 | 0.90 | 195.67 |
| | Randstad | 590.95 | 1.77 | 0.67 | 69.89 |
| | West | 3247.54 | 5.43 | 0.89 | 275.90 |
| | Zuid | 2925.88 | 9.01 | 0.93 | 230.30 |

Tabel 7.A.1: Schattingen voor vergelijking (1)

Daar de indices alle een soortgelijk patroon vertonen, lijkt het aannemelijk dat de fouttermen voor de verschillende indices onderling gecorreleerd zullen zijn. We staan dit dan ook toe:

$$\text{Corr}(u_{it}, u_{jt}) = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

De correlatiematrix voor de residuen is in onderstaande tabel terug te vinden:

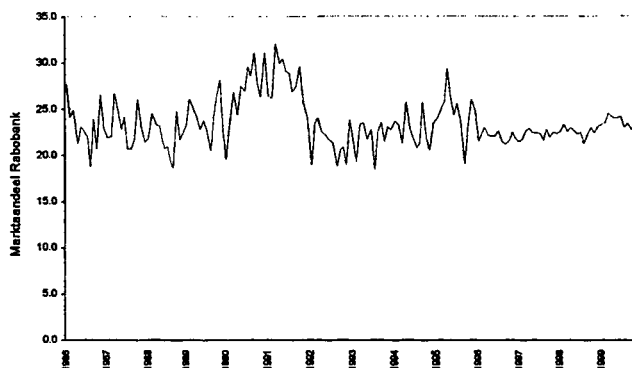
| | | Appartementen | | | | | Woningen | | | | |
|---------------|-------|---------------|------|------|------|------|----------|------|------|------|------|
| | | Noord | Oost | Rand | West | Zuid | Noord | Oost | Rand | West | Zuid |
| Appartementen | Noord | 1.00 | 0.56 | 0.54 | 0.54 | 0.27 | 0.61 | 0.53 | 0.37 | 0.45 | 0.39 |
| | Oost | 0.56 | 1.00 | 0.63 | 0.64 | 0.42 | 0.70 | 0.61 | 0.61 | 0.57 | 0.56 |
| | Rand | 0.54 | 0.63 | 1.00 | 0.70 | 0.57 | 0.74 | 0.71 | 0.50 | 0.65 | 0.60 |
| | West | 0.54 | 0.64 | 0.70 | 1.00 | 0.56 | 0.71 | 0.63 | 0.58 | 0.68 | 0.57 |
| | Zuid | 0.27 | 0.42 | 0.57 | 0.56 | 1.00 | 0.59 | 0.47 | 0.59 | 0.56 | 0.57 |
| Woningen | Noord | 0.61 | 0.70 | 0.74 | 0.71 | 0.59 | 1.00 | 0.76 | 0.71 | 0.77 | 0.76 |
| | Oost | 0.53 | 0.61 | 0.71 | 0.63 | 0.47 | 0.76 | 1.00 | 0.50 | 0.72 | 0.76 |
| | Rand | 0.37 | 0.61 | 0.50 | 0.58 | 0.59 | 0.71 | 0.50 | 1.00 | 0.69 | 0.63 |
| | West | 0.45 | 0.57 | 0.65 | 0.68 | 0.56 | 0.77 | 0.72 | 0.69 | 1.00 | 0.75 |
| | Zuid | 0.39 | 0.56 | 0.60 | 0.57 | 0.57 | 0.76 | 0.76 | 0.63 | 0.75 | 1.00 |

Tabel 7.A.2: Correlatiematrix voor de residuen

Alle schattingen in deze paragraaf werden significant bevonden bij een onbetrouwbaarheidsniveau van 5%.

7.A.2. Marktaandeel Rabobank

Van de afdeling Marktanalyse en Productontwikkeling van het segment Huis en Hypotheekadvies hebben we voor de periode 1986-1999 de beschikking gekregen over maandelijkse cijfers van het marktaandeel van de Rabobank op het gebied van afgesloten hypotheeklen voor de aanschaf van een huis. Deze data had betrekking op alle woningen in geheel Nederland, zodat we niet weten hoe dit marktaandeel per woningtype of regio verschilt; we zullen aannemen dat het marktaandeel voor alle woningtypen en regio's gelijk is aan het marktaandeel voor geheel Nederland. De data wordt weergegeven in onderstaande grafiek:



Grafiek 7.A.3: Marktaandeel Rabobank voor hypotheeklen

De laatste jaren blijkt het marktaandeel vrijwel stabiel rond een gemiddelde van 22.6%. Gezien de zeer geringe fluctuaties hierin over de periode 1996-1999 lijkt het aannemelijk om voor de simulatie dit marktaandeel als constant te beschouwen. Een verandering van het marktaandeel van de Rabobank met 1% ten opzichte van dit gemiddelde niveau levert ceteris paribus een verandering van ongeveer 4% in het aantal verkochte waardedelingshypotheeklen.

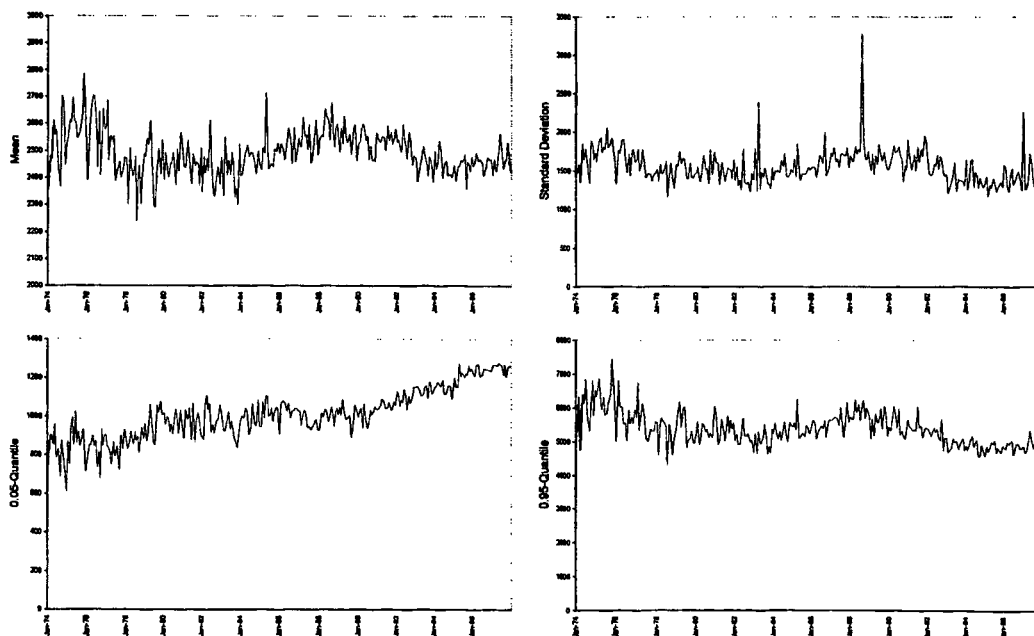
7.A.3. Index-gecorrigeerde transactiepreizen

Om het risico van de bank te bepalen indien zij een product als de waardedelingshypotheek gaat verkopen, is het belangrijk om de grootte van de binnenkomende contracten te kwantificeren. In de eerste subparagraaf zullen we dan ook de opbouw van de huizenmarkt onderzoeken aan de hand van het bestand van de NVM, met hierin alle door bij de NVM aangesloten makelaars verrichte verkopen. In de tweede subparagraaf wordt hetzelfde gedaan voor het Kadaster transactiebestand.

7.A.3.1. NVM transactiebestand

Indien we naar verkoopprijzen door de tijd kijken, merken we dat de gemiddelde verkoopprijs gestegen is, als gevolg van de inflatie. Dit is uiteraard niet de enige economische variabele die de stijging van de gemiddelde verkoopprijzen veroorzaakt; veranderingen in de vraag- en de aanbodzijde van de huizenmarkt kunnen er bijvoorbeeld voor zorgen dat een bepaalde prijsklasse van huizen opeens veel minder verkocht wordt, hetgeen het gemiddelde niveau eveneens kan laten stijgen. Deze factoren zullen echter vrij ingewikkeld te modelleren zijn.

In eerste instantie lijkt het daarom interessant om het gedrag te bestuderen van voor de indexstijging gecorrigeerde verkoopprijzen (transactieprijs gedeeld door de stand van de index op het moment van verkoop). In onderstaande grafiek geven we per maand het gemiddelde, standaarddeviatie, 5% en 95% quantiel weer van de index-gecorrigeerde verkoopprijzen, voor de woningen in de Regio West, in de periode 1974-1997:



Grafiek 7.A.4: Gemiddelde, standaarddeviatie, 0.05- en 0.95-quantiel van de index-gecorrigeerde verkoopprijs

De sterke schommelingen in het gemiddelde in de periode 1974-1980 zijn hoogstwaarschijnlijk te wijten aan het geringe aantal door de NVM geregistreerde verkopen in die periode. De gemiddelde index-gecorrigeerde verkoopprijs blijkt rond de 2500 te schommelen (N.B. de stand van alle indices op maart 1993 is gelijk gekozen aan 100). De standaarddeviatie blijkt te

schommelen tussen de 1000 en de 2000. Uit nader onderzoek blijkt dat de drie pieken bij de standaarddeviatie worden veroorzaakt door de verkoop van één duur huis in die periode.

Er valt op dat het 5%-quantiel in de loop der jaren een stijging vertoont. Dit kan aanduiden dat er steeds minder huizen van de onderkant van de huizenmarkt verkocht worden.

Het is ons doel om de verdeling van de index-gecorrigeerde verkoopprijs te modelleren over de komende jaren. Veranderingen in de vraag- en aanbodzijde van de huizenmarkt zullen ingewikkeld te modelleren zijn; we veronderstellen daarom dat deze in de toekomst gelijk zullen blijven aan de huidige situatie. Uit de grafiek krijgen we een vermoeden dat de betreffende verdeling in de periode 1974-1997 niet constant is gebleven. Hoe dan ook lijkt het op basis van bovenstaande grafieken redelijk om te veronderstellen dat de verdeling over de afgelopen 5 à 10 jaar, vanuit 1997 gezien, gelijk is gebleven.

Dit vermoeden kan getoetst worden met de *Kruskal-Wallis*²⁰ toets, welke onderscheidend is voor verschuivingen in de verdeling. De toetsingsgrootheid K behorende bij deze toets is asymptotisch χ^2_{k-1} verdeeld onder de aanname dat de verdeling van alle vergeleken groepen gelijk is; k is hierbij het aantal groepen dat vergeleken wordt. We verwerpen de nulhypothese dat alle groepen gelijk zijn verdeeld indien de overschrijdingskans van de uitkomst van de toets kleiner is dan het vooraf gekozen onbetrouwbaarheidsniveau α .

We zullen in eerste instantie toetsen of de verdeling van de index-gecorrigeerde verkoopprijs over de afgelopen 5 jaar gelijk is gebleven, waarbij we de verkopen per maand groeperen. De toetsingsgrootheid K levert de waarde 99.01 op, met een bijbehorende overschrijdingskans van 0.001. Bij een onbetrouwbaarheidsniveau gelijk aan 0.05 nemen we niet aan dat de verdeling over de periode 1993-1997 gelijk is gebleven, indien we de verkopen per maand groeperen.

De verwerping van de nulhypothese zou hier verklaard kunnen worden doordat er in bepaalde maanden van het jaar meer woningen verkocht worden met een hogere index-gecorrigeerde verkoopprijs dan in andere maanden van het jaar. We kunnen dit vermoeden onderzoeken door een regressie uit te voeren op alle verkopen uit de periode 1993-1997 en dummy variabelen die de maanden representeren. Uit deze regressie blijkt dat in die periode in de maanden april en mei er significant duurdere woningen - op basis van de index-gecorrigeerde verkoopprijs - werden verkocht dan in andere maanden.

Indien we nu weer toetsen of de verdeling over de periode 1993-1997 gelijk is gebleven, maar nu de verkopen per jaar groeperen, blijkt dat er geen reden is om aan te nemen dat de verdeling veranderd is. In onderstaande tabel vindt u de overschrijdingskansen van de toetsingsgrootheid voor alle regio's, opgesplitst naar appartementen en woningen:

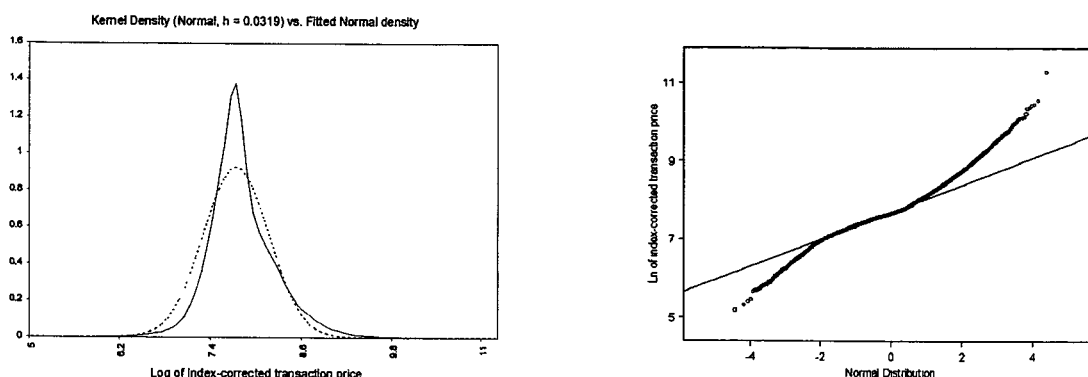
| | <i>Appartementen</i> | <i>Woningen</i> |
|-------------------|----------------------|-----------------|
| <i>Noord</i> | 0.626 | 0.4 |
| <i>Oost</i> | 0.944 | 0.307 |
| <i>Randsteden</i> | 0.924 | 0.43 |
| <i>West</i> | 0.823 | 0.527 |
| <i>Zuid</i> | 0.711 | 0.438 |

Tabel 7.A.3: Overschrijdingskansen van de toetsingsgrootheid

In geen van de regio's blijkt er reden te bestaan om aan te nemen dat de verdeling over de periode 1993-1997 veranderd is.

²⁰ Meer informatie over deze toets kan gevonden worden in Montgomery [1997].

We zullen nu de vorm van de verdeling van de index-gecorrigeerde verkoopprijs over de periode 1993-1997 analyseren. Om een eerste indruk van de verdeling te krijgen, schatten we de dichtheid van de logaritme (in het plaatje afgezet tegen de gefitte normale verdelingsfunctie, met een gestippelde lijn weergegeven), en maken we een QQ-plot van de logaritme tegen de normale verdeling.



Grafiek 7.A.5: Verdeling en QQ-plot van de logaritme van de index-gecorrigeerde verkoopprijs

We merken dat - in ieder geval wat betreft de woningen in de regio - de verdeling in het middenstuk afwijkt van de lognormale verdeling. Indien we met behulp van de Kolmogorov-Smirnov toets nagaan of de verdeling lognormaal is, blijkt deze veronderstelling ruimschoots verworpen te worden. Dit is eveneens het geval voor alle andere regio's, uitgesplitst naar woningen en appartementen. Gezien het aantal door de NVM geregistreerde verkopen in de periode 1993-1997, terug te vinden in onderstaande tabel, kunnen we de verdeling van de index-gecorrigeerde verkoopprijs in een simulatie gebruiken door uit deze empirische verdeling te simuleren.

| | <i>Appartementen</i> | <i>Woningen</i> |
|-------------------|----------------------|-----------------|
| <i>Noord</i> | 5509 | 41298 |
| <i>Oost</i> | 8617 | 75310 |
| <i>Randsteden</i> | 16400 | 17222 |
| <i>West</i> | 17406 | 98766 |
| <i>Zuid</i> | 6595 | 58055 |

Tabel 7.A.4: Aantal door de NVM geregistreerde verkopen over 1993-1997

7.A.3.2. Kadaster transactiebestand

Voor het transactiebestand van het Kadaster kunnen de resultaten doorgetrokken worden, met uitzondering van het feit dat hier de index-gecorrigeerde transactieprijs slechts over de laatste drie jaren gelijk verondersteld mag worden. Dit verschil in vergelijking met het NVM transactiebestand - waar de afgelopen vijf jaar gelijk mochten worden verondersteld - zal ongetwijfeld veroorzaakt worden door het feit dat de woningen uit het NVM transactiebestand een homogener groep vormen dan de woningen uit het bestand van het Kadaster.

De overschrijdingskansen van de Kruskal-Wallis toetsingsgrootte voor de verschillende regio's en woningtypen kunnen op de volgende pagina teruggevonden worden, evenals de aantallen transacties over de periode 1996-1998.

| | <i>Appartementen</i> | <i>Woningen</i> |
|-------------------|----------------------|-----------------|
| <i>Noord</i> | 0.112 | 0.004 |
| <i>Oost</i> | 0.758 | 0.025 |
| <i>Randsteden</i> | 0.148 | 0.173 |
| <i>West</i> | 0.705 | 0.053 |
| <i>Zuid</i> | 0.365 | 0.825 |

Tabel 7.A.5: Overschrijdingskans van de toetsingsgroottheid voor het Kadaster transactiebestand

| | <i>Appartementen</i> | <i>Woningen</i> |
|-------------------|----------------------|-----------------|
| <i>Noord</i> | 7322 | 46301 |
| <i>Oost</i> | 11787 | 79877 |
| <i>Randsteden</i> | 32792 | 22334 |
| <i>West</i> | 22227 | 116871 |
| <i>Zuid</i> | 12088 | 100957 |

Tabel 7.A.6: Aantal door het Kadaster geregistreerde verkopen over 1996-1998

We merken op dat voor de woningen in de regio's Noord en Oost de hypothese dat de index-gecorrigeerde transactiepreizen over de periode 1996-1998 gelijk is gebleven, verworpen wordt bij een onbetrouwbaarheidsniveau van 5%; gezien de resultaten voor de andere indices zullen we dit echter negeren. Ook hier zijn de transactieaantallen over deze periode dusdanig, dat we de verdeling van de index-gecorrigeerde transactieprijs kunnen benaderen door uit de empirische verdeling te simuleren.

7.B. Value at Risk

De Value at Risk (VaR), een concept dat in paragraaf 7.2 is uitgelegd, is niet eenvoudig uit te rekenen voor grote portefeuilles. In deze appendix beschrijven we een tweetal methoden om deze grootte te benaderen. De eerste paragraaf behandelt de Delta-Normal VaR, een eerste orde benadering voor de VaR. In de tweede paragraaf wordt deze benadering uitgebreid zodat deze voor de portefeuille die wij bekijken gebruikt kan worden. Er zal blijken dat deze benadering wisselend presteert t.o.v. de echte VaR, welke met simulatie bepaald kan worden. Derhalve wordt in de derde paragraaf een aanbeveling gedaan voor een veel betere benadering, welke echter bij gebrek aan tijd niet geïmplementeerd is.

7.B.1. Delta-Normal VaR

We zullen hier de delta-normal VaR benadering behandelen zoals wij deze in het vervolg van de scriptie zullen gebruiken. Deze wijkt enigszins af van de gebruikelijke delta-normal VaR benadering zoals deze door de RiskMetrics Group is geïntroduceerd; dit ligt aan het feit dat de onderliggende waarde hier slechts op discrete tijdstippen verandert. Ten eerste voeren we de volgende notatie in:

$$c_{it}(t, S_{it}) = c_i(\tau, S_{it}, S_{i,t-(T-\tau)})$$

$$\Delta_{it}(t) = \frac{\partial c_{i,\tau}(t, S_{i,t-1})}{\partial S_{i,t-1}} \cdot S_{i,t-1} = \begin{cases} S_{i,t-1} e^{-\tau + \mu(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)} N(d_1) & 1 \leq \tau < T \\ S_{i,t-1} e^{-\tau} \left(e^{\mu(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)} N(d_1) - N(d_2) \right) & \tau = T \end{cases}$$

Hierbij geeft $c_{it}(t, S_{it})$ dus de prijs van een optie op index i op tijdstip t weer, met tijd tot expiratie gelijk aan τ , en huidige waarde van de index gelijk aan S_{it} .

Een eerste orde benadering voor $c_{it}(t+1, S_{i,t+1})$ kan nu eenvoudig worden gevonden:

We kunnen $c_{it}(t+1, S_{i,t+1})$ als volgt schrijven:

$$c_{it}(t+1, S_{i,t+1}) = c_{it}(t+1, S_{it} e^{r_{i,t+1}})$$

Een eerste orde benadering voor de optieprijs wordt dan:

$$c_{it}(t+1, S_{i,t+1}) = c_{it}(t+1, S_{it}) + \Delta_{it}(t+1, S_{it}) \cdot r_{i,t+1} + O(r_{i,t+1}^2)$$

Met deze eerste orde benadering zullen we een benadering voor de VaR bepalen. De VaR is impliciet als volgt gedefinieerd:

$$P(c_{it}(t+1, S_{i,t+1}) - c_{i,\tau+1}(t, S_{it}) \leq -\text{VaR}_{1-\alpha}(t)) = \alpha$$

Indien we aannemen dat de rendementen op de onderliggende index normaal verdeeld zijn met gemiddelde μ_r en standaarddeviatie σ_r , is de volgende uitdrukking een benadering voor de Value at Risk op tijdstip t bij een betrouwbaarheidsniveau van $100(1-\alpha)\%$:

$$\text{VaR}_{1-\alpha}(t) \approx -\Delta_{it}(t+1, S_{it}) \cdot (\mu_r + \sigma_r \cdot N^{-1}(\alpha)) + c_{i,\tau+1}(t, S_{it}) - c_{it}(t+1, S_{it})$$

7.B.2. Portfolio Delta-Normal VaR

We zullen in deze paragraaf de benadering uit de vorige paragraaf voor de VaR van een optie gebruiken om de VaR van de portefeuille van call opties op de index te benaderen, welke de bank bij het verhandelen van de waardedelingshypotheek aan zal houden. Indien we met $X_{i\tau}(t)$ de hoeveelheid calls met tijdstip tot expiratie gelijk aan τ op tijdstip t weergeven, is de marktwaarde van de portefeuille op tijdstip t gelijk aan:

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{\tau=0}^T X_{i\tau}(t) \cdot c_{i\tau}(t, S_{i,t})$$

Zoals in paragraaf 7.1 duidelijk is gemaakt, arriveren er op tijdstip $t+1$ nieuwe klanten die een waardedelingshypotheek willen afsluiten. Dit betekent voor de regionale indices waarbij $i = 1, \dots, N-1$:

$$X_{i\tau}(t+1) = D_i(t+1) = \sum_{j=1}^{d_i(t+1)} k Y_{ij}(t+1)$$

$$d_i(t+1) = m_R m_{t+1} n_{i,t+1}$$

Wederom is m_R hierbij het marktaandeel van de Rabobank, m_{t+1} het percentage klanten dat interesse heeft in de waardelingshypotheek op tijdstip $t+1$ en $n_{i,t+1}$ het aantal nieuwe klanten voor index i . De grootheid $Y_{ij}(t+1)$ tenslotte geeft de index-gecorrigeerde transactieprijs van de als j^e op tijdstip $t+1$ aangekomen klant weer. Voor meer informatie over deze grootheden wordt u verwezen naar de Appendix - Modellerings vraag naar waardedelingshypotheeken.

Vervolgens is belangrijk te beschrijven welk optievolumen op tijdstip $t+1$ uitgezet wordt aan beleggerskant. We zullen ons beperken tot strategieën van de volgende vorm:

$$X_{NT}(t+1) = -\psi \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N-1} D_i(t+1) \cdot c_{i\tau}(t+1)}{c_{NT}(t+1)}$$

Er wordt op tijdstip $t+1$ $100\psi\%$ van het nieuw binnengekomen optievolumen uitgezet. Tenslotte hebben de opties op index i met op tijdstip t een resterende looptijd gelijk aan $\tau+1$, op tijdstip $t+1$ één tijdseenheid minder tot expiratie. Voor alle indices geldt dus:

$$X_{i\tau}(t+1) = X_{i,\tau+1}(t) \quad 0 \leq \tau \leq T-1$$

Uiteindelijk betekent dit dat $\Pi(t+1)$ als volgt geschreven kan worden:

$$\Pi(t+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{\tau=1}^T X_{i\tau}(t) \cdot c_{i,\tau-1}(t+1) + (1-\psi) \sum_{i=1}^{N-1} D_{i\tau}(t+1) \cdot c_{i\tau}(t+1)$$

Aan de hand van de vorige paragraaf vinden we de volgende eerste orde benadering voor de waarde van de portefeuille op tijdstip $t+1$:

$$\begin{aligned} \Pi(t+1) \doteq \tilde{\Pi}(t+1) &= \sum_{i=1}^N \sum_{\tau=1}^T X_{i\tau}(t) \cdot (c_{i,\tau-1}(t+1, S_{i,t}) + \Delta_{i,\tau-1}(t+1) \cdot \underline{r}_{i,t+1}) \\ &\quad + (1-\psi) \sum_{i=1}^{N-1} D_{i\tau}(t+1) \cdot (c_{i\tau}(t+1, S_{i,t}) + \Delta_{i\tau}(t+1) \cdot \underline{r}_{i,t+1}) \end{aligned}$$

Na conditioneren naar $\mathcal{F}_t = \{D_i(s), r_{i,s} | 1 \leq i \leq N, s \leq t\}$ zijn alleen de onderstreepte grootheden nog stochastisch. We constateren dat $\tilde{\Pi}(t+1)$ in de volgende vorm geschreven kan worden:

$$\tilde{\Pi}(t+1) = \alpha + \beta^T r_{t+1} + \gamma^T D_T(t+1) + D_T^T(t+1) \cdot \text{diag}(\delta) \cdot r_{t+1},$$

waarbij $r_{t+1} = (r_{1,t+1}, \dots, r_{N,t+1})^T$ en $D_T(t+1) = (D_{1T}(t+1), \dots, D_{N-1,T}(t+1), 0)^T$. Verder zijn de vectoren $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^N$. Onderzoek in de transactiebestanden heeft opgeleverd dat de eerste twee momenten van $D_T(t+1)$ en r_{t+1} zwak gecorreleerd²¹ zijn. We zullen derhalve aannemen dat deze correlaties gelijk zijn aan nul. Om de verwachting en variantie van $\tilde{\Pi}(t+1)$ af te leiden zullen we de verwachtingen en varianties van $D_T(t+1)$ en r_{t+1} nodig hebben. De verwachting en covariantiematrix van r_{t+1} gegeven \mathcal{F}_t kunnen aan de hand van de Appendix - Modelling Huizenprijsindex samengesteld worden. We duiden deze respectievelijk aan met μ_r en Σ_r . Vervolgens hebben we een betrekking nodig voor het gemiddelde en de variantie van de vector $D_T(t+1)$. Hiertoe voeren we eerst de volgende formules in:

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E((Y_1, \dots, Y_{N-1}, 0)^T | \mathcal{F}_t) & \mu_n &= E((n_{1t}, \dots, n_{N-1,t}, 0)^T | \mathcal{F}_t) \\ \Sigma_Y &= \text{Var}((Y_1, \dots, Y_{N-1}, 0)^T | \mathcal{F}_t) & \Sigma_n &= \text{Var}((n_{1t}, \dots, n_{N-1,t}, 0)^T | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

We gaan er hierbij van uit dat de index-gecorrigeerde verkoopprijs van een bepaald huis onafhankelijk is van dat van een ander huis. De matrix Σ_Y zal dus een diagonaalmatrix zijn. Tevens worden de vectoren $(n_{1t}, \dots, n_{N-1,t})^T$ en $(Y_1, \dots, Y_{N-1})^T$ onafhankelijk verondersteld. De informatie die benodigd is om de verwachtingen en varianties van deze vectoren samen te stellen kan in de Appendix - Modelling vraag naar waardedelingshypotheek gevonden worden. We herhalen eerst de volgende rekenregels die gelden voor algemene stochasten X en Y, mits uiteraard hun eerste twee momenten eindig zijn:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E(X|Y)) \\ \text{Var}(X) &= \text{Var}(E(X|Y)) + E(\text{Var}(X|Y)) \end{aligned}$$

Dit levert voor de conditionele verwachting en variantie van de vector $D_T(t+1)$:

$$\begin{aligned} \mu_D &= E(D(t+1) | \mathcal{F}_t) = k m_R m_{t+1} \cdot \text{diag}(\mu_Y) \cdot \mu_n \\ \Sigma_D &= \text{Var}(D(t+1) | \mathcal{F}_t) = k^2 m_R^2 m_t^2 \cdot \text{diag}(\mu_Y) \cdot \Sigma_n \cdot \text{diag}(\mu_Y) + k m_R m_t \cdot \text{diag}(\mu_n) \cdot \Sigma_Y \end{aligned}$$

Uiteindelijk krijgen we dan voor de verwachting en variantie van $\tilde{\Pi}(t+1)$, gegeven \mathcal{F}_t :

$$\begin{aligned} E(\tilde{\Pi}(t+1) | \mathcal{F}_t) &= \alpha + \beta^T \mu_r + \gamma^T \mu_D + \mu_D^T \cdot \text{diag}(\delta) \cdot \mu_r \\ \text{Var}(\tilde{\Pi}(t+1) | \mathcal{F}_t) &= \text{Var}_D E(\tilde{\Pi}(t+1) | \mathcal{F}_t, D_T(t+1)) + E_D \text{Var}(\tilde{\Pi}(t+1) | \mathcal{F}_t, D_T(t+1)) \\ &= (\gamma + \text{diag}(\delta) \cdot \mu_r)^T \Sigma_D (\gamma + \text{diag}(\delta) \cdot \mu_r) + \beta^T \Sigma_r \beta + \text{tr}(A \Sigma_D) + \mu_D^T A \mu_D \end{aligned}$$

²¹ Ter illustratie: de correlatiecoëfficiënt van de transactiepreizen van eengezinswoningen in de Regio West met het rendement op de index in de betreffende maand, was in 1999 weliswaar significant, maar gelijk aan 0.06.

Hierbij is de matrix $A = \text{diag}(\delta) \cdot \Sigma_r \cdot \text{diag}(\delta)$.

De hieruit volgende Delta-Normal portefeuille VaR benadering is dan gelijk aan:

$$\text{VaR}_{1-\alpha}(t) \approx -E(\tilde{\Pi}(t+1) | \mathcal{F}_t) - \sqrt{\text{Var}(\tilde{\Pi}(t+1) | \mathcal{F}_t)} \cdot N^{-1}(\alpha)$$

Om de kwaliteit van deze benadering te onderzoeken, hebben we vijf simulaties gedraaid, waarin de portefeuille opgebouwd is uit opties met een looptijd van 10 jaar. Voor het uitzetten van de opties is het uitgezette optievolume in een maand gelijk gekozen aan het inkomende optievolume. Vervolgens hebben we nadat de portefeuille de eerste tien jaar opgebouwd is, zodat deze alle soorten opties kan bevatten, 5000 trekkingen gedaan uit de verdeling van de verandering van de portefeuille, en de hiermee geschatte VaR vergeleken met de Delta-Normal benadering. De resultaten volgen in onderstaande tabel:

| <i>Simulation run</i> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <i>Delta-Normal VaR95%</i> | 2.81 | 1.20 | 3.39 | 3.28 | 2.73 |
| <i>VaR95%</i> | 3.25 | 1.20 | 1.62 | 4.98 | 5.23 |
| <i>95% c.i. for VaR95%</i> | (3.22,3.31) | (1.17,1.23) | (1.58,1.68) | (4.91,5.05) | (5.10,5.34) |

Tabel 7.B.1: Delta-Normal VaR benadering en de VaR op basis van simulatie (in miljoenen gulden)

De Delta-Normal benadering blijkt wisselend te presteren: de VaR kan zowel over- als onderschat worden. Volgens het akkoord van Basel dient de bank tegenover een marktportefeuille minimaal reservekapitaal ter grootte van het maximum van de VaR op dagbasis, en de VaR over de afgelopen 60 handelsdagen aan te houden, vermenigvuldigd met een multiplicatiefactor, welke minimaal gelijk is aan 3. Indien we de Delta-Normal benadering met een factor 3 vermenigvuldigen, zien we dat we, in ieder geval voor deze 5 simulaties, ruim boven de echte VaR zitten. De reden waarom de benadering wisselend presteert, blijkt niet te liggen in de aanname van de normale verdeling, maar in de eerste orde benadering. Indien we namelijk de empirische verdeling van de verandering in marktwaarde van de portefeuille bekijken, vinden we de volgende resultaten voor de skewness en kurtosis van deze verdeling:

| <i>Simulation run</i> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------------|------|------|------|------|------|
| <i>Skewness</i> | 0.01 | 0.10 | 0.04 | 0.03 | 0.00 |
| <i>Kurtosis</i> | 2.95 | 3.06 | 3.02 | 3.08 | 3.08 |

Tabel 7.B.2: Skewness en kurtosis van de empirische verdeling van verandering in marktwaarde van de portefeuille

De skewness en kurtosis van een stochast X met verwachting μ en variantie σ^2 zijn respectievelijk als volgt gedefinieerd:

$$s = \frac{E((X - \mu)^3)}{\sigma^3} \quad \kappa = \frac{E((X - \mu)^4)}{\sigma^4}$$

Deze grootheden zijn voor een normale verdeling respectievelijk gelijk aan 0 en 3. Voor de bekeken simulaties is hier vrijwel aan voldaan. Indien we toetsen of deze verdelingen normaal zijn, bijvoorbeeld door te toetsen op de skewness, kurtosis, of door gebruik te maken van de Kolmogorov-Smirnov toets, wordt normaliteit dan ook ruimschoots aangenomen. Indien we de exacte verwachting en variantie van $\Pi(t)$ weten, kunnen we dan ook een zeer goede benadering voor de VaR afleiden. Wegens tijdsgebrek zullen we in de volgende paragraaf alleen aangeven hoe de verwachting en variantie van de portefeuille berekend kunnen worden.

7.B.3. De eerste twee momenten van een call optie

In deze paragraaf zullen we een methode afleiden om de eerste twee momenten van een Europese call optie op de huizenprijnsindex afleiden. Deze kunnen gebruikt worden om de VaR van een optie te benaderen. Ter herinnering is deze als volgt impliciet gedefinieerd:

$$P(c(\tau, S_{t+1}, K) - c(\tau+1, S_t, K) \leq \text{VaR}_{1-\alpha}(t) | \mathcal{F}_t) = \alpha$$

In de Delta-Normal benadering uit de vorige paragraaf werd een eerste orde benadering voor de waardeverandering afgeleid. Deze eerste orde benadering werd normaal verdeeld verondersteld, zeg met verwachting μ'_c en standaarddeviatie σ'_c , waardoor de VaR als volgt kon worden benaderd:

$$\text{VaR}_{1-\alpha}(t) \doteq \mu'_c + \sigma'_c \cdot N^{-1}(\alpha)$$

Aangezien de prijs van een optie zeker geen lineaire functie is, bleek deze benadering inderdaad wisselende resultaten te geven voor de VaR van de portefeuille van de bank. Wel bleek dat de verdeling van de waardeverandering van de portefeuille zeer goed benaderd kon worden door een normale verdeling. Dit betekent dat indien de verwachting en standaarddeviatie van de portefeuille exact berekend kan worden, we de VaR veel beter kunnen benaderen dan de Delta-Normal benadering. De reden waarom in de literatuur voornamelijk eerste en tweede-orde benaderingen teruggevonden worden voor het benaderen van de VaR is waarschijnlijk dat deze eenvoudigere uitdrukkingen opleveren. We zullen ons in deze paragraaf alleen richten op het afleiden van de formule waarmee de eerste twee momenten (en eventuele covarianties met andere calls) berekend kunnen worden.

We zullen uitgaan van de volgende situatie:

$$\ln \frac{S_{t+k}}{S_t} | \mathcal{F}_t \sim N(\mu(k), \sigma^2(k))$$

De resultaten die hier afgeleid worden kunnen eenvoudig gegeneraliseerd worden voor het tijdreeksmodel met veranderende regimes. De berekening van de eerste twee momenten van de prijs van een optie in de toekomst, $E(c(\tau, S_{t+1}, K) | \mathcal{F}_t)$ en $E(c(\tau, S_{t+1}, K)^2 | \mathcal{F}_t)$, en eventuele covarianties met andere calls, blijkt te steunen op een verwachting van de volgende vorm:

$$E(e^{cX+dY} N(a+bX) \cdot N(d+eY))$$

$$(X, Y)^T \sim N\left((0,0)^T, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$$

In de appendix voor de multilognormale verdeling wordt deze verwachting expliciet uitgerekend. Gezien het feit dat de waardeverandering van de totale portefeuille vrij goed benaderd kan worden door een normale verdeling, zoals in de vorige paragraaf gebleken is, kunnen we met dit resultaat de VaR van de portefeuille zeer goed benaderen. Wegens tijdsgebrek is deze benadering echter niet geïmplementeerd.

Bibliografie

- Basle Committee on Banking Supervision (January 1996). *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*.
- Baxter, M.W. and A.J.O. Rennie (1996). *Financial Calculus, an Introduction to derivative pricing*, Cambridge University Press.
- Björk, T. (1998). *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press.
- Black, F. and M. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, p. 637-654.
- Boness, A.J. (1964). Elements of a Theory of Option Value, *Journal of Political Economy* 72: 163-175.
- Brons, A.L. (2000). *Het prijzen van 10-jaars optiestructuren die ten grondslag liggen aan de waardedelingshypotheek*. Interne rapportage Centrum voor Toegepaste Wiskunde, Rabobank Groep.
- Bussel, A.P.J.M. van (1998). *Valuation and interest rate risk of mortgages in the Netherlands*, Ph.D. dissertation, University of Maastricht.
- Campbell, John Y., Lo, Andrew W. and A. Craig McKinlay (1997). *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- Case, B., Pollakowski, H.O. and Wachter, S.M. (1997). Frequency of Transaction and House Price Modeling, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 14: p. 173-187.
- Case, Karl E. and Robert J. Shiller (1990). Forecasting Prices and Excess Returns in the Housing Market, *AREUEA Journal* 18, p. 253-273.
- Case, Karl E. Jr., Shiller, Robert J. and Weiss, Allan N. (1993). Index-Based Futures and Options Markets in Real Estate, *Journal of Portfolio Management*, Winter 1993: p. 83-92.
- Clapp, J.M., Giacotto, C. and Tirtiroglu, D. (1991). Housing Price Indices: Based on All Transactions Compared to Repeat Subsamples, *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*, 19(3): p. 270-285.
- Dempster, A.P., N.M. Laird and D.B. Rubin (1977). Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 39: p. 1-38.
- Drezner, Z. (1978). Computation of the Bivariate Normal Integral, *Mathematics of Computation*, 32 (January): p. 277-279.
- Eichholtz, P.M.A. (1997). Het risico van een eigen huis, *Economische Statistische Berichten*, 15-10-1997: p. 776-780.
- Geerlings, J.A.C. (1999a). Huizenprijsindex voor de Nederlandse woningmarkt: *Validatie NVM- en Kadaster-data*. Interne rapportage Centrum voor Toegepaste Wiskunde, Rabobank Groep.
- Geerlings, J.A.C. (1999b). Huizenprijsindex voor de Nederlandse woningmarkt: *Uitwerking en evaluatie van de ontwikkelde indices*. Interne rapportage Centrum voor Toegepaste Wiskunde, Rabobank Groep.
- Geltner, David (1991). Smoothing in Appraisal-Based Returns, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 4: p. 327-345.
- Greene, William H. (1997). *Econometric Analysis, Third Edition*, Prentice-Hall International, Inc.
- Groenevelt, R.B., Westerop, S. van, Capelleveen, H. Van, Geerlings, J.A.C. en D. Salomé (2000). Huizenprijsindex voor de Nederlandse woningmarkt: *Segmentatie van de woningmarkt*. Interne rapportage Centrum voor Toegepaste Wiskunde, Rabobank Groep.
- Hamilton, James D. (1994). *Times Series Analysis* p. 677-703, Princeton University Press.
- Hull, John C. (2000). *Options, futures and other derivatives*, 4th Edition, Prentice-Hall International, Inc.
- Kocken, T. (1997). *Financial Risk Management*, Uitgeverij Tutein Nolthenius, Den Bosch.
- Longin, François M. (1996). The Aymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns, *Journal of Business*, 69:3, p. 383-408.
- Mahieu, R. en Bussel, A. van (1996). A repeat sales index for residential property in the Netherlands, *working paper*, Limburg Institute of Financial Economics.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: efficient diversification of investment*. John Wiley.
- Meulenberg, R.M. en Vondenbusch, C. (1999). *Haalbaarheidsonderzoek Waardedelingshypotheek*. Interne rapportage Huis & Hypotheekadvies, Rabobank Groep.
- Montgomery, D.C. (1997). *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons.
- Mikosch, T. (1998). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific.
- Øksendal, B. (1995). *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag.

- RiskMetrics Technical Manual (1996), Fourth edition, JP Morgan.
- Samuelson, Paul A. (1965). Rational Theory of Warrant Pricing, *Industrial Management Review* 6: 13-31.
Reprinted in Paul A. Cootner, *The Random Character of Stock Prices* (Cambridge, MA: MIT Press).
- Shiller, Robert J. (1993). *Macro Markets: Creating institutions for Managing Society's Largest Economic Risks*. Clarendon Lecture Series. Oxford University Press.
- Shiller, Robert J. and Allan N. Weiss (1999). Home Equity Insurance, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 19:1, p. 21-47.
- Smithson, Charles W. (1998). *Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, p. 218-238.
- Sprenkle, Case M. (1964). Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences, *Yale Economic Essays* 1, p. 179-231. Reprinted in Paul A. Cootner, *The Random Character of Stock Prices* (Cambridge, MA: MIT Press).
- Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*, Cambridge University Press.
- Wilmott, P. (1998). *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*, John Wiley & Sons.